数 学 百 科 辞 典

日本数学会 编



科学出版社

岩 波

数 学 辞 典

第 2 版

日本数学会編集

岩波書店

数学百科辞典

日本数学会编

*

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

长春新华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年 7 月第一版　　开本：787×1092 1/16

1984年7月第一次印刷　　印张：114　插页：4

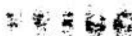
印数：0001—28,400　　字数：2,886,000

统一书号：17031·185

本社书号：3490·17—1

定价：27.80 元

科技新书目：68-5



目　　录

一、数学基础和数理逻辑

二、集合论、一般拓扑学和范畴论

三、代数学(域不和模)

四、群论(有限群、拓扑群、Lie 群、表示论)

五、数　论

六、几何学(Euclid 几何学和射影几何学)

七、微分几何学(微分流形和复流形)

八、代数几何学

九、拓扑学(同调论、同伦论、纤维丛和微分拓扑学)

十、分析学(微积分、测度论、无穷级数、Fourier 分析、位势论和变分法)

十一、复变函数

十二、泛函分析

十三、微分方程、积分方程和函数方程

十四、特殊函数

十五、计算数学

十六、概率论

十七、统计数学

十八、数学规划、运筹学、信息论和控制理论

十九、力学和理论物理

二十、数学史和数学家

一、数学基础和数理逻辑

数学基础 [英 foundations of mathematics 法 fondements des mathématiques 德 Grundlagen der Mathematik 俄 основания математики 日 数学基礎論] 十九世纪末引入的集合的概念虽则不久即引起了众所周知的悖论†,却逐渐地被认为是最基本和最有用的数学概念之一. 例如，和作为自然数的基本性质的综合而提出的 Peano 公理系统†相对，Dedekind 在自然数理论([4])中从集合与对应出发而把自然数的体系构造出来了. Dedekind 的无理数理论([5])，则把实数作为有理数的特殊集合(分割)来定义. 因此，数学上的概念的建立由于使用集合概念而变得完善并且统一起来了.

但是，集合论中某些最常使用的论证方法(这些论证方法同时也是数学中最有用的并且几乎属于形式逻辑本身的基本框架的)与导致悖论的那些论证方法十分相似，而悖论几乎可以在形式逻辑范围内出现，这就促使人们对数学中的概念构成法以及数学论证方法进行数学的思考. 于是在本世纪初，便产生了一个新的数学领域——**数学基础** (foundations of mathematics)，相应于数学究竟是什么这个问题的回答，数学基础从产生的初期开始便分成三个不同的流派：L. E. J. Brouwer 的直觉主义，B. Russell 的逻辑主义，D. Hilbert 的形式主义.关于数学基础产生的根源,即集合概念,人们认为 G. Cantor 所给出的"定义"过于朴素，从而提出对集合论应根据公理主义†的观点来处理(→公理集合论).

【逻辑主义】 **逻辑主义** (logicism) 认为数学为逻辑学的一个分支,这主要是由 Russell 提出的. 他还主张悖论来自对各种概念的"类型"的忽视. 逻辑主义不外以这个主张为背景.

按照他的主张,数学乃是对任意的东西、任意的性质都能成立的事项进行形式的(与内容无关的)处理的学问. 但是,形式地研究对任意的东西、任意的性质都能成立的事项的学问,自古以来便称为逻辑学. 根据这一点，他便主张数学不外是逻辑学的一个分支.他说"逻辑学是数学的青年时代而数学是逻辑学的壮年时代".

Russell 从这种观点而构造数学时，曾作下述考虑.通常的语言既冗长又不精确,当在逻辑学中使用它们时，常常导致错误. 为了对这个问题进行正确而完全的处理，使用"符号"是绝对必要的. 因此,从这种观点出发，Russell 试图用所谓符号逻辑†的形式来重新构造数学.

为把数学完全符号化而进行的努力，可以追溯到 G. W. Leibniz，他对此写出了 "Dissertatio de arte combinatoria" (1666) 等论文.以后，A. de Morgan, G. Boole, C. S. Peirce, E. Schröder 等均研究过，但与今日的符号逻辑相近的内容，则是由 G. Frege 及 G. Peano 开始建立的，Russell 整理他们的研究结果而作为他自己研究的基础. 他的成果发表在与 A. N. Whitehead 合著的杰作《数学原理》(Principia Mathematica, 三卷,初版 1910—1913,再版 1925—1927)一书中. 在这里,他从逻辑学的基本法则出发建立了自然数理论、实数理论以及解析几何学等.

如果他的这个尝试能够理想地进行，那末悖论的问题便可得到完全的处理. 既然逻辑学研究的是对任意的东西、任意的性质都经常成立的事项,那末,当然可以认为不可能出现悖论.

但是，作者从这个观点构造数学时，不得不假设了一些"不满意"的公理. 他按下述方式引入了类型的概念：使用直到当时为止的对象全体的概念所定义的对象，应该比直到当时为止的对象具有更高的类型,从而,悖论的发生便是由于无视这种类型的缘故. 照他所说，设给出某些对象的集合 M，用 M 所定义的对象将

比M的元素具有更高的类型，从而不可能作为M的元素．各种的悖论便是违背这个原理的结果．

根据这种观点，他所使用的符号逻辑系统便是今日所谓的分歧类型论†．但是，这却带来了不便．试举一例，设我们把有理数的理论在类型论中展开，于是，每个实数可认为是关于有理数的谓词†．如果表达这个谓词的公式只包含以全体有理数为变域的变元的量词†，则相应的实数称为**直谓的**(predicative)，否则，该实数便是**非直谓的**(impredicative)．按照 Russell 的说法，非直谓的实数应当比直谓的实数具有更高的类型，这就使实数理论非常复杂．因此，Russell 提出了**可化归性公理**(axiom of reducibility)，即对于任何谓词都存在一个等价的直谓谓词．但这个公理却给人们一个人为的印象，Russell 本人也对它表示不满意．要把它作为逻辑学的基本原理总是很费解的．

Russell 还假设了无穷公理†和选择公理†，而这也是很成问题的，人们要问：把它们作为根本原理到底有什么依据呢？在考察了《数学原理》一书的哲学背景之后，H. Weyl 对该书作如下的评论："与其说数学是建立在逻辑之上的，还不如说是建立在逻辑学家所创造的天堂之上的"．然而，该书中所定型化的逻辑以及后来的逻辑主义者 F. P. Ramsay 所定型化的类型论，仍然是数理逻辑的一个重要课题．

【直觉主义】 **直觉主义**(intuitionism)主张数学的对象及真理并不能脱离数学的理性或直觉而独立存在，它们应当能够通过理性的活动或直觉的活动而直接得到．持这种观点的数学家，以前有十九世纪的 L. Kronecker, H. Poincaré．本世纪初的 É. Borel, H. Lebesgue, H. H. Лузин 亦给出类似的数学批判，但是，由于下述理由，他们的学说常被说成是**半直觉主义**(semi-intuitionism)或**法国经验主义**(French empiricism)．Brouwer 更狭义地解释直觉主义，很明确地规定其立场．他坚决反对 Hilbert 的形式主义，与之作激烈的争论．因此，现在"直觉主义"这个名词都是指 Brouwer 的学说而言．

Brouwer 对数学中常用的逻辑采取批判的眼光，其结果认为不允许无限制地使用**排中律**(law of excluded middle) $P\vee\neg P$．按照他的观点，命题"具有性质P的自然数或者存在或者不存在"，仅当实际给出了具有性质P的自然数时，或实际上证明了如果假设存在具有性质P的自然数则导致矛盾时，才可以认为它成立．当未能确定是哪一种情况时，上述命题既不真又不假，亦即排中律未必成立，更不能作为一般的逻辑法则．又如果由假定某一命题P的否定而导致矛盾，因而证明了P的双重否定$\neg\neg P$，这时通常便断定P成立(反证法)，但是 Brouwer 拒绝这种推论．例如，设P为存在命题$\exists xA(x)$，它的双重否定$\neg\neg\exists xA(x)$是指：如果没有x满足$A(x)$，将导致矛盾．但由此并不能得到实际作出满足$A(x)$的x的方法．因此，他拒绝承认$\neg\neg P\to P$为逻辑法则．拒绝承认排中律$P\vee\neg P$及(实际上是一样的)$\neg\neg P\to P$，这是 Brouwer 逻辑与传统数学中的逻辑的主要差异点，其他的差异都是由此派生出来的．

当由这种观点重新构造数学时，哪些部分可以保留，哪些部分有待修正，这将是很有兴趣的问题．看来是不会得出十分完美的理论的．但是，直觉主义逻辑†仍将是数理逻辑研究中的一个重要的课题．

【形式主义】 为了要解决以集合论中的悖论为出发点的数学基础的问题，Hilbert 使用他把数学作为形式的东西而考虑的公理化方法．就公理主义†而言，是把数学看作为由公理系统所规定的形式演绎系统．但是，在其基础中却假定了包括初等数论和朴素集合论在内的"逻辑"．现在的问题是：对数学的公理系统而言，已经在集合论和逻辑中出现了悖论．因此，应该包括逻辑与集合论方法在内把数学公理化，而对它加以考察．对在这种意义下彻底形式化了的数学来证明其相容性从而解决问题，这便是 Hilbert 的规划．这种考虑方法称为**形式主义**(formalism)．

依公理主义的观点，例如，在证明 Euclid 几何的公理系统的相容性时，作为其证明的手

段，使用了实数；亦即通常所说“Euclid 几何无矛盾”，其内容实际是：“如果实数理论无矛盾，则 Euclid 几何亦无矛盾”. 这里所表示的事实是 Euclid 几何学关于实数理论的**相对相容性**(relative consistency). 我们所证的相容性，一般都是相对相容性. 所谓**相容性的证明** (consistency proof)，不外是把关于所讨论的数学理论的相容性，用一般的方法还原到更确实的基础上去. 几乎一切数学证明都以逻辑及集合论方法为根据，对这两者进行公理化的数学，其相容性应该还原于什么基础呢？其方法又是什么呢？这些当然是成问题的. Hilbert 的回答是：提出**有穷观点**(英 finite standpoint 德 finite Einstellung) 与**元数学** (英 metamathematics 德 Metamathematik).

所谓有穷观点只以能够由有限次运算得出的事实为基础，实质上与直觉主义的基本观点是相同的. 有穷观点所容许的方法，现在亦称为**构造性方法** (constructive method).

元数学又称为**证明论**(德 Beweistheorie)，它的研究对象是数学证明本身. Hilbert 首先强调了它的重要性. 但这个理论不仅对数学系统的相容性证明是有用的，而且，其方法实际上远在出现形式主义以前很久就已在数学中使用了. 例如，射影几何† 中的对偶原理† 便是关于射影几何的证明论定理 (把射影几何的公理及证明作为考察对象所得到的定理) 而不是射影几何的定理 (由射影几何的公理推导所得到的定理).

按照 Hilbert 规划，人们必须用有穷观点所容许的方法来发展证明论，从而证明公理化了的数学的相容性. 为此目的，人们必须把作为证明论的对象的各个公理化的数学理论用符号逻辑† 的方法进行形式化. 今后我们把这样地用符号逻辑的方法形式化的理论称为**形式系统** (formal system).

【形式主义的数学基础中的若干结果】 直到现在为止，根据关于数学相容性的证明的 Hilbert 规划而获得的最卓越成果之一，是 1936 年发表的 G. Gentzen 的纯数论的相容性证明 ([9]). 不但如此，作为在这个方向上获得的明显结果，这个相容性证明还包括了迄今的相容性证明的最大范围. 然而，形式主义证明论的方法已表明在研究数学理论的逻辑结构中是非常有效的，并且已在数学的形式化方法方面，在相容性的证明方法方面，得出很多含有重要启示的结果，而且在符号逻辑的研究以及公理化集合论的研究等方面，这个方法也是不可少的. 我们给出一些例子.

1) **Gödel 的不完备性定理** (Gödel's incompleteness theorem). K. Gödel (1931, [8]) 证明了如果对自然数理论形式化而获得的系统是相容的，则该系统必包含一逻辑公式† A，使得 A 和它的否定 $\neg A$ 在系统中都不能证明. 他原先是在系统为 **ω 相容的**(英 ω-consistent，德 ω-widerspruchsfrei) 假定之下证明这条定理的. 这个条件，对形式系统而言，比简单相容性条件更强，但是，J. B. Rosser (1936, [15]) 成功地用简单相容性代替了 ω 相容性. 这个定理不仅表明作为自然数理论的公理而言通常的公理系统是不完备的，而且表明对自然数理论的形式化系统(在有穷观点下)，在相容性的范围内无论怎样添加公理，它仍然是不完备的.

Gödel 在获得上述结果时还研究了所用的方法，从而得到了以下重要结果：设 S 为包含自然数理论的形式化系统(在有穷观点下)，如果 S 是相容的，则只利用 S 中可形式化的论证不可能证明 S 的相容性. 这就是说，例如，要从有穷观点来证明自然数理论的形式化系统的相容性，就不能不用到一些有穷观点容许的但形式化自然数理论所不容许的某些论证. 但是，这个所谓相容性的概念，当用形式命题表示时，是和表示的内容有关系的，对此西村敏男 ([11]) 作了研究.

2) **纯数论的相容性的证明** (consistency proof of pure number theory). G. Gentzen ([9]) 所说的**纯数论**(英 pure number theory 德 reine Zahlentheorie) 是指不使用解析中的辅助手段 (例如，无理数和无穷级数) 的自然数的理论. 因此，它和基于以集合论为背景的 Peano 公理系

统†的自然数理论是不同的(→数).

对纯数论的完全系统相容性的证明首先是由 G. Gentzen (1936, [9]) 给出的. W. Ackermann (1940, [16]) 对使用 Hilbert 的 ε 符号†的系统给出了另一证明. 竹内外史 (1955, [17]) 证明了关于一级谓词逻辑的 Gentzen 基本定理†对于某种特殊的类型论†仍然成立,作为推论便得到了自然数理论的相容性.

按照 1) 中提到的 Gödel 的第二个结果, 在纯数论的相容性的证明中, 必须使用纯数论以外的某种论证方法. 在上面提到的纯数论的三种相容性证明中, 使用了直到 ε_0 为止的超限归纳法,这里 ε_0 为第一个 ε 数†,但是,除这个论证外,所用的其他论证均可在纯数论中表示出来. 这就间接地表明了, 直到 ε_0 为止的超限归纳法的正确性在纯数论中是无法证明的. 的确, Gentzen ([18]) 给出了这一事实的直接证明. 另一方面,直到序数 $<\varepsilon_0$ 为止的超限归纳法的正确性却可以在纯数论范围内还原于数学归纳法.

再说, 纯数论相容性的证明方法不限于超限归纳法. 事实上, Gödel (1958, [19]) 利用了"自然数域上有穷类型的可计算函数" (德 berechenbare Funktion endlichen Typs über den naturlichen Zahlen) 而对自然数论的相容性给出了另一种证明.

进一步限制纯数论, 我们便可以得到较弱的自然数理论, 它们的相容性可不必使用直到 ε_0 为止超限归纳法这种特殊论证, 而只使用有穷方法便可以证明.例如, M. Presburger ([20]) 证明了只以数的加法为其唯一运算的系统的相容性. Ackermann (1924, [21]), J. von Neumann (1927, [22]), J. Herbrand (1931, [23]) 和小野勝次 (1938, [24]) 证明了对数学归纳法†公理的使用加以各种限制的系统的相容性.

作为推广有穷观点的一例, K. Schütte ([25]) 给出了包括"无穷归纳" (德 unendliche Induktion) 的数论系统的相容性的证明. 他设法找到一种观点以使这种证明成为可能.

3) 分析学的相容性 (consistency of analysis). 在这个领域里,虽然作了许多探索工作,但是, 从形式主义观点看还没有获得十分满意的结果,最近得到的 C. Spector (1962, [26]) 的成果是这种尝试之一.

4) 公理集合论†. 存在各种不同类型的公理系统(→公理集合论). 要给出任何一个集合论公理系统全体的相容性证明被认为是很困难的问题,但是,已经得到了有关这些公理系统的相对相容性或独立性等的许多有趣结果.

5) Skolem-Löwenheim 定理. 这是指下述的元数学定理:在一阶谓词逻辑†中已给出至多为可数多个公理,如果该公理系统是相容的,则恒存在一个个体域†,它满足所有这些公理且具有可数多个个体.

例如, 可以认为公理集合论是在一阶谓词逻辑中的、具有可数多个公理的形式系统,因此,根据这个定理, 如果集合论的公理是相容的,那么,便有一个具有可数多个元素的个体域,它满足所有这些公理. 这样的域称为公理集合论的**可数模型**(enumerable model). 另一方面,从集合论的公理可以证明集合的个数比可数多个更多. 这对于上述的可数模型当然也成立. 但是,把集合论翻译为模型时, 所谓集合不过就是模型的元素,从而其全体只有可数多个.假定集合论无矛盾而得到的这个事实通常称为 **Skolem 悖论** (Skolem's paradox)

但是, Skolem 悖论并不意味着公理集合论含有矛盾. 事实上,当我们说"存在比可数多个更多的集合"时,"可数多个"一词是数学的术语, 应作为公理集合论这个形式系统中的形式谓词来理解. 然而, 当我们说可数模型时,"可数"一词是当我们考察公理集合论时所使用的元数学术语,是按实质内容使用的术语.这两者当然应该区别. 两种不同解释的混淆便导致"悖论"的产生.

6) 关于自然数不可能刻划的 Skolem 定理. Th. Skolem ([29]) 证明: "在一阶谓词逻辑中用至多为可数多个公理的系统来刻划自然数系统是不可能的". 更确切地说,给定对自

然数成立的至多为可数多个公理，恒存在另一个线性有序集†，满足所有这些公理，并且作为有序集而言不与自然数全体同构.

因此，Gödel 的不完备定理，Skolem 悖论以及上述结果似乎暗示了对数学理论的形式化方法存在某种限制.

【参】 [1] 黒田成勝，数学基礎論，岩波講座数学，1935； [2] 竹内外史，数学基礎論，現代数学講座，共立出版，1957; [3] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand, 1952; [4] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Friedrich Vieweg, Braunschweig, 1888; [5] R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg, Braunschweig, 1872; [6] B. Russell, Introduction to mathematical philosophy, Allen and Unwin, Macmillan, 1919; [7] A. Heyting, Intuitionism, North-Holland, 1956; [8] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. Phys., **37** (1931), 173—198; [9] G. Gentzen, Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann., **112** (1936), 493—565; [10] D. Hilbert-P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, Springer, I 1934, II 1939; [11] T. Nishimura (西村敏男), The consistency and the impredicative statement, Ann. Japan Assoc. Philos. Sci., 2 (1963), 14—26; [12] S. C. Kleene, Mathematical logic, John Wiley, 1967; [13] J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967; [14] O. Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Karl Alber, 1954; [15] J. B. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church, J. Symbolic Logic, **1** (1936), 87—91; [16] W. Ackermann, Zur Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, Math. Ann., **117** (1940), 162—194; [17] G. Takeuti (竹内外史), On the fundamental conjecture of GLC I, J. Math. Soc. Japan, **7** (1955), 249—275; [18] G. Gentzen, Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie, Math. Ann., **119** (1943), 140—161; [19] K. Gödel, Über eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica, **12** (1958), 280—287; [20] M. Presburger, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt, C. R. du I Congrès des Math. des Pays Slaves, Warsaw (1929), 92—101, 395; [21] W. Ackermann, Begründung des "tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Math. Ann., **93** (1924), 1—36; [22] J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, Math. Z., **26** (1927), 1—46; [23] J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'arithmétique, J. Reine Angew. Math., **166** (1931), 1—8; [24] K. Ono (小野勝次), Logische Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **3** (1938), 329—389; [25] K. Schütte, Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie, Math. Ann., **122** (1951), 369—389; [26] C. Spector, Provably recursive functionals of analysis: a consistency proof of analysis by an extension of principles formulated in current intuitionistic mathematics, Recursive function theory, Amer. Math. Soc., Proc. Symposia in Pure Math., **5** (1962), 1—27; [27] L. Löwenheim, Über Möglichkeiten in Relativkalkül, Math. Ann., **76** (1915), 447—470; [28] T. Skolem, Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, 5 Congress der Skandinavischen Mathematiker, Helsingfors (1923), 217—232; [29] T. Skolem, Über die Nichtcharakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschliesslich Zahlenvariablen, Fund. Math., **23** (1934), 150—161; [30] A. Tarski, Logic, semantics, metamathematics, Clarendon Press, 1956.

公理 [英 axiom 法 axiome 德 Axiom 俄 аксиома 日 公理]【历史】 数学中的各种理论都是以某些命题作为前提，只用它们不用其他假设而展开的. 这些命题便称为该理论的公理. 下面将叙述此概念的历史发展并把它的意义加以明确.

Thales 到埃及旅行，从那里学回来了测量术，并添加了一些新结果. 埃及测量术所用的事实都是经验的知识，而 Thales 则是使用所谓"由已知结果进行推导"的方法得到了他的一些结果. 这就是希腊几何的开端. 以后，经过了 Pythagoras 学派及 Plato 学院（Academy）的学者们的努力，几何学得到显著的发展，而同时，"由已知结果导出新结果"的方法也有了进展，结果便产生了下述思想："由若干个可认为'完全自明'的命题而推出一切". 根据这一想法把希腊几何系统化了的是 Euclid 的《几何原本》一书. 文艺复兴时期以后，Euclid 的工作成为进一步发展的基础，因而，人们把希腊几何称为 Euclid 几何. 在《几何原本》中，Euclid 把可以认为是完全自明的命题中那些为几何学所特有的称为**公设**(postulate)，而把具有更一般特性的称为**公理**. 也有人把公设与公理两者都称为**普通公理**(common axiom)，后来则统称为公理.

在《几何原本》中第五公设是"平行公理"。它比别的公设、公理叙述更长，并且更复杂些．因此，从古便有人努力想从其他公理导出这条公理来．但是，这些尝试都失败了．Н. И. Лобачевский 和 J. Bolyai 等人转而用第五公设的否定命题作为公理而发展了一种新的几何学，即所谓非 Euclid 几何学．这样的事态变化自然使数学家对于所谓公理的性质有个重新考察的机会．于是，人们便从把公理当作"自明的"想法，逐渐改变为把公理作为"一个理论的前提假设"这种新的理解．把这作为公理的性质，由此而发展其理论，是谓数学，这便是 D. Hilbert 的主张（[1]）．这种观点称为**公理主义**（axiomatism）．它是支配近代数学的根本思想．Hilbert 按照这个想法重新整理了 Euclid 几何而写成了《几何基础》(Grundlagen der Geometrie, 1899）一书．

【公理系统】 如上所述，在公理主义数学中各公理都不外是作为某个理论的出发点的假设．这些公理集合起来便得到这个理论的**公理系统**（system of axioms）．根据公理的性质，其中出现的基本术语是不加定义的，这些就称为**无定义的术语**（undefined term）或**无定义的概念**（undefined concept），其他所有的术语则由它们来定义．对一个给定的理论如果用公理主义的观点来整理，便说是对该理论进行了**公理化**（axiomatize）．还需注意，公理系统确定了一个结构(→结构)．

但是，公理系统只是理论的假设，因此，它的取法具有相当的任意性，为了使得该理论合乎实际，至少公理系统必须不含有矛盾．不含矛盾便称为公理系统的**相容性**（英 consistency, non-contradiction，德 Widerspruchsfreiheit)．也可要求公理系统具有相互**独立性**（independence）；所谓公理 A 对公理 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是独立的，系指 A 的否定 $\neg A$ 与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所成的公理系统是相容的．由公理 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 所成的公理系统是独立的，系指这些公理中任意一个都与其他的公理相互独立．不独立的公理系统含有多余公理，所以可从其中删除多余的公理来简化该系统．

当一个公理系统的任意两个模型都相互同构时，我们便说该系统是**完备的**（complete）或**范畴的**（categorical）(→结构)．例如，由 Hilbert 提出的 Euclid 几何的公理系统（I)—(V）是完备的(→几何基础)．但是，群†、环†、域†等理论的公理系统却不是完备的，因为，存在着不同构的群、环、域等等．对一个给定的理论(例如，实数†理论，Euclid 几何等)进行公理化时，虽然所得的公理系统最好是完备的，但是，把该公理系统分成几个阶段，而对于由中间阶段的不完备的公理系统所确定的各结构进行研究，这也是很重要的(→数学基础)．

〔参〕 [1] D. Hilbert, Axiomatisches Denken, Math. Ann., **78** (1918), 405—415 (Gesammelte Abhandlungen III, Springer, 1935, p. 146—156); [2] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Théorie des ensembles, ch. 1—4 and fascicule de résultats), Actualités Sci. Ind., 1212*c*, 1243*b*, 1258*a*, 1141*d*, Hermann, 1960, 1967, 1966, 1964.

悖论 〔英 paradox 法 paradoxe 德 Paradoxie 俄 парадокс 日 逆理〕 一个论证能够导出与一般判断相反的结果，而要推翻它又很难给出正当的根据时，这种论证称为**悖论**(paradox)．特别是，如果一个命题及其否定均可用逻辑上等效的推理加以证明，而对其推导又无法明确指出错误时，这种矛盾便称为**谬论**（antinomy)．但是，在实用中并未将"悖论"和"谬论"严加区别，而把它们当作同义语使用．(译者注：因此，通常两词均译为"悖论".）

这里我们将叙述与数学有关的悖论．

【集合论中的悖论】 (1) **Russell 悖论**（1903)．我们把集合分成两类：凡不以自身作为元素的集合称为第一类集合．凡以自身作为元素的集合称为第二类集合．每个集合或者为第一类集合或者为第二类集合．设以 M 表示第一类集合全体所成的集合．如果 M 为第一类集合，则 M 本身不能为 M 的元素．但是，根据 M 的定义，第一类集合 M 又必须为 M 的元素．这是矛盾的．另一方面，如果 M 为第二类集合，则

M本身必须为M的元素，但是，根据M的定义，第二类集合M不可能为M的元素．也就是说，不论M为第一类还是为第二类都导致矛盾，这是不合理的．

因为在这个悖论中所使用的论证方法是很简单的，并且是数学中常用的，所以，它在集合论中是有名的．为了从集合论中排除这个悖论，B. Russell 便提出了分歧类型论†．但是，根据这个理论，甚至想发展通常的实数理论也变得很困难（→数学基础）．另一方面，这个悖论以及下述 Burali-Forti 悖论都表明对于集合的定义方法应当加以限制，从而导致公理集合论†的产生．

（2）**Burali-Forti 悖论**（1897）．设W为由序数†全体构成的集合：$W=\{0, 1, 2, \cdots, \omega, \cdots\}$．$W$亦为良序集†（→序数［序数的定义］）．又设$\Omega$为$W$的序数．作为$W$的元素的序数都比$\Omega$小．但是，$W$是一切序数的集合，故序数$\Omega$亦为$W$的元素．因此，$\Omega<\Omega$．而这是矛盾的．

（3）**Richard 悖论**（1905）．Richard 悖论是下述类型的悖论："不可用少于 100 个字而定义的最小自然数"实际上可由本语句而在 100 个字以内定义之，这是一个矛盾．本悖论是下列（古希腊的）悖论的发展：Epimenides（本人为 Crete 岛的人）说所有的 Crete 岛的人都是说谎话的人．

【关于连续性的悖论】 连续性的问题在数学上和在哲学上都是重要的问题之一．关于这个问题的几个 **Zeno 悖论**都是有名的，其中最有名的是下列两个：

（1）假设 Achilleus 和乌龟同时分别从A，B两点出发，Achilleus 在后面追乌龟．当 Achilleus 到达B点时，乌龟前进到B_1点．当 Achilleus 到达B_1点时，乌龟又前进到B_2点．因此，Achilleus 永远追不上乌龟．

（2）一支飞箭每一瞬间均占着一定的位置．换句话说，每个瞬间箭都是在其位置上停着的．所以，箭永远不能运动．

【参】［1］高木貞治，数学雑談，共立出版，1935，第五章；［2］白石早出雄，数と連続の哲学，共立全書，1951；［3］吉田洋一，零の発見，岩波新書，修订版 1965；［4］A. N. Whitehead-B. Russell, Principia mathematica I, second edition, Cambridge Univ. Press, 1925；［5］S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand, 1952；［6］E. Mendelson, Introduction to mathematical logic, van Nostrand, 1966．

符号逻辑［英 symbolic logic 法 logique symbolique 德 symbolische Logik 俄 символическая логика 日 記号論理］符号逻辑是逻辑学的一个分支，在其中我们使用数学符号来研究数学各领域公共使用的逻辑推理．它又名**数理逻辑**（mathematical logic）或**理论逻辑**（德 theoretische Logik）．

由 G. Boole（［1］）和 A. de Morgan（［2］）所创始的**逻辑代数**（algebra of logic）实际上是集合逻辑或关系逻辑；它与今天的符号逻辑颇有不同．首先使用符号逻辑方法的是 G. Frege．他不仅研究了命题逻辑而且使用量词研究了今日的所谓一阶谓词逻辑（→［自由变元与约束变元］）．但是，在一个时期内，人们尚未认识 Frege 的工作．继 Frege 之后，C. S. Peirce, E. Schröder 和 G. Peano 等人主要是进行了关于命题逻辑的研究，他们立足于古典的观点，并没有发展 Frege 的工作．发展 Frege 工作的是 B. Russell，随即编集而成 Whitehead-Russell 的《数学原理》（Principia mathematica, 1910，［4］）一书．由此，才能认为符号逻辑的方法已完全建立．

【逻辑符号】 命题"A 或 B"，"A 且 B"，"如果A则B"以及"非A"分别用符号表示为：

$A\vee B$，$A\wedge B$，$A\rightarrow B$，$\neg A$．

我们把$\neg A$称为命题A的**否定**（negation），把$A\vee B$称为A与B的**逻辑和**（logical sum）（或**析取**（disjunction）），把$A\wedge B$称为命题A与B的**逻辑积**（logical product）（或**合取**（conjunction）），把$A\rightarrow B$称为**蕴涵**（implication）（或由A推出B）．我们用$A\leftrightarrow B$表示命题$(A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow A)$，并且读作"$A$与$B$**等价**（equivalent）"．在数学上，$A\vee B$指A，B中至

少有一个成立．命题“对所有 x，命题 $F(x)$ 均成立”以及命题“存在 x 使得命题 $F(x)$ 成立”分别表为

$$\forall x F(x),\ \exists x F(x)$$

我们把形如 $\forall x F(x)$ 的命题称为**全称命题**(英 universal proposition 德 Allaussage),把形如 $\exists x F(x)$ 的命题称为**存在命题**（英 existential proposition 德 Existenzaussage），两者合称为**超限命题**（德 transfinite Aussage）．符号 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \forall, \exists$ 称为**逻辑符号**（logical symbol)．

有各种表示逻辑符号的记号，比较常用的如下：

$A \wedge B$: $A \& B$, $A \cdot B$

$A \vee B$: $A + B$

$A \rightarrow B$: $A \supset B$, $A \Rightarrow B$

$A \leftrightarrow B$: $A \rightleftarrows B$, $A \equiv B$, $A \sim B$, $A \supset\subset B$, $A \Leftrightarrow B$,

$\neg A$: $\sim A$, $\bar{A}$

$\forall x F(x)$: $(x)F(x)$, $\Pi x F(x)$, $\bigwedge x F(x)$

$\exists x F(x)$: $(Ex)F(x)$, $\sum x F(x)$, $\bigvee x F(x)$

【自由变元与约束变元】 以命题为值的函数称为**命题函数**（propositional function)．$\forall x$ 和 $\exists x$ 可以看作由命题函数 $F(x)$分别构成命题 $\forall x F(x)$ 和 $\exists x F(x)$ 的算子．$\forall x$ 和 $\exists x$ 称为**量词**（quantifier）或**量词符号**（quantifying symbol)；前者称为**全称量词**（universal quantifier)，后者称为**存在量词**（existential quantifier)．由命题函数 $F(x)$ 构成 $\forall x F(x)$ 或 $\exists x F(x)$，就好像由函数 $f(x)$ 构成定积分

$$\int_0^1 f(x)dx$$

那样，所得的结果命题 $\forall x F(x)$ 和 $\exists x F(x)$ 不再为 x 的函数．在这个意义之下，$\forall x F(x)$ 和 $\exists x F(x)$ 中的变元 x 便称为**约束变元**（bound variable)，在未被 $\forall x$ 或 $\exists x$ 约束之前，$F(x)$ 中的变元 x 称为**自由变元**（free variable)．有些人为了避免混淆，对自由变元和约束变元用不同的符号表示．

【命题的形式表示】 用逻辑符号等对命题所作的形式表达称为**公式**（formula)．更确切地说，公式是根据以下**形成规则**（formation rule）而构成的：

(1) 若 $\mathfrak{A}$ 是公式，则 $\neg\mathfrak{A}$ 也是公式．若 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ 是公式，则 $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\leftrightarrow\mathfrak{B}$ 都是公式．

(2) 若 $\mathfrak{F}(a)$ 是含自由变元 a 但不含约束变元 x 的公式，则 $\forall x\mathfrak{F}(x)$ 和 $\exists x\mathfrak{F}(x)$ 都是公式．其中，$\mathfrak{F}(x)$ 指把 $\mathfrak{F}(a)$ 中的 a 处处代以 x 所得到的结果．

按照不同的目的，我们使用不同范围的公式．为了指明公式的范围，我们固定一组公式，其中的每个公式称为**原始公式**（prime formula)（或**原子公式**（atomic formula))．原始公式确定了之后，由它们出发，反复应用上述的 (1) 和 (2) 便得出公式，并且公式也只限于这些，从而便可确定公式的范围．因此，上述 (1) 和 (2)是作为规定公式的范围的方法而使用的，可以称为由原始公式而构成公式的形成规则．

【命题逻辑和谓词逻辑】 在符号逻辑中，特别注意于五个称为**命题联结词**（propositional connectives）的逻辑符号 $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$ 的研究范围，称为**命题逻辑**（propositional logic)；与之相对，若考虑还含有**全称符号** $\forall$（德 Allzeichen）及**存在符号** $\exists$（德 Seinszeichen）的一般情况，则称为**谓词逻辑**（predicate logic）

在纯粹的命题逻辑中，我们只研究用命题联结词所表示的**逻辑算子**（logical operator）的作用，并不研究具体的命题．因此，只把**命题变元**（proposition variable)，即表示任意命题的变元，作为原始公式，只考虑由它们根据命题联结词(当然，不用 $\forall$ 及 $\exists$) 构成的公式．我们研究如下问题：当用各种命题代替命题变元时，什么样的公式是永为真的，什么样的公式有时候为真？(→命题逻辑)．

在谓词逻辑中主要是讨论命题函数．从严格的意义上说，只有一个变元的命题函数才称为**谓词**（predicate)，但是，也经常使用 **n 元谓词**（predicate of n arguments 或 predicate of n variables）来表示 n 个变元的命题函数．单变元的谓词(一元谓词)也称为**性质**（property)．如

果由性质 F 构成的命题 $F(a)$ 为真，则我们说 a 具有性质 F. 两个变元的谓词称为**二元关系** (binary relation). 由二元关系 R 构成的命题 $R(a, b)$，有时候也表为 aRb. 一般地，n 个变元的谓词称为 **n 元关系** (n-ary relation). 一元谓词的定义域称为**个体域** (object domain)，个体域的元素称为**个体** (object)，以个体域为变域的变元称为**个体变元** (object variable). 在这里我们假定个体域非空. 当我们同时处理许多谓词(变元数目未必相等)时，我们常常把其定义域适当扩大，使得其中出现的所有自变元都具有相同个体域，这是谓词逻辑中最常用的方法.

在纯粹的意义下，谓词逻辑仅仅处理量词的(和命题联结词有关联的)一般性质，对于具体的谓词和具体的个体一概不去研究. 它所使用的仅仅是表达在某个公共个体域上定义的任意谓词的**谓词变元** (predicate variable) 和表达属于该域的任意个体的**个体变元** (object variable). 当然，命题变元作为零个变元的谓词，亦包括在其中. 命 F 为 n 元谓词变元，而 $a_1, \cdots, a_n$ 为自由个体变元 (被指定为自由变元的个体变元)，把所得的表达式 $F(a_1, \cdots, a_n)$ 看作原始公式 ($n = 0, 1, \cdots$). 我们只处理由这些原始公式产生的公式. 其中约束变元限定为具有公共域的个体变元. 因此，除了个体域是个体变元的公共域外，对于个体域不加限定.

指定一个个体域并对一个公式中的每个谓词变元均代以在该域上定义的谓词，这时，该公式变成一个命题. 进而，把命题中的每个自由个体变元均代以个体域中的一个个体 (常个体)，我们便得到一个可以确定其真假值的命题. 当我们指定一个个体域并且把每个谓词变元和每个个体变元与所代人的谓词或个体联系起来时，我们把这个个体域和这种联系合称为**模型** (model). 对每个模型均为真命题的公式称为**永真公式**(德 immer richtige Formel) 或**有效公式** (valid formula). 永真公式的研究是谓词逻辑中最重要的问题(→谓词逻辑).

【高阶谓词逻辑】 在通常的谓词逻辑中，量词中所使用的约束变元只限于个体变元. 在这个意义之下，通常的谓词逻辑称为**一阶谓词逻辑**(英 predicate logic of first order 德 Prädikatenlogik der ersten Stufe). 与之相对，如果考虑使用谓词变元 P 的量词 $\forall P$ 及 $\exists P$，则相应的谓词逻辑称为**二阶谓词逻辑** (predicate logic of second order).

再进一步推广，我们还可以引入所谓**三阶谓词逻辑** (predicate logic of third order). 首先，我们固定一个个体域 D_0. 然后，如果考虑全体 n 元谓词的类 D_1^n，它的每个变元都以个体域 D_0 为变域，则可引进以 D_1^n 作为其个体域的谓词. 这样的谓词称为关于原个体域 D_0 的**二阶谓词** (predicate of second order). 即使我们把二阶谓词限于一个变元，它们仍然分为各种类型，对多于两个变元的情况，各自变元的变域更未必一致. 与此相对，以 D_0 作为其个体域的谓词称为**一阶谓词** (predicate of first order). 容许具有一阶谓词变元的量词的谓词逻辑，称为二阶谓词逻辑，容许具有直到二阶为止的谓词变元的量词的谓词逻辑，称为三阶谓词逻辑. 类似地，我们可以进一步定义**高阶谓词逻辑** (predicate logic of higher order).

高阶谓词逻辑也称为**类型论** (英 theory of types 德 Typentheorie). 这是因为其中出现分成各种类型的谓词. 类型论又分为**简单类型论** (英 simple theory of types 德 einfache Typentheorie) 和**分歧类型论** (英 ramified theory of types 德 verzweigte Typentheorie).

为简单起见，我们只限于讨论表示一阶一元谓词的变元，并且设 P 是相应的约束谓词变元. 于是，对任意的公式 $\mathfrak{F}(a)$ (a 为自由个体变元)，公式

$$\exists P \forall x (P(x) \leftrightarrow \mathfrak{F}(x))$$

表示的命题被认为是永真的. 这是简单类型论的观点.

与此相对，Russell 首先主张：如果对于谓词变元的量词出现在 $\mathfrak{F}(x)$ 中，则使用这个公式是不正当的. 他的主张基于这样的观点：上一段中的公式断言 $\mathfrak{F}(x)$ 为一阶谓词，因此，在引

入一阶谓词 $\mathfrak{F}(x)$ 的时候，不应该使用关于一阶谓词变元的量词（在这些谓词变元的量词中已假定了全体一阶谓词）．为此，Russell 把一阶谓词再按照**层**（order）而进一步加以分类，作为关于 k 层谓词变元 P^k 的公理，可用下式：

$$\exists P^k \forall x (P^k(x) \leftrightarrow \mathfrak{F}(x)).$$

这里，对于任何出现在 $\mathfrak{F}(x)$ 中的自由谓词变元的层 i 均有 $i \leqslant k$，而对于任何出现在 $\mathfrak{F}(x)$ 中的约束谓词变元的层 j 均有 $j < k$．这就是分歧类型论的观点．当我们考虑高阶的谓词或多变元的谓词时，我们还必须进一步细分类型．后来，甚至 Russell（他本来是从分支类型论出发的），也不得不引进**可化归性公理**（axiom of reducibility）并把他的理论还原到简单类型论．

【逻辑系统】 在通常意义下的逻辑，即承认每个命题原则上可以判定或为真或为假的**排中律**（英 law of the excluded middle 拉 tertium non datur）的逻辑，称为**古典逻辑**（classical logic）．通常，命题逻辑、谓词逻辑和类型论都是在古典逻辑的观点之下讨论的．但是，不承认排中律的直觉主义† 数学所用的推理也可用符号逻辑来研究（→数学基础）．作为这种研究的对象的逻辑称为**直觉主义逻辑**（intuitionistic logic）．直觉主义逻辑又按照其中所应用的命题（公式）的范围而分成命题逻辑、谓词逻辑等等．

为了在符号逻辑中能够表示叙述**可能性**（possibility）及**必然性**（necessity）的**模态命题**（modal proposition），J. Łukasiewicz 提出了具有既非真又非假的第三真假值† 的命题逻辑，它称为**三值逻辑**（three-valued logic）．更一般地说，目前已经引入了具有更多个真假值的**多值逻辑**（many-valued logic），而古典逻辑为其特例，即具有真、假两值的**二值逻辑**（two-valued logic）．但是，实际上对模态命题的研究而言，有三个以上真假值的多值逻辑并不是必要的，而对基于古典逻辑的各种**模态逻辑**（modal logic）则进行了更多的研究．例如，**严格蕴涵**（strict implication）的研究便属于这个领域．

【参】 [1] G. Boole, An investigation of the laws of thought, Walton and Maberly, 1854; [2] A. de Morgan, Formal logic, or the calculus of inference, Taylor and Walton, 1847; [3] G. Frege, Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formalsprache des reinen Denkens, Halle, 1879; [4] A. N. Whitehead-B. Russell, Principia mathematica I, II, III, Cambridge Univ. Press, 1910—1913, second edition, 1925—1927; [5] D. Hilbert-W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, 1928, fifth edition, 1967 (英译本: Principles of mathematical logic, Chelsea, 1950); [6] A. Church, Introduction to mathematical logic I, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1956; [7] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand, 1952; [8] S. C. Kleene, Mathematical logic, John Wiley, 1967; [9] J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

命题逻辑 [英 propositional logic 法 logique propositionnelle 德 Aussagenlogik 俄 пропозициональная логика 日 命題論理] **命题逻辑**是符号逻辑† 的一部分，其中研究的是五个逻辑符号† $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$．这里 $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$, $\neg A$ 分别表示"A 且 B"，"A 或 B"，"如果 A 则 B"，"A 与 B 等价"，"非 A"．由于 $A \leftrightarrow B$ 认为是 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ 的缩写，所以，符号 $\leftrightarrow$ 经常被省略．

在命题逻辑中，研究由命题变元† 出发使用上述逻辑符号而构成的公式†．

考察两个符号Y和人，分别读作**真**（true）和**伪**（false），在涵义上可以认为Y表示真命题而人表示假命题．设以Y与人为元素的集合是 $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{A} = \{\curlyvee, 人\}$．从 $\boldsymbol{A}$（或更一般地从 Cartesian 乘积 $\boldsymbol{A} \times \cdots \times \boldsymbol{A}$）到 $\boldsymbol{A}$ 的单值函数称为**真值函数**（truth-value function）．我们可以把 $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ 分别看作以下的真值函数：(1) 当 $A = B = \curlyvee$ 时，$A \wedge B = \curlyvee$，此外，$A \wedge B = 人$；(2) 当 $A = B = 人$ 时，$A \vee B = 人$，此外，$A \vee B = \curlyvee$；(3) 当 $A = \curlyvee$ 而 $B = 人$ 时，$A \rightarrow B = 人$，此外，$A \rightarrow B = \curlyvee$；(4) 当 $A = \curlyvee$ 时，$\neg A = 人$，当 $A = 人$ 时，$\neg A = \curlyvee$．

如果我们把命题变元看作域 $\boldsymbol{A}$ 上的变元，那末，每个逻辑公式都表示一个真值函数，反

之，任意（有限个自变量的）真值函数都可以用适当的逻辑公式来表示，虽然，表示一个真值函数的逻辑公式并不是唯一的（有无限多个）．如果把逻辑公式看作真值函数，则由公式中自变量的给定值所确定的函数值称为该逻辑公式的**真假值**（truth value）．

只取Ｖ为其值的真值函数所对应的公式称为**重言式**（tautology）．例如，$A \vee \neg A$ 和 $(A \wedge B) \rightarrow A$ 都是重言式．因为 n 元真值函数只对应于其自变量的（至多）2^n 种真假值组合而取值，所以，我们可以在有限步内决定一个公式是否是重言式．如果 $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ 是重言式，则称这两个逻辑公式 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 是**等价的**（equivalent）．这时，$\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 表示同一个真值函数．

【命题演算】 可以从重言式中选择一些特殊形状的重言式，把它们规定为"公理"，再给定一些适当的"推理规则"，然后，从这些公理出发推导出（证明）一切重言式．当然，所推导出来的公式全都是重言式．这样的系统称为**命题演算**（propositional calculus）．规定命题演算的公理和推理规则的方法有多种多样．

以上所说的都属于古典逻辑†，但是，通过选择适当的公理和推理规则，我们也可以形式地考察直觉主义的或其他的命题逻辑．在直觉主义逻辑†中，"命题不限于非真即假"，因此，要根据重言式的概念将直觉主义的命题逻辑形式化是不可能的．这时，便采用命题演算的方法．V. I. Glivenko 的定理（1929）："如果逻辑公式 A 能在古典逻辑中证明，则 $\neg\neg A$ 可以在直觉主义逻辑中证明"，就是根据这种形式化的考虑得出的．对界于直觉主义逻辑和古典逻辑之间的命题逻辑也有种种的研究（梅沢敏郎）．

【参】 →符号逻辑的【参】．

谓词逻辑 ［英 predicate logic 法 logique des prédicats 德 Prädikatenlogik 俄 предикатная логика 日 述語論理］ 当我们研究谓词逻辑的时候，一般假定它是一阶的（→符号逻辑［命题逻辑和谓词逻辑］，【高阶谓词逻辑】）．即量词† $\forall x$ 或 $\exists x$ 所用的变元 x 是以称为个体域†的固定的非空集 D 作为变域的个体变元†．在本条中，除最后一段外，均持这一观点．

【数学命题的形式表示】 为了用谓词逻辑的方法对数学理论作形式的表示，我们选取一个适当的非空集合作为它的个体域，其元素称为**个体**（individual）．然后，规定表示特定个体、函数和谓词†的**个体符号**（individual symbol），**函数符号**（function symbol）和**谓词符号**（predicate symbol）．这里所谓"函数"是在个体域 D 里定义的运算，即 n 元函数是从 n 个给定集合 D 的 Cartesian 乘积 $D \times \cdots \times D$ 到 D 的单值映射．其次，我们像下面那样来定义**项**（term），然后再根据项来定义公式†的概念．所谓项是个体的一般的形式表示．而公式则是命题的形式表示．

(I) 项的定义（项的形成规则†）：(1) 每个个体符号是项；(2) 每个自由个体变元是项；(3) 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 是项，并且 f 是 n 元函数符号，则 $f(t_1, \cdots, t_n)$ 是项；(4) 只有从 (1)—(3) 得到的才是项．

(II) 公式的定义（公式的形成规则）：(1) 如果 $t_1, \cdots, t_n$ 是项，且 F 是 n 元的谓词符号，则 $F(t_1, \cdots, t_n)$ 是公式；在这种情况下，$F(t_1, \cdots, t_n)$ 是原始公式†；(2) 如果 $\mathfrak{A}$ 是公式，则 $\neg\mathfrak{A}$ 也是公式；如果 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 是公式，则 $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ 以及 $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ 都是公式；(3) 如果 $\mathfrak{F}(a)$ 是公式，且 a 是自由个体变元，则 $\forall x \mathfrak{F}(x)$ 和 $\exists x \mathfrak{F}(x)$ 也是公式，其中 x 为不含于 $\mathfrak{F}(a)$ 之内的任意约束个体变元，而 $\mathfrak{F}(x)$ 是将 $\mathfrak{F}(a)$ 中的 a 处处代以 x 而得到的结果；(4) 只有从 (1)—(3) 得到的才是公式．

要定义项和公式的概念，我们除了需要自由和约束个体变元、逻辑符号外，还要一序列的个体符号、函数符号和谓词符号．

在纯谓词逻辑中，不考虑具体的个体域，只研究命题的一般形式，因此，在这种情况下，作为谓词符号或函数符号不使用表示具体谓词或具体函数的符号，而使用**谓词变元**（predicate variable）和**函数变元**（function variable）．个体

符号也用自由个体变元来代替. 特别是,在纯谓词逻辑研究中,最常用的方法是不用函数变元,并且只把自由个体变元作为项.

【数学理论的形式化】 对理论进行形式化时,我们需要**公理** (axiom) 和**推理规则** (rule of inference). 所谓公理就是具有某种特定形式的公式,而推理规则则是由一些公式推出其他公式的规则. 从公理出发反复使用推理规则所能够推出的公式,便称为**可证的** (provable). 公理分成两类:一切理论公有的**逻辑公理** (logical axiom) 和个别理论特有的**数学公理** (mathematical axiom). 数学公理的全体称为该理论的**公理系统** (axiom system).

(I) 逻辑公理: (1) 将在重言式† 中所含一切命题变元代以任意公式而得到的公式为公理. (2) 形如

$$\forall x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(t) \text{ 或 } \mathfrak{F}(t) \to \exists x\mathfrak{F}(x)$$

的任何公式为公理,其中 $\mathfrak{F}(t)$ 是将 $\mathfrak{F}(x)$ 中的 x 处处代以项 t 所得的结果.

(II) 推理规则: (1) 从两个公式 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ 可以推出公式 $\mathfrak{B}$ [**假言推理** (拉 modus ponens)]. (2) 从公式 $\mathfrak{A} \to \mathfrak{F}(a)$ 可以推出 $\mathfrak{A} \to \forall x\mathfrak{F}(x)$, 从公式 $\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{A}$ 可以推出 $\exists x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{A}$. 这里 a 为既不包含在 $\mathfrak{A}$ 中也不包含在 $\mathfrak{F}(x)$ 中的自由个体变元,并且 $\mathfrak{F}(a)$ 是将 $\mathfrak{F}(x)$ 中的 x 处处代以 a 的结果.

如果把一个公理系统加到这些逻辑公理和推理规则中来,则我们说给出了一个(一阶谓词逻辑† 上的)**形式系统** (formal system).

如果公式 $\mathfrak{A}$ 和它的否定 $\neg\mathfrak{A}$ 在一个形式系统 S 中都是可证的,则称 S 或它的公理系统是**矛盾的** (contradictory), 否则,便称为**相容的** (consistent). 由于

$$(A \wedge \neg A) \to B$$

是重言式,利用这一点我们可以证明在矛盾的形式系统中任何公式都是可证的. **反证法** (拉 reductio ad absurdum) 证明的有效性基于

$$(A \to (B \wedge \neg B)) \to \neg A$$

是重言式这一事实 可以由反证法而得出一个肯定的命题(公式), 这是由于表示**消除双重否定** (discharge of double negation) 的(命题逻辑) 公式 $\neg\neg A \to A$ 是一个重言式.

【谓词演算】 没有任何数学公理的(一阶谓词逻辑上的)形式系统称为(一阶) **谓词演算** (predicate calculus). 其数学公理为同异性公理

$$t = t; \; s = t \to (\mathfrak{F}(s) \to \mathfrak{F}(t))$$

的形式系统称为**带同异性的谓词演算** (predicate calculus with equality) 或**带同异性的谓词逻辑** (predicate logic with equality).

如果一公式没有自由的个体变元,则称为**闭公式** (closed formula). 现在,我们考察一个其数学公理全为闭公式的形式系统 S. 一个公式 $\mathfrak{A}$ 在 S 中可证,当且仅当有适当的数学公理 $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_n$, 使得公式

$$(\mathfrak{C}_1 \wedge \cdots \wedge \mathfrak{C}_n) \to \mathfrak{A}$$

在谓词演算中可证. 由于任何公理系统都可以用只含闭公式的等价公理系统代替,所以,关于形式系统的问题都可以归结为谓词演算的问题,即纯逻辑的问题. 今后,所谓"可证"系指"在谓词演算中可证". 此外,我们按照叙述纯谓词演算的通常方法,不再使用个体符号和函数符号,并且用谓词变元作为谓词符号. 但是,即使含有函数变元,以下结果仍保持有效.

(1) 假设我们给定一个体域 D 和一公式 $\mathfrak{A}$. 如果我们分别用 D 中的具体的谓词和个体来代替包含于 $\mathfrak{A}$ 中的所有谓词变元和自由个体变元,我们便得到一个命题. 这就是 $\mathfrak{A}$ 在 D 中的一个**解释** (interpretation). 如果 $\mathfrak{A}$ 在个体域 D 中的每一个解释均真,则称公式 $\mathfrak{A}$ 在 D 中永真. 如果 $\mathfrak{A}$ 在任何个体域 D 中永真,则 $\mathfrak{A}$ 称为**永真公式** (德 immer richtige Formel 英 identically true formula) (或**有效公式** (valid formula)). 每个可证公式都是有效的.

(2) 反之,任何永真公式都是可证的 (K. Gödel [2]). 这一事实称为谓词演算的**完备性** (completeness). 事实上,根据 Gödel 的证明,如果 $\mathfrak{A}$ 在每个具有可数基数的个体域 D 中是永真的,则公式 $\mathfrak{A}$ 是可证的. 换一种说法,如果 $\neg\mathfrak{A}$ 是不可证的,则公式 $\mathfrak{A}$ 必在某种解释中 (并且个体域可限于具有可数基数的域)是真命题. 我

们可将这一结果推广如下：如果由可数多个闭公式构成的公理系统是相容的，则可选取适当的可数集合D作为个体域，根据通常解释使所有的数学公理全部成为真命题．在这个意义之下，**Gödel 完备性定理**（Gödel's completeness theorem）给出了 Skolem-Löwenheim 定理†的另一个证明．

（3）谓词演算是相容的．这个结果虽从本节的（1）得到，但它可简单地直接导出（D. Hilbert 和 W. Ackermann [1]）．

（4）要给出谓词演算的逻辑公理和推理规则，存在许多不同的方式． G. Gentzen 在[3]中给出了两种类型的系统：其一是自然推理系统（德 natürlicher Kalkül），在该系统中易于把数学中实际使用的证明依其原形而再现，另一个是逻辑上易于处理的系统（德 logistischer Kalkül）．对于后面这个系统，Gentzen 证明了 **Gentzen 基本定理**，即如果给出一个公式的形式证明，则可以把它转化为没有"兜圈子"的证明．这条定理对各种相容性的证明提供了一个有力的工具．

（5）如果命题 $\exists x\mathfrak{A}(x)$ 为真，则我们从满足条件 $\mathfrak{A}(x)$ 的个体 x 中选出一个个体并且将它记为 $\varepsilon x\mathfrak{A}(x)$． 当 $\exists x\mathfrak{A}(x)$ 为假时，我们令 $\varepsilon x\mathfrak{A}(x)$ 表示任意的个体．无论如何，均有

$$\exists x\mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\varepsilon x\mathfrak{A}(x)) \qquad (1)$$

成立．可以把 εx 看作使含变元 x 的命题 $\mathfrak{A}(x)$ 对应于个体 $\varepsilon x\mathfrak{A}(x)$ 的算子．Hilbert 称它为**超限逻辑选择函数**（德 transfinite logische Auswahlfunktion）． 现在，我们称它为 Hilbert 的 **ε 算子**（ε-operator, ε-quantifier），而在这种意义下使用的逻辑符号 ε 便称为 Hilbert **ε 符号**（ε-symbol）． 使用 ε 符号后，对任何 $\mathfrak{A}(x)$ 都可以把 $\exists x\mathfrak{A}(x)$ 和 $\forall x\mathfrak{A}(x)$ 分别表为

$$\mathfrak{A}(\varepsilon x\mathfrak{A}(x)),\ \mathfrak{A}(\varepsilon x \neg \mathfrak{A}(x)).$$

加入公式（1）作为公理而得到的谓词演算系统本质上等价于通常的谓词演算．这个结果称为 **ε 定理**（ε-theorem）．ε 定理可叙述为：把形式（1）的每一个公式都作为公理后，如果一个公式 $\mathfrak{C}$ 可证，那末，如果 $\mathfrak{C}$ 不含逻辑符号 ε 的话，我们即使不用形式（1）的公理，也能够证明 $\mathfrak{C}$（Hilbert 和 P. Bernays [4]）． 此外，除（1）外如果再加进以下形状的公理：

$$\forall x(\mathfrak{A}(x) \leftrightarrow \mathfrak{B}(x)) \to \varepsilon x\mathfrak{A}(x) = \varepsilon x\mathfrak{B}(x), \qquad (2)$$

则类似的定理仍成立（前原昭二 [5]）．

（6）对于给定的公式 $\mathfrak{A}$，如果公式

$$\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{A}'$$

可证且 $\mathfrak{A}'$ 满足特定的条件，则称 $\mathfrak{A}'$ 为 $\mathfrak{A}$ 的标准形式． 例如，对任何公式 $\mathfrak{A}$ 有满足以下条件的标准形式 $\mathfrak{A}'$，其形式为

$$Q_1x_1\cdots Q_nx_n\mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 Qx 指量词 $\forall x$ 或 $\exists x$，$\mathfrak{B}(x_1, \cdots, x_n)$ 不含量词且不含 $\mathfrak{A}$ 中没有的谓词变元或自由个体变元． 这种类型的标准形式称为**前束范式**（prenex normal form）．

（7）以上所述是关于古典的一阶谓词逻辑的．对于其他的谓词逻辑，我们也能够规定适当的公理和推理规则以作出一个谓词演算或形式系统，从而得到种种结果．例如，Gentzen 的基本定理（[3]）也适用于由 V. I. Glivenko, A. Heyting 和其他人所构造的直觉主义†的谓词演算（[6]，[(7]）．由于 Gentzen 的基本定理不仅仅在古典逻辑和直觉主义逻辑中成立而且在其他一阶谓词逻辑或命题逻辑的系统中也成立，所以，它对模态逻辑†和其他逻辑的研究也是有用的（大西正男，松本和夫）．此外，在命题逻辑中成立的 Glivenko 定理（[6]；→命题逻辑）用稍微弱一些的表示也可以推广到谓词演算中去（黒田成勝 [8]），竹内外史猜测类似于 Gentzen 的基本定理的定理也能够在高阶谓词逻辑中成立，并且指出如果该猜想果真正确的话，则分析的相容性也应当可以得到（[9]）．此外，在许多重要的情况下，他构造性地证明了这个猜想部分地成立．这个猜想最后由高橋用非构造的方法证明了（[10]）．对此，前原昭二、島内剛一和安原満也有贡献．

【参】 [1] D. Hilbert-W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, 初版 1928， 第四版 1959； [2] K. Gödel, Die Vollständigkeit der Axiom

des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. Phys., **37** (1930), 349—360; [3] G. Gentzen. Untersuchungen über das logische Schliessen, Math. Z., **39** (1935), 176—210, 405—431; [4] D. Hilbert-P. Bernays, Grundlagen der Mathematik II, Springer, 1939, 第二版 1970; [5] S. Maehara (前原昭二), Equality axiom on Hilbert's ε-symbol, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **7**, part 4 (1957), 419—435; [6] V. I. Glivenko, Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, Acad. Roy, de Belgique, Bulletin de la classe des sciences, (5), **15** (1929), 183—188; [7] A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik I, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1930, 42—56; [8] S. Kuroda (黒田成勝), Intuitionistische Untersuchungen der formalistischen Logik, Nagoya Math. J., **2** (1951), 35—47; [9] G. Takeuti (竹内外史), On a generalized logic calculus, Jap. J. Math., **24** (1954), 149—156; [10] M. Takahashi (高橋元男), A proof of the cut-elimination theorem in simple type-theory, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 399—410; [11] S. C. Kleene, Mathematical logic, John Wiley, 1967; [12] J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967; [13] R. M. Smullyan, First-order logic, Springer, 1968.

模型论 [英 model theory 法 théorie des modèles 德 Modelltheorie 俄 теория моделей 日 モデルの理論] 【语言】每一种数学理论都有其相应的语言. 确定一种理论的**语言** (language) 就是指确定有关的数学系统的语言. 这样的一种语言由下列符号组成 (以下实际给出的符号只是从某个记号系统中选出的例子):

(1) 表示逻辑概念的符号(逻辑符号†), 例如, ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, →;

(2) 自由变元†: 例如 $a_0, a_1, a_2, \cdots$;

(3) 约束变元†: 例如 $x_0, x_1, x_2, \cdots$;

(4) 表示个别的个体(常个体)的符号: $c_0, c_1, c_2, \cdots, c_\alpha, \cdots$;

(5) 函数符号†: $f_0, f_1, f_2, \cdots, f_\alpha, \cdots$;

(6) 谓词符号†: $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_\alpha, \cdots$;

(4), (5), (6) 中的符号集合的基数† 可以是任意的, 但对 (6) 必须至少有一个符号. 我们假定每一个符号集合都是良序的†, 且认为 (5) 中的每个 f_i 均对应于一个正整数 i_j, 而(6) 中的每个 P_i 均对应于一个非负整数 i_i (这些整数分别称为 f_i 和 P_i 的空位个数).

我们也研究其他类型的语言, 例如, 具有无限长表达式的系统, 这个系统对于变元的序型, 即对于 f_i 和 P_i 的空位个数, 允许为超限序数, 并且具有推广的概念: $\bigwedge_{\alpha<\beta}$, $\bigvee_{\alpha<\beta}$ 以及对 $\alpha<\beta$ 的 $\exists x_1 \cdots \exists x_\alpha \cdots$, 对 $\alpha<\beta$ 的 $\forall x_1 \forall x_2 \cdots \forall x_\alpha \cdots$, 这里 α, β 为超限序数. 另一种语言包括较高类型的变元以及关于这些变元的∀和∃. 又可以不区分自由变元和约束变元, 这时, 在一个公式†中, 不受∀或∃约束的变元便称为**自由的** (free). 但是, 为简单起见, 我们仅限于讨论对自由变元和约束变元作出区别的一阶谓词演算†. 我们又假定只有可数多个变元, 因此, 我们用自然数作为下标.

设 $L_1=\{$逻辑符号的集合$\}$, $L_2=\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, $L_3=\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$, $L_4=\{c_0, c_1, c_2, \cdots\}$, $L_5=\{f_0, f_1, f_2, \cdots\}$, $L_6=\{P_0, P_1, P_2, \cdots\}$, 又设 $L=\langle L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6\rangle$. 规定了表 L 以后便确定了一种语言 L. 习惯上, L_1 多为 ∀, ∃, ¬, ∧, ∨, →; L_2 多为 $a_0, a_1, a_2, \cdots$; L_3 多为 $x_0, x_1, x_2, \cdots$, 故我们假定 L_1, L_2, L_3 是固定的, 因此, 要决定一种语言只须决定 $\langle L_4, L_5, L_6\rangle$ 便够了. 在下面, 我们采用刚刚指出的 $\langle L_1, L_2, L_3\rangle$ 并假定一种任意的但是固定的语言 $L=\langle L_4, L_5, L_6\rangle$. 首先, 我们定义 L 的项†和 L 的公式的概念.

L 的项的定义: (1) 各个自由变元 a_i 是项; (2) 表示 L 的个别个体的符号 c_i 是项; (3) 如果 f_i 为 L 的函数符号, i_j 为 f_i 的空位个数并且 $t_1, \cdots, t_{i_j}$ 都是 L 的项, 则 $f_i(t_1, \cdots, t_{i_j})$ 也是 L 的项; (4) 只有由 (1)—(3) 构成的才是 L 的项.

不含自由变元的项称为闭项.

L 的公式的定义为: (1) 设 P_i 为 L 的谓词符号, i_j 为它的空位个数. 如果 $t_1, \cdots, t_{i_j}$ 都是 L 的项, 则 $P_i(t_1, \cdots, t_{i_j})$ 是 L 的公式. 这种公式称为原始公式 (或原子公式); (2) 如果 A 和 B 是 L 的公式, 则 $\neg(A)$, $(A)\wedge(B)$, $(A)\vee(B)$, $(A)\to(B)$ 也都是 L 的公式; (3) 设 F 是 L 的公式, x_i 是在 F 中不出现的约束变元, 对 F 的某个变元 a_j 处处用 x_i 代替, 用括号

括出并且在前面放上 $\forall x_i$ 或 $\exists x_i$，则所得到的表达式仍然是 L 的公式；(4) 只有由 (1)—(3) 构成的才是 L 的公式.

不出现自由变元的公式称为闭公式. 如果不致引起混淆的话，可以省掉构成公式时所使用的括号.

【结构】 设 L 为上一段中所定义的一种特定的语言. 由以下 (1)—(4) 所定义的 $\mathfrak{M}=[M;\rho;\sigma;\tau]$ 称为 L 的**标架** (frame) 或**结构** (structure).

(1) M 为集合 (M 称为 $\mathfrak{M}$ 的**全域** (universe)).

(2) ρ 为由 L_4 到 M 中的映射.

(3) 设 $L_5^i=\{f_i|f_i$ 的空位个数为 $i\}$，则 $L_5=L_5^1\cup L_5^2\cup\cdots\cup L_5^i\cup\cdots$ 便把 L_5 划分为互不相交的各集合. 设 $\mathfrak{F}_i$ 为从 $M^i=M\times\cdots\times M$ (i 个)到 M 中的映射全体的集合，并且 σ_i 为从 L_5^i 到 $\mathfrak{F}_i$ 中的一个映射. 我们定义 σ：对属于 L_5^i 的任意的 f 而言，$\sigma(f)=\sigma_i(f)$，这里 i 为 f 的空位个数. 这时，σ 显然为从 L_5 到 $\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathfrak{F}_i$ 中的映射.

(4) 与 (3) 中类似，把 L_6 分解为

$$L_6=L_6^0\cup L_6^1\cup\cdots\cup L_6^i\cup\cdots.$$

设 P_i 为 M^i 的一切子集的集合，且 τ_i 为从 L_6^i 到 P_i 中的一个映射，这里 P_0 为集合 $\{M,\varnothing\}$ ($\varnothing$ 为空集). 我们定义 τ：对属于 L_6^i 的任意的 P 而言，$\tau(P)=\tau_i(P)$.

如果我们用 $\bar{c}$ 表示 $\rho(c)$，用 $\bar{f}$ 表示 $\sigma(f)$，用 $\bar{P}$ 表示 $\tau(P)$，则可以认为：ρ 是用 $\bar{c}_0,\bar{c}_1,\cdots$ 表示的，σ 是用 $\bar{f}_0,\bar{f}_1,\cdots$ 表示的，τ 是用 $\bar{P}_0,\bar{P}_1,\cdots$ 表示的. 所以，$\mathfrak{M}$ 通常表示为 $\mathfrak{M}=[M;\bar{c}_0,\bar{c}_1,\cdots;\bar{f}_0,\bar{f}_1,\cdots;\bar{P}_0,\bar{P}_1,\cdots]$.

【可满足性的概念】 我们在下面不但固定语言 L，而且也固定 L 的结构 $\mathfrak{M}$. 这时，我们用以下过程来定义这样的性质：一个 L 的公式在 $\mathfrak{M}$ 中为**可满足的** (satisfiable).

设把 M 的元素的序列[†] $(m_0,m_1,\cdots)$，$(n_0,n_1,\cdots)$ 分别表为 $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$，它们称为 $\mathfrak{M}$ 序列. 我们用 $\mathfrak{m}\overset{i}{=}\mathfrak{n}$ 表示除第 i 项外，$\mathfrak{m}$ 的其余各项均等于 $\mathfrak{n}$ 的相应的各项. 利用这些概念，则 L 的项 t 在 $\mathfrak{M}$ 序列 $\mathfrak{m}$ 处的值，表为 $t[\mathfrak{m}]$，可定义如下：

(1) 如果 t 为自由变元 a_i，则 $t[\mathfrak{m}]=m_i$.

(2) 如果 t 为表示个体的符号 c_i，则 $t[\mathfrak{m}]=\bar{c}_i$.

(3) 如果 t 具有 $f_i(t_1,\cdots,t_i)$ 的形式，则

$$t[\mathfrak{m}]=\bar{f}_i(t_1[\mathfrak{m}],\cdots,t_i[\mathfrak{m}]).$$

如果 t 为 L 的项，则 $t[\mathfrak{m}]$ 显然为 M 的元素.

根据这个 $t[\mathfrak{m}]$ 的定义，对任何 L 的公式 A 和任何 $\mathfrak{M}$ 序列 $\mathfrak{m}$ 而言，"A 在 $\mathfrak{M}$ 中被 $\mathfrak{m}$ 满足"一语(记为 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models A$)，可定义如下：

(1) $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models P_i(t_1,\cdots,t_i)\Leftrightarrow\langle t_1[\mathfrak{m}],\cdots,t_i[\mathfrak{m}]\rangle\in\bar{P}_i$.

(2) $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\neg B\Leftrightarrow\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models B$ 为假.

(3) $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models B\wedge C\Leftrightarrow\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models B$ 和 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models C$.

(4) $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models B\vee C\Leftrightarrow\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models B$ 或 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models C$.

(5) $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models B\rightarrow C\Leftrightarrow$ 如果 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models B$ 则 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models C$.

(6) $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\forall x_iF(x_i)\Leftrightarrow\mathfrak{M},\mathfrak{n}\models F(a_i)$ 对任何满足 $\mathfrak{m}\overset{i}{=}\mathfrak{n}$ 的 $\mathfrak{n}$ 都成立，这里 a_i 在不出现于 $F(x_i)$ 中的自由变元中具有最小的下标.

(7) $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\exists x_iF(x_i)\Leftrightarrow$ 存在 $\mathfrak{n}$ 使得 $\mathfrak{n}\overset{i}{=}\mathfrak{m}$ 且 $\mathfrak{M},\mathfrak{n}\models F(a_i)$，这里，$a_i$ 满足 (6) 中同样的条件.

从这个定义可得下面的一些结果：

(1) 对任意的 L 的公式 A 和任意的 $\mathfrak{M}$ 序列 $\mathfrak{m}$ 而言，在 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models A$ 和 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models\neg A$ 之中恰好有一个成立.

(2) 设 A 中的自由变元至多为 $a_{i_1},\cdots,a_{i_l}$，又设 $\mathfrak{m}$ 和 $\mathfrak{n}$ 为两个 $\mathfrak{M}$ 序列，使得 $m_{i_1}=n_{i_1},\cdots,m_{i_l}=n_{i_l}$，则 $\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models A$ 和 $\mathfrak{M},\mathfrak{n}\models A$ 是等价的.

(3) 如果 A 为闭公式，则对任意一对序列 $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ 而言，$\mathfrak{M},\mathfrak{m}\models A$ 和 $\mathfrak{M},\mathfrak{n}\models A$ 是等价的. 因此，对于闭公式 A，我们可以把"对某个(等价

地，对一切)$\mathfrak{M}$序列m而言，$\mathfrak{M}$, m$\models A$成立"这句话表示为$\mathfrak{M}\models A$.

(4) 设a_i为在$\forall x F(x)$或$\exists x F(x)$中不出现的任意变元，则$\mathfrak{M}$, m$\models \forall x F(x)$等价于：对于使n $\overset{i}{=}$ m成立的任意n而言，均有

$$\mathfrak{M},\ \mathrm{n}\models F(a_i).$$

同样地，$\mathfrak{M}$, m$\models \exists x F(x)$等价于： 存在一个n，使得n $\overset{i}{=}$ m且$\mathfrak{M}$, n$\models F(a_i)$.

【模型】 这里我们亦固定一种语言L. 设A为一个L的闭公式而$\mathfrak{M}$为一个L的结构.如果$\mathfrak{M}\models A$，则$\mathfrak{M}$称为A的**模型**(model). 如果$\Gamma=\{A_0, A_1, \cdots\}$为闭公式的任意集合且对$\Gamma$中一切$A_i$均有$\mathfrak{M}\models A_i$，则这个结构$\mathfrak{M}$便称为$\Gamma$的模型.

(1) **相容性** (consistency). 考察一个其语言为L的逻辑系统. 如果它的全体可证闭公式的集合有一模型,则该系统是相容的. 特别地,一阶谓词演算是相容的.

(2) **完备性** (completeness). 如果在每个结构中均可满足的那些闭公式在一个逻辑体系中都是可证的,则称该逻辑系统是完备的. 特别地,一阶谓词演算是完备的.

K. Gödel 证明了(2). 后来，Henkin 给出了另外的证明，这个证明的基本思想可用来证明以下命题：如果一个L的闭公式的集合Γ是相容的,则存在一个Γ的模型. Henkin 还引进了(非标准的)二阶语义,就该语义而言,二阶谓词演算[†]是完备的. 这可以通过把 Henkin 的(对于一阶的)技巧推广到二阶语言来证明.

(3) 这里我们把语言略作推广：添入二阶自由谓词变元$\alpha_1^n, \alpha_2^n, \cdots, \alpha_i^n, \cdots (n=1, 2, \cdots)$和二阶约束谓词变元$\varphi_1^n, \varphi_2^n, \cdots, \varphi_i^n, \cdots (n=1, 2, \cdots)$,这里$n$表示变元的空位个数. 此外的定义均与一阶谓词演算的情况相同. 但是，为了简单起见,我们假定没有常个体符号、函数符号或谓词符号.

结构的定义如下：设$\mathfrak{M}=[M; S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots]$，其中$M$为集合，$S_n$为$M\times\cdots\times M$ (n个)的子集的集合. $\mathfrak{M}$序列m的定义照旧，并且用$\mathfrak{s}_n$表示$(s_1^n, s_2^n, \cdots, s_i^n, \cdots)$，其中每个$s_i^n$都是$S_n$的元素. 可满足性的概念定义如下：

$\mathfrak{M}, (\mathrm{m}, \mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \cdots, \mathfrak{s}_n, \cdots)\models \alpha_i^n(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) \Leftrightarrow (m_{i_1}, \cdots, m_{i_n})\in s_i^n$.

$\mathfrak{M}, (\mathrm{m}, \mathfrak{s}_1, \cdots, \mathfrak{s}_n, \cdots)\models \forall \varphi_k^n A(\varphi_k^n) \Leftrightarrow$对于使$\mathfrak{s}'_n \overset{i}{=} \mathfrak{s}_n$的任意$\mathfrak{s}'_n$均有$\mathfrak{M}, (\mathrm{m}, \mathfrak{s}_1, \cdots, \mathfrak{s}'_n, \cdots)\models A(\alpha_i^n)$，这里，$\alpha_i^n$在不出现于$A(\varphi_k^n)$中的自由谓词变元中具有最小的下标.

$\mathfrak{M}, (\mathrm{m}, \mathfrak{s}_1, \cdots, \mathfrak{s}_n, \cdots)\models \exists \varphi_k^n A(\varphi_k^n) \Leftrightarrow$存在一个$\mathfrak{s}'_n$，使得$\mathfrak{s}'_n \overset{i}{=} \mathfrak{s}_n$，并且$\mathfrak{M}, (\mathrm{m}, \mathfrak{s}_1, \cdots, \mathfrak{s}'_n, \cdots)\models A(\alpha_i^n)$，其中$\alpha_i^n$满足上述相同的条件.

其余情况的可满足性定义与一阶谓词演算中的定义相同. 如果二阶谓词演算的一切公理在结构$\mathfrak{M}$中都是真的，则结构$\mathfrak{M}$称为**正规的**(normal).

二阶谓词演算的完备性：在一切正规结构中可满足的每一个闭公式在二阶谓词演算中都是可证的.

(4) 设L_4的基数为τ，而Γ为L的任意闭公式的集合. 如果Γ具有一个模型，则Γ具有基数为$\max(\tau, \aleph_0)$的模型. 这个(4)可作为 Henkin 方法的系而得到. 但在历史上，首先由 Th. Skolem 和 L. Löwenheim 证明其特例,后来，A. I. Mal'cev 和 A. Robinson 把结果推广了.

(5) 以下结果是属于 A. Tarski 和 R. L. Vaught 的.

定义 1. 对两个L的结构$\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$而言,如果对任意的闭L公式A，均有$\mathfrak{M}\models A\Leftrightarrow\mathfrak{N}\models A$,则称$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{N}$是初等(或算术)等价的.

定义 2. 设$\mathfrak{M}=[M; q_0, q_1, \cdots; g_0, g_1, \cdots; Q_0, Q_1, \cdots]$和

$$\mathfrak{N}=[N; r_0, r_1, \cdots; h_0, h_1, \cdots; R_0, R_1, \cdots]$$

为两个L的结构. 如果下列两条件满足，则称$\mathfrak{M}$为$\mathfrak{N}$的算术延拓(初等延拓)：

i) $M\supset N$; 序列$q_0, q_1, \cdots$与$r_0, r_1, \cdots$同型且$q_j=r_j$ ($j=0, 1, \cdots$); 序列$g_0, g_1, \cdots$与$h_0, h_1, \cdots$同型且g_i限制于N后便和h_i相等

$(j=0, 1, \cdots)$;序列 $Q_0, Q_1, \cdots$ 与 $R_0, R_1, \cdots$ 同型且 Q_i 限制于N后便和 R_i 相等 $(j=0,1,\cdots)$(如果本条件成立,则称 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{N}$ 的延拓).

ii) 对于L的任意的公式A和 $\mathfrak{N}$ 的任意的序列 $\mathfrak{n}$, 如果 $\mathfrak{N}, \mathfrak{n} \models A$, 则 $\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models A$.

定理 1. 设 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{N}$ 的延拓. $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{N}$ 的初等延拓的充分必要条件是: 对 L 的任意公式 $\exists x F(x)$ 和 $\mathfrak{N}$ 的任意的序列 $\mathfrak{n}$, 如果 $\mathfrak{M}, \mathfrak{n} \models \exists x F(x)$, 则存在$N$的某个元素 n, 使得对于满足 $\mathfrak{m} \overset{i}{=} \mathfrak{n}$ 及 $m_i = n$ 的任意 $\mathfrak{M}$ 序列 $\mathfrak{m}$, 均有 $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models F(a_i)$, 其中, a_i 为在 $F(x)$ 中不出现的任意的自由变元.

定理 2. 这里我们对 L 加上一个条件: L 中符号集为数至多可数并且排列为 ω 型. 设 $\mathfrak{M}$ 的全域M的基数为 $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ 为无穷基数), M' 为 M 的子集其基数为 $\mathfrak{c}$, 而 $\mathfrak{b}$ 为满足 $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{a}$ 的一个无穷基数. 这时,存在一个 L 的结构 $\mathfrak{N}$,其全域N具有基数 $\mathfrak{b}$, $M' \subset N$, 并且 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{N}$ 的初等延拓.

定理 3. 假设L满足定理 2 中同样的条件. 又设 $\mathfrak{M}$ 的全域M的基数为 $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ 为无穷基数)而 $\mathfrak{b}$ 为满足 $\mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$ 的基数. 这时,存在一个 L 的结构 $\mathfrak{N}$, 使得它的全域具有基数 $\mathfrak{b}$, 且 $\mathfrak{N}$ 为 $\mathfrak{M}$ 的真初等延拓.

【超积】 关于模型论虽然有各种结果, 但其基本结果之一却是关于超积的理论.

假设对L的结构的某个集合 Γ 和下标的集合 I, 给出一个从 I 到 Γ 上的单值映射 θ. 如果 α 为 I 的元素, $\mathfrak{M}$ 为 Γ 的元素,而有 $\theta(\alpha) = \mathfrak{M}$, 则 $\mathfrak{M}$ 可表为 $\mathfrak{M}^\alpha$. 应当注意, 可能有几个 α 对应于同一个结构. 命D为 I 的极大滤子[†]而 $\mathfrak{M}^\alpha$ 表为

$$\mathfrak{M}^\alpha = [M^\alpha; \bar{c}^\alpha, \cdots; \bar{f}^\alpha, \cdots; \bar{P}^\alpha, \cdots],$$

则 $\prod_{\alpha \in I} M^\alpha$ 可定义为:

$$\prod_{\alpha \in I} M^\alpha = \Big\{ \varphi \,|\, \varphi \text{是 } I \text{ 到} \bigcup_{\alpha \in I} M^\alpha \text{ 的映射},$$

其中$\varphi(\alpha) \in M^\alpha \Big\}$. 对于 $\prod_{\alpha \in I} M^\alpha$ 的任意两个元素 φ 和 ψ, 用

$$\varphi \overset{D}{=} \psi \Leftrightarrow \{\alpha \,|\, \varphi(\alpha) = \psi(\alpha)\} \in D$$

来定义 $\varphi \overset{D}{=} \psi$; 则 $\varphi \overset{D}{=} \psi$ 为 $\prod_{\alpha \in I} M^\alpha$ 的元素之间的等价关系. 这时, 可用 $\prod_{\alpha \in I} M^\alpha / D$ 表示由 $\overset{D}{=}$对集合 $\prod_{\alpha \in I} M^\alpha$所作的划分,而 $\prod_{\alpha \in I} M^\alpha / D$ 的每一个元素 m 可用 $m = [\varphi]$ 表示,这里 φ 为 m 的表示元素.

下面我们定义一个由 Γ 产生新结构的算子. 设$M = \prod_{\alpha \in I} M^\alpha / D$. 对$L$的常个体 c, 命 $\bar{c} = [\varphi]$ (这里,对每个 α 有 $\varphi(\alpha) = \bar{c}^\alpha$). 对于$L$的 n 元函数 f 和M的任意元素

$$m_1 = [\varphi_1], \cdots, m_n = [\varphi_n],$$

定义 $\bar{f}(m_1, \cdots, m_n) = [\psi]$ (这里,对每个 α, $\psi(\alpha) = \bar{f}^\alpha(\varphi_1(\alpha), \cdots, \varphi_n(\alpha))$). 对于 L 的 n 元谓词 P, 用

$$\langle m_1, \cdots, m_n \rangle \in \bar{P} \Leftrightarrow$$
$$\{\alpha \,|\, \langle \varphi_1(\alpha), \cdots, \varphi_n(\alpha) \rangle \in P^\alpha\} \in D$$

来定义 $\langle m_1, \cdots, m_n \rangle \in \bar{P}$.

给出了这些定义后,设

$$\mathfrak{M} = [M; \bar{c}, \cdots; \bar{f}, \cdots; \bar{P}, \cdots]$$

并表为 $\mathfrak{M} = \prod_{\alpha \in I} \mathfrak{M}^\alpha / D$, 这里 $\prod_{\alpha \in I} \mathfrak{M}^\alpha / D$ 称为 $\{\mathfrak{M}^\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的(关于D的)**超积** (ultraproduct). $\mathfrak{M}$ 为L的一个结构.

超积的基本定理: 设 $\mathfrak{M} = \prod_{\alpha \in I} \mathfrak{M}^\alpha / D$ 为 $\{\mathfrak{M}^\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的超积, $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, \cdots)$ 为 $\mathfrak{M}$ 序列, φ_i 为 m_i 的表示元素, A 为任意的公式. 这时, $\mathfrak{M}, \mathfrak{m} \models A$ 与 $\{\alpha \,|\, \mathfrak{M}^\alpha, (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \cdots) \models A\} \in D$ 等价. 特别地, 当A为闭公式时, $\mathfrak{M} \models A$ 与 $\{\alpha \,|\, \mathfrak{M}^\alpha \models A\} \in D$ 等价.

在一切结构 $\mathfrak{M}^\alpha$ 均与单个结构 $\mathfrak{N}$ 重合的情况下, $\{\mathfrak{M}^\alpha\}_{\alpha \in I}$ 的(关于D的)超积可记为 $\mathfrak{N}^I/D$ 并称为 $\mathfrak{N}$ 的(关于D的)**超幂** (ultrapower).

设

$$\mathfrak{M} = [M; q_0, q_1, \cdots; g_0, g_1, \cdots; Q_0, Q_1, \cdots]$$

和

$$\mathfrak{N} = [N; r_0, r_1, \cdots; h_0, h_1, \cdots; R_0, R_1, \cdots]$$

为两个结构. 如果有从 M 到N的双射 f, 使得以下三个条件成立, 则 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 称为**同构的**

(isomorphic): (i) $f(q_0)=r_0$, $f(q_1)=r_1$, $\cdots$ (ii) 序列 $g_0, g_1, \cdots$ 和 $h_0, h_1, \cdots$ 是同型的,并且对 M中的每个 n 元向量 $(a_1,\cdots,a_n)$均有 $f(g_j(a_1,\cdots,a_n)) = h_j(f(a_1),\cdots,f(a_n))$. (iii) 序列 $Q_0, Q_1, \cdots$ 和 $R_0, R_1, \cdots$ 是同型的并且 $R_j = \{\langle f(a_1),\cdots,f(a_n)\rangle | \langle a_1,\cdots,a_n\rangle \in Q_j\}$.

设 j 为从N到 N^I/D 的函数, 其定义如下: 对每个 $a \in N$, $j(a) = [\varphi_a]$, 这里, φ_a 为从 I 到N的常函数, 使得对每个 $\alpha \in I$, $\varphi_a(\alpha) = a$. 设 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{N}^I/D$ 的子结构, 其全域为 j 的值域, 则 j 为从 $\mathfrak{N}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的同构. 以下对每个$a \in N$, 我们把 a 与 $j(a)$ 视作等同. 于是,根据超积的基本定理, $\mathfrak{N}$ 为 $\mathfrak{N}^I/D$ 的初等子结构.

如果 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 是同构的,则 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 是初等等价的. 根据这一事实和超积的基本定理, 我们有以下结果: 设 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 为两个结构. 如果有一个非空集 I 和 I 上的极大滤子 D, 使得 $\mathfrak{M}^I/D$ 和 $\mathfrak{N}^I/D$ 是同构的, 则 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 是初等等价的. 对于这个命题的逆命题, H. J. Keisler 用 G. C. H. (广义连续统假设) 进行了证明, 后来, S. Shelah 不用 G. C. H. 也证明了. **Keisler-Shelah 同构定理** (Keisler-Shelah isomorphism theorem): 设 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 为两个结构. 这时, $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 为初等等价的充分必要条件是: 存在一个非空集 I 和 I 上的极大滤子D, 使得 $\mathfrak{M}^I/D$ 和 $\mathfrak{N}^I/D$ 是同构的.

超积运算在数论、代数几何和分析中有各种应用. 这里我们给出 J. Ax 和 S. Kochen 的一个例子. 设P为素数的集合. 对P中的每个 p, 设 $\mathbf{Q}_p$ 和 $Z_p((t))$ 分别为 p-adic 数的域和 $Z_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ 上的形式幂级数的域. **Ax-Kochen 同构定理** (Ax-Kochen isomorphism theorem): 假设D为 P上的非主的极大滤子, 则 $\prod_{p\in P} \mathbf{Q}_p/D$ 和 $\prod_{p\in P} Z_p((t))/D$ 是同构的.

作为这条定理的直接推论, 我们有关于不定方程的 Artin 猜想的部分解答. 定理: 对每个正整数 d, 存在一个素数的有穷集合 Y, 使得对每个 $p \notin Y$ 而言, 每个 $\mathbf{Q}_p$ 上的 d 次齐次多项式 $f(t_1,\cdots,t_n)$ $(n > d^2)$ 均在 $\mathbf{Q}_p$ 中有一个非平凡的零点(→不定方程).

我们给出另一个非标准分析中的例子. A Robinson 在 [3] 中发展了非标准分析的一般理论. 这里我们介绍 A. R. Bernstein 的一个定理. 设X为一个非空集, $U(X)$ 是以 X 为元素的最小可迁集 (即由 $a \in b$ 和 $b \in U(X)$ 可推出 $a \in U(X)$) 且对下列运算封闭: 作对偶集, 作并集, 作幂集, 作子集(即如果 $a \in U(x)$ 且 $b \subset a$, 则有 $b \in U(x)$). 设L为具有同异性的一阶谓词逻辑, 它的非逻辑常数集合是由二元谓词符号 $\in$ 和常个体符号 c_a $(a \in U(X))$组成的(→符号逻辑). 这时, 一阶结构 $\mathfrak{N} = [U(X), a(a \in U(X)); E]$ 为一个 L的结构, 这里, E 为集合 $U(X)$ 上的 $\in$ 关系. 又设 $\mathfrak{M} = [U(X)^I_D: a(a \in U(X)); E^I_D]$ 为 $\mathfrak{N}$ 的关于集合 I 上非主超滤子D的超幂. 对每个 $a \in U(X)$, 设 a^* 为 $U(X)^I_D$ 中使得 $\{i \in I | \varphi(i) \in a\} \in D$ 成立的全体元素 $[\varphi]$ 的集合. 如果 a 是无穷的, 则 a 是 a^* 的真子集. 因为 $\mathfrak{N}$ 和 $\mathfrak{M}$ 是初等等价的, 所以, 集合 a 和 a^* 在如下意义之下有公共的一阶性质: 对 L 中每个公式 $\Phi(x)$, 均有$(\forall b \in a)(\mathfrak{N} \models \Phi[b]) \Leftrightarrow (\forall b \in a^*)(\mathfrak{M} \models \Phi[b])$.

由此可知, 如果 r 为 $\mathfrak{N}$ 中集合 a 上的关系, 则 r^* 为集合 a^* 上的关系; 并且, 如果 f 为 $\mathfrak{N}$ 中由 a 到 b 的映射, 则 f^* 为由 a^* 到 b^* 的映射. 因此, a^* 这个数学对象和 a 非常相似. 根据 a 与 a^* 之间的这种相似, 我们便有以下结果.

设 H为复数域 $\mathbf{C}$ 上的 Hilbert 空间且 $\dim(H) = \omega$, T 为H上的有界线性算子. 设 $X = H \cup \mathbf{C}$, 并考察上述的一阶结构 $\mathfrak{M}$. 因为 $\mathbf{R}$ (一切实数的集合) 和 $\mathbf{N}$ (一切自然数的集合)是属于 $U(X)$ 的无限集合, 所以, $\mathbf{R}^*$ 和 $\mathbf{N}^*$ 分别有不属于 $\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{N}$ 的元素. 这种元素分别称为**非标准实数** (nonstandard real number) 和**非标准自然数** (nonstandard natural number). 根据超积的基本定理, 我们可以得出如下结论: 存在许多非标准实数 α, 使得对任何 $a \in \mathbf{R}$, 在 $\mathbf{R}^*$ 中均有 $0 < {}^*\alpha < {}^*a$. 这种非标准实数 α 称为**无穷小实数** (infinitesimal real number). 因为,

模运算$\| \|$是由H到$\mathbf{R}$的映射，所以，$\| \|^*$是由H^*到$\mathbf{R}^*$的映射．如果$\|x\|^*(x \in H^*)$为无穷小，则称x为H^*中的**无穷小**（infinitesimal）．设S为H的全体线性子空间的集合． 设K为H^*的线性子空间且包含在S^*中，K^0为满足下列条件的元素$x \in H$的集合：存在K中的某个x_0，使得$x - x_0$为无穷小．这时，K^0是H的闭线性子空间． 设$\mathfrak{e} = \{e_i\}_{i \in \mathbf{N}}$为 Hilbert 空间$H$的标准正交基；$\mathfrak{e}$可看作由$\mathbf{N}$到$H$的映射，因此，$\mathfrak{e}^* = \{e_j\}_{j \in \mathbf{N}^*}$为由$\mathbf{N}^*$到$H^*$的映射． 对每个$j \in \mathbf{N}^*$，设$H_j$是$H^*$中由$\{e_k | k \leqslant j\}$所生成的线性子空间．对于$H$上的一个给定的有界线性算子$T$，$T^*$是$H^*$上的一个线性算子．我们定义$T_j = P_j T^* P_j$，其中，$P_j$为由$H^*$到$H_j$上的射影．因为，$\dim(H_j) = j$是一个（非标准）自然数，所以，存在由一些$H_j$中的闭的对$T_j$不变的线性子空间组成的宝塔：$J_{0j} \subset J_{1j} \subset \cdots \subset J_{jj} = H_j$而$\dim(J_{kj}) = k (k \leqslant j)$． 于是，$J_{kj}^0$是一些$H$中的闭的对$T$不变的线性子空间． 如果有一个多项式$p(x)$，使得$p(T)$为紧算子，则我们便有一个非标准的自然数$j$，使得对于某个$k \leqslant j$，$J_{kj}^0$为$H$的真子空间． 由此便得出以下结果，它对 K. Smith 和 P. R. Halmos 问题给以肯定的解答． 定理（Bernstein [8]）：设T为无穷维复 Hilbert 空间H上的有界线性算子，又设$p(x) \neq 0$为复系数多项式，使得$p(T)$为紧的，则除H和$\{0\}$以外，T至少还使得H的一个闭线性子空间保持不变．

【关于势的范畴性】 设Γ为一阶语言L中的闭公式的集合，其中具有指定的二元谓词符号P_0．以下我们假定对每个L结构$\mathfrak{M}$而言，$\mathfrak{M}$对P_0的解释$\bar{P}_0$都是在$\mathfrak{M}$的全域中的相等关系．如果Γ的一切模型都是同构的，则Γ称为范畴的． 根据［模型］这一节的定理 3，任何Γ，只要它具有无穷基数的模型，便不是范畴的．因此，不存在有兴趣的范畴的Γ． 所以，我们考察比较弱的**势的范畴性**（categoricity in powers）的概念． 设κ为无穷基数而$n(\Gamma, \kappa)$是以κ为基数的Γ的非同构模型的个数． 如果$n(\Gamma, \kappa) = 1$，即以κ为基数的Γ的一切模型都是同构的，那么，Γ便称为关于κ是范畴的或称Γ是范畴于κ的．存在许多有兴趣的Γ，它们关于某些κ是范畴的． 例如，特征为 0 的代数闭域的公理的集合是范畴于$\aleph_1$的，又无端点的稠密线性排序的公理集合是范畴于$\aleph_0$的． 就这个概念而言，J. Łoś 猜想：如果对某个$\kappa > \bar{\bar{L}}$（L的基数），Γ是范畴于κ的，则对一切$\kappa > \bar{\bar{L}}$，Γ是范畴于κ的． M. Morley 在$\bar{\bar{L}} = \aleph_0$的情况下肯定地解决了这个猜想，后来，S. Shelah 在一般情况下解决了这个问题． 定理（1）：设Γ为L中闭公式的集合，则对某个$\kappa > \bar{\bar{L}}$，Γ是范畴于κ的，当且仅当对一切$\kappa > \bar{\bar{L}}$，Γ是范畴于κ的．我们还有以下的有趣的定理．它是由 J. T. Baldwin 和 A. H. Lachlan 给出的．定理（2）：设Γ为L中的闭公式的集合而$\bar{\bar{L}} = \aleph_0$． 如果Γ是范畴于$\aleph_1$的，则$n(\Gamma, \aleph_0) = 1$或$\aleph_0$．

【参】 [1] A. Robinson, Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, North-Holland, 1963; [2] S. C. Kleene, Mathematical logic, John Wiley, 1967; [3] A. Robinson, Non-standard analysis, North-Holland, 1966（中译本：A. 鲁滨逊，非标准分析，科学出版社， 1980）； [4] M. Machover-J. Hirschfeld, Lectures on non-standard analysis, Lecture notes in math. 94, Springer, 1969; [5] A. Tarski-R. L. Vaught, Arithmetical extensions of relational systems, Compositio Math., **13** (1958), 81—102; [6] C. C. Chang-H. J. Keisler, Model theory, North-Holland, 1973; [7] G. E. Sacks, Saturated model theory, Benjamin, 1972; [8] A. R. Bernstein, Non-standard analysis, in Studies in model theory 8, M. D. Morley ed., Math. Association of America, 1973, p. 35—58.

公理集合论 ［英 axiomatic set theory 法 théorie axiomatique des ensembles 德 axiomatische Mengenlehre 俄 аксиоматическая теория множества 日 公理の集合論］ **公理集合论**是把 G. Cantor 所创始的朴素的集合论所考虑的内容公理化地展开，从而对集合论进行数学基础论的考察．

集合论的公理化是由 E. Zermelo（[16]）首先提出而由 A. Fraenkel（[3]）完成的． J. von Neumann（[11, 12]）则用符号逻辑的方法把它形式化、消除了含混的概念并作了形式的推广． P. Bernays 和 K. Gödel（[1, 5]）进

一步改进和简化了 von Neumann 的形式构造. 两者的内容虽被看作一样的,但是,形式推广之前的理论称为 **Zermelo-Fraenkel 集合论**(缩写为 ZF)(Zermelo-Fraenkel set theory),而形式推广之后的理论则称为 **Bernays-Gödel 集合论**(缩写为 BG)(Bernays-Gödel set theory).

【Zermelo-Fraenkel 集合论】 ZF 是在含有谓词符号"="(同异性)的一阶谓词逻辑†之上而形式化的、并且使用下列公理 1—9 的形式系统. 这些公理除了 $\in$ 之外不再包含其他的谓词,这里,$x\in y$ 读作"x 为 y 的元素". 只用 $\in$ 作为谓词的公式†称为**集合论公式** (set-theoretic formula). 下面是它的公理.

公理 1: $\exists x\forall u\neg(u\in x)$.

这条公理断言: 存在没有元素的集合, 即存在**空集** (empty set). 空集用 $\varnothing$ 表示.

公理 2:

$\forall x\forall y(\forall u(u\in x\rightleftarrows u\in y)\to x=y)$.

这条公理断言:元素相同的集合是相等的,它称为**外延性公理** (axiom of extensionality).

公理 3:

$\forall x\forall y\exists z\forall u(u\in z\rightleftarrows u=x\vee u=y)$.

这条公理断言:对任意集合 x 和 y,存在只以 x 和 y 为其元素的集合 z. 集合 z 称为 x 和 y 的**无序对** (unordered pair) 并表示为 $\{x, y\}$. 集合 $\{\{x,x\}, \{x,y\}\}$ 称为 x, y 的**序对** (ordered pair) 或简称为**对**, 并表示为 (x, y), x 为第一元素, y 为第二元素.

公理 4:

$\forall x\exists y\forall u(u\in y\rightleftarrows\exists v(u\in v\wedge v\in x))$.

这条公理断言:对任意集合 x,存在由 x 所含有的元素集合所组成的**并集** (union, sum) y. 集合 y 用 $\mathfrak{S}(x)$ 表示.

公理 5:

$\forall x\exists y\forall u(u\in y\rightleftarrows\forall v(v\in u\to v\in x))$.

对任何集合 s 和 t 而言,$\forall r(r\in s\to r\in t)$ 可表示为 $s\subset t$. 这时可说"s 为 t 的**子集** (subset)". 于是,公理 5 可表示为

$\forall x\exists y\forall u(u\in y\rightleftarrows u\subset x)$.

这也就是说, 公理 5 断言: 对任意集合 x, 存在由 x 的一切子集所构成的集合 y. 集合 y 称为 x 的**幂集** (power set) 并且用 $\mathfrak{P}(x)$ 表示.

公理 6: 对任何集合论公式 $A(u, v)$, 我们有:

$\forall u\forall v\forall w(A(u,v)\wedge A(u,w)\to v=w)\to$
$\forall x\exists y\forall v(v\in y\rightleftarrows\exists u(u\in x\wedge A(u,v)))$

这条公理断言: 对任意的集合 x 通过任何单值映射所得的像仍为集合. 它是由 Fraenkel ([3]) 首先引入的. 公理 6 虽然被称为**替换公理** (axiom of replacement), 事实上, 由于有无穷多个 $A(u, v)$, 故它并不是一条公理而是无穷多条公理的模式.

公理 7: 对任何集论公式 $A(u)$, 我们有

$\exists xA(x)\to\exists x(A(x)\wedge\neg\exists y(A(y)\wedge y\in x))$

这条公理也是无穷多条公理的模式. 根据这条公理, 我们可以导出: 不可能有 x 满足 $x\in x$. 如果,我们又假定有下面的公理 8, 则公理 7 和以下事实等价: 并不存在

$$x_1\ni x_2\ni x_3\cdots\ni x_n\ni x_{n+1}\ni\cdots$$

这样的无穷递降链. 这条公理称为**正则性公理** (axiom of regularity).

公理 8: $\forall x\,[\forall u\ (u\in x\to\exists v\ (v\in u))\wedge\forall u\forall v\ ((u\in x\wedge v\in x\wedge\neg u=v)\to\neg\exists w\ (w\in u\wedge w\in v))\to\exists y\{y\subset\mathfrak{S}(x)\wedge\forall u(u\in x\to\exists z\ (z\in u\wedge z\in y\wedge\forall w\ (w\in u\wedge w\in y\to w=z)))\}]$.

这条公理断言: 对任何互不相交的、不包含空集的集合族 x, 存在集合 y, 它为 x 的并集的子集且恰好与 x 中的每个集合公有一个元素. 这个集合 y 称为 x 的**选择集** (德 Auswahlmenge) 而公理 8 称为**选择公理** (axiom of choice).

公理 9: $\exists x(\exists u(u\in x)\wedge\forall u(u\in x\to$
$\exists v(v\in x\wedge u\subset v\wedge\neg v=u)))$.

这条公理断言存在无穷集 x, 并且称为**无穷公理** (axiom of infinity). 此外还存在许多表述无穷公理的说法. 如果, 我们承认公理 9, 则可以用替换公理或下述公理 6′ 而把公理 1 推出来,故公理 1 可以省掉.

Zermelo 不用替换公理(公理 6)而用公理 6′:

公理 6′： 对任何集合论公式 $A(u)$，我们有

$$\forall x\exists y\forall u(u\in y\rightleftarrows u\in x\wedge A(u)).$$

这条公理称为**子集公理** (axiom of subsets) 或**分离公理** (德 Aussonderungsaxiom)，它断言：对任意集合 x，存在通常用 $\{u|u\in x, A(u)\}$ 所表示的集合 y. 公理 6′ 可由公理 6 推出.

用公理 6′ 代替公理 6 的集合论称为 **Zermelo 集合论**. 它比 ZF 弱. 事实上，全体自然数的集合 ω 以及

$$\mathfrak{P}(\omega), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega)), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega))), \cdots$$

的存在,可以在 Zermelo 集合论中加以证明,而集合 $\{\omega, \mathfrak{P}(\omega), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega)), \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega))), \cdots\}$ 的存在却不能证明. 但是，我们可以在 ZF 中证明它的存在.

基于公理 1—8 的集合论称为**一般集合论** (general set theory). 一般集合论的相容性能够化归为自然数理论的相容性,即设 n 为自然数，而 $n=2^{n_1}+2^{n_2}+\cdots+2^{n_k}$ $(n_1<n_2<\cdots<n_k)$ 为它的二进制表示. 再设 l 为自然数，如果把"l 是 n 的元素"定义为"l 等于上述的 n_i 之一",并把一集合与一自然数等同起来，我们便可以在自然数理论中得到一般集合论的模型了.

【Bernays-Gödel 集合论】 对任给的集合论公式 $A(u)$ 而言，$\{u|A(u)\}$ 的存在一般不能由 ZF 公理推出. 我们把它与集合区别开来，并且称为**类** (class). 我们对一阶谓词逻辑添入类变元、类常数和有关相应的类量词的推理规则而得到一个扩大的逻辑系统，这时，集合论公式便指不含关于类的约束变元的公式. 设 $A(u)$ 为任意的集合论公式,我们添入

$$\exists X\forall u(u\in X\rightleftarrows A(u))$$

作为公理,这里,大写字母 X 为类变元. 如此得出的集合论等价于 **Gödel 集合论** ([5]). von Neumann 利用函数概念而不用类的概念作出了集合论的公理系统 ([11,12]). 后经 Bernays 和 Gödel ([1, 5]) 加以整理而得到类的概念. 这便是 **Bernays-Gödel 集合论** BG.

ZF 和 BG 有如下关系： 任何在 ZF 中可证的公式在 BG 中都可证,反之，任何在 BG 中可证的集合论公式而既无类变元又无类常数者，在 ZF 中也可证. 因此,两个系统本质上是等价的. 但是,由于 BG 有类变元和类常数，它对于表达集合论的各个概念是更加方便的.

von Neumann 用超限归纳法† ([13]) 定义以下函数 R:

$$R(0)=\varnothing, R(\alpha)=\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{P}(R(\beta)),$$

其中，α,β 为序数而 $\bigcup_{\beta<\alpha}\mathfrak{P}(R(\beta))$ 表示 $\mathfrak{P}(R(0))$, $\mathfrak{P}(R(1))$, $\cdots$, $\mathfrak{P}(R(\beta))$, $\cdots(\beta<\alpha)$ 的并集. 这样的函数 R 可以用集合论公式来定义，所以,作为类而言它是存在的. 现在,考察下述模型† $M=M(\alpha)$, α 是一个固定的序数; 该模型的集合指 $R(\alpha)$ 的元素，而该模型的类指 $R(\alpha)$ 的子集. 用 $\in_M$ 表示该模型的 $\in$ 关系，对模型的类 X 和 Y, 令 $X\in_M Y\rightleftarrows X\in Y$.这时，$R(\alpha)$ 为 BG 的模型的充分必要条件是: α 为强意义下的不可到达序数†(→序数)([14]). 因此，不可到达序数的存在不可能由 ZF 公理推出.有一系列关于集合论公理系统的研究，它们假定存在任意多个不可到达序数 ([6, 7, 8, 15]). 当 $R(\alpha)$ 为 BG(ZF) 模型时，它便称为 BG(ZF) 的**自然模型** (natural model). 此外,如果我们考察 α 为全体序数的情况,这时，$R(\alpha)$ 表为 H, 则 H 满足 BG(ZF) 的一切公理. 由于定义类 H 时不需要正则性公理，故只要没有正则性公理的 BG(ZF) 是相容的，则 BG(ZF) 也是相容的 ([13]).

【连续统假设和选择公理的独立性】 这样，集合论的公理化便推动着从数学基础的观点出发而对一些问题进行研究，这些问题是 Cantor 的素朴集合论出现之后仍然遗留的尚未解决的问题. 在这些问题中，连续统假设和选择公理的独立性†问题占着中心的地位.

选择公理和连续统假设的相容性. Gödel ([5]) 证明，如果无选择公理的 ZF 是相容的，则把选择公理和广义连续统假设†加到 ZF 中所得的系统也是相容的. 为了证明这一点，他按如下方式构造了一个满足选择公理和广义连续

统假设的 ZF 模型. 首先，假设M为任意个体域，在M的元素之间定义了$\in$关系. 所谓M上的公式，我们理解为这样的公式，即它仅以M的常数为其常数，仅以$\in$作为其唯一的谓词符号,而且其变元的变化范围仅局限于M. 设我们用M'表示由M上的公式$A(x)$所定义的M的子集的全体. 现在，设$M_0=\{\varnothing\}$, $M_{\alpha+1}=M'_\alpha$, 若β为极限序数†,则 $M_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta}M_\alpha$. 如果对某个序数$\alpha$(如果有不可到达序数,则$\alpha$须小于第一个不可到达序数)而言,有$x\in M_\alpha$, 则称$x$为**可构造的** (constructible). 我们用L表示可构造集x的全体并且用V表示 ZF 集合的全体. 这时，公理$V=L$，即每个集合都是可构造的，称为**可构造性公理** (axiom of constructibility). 如果我们把这个公理加到 ZF 中，则选择公理和广义连续统假设便成为可证的了. 另一方面，如果把L的元素看作模型的集合,把原有的$\in$关系看作模型的$\in$关系,我们便得到 ZF 的模型，这时,可构造性公理便在该模型中成立了.

选择公理和连续统假设的独立性. 与 Gödel 的结果相对照，人们早就试图证明选择公理是独立于集合论的其他公理的. Fraenkel ([4]) 曾经从可数个不是集合的个体出发，构造了一个不满足选择公理的集合论模型. A. Mostowski 在 ZF 中构造了一个其个体不是集合的集合论模型,并且他证明,这个模型满足公理: 每个集合可以是线性有序†的,但不满足选择公理 ([10]). E. Mendelson 利用无穷递降链 $a_1\ni a_2\ni a_3\ni\cdots$ 构造了一个集合论的模型 ([9])，这个模型不满足选择公理. 虽然这些模型满足了除去选择公理而外的大多数 ZF 公理或大多数 Zermelo 集合论的公理，但它们并不满足除去选择公理后的全体公理. 因此，作为独立性的证明而言,它们是不够充分的.

P. J. Cohen ([17]) 证明了与选择公理、连续统假设和 $V=L$ 的独立性有关的以下结果：如果ZF是相容的,则下列每一个条件都具有模型. (1) 选择公理和广义连续统假设成立，但是,存在一个a，满足 $a\notin L$ 且 $a\subset\omega$; (2) $\mathfrak{P}(\omega)$不是良序的; (3) 选择公理成立,但是，连续统假设不成立; (4) $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega))$ 不可能线性排序.

根据 (1)，我们看到$V=L$是独立于选择公理和广义连续统假设的; (2) 说明选择公理的独立性; (3) 说明连续统假设是独立于选择公理的. 对于 (4)，由于 $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\omega))$ 对应于定义在区间 $[0,1]$ 上的所有实值函数的集合F，从而 (4) 说明“F可线性排序”这个命题不可能在无选择公理的 ZF 中得到证明.

【一些新近的结果】

1. 基数性与共尾性(一基数) (i) (W. B. Easton [21]) 设$\mathfrak{M}$是 ZFC 的模型(即 Zermelo-Fraenkel 公理加选择公理)，在其中G.C.H.(广义连续统假设)是有效的,即 $\forall\alpha(2^{\omega_\alpha}=\omega_{\alpha+1})$,并且设$g$为$\mathfrak{M}$中从序数到序数的函数,使得$\forall\alpha,\beta$ $(\alpha<\beta\Rightarrow\omega_{g(\alpha)}\leqslant\omega_{g(\beta)})$和$\forall\alpha(\omega_\alpha<\mathrm{cf}(\omega_{g(\alpha)}))$. 这时,存在一个 ZFC 的 Boole 模型$\mathfrak{N}$,使得$\mathfrak{N}\supset\mathfrak{M}$，具有同样的共尾性并且对每个正则基数都满足 $2^{\omega_\alpha}=\omega_{g(\alpha)}$. (这意味着 König 的条件 $(\mathrm{cf}(2^{\omega_\alpha})>\omega_\alpha)$是对正则的$\omega_\alpha$的方幂的基数性的仅有限制.) (ii) (J. H. Silver [38]) 假设 $\omega<\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{cf}(\omega_\alpha)<\omega_\alpha$, 则对任何 $\lambda<\mathrm{cf}(\alpha)$ 均有

$$\forall\nu<\alpha(2^{\omega_\nu}\leqslant\omega_{\nu+\lambda})\rightarrow 2^{\omega_\alpha}\leqslant\omega_{\alpha+\lambda}.$$

但是,蕴涵式

$$\forall n<\omega(2^{\omega_n}=\omega_{n+1})\rightarrow 2^{\omega_\omega}=\omega_{\omega+1}$$

的正确性仍然是一个未解决的问题.

2. Lebesgue 可测性和 Baire 性质. 众所周知,实数的每个 Δ^1_1 (Borel) 集合(因而每个Σ^1_1 (解析) 集合) 是 Lebesgue 可测的并且具有 Baire 性质. (i) (K. Gödel) 由$V=L$可推得，存在实数的一个Δ^1_2集合,它既不是 Lebesgue 可测也没有 Baire 性质. 设 DC 表示**相依选择原则** (principle of depending choice):

$$\forall x\in a\exists y\in aP(x,y)$$
$$\rightarrow\exists f:\omega\rightarrow a\forall n\in\omega P(f(n),f(n+1)).$$

DC 对测度论的古典概念〔例如，Jordan 分解，Radon-Nikodym 导数等)的发展是足够的. 设 I 表示假设

$$\exists\alpha(\mathrm{cf}(\omega_\alpha)=\omega_\alpha\wedge\forall\beta<\alpha(2^{\omega_\beta}<\omega_\alpha))$$

(**强不可到达的** (strongly inaccessible)).

(ii) (R. Solovay [40]) 由 ZFC 与 I 的相容性可推出 ZF 与以下两公理之一的相容性: (a) DC 加上假设: 每个实数集都是 Lebesgue 可测的并且具有 Baire 性质. (b)选择公理加上假设: 每一个可以由序数的 ω 序列定义的实数集都是 Lebesgue 可测的并且具有 Baire 性质. 公理 (a) 说明 DC 的强度不足以构造一个 (Lebesgue) 不可测集, 而公理 (b) 意味着每个射影集是 Lebesgue 可测的并且具有 Baire 性质,因此可推出, 一切可构造的实数的集合,作为一个 Σ_2^1 集合, 其 Lebesgue 测度为零, 并且是属于第一范畴的.

3. **Martin 公理.** 设 B 为 Boole 代数. 如果 B 的正元素的每个不相交的族的基数性至多为 ω_α, 则我们便说 B 满足 ω_α c. c. (链条件). 设 B^* 表示由所有同态 $h: B \to 2 = \{0, 1\}$ 所组成的拓扑空间, 其开基为 $U(a) = \{h | h(a) = 1\} (a \in B)$,则 B^* 为 Baire 空间. 于是, **Martin 公理** (Martin's axiom) (MA) 为: 设 B 为满足 ω c. c. 的 Boole 代数且 $\alpha < 2^\omega$, 则 α 个稠密开集的交集在 B^* 中是稠密的. 因为如果 $\Sigma_\nu a_\nu = b$, 则 $\{h | \Sigma_\nu h(a_\nu) = h(b)\}$ 在 B^* 中是稠密的并且是开的,故 MA 意味着存在一个 $h \in B^*$, 它保持 B 中任给的 $\alpha (\alpha < 2^\omega)$ 个方程. 如果 $2^\omega = \omega_1$, 则 MA 不过化归为 B^* 的 Baire 性质. 但是, 如果 $2^\omega > \omega_1$, 则 ω c. c. 这个假设是必要的,因为有一个 B,它满足 ω_1 c. c. 且使得 B^* 包含 ω_1 个稠密开集而其交集为空集. (i) (R. M. Solovay 和 S. Tennenbaum [42]) ZF 的相容性蕴涵 ZFC, MA 和 $2^\omega > \omega_1$ 的相容性. (ii) (D. A. Martin 和 R. M. Solovay [31])由 ZFC, MA 和 $2^\omega > \omega_1$ 可以推出以下命题: (a) $\forall \alpha < 2^\omega (2^\alpha = 2^\omega)$, 因此, $2^\omega = 2^{\omega_1}$; (b) Lebesgue 测度为零的集合的第一范畴集合,其全体对任何 $\alpha < 2^\omega$ 而言都是 α 可加性的. (c) 实数的每个 Σ_2^1 集合都是 Lebesgue 可测的并且具有 Baire 性质.

4. **Souslin 假设** (SH): 每个稠密的、线性的有序完备集合, 如果无端点且至多含有 ω 个不相交区间,则它和实数连续统是序同构的. (i) (T. J. Jech, S. Tennenbaum) 由 ZF 的相容性可推出 (a) ZFC, ¬SH 和 GCH 的相容性以及 (b) ZFC, ¬SH 和 $2^\omega > \omega_1$ 的相容性. (ii) (R. Jensen [26])由 ZF 的相容性可推出 ZFC, SH 和 $2^\omega = \omega_1$ 的相容性. (iii) (Solovay-Tennenbaum [42]) 由 ZFC, MA 和 $2^\omega > \omega_1$ 可推出 SH. (iv) (R. Jensen [26]) 由 $V = L$ 可推出 ¬SH.

5. **可测的基数和实值可测的基数.** 设基数 $\kappa > \omega$. 如果有测度 $\mu: \mathfrak{P}(\kappa) \to \{0, 1\}$, 它满足 (a)$\mu(\kappa) = 1$, (b)$\forall \nu < \kappa (\mu(\{\nu\}) = 0)$以及 (c)$\mu(\Sigma_{\nu<\alpha} A_\nu) = \Sigma_{\nu<\alpha} \mu(A_\nu)$, 则称基数 κ 为**可测的** (measurable); 如果有 $\mu: \mathfrak{P}(\kappa) \to [0, 1]$, 它满足 (a), (b) 和 (c) 且不可测, 则称 κ 为**实值可测的** (real-valued measurable). 设 MC(RMC) 表示可测基数 (实值可测基数) 是存在的. (i) (S. Ulam [44]) 由满足 $\mu(A) = 1$ 和 $\forall x \in A (\mu(\{x\}) = 0)$ 的 ω 可加性测度 $\mu: \mathfrak{P}(A) \to [0, 1]$ 的存在可推出 RMC 或 MC; 由 RMC 可推出: 定义在 $\mathfrak{P}([0, 1])$ 上的 Lebesgue 测度均可以推广; 每个实值可测基数均 $\leqslant 2^\omega$ 并且为弱不可到达的. (ii) 每个可测基数是强(超)不可到达的并且 (a) 对序数上的任何 Σ_1^1 公式 $F(\alpha)$, 均有 $\exists \alpha F(\alpha) \to \exists \alpha < \omega_1 F(\alpha)$; (b) 对于任何 Π_1^1 公式 $F(\alpha)$ 和最小的可测的 μ_1, 均有 $\exists \alpha F(\alpha) \to \exists \alpha < \mu_1 F(\alpha)$ (有关可测基数和 ω_1 的序数性大小已获得许多结果). (iii) (R. Solovay [41]) ZFC 和 MC 的相容性等价于 ZFC 和 RMC 的相容性. (iv) (Martin 和 Solovay [31]) ZFC, RMC 和MA 不是相容的. (v) (Lévy 和 Solovay [30]) 由 ZFC 和 MC 的相容性可推出 ZFC, MC, MA 和 $2^\omega > \omega_2$ 的相容性. (vi) (Solovay) 由 ZFC 和 MC 可推出实数的每个 Σ_2^1 集合都是 Lebesgue 可测的. (vii) (Martin, Solovay) 由 ZFC, MC, MA 和 $2^\omega > \omega_2$ 可推出实数的每个 Σ_3^1 集合是 Lebesgue 可测的并且具有 Baire 性质. (viii) (J. H. Silver [38]) 由 ZFC 和 MC 的相容性可推得 ZFC 和 MC 以及定理"实数的 (Lebesgue) 不可测 Δ_3^1 集合是存在的"的相容性.

【参】 [1] P. Bernays, A system of axiomatic set-theory, Part I, J. Symbolic Logic, **2** (1937), 65—77; [2] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I,II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **50** (1963), 1143—1148, **51** (1964), 105—110; [3] A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Math, Ann., **86** (1922), 230—237; [4] A. Fraenkel, Der Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1922, 253—257; [5] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory, Princeton Univ. Press, 1940; [6] A. Lévy, Axiom schemata of strong infinity in axiomatic set theory, Pacific J. Math., **10** (1960), 222—238; [7] P. Mahlo, Über lineare transfinite Mengen, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, **63** (1911), 187—225; [8] P. Mahlo, Zur Theorie und Anwendung der ρ_0-Zahlen I, II, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, **64** (1912), 108—112, **65** (1913), 268—282; [9] E. Mendelson, The independence of a weak axiom of choice, J. Symbolic Logic, **21** (1956), 350—366; [10] A. Mostowski, Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip, Fund. Math., **32** (1939), 201—252; [11] J. von Neumann, Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, J. Reine Angew. Math., **154** (1925), 219—240; [12] J. von Neumann, Die Axiomatisierung der Mengenlehre, Math. Z., **27** (1928), 669—752; [13] J. von Neumann, Über eine Widerspruchsfreiheitsfrage in der axiomatische Mengenlehre, J. Reine Angew. Math., **160** (1929), 227—241; [14] J. C. Shepherdson, Inner models for set theory I, II, III, J. Symbolic Logic, **16** (1951), 161—190, **17** (1952), 225—237, **18** (1953), 145—167; [15] A. Tarski, Über unerreichbare Kardinalzahlen, Fund. Math., **30** (1938), 68—89; [16] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, Math. Ann., **65** (1908), 261—281; [17] P. J. Cohen, Set theory and the continuum hypothesis, Benjamin, 1966; [18] J. B. Rosser, Simplified independence proofs: Boolean valued models of set theory, Academic Press, 1969; [19] J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967; [20] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **50** (1963), 1143—1148; **51** (1964), 105—110; [21] W. B. Easton, Power of regular cardinals, Ann. Math. Logic, **1** (1970), 139—178; [22] G. Föder, On stationary sets and regressive functions, Acta Sci. Math., **27** (1966), 105—110; [23] H. Gaifman, Uniform extension operators for models and their applications; Sets, Models and Recursion Theory, North-Holland, 1967, 122—155; [24] K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **24** (1938), 556—557; [25] T. J. Jech, Non-provability of Souslin's hypothesis, Comm. Math. Univ. Carolinae **8** (1967), 291—305; [26] R. B. Jensen, The fine structure of the construc tible hierarchy, Ann. Math. Logic, **4** (1972), 229—308; [27] H. J. Keisler-A. Tarski, From accessible to inaccessible cardinals, Fund. Math., **53** (1964), 225—308; corrections: ibid., **57** (1965), 119; [28] K. Kunen, Inaccessibility properties of cardinals, Ph. D. dissertation, Stanford Univ., Stanford, Calif; [29] K. Kunen- J. B. Paris, Boolean extensions and measurable cardinals, Ann. Math. Logic, **2** (1971), 359—378; [30] A. Lévy-R. M. Solovay, Measurable cardinals and the continuum hypothesis, Israel J. Math., **5** (1967), 234—248; [31] D. A. Martin-R. M. Solovay, Internal Cohen extensions, Ann. Math. Logic, **2** (1970), 143—178; [32] Y. N. Moschovakis, Determinacy and prewellorderings of the continuum; mathematical logic and foundations of set theory, North-Holland, 1970, p. 24—62; [33] J. Mycielski, On the axiom of determinateness, Fund. Math., **53** (1964), 205—224; [34] K. Namba, An axiom of strong infinity and analytic hierarchy of ordinal numbers, Proc. Symp. Pure Math., **13** (1971), 279—319; [35] K. L. Prikry, Changing measurable into accessible cardinals, Dissertationes Math., **68** (1970); [36] G. E. Sacks, Forcing with perfect closed sets, Proc. Symp. Pure Math., **13**(1971), 331—355; [37] D. S. Scott, Measurable cardinals and constructible sets, Bull. Acad. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. **7** (1961), 145—149; [38] J. H. Silver, The consistency of the GCH with the existence of a measurable cardinal, Proc. Symp. Pure Math., **13** (1971), 391—396; [39] J. H. Silver, Measurable cardinals and Δ_3^1 well-orderings, Ann. of Math., (2) **94** (1971), 414—446; [40] R. M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math., (2) **92** (1970), 1—56; [41] R. M. Solovay, Real-valued measurable cardinals, Proc. Symp. Pure Math., **13** (1971), 397—428; [42] R. M. Solovay-S. Tennenbaum, Iterated Cohen extensions and Souslin's Problem, Ann. of Math., (2) **94** (1971), 201—245; [43] G. Takeuti (竹内外史), Transcendency of Cardinals, J. Symb. Logic, **30** (1965), 1—7; [44] S. Ulam, Zur Masstheorie in der algemeinen Mengenlehre, Fund. Math., **16** (1930), 140—150.

Gödel 数 [英 Gödel number 法 nombre de Gödel 德 Gödelzahl 俄 число Гёделя 日 ゲーデル数] K. Gödel ([1]) 为了证明下述的不完备性定理，作了以下的考虑(一 [Gödel 数的

例]).

给定一个形式系统 $\mathfrak{S}$,设把它的基本符号、项、公式以及形式证明(以下为方便起见，把它们总称为 $\mathfrak{S}$ 的"成分")分别按照规则 g 而对应于不同的自然数，并且须满足以下两个条件：(1) 给定 $\mathfrak{S}$ 的成分 C 后，我们可以在有限步内计算出对应的自然数 $g(C)$；(2) 给定任一自然数 n，可通过有限过程而决定是否有 $\mathfrak{S}$ 的成分和它对应；此外，当存在这样的对应成分时，可以在有限步骤内实际指出这个成分.

如果对于系统 $\mathfrak{S}$ 已给出了上述这样的规则 g，则根据这一规则对应于 $\mathfrak{S}$ 的成分 C 的自然数 $g(C)$ 便称为 C 的（关于 g 的）**Gödel 数** (Gödel number).

【Gödel 数的例】 (1) 设 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ 为 $\mathfrak{S}$ 的基本符号. 我们把它们分别对应于不同的奇数 $q_0, q_1, \cdots$，即 $g(\alpha_0) = q_0$, $g(\alpha_1) = q_1, \cdots$.

(2) 设 $\mathfrak{S}$ 的成分 F 是由 $\mathfrak{S}$ 的其他成分 F_0, $F_1, \cdots, F_k$ 借助于 $\mathfrak{S}$ 特有的某种操作所构成(为方便起见,这个 F 可写为 $F = (F_0, F_1, \cdots, F_k)$)，如果每个 F_i 均对应于自然数 $g(F_i)$，则我们便记

$$g(F) = \langle g(F_0), g(F_1), \cdots, g(F_k)\rangle,$$

这里 $\langle a_0, a_1, \cdots, a_k\rangle$ 表示数 $p_0^{a_0}p_1^{a_1}\cdots p_k^{a_k}$（其中 p_i 为第 $i+1$ 个素数). 例如，假定 $\mathfrak{S}$ 含有基本符号 $0, =, v_i$（变元）和 $\neg$（否定），它们的 Gödel 数分别为 7, 9, 11^{i+1} 和 13. 因为公式 $\neg(0 = v_i)$ 可以分析成 $(\neg, (0, =, v_i))$ 的形式，所以，它的 Gödel 数便是 $\langle 13, \langle 7, 9, 11^{i+1}\rangle\rangle$. 更详细的情况可参阅 [1], [2], [3].

借助于 Gödel 数，有关 $\mathfrak{S}$ 的元数学†命题便可以看作数论命题. 这个方法称为元数学的**算术化** (arithmetization). 因此，如果 $\mathfrak{S}$ 是把含有数论的理论在古典谓词演算上加以形式化而得的系统，则在 $\mathfrak{S}$ 的公式中，有一些公式可以被解释为有关 $\mathfrak{S}$ 本身的元数学命题. Gödel 在其中发现了一个闭公式 A，该公式可以被解释成表示其本身的不可证明性. 他证明了，虽然在给定的解释下 A 是成立的，但是，A 或 $\neg A$ 在 $\mathfrak{S}$ 中均不可证. 这个结果称为 Gödel **不完备性定理** (incompleteness theorem). 算术化的方法在数理逻辑和数学基础中是极为重要的、极为有用的. 一般递归函数的 Gödel 数的概念便是它的应用之一（→递归函数).

【参】 [1] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. Math. Phys., **38** (1931), 173—198; [2] S.C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand, 1952; [3] E. Mendelson, Introduction to mathematical logic, van Nostrand, 1964; [4] J. B. Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church, J. Symbolic Logic, **1** (1936), 87—91; [5] S. C. Kleene, Mathematical logic, John Wiley, 1967; [6] J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

递归函数 [英 recursive function 法 fonction récursive 德 rekursive Funktion 俄 рекурсивная функция 日 帰納的関数] 定义域†和值域†均为自然数集 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 的函数称为**数论函数** (arithmetic function). 当初 D. Hilbert (1926) 和 K. Gödel ([1]) 所考虑的递归函数，现在称为原始递归函数 (primitive recursive function)（由 S. C. Kleene ([2]) 命名)，便是数论函数的一种. Gödel 使用原始递归函数而成功地把元数学算术化这个有效方法引入数学基础†中. 根据原始递归函数可把元数学中某些具体的有限过程作数论的表示. 于是，自然引起以下问题：一般地，有限过程是什么?换句话说，我们应当如何刻划一个"能行可计算的"数论函数或如何提供一个计算它的算法? Gödel (1934) 通过引进关于函数计算法的形式系统而定义所谓一般递归函数（这个方法是由 J. Herbrand 暗示的). 后来，Kleene 改进了这个定义并且发展了一般递归函数的理论 ([2]). 此外，为了同样目的，A. Church 和 Kleene (1933—1935) 用 λ 记号定义了 λ 可定义函数的概念 (Church [4])，E. L. Post 和 A. M. Turing 则引进 Turing 机器而定义可计算函数的概念（→ Turing 机). 但是，后来证明这些（独立地并且几乎同时引入的概念）都和一般递归函数是等价的. 因此，现在人们往往把这些函数简称为递归函数. 这里，我们不按原来定

义的方式（Herband-Gödel-Kleene 的定义），而引进所谓**模式**（schema）作为原始递归函数概念的自然推广来定义一般递归函数. 我们用字母 $x, y, z, x_1, x_2, \cdots$ 表示以自然数域为变域的变元.

【原始递归函数】

今考察以下五个定义模式:

(I) $\varphi(x) = x'(=x+1)$

(II) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = q$

（q 为给定的自然数）

(III) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = x_i \ (1 \leqslant i \leqslant n)$

(IV) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi(\chi_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \chi_m(x_1, \cdots, x_n))$

(V) $\varphi(0, x_2, \cdots, x_n) = \psi(x_2, \cdots, x_n)$,
$\varphi(y', x_2, \cdots, x_n) = \chi(y, \varphi(y, x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)$.

这里，当 $n=1$ 时，$\psi(\ )$ 意指一个确定的自然数. 如果一个函数可以从 (I), (II), (III) 型的函数出发，有限次运用 (IV), (V) 两运算而得到，则称这个函数为**原始递归函数**（primitive recursive function）. 给定函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$，则可以就 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 而把上述定义**相对化**（relativization）如下: 如果一个函数 φ 可从 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 以及 (I), (II), (III) 型函数出发，有限次运用 (IV), (V) 两运算而得到，则称函数 φ 为**原始递归于**（primitive recursive in）$\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的.

如果函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 仅以 0,1 为值并且满足条件

$$P(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n) = 0,$$

则称函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 为谓词[†] $P(x_1, \cdots, x_n)$ 的**表示函数**（representing function）. 如果谓词 P 的表示函数 φ 为原始递归的，则称 P 为**原始递归谓词**（primitive recursive predicate）. 以下为原始函数和原始递归谓词的若干例子: $a+b$, $a \cdot b$, a^b, $a!$, $\min(a, b)$, $\max(a, b)$, $|a-b|$, $a=b$, $a<b$, $a|b$（a 整除 b）, $\Pr(a)$（a 为素数）, p_i（第 $i+1$ 个素数, $p_0=2$, $p_1=3, \cdots$）, $(a)_i$（若 $a \neq 0$，则 $(a)_i$ 为 a 的唯一因子分解式中素因子 p_i 的幂; 若 $a=0$，则 $(a)_i = 0$）.

每当我们给出一个概念或一条定理时，我们总是把含于其中的谓词（如果存在的话）代以它的表示函数. 对有限个函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 和谓词 $Q_1, \cdots, Q_m (l, m \geqslant 0,\ l+m>0)$，进行“运算”$\Omega$ 的结果所得的函数或谓词 $\Omega(\psi_1, \cdots, \psi_l, Q_1, \cdots, Q_m)$，如果它原始递归于 $\psi_1, \cdots, Q_m$，则称运算 Ω 是**原始递归的**. 由公式

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n, z) = \sum_{y<z} \psi(x_1, \cdots, x_n, y)$$

定义的函数 φ 是原始递归于 ψ 的，故在这种意义之下，有限和 $\sum\limits_{y<z}$ 是原始递归算子. 类似地，以下运算都是原始递归算子: 有限积 $\prod\limits_{y<z}$，逻辑联结词 $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$（→符号逻辑），分别情形定义（definition by cases），**有界量词**（bounded quantifier）$\exists\, y_{y<z}$, $\forall y_{y<z}$ 以及**有界 μ 算子**（bounded μ-operator）$\mu y_{y<z}$ 等等. 其中 $\mu y_{y<z}$ 可定义如下: 如果有 y 满足 $y<z$ 且 $R(x, y)$ 成立，则 $\mu y_{y<z} R(x, y)$ 就是满足条件的最小的 y，否则，$\mu y_{y<z} R(x, y) = z$. 以下运算也是原始递归的:

$$\varphi(y, x_2, \cdots, x_n) = \chi(y, \tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n), x_2, \cdots, x_n)$$

其中，$\tilde{\varphi}(y; x_2, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i<y} p_i^{\varphi(i, x_2, \cdots, x_n)}$. 当函数 φ 可由应用原始递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的运算而得到时，则称函数 φ 为**一致**（uniformly）原始递归于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的.

本节中所有提到的结果几乎都是由 Gödel（[1]）给出的. R. Péter (1934), R. Robinson (1947) 及其他人曾对原始递归函数作过进一步的研究. 注意: 可用二重递归式定义的函数未必是原始递归的（W. Ackermann）. Péter (1935, 1936) 详细研究了一般地可用多重递归式而定义的函数（[8]）.

【一般递归函数】 当把原始递归函数[†]推广来定义一般递归函数时使用了下面的 **μ 算子**（μ-operator）. 对于自然数域上的谓词 $R(y)$，当有 y 满足 $R(y)$ 时，$\mu y R(y)$ 便指使 $R(y)$ 成立的最小的 y，否则，$\mu y R(y)$ 无定义. 一般说来，函数 $\mu y(\psi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0)$ 不必对一切的 $x_1, \cdots, x_n$ 都有定义. 现在，如果除原始递

归函数的定义中所使用的模式以外，还容许使用下述新的模式，则所得的函数称为**一般递归函数**(general recursive function)或简称**递归函数**(recursive function). 新模式为：对于一切给定的函数 ψ，当

(1) $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y(\psi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0)$

成立时，容许使用下列模式：

$$\text{(VI)}\ \varphi(x_1, \cdots, x_n) = \mu y(\psi(x_1, \cdots, x_n, y) = 0)$$

因此，根据定义，原始递归函数都是一般递归的. 一个其表示函数为一般递归函数的谓词称为**一般递归谓词**(general recursive predicate). 上文对原始递归函数所叙述的关于相对化等事实也可推广到一般递归函数的情况.

Kleene 的范式定理(Kleene's normal form theorem).

对于每个 n，我们可构造一个特定的原始递归谓词 $T_n(z, x_1, \cdots, x_n, y)$ 和一个原始递归函数 $U(y)$，使得任给一般递归函数

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n),$$

均能找到一个自然数 e，使得

(2) $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y)$,

(3) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = U(\mu y T_n(e, x_1, \cdots, x_n, y))$.

这时，我们称 e **递归地定义**(define recursively) φ，或 e 为递归函数 φ 的 **Gödel 数**(Gödel's number). 设 $\psi_1, \cdots, \psi_l$(简记为 Ψ) 为任给的函数. 我们可以把 Kleene 的范式定理就 Ψ 相对化如下： 对每个 n，我们可构造一个特定的谓词 $T_n^{\Psi}(z, x_1, \cdots, x_n, y)$，该谓词是原始递归于 Ψ 的，使得任给一个一般递归于 Ψ 的函数 φ，均可找到一个自然数 e，使得

(4) $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y T_n^{\Psi}(e, x_1, \cdots, x_n, y)$,

(5) $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = U(\mu y T_n^{\Psi}(e, x_1, \cdots, x_n, y))$,

其中，$U(y)$ 是 Kleene 的范式定理中提到的原始递归函数. 这时，我们称 e **递归于 Ψ 而定义** φ，或称 e 为从 Ψ 到 φ 的 **Gödel 数**. 特别地，当 φ 为一致一般递归于 Ψ 时，从 Ψ 到 φ 的 Gödel 数 e 可以求出，而与 Ψ 无关(但与 l 及 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 中的变元个数有关).

现在，设 S 为把包含自然数理论的一个理论在古典谓词逻辑†中加以形式化的形式系统†. 如果 S 中存在一个公式 $P(a_1, \cdots, a_n)$ ($a_1, \cdots, a_n$ 为不同的变元，此外 P 别无其他自由变元†) 使得下列的 i), ii) 成立，则称数论谓词 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 在 S 中是**可判定的**(decidable)：

i) 对任意的自然数 $x_1, \cdots, x_n$，都有或 $\vdash P(\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$ 或 $\vdash \neg P(\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$;

ii) 对任意的自然数 $x_1, \cdots, x_n$,

$P(x_1, \cdots, x_n) \Leftrightarrow \vdash P(\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$.

这里，符号$\vdash$表示在 S 中可证，$\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 是自然数 $x_1, \cdots, x_n$ 在 S 中的形式表示. 如果 S 为相容的系统，使得任何原始递归谓词在 S 中都是可判定的并且谓词 Pf_A (即对任何公式 A 而言，$Pf_A(x_1, \cdots, x_n, y)$ 系指 y 为 $A(\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n)$ 的一个证明的 Gödel 数)是原始递归的，则 P 在 S 中可判定的充分必要条件为：P 是一般递归谓词 (A. Mostowski, 1947).

把一般递归函数考虑作为**能行可计算函数**(effectively computable function) 的定义，这个主张称为 Church 论题 (Church's thesis). 实际上，能行可计算函数是尚无精确定义的概念，所以，这个论题是不能证明的. 但是，由上述的事实，根据种种理由，可以相信它是对的. 所以，任何对其值有一个计算过程或**算法**(algorithm)的那些函数都可以认为是一般递归的. 利用这一结果，许多判定问题已得到否定的解答(⇀判定问题). 此外，从这个观点出发，人们便对传统的描述集合论重新进行了研究，并且可以用一般递归函数来阐明在半直觉主义†数学中所使用的能行性概念(⇀解析集).

【递归可枚举集】 可由一般递归函数 φ 来枚举的集合 $\{\varphi(0), \varphi(1), \cdots\}$ (容许重复)称为**递归可枚举集**(recursively enumerable set). 空集也算作是递归可枚举的. 在这个定义中，"一般递归"字样可用"原始递归"代替 (J. B. Rosser 1936). 一个自然数的集合 E 是递归可枚举的，当且仅当存在一个原始递归谓词 $R(x, y)$，使得 $x \in E \Leftrightarrow \exists y R(x, y)$ (Kleene [2]).

如果谓词 $x \in E$ 是一般递归的，则称集合 E 为**递归集**(recursive set). 集合 $C = \{x \mid \exists y$

$T_1(x, x, y)\}$ 是递归可枚举的,但不是递归的集合，而且，它有以下值得注意的性质：对每个递归可枚举集 E ,都有一个原始递归函数 φ,使得 $x \in E \Leftrightarrow \varphi(x) \in C$. 在这个意义之下，对于递归可枚举集的族†而言,上述集合 C 是**完备的**(complete). 由 R. M. Friedberg (1957) 和 A. A. Mučnik (1956—1958) 同时否定地解决了 Post 提出的问题，即递归可枚举的但不是递归的集合是否都具有同样的(递归)不可解度†? 一个递归可枚举集 E 是一般递归的，当且仅当存在一个一般递归谓词 $R(x,y)$ 使得 $x \notin E \Leftrightarrow \exists y R(x,y)$ (Kleene [5], Post [6]).

【部分递归函数】 如果一个函数 $\varphi(x_1,\cdots, x_n)$ 未必对所有的 $x_1,\cdots,x_n$ 都有定义,则称函数 φ 为**部分函数** (partial function). 对于两个部分函数 $\psi(x_1,\cdots, x_n)$ 和 $\chi(x_1,\cdots, x_n)$ 而言, $\psi(x_1,\cdots, x_n) \simeq \chi(x_1,\cdots, x_n)$ 系指：若函数 $\psi(x_1,\cdots, x_n)$ 和 $\chi(x_1,\cdots, x_n)$ 之一对 $x_1,\cdots,x_n$ 有定义,则另一个也有定义,并且它们的值相等. 对任意给定的自然数 e, 一般说来, $\varphi(x_1,\cdots,x_n) \simeq U(\mu y T_n(e,x_1,\cdots, x_n,y))$(或 $\simeq U(\mu y T_n^{\Psi}(e,x_1,\cdots, x_n,y)))$ 是一个部分函数. 我们称这样的函数是**部分递归的** (partial recursive) (或(**一致地**)**部分递归于** Ψ **的**), 并且说自然数 e 把部分函数 φ (**一致地**)**递归**(**于** Ψ) **地**定义了,或者说 e 为部分递归函数 φ 的(从 Ψ 出发的) **Gödel 数**. 当自然数 e 为 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 的 Gödel 数(或从 Ψ 出发的 φ 的 Gödel 数)时, $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 也常写为

$$\{e\}(x_1,\cdots,x_n)(\text{或}\{e\}^{\Psi}(x_1,\cdots, x_n)).$$

如果谓词 $R(x_1,\cdots, x_n, y)$ 是一般递归的,则 $\mu y R(x_1,\cdots,x_n,y)$ 为部分递归的. 所以, $\{z\}(x_1,\cdots,x_n)$ 为变元 z 和 $x_1,\cdots, x_n$ 的部分递归函数.

关于部分递归函数, Kleene 所得到的两条定理 ([3]) 最为有用. (1) 对于任意的两个自然数 m, n, 可以求得一个原始递归函数 $S_n^m(z,y_1,\cdots,y_m)$, 使得对任何自然数 e, 有

$$\{e\}(y_1,\cdots,y_m,x_1,\cdots, x_n) \simeq \{S_n^m(e,y_1,\cdots,y_m)\}(x_1,\cdots, x_n).$$

(2) 对任何部分递归函数 $\psi(z, x_1,\cdots, x_n)$ 而言,可求得一自然数 e, 使得

$$\{e\}(x_1,\cdots,x_n) \simeq \psi(e,x_1,\cdots, x_n).$$

部分递归函数的概念首先出现在 Church 和 Kleene 的关于可构造序数†的理论中(1936). 部分递归函数既可以作为 Herbrand-Gödel-Kleene 的一般递归函数的定义的自然推广来定义，也可以作为从 (I), (II), (III) 给定的函数出发,有限次应用公式 (IV),(V) 和 (VI) (在这几个模式中,用来定义 φ 的 $=$ 应当换成 $\simeq$)所得的函数来定义.

【递归函数向数论泛函的推广】 设 $\alpha_1,\cdots, \alpha_m$ 都是单变元的数论函数. 如果 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 为一致递归于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的(部分)函数, 则 φ 的 Gödel 数 e 可与 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 无关地求得,并且 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可表为 $U(\mu y T_n^{\alpha_1\cdots\alpha_m}(e, x_1,\cdots, x_n, y))$. 现在,把 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 看作以全体单变元数论函数的集合 $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ 为变域的变元,并设 $\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,x_1,\cdots,x_n) \simeq U(\mu y T_n^{\alpha_1\cdots\alpha_m}(e, x_1,\cdots,x_n,y))$, 则函数 $\varphi(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,x_1,\cdots,x_n)$ 称为递归的(部分)泛函,这样,便可以发展含两种类型变元的递归函数的理论.

为了推广递归函数的概念, Kleene 引入并研究了含有任意(有限)多种类型的变元的递归函数([10, 11]). 自然数称为 **0 型的个体** (object of type 0), 由 j 型的个体到自然数的单变元函数是 **$j+1$ 型的个体** (objects of type $j+1$). 我们用 $\alpha^j, \beta^j, \gamma^j,\cdots$ 或 $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j,\cdots$ 等等表示以全体 j 型个体集为变域的变元. 考察以有限个这种类型的变元为自变元而取自然数为值的泛函(简称为函数). 如果一个函数 φ 可根据有限次应用以下公式 (I)—(VIII) 而得到,则称该函数为**原始递归函数**,这里 a 为 0 型变元, $\mathfrak{b}$ 为有限个变元的组(可能为空的), 这些变元互相不同且与公式中的其他变元也不同,而 ψ, χ 为所指出的变元的已知函数. (I) $\varphi(a, \mathfrak{b}) = a'$; (II) $\varphi(\mathfrak{b}) = q$ (q 为一自然数); (III) $\varphi(a, \mathfrak{b}) = a$; (IV) $\varphi(\mathfrak{b}) = \psi(\chi(\mathfrak{b}), \mathfrak{b})$; (V) $\varphi(0, \mathfrak{b}) = \psi(\mathfrak{b})$, $\varphi(a', \mathfrak{b}) = \chi(a, \varphi(a,\mathfrak{b}), \mathfrak{b})$; (VI) $\varphi(\mathfrak{a}) = \psi(\mathfrak{a}_1)$ ($\mathfrak{a}_1$ 为一个变元序列, 在 $\mathfrak{a}_1$ 中改

变两个同型变元的顺序便得到 $\mathfrak{a}$); (VII) $\varphi(\alpha', a, \mathfrak{b}) = \alpha'(a)$; (VIII) $\varphi(\alpha^j, \mathfrak{b}) = \alpha^j(\lambda\alpha^{j-2}\chi(\alpha^j, \alpha^{j-2}, \mathfrak{b}))$ ($\lambda\alpha^{j-2}$ 系指把 χ 看作变元 α^{j-2} 的函数).

对每个函数 $\varphi(\mathfrak{a})$, 均相应于其导入方式而指定一个称为**指标** (index) 的自然数 (它和上述的 Gödel 数有同样的作用). 我们把具有指标 e 的函数 $\varphi(\mathfrak{a})$ 写为 $\{e\}(\mathfrak{a})$. 如果函数 $\varphi(\mathfrak{a})$ 可由有限多次应用公式 (I)—(VIII)(但在 (IV)—(VI) 和 (VIII) 中须用 $\simeq$ 代替 $=$) 及 (IX) $\varphi(a, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \simeq \{a\}(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ (其中, $\mathfrak{c}$ 为有限多个任意类型的变元的序列)而得到,则称函数 $\varphi(\mathfrak{a})$ 为**部分递归函数**. 在特殊情况下, 如果 $\varphi(\mathfrak{a})$ 对于 $\mathfrak{a}$ 的一切值都有定义, 则 $\varphi(\mathfrak{a})$ 称为**一般递归函数**. 这些概念也可以就任何给定的函数而进行**相对化**. 注意,在变元的型 $\leqslant 1$ 的情形, 目前意义下的原始递归函数,部分递归函数(从而一般递归函数) 都等价于以前通常意义之下的(通过相对化引入的)相应概念. 以下定理是重要的: 设 r 为 $\mathfrak{a}$ 的最大类型数, 则可求出两个原始递归谓词 M, N, 使得

$$\{e\}(\mathfrak{a}) \simeq w \Leftrightarrow \forall\xi^{r-1}\exists\eta^{r-2}M(e, \mathfrak{a}, w, \xi^{r-1}, \eta^{r-2}), \quad r \geqslant 2,$$
$$\Leftrightarrow \exists\xi^{r-1}\forall\eta^{r-2}N(e, \mathfrak{a}, w, \xi^{r-1}, \eta^{r-2}), \quad r > 2$$

如用 (IX′) $\varphi(\mathfrak{a}) \simeq \mu x(\psi(\mathfrak{a}, x) = 0)$ 以代替 (IX), 则所得的每个函数都是部分递归的. 但是, 具有型 $\geqslant 2$ 的变元的部分递归函数未必都能够从应用公式 (I)—(VIII) 和 (IX′) 而得到.

【序数的递归函数】 竹内外史(1960)对于从序数的一段到序数的函数引进了原始递归性的概念. 利用这个概念, 他在序数理论中构造了集合论的一个模型. 关于序数的递归函数的概念, A. Lévy, M. Machover, 竹内、紀晃子和柘植利之, S. Kripke 等人也都有所研究.

序数的递归函数的早期研究只讨论有关无穷基数的函数. 例如, 竹内外史曾经考察过以固定的无穷基数 κ 为定义域和值域的函数, 并且用类似于上述 (I)—(VI) 的模式而定义了 κ 递归函数. 后来, Kripke 发现 κ 为基数这个假定是不必要的,从而,引入了**容许序数** (admissible ordinal) 的概念. 容许序数 κ 具有构造该演算时所要求的闭合性质,并且每当 $\alpha, \beta < \kappa$ 和 $\beta = f(\alpha)$ 可计算时, $\beta = f(\alpha)$ 必是在 κ 阶段以下可计算的. 给定一容许序数 κ, 正如一般递归性那样, 我们可用各种等价方式来定义 **κ 递归性** (recursiveness). 例如,用模式, 用方程演算以及用两种量词形式的可定义性等等. 一般递归函数的大多数基本性质 (例如, 范式定理,参数化定理, 枚举定理等)对 κ 递归函数也是成立的. 不可解度和递归可枚举度的概念也可以推广, 相应地建立 κ 不可解度和 κ 递归可枚举度的概念. 这些性质的细致结构是当前努力研究的目标.

每个无穷基数都是容许的. 最小的容许序数为 ω, 其次为 Church 和 Kleene 的序数 ω_1, 即第一个非可构造序数. 事实上,对每个 $n \geqslant 1$, 第一个不可表示为 Δ^1_n 谓词的序型的序数是容许的(→谱系理论). 对每个无穷序数 κ 而言, 都有 κ^+ 个具有幂 κ 的容许序数. Platek 在更广泛的基础上研究递归理论. 他所讨论的函数不是定义在序数段上的,而是定义在集合上的, 并引进了容许集的概念, 即在其上能够很方便地发展递归理论的集合. 一个容许集是某个弱集合论的一个可传 ε 模型,而序数 κ 为容许的, 当且仅当存在一个容许集 A, 使得 $A \cap 0_n = \kappa$, 这里, 0_n 为所有序数的类. 当前的发展表明,广义递归理论与无穷逻辑有着密切的关系 (→[14—19]).

【参】 [1] K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I, Monatsh. Math. Phys., **38** (1931), 173—198; [2] S. C. Kleene, General recursive functions of natural numbers, Math. Ann., **112** (1936), 727—742; [3] S. C. Kleene, On notation for ordinal numbers, J. Symbolic Logic, **3** (1938), 150—155; [4] A. Church, The calculi of lambda-conversion, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1941; [5] S. C. Kleene, Recursive Predicates and quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc., **53** (1943), 41—73; [6] E. L. Post, Recursively enumerable sets of positive integers

and their decision problems, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 284—316; [7] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand, 1952; [8] R. Péter, Rekursive Funktionen, Akademischer Verlag., 1951; [9] A. A. Марков (A. A. Markov), Теория алгорифмов, Труды Мат. Инст. им. Стеклова no. **42** (1954); [10] S. C. Kleene, Recursive functionals and quantifiers of finite types I, Trans. Amer. Math. Soc., **91** (1959), 1—52; [11] S. C. Kleene, Recursive functionals and quantifiers of finite types II, Trans. Amer. Math. Soc., **108** (1963), 106—142; [12] H. Hermes, Enumerability, decidability, computability, Springer, 1965; [13] H. Rogers, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967; [14] J. Barwise, Infinitary logic and admissible sets, J. Symbolic Logic, **34** (1969), 226—252; [15] R. B. Jensen-C. Karp, Primitive recursive set functions, Proc. Symposia in Pure Math., XIII (1971), 143—176; [16] S. Kripke, Transfinite recursions on admissible ordinals, J. Symbolic Logic, **29** (1964), 161—162; [17] M. Machover, The theory of transfinite recursion, Bull. Amer. Math. Soc., **67** (1961), 575—578; [18] G. Takeuti (竹内外史), A formalization of the theory of ordinal numbers, J. Symbolic Logic, **30** (1965), 295—317; [19] T. Tugué (柘植利之), On the partial recursive functions of ordinal numbers, J. Math. Soc. Japan, **16** (1964), 1—31.

可构造序数 [英 constructive ordinal 法 nombre ordinal constructif 德 konstruktive Ordinalzahl 俄 конструктивное порядковое 日 構成的順序数] 为了把递归函数†的理论推广到超限序数†, A. Church 和 S. C. Kleene 考察了能行可达序数的集合，并且定义了可构造序数的概念([1]). 以后，经过 Kleene, W. Markwald, C. Spector 等人的卓越研究,其理论获得显著的成功([2, 3, 4, 5]). 可构造序数本来是作为利用"λ 记号"的形式系统的"表达式"而定义的,但是,我们可以对它利用 Gödel 数†而得到算术化系统,从而对于每个序数,可以不用形式的表达式而用自然数来表示. 以下所述主要是通常的至多为第二数类的可构造序数.

我们把满足以下条件 (I) 和 (II) 的自然数的集合称为**序数的记法系统** (system of notation for ordinal numbers),而把可用属于一个记法系统的自然数来表示的序数称为**可构造序数**(constructive ordinal numbers). (I) 任何一个自然数都不表示两个不同的序数. (II) 存在如下定义的三个部分递归函数† $K(x)$, $P(x)$ 和 $Q(x, n)$: (i) 对任何表示 X 的自然数 x, 当 X 为零、孤立序数†或极限序数†时, $K(x)$ 分别取值 0, 1, 2; (ii) 当 X 为序数 Y 的直接后继序数时，对表示 X 的任何自然数 x 而言, $P(x)$ 表示 Y; (iii) 当 X 为极限序数时，对表示 X 的任何自然数 x 及每个自然数 n 而言, $Q(x, n)$ 表示 Y_n 而 $\{Y_n\}$ 为一个递增的序数序列，使得 $X = \lim_n Y_n$.

在序数的记号系统中，最有用和最方便的是称为 S_3 的这个系统. 设 n_O 为以 n 为变元的原始递归函数,其定义为: $0_O = 1$, $(n+1)_O = 2^{n_O}$. 用以下的归纳定义引入系统 S_3 的基本概念 $a \in O$ 和基本关系 $a <_O b$: (1) $1 \in O$; (2) 如果 $y \in O$, 则 $2^y \in O$ 并且 $y <_O 2^y$; (3) 如果自然数序列 $\{y_n\}$ 具有性质: 对每个 n, $y_n \in O$ 和 $y_n <_O y_{n+1}$, 又如果 y 为这样的 Gödel 数，它把 y_n 作为 n_O 的函数而递归地定义 (即 $y_n \simeq \{y\}(n_O)$ (→递归函数)), 则 $3 \cdot 5^y \in O$ 并且对每个 n, 有 $y_n <_O 3 \cdot 5^y$; (4) 对 $x, y, z \in O$, 如果 $x <_O y$ 并且 $y <_O z$, 则 $x <_O z$; (5) 仅当由(1)—(4) 推得时,才有 $a \in O$, $a <_O b$.

现在,为简单起见,我们把 $(a <_O b) \vee (a = b)$ 简写成 $a \leqslant_O b$. 对于 S_3,以下性质成立: (1) 如果 $a <_O b$, 则 $b \neq 1$; (2) 如果 $a <_O b$, 则 a, $b \in O$; (3) 如果 $a <_O 2^y$, 则 $a \leqslant_O y$; (4) 如果 $a <_O 3 \cdot 5^y$, 则有自然数 n, 使得 $a \leqslant_O y_n$, 这里 $y_n = \{y\}(n_O)$; (5) 如果 $a \in O$, 则 $1 \leqslant_O a$, (6) 如果 $a \in O$, 则对任何满足 $\alpha(0) = a$ 和 $\forall n(\alpha(n) \neq 1 \rightarrow \alpha(n+1) <_O \alpha(n))$ 的数论函数† α 而言，均有 k, 使得 $\alpha(k) = 1$; (7) 对每个 a, $\neg(a <_O a)$; (8) 如果 $c \in O$, $a \leqslant_O c$ 并且 $b \leqslant_O c$, 则 $a <_O b$ 或 $a = b$ 或 $b <_O a$.

O 的每个元素 a 都可依下法而**表示** (represent) 一个序数 $|a|$: $|1| = 0$; 对于 $y \in O$, 则 $|2^y| = |y| + 1$; 对 $3 \cdot 5^y \in O$ 及 $y_n = \{y\}(n_O)$ 则 $|3 \cdot 5^y| = \lim_n |y_n|$. 设 b 为 O 的元素，则当 $a <_O b$ 时,便有 $|a| < |b|$; 反之,对每个 $\alpha <$

$|b|$，均有一数 a，使得 $|a|=\alpha$ 并且 $a<_O b$.因此，集合 $\{a|a<_O b\}$ 为关于 $\leqslant_O$ 的良序集†并且它的序型†为 $|b|$. 对 O 的每个元素 a 而言均大于 $|a|$ 的最小的数 ξ 与最小的不可构造的序数 (Church 和 Kleene 用 ω_1 表示它) 是相同的. 存在一个关于 $\leqslant_O$ 良序的 S_3 的子系统，它对每个可构造序数 α 均具有一个唯一的**记法**(notation)(即 O 的唯一元素). 对这样的子系统，我们可以取为 Π_1^1 集合 K，使得 K 为 O 上的递归的† 集合 (S. Feferman 和 Spector, R. O. Gandy) (→谱系理论).

设 $R(x,y)$ 为关于自然数的谓词. 对任何自然数 x,y，我们用 $x\leqslant_R y$ 表示 $R(x,y)$ 成立. 我们只考察关于集合 $D_R=\{x|\exists y(R(x,y)\vee R(y,x))\}$ 而言 $\leqslant_R$ 为线性有序†的情况. 如果 D_R 为关于 $\leqslant_R$ 的良序集，则我们用 $|R|$ 表示它的序型. (1) 对每个(可构造)序数 $\alpha<\omega_1$，存在一个一般递归†(更严格地说，原始递归†)谓词 R，使得 $|R|=\alpha$ (Markwald, Spector, Kleene [3]). (2) 反之，如果 R 为超算术†谓词(当然，R 可为一般递归的)，则 $|R|<\omega_1$ (Markwald, Spector). 下列各定理是可构造序数理论中效果最显著的定理，这些定理完全证实了 Kleene 的解析谱系†概念的正确性. (3) 集合 O 以及谓词 $a<_O b$ 都是 Π_1^1 的(→谱系理论). 也就是说，对 O 而言，存在一个原始递归谓词 $R(a,x,\alpha)$，使得 $a\in O\Leftrightarrow\forall\alpha\exists xR(a,x,\alpha)$ (Kleene [3]). (4) 对每个序数 $\alpha<\omega_1$ 而言，集合 $\{a|\alpha\geqslant|a|\}$ 都是超算术集(Spector). (5) O 为 Π_1^1 的完备†集合，即对任何 Π_1^1 集合 E，存在一个原始递归函数 φ，使得 $a\in E\Leftrightarrow\varphi(a)\in O$(Kleene [3]). 因此，$O$ 不是 Σ_1^1 集合 (→谱系理论).

给定一元(数论)谓词或给定一个自然数集合 Q，我们可以把可构造序数的概念关于 Q 而相对化†. 我们用 ω_1^Q 表示关于 Q 的最小的不可构造序数. 记法系统 S_3 的基本概念 $a\in O$ 和关系 $a<_O b$ 关于 Q 而相对化后分别表示为 $a\in O^Q$ 和 $a<_{O^Q}b$. 于是，前一段的结果便可以关于 Q 而相对化了. *例如*，(3) 的相对化的结果便是：存在一个关于 Q 一致的†原始递归谓词 $R^Q(a,x,\alpha)$，使得 $a\in O^Q\Leftrightarrow\forall\alpha\exists xR^Q(a,x,\alpha)$. 如果 Q 为超算术的，则关于 Q 而相对化并不会带来扩充，即 $\omega_1^Q=\omega_1$ 是成立的 (Spector)，但是当关于 O 而进行相对化†时，则可以获得它的真正的扩充 ($\omega_1<\omega_1^O$)，如果继续进行这种推广，我们便得到一个(超限的)序列 $O,O^O,O^{O^O},\cdots$. 另一方面，我们可以把可构造序数的概念不限于第二数类而向更高的任意数类进行推广. 事实上，Church 和 Kleene, H. C. Wang, D. L. Kreider 和 H. Rogers, Jr., H. Putnam, 紀晃子和竹内外史等人都进行了一些推广工作. 但是，这些推广并没有象对第二数类的序数那样获得很多的结果.

【参】[1] A. Church-S. C. Kleene, Formal definitions in the theory of ordinal numbers, Fund. Math., **28** (1937), 11—21; [2] S. C. Kleene, On notation for ordinal numbers, J. Symbolic Logic, **3** (1938), 150—155; [3] S. C. Kleene, On the forms of the predicates in the theory of constructive ordinals II, Amer. J. Math., **77** (1955), 405—428; [4] W. Markwald, Zur Theorie der konstruktiven Wohlordnungen, Math. Ann., **127** (1954), 135—149; [5] C. Spector, Recursive well-orderings, J. Symbolic Logic, **20** (1955), 151—163.

判定问题 [英 decision problem 法 problème de décision 德 Entscheidungsproblem 俄 проблема разрешимости 日 決定問題] 假设我们给定一个集合 S 和关于 S 中的元素 x_i 的命题 $P(x_1,\cdots,x_n)$，则我们有一个 P 的**永真性问题**(德 Problem der Allgemeingültigkeit)，即求一个通用的算法(有限过程)用以判定 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 是否对 S 中全体 n 元向量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为真的问题. 求一个通用算法(有限过程)用以判定 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 是否对 S 中适当的 n 元向量 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为真的问题，称为 P 的**可满足性问题**(德 Problem der Erfüllbarkeit). 这两个问题合称关于该命题的**判定问题**. 这两个问题是对偶的，如果一命题的永真(可满足)性问题得到了肯定解答，那末该命题的否定命题的可满足(永真)性问题便得到否定解答.

如果使用 Gödel 数，那末具有可数多个生

成元的自由半群† 可以等同于自然数的集合 $\boldsymbol{N}$ 的子集（→Gödel 数）. 而对于一个具有可数多个符号的形式系统†$\mathfrak{S}$，其表示的全体是由 $\mathfrak{S}$ 中的符号所产生的自由半群的子集，因此，它也可以等同于 $\boldsymbol{N}$ 的子集.

一般地，如果 $\boldsymbol{N}$(或 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\times\cdots\times\boldsymbol{N}$) 的子集 M 的表示函数† 是一般递归的(→递归函数)，则子集 M 也称为(**一般**)**递归的** ((general) recursive). 使用递归函数的概念后，判定问题可如下严格地定义：当我们能够实际得出一个把 M 的表示函数作为一般递归函数而定义的过程时，便说 M 的判定问题被**肯定地解决**，如果能够证明 M 不是递归的，则 M 的判定问题被**否定地解决**(即使证明 M 是递归的，并不意味着 M 的判定问题已肯定地解决).

给出 $\mathfrak{S}$ 中的某个公式†集合 A，令 $g(A)$ 为相应于 A 的元素的所有 Gödel 数的集合，A' 为在 $\mathfrak{S}$ 中可由 A 推出的所有公式的集合，再令 $\tau(A)=g(A')$. 如果 $\tau(A)$ 的判定问题是肯定(否定)地解决的，则说公式集合 A 的判定问题是肯定(否定)地解决的.

如再改进这些概念，我们便得到(**递归**)**不可解度** (degree of (recursive) unsolvability) 的概念. 设 A 和 B 为 N 的子集. "A 递归于 B 且 B 递归于 A"(→递归函数) 的关系是自反的、对称的、可传的. 因此，这个关系将 $\boldsymbol{N}$ 中所有子集的集合分为不相交的非空等价类. 如果，A 和 B 属于同一个等价类，则定义 A 与 B 有相同的不可解度. 因此，可以用等价类来确定不可解度. 递归集合的不可解度为 $\mathbf{0}$.

设 A 的度数为 $\boldsymbol{a}$，B 的度数为 $\boldsymbol{b}$，如果"A 递归于 B"，则定义关系 $\boldsymbol{a}\leqslant\boldsymbol{b}$. 显然，对任何度数 $\boldsymbol{d}$ 我们都有 $\mathbf{0}\leqslant\boldsymbol{d}$. 度数的这种半序集合构成上半格†.

迄今就判定问题而研究过的形式系统大多为一阶谓词演算† L^1 和 L^1 上的形式系统. 我们现在列出一些重要的结果.

(i) 关于 L^1 的结果. 对于以下形状的公式集合，其判定问题已否定地解决. 这里假定不出现函数符号，并且假定 $\mathfrak{U}$ 为不含 $\forall$，$\exists$ 或自由个体变元†的公式.

(1) L^1 中的所有公式 (A. Church、A. M. Turing)，

(2) $\exists x_1\exists x_2\cdots\exists x_m\forall y_1\forall y_2\cdots\forall y_n\mathfrak{U}$ (T. Skolem)，

(3) $\exists x_1\exists x_2\exists x_3\forall y_1\forall y_2\cdots\forall y_n\exists z\mathfrak{U}$ (K. Gödel)，

(4) $\exists x_1\exists x_2\forall y_1\forall y_2\cdots\forall y_n\exists z\mathfrak{U}$ (L. Kalmár)，

(5) $\exists x_1\exists x_2\forall y\exists z_1\exists z_2\cdots\exists z_n\mathfrak{U}$ (J. Pepis)，

(6) $\forall x\exists y\forall z\exists u_1\exists u_2\cdots\exists u_n\mathfrak{U}$ (W. Ackermann)，

(7) $\exists x_1\exists x_2\exists x_3\forall y\mathfrak{U}$ 或 $\exists x_1\exists x_2\forall y\exists z\mathfrak{U}$ (J. Surányi)，

(8) $\exists x\forall y_1\forall y_2\exists z_1\exists z_2\mathfrak{U}$ 或 $\forall x\exists y\forall z\exists u_1\exists u_2\mathfrak{U}$ (Surányi).

对以下各种形状的公式集合，其判定问题已肯定地解决，此处仍假定不出现函数符号而对 $\mathfrak{U}$ 的规定同上.

(1) 所有只含一元谓词的公式 (L. Löwenheim, Skolem, H. Behmann)，

(2) $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_m\mathfrak{U}$ (P. Bernays, M. Schönfinkel, Ackermann)，

(3) $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_m\exists y_1\exists y_2\cdots\exists y_n\mathfrak{U}$ (Bernays, Schönfinkel, Ackermann)，

(4) $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_m\exists y_1\exists y_2\forall z_1\forall z_2\cdots\forall z_l\mathfrak{U}$ (Gödel, Kalmár, K. Schütte).

(ii) 关于 L^1 上的形式系统的结果. 以下都假定不出现函数变元†. 但常谓词，常函数和个体常数是可以出现的. 形式系统 $\mathfrak{T}$ 的判定问题是指对 $\mathfrak{T}$ 上所有闭公式(→符号逻辑) 的集合的判定问题.

关于有关形式系统判定问题绝大多数都是否定地解决的. 例如，有关自然数理论、有理整数理论、初等群、环、域、格理论以及公理集合论等的形式系统 (A. Tarski 等人). 但是，初等 Abel 群论的形式系统的判定问题却肯定地解决了 (W. Szmielew).

有关形式系统的部分公式系统的判定问题，我们知道得很少，但下列两情形例外：

(1) 形式系统中形如 $\forall x_1\forall x_2\cdots\forall x_m\mathfrak{U}$ 的

公式集合的判定问题(→自由群);

(2) Hilbert 型问题: 形式系统中形如 $\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_m (t = s)$ 的公式集合的判定问题. 特别是,在自然数理论的形式系统中的 Hilbert 型问题被称为 Hilbert 第十问题 (→Hilbert). 也就是说,是否存在一个通用算法,用以在有限次步骤中判定一个不定方程†是否有整数解.

这个判定问题曾经被 M. Davis, H. Putnam, J. Robinson 等人研究过,最后 Ю. В. Матиясевич 证明了每个递归可枚举关系都是 Diophantine 的([9]),从而使它得到否定的解决(一个关系 $R(m_1, \cdots, m_j)$ 称为 **Diophantine** 的,假如有一个整系数多项式 $P(x_1, \cdots, x_j, y_1, \cdots, y_k)$ 使得 $R(m_1, \cdots, m_j)$ 成立,当且仅当方程 $P(m_1, \cdots, m_j, y_1, \cdots, y_k) = 0$ 对 $y_1, \cdots, y_k$ 具有自然数解).

此外,对二阶谓词演算†L^2、直觉主义逻辑†等也进行了一些研究([1, 2]).

[参] [1] W. Ackermann, Solvable cases of the decision problem, North-Holland, 1954; [2] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand, 1952; [3] A. Tarski, Undecidable theories, North-Holland, 1953; [4] A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. Math., **58** (1936), 345—363; [5] S. C. Kleene-E. L. Post, The upper semi-lattice of degrees of recursive unsolvability, Ann. of Math., **59** (1954), 379—407; [6] G. E. Sacks, Degrees of unsolvability, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1963; [7] M. Davis-H. Putnam-J. Robinson, The decision problem for exponential Diophantine equations, Ann. of Math., (2) **74** (1961), 425—436; [8] M. Davis-H. Putnum, Reductions of Hilbert's tenth problem, J. Symbolic Logic, **23** (1958), 183—187; [9] Ю. В. Матиясевич, Диофантовость перечислимых множеств, Докл. Акад. Наук СССР, **191** (1970), 279—282; [10] H. Hermes, Enumerability, decidability, computability, Springer, 1965; [11] H. Rogers, Theory of recursive functions and effective computability, McGraw-Hill, 1967; [12] J. R. Shoenfield, Mathematical logic, Addison-Wesley, 1967.

解析集 [英 analytic set 法 ensemble analytique 德 analytische Menge 俄 аналитическое множество 日 解析集合] 解析集的概念首先是由 N. N. Luzin 和 M. Ja. Souslin 于1916年定义的,并且用求补和射影等运算自然地推广到射影集的概念上 (Luzin 1924). 在这个领域里工作的包括 Luzin 和 W. Sierpiński 在内的大多数数学家都是采用 R. Baire, É. Borel, H. Lebesgue 等人的所谓法国经验主义(也称为半直觉主义†)的观点的. 如果一个对象可以根据有限的语句唯一地、个别地、无含混地加以确定(不管是谁,根据所说的过程都到达同一个结果),则称该对象是**能行给定的** (effectively given). 半直觉主义者主张只有能行给定的对象才是数学上存在的. 他们又主张必需使用选择公理才能定义的东西不是数学的对象. 根据这个观点,Borel 集†是"良好定义的"集合,古典分析应限于 Borel 集的范围内.由此便引起以下问题: 能否把 Borel 集推广到更广泛的但具有同样确实性的集合的类去呢? Lebesgue (1905) 用第二类序数的全体定义了一个不属于任何 Baire 函数†类的函数(后来,这个方法被 Luzin 系统地发展为筛法理论). 但是,根据 Borel 的观点,不能认为它满足能行性. 于是,我们问: 能够不用第二类序数全体而推广 Borel 集吗?解析集的发现对这个要求给了一个肯定的回答.

在本条中,我们只处理与可分的†、完备的†度量空间†相同胚†的空间 (用 $X, Y, \cdots$ 表示) 及其子空间. 我们用 $\mathfrak{N}$ 表示**无理数的空间** (法 espace des nombre irrationnels) (即由无理数全体组成的以 $|x-y|$ 为 x 与 y 之间的距离的度量空间), 就空间 X 的子集 S 而言, 下列性质 i)—iv) 是互相等价的: i) S 为 $\mathfrak{N}$ 的连续映象; ii) S 为 X 中 Borel 集的连续映象; iii) S 为乘积空间 $X \times \mathfrak{N}$ 中的闭集的射影; iv) S 为 $X \times X$ 中 Borel 集合的射影. 我们把满足这些性质之一的集合称为 (X 中的) **解析集** (analytic set) 或 **A 集** (法 ensemble (A)). 解析集的补集称为**补解析集** (法 ensemble complémentaire analytique 英 complementary analytic set 或 co-analytic set) 或 **CA 集** (法 ensemble (CA)).

【A 运算与筛法】 如果自然数的每个有限序列 $(n_1, \cdots, n_k)$ 均对应着集合族 F 中的唯一的元素 $E(n_1, \cdots, n_k)$, 则这个对应 $\{E(n_1,$

$\cdots, n_k)\}$ 称为属于 F 的集合的 **Souslin 模式**（英 schema of Souslin 法 schème de Suslin）**或 Souslin 系统**（英 system of Souslin 法 système determinant d'ensembles）. 设一般地用 $\{n_i\}$ 表示自然数的无穷序列，则由 $\bigcup_{\{n_i\}} \bigcap_k E(n_1, \cdots, n_k)$ 所给出的集合称为 Souslin 系统的**核**（法 noyau），而由 Souslin 系统构造其核的运算称为 **A 运算**（法 opération (A)）.

设 $\boldsymbol{Q}$ 为 0 与 1 之间的一切有理数的集合而 F 为集合族. 我们把以 $\boldsymbol{Q}$ 为下标集的属于 F 的集合的族 $\{C_r\}_{r\in \boldsymbol{Q}}$ 称为（或者从几何上看，当 F 为空间 X 的子集的族时，把 $X \times \boldsymbol{Q}$ 的子集 $C = \bigcup_{r\in \boldsymbol{Q}} C_r \times (r)$ 称为）由 F 中的集合组成的**筛**（法 crible）. 设用 $\{r_i\}$ 表示由 $\boldsymbol{Q}$ 的元素组成的（严格）单调递减序列，我们把集合 $\bigcap_{\{r_i\}} \bigcup_k C_{r_k}$（即关于有理数的大小次序 $\leqslant$，使得 $C^{(x)} = \{r \mid (x, r) \in C\}$ 不是良序的那些 x 的集合）称为由筛 C 获得的集合或由 C 获得的**筛集**（法 ensemble criblé）. 如果集合族 F 关于可数相交是闭的，亦即如果集合族 F 的可数个元的交集永属于 F，则由 F 中的集合所组成的筛而得到的一切集合的族和由 F 应用 A 运算而得到的一切集合的族是相同的. 特别是，当 F 是给定空间中的闭集全体时（当 X 为实数空间时，可取 F 为闭区间全体），则上述集合族为解析集全体的集合族. 如果不用有理数全体的集合 $\boldsymbol{Q}$ 而用实数空间 $\boldsymbol{R}$，便可以更一般地定义筛和筛集.

【解析集的性质】 显然，根据解析集的定义，每个 Borel 集†都是解析集. 如果 Borel 集是不可数的，则除至多可数个点外，它是 $\mathfrak{N}$ 的一一对应的连续映象. 集合的解析性对可数并集、可数交集、可数 Cartesian 乘积（直积）、A 运算以及 Borel 可测† 变换而言，都是不变的. 一个不可数的解析集必包含一个完备子集（Souslin）. 因此，一个解析集的基数或者至多为可数的，或者为连续统的基数. 每个解析集都具有 Baire 性质†，又在 Euclid 空间中，每个解析集都是 Lebesgue 可测的†（Luzin, Sierpiński）. 如果 Euclid 平面上的集合 E 是解析的（补解析的），则 $\Gamma(E)$ 也是解析的（补解析的），这里，$\Gamma(E)$ 是使得 E 的平行于 y 轴的截面 $E^{(x)}$ 具有正测度的一切 x 的集合（近藤基吉-柘植利之）. 每个解析集以及补解析集 E 都能够表为 $\aleph_1$ 个互不相交的 Borel 集合的和. 这种分解称为把 E 分解为**组成成分**（法 coustituante）. 使得一个解析集（补解析集）为 Borel 集的充分必要条件是：它可分解为可数多个成分（Luzin, Sierpiński）. 在具有连续统基数的空间中，存在非 Borel 集的解析集. 例如，在解析空间†中，即在区间 $[0, 1]$ 上连续函数全体的空间 $C([0, 1])$ 中（→函数空间），可微函数全体的集合是补解析集但不是 Borel 集（S. Mazurkiewicz）.

以下的一系列定理在解析集合论中是特别重要的. **Luzin 的第一分离定理**（Luzin's first principle）：对每对不相交的解析集合 A_1, A_2，存在一个 Borel 集 B，使得 $A_1 \subset B$ 并且 $B \cap A_2 = \varnothing$. 作为这个定理的直接推论是 **Souslin 定理**：如果 A 与 $X - A$ 是解析集，则 A 为 Borel 集. **Luzin 的第二分离定理**（Luzin's second principle）：对每一对解析集 A 和 B，都存在补解析集 C 和 D，使得 $A - B \subset C$，$B - A \subset D$ 并且 $C \cap D = \varnothing$. Borel 集合的一一的连续映象是 Borel 集（Souslin）. 更一般地，对于给定的在 Borel 集 B 上定义的 $\mathfrak{B}$ 可测函数 f，使得其逆象 $f^{-1}(y)$ 为单一的那些点 y 所组成的集合 $A(\subset f(B))$ 是补解析集（**Luzin 的单一性定理**（Luzin's unicity theorem））. 在这条定理中，可以用"F_σ 集†"代替"单一性"（V. Ja. Arsenin，功力金二郎）. 因此，就 Borel 集的连续象而言，如果每点的逆象都为 F_σ 集，则该连续象必是 Borel 集.

【到射影集的推广】 空间 X 中的 **n 级射影集**（projective set of class n）可归纳地定义如下：(i) Borel 集是 0 级射影集；(ii) $2n+1$ 级射影集是 $2n$ 级射影集的连续象；(iii) $2n$ 级射影集是 $2n-1$ 级射影集的补集.

1 级射影集实际上是解析集而 2 级射影集

实际上是补解析集，射影集是解析集的自然推广．下面是射影集的重要性质．如果我们用 $\boldsymbol{L}_n$ 表示 n 级射影集全体的集合，则 (1) $\boldsymbol{L}_{2n}\subset\boldsymbol{L}_{2n+k}$ 且 $\boldsymbol{L}_{2n+1}\subset\boldsymbol{L}_{2n+2+k}$ $(k=1,2,\cdots)$；(2) 为 n 级射影集这个性质，对于可数次并、可数次交、可数次 Cartesian 乘积以及同构而言，是不变的；(3) $2n+1$ 级射影集的连续的象也是 $2n+1$ 级射影集；(4) $X\times Y$ 中的 $2n+1$ 级射影集向 X 的射影是 X 的 $2n+1$ 级的射影集；(5) 在空间 X 中 $2n+1$ 级射影集全体所成的集合族与 $X\times X$（或 $X\times\mathfrak{N}$）中一切 $2n$ 级射影集的射影全体的集合族是相同的；(6) 当 $n\neq 0$，2 时，只由 n 级射影集构成的 Souslin 系统的核仍是 n 级射影集．

我们常常把 $2n-1$ 级射影集称为 **P_n 集**，把 $2n$ 级射影集称为 **C_n 集**．兼为 P_n 和 C_n 两者的称为 **B_n 集**．P_n，C_n，B_n 的集合族也分别用 P_n，C_n，B_n 表示．一般地，设空间 X 中一个集合的族为 $\mathfrak{F}$，我们用 $C\mathfrak{F}$ 表示由 $\mathfrak{F}$ 中一切集合 E 的补集 $X-E$ 所组成的集合族．在 Luzin 第一分离定理和第二分离定理中，如果用"$\mathfrak{F}$ 中集合""$\mathfrak{F}$ 中和 $C\mathfrak{F}$ 中集合"，"$C\mathfrak{F}$ 中集合"分别替换"解析集"，"Borel 集"，"补解析集"，所得的命题分别记为 $\mathrm{Sep_I}\mathfrak{F}$ 和 $\mathrm{Sep_{II}}\mathfrak{F}$，则 $\mathrm{Sep_I}C_2$ 和 $\mathrm{Sep_{II}}C_2$ 成立（P. S. Novikov）．如果我们假定有 Gödel 的可构造性公理† "$V=L$"，则 $\mathrm{Sep_I}(C_n)$，$\mathrm{Sep_{II}}(C_n)$ $(n\geqslant 3)$ 也成立（J. W. Addison）．如假定在每个射影集上的对策†都是严格确定的，则当 n 为奇数（偶数）时，$\mathrm{Sep_I}\,P_n$，$\mathrm{Sep_{II}}\,P_n$（$\mathrm{Sep_I}C_n$，$\mathrm{Sep_{II}}C_n$）均成立（A. Martin，J. W. Addison 和 Y. N. Maschovakis）．

【通用集】 在 $\mathfrak{N}\times X$ 中的集合 U 称为 X 中 n 级射影集的**通用集**（法 ensemble universel）或**通用函数**（法 fonction universelle），是指对 X 中任意的 n 级射影集 P，都有 $z_0\in\mathfrak{N}$，使得 $P=\{x\,|\,(z_0,x)\in U\}$．关于通用集，我们有以下结果：对每个 $n>0$，存在一个 X 中的 n 级射影集的通用集，它在 $\mathfrak{N}\times X$ 中也是 n 级射影集．因此，在具有连续统基数的空间中，存在着 $n+1$ 级但非 n 级的射影集．

【单值化问题】 单值化问题是在研究隐函数时产生的．对于空间 $X\times Y$ 中的一个集合 E，E 的**单值化**（法 uniformisation）是指求 E 的子集 V，使得

$$\forall x(\exists y((x,y)\in E)\Leftrightarrow\exists!\,y((x,y)\in V),$$

这里，$\exists!\,y$ 是表示"恰好存在一个 y"的量词†．一个 Borel 集可以由选择一个适当的补解析集而单值化（Luzin）．任何补解析集可以由某个特定的补解析集而单值化，P_2 集可由某个特定的 P_2 集而单值化（近藤）．最近，Addison，三瓶与右衛門和鈴木義人简化了以上结论的证明，并且 J. R. Shoenfield 已得出了更加漂亮的结果．一般说来，解析集的单值化不能由解析集或补解析集而求得．有一个猜想，即任何一个解析集都可以由 A_ρ 集（两个解析集的差）而单值化，但仍未解决（柘植利之）．如果假设 $V=L$，则 P_n 集 $(n\geqslant 3)$ 可用某个特定的 P_n 集而单值化；C_n 集 $(n\geqslant 2)$ 可用某个特定的 $C_{n\rho}$ 集而单值化．另一方面，如果集合论的公理系统（例如，ZF（→ 公理集合论））是相容的，则我们即使把以下命题加进去，它仍然是相容的：存在一个 C_2 集，它不可能根据在系统中某个特定的可定义的集合而单值化．（P. J. Cohen，A. Lévy）．

【Kleene 的谱系和能行性概念】 在一般空间中的射影集合论是可以化归为无理数空间中的理论的．如果我们在一元数论函数†α 全体的集合 $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ 中引进弱拓扑†，则所得的拓扑空间 $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ 与无理数空间 $\mathfrak{N}$ 是同胚的．$\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ 的任何子集 B 在这个拓扑之下是开且闭的，其充分必要条件是存在一个函数 $\xi(\in\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}})$ 和一般递归†于 ξ 的谓词 $A^\xi(\alpha)$，使得 $\alpha\in B\Leftrightarrow A^\xi(\alpha)$．此外，$\neg$，$\vee$，$\wedge$，$\exists x$（$x$ 在自然数域上变化）和 $\exists\alpha$ 等逻辑运算实际上分别对应于补、并、交、可数并与射影等（关于集合的）运算．基于这些事实，射影集合论可看作 Kleene 的 $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ 解析谱系†的理论．这里，下例是很值得注意的：我们可以构造一个对无理数空间中的解析集（即 $\Sigma_1^1[\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}]$ 集合）为通用集的 Σ_1^1 集合（→ 谱系理论）．

C. Kuratowski 和 A. Tarski 讨论了射影集

合论与逻辑之间的关系. 另一方面,就 Borel 等人的半直觉主义的观点而言, 自然数是本身自明的东西,连续统也可由几何直觉而直接掌握. 在他们的理论中, 有理数并不起到特殊重要的作用. 他们把无理数集合作为先验给定的基本域, 而把两端为有理数的区间作为基本领域的子集当中最简单的"点集", 以此作为他们的理论的出发点. 这里,基本域也好,区间也好,都不考虑作为它的元素的集合(外延),而认为是"均匀延拓"(法 étendue). 与此相反,单点集或个别的无理数却不那么简单. 为此, Borel 引进了**可计算数**(法 nombre calculable) 的概念来研究可定义的实数. 依照 Luzin 的说法,可以说可计算数是一个可构造的实数, 其意义为可以在任何精确度内作为算术近似(法 approximation arithmétique)而给出实数. 现在,这个概念几乎等价于 A. Church 和 A. M. Turing 给出的能行可计算†实数的概念.

在半直觉主义的数学中, "能行"这个概念起着非常重要的作用. 虽然这些数学家在不赞成接受选择公理†这个最低要求上是一致的, 但是, 半直觉主义的"能行"的实际含义却因人因时而有不同的内容和不同的意见. 这种差异主要由以下问题引起的: 我们如何说明一个给定的实体是有限的或单个的? 要推测 Borel 等人在使用"能行的"一语时原来所持的意见,一个方法是把"能行"这个术语换为"递归的".

"能行地给出"一个具有性质 P 的个体 A 是一回事, 而"能行地证明"个体 A 具有性质 P 又是完全不同的另一回事. 如果一条定理建立在这两者之上, 则这条定理是非常有价值的. 但是, 有关二级以上的射影集的性质还有很多是不能能行地证明的. 这就是为什么 Luzin 对二阶以上的射影集持否定态度的主要原因. 对于求补解析集的基数的问题和证明三阶以上的射影集的 Lebesgue 可测†性的问题都是非常困难的. 在 $V = L$ 的假设之下, 公理集合论的近代发展已给出了以下命题 (K. Gödel, Novikov): (i)存在一个不含任何完备子集的不可数补解析集. (ii) 存在一个 Lebesgue 不可测的 B_2 集. 最近已经证明 (i), (ii) 和其他命题都是独立于集合论的公理系统的 (Cohen, R. M. Solovay) (→公理集合论).

【参】 [1] 近藤基吉, 解析集合論, 岩波, 1938; [2] C. Kuratowski, Topologie I, Warsaw, 1933; [3] A. A. Ljapunow-E. A. Stschegolkow- V. J. Arsenin, Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre, Deutscher Verlag der Wissenschaften. 1955; [4] N. N. Lusin (Luzin), Sur les ensembles analytiques, Fund. Math., **10**(1927), 1—95; [5] N. N. Lusin (Luzin), Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, 1930; [6] W. Sierpiński, Les ensembles projectifs et analytiques, Mémor. Sci. Math., no. 112, Gauthier-Villars, 1950.

谱系理论 [英 theory of hierarchies 法 théorie d'hiérarchies 德 Theorie der Hierarchien 俄 теория иерархии] 日 階層の理論] Borel 集† (或 Baire 函数†)的理论和射影集†的理论(→解析集) 可认为是**谱系理论** (hierarchy theory) 的一个例子. 特别是, 我们有这种集合(或函数)的"级"的概念,并且当"级"变得更高时,给出或描述所属的集合在本质上将变得更加复杂. 这个理论也称为**描述集合论** (descriptive set theory), 是从所谓法国经验主义的观点来研究的一个数学分支(→数学基础). 利用递归函数†的理论, S. C. Kleene 成功地建立了谱系理论, 它本质上包含古典描述集合论作为其极端情况 ([4, 6, 7, 9]). 虽然, M. Davis, A. Mostovskii 和其他人基于递归函数的理论而研究谓词†的谱系,但是,使该理论成功地发展成几乎完全的形式的是 Kleene. 以下讨论中用到的记号和概念→递归函数.

因为集合或函数都可用谓词来描述, 所以下面的讨论将以谓词为中心. 设 $a, b, \cdots, a_1, a_2, \cdots, x, y, \cdots$ 为在自然数集合 $\boldsymbol{N}$ 上变化的变元,而 $\alpha, \beta, \cdots, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \xi, \eta, \cdots$ 为在所有一元数论函数†的集合 $\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ 上变化的变元. 设 $\psi_1, \cdots, \psi_l\ (l \geqslant 0)$ 为任意给定的数论函数. 如果具有两种类型† (自然数和数论函数) 变元的谓词 $P(\alpha_1, \cdots, \alpha_m, a_1, \cdots, a_n)$ $(m, n \geqslant 0, m + n > 0)$ 能够从一般递归†于 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 的

谓词出发，经过有限次运用逻辑符号：→，∨，∧，¬，$\exists x$，$\forall x$，$\exists \xi$，$\forall \xi$ 而得到，则称该谓词是**解析**(analytic)于 $\phi_1,\cdots,\phi_l(l \geqslant 0)$ 的．特别是，当 P 不用函数量词 $\exists \xi$，$\forall \xi$ 而可表示时，则称它是**算术**(arithmetical)于 $\phi_1,\cdots,\phi_l\ (l \geqslant 0)$ 的．当 $l=0$ 时，谓词 P 分别相应地简称为解析的和算术的．

为简单起见，我们考察 $l=0$ 的情形，而且用 $\mathfrak{a}$ 表示序列 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,a_1,\cdots,a_n)$．每个算术谓词 $P(\mathfrak{a})$ 可先转化为前束范式，然后使用以下公式及其"对偶式"(dual form)而把相继的同一种量词合成一个：

$$(1)\ \exists x_1\cdots\exists x_n A(x_1,\cdots,x_n) \Leftrightarrow \exists x A((x)_0,\cdots,(x)_{n-1})$$

于是它便可以用写在下表(a)中的某一形式来表示：

$$(a)\ R(\mathfrak{a});\quad \begin{array}{l}\exists x R(\mathfrak{a},x),\ \forall x\exists y R(\mathfrak{a},x,y),\cdots,\\ \forall x R(\mathfrak{a},x),\ \exists x\forall y R(\mathfrak{a},x,y),\cdots,\end{array}$$

这里，R 为一般递归谓词．我们对(a)中的每一种谓词形式(或具有这种形式的谓词全体)，根据它的量词个数 k 以及最外边的量词为存在量词或全称量词而记为 Σ_k^0 或 Π_k^0．可用两种形式 Σ_k^0 和 Π_k^0 来表示的谓词(或这种谓词全体)则记为 Δ_k^0．一个谓词属于 Δ_1^0 的充分必要条件为它是一般递归的(类似于 Souslin 定理[†])．

对于 $k \geqslant 1$，恒存在一个枚举 Σ_k^0(或 Π_k^0)的谓词全体的**枚举谓词**(enumerating predicate)．例如，对于 Π_2^0 和 $m=n=1$ 而言，存在一个原始递归谓词 $S(\alpha,z,a,x,y)$，使得当任意给定一个一般递归谓词 $R(\alpha,a,x,y)$ 时，我们恒有一个自然数 f，使得

$$\forall x\exists y R(\alpha,a,x,y) \Leftrightarrow \forall x\exists y S(\alpha,f,a,x,y)$$

(**枚举定理**(enumeration theorem))．在这个定理中，我们可以把 $S(\alpha,z,a,x,y)$ 取为 $T_2^{\alpha}(z,a,x,y)$(→递归函数)．对每个 $k \geqslant 0$，都存在一个 Σ_{k+1}^0(Π_{k+1}^0)谓词，它不可在其对偶形式 Π_{k+1}^0(Σ_{k+1}^0)中来表示(因此，当然不可能在 Σ_k^0 和 Π_k^0 中来表示)(**谱系定理**(hierarchy theorem))．所以，上面的表(a)便是算术谓词的谱系分类．这个谱系称为**算术谱系**(arithmetical hierarchy)．对每个 $k \geqslant 1$，都有一个关于 Σ_k^0(Π_k^0)的**完备**(complete)谓词，即存在一个仅具有一个变元的 Σ_k^0(Π_k^0)谓词，使得任何的 Σ_k^0(Π_k^0)谓词都可通过将它的一个变元代以一个适当的一般递归函数(或更严格地，代以一个原始递归函数)来表示(**完备形式定理**(theorem on complete form))．当 $m=0$ 时，一般递归于 Σ_k^0 的谓词全体和 Δ_{k+1}^0 是相同的(**Post 定理**)．

关于1型变元的量词(即函数量词)，我们有

$$(2)\ \exists\alpha_1\cdots\exists\alpha_m A(\alpha_1,\cdots,\alpha_m) \Leftrightarrow \exists\alpha A(\lambda t(\alpha(t))_0,\cdots,\lambda t(\alpha(t))_{m-1}),$$

$$(3)\ \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists\alpha A(\alpha(0)),$$

$$(4)\ \forall x\exists\alpha A(x,\alpha) \Leftrightarrow \exists\alpha\forall x A(x,\lambda t\alpha(2^x\cdot 3^t)),$$

以及它们的对偶式．对任何一般递归谓词 R 而言，有一个原始递归谓词 S，使得

$$(5)\ \exists\alpha R(\alpha,\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \exists\alpha\exists x S(\bar{\alpha}(x),\mathfrak{a}) \Leftrightarrow \exists y S(y,\mathfrak{a})$$

以及它的对偶式成立．利用这些事实，我们可以把所有解析谓词依表(b)的谓语形式而分类：

$$(b)\ A(\mathfrak{a});\quad \begin{array}{l}\forall\alpha\exists x R(\mathfrak{a},\alpha,x),\\ \quad\exists\alpha\forall\beta\exists x R(\mathfrak{a},\alpha,\beta,x),\cdots,\\ \exists\alpha\forall x R(\mathfrak{a},\alpha,x),\\ \quad\forall\alpha\exists\beta\forall x R(\mathfrak{a},\alpha,\beta,x),\cdots,\end{array}$$

这里，A 是算术谓词而 R 为一般递归谓词．(b)中出现的每个谓词的形式(或可化归为这种形式的谓词全体)同样地可用 Σ_k^1 及 Π_k^1 来表示．又用 Δ_k^1 表示兼为 Σ_k^1 和 Π_k^1 的谓词(的全体)，这里，k 为关于1型变元的量词的个数．对于 Σ_k^1，Π_k^1($k \geqslant 1$)，我们有枚举定理，谱系定理以及完备定理．表(b)所表示的谱系称为**解析谱系**(analytic hierarchy)．

对于 $l>0$(即当谓词是算术于或解析于 $\phi_1,\cdots,\phi_l$ 时)，我们可以就 $\phi_1,\cdots,\phi_l$ 把上述结果一致地[†]相对化[†]．相应的谱系分别表为

$$\{\Sigma_k^{r,\phi_1,\cdots,\phi_l},\ \Pi_k^{r,\phi_1,\cdots,\phi_l}\}_k\ (r=0\ 或\ 1).$$

设给定一元函数的集合 $C(\subset \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}})$．这时，我们

可以考察算术于和解析于 C 中任意有限多个函数的谓词的谱系. 这种谱系分别称为 **C 算术谱系** (C-arithmetical hierarchy) 或 **C 解析谱系** (C-analytic hierarchy), 并且分别表为 $\{\Sigma_k^0[C], \Pi_k^0[C]\}_k$ 或 $\{\Sigma_k^1[C], \Pi_k^1[C]\}_k$. 也就是说, 当看作为谓词(或集合) P 的族时, 记号 $\Sigma_k^t[C]$ 表示 $\{P \mid P \in \Sigma_k^{t, \xi_1, \cdots, \xi_l}, \xi_1, \cdots, \xi_l \in C, l = 0, 1, 2, \cdots\}$. 这些记号是 J. W. Addison 给出的 ([1,2]). 关于集合的 N^N 算术谱系和 N^N 解析谱系分别对应于无理数的空间†中的有限 Borel 集和射影集. Addison 把这些谱系理论称为**古典描述集合论** (classical descriptive set theory). 与此相对, 关于集合的(即 $C = \varnothing$ 时) 算术谱系和解析谱系的理论便称为**能行描述集合论** (effective descriptive set theory) ([1]).

我们现在仅限于考察关于自然数的谓词 (即 $m = 0$ 的情况). 我们如下地定义谓词 L_k: $L_0(a) \Leftrightarrow a = a$, $L_{k+1}(a) \Leftrightarrow \exists x T_1^{L_k}(a, a, x)$. 对每个 $k \geqslant 0$ 而言, $L_{k+1}(a)$ 是一个 Σ_{k+1}^0 谓词, 它是在 Σ_{k+1}^0 谓词中具有最高级递归不可解度†的, 并且它的不可解度确实比 $L_k(a)$ 来得高. 因此, $L_k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 决定了**递归不可解度的算术谱系** (arithmetical hierarchy of degrees of recursive unsolvability). Kleene 用可构造序数的记法†系统 S_3 ([6], →可构造序数) 而把 L_k 序列推广如下: $H_1(a) \Leftrightarrow a = a$; 对 $y \in O$ 而言, $H_{2^y}(a) \Leftrightarrow \exists x T_1^{H_y}(a, a, x)$; 对 $3.5^y \in O$ 及 $y_n = \{y\}(n_O)$ 而言, $H_{3.5^y}(a) \Leftrightarrow H_{y_{(a)_1}}((a)_0)$. 设对于各 $y \in O$ 而言, H_y 均有定义, 则当 $z <_O y$ 时, H_y 的度严格地大于 H_z 的度. 如果 $|y| = |z|$ ($|y|$ 为用 y 所表示的序数), 则 H_y 和 H_z 是同级的 (C. Spector [11]). 因此, 以可构造序数作下标的不可解度谱系是唯一地决定的. 这个谱系称为**递归不可解度的超算术谱系** (hyperarithmetical hierarchy of degrees of recursive unsolvability). 如果一个函数或一个谓词对于某个 $y \in O$ 而言是递归于 H_y 的, 则我们称这个函数或谓词是**超算术的** (hyperarithmetical). 这些概念和以下提到的结果可以就任何给定的函数或谓词而相对化.

使得一个谓词为超算术的必要(Kleene[6]) 和充分 (Kleene[7]) 条件是它可在 Δ_1^1 中表示出来 (Souslin 定理的"能行"形式). 我们用 Hyp 表示超算术函数 α (即如命 $P(a, b) \Leftrightarrow \alpha(a) = b$, 则 P 为超算术谓词) 的全体的集合 ($\subset N^N$). 对于任意给定的一个算术谓词 $A(\alpha, a)$, 谓词 $\exists \alpha_{\alpha \in \mathrm{Hyp}} A(\alpha, A)$ 恒为 Π_1^1 谓词 (Kleene [8]). 反之, 对任何 Π_1^1 谓词 P, 可求得一个一般递归谓词 R, 使得 $P(a) \Leftrightarrow \exists \alpha_{\alpha \in \mathrm{Hyp}} \forall x R(a, \alpha, x)$ (Spector [12]). 就单值化而言, 对于一个 Π_1^1 谓词 $P(a, b)$, 我们有 $\forall x \exists y P(x, y) \Rightarrow \exists \alpha_{\alpha \in \mathrm{Hyp}} \forall x P(x, \alpha(x))$ (G. Kreisel, 1962). 设 $\boldsymbol{E}$ 为如下定义的 2 型个体: 如果 $\exists x (\alpha(x) = 0)$ 则 $\boldsymbol{E}(\alpha) = 0$, 否则 $\boldsymbol{E}(\alpha) = 1$. 一个函数 $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ 是超算术的, 当且仅当它是一般递归于 $\boldsymbol{E}$ 的 (Kleene [9]). 超算术于 $\Pi_k^1 (k \geqslant 0)$ 的谓词为 Δ_{k+1}^1 谓词 (Kleene [7]), 但是, 其逆定理一般并不成立 (Addison 和 Kleene, 1957).

Kleene 把他的谱系理论推广, 他利用具有任意型: 0, 1, 2, … 的变元的一般递归函数理论, 而对任意型变元的谓词建立谱系理论 ([9]). 设 $\mathfrak{a}^t$ 为一列变元, 它们的型 $\leqslant t$. 如果, 从一般递归于给定的函数 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ $(l \geqslant 0)$ (简记为 Ψ) 的谓词出发, 仅使用逻辑符号 $\rightarrow, \vee, \wedge, \neg$ 及关于型 $< r$ 的变元的量词而构成表达式, 则它所表示的谓词 $P(\mathfrak{a}^t)$ 便称为就 Ψ 而言是 **r 阶** (order) 的谓词. 特别是, 就 Ψ 而言为 0 阶的谓词便是一般递归于 Ψ 的谓词. 当 $t \geqslant 1$ 并且 Ψ 为 0 型变元的函数时, 则就 Ψ 而言为 1 阶或 2 阶的谓词便是算术于 Ψ 或解析于 Ψ 的谓词, 这两个概念是一致的.

类似于上述的 (2)—(4) 的定理及以下的基本定理是成立的: 当 $r \geqslant 2$ 时, 对任意给定的一般递归谓词 $P(\mathfrak{a}^r, \sigma^r, \xi^{r-2})$, 可求出原始递归谓词 $R(\mathfrak{a}^r, \eta^{r-1}, \xi^{r-2})$ 使得

(6) $\exists \sigma^r \forall \xi^{r-2} P(\mathfrak{a}^r, \sigma^r, \xi^{r-2}) \Leftrightarrow$

$$\exists \eta^{r-1} \forall \xi^{r-2} R(\mathfrak{a}^r, \eta^{r-1}, \xi^{r-2})$$

及其对偶形式均成立.

利用这些定理, 每个 $r + 1$ $(r \geqslant 0)$ 阶谓词 $P(\mathfrak{a}^t)$ 可表示为以下表 (c) 中的形式之一:

$\forall\alpha^r\exists\xi^{r-1}R(\mathfrak{a},\alpha^r,\xi^{r-1})$,

(c) $B(\mathfrak{a})$; $\exists\alpha^r\forall\beta^r\exists\xi^{r-1}R(\mathfrak{a},\alpha^r,\beta^r,\xi^{r-1}),\cdots$,

$\exists\alpha^r\forall\xi^{r-1}R(\mathfrak{a},\alpha^r,\xi^{r-1})$,

$\forall\alpha^r\exists\beta^r\forall\xi^{r-1}R(\mathfrak{a},\alpha^r,\beta^r,\xi^{r-1}),\cdots$,

这里，B 为 r 阶谓词而 R 为一般递归谓词. 当 $t = r + 1$ 时，表(c)实际上把一切 $r + 1$ 阶的谓词分成谱系. 也就是说，对于(c)中各种形式的谓词，我们有枚举定理、谱系定理和完备形定理(Kleene [9]). 此外，A. Clarke([3])发表了有关一般的谱系理论的详细报告.

【参】 [1] J. W. Addison, Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory, Fund. Math., **46** (1958—1959), 123—135; [2] J. W. Addison, Some consequences of the axiom of constructibility, Fund. Math., **46** (1958—1959), 337—357; [3] D. A. Clarke, Hierarchies of predicates of finite types, Mem. Amer. Math. Soc., 1964; [4] S. C. Kleene, Recursive predicates and quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc., **53** (1943), 41—73; [5] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand, 1952; [6] S. C. Kleene, Arithmetical predicates and function quantifiers, Trans. Amer. Math. Soc., **79** (1955), 312—340; [7] S. C. Kleene, Hierarchies of number-theoretic predicates, Bull. Amer. Math. Soc., **61** (1955), 193—213; [8] S. C. Kleene, Quantification of number-theoretic functions, Compositio Math., **14** (1959), 23—40; [9] S. C. Kleene, Recursive functionals and quantifiers of finite types I, Trans. Amer. Math. Soc., **91** (1959), 1—52; [10] S. C. Kleene, Recursive functionals and quantifiers of finite types II, Trans. Amer. Math. Soc., **108** (1963), 106—142; [11] C. Spector, Recursive well-orderings, J. Symbolic Logic, **20** (1955), 151—163; [12] C. Spector, Hyperarithmetical quantifiers, Fund. Math., **48** (1959—1960), 313—320.

Turing 机 [英 Turing machine 法 machine de Turing 德 Turingsche Maschine 俄 машина Тюринга 日 チューリング機械] 由于在 Gödel 的不完备性定理†的证明中使用了对元数学的算术化†的方法，所以，从 Gödel 开始，许多数学家都来寻求能行可计算函数†的数学表述，其中包括 S. C. Kleene, A. Church 等人(→递归函数). 本着同样的目的，A. M. Turing 和 E. L. Post 几乎同时引进了一种理想的计算机([1, 2])，称为 **Turing 机**.

这种 Turing 机能够处在有限个**内部状态**(internal state)或**机器格局**(machine configuration) $q_0, q_1, \cdots, q_N$ 之一，这种状态对每个机器是固定的，而且，它还备有一条分成许多方格的无限长的带(这条带可以按一个方向或两个方向无限延伸). 每个方格或者是空格或者印有预先规定的符号 $s_1, \cdots, s_M$ 之一. 在任何情况下，印有符号的方格总是有限多个. 为了方便起见，我们取一个空符号 s_0 并且想象在每个空格上都印上了这个空符号. 在每一瞬间，机器只处于一种状态并且只在带上注视一个方格(即注视一个包括 s_0 在内的符号). 于是，由在那个瞬间印在带上的符号的有限序列 t，内部状态 q_i 和**被注视的字符**(scanned symbol) s_j 组成的三元向量 (t, q_i, s_j) 便称为(**带与机器的**)**情况**或**完全格局**. ((tape vs. machine) situation, complete configuration). 按照状态是 q_0 与否而区分情况是**被动的**(passive)还是**主动的**(active). 给定一个主动的情况，则机器便动作而从一个情况移到下一个情况. 如果到达的情况也是主动的，则机器继续动作，直到最后到达被动情况时为止. 我们把最初给定的使机器开始动作的情况称为**初始情况**(initial situation)或**输入**(input)，而把机器停止动作时的被动情况称为**终结情况**(terminal situation)或**输出**(output). 现在，当情况从一个主动情况 (t, q_i, s_j) 改变为下一个情况 (t', q_k, s_l) 时，我们用 $(q_i, s_j) \to q_k a s_l$ 表示机器所执行的**原子动作**(atomic act)(其中，$a = -1, 0$ 或 1)，这个记号表明：(i)注视符号 s_j 改变为 s_l；(ii)当 $a = -1$(或 1)时，注视的方格左(或右)移一格，当 $a = 0$ 时，带不移动；(iii)内部状态 q_i 改变为 q_k. 由可能的内部状态 $q_i (i \neq 0)$ 和被注视的符号 s_j 组成的对 (q_i, s_j) 作为参数，以形如 $q_k a s_l$ 的表达式作为成分，从而构成的 N 行 $M + 1$ 列的矩阵便决定了一个 Turing 机.

【用 Turing 机计算函数】 自然数 y 可用带上印有符号 s_1 的 $y + 1$ 个连续的方格序列来表示. 自然数对 (y_1, y_2) 可用一个 s_0, y_1 的表示，一个 s_0, y_2 的表示，一个 s_0 这个长为 $y_1 + y_2 + 5$

的符号序列来表示.一般地,自然数的 m 元向量 $(y_1, \cdots, y_m)$ 可用类似的方法来表示. 当注视的符号为 y_m 的表示中的最末一个 s_1 时,我们便说在带上按**标准位置** (standard position) 注视 m 元向量 $(y_1, \cdots, y_m)$(的表示). 现在,设 φ 为 n 元部分函数†($n \geqslant 1$). 如果对任意给定的自然数的 n 元向量 $(x_1, \cdots, x_n)$, 以下的 (1) 和 (2) 均成立, 则称 Turing 机 $\mathfrak{M}$ **计算** (compute) 了 φ: (1) $\mathfrak{M}$ 从以下初始情况启动: 在带上印有 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的表示,而其余地方皆为空格,且 $\mathfrak{M}$ 按标准位置注视 $(x_1, \cdots, x_n)$; (2) 当且仅当 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 有定义且 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)=x$ 时, $\mathfrak{M}$ 最终停在终结情况, 这时带上表示有 $n+1$ 元向量 $(x_1, \cdots, x_n, x)$, 并且按标准位置注视. 当存在一个计算部分函数 φ 的机器 $\mathfrak{M}$ 时, 便称 φ 是(在 Turing 意义之下) **可计算的** (computable). 众所周知, 部分函数是 (在 Turing 意义之下)可计算的,当且仅当它是部分递归†的.

数论函数的可计算性 (在 Turing 意义之下)和它的递归性的等价是 Church 命题成立的有力证明 (→ 递归函数). 我们不仅可以将 Turing 机应用到数论函数的计算上,而且也可以将它应用到具有有限字母表的任何语言中的有限字母序列的变换上. 当给出有限个(不同的)符号(称为**字母** (letter)) 时, 便称给出了**字母表** (alphabet), 字母的有限序列称为该字母表上的**字** (word). 我们把有限个成对的字 $(A_1, B_1), \cdots, (A_n, B_n)$ 称为**字典** (dictionary). 现在, 如果两个字 R 和 S 使用有限多次字典之后便可以彼此变换,则称这两个字是**等价的**(equivalent). 以下的问题称为 (**一般**) **Thue 问题** (Thue's (general) problem): 对任意给定的字母表和字典,是否存在一种算法†可以判定两个任给定的字是否等价? Post 和 A. A. Марков 用 Turing 机器证明了这个判定问题是不可解的 ([4, 3]) (所谓半群的字的问题的否定解答).

【通用 Turing 机】 Turing 证明,可以构造出具有下述性质的机器 $\mathfrak{U}$ ([1]): 如果我们对 $\mathfrak{U}$ 提供一条带, 在带上印有任意给定的机器 $\mathfrak{M}$ 的适当标准化了的表 m, 则 $\mathfrak{U}$ 将在带上相继印出 $\mathfrak{M}$ 的活动中得出的各个情况. 因此,如果我们观察 $\mathfrak{U}$ 在带上所打印的, 我们就可以知道 $\mathfrak{M}$ 在它的带上印了什么样的符号序列. 换句话说, $\mathfrak{U}$ 复制了任意机器所执行的运算. 这样的机器 $\mathfrak{U}$ 便称为**通用 Turing 机** (universal Turing machine). 我们可以构造出只有两个内部状态的通用 Turing 机或只有两个符号(包括空符号 s_0 在内) 的通用 Turing 机 (C. E. Shannon 和 J. McCarthy [7]).

【Turing 机的推广】 设 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 为给定的函数, 它们在所考察的定义域上处处都有定义. 于是, 我们可以将函数的可计算性的概念 (Turing 意义之下)与 $\psi_1, \cdots, \psi_l$ 联系起来 (→递归函数). 事实上, 我们可以考察如下工作的机器: 当机器处于预先指定的内部状态 q_{i_k} 时 ($i_k \neq 0$, q_{i_k} 为在主动状态中预先指定的 l 个状态之一),则机器将 $\psi_k(y_1, \cdots, y_{n_k})$ 的表示印在 $(y_1, \cdots, y_{n_k})$ 的右边,然后, 按照标准位置注视所得的 n_k+1 元向量 $(y_1, \cdots, y_{n_k}, \psi_k(y_1, \cdots, y_{n_k}))$. 在此过程中, 写在 $(y_1, \cdots, y_{n_k})$ 右边的符号 α 向右推移, 使得 α 保持在所得的 n_k+1 元向量的右边. 推广上述概念, Kleene 定义了一种计算有限型变元的泛函的机器([8]). 有限型变元的泛函用这种广义 Turing 机是可计算的,当且仅当它是部分递归的.

【参】 [1] A. M. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, **42** (1936), 230—265, **43** (1937), 544—546; [2] E. L. Post, Finite combinatory processes-formulation I, J. Symbolic Logic, **1** (1936), 103—105; [3] A. A. Марков, Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем I, II, Докл. Акад. Наук СССР, **55** (1947), 587—590; [4] E. L. Post, Recursive unsolvability of a problem of Thue, J. Symbolic Logic, **12** (1947), 1—11; [5] S. C. Kleene, Introduction to metamathematics, van Nostrand 1952; [6] M. Davis, Computability and unsolvability, McGraw-Hill, 1958; [7] C. E. Shannon-J. McCarthy, Automata studies, Princeton Univ. Press, 1956; [8] S. C. Kleene, Turing machine computable functionals of finite types I. Logic, methodology and philosophy of science, Proc. 1960. International Congress

Logic, Stanford Univ. Press, 1962. p. 38—45; II. Proc. London Math. Soc., Ser. 3. **12** (1962), 245—258; [9] 高橋秀俊, 計算機械, 岩波講座現代応用数学, 1958; [10] H. Hermes, Enumerability, decidability, computability, Springer, 1965.

自动机 [英 automaton 法 automaton 德 Automaton 俄 автомат 日 オートマトン] **自动机** [或更确切地说, **有限自动机** (finite automaton)] 是一个物理设备, 假定它在每个瞬间 t ($t = 0, 1, 2, \cdots$) 均处于有限个内部状态之一, 并且在同一时刻接收一个从给定的有限集 U 中选出来的输入符号和发送一个仅仅与内部状态有关的输出符号,同时,假定由当前的内部状态和接收进来的输入符号便可决定下一个状态. 在数学上, 输入符号集 U 上的自动机是如下组成的四元向量 (S, g, s_0, F): 内部状态的有限集 S, 根据输入符号和当前状态来决定下一个状态的函数 $g: U \times S \to S$, 初始状态 $s_0 \in S$ 以及终结状态的集合 $F \subset S$.

由 U 产生的自由半群†T 的子集称为 (U 上的) **事件** (event). 函数 g 可推广为下列函数 $f: T \times S \to S$.

$f(e, s) = s$; $s \in S$ 而 e 为 T 的单位元.

$$f(xu, s) = g(u, f(x, s));$$
$$x \in T, \ u \in T, \ s \in S.$$

如果作出一个辨别事件 E 的自动机 $\mathfrak{U}$, 则 E 称为 (用 $\mathfrak{U}$) **可表示的** (representable), 即一个事件 E 用自动机 $A = (s, g, s_0, F)$ 可表示, 当且仅当 $x \in E \Leftrightarrow f(x, s_0) \in F$.

关于一个事件的可表示有各种等价说法. 一种说法是该事件在下述意义下是正规的 (S. C. Kleene): 考察对事件的三个运算 $\cup, \cdot, *$. 这里, $E \cdot F = \{xy \mid x \in E, y \in F\}$,

$$E * F = \bigcup_{n=0}^{\infty} EF^n.$$

包含由一个元素组成的单位集和空集在内的, 并且封闭于运算 $\cup, \cdot, *$ 的事件的最小集合称为**正规集** (regular set). 属于正规集的事件称为**正规事件** (regular event).

常常用图 1 所示的**变换图** (transition diagram) 来表示自动机. 圆圈中分号左边的字母表示内部状态, 分号右边的字母表示该状态下发送的输出,而附在箭号旁边的字母表示输入.

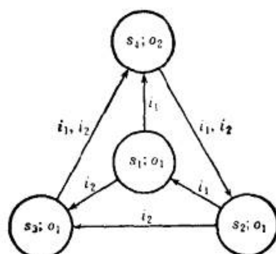


图 1 变换图

作为自动机的具体例子, 可举出神经网络和数字计算机†. 接收外界环境的刺激并把它们转化为输入的设备称为**感觉器官** (receptor). 将输出传送给外界环境的设备称为**运动器官** (effector). 具有感觉器官和运动器官的自动机称为**机器人** (robot).

【参】 [1] C. E. Shannon-J. McCarthy, Automata studies, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1956; [2] 赤摂也, オートマトンの理論, 計測, 9(1959), 7—12; [3] 高橋秀俊, 計算機械, 岩波講座現代応用数学, 1958.

二、集合论、一般拓扑学和范畴论

集合 [英 set 法 ensemble 德 Menge 俄 множество 日 集合] 【定义和记号】 把在我们直观或思维中的一定范围内的所有对象，作为一个整体来考虑，称之为(那些对象的)**集合**．把该范围内的各个对象称为该集合的**元**或**元素** (element)．当 a 是集合 A 的元素时，称为 a **属于** (belong) A，或 a 被 A 包含或 A **包含** (contain) a，用记号 $a\in A$ 或 $A\ni a$ 表示之．它的否定用 $a\notin A$ 或 $A\not\ni a$ 表示之（也有用 $a\bar{\in}A$ 或 $A\bar{\ni}a$ 表示的)．完全不含元素的集合 (即对任意对象 a，都有 $a\bar{\in}A$ 的集合 A) 称为**空集** (empty set)，通常用记号 $\varnothing$ 表示之．关于集合 A, B，当属于 A 的元素全属于 B，而属于 B 的元素也全属于 A 时，则认为 $A=B$．当集合 A 的元素是 $a, b, c, \cdots$ 时，写做 $A=\{a, b, c, \cdots\}$，称集合 A 是由元素 $a, b, c, \cdots$ 组成的．由具有性质 $C(x)$ 的对象 x 组成的集合表示为 $\{x \mid C(x)\}$ 或 $\{x; C(x)\}$ 等．有的书籍也写做 $\underset{x}{E}[C(x)]$．例如 $\{a\}$ 是仅由一个元素 a 组成的集合，当 $a\neq b$ 时，$\{a, b\}$ 是由二元素 a, b 组成的集合．当集合 A 由有限个元素组成时，A 称为**有限集** (finite set)，当 A 包含无限个元素时，A 称为**无限集** (infiniteset)．

在集合 A, B 之间，当 A 的元素全属于 B 时，称 A 是 B 的**子集** (subset)，或 A 被 B 包含，或者说 B **包含** (contain) A．此时，记做 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．它的否定以 $A\not\subset B$ 或 $B\not\supset A$ 表示之．对于任意集合 A，恒有 $\varnothing\subset A$．若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$．若 $A\subset B$ 及 $B\subset A$，则 $A=B$．当 $A\subset B$ 而 $A\neq B$ 时，称 A 为 B 的**真子集** (proper subset)．写做 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$．有的书以 $\subseteqq$, $\supseteqq$ 代替 $\subset$, $\supset$，而以 $\subset$, $\supset$ 表示真子集．

【集合的运算】 对于集合 A, B，由属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为 A, B 的**并集**(英 union 法 réunion 德 Vereinigungsmenge) 或**和集** (sum)，以 $A\cup B$ 表示之．由既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A, B 的**交集**(英 intersection 德 Durchschnitt) 或**积集** (product)，以 $A\cap B$ 表示之．即 $x\in A\cup B$ 和 $x\in A$ 或 $x\in B$ 是等价的，而 $x\in A\cap B$ 和 $x\in A$ 且 $x\in B$ 是等价的．对于集合 A, B, C，$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$ (**交换律** (commutative law))，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (**结合律** (associative law))，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (**分配律** (distributive law))，$A\cup(A\cap B)=A$，$A\cap(A\cup B)=A$ (**吸收律** (absorption law)) 成立．当 $A\cap B=\varnothing$ 时，称 A, B 为**不相交的** (disjunct, disjoint)．这时，$C=A\cup B$ 称为子集 A, B 的**直和** (direc sum)，以 $C=A+B$ 表示之．对于任意集合 A, B，由属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合以 $A-B$ 表示之，称为 A 和 B 的**差集** (difference set)．特别是，当 $A\supset B$ 时，$A-B$ 称为 B 对于 A 的**补集** (complementary set, complement)．

在某些数学理论中，往往仅考虑某一确定集合 Ω 的元素和子集．这时，Ω 称为该理论的**通用集** (universal set)．在几何的表示中，Ω 称为**空间** (space) 或**抽象空间** (abstract space)，Ω 的元素称为**点** (point)，Ω 的子集称为**点集** (point set)．这时，对于 Ω 的子集 A，$\Omega-A$ 称为 A 的**补集**，以 A^c 表示之．对于 Ω 的子集 A, B，$A\supset B$ 和 $A^c\subset B^c$ 是等价的．$A\cup A^c=\Omega$，$A\cap A^c=\varnothing$，$A^{cc}=A$，以及 **de Morgan 法则**：$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$，$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ 成立．一般地，由集合 X 的子集全体组成的集合写做 $\mathfrak{P}(X)$，称为 X 的**幂集**(英 power set 法 ensemble des parties 德 potenzmenge)．以集合为元素的集合常称为**集族** (family of sets)．

以 (a, b) 表示对象 a, b 的**对** (pair)．即

$(a,b)=(c,d)$ 和 $a=c$ 及 $b=d$ 是等价的。把这样的对 (a,b) 称为**序对**（ordered pair），把集合 $\{a,b\}$ 称为**无序对**（unordered pair），以表示两者的区别。一般地，对于 n 个对象 $a,b,c,\cdots,d$，所谓 **n 组**（n-tuple）$(a,b,c,\cdots,d)$ 是指 $((\cdots((a,b),c),\cdots),d)$ 而言。即 $(a,b,c,\cdots,d)=(a',b',c',\cdots,d')$ 和 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$，$\cdots$，$d=d'$ 的同时成立是等价的。对于集合 A,B，由 $a\in A$，$b\in B$ 的对 (a,b) 的全体组成的集合以 $A\times B$ 表示之，称之为 A,B 的**直积集**（direct product set）。$A\times B=\varnothing$ 和 $A=\varnothing$ 或 $B=\varnothing$ 是等价的，$A\times B\subset C\times D$ 和 $A\subset C$ 且 $B\subset D$ 是等价的。又 $(A\times B)\cup(A'\times B)=(A\cup A')\times B$，$(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$。$A\times A$ 的子集 $\{(a,a)|a\in A\}$ 写做 Δ 或 Δ_A，称为**对角集**（diagonal）。一般地，$A\times B\times\cdots\times D=\{(a,b,\cdots,d)|a\in A,b\in B,\cdots,d\in D\}$ 称为集合 $A,B,\cdots,D$ 的**直积集**。

【映射】 在集合 A,B 之间，当给出使 A 的各元素对应 B 的某个元素的规则时，则称确定了由 A 到 B 的**映射**（英 mapping 法 application 德 Abbildung）。映射也称为函数†或者**变换**（transformation）。变换一词往往是就 $A=B$ 的情形而使用的。通常用 f,g,φ,ψ 等表示映射，由 A 到 B 的映射 f 写做 $f:A\to B$，或 $A\xrightarrow{f}B$ 等。当 f 将 A 的元素 a 对应于 B 的元素 b 时，写做 $b=f(a)$，b 称为在 f 之下 a 的**象**（image）。就映射（函数）$f:A\to B$ 而言，A 称为 f 的**定义域**（domain），$f(A)=\{f(a)|a\in A\}$ 称为 f 的**值域**（range）。所谓两个映射 f,g 相等（$f=g$），是指 f,g 的定义域 A 相等，且对于所有的 $a\in A$，$f(a)=g(a)$ 均成立。

设有映射（函数）$f:A\to B$，如果对于 $C\in\mathfrak{P}(A)$ 而定义 $f(C)=\{f(x)|x\in C\}$，则可诱导出 $f:\mathfrak{P}(A)\to\mathfrak{P}(B)$。这时，对于 $A_i\in\mathfrak{P}(A)$ $(i=1,2)$，有 $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$，$f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$。又对于 $D\in\mathfrak{P}(B)$，$f^{-1}(D)=\{x|x\in A,f(x)\in D\}$ 称为 D 的**原象或逆象**（英 inverse image 德 Urbild）。即它诱导出 $f^{-1}:\mathfrak{P}(B)\to\mathfrak{P}(A)$。此时，对于 $B_i\in\mathfrak{P}(B)$ $(i=1,2)$，$f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$，$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$，$f^{-1}(B-B_1)=A-f^{-1}(B_1)$ 成立。又，$A_1\subset f^{-1}\circ f(A_1)$，$f\circ f^{-1}(B_1)\subset B_1$。

对于映射（函数）f,g，如果 f 的定义域 A 被 g 的定义域 A' 所包含，且对于所有的 $a\in A$，$f(a)=g(a)$，则 g 称为 f 的（向 A' 的）**扩张**（extension），f 称为 g 的（向 A 的）**收缩**（contraction）或**限制**（restriction），或**部分映射**（partial mapping），写做 $f=g|A$。关于映射（函数）f，如果对属于定义域 A 的所有元素 a，均有 $f(a)=b_0$，b_0 是 B 的一个确定的元素，则 f 称为其值为 b_0 的**常值映射**（constant mapping）（**常值函数**（constant function））。又当映射（函数）f 的定义域 A 和值域 B 相等，而对所有的 $a\in A$，均有 $f(a)=a$ 时，f 称为**恒等映射**（identity mapping）（**恒等函数**（identity function）），常以 $f=1_A$ 表示之。对于映射（函数）$f:A\to B$ 和 $g:B\to C$，由 $h(a)=g(f(a))$ 所确定的映射（函数）$h:A\to C$ 称为 f 和 g 的**合成或复合**（composition），以 $h=g\circ f$ 表示之。h 称为 f 和 g 的**合成映射**（composed mapping）（**合成函数或复合函数**（composed function））。就映射 $f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to D$ 的合成而言，结合律 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ 成立。

关于映射 $f:A\to B$，当 $f(A)=B$ 时，f 称为由 A 到 B **上的映射**（onto-mapping）或**满射**（surjection）。关于映射 $f:A\to B$，当对于 A 的相异二元 a_1,a_2，均有 $f(a_1)\neq f(a_2)$ 时，即对于 f 的值域的元素 b，使 $f(a)=b$ 成立的 A 的元素 a 仅限于一个时，f 称为**一一映射**（one-to-one mapping）或**单射**（injection）。特别是，关于集合 A 的子集 B，对于 $b\in B$，由 $f(b)=b$ 所确定的单射 $B\to A$ 称为**标准单射**（canonical injection）或**包含映射**（inclusion mapping）。$f:A\to B$ 是满射的充分必要条件为：对于任意的 $g:B\to C$，$h:B\to C$ 而言，$g\circ f=h\circ f$ 成立仅

限于 $g=h$. 又, $f:A\to B$ 是单射的充分必要条件为: 对于任意的 $g:C\to A$, $h:C\to A$ 而言, $f\circ g=f\circ h$ 成立仅限于 $g=h$. 当 $f:A\to B$ 是满射且单射时, f 称为**双射** (bijection). 对于双射 $f:A\to B$. 使 $f(a)$ 对应于 a 的映射 $f^{-1}: B\to A$ 称为 f 的**逆映射** (inverse mapping) 或**反函数** (inverse function). 有 $f\circ f^{-1}=1_B$, $f^{-1}\circ f=1_A$.

关于映射(函数) $f:A\to B$, 当 $A=A_1\times A_2$ 时, 可把 $f(a)=b$ ($a=(a_1,a_2)$) 写做 $f(a_1,a_2)=b$. 又,关于 $A=A_1\times A_2$, $B=B_1\times B_2$, 由 $f_i:A_i\to B_i$ ($i=1,2$) 根据 $f(a_1,a_2)=(f_1(a_1),f_2(a_2))$ 而定义的映射以 $f=f_1\times f_2$ 表示之, 称为 f_1 与 f_2 的**直积映射** (direct product mapping).

关于映射 (函数) $f:A\to B$, $A\times B$ 的子集 $G=\{(a,f(a))|a\in A\}$ 称为 f 的**图象** (graph). 映射 f 的图象 G 的基本性质是: i) 对于 A 的各元素 a, 有 $A\times B$ 的元素 (a,b) 使 $(a,b)\in G$; ii) 若 $(a,b)\in G$ 且 $(a,b')\in G$, 则 $b=b'$. 反之,具有这两个性质的 $A\times B$ 的子集 G 确定映射 $f:A\to B$; $(a,b)\in G\Leftrightarrow b=f(a)$. 由此,关于映射的所有性质都可归结为关于直积集的性质.

对于集合 A, B, 由 A 到 B 的映射 (函数) f 的全体组成的集合以 B^A 表示之,称之为 A 上的 B 的**配置集** (德 Belegungsmenge). 当把映射 f 和它的图象 G_f 看做是同一时, 则 B^A 可看做是 $\mathfrak{P}(A\times B)$ 的子集. 特别是,当 $B_0=\{0,1\}$ 时, 对于 $X\in\mathfrak{P}(A)$, 由 $c_X(x)=1$ ($x\in X$), $c_X(x)=0$ ($x\notin X$) 所确定的函数 $c_X:A\to B_0$ 称为 X 的**定义函数** (defining function) 或 X 的**特征函数** (characteristic function). 如果使 $X\in\mathfrak{P}(A)$ 和 $c_X\in B_0^A$ 相对应,则 $\mathfrak{P}(A)$ 和 B_0^A 是一一对应的. 故 $\mathfrak{P}(A)$ 也用 2^A 来表示.

【集族】 当有从集合 Λ 到集合 A 的映射 $f:\Lambda\to A$ 时, f 称为以 Λ 为**指标集** (indexing set) 的 A 的元素的**族** (family). 这时,把 $\lambda\in\Lambda$ 的象 $f(\lambda)$ 表为 a_λ, 从而把 f 写做 $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 或 $\{a_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 或者简单地写做 $\{a_\lambda\}_\Lambda$, $\{a_\lambda\}$. 特别是, 一个集合 X 的幂集 $\mathfrak{P}(X)$ 的元素族, 即 X 的子集族,称为**以 Λ 为指标集的集族** (family of sets indexed by Λ) 或者简称为**集族** (而且如果取 $\mathfrak{P}(X)$ 的子集作为 Λ, 取恒等映射作为 f, 则这时的集族不外是已经叙述过的集族 $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{P}(X)$ 的子集)).

对于集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 至少属于一个 A_λ 的那些元素的全体便组成并集 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$, 而被所有 A_λ 都包含的那些元素的全体便组成交集 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$. 特别是, 如果对于 $\lambda\neq\mu$, 均有 $A_\lambda\cap A_\mu=\varnothing$, 则这个集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 便称为两两**不相交的**, 而 $A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 称为属于这个集族的集合的**直和** (direct sum), 以 $A=\sum_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 表示之. 又, $\{A_\lambda\}$ 称为 A 的**直和分解** (direct sum decomposition, partition). 各 A_λ 称为 A 的**直和因子** (direct summand). 一般地,有结合律:

$$\bigcup A_{\lambda\mu}=\bigcup_{\lambda}\Big(\bigcup_{\mu}A_{\lambda\mu}\Big),$$

$$\bigcap A_{\lambda\mu}=\bigcap_{\lambda}\Big(\bigcap_{\mu}A_{\lambda\mu}\Big)\ (\lambda\in\Lambda,\ \mu\in M_\lambda),$$

分配律:

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\cap\Big(\bigcup_{\mu\in M}B_\mu\Big)=\bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda\cap B_\mu),$$

$$\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\cup\Big(\bigcap_{\mu\in M}B_\mu\Big)=\bigcap_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda\cup B_\mu),$$

及 de Morgan 法则:

$$\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c,\ \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

对于集族 $\mathfrak{A}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 当 $A\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 时, $\mathfrak{A}$ 称为 A 的**覆盖** (英 covering 德 Überdeckung), 亦称 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ **覆盖** (cover) A.

对于映射 $f:X\to Y$, 有

$$f\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda),$$

$$f\Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\Big)\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f(A_\lambda),$$

对于 $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}(B_\lambda\subset Y)$, 有

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}' f^{-1}(B_\lambda).$$

【集族的直和集与直积集】 设 $\mathfrak{A}=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ ($A_\lambda\in\mathfrak{P}(X)$) 为以 Λ 为指标集的集族，且当 $\lambda\neq\lambda'$ 时有 $A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\varnothing$. 今有集合 S 与单射 $i_\lambda: A_\lambda\to S$ 的族，当 $\{i_\lambda(A_\lambda)\}$ 是 S 的直和分解时，组 (S, i_λ) 称为集族 $\mathfrak{A}$ 的**直和集**(direct sum set)，写做 $S=\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 或 $\sum_\lambda A_\lambda$, $\sum A_\lambda$, A_λ 称为 S 的**直和因子**(direct summand)，i_λ 称为**标准单射** (canonical injection).

对于集合 X 的子集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $f\in X^\Lambda$, 由对各 $\lambda\in\Lambda$ 均使 $f(\lambda)\in A_\lambda$ 的 f 的全体所组成的集合 P, 称为集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的**直积集** (direct product set), 写做 $P=\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 或 $\prod_\lambda A_\lambda$, $\prod A_\lambda$, A_λ 称为 P 的**直积因子** (direct product factor). P 的元素 f 表示为 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 或 $(\cdots, x_\lambda, \cdots)$ (其中 $x_\lambda=f(\lambda)$), x_λ 称为它的 **λ 分量** (component) 或 **λ 坐标** (coordinate). 对于 $x=\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\in P$, 可把对应于 x_λ 的映射写做 $\mathrm{pr}_\lambda: P\to A_\lambda$, 称为 P 在 λ 分量上的**射影** (projection). 当 $\Lambda=\{1, 2\}$ 时，有 $P=A_1\times A_2$.

【**集合论**】 把集合作为数学的对象开始于 G. Cantor†. Cantor 给集合下的定义(1895)是："所谓集合是把我们的直观或思维中确定的、相互间有明确区别的那些对象（它们叫做集合的元素）作为一个整体而考虑的结果". 他立足于这个观点，引入了集合的基数†及序数†的概念，建立了所谓**集合论** (set theory)，证明了超越数集的基数比代数数集的基数大，不同维数的 Euclid 空间作为点集，都具有相同的基数，等等，连续统假设†等则尚未解决. 他也猜想到良序定理†，它是由 E. Zermelo 证明的 (1904). Zermelo 在证明它时，开始提出了所谓选择公理†，并实质上使用了这一公理.

然而，从 Cantor 的朴素集合的定义出发，显然会产生逻辑上的悖论†. 但集合概念在数学的各个部门中已成为最重要的基础，因而引起了深刻的反响. 这就是所谓数学基础†这一学科产生的起因. 其结果，为了避开悖论建立了所谓公理集合论†. Cantor 所建立的基数和序数的理论以及作为数学各部门的基础的集代数，在其中重建起来了. 这个理论被认为不致再含悖论.

【类】 在朴素意义下的集合是指满足某一条件 $C(x)$ 的 x 的全体 $\{x\mid C(x)\}$. 于是对于任意条件 $C(x)$, 集合 $\{x\mid C(x)\}$ 都是存在的，这便是朴素集合论中唯一的一个生成原理，称为**概括公理**(英 axiom of comprehension 德 Komprehensionsaxiom). 然而，如果认为"任意集合"的概念是明确定义的，则这个原理含有矛盾. 例如集合 $\{x\mid x\notin x\}$ 导致 Russell 悖论(→悖论). 为此，对于这个公理必须给予限制. 对于概括公理给予限制的最简单方法是采用 Zermelo 的**分离公理**(英 axiom of subsets 德 Aussonderungsaxiom): 对于任意条件 $C(x)$ 和任意集合 M, 集合 $\{x\mid C(x), x\in M\}$ 都是存在的. 然而，仅有这个分离公理，只能做出预先承认的集合的子集，因此引进其他的集合生成原理是必要的. 通常允许下列的运算: 给出两个元素 a, b (a 和 b 也可以是集合) 后可作出集合 $\{a, b\}$ (**配对公理** (axiom of pairing))，给出集合 A 后可作出其幂集 2^A (**幂集公理** (axiom of power-set))，给出集族后可作出其并集 (**并集公理** (axiom of sum-set))，以及承认一个集合的单值映射的象的全体为集合(**替换公理** (axiom of substitution)) 等. 此外，在通常的数学中，当然预先承认"自然数全体"、"实数全体"等都是集合. 另外，在纯粹的集合论中，承认无限集存在的**无穷公理** (axiom of infinity) 也是必要的.

导致 Russell 悖论的集合 $\{x\mid x\notin x\}$, 如只把它考虑为"事物的汇集"，本身并不含有矛盾，而把这样的汇集看做由 x 代表的集合的一员，才发生了悖论. 于是，在朴素意义下的集合(广义的集合) 的全体中，确定一个部分领域 V, 属于 V 的集合命名为'狭义的集合'. 其中 V 对于上述的几个集合论的运算是封闭的. 如果只把"狭义的集合"称为集合，则集合论便可从悖

论中解放出来．当把狭义的集合简称为集合时，广义的集合称为**类**（class）．当 x 为表示(狭义的)集合的变数时，$\{x|x\notin x\}$是非集合的类．这样的非集合的类称为**真类**（proper class）．集合的全体 V 以及序数的全体等都是真类．

关于类，若无限制地使用概括公理，当然会发生矛盾．但可以认为集合论的其它运算对于类也适用．

开始时，将公理集合论†形式化时用到类的概念，在那里它仅指集合全体的类 V 的某种子集(在朴素意义下的)，而在现在，它也可以在较之更广泛的意义下来使用．

在本辞典中，当说到所谓"集合"时，往往是就广义的集合叙述的．以集合为基础而定义的诸概念大部分可原封不动地适用于"类"．

【参】［1］N. Bourbaki, Théorie des ensembles, ch. 2, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1938, 第二版, 1960 (英译本: Theory of sets, Addison-Wesley, 1968); ［2］中山正, 集合・位相・代数系, 至文堂, 1949; ［3］赤摂也, 集合論入門, 培風館, 1957; ［4］弥永昌吉-小平邦彦, 現代数学概説I, 岩波, 1961; ［5］P. R. Halmos, Naive set theory, van Nostrand, 1960; ［6］J. L. Kelley, General topology, Appendix, van Nostrand, 1955; ［7］A. Fraenkel, Abstract set theory, North-Holland, 1953; ［8］A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, Springer, 第三版, 1928; ［9］F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Veit & Comp., Leipzig, 1914; [10] F. Hausdorff, Mengenlehre, Teubner, 1927 (中译本: F. 豪斯道夫, 集论, 科学出版社, 1960); [11] G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1932; [12] E. Zermelo, Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Ann., **59** (1904), 511—516; [13] A. Schoenflies, Entwicklung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen, Teubner, 1913.

关系［英 relation　法 relation　德 Beziehung, Relation　俄 отношение　日 関係］变数 x, y 分别以集合 X 及 Y 为变域，在含有变数 x, y 的命题 $R(x, y)$ 中，当对 x, y 分别以 X 及 Y 的元素代入而能断定其真或伪时，$R(x,y)$称为**关系**或二元关系（→符号逻辑［命题逻辑和谓词逻辑］)．例如，"$x\leqslant y$"，"$x-y$ 是偶数"，"x 是 y 的约数"($X=Y=$ 整数集)，"点 x 在直线 y 上"，"直线 x 和直线 y 正交"．通常把 $R(x, y)$ 写为 xRy，例如写为 $x\leqslant y$, $x\equiv y$, $x|y$, $x\in y$, $x\perp y$ 等．

对于关系 R，由 $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$ 定义的关系 R^{-1} 称为 R 的**逆关系**（inverse relation）．此时，R^{-1} 的逆关系是 R．例如 $x\leqslant y$ 和 $y\geqslant x$，$x\in y$ 和 $y\ni x$，"x 是 y 的约数"和"y 是 x 的倍数"等等都是互为逆关系的．关系 R 是**自反的**（reflexive）指 xRx 成立．R 是**对称的**（symmetric）指 xRy 和 yRx 等价，即 R 和 R^{-1} 是相同的．R 是**可迁的**（transitive）指如果 xRy 且 yRz，则 xRz 成立．另外，R 是**反对称的**(antisymmetric)，系指如果 xRy 且 yRx，则 $x=y$ 成立而言．自反的、对称的且可迁的关系称为等价关系(→等价关系)．自反的且可迁的关系称为拟序†关系，自反的、可迁的且反对称的关系称为序关系†(→序)．

对于以集合 X 和集合 Y 为变域的关系 xRy，由直积集 $X\times Y$ 中满足关系 xRy 的元素 (x, y) 的全体组成的集合 $G=\{(x, y)|xRy\}$ 称为关系 R 的**图象**（graph）．反之，对于 $X\times Y$ 的任意子集 G，以 G 为图象的关系 R 可由 $xRy\Leftrightarrow(x, y)\in G$ 唯一确定．

【对应】对于直积集 $X\times Y$ 的子集 G，$\Gamma=(G, X, Y)$称为由 X 到 Y 的**对应**(correspondence)．X 称为对应 Γ 的**始集**（initial set），Y 称为 Γ 的**终集**（final set）．以 X, Y 为变域的关系 R，可根据它的图象 G 而确定一个对应 $\Gamma=(G, X, Y)$，反之，由对应 Γ 亦可确定关系 R．对于射影 pr_X: $X\times Y\to X$ 及 pr_Y: $X\times Y\to Y$，$A=\mathrm{pr}_X G$, $B=\mathrm{pr}_Y G$ 分别称为对应 Γ 的**定义域**（domain）及**值域**（range）．对于 $x\in X$ 而言，集合 $\{y\in Y|(x, y)\in G\}$ 写做 $G(x)$ 或 $\Gamma(x)$，我们说 x 根据 Γ 而**对应**（correspond）于 $G(x)$ 的元素 y．

对于 $X\times Y$ 的子集 G，由 $(x, y)\in G \Leftrightarrow (y, x)\in G^{-1}$ 可确定 $Y\times X$ 的一个子集 G^{-1}．对应 (G^{-1}, Y, X) 写做 Γ^{-1}，称为 Γ 的**逆对应**（inverse correspondence)．设关系 R 的图象为 G，由 G 所确定的对应为 $\Gamma=(G, X, Y)$，则 R 的逆关系 R^{-1} 的图象是 G^{-1}，而 $\Gamma^{-1}=(G^{-1}, Y, X)$．在 Γ 和 Γ^{-1} 之间，其始集和终集，定义域和值域是彼此交换的．显然 $(\Gamma^{-1})^{-1}=\Gamma$．

对于对应 $\Gamma_1=(G_1, X, Y)$ 和 $\Gamma_2=(G_2, Y, Z)$，由"$(x, z)\in G \Leftrightarrow$ 有某个 $y\in Y$，使

$(x, y) \in G_1$ 且 $(y, z) \in G_2$" 而确定 $X \times Z$ 的子集 G. 这时，对应 $\Gamma = (G, X, Z)$ 写做 $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$，称为 Γ_1 和 Γ_2 的**合成** (composition). **结合律** (associative law)：$(\Gamma_3 \circ \Gamma_2) \circ \Gamma_1 = \Gamma_3 \circ (\Gamma_2 \circ \Gamma_1)$ 以及法则 $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)^{-1} = \Gamma_1^{-1} \circ \Gamma_2^{-1}$ 成立.

关于由 X 到 Y 的对应 Γ，当对于属于 Γ 的定义域 A 的各 x 恒有唯一的 $y(\in Y)$ 与其对应时，即若 $x \in A$，则有 $\Gamma(x) = \{y\}$ 时，Γ 称为**单值对应** (univalent correspondence). 当 Γ 和 Γ^{-1} 都是单值对应时，Γ 称为**一一对应** (one-to-one correspondence). 分别以 A, B 为定义域和值域的单值对应和分别以 A, B 为定义域和值域的映射† (函数†) 这两者是完全等价的概念 (→集合[映射]).

一般地，也有将 n 元关系† ($n = 1, 2, 3, \cdots$) 称为关系的.

【参】 →集合的[参].

等价关系 [英 equivalence relation 法 relation d'équivalence 德 Äquivalenzrelation 俄 отношение эквивалентности 日 同値関係] 设在某集合 X 的任意二元 x, y 之间，关系 xRy 成立与否是确定的，如果关系 R 满足下列三个条件，则 R 称为**等价关系**. 1) xRx; 2) 若 xRy, 则 yRx; 3) 若 xRy 且 yRz, 则 xRz. 1) 称为**自反律** (reflexive law), 2) 称为**对称律** (symmetric law), 3) 称为**可迁律** (transitive law), 这三者合称**等价定律** (equivalence law). 1) 也可以换为下列的 1'). 1') 对任何 x, 使 xRx' 成立的 x' 存在. 所谓 x, y 是"同一事物"的关系显然是一个等价关系. 在 X 的任意二元 x, y 之间恒有 xRy 成立的关系 R 也是一个等价关系. 等价关系 R 通常用记号 $\sim$ 表示之. 图形的**叠合**、相似等关系也是等价关系. 设 X 为整数集，如果当 $x - y$ 是偶数时写做 $x \equiv y$, 那末这也是一个等价关系.

【等价类和商集】 当着眼于一个等价关系 R 时，可把"xRy"称为"x 和 y (或 x 对于 y) 是**等价的** (equivalent)". 此时，和某个确定的 a 等价的全体事物的集合称为 a 的**等价类** (equivalence class). 根据 1), 2), 3), 各等价类是非空的，a 属于 a 的等价类，相异的等价类无共同元素. 即 X 可分解为等价类的直和. 这个直和分解称为 X 关于 R 的**分类** (英 classification 德 Klasseneinteilung). 例如，若将整数集 X 关于上述的 $\equiv$ 关系分类，则可分为奇数的等价类和偶数的等价类. 反之，X 的任意直和分解都可看做是关于一个等价关系的分类. 只须把属于同一直和因子†的事物作为"等价的"即可. 在关于 X 的分类中，由各等价类中各取出一个 X 的元素，称之为该等价类的**代表** (representative). 譬如在上例中，0, 1 可分别作为偶数的和奇数的等价类的代表.

由 X 的关于等价关系 R 的等价类全体所组成的集合以 X/R 表示之，称为 X 关于 R 的**商集** (quotient set). 使 X 的元素 x 对应于 x 的等价类的映射 p: $X \to X/R$ 称为**标准满射** (canonical surjection). 以上的理论在 X 不是集合而是类†的情形也适用.

【等价关系的强弱】 关于一个集合的两个等价关系 R, S, 当若 xRy 则必有 xSy 时，称 R 比 S **强** (strong), S 比 R **弱** (weak), 或由 R 确定的分类比由 S 确定的分类**细** (fine), 由 S 确定的分类比由 R 确定的分类**粗** (rough). 所谓"同一事物"的等价关系是最强的等价关系，而"X 的任意二元都是等价的"等价关系是最弱的等价关系. 这种强弱关系在 X 的等价关系之间确定了序关系，就这个序关系而言，X 的等价关系全体的集合组成完全†格.

【参】 →集合的[参].

函数 [英 function 法 fonction 德 Funktion 俄 Функция 日 関数] 【概念的历史】 使用函数 (拉 functio) 一词开始于 G. W. Leibniz†. 他虽然没有给予这个术语以明确的定义，但和 0, 1 等常数相反，他考虑变动的量(变量或变数) x, 而与变数 x 同时变动的变数 (例如 x^2, $\log x$, $\sin x$ 等)便称为 x 的函数. x 的函数一般用记号 $f(x)$, $\varphi(x)$ 等表示之. L. Euler† 把函数定义为"由变数和常数组成的解析式"

(1748). A. L.Cauchy† 虽有"多个变数之间有某个关系，和其中一个变数取值的同时其它变数的值也确定了，通常用那一个变数将其它变数表示出来. 这个变数称为自变数，其它变数称为它的函数"的叙述(1823)，但 Cauchy 本人却在很多情形下和 Euler 站在同一立场上来处理函数. P. G. L. Dirichlet† 在关于把"完全任意的函数"用 Fourier 级数†表示的论文中(1837)，考虑了 $x \in [a, b]$ 的函数 y，他说"y 与 x 的关系不仅不必要按着同一法则在全区间给出，而且也不必要将其关系用数学式子表示出来". 结果，函数不外是对应而已.

【函数】 目前在数学中，函数一词一般是在和映射完全相同的意义下使用的(→集合[映射]). 这时，它和单值对应†是相同的(→关系[对应]). 但亦可在更广泛的意义下使用，将单值对应称为**单值函数** (one-valued function)，而将(非单值的)一般的对应称为**多值函数**(many-valued function).

在数学的各专门分支里，根据它的历史，往往是各在其狭隘的意义下使用函数一词. 在解析学里，其值往往是实数或复数，分别称为**实值函数** (real-valued function) 或**复值函数** (complex-valued function). 特别是，其定义域也是实数集或复数集时，分别称为**实函数** (real function) 或**复函数** (complex function) (→初等函数，连续函数，正则函数，解析函数). 以函数空间†为定义域的实(或复)值函数，常常称为**泛函** (functional)，广义函数†便是一例. 在代数的分支中，一般都确定一个域†或环†等，所谓函数便以它为定义域并在其中取值. 有时，可根据定义域和值域的结构赋予适当的条件，根据条件给以特别的名称. 譬如，定义域、值域都是实数集时，满足 $f(t) = f(-t)$ 的函数 f 称为**偶函数** (even function)，满足 $f(t) = -f(-t)$ 的函数 f 称为**奇函数**(odd function). 又如保持实数的序关系的函数，即若 $t_1 < t_2$，则 $f(t_1) \leqslant f(t_2)$，称为单调递增函数†.

函数的集合称为**函数族** (family of functions). 一般地，从集合 I 到函数集合 F 的映射 $\varphi: I \to F$ 称为**以 I 为指标集的函数族** (family of functions indexed by I) 或简称为**函数族**，如将 $\varphi(\lambda)$ 表示为 f_λ 的形式，则该函数族可写做 $\{f_\lambda\}$ $\lambda \in I$, $\{f_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 等. 特别是，当 I 为自然数集时，称为**函数序列** (sequence of functions).

【变量】 一般地，容许用某集合 X 的元素代入的那个字母 x 称为**变元**或**变量** (variable)，X 称为它的**定义域**(domain). 变量 x 的定义域的元素称为 x 的一个值，x 本身往往被看做表示任意值. 特别是，当定义域为实数集或复数集时，变量分别称为**实变量** (real variable) 或**复变量** (complex variable). 与此相反，表示特定的一个元素的字母称为**常量** (constant).

当函数 f 的定义域和值域†分别为 X, Y 时，以 X 为定义域的变量 x 称为 f 的**自变量**或**独立变量** (independent variable)，以 Y 为变域的变量 y 称为 f 的**应变量** (dependent variable). 此时称为"y 是 x 的函数"，也写做 $y = f(x)$. 使 x 的值对应于 y 的值，当用具体的形式表示时，便称为"y 是 x 的**显函数**(explicit function)"；如果函数 $y = f(x)$ 仅由 $R(x, y) = 0$ 这样的二元关系†确定，则称为"y 是 x 的**隐函数** (implicit function)"(→隐函数).

当给出以 t 为自变量的函数 f, g 时，由于 $x = f(t)$，$y = g(t)$ 的关系，可以将 y 看做是 x 的函数. 这时称为"以变元 t 为**参数**(parameter)时，y 是 x 的函数". 对于给定的集合 C，若做出一个以 C 为值域、变元 t 为自变量的函数，则这个函数称为 C 由 t 的**参数表示** (parameter representation).

当函数 f 的定义域包含在直积集 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 中时，f 的自变量以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示之，f 称为 **n 变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数** (function of n-variables) 或简称为**多变量函数** (function of many variables).

【族，序列】 以集合 I 为定义域的函数 $\varphi: I \to X$ 称为**以 I 为指标集的族** (family indexed by I) 或简称为**族** (family)，I 的元素叫做**指标** (index). 设 $\varphi(\lambda) = x_\lambda(\lambda \in I)$，则这个族可表示为 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in I}$ 或 $\{x_\lambda\}(\lambda \in I)$ 等. 当函数

φ 的值域 X 是点集、函数集、映射集、集合集等时，族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 分别称为**点族** (family of points)、**函数族** (family of functions)、**映射族** (family of mappings)、**集族** (family of sets) 等. 当集合 I 是有向集时，这个族称为**有向族** (directed family). 一般地，当 J 为 I 的子集时，族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in J}$ 称为族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in I}$ 的**子族** (subfamily). 特别是，当 I 为自然数的有限集或无限集时，以 I 为指标集的族分别称为**有限序列** (finite sequence) 或**无限序列** (infinite sequence). 简单地提到**序列** (sequence)，则是它们的通称，但多数是指无限序列，特别是指 I 为自然数全体的情形. 这时对应于 n 的值称为**第 n 项** (n-th term)，一般则称为**项** (term). 为了方便，有时也考虑第 0 项. 当各项为数、点、函数、集合等时，分别称为**数列** (sequence of numbers)、**点列** (sequence of points)、**函数序列** (sequence of functions)、**集序列** (sequence of sets) 等. 对于序列往往是把自变量当做下标而表示为 $\{a_n\}$. 当想要明确指出 n 的定义域 I 时，写做 $\{a_n\}_{n\in I}$. 当 J 为 I 的子集时，序列 $\{a_n\}_{n\in J}$ 称为序列 $\{a_n\}_{n\in I}$ 的**子序列** (subsequence). 当定义域 I 是自然数全体时，$k_1<k_2<k_3<\cdots$ 的自然数的序列 $\{k_n\}$ 和 $\{a_n\}$ 的合成 $\{a_{k_n}\}$ 称为 $\{a_n\}$ 的子序列.

【参】 →集合的 [参]. 关于 "functio" 一词的来源: [1] 中村幸四郎，函数概念についての史的注意，基礎科学，**30**(1953); [2] 中村幸四郎，函数，現代自然科学講座 2，弘文堂，1951，p. 153—159; [3] L. Euler, Opera omnia ser I: Opera mathematica VIII: Introductio in analysin infinitorum I, Teubner, 1922; [4] A. L. Cauchy, Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique pt. 1. 1821 (Oeuvres ser, 2, III, Gauthier-Villars, 1897); [5] G. P. L. Dirichlet, Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktion durch Sinus-und Cosinusreihen, Repertorium der Physik, Bd. **1** (1837), 152—174 (Werke, Bd. 1, G. Reimer, 1889, I, p. 133—160).

选择公理 [英 axiom of choice 法 axiome du choix 德 Auswahlaxiom 俄 аксиома выбора 日 選択公理] 【选择公理】 在集合论中，下述命题称为**选择公理**. 关于集合 X 的子集族† $\mathfrak{A}$，对于属于 $\mathfrak{A}$ 的各子集 A，使之单值对应于属于 A 的元素 $f(A)$ 的函数 $f: \mathfrak{A}\to X$，称为 $\mathfrak{A}$ 的**选择函数** (choice function). 这时，"对于不以空集为元素的集族 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}$ 的选择函数是存在的"之命题称为选择公理. 这个公理和下述 1), 2), 3) 中的任一个都是等价的. 1) 关于以 Λ 为指标集的集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，若对于所有的 $\lambda\in\Lambda$，$A_\lambda\neq\varnothing$，则直积集† $\prod_\lambda A_\lambda\neq\varnothing$. 2) 当集合 A 为子集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的直和† $A=\sum_\lambda A_\lambda$ 时，与各 A_λ 恰好共有一个元素的 A 的子集(称为**选择集** (choice set)) 存在. 3) 对于从集合 A 到集合 B 的满射 $f:A\to B$，有映射 $g:B\to A$ 存在，使 $f\circ g=1_B$ (恒等映射).

【良序定理】 选择公理是 E. Zermelo (1904) 首先提出的，用它证明了**良序定理** (英 well-ordering theorem 德 Wohlordnungssatz): "任意集合，若在其元素间适当规定序†，则可成为良序集†". 反之，假定良序定理成立也能证明选择公理.

应用这个公理，可以得到集合论中许多重要结果. 例如，任意两个基数是能够比较的，关于集合的有限性、无限性的各种定义是等价的. 在集合论以外，如 "线性空间中基是存在的"，"紧拓扑空间的直积拓扑空间是紧的 (Тихонов 定理†)"，"Euclid 空间中非 Lebesgue 可测的子集是存在的" 等重要定理用选择公理都可以证明. 但是在这些证明中，与其直接应用选择公理通常更多地应用和它等价的上述良序定理或下述的 Zorn 引理.

用良序定理可证明任意域 k 上的线性空间 X 具有基. 为此定义从 X 到 $B=\{0,1\}$ 的映射 f，在 X 中确定一个良序，i) 对 X 的最小元 x_0，当 $x_0\neq 0$ 时，令 $f(x_0)=1$，当 $x_0=0$ 时，令 $f(x_0)=0$; ii) 对于 X 的任意元素 x，设 f 在由 x 确定的截段† $S(x)$ 上已被定义，令

$$U_x=\{y\in S(x)\mid f(y)=1\},$$

当 x 不能表示为属于 U_x 的元素的线性组合时，令 $f(x)=1$，能表示时，令 $f(x)=0$. 这时，由关于良序集的超限归纳法† 的定义，$f:X\to B$ 是唯一确定的. 令 $U=\{x\in X\mid f(x)=1\}$，则 U 是 X 的一个基.

【Zorn 引理】 序集 X 是**归纳序集** (induc-

tively ordered set)，系指X的任意全序†子集都是上方有界的. 关于集合的**有限特征条件**(condition of finite character)，系指X满足该条件和X的任意有限子集满足该条件二者是等价的. 关于函数的**有限特征条件**，系指把函数和它的图象看成同一时，图象满足关于集合的有限特征条件.

Zorn 引理 (Zorn's Lemma) 系指下述的分别与选择公理等价的五个命题及它们的几种变形而言. 这是由 M. Zorn 提出的，应用上比较便利，比选择公理或良序定理更多地被用到.

1) 归纳序集最少有一个极大元. 2) 序集M的任意良序子集若恒上方有界，则M最少有一个极大元. 3) 任意序集M必含有一个良序子集W，它没有不属于W的上界. 4) 就关于集合的有限特征条件C而言，任意集合X都包含满足C的极大(就包含关系而言)子集. 5) 就关于函数的有限特征条件C而言，在满足C的函数中，有一个函数其定义域是极大的(就包含关系而言).

用 Zorn 引理也可以证明域k上的线性空间X具有基. 令A为X的非空子集，而属于A的任意有限集在k上都是线性无关的，设$\mathfrak{A}$为这种集合的全体. $\mathfrak{A}$是非空的. 在$\mathfrak{A}$上用包含关系来排序 ($A \leqslant B \Leftrightarrow A \subset B$)，则显然$\mathfrak{A}$是归纳序集. 根据 Zorn 引理 1)，$\mathfrak{A}$最少有一个极大元$U$. 因$U$是极大的，显然$U$是$X$的基. 另外如用 Zorn 引理 4)，则就$X$的子集$A$而言，属于$A$的任意有限个元素在$k$上线性无关的性质$C$是有限特征条件，故具有性质$C$的极大子集$U$是存在的. 而这个$U$便是$X$的基.

有关选择公理的公理性考虑的最新进展，→公理集合论.

【参】 [1] 弥永昌吉-小平邦彦，現代数学概説 I，岩波，1961；[2] 中山正，集合・位相・代数系，至文堂，1949；[3] 赤摂也，超限論法について，数学，7(1955)，31；[4] N. Bourbaki, Théorie des ensembles, ch. 3, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1954—57；[5] E. Zermelo, Beweis dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, Math. Ann., **59**(1904), 514—516；[6] G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Math. Ann., **21**. (1883) 545—591 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1932)；[7] E. Zermelo, Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, Math. Ann., **65**(1908), 107—128；[8] M. Zorn, A remark on method in transfinite algebra, Bull. Amer. Math. Soc., **41**(1935), 667—670；[9] J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1940.

基数 [英 potency, power 法 puissance 德 Mächtigkeit 俄 мощность 日 濃度] 【定义】 基数是集合论的基本概念之一，是作为个数的自然数概念的扩张. 如果存在以集合A为定义域、以集合B为值域的一一对应†，则称B**对等**(equipotent) 于A，用$A \sim B$表示之. 这个对等关系是一个等价关系†. 用它进行分类，各类称为**势**或**基数**(cardinal number, potency, power). 对等于集合A的集合类用$\bar{\bar{A}}$(或$|A|$)表示，$\bar{\bar{A}}$称为**集合 A 的基数**，或A的元素的(广义的)**个数**(德 Anzahl). 当A为有限集时，$\bar{\bar{A}}$称为**有限的**(finite)，当A为无限集时，$\bar{\bar{A}}$称为**无限的**(infinite) 或**超限的** (transfinite). 关于这些在后面还要说明. 如果以$\mathfrak{m}$表示集合A的基数，那么A也称为由“$\mathfrak{m}$个”元素组成. 在这个意义下，可以认为 0 及自然数表示有限基数. 例：$0=\bar{\bar{\varnothing}}$，$1=\overline{\overline{\{0\}}}$，$2=\overline{\overline{\{0,1\}}}$等等. 无限基数的例子：自然数全体的基数以$\mathfrak{a}$表示之，称为**可列的**或**可数的**(英 enumerable, countable 法 dénombrable 德 abzählbar) 基数. $\mathfrak{a}$个也可称为可数个，可数个元素组成的集合称为**可数集**(enumerable set). 实数全体的基数以$\mathfrak{c}$表示之，称为**连续统**(continuum) 基数. 以区间$[0,1]$为定义域的实值函数全体的基数以$\mathfrak{f}$表示之. 这些是彼此不同的. 本条中用德文小写字母表示基数. 此外关于用序数定义基数的方法→序数.

【基数的大小】 当$\mathfrak{m}=\bar{\bar{A}}$，$\mathfrak{n}=\bar{\bar{B}}$，$A \supset B$的集合$A$，$B$存在时，以$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$或$\mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}$表示之. 此时即或$A \neq B$，也未必有$\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$. 例如正偶数全体的基数也是可数的. 若$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$且$\mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$，则$\mathfrak{m}=\mathfrak{n}$(**Bernštein 定理**). 因自反律，可迁律显然成立，故此关系$\geqslant$是序关系†. 应用良序定理†，可以证明这个$\geqslant$是全序†(**基数的比较定理** (comparability theorem for potencies)). 当$\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$且$\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$时，以$\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$表示之. $\bar{\bar{B}} \leqslant \mathfrak{m}$称为$\bar{\bar{B}}$**至多**(at most) 是$\mathfrak{m}$，或$B$

的元素至多有 m 个.

【基数的和，积，幂】 对于基数 m, n, 如取集合 A, B 使 $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{m}$, $\bar{\bar{B}} = \mathfrak{n}$, $A \cap B = \varnothing$, 令 $\mathfrak{s} = \overline{\overline{A \cup B}}$, 则 $\mathfrak{s}$ 由 m, n 唯一确定. $\mathfrak{s}$ 称为 m 与 n 的**和** (sum), 记为 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$. 当取 $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{m}$, $\bar{\bar{B}} = \mathfrak{n}$ 的 A, B 时, 直积集† $A \times B$ 与配置集† A^B 的基数分别称为 m 与 n 的**积** (product), **幂** (power), 分别以 $\mathfrak{mn}$, $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}$ 表示之(这些也由 m, n 确定). 就加法 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$, 乘法 $\mathfrak{mn}$ 而言, **交换律** $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+\mathfrak{m}$, $\mathfrak{mn}=\mathfrak{nm}$, **结合律** $(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})+\mathfrak{p}=\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})$, $(\mathfrak{mn})\mathfrak{p}=\mathfrak{m}(\mathfrak{np})$, **分配律** $\mathfrak{p}(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})=\mathfrak{pm}+\mathfrak{pn}$ 成立, **指数律** $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}}\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{m}^{\mathfrak{np}}=(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}}$, $(\mathfrak{mn})^{\mathfrak{p}}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}\mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$ 也成立. 特别是, 当 $\bar{\bar{A}} = \mathfrak{m}$ 时 $2^{\mathfrak{m}}$ 是 A 的幂集† 2^A 的基数.

两个基数的加法、乘法可以推广为多个基数的加法、乘法. 当某个集合 Λ 的所有元素 λ, 各唯一对应于基数 $\mathfrak{m}_\lambda$ 时, 取集合 M_λ 使 $\bar{\bar{M}}_\lambda=\mathfrak{m}_\lambda$, 作直积集 $P=\prod_\lambda M_\lambda$, 基数 $\bar{\bar{P}}$ 定义为各个基数 $\mathfrak{m}_\lambda$ 的**积** $\prod_\lambda \mathfrak{m}_\lambda$. 选择公理†是: 若 $\mathfrak{m}_\lambda \neq 0$, 则 $\prod_\lambda \mathfrak{m}_\lambda \neq 0$. 当各 M_λ 两两无公共元时作 $\{M_\lambda\}$ 的直和集† $S=\sum_\lambda M_\lambda$, 它的基数 $\bar{\bar{S}}$ 定义为各个基数 $\mathfrak{m}_\lambda$ 的**和** $\sum_\lambda \mathfrak{m}_\lambda$.

【连续统假设】 关于上述的基数 $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}$, 有 $\mathfrak{f}=2^{\mathfrak{c}}>\mathfrak{c}=2^{\mathfrak{a}}>\mathfrak{a}$ 成立. 一般有 $2^{\mathfrak{m}}>\mathfrak{m}$ (G. Cantor). 与此有关的"对于任意的基数 m, 使 $2^{\mathfrak{m}}>\mathfrak{n}>\mathfrak{m}$ 成立的基数 n 不存在"的假设称为**广义连续统假设** (generalized continuum hypothesis), 特别是, 当 $\mathfrak{m}=\mathfrak{a}$ 时, 该假设称为**连续统假设** (continuum hypothesis). Cantor 提出连续统假设 (J. Reine Angew. Math., **84** (1878)) 以来, 其真伪长期成为悬案, 特别是, W. Sierpiński 探讨了与此深刻有关的诸假设, Cantor 本人晚年也曾努力谋求解决. 其后由 K. Gödel (1940) 及 P. J. Cohen (1963) 证明了连续统假设、广义连续统假设是与其它集合论公理彼此独立的(→公理集合论).

【序数的基数】 用希腊小写字母表示序数†, 集合 $\{\xi|\xi<\alpha\}$ 的基数以 $\bar{\alpha}$ 表示. $\bar{\alpha}$ 称为**序数 α 的基数** (potency of an ordinal number α) 或称为**对应于 α 的基数**. 当基数 m 对应于某个序数时, 满足 $\bar{\alpha}=\mathfrak{m}$ 的序数 α 中的最小者称为对应于 m 的**始数**(德 Anfangszahl). 对应于无限基数的始数称为**超限始数** (德 transfinite Anfangszahl). 序数全体到超限始数全体上的单值对应 $\beta\to\omega_\beta$ 中, 只有一个对应可使当 $\beta>\gamma$ 时有 $\omega_\beta>\omega_\gamma$. 特别是, $\omega_0=\omega$, 满足 $\xi<\omega_1$ 的 ξ 是**可数序数** (countable ordinal number). ω_β 称为第 β 个超限始数, ω_β 的基数以 $\aleph_\beta$ 表示之 (ℵ 是希伯来字母, 读为**阿列夫** (aleph)). $\beta\geq\gamma$ 和 $\aleph_\beta\geq\aleph_\gamma$ 是等价的, 此时有 $\aleph_\beta+\aleph_\gamma=\aleph_\beta$, $\aleph_\beta\aleph_\gamma=\aleph_\beta$. 根据选择公理, 所有的无限基数都等于某个 $\aleph_\beta$. 于是连续统假设可以表为 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, 而广义连续统假设可以表为 $2^{\aleph_\beta}=\aleph_{\beta+1}$.

【有限、无限的定义】 R. Dedekind 定义: 当集合 A 和 A 的某个真子集对等时, A 称为**无限集** (infinite set), 否则 A 称为**有限集** (finite set). 与此相对地也可定义: 对于集合 A 引入良序†, 如果它的对偶†序也是良序, 则 A 为有限集, 不可能如此时 A 为无限集(也有和这个定义等价的定义). 可以证明若在此意义下为有限集, 则在 Dedekind 的意义下也是有限集. 若用选择公理, 还可证明两个定义是等价的.

【参】 [1] A. A. Fraenkel, Abstract set theory, North-Holland, 1953; [2] W. Sierpiński, Hypothèse du continu, Warsaw, 1934; [3] K. Gödel, The consistency of the continuum hypothesis, Ann. Math. Studies, Princeton, 1940; [4] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., **50** (1963), 1143–1148, **51**(1964), 105–110; [5] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfinite Mengenlehre 1, Math. Ann., **46** (1895), 471–512. Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1932 (英译本: Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, Open Court. 1915); [6] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? F. Vieweg, 1888. Gesammelte mathematische Werke 3, F. Vieweg, 1932. (英译本: Essays on the theory of numbers, Open Court, 1901).

另→集合的[参].

结构 [英 structure 法 structure 德 Struktur 俄 строение, структура 日 構造] 【各种结构】 所谓结构是对于有序集、群、环、线性空

间、拓扑空间、概率空间、流形等许多数学对象，用集合†和关系†的语言给出的统一的形式. 在叙述它的定义之前，举几个简单而基本的例子.

i) 序. 关于集合A的序†是指满足某个条件的二元关系（→关系). 设其图象为α，则其条件可以表示如下.

1) 若 $a\in A$，则 $(a,a)\in\alpha$.

2) 若 $(a,b)\in\alpha$, $(b,c)\in\alpha$, 则 $(a,c)\in\alpha$.

3) 若 $(a,b)\in\alpha$, $(b,a)\in\alpha$, 则 $a=b$.

在此α是幂集† $\mathfrak{P}(A\times A)$ 的元素. 满足上列条件的α称为对集合A确定了序结构.

ii) 合成. 关于集合A的**合成** (composition) 是指从 $A\times A$（或其子集)到A的映射. 如果把它看做是关于A的三元关系（→关系)，则它的图象α满足下列二条件(或仅满足 2)).

1) 若 $(a,b)\in A\times A$，则有 $c\in A$，使 $(a,b,c)\in\alpha$.

2) 若 $(a,b,c)\in\alpha$, $(a,b,c')\in\alpha$, 则 $c=c'$.

在此α是幂集 $\mathfrak{P}(A\times A\times A)$的元素. 满足上述条件的$\alpha$称为对集合$A$确定了合成结构. 关于合成的结合律†，可以表示为：就α而言.

3) 若 $(a,b,x)\in\alpha$, $(b,c,y)\in\alpha$, $(x,c,z)\in\alpha$, $(a,y,z')\in\alpha$, 则 $z=z'$.

具有满足此条件的合成的集合A称为**半群** (semigroup).

iii) 运算. 由集合A到集合B的**运算**(operation) 是指由 $A\times B$（或其子集) 到B的映射. 如果把运算看做是三元关系，则其图象γ和合成同样地满足下列二条件(或仅满足 2)).

1) 若 $(a,b)\in A\times B$，则有 $c\in B$，使 $(a,b,c)\in\gamma$.

2) 若 $(a,b,c)\in\gamma$, $(a,b,c')\in\gamma$, 则 $c=c'$. 满足上述条件的 $\gamma\in\mathfrak{P}(A\times B\times B)$ 称为确定了A对于B的运算结构. A的元素称为B上的**算子** (operator)，也称A为B的**算子区** (domain of operators)，称B为A集合 (A-set). 另外，如以B为主，A对B的运算也称为**外部合成**(external composition). 与此相对，上述的通常的合成称为**内部合成** (internal composition).

当对算子区A确定一个合成时，通常要求下列条件. 其中α为确定A的合成关系的图象.

3) 若 $(a,b,x)\in\alpha$, $(b,c,y)\in\gamma$, $(x,c,z)\in\gamma$, $(a,y,z')\in\gamma$, 则 $z=z'$. 若合成表示为 $(a,b)\to ab$，而运算表示为 $(a,b)\to a\cdot b$，则 3) 也可以改写如下.

3') 对 $a,b\in A$, $c\in B$，有 $(ab)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$. 再者，当对$B$确定一个合成时，通常要求下列条件. 其中$\beta$是确定$B$的合成关系的图象.

4) 若 $(a,b,x)\in\gamma$, $(a,c,y)\in\gamma$, $(b,c,z)\in\beta$, $(x,y,w)\in\beta$, $(a,z,w')\in\gamma$, 则 $w=w'$.

如用写法 ab, $a\cdot b$，则可改写如下.

4') 对 $a\in A$, $b,c\in B$, 有 $(a\cdot b)(a\cdot c)=a\cdot(bc)$.

另外，为了区别，映射 $A\times B\to B$ 称为A对B的**左运算** (left operation)，映射 $B\times A\to B$ 称为A对B的**右运算** (right operation). 这虽是写法上的问题，但在给出两种运算时使用起来是方便的. 在区别左右时，可将有关的诸概念添上"左"或者"右"的字样来使用.

iv) 拓扑. 所谓集合A上的拓扑†，无非是指A中称为开集的子集的某个集合α，它满足下列条件:

1) $\varnothing\in\alpha$, $A\in\alpha$,

2) 若 $\beta\subset\alpha$，则 $\bigcup\beta\in\alpha$,

3) 若 $\beta\subset\alpha$, β是有限的，则 $\bigcap\beta\in\alpha$. 这里α是幂集 $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(A))$ 的元素. 这时称满足上列条件的α对集合A确定了拓扑结构（→拓扑空间).

【数学结构】 以线性空间†为例说明所谓数学结构的概念. 作为线性空间基本集合的是称为纯量的元素集合K和称为向量的元素集合V，作为基础概念的是关于K的两个合成(加法和乘法）和关于V的一个合成（加法）及K对V的运算（纯量乘法). 这些合成和运算分别由幂集的元素 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathfrak{P}(K\times K\times K)$, $\alpha_3\in\mathfrak{P}(V\times V\times V)$, $\alpha_4\in\mathfrak{P}(K\times V\times V)$ 来确定. 如果用这种写法，则象 $\lambda(a+b)=\lambda a+$

λb ($\lambda\in K$, $a, b\in V$) 之类的线性空间的基本性质，全可以表达为关于 $K, V, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的条件 $\mathfrak{P}(K, V, \alpha_1, \cdots, \alpha_4)$.

以上是关于某一个线性空间的叙述. 为了叙述所谓"一般线性空间",需要用记号 $X_1, X_2, \xi_1, \cdots, \xi_4$ 来代替表示具体对象的记号 $K, V, \alpha_1, \cdots, \alpha_4$. 而上述诸条件 $\alpha_1\in\mathfrak{P}(K\times K\times K)$ 等，则写成式子 $\xi_1\in\mathfrak{P}(X_1\times X_1\times X_1)$ 等，而这些记号和式子的集合

$$\Sigma:\ X_1, X_2, \xi_1, \cdots, \xi_4$$
$$\xi_1\in\mathfrak{P}(X_1\times X_1\times X_1), \cdots,$$
$$\xi_4\in\mathfrak{P}(X_1\times X_2\times X_2).$$

可看做是线性空间的**类型** (type). 同样，基本性质 $P(K, V, \alpha_1, \cdots, \alpha_4)$ 则改写成式子 $P(X_1, X_2, \xi_1, \cdots, \xi_4)$，其全体

$$\Gamma:\ P(X_1, X_2, \xi_1, \cdots, \xi_4)$$

称为线性空间的**公理系统** (axiom system).

在线性空间以外的情形，**基本概念** (basic concept) 和上述的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_4$ 同样可以表示为由几个**基本集** (basic set) 而有限生成的集合的元素. 这里所谓由 $A_1, \cdots, A_m$ 有限生成的集合是指由 $A_1, \cdots, A_m$ 经过有限次施行建立直积集的运算×以及建立幂集的运算 $\mathfrak{P}$ 而得到的集合.

用表示基本集的记号 $X_1, \cdots, X_m$, 及表示基本概念的记号$\xi_1, \cdots, \xi_n$, 作出象 Σ 那样的类型，象 Γ 那样的公理系统，这个类型和公理系统组(Σ, Γ)，称为一个**数学结构**(mathematical structure). 当把具体的基本集和基本概念代入 $X_1, \cdots, X_m$ 及 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 时，如果满足关于类型的条件和公理，则此基本集和基本概念组称为具有数学结构的一个**数学体系** (mathematical system). 各数学体系称为该结构的**模型** (model)，或者是该公理系统的模型. 具有同一结构的两个数学体系称为同类的. 按照它的结构称为群、环、拓扑空间等. 数学体系也可以称为**广义代数系** (algebraic system in the wider sense). 特别是作为基本概念只着眼于合成（或合成和运算）时，则简称为**代数系** (algebraic system).

【代数系】 代数系可以说是给出一些合成(及运算)的集合. 但往往还采用适当的条件作为公理系统以指定其数学结构的种类(→ 群, Abel 群，有限群，环，域，交换环，代数，Boole 代数，Lie 代数，Jordan 代数). 在各类代数系中，虽各有其固有的理论，但初等的一般性质和有关的概念可以用同一观点处理. 而且，这样做往往能看出理论的结构. 这样的考虑方法，可由代数系更进而达到所谓数学体系的形式化. 在此仅就代数系叙述了若干事实. 而对于其它数学体系，也可以类似地讨论之.

以下主要就一个合成 $(a, b)\to ab$ 进行论述，对于二个以上的合成也可同样处理. 关于合成的写法，也可用 $a+b$, $a\cdot b$, $[a, b]$ 等代替 ab. 同类代数系 A, A' 之间的映射 $f: A\to A'$, 如满足条件 $f(ab)=f(a)f(b)$ ($a, b\in A$), 则称为**同态** (homomorphism). 当从 A 到 A' 上的同态(满射同态)存在时，称 A' 和 A 是**同态的** (homomorphic). 特别是，当从 A 到 A' 上的一一同态(双射同态) f 存在而其逆映射 $f^{-1}: A'\to A$ 也是同态时，f 称为**同构** (isomorphism)，而 A 和 A' 称为**同构的** (isomorphic)，写作 $A\cong A'$.

同态的复合是同态. 而一个代数系 A 的恒等映射显然是同构. 从 A 到 A 自身的同态称为**自同态** (endomorphism)，特别是，从 A 到 A 的同构称为**自同构** (automorphism). A 的自同态全体关于复合的合成是半群. 特别是，自同构的全体是一个群，称之为 A 的**自同构群** (group of automorphisms).

同态的概念是在一切代数系中都出现的基本概念之一，但在所有的情形中，也有用**类型**代替同态，**自类型**代替自同态的.

具有一个合成的代数系 A 的元素 e，当满足条件 $ae=ea=a$ ($a\in A$) 时，称为**单位元** (identity element). 它若存在则是唯一的. 象环那样具有两个合成的情形，着眼于其中一个合成(乘法)时也可以用单位元一词. 群之间的同态将单位元映射为单位元，但在一般的代数系中却未必如此. 因单位元起着重要的作用，它常常被列入数学结构的基本概念中. 于是，一般

的数学体系之间的同态可以定义为基本集合之间的映射,使之诱导出基本概念之间的对应. 在这种观点下，具有单位元的半群和环分别称为**单式半群** (unitary semi-group, monoid) 及**单式环** (unitary ring)，其间的同态总是限于单位元到单位元的映射.

在同类代数系 A, A' 间，设 A 是 A' 的子集，当由 $f(a)=a$ $(a\in A)$ 定义的映射 $f:A\to A'$ 是同态时，称 A 为 A' 的**子系统** (subsystem). 群、环的子系统分别称为子群†、子环†. 其它也仿此.

设对代数系 A 给定一个等价关系† R，当条件:

若 $R(a,a')$, $R(b,b')$, 则 $R(ab,a'b')$ 成立时，称 R 和合成是**相容的** (compatible). 考虑由 R 确定的 A 的商集† A/R. 此时，在 A/R 上可唯一确定其合成，使得由 $a\in f(a)(a\in A)$ 所确定的映射 $f:A\to A/R$ 成为同态. 由此得到的代数系 A/R 称为 A 的**商系** (quotient system)，群、环的商系分别是群、环，称为商群†、商环†. 其它也仿此. 另外，给出运算的情形也同样. 又→范畴和函子.

【参】［1］正田建次郎，代数学通論，共立出版，1947;［2］中山正，集合・位相・代数系，至文堂，1949;［3］弥永昌吉-小平邦彦，现代数学概説 I，岩波，1961;［4］N. Bourbaki, Théorie des ensembles, chap. 4. Structures, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1957. 第二版 1966 (英译本: Theory of sets, Addison-Wesley, 1968);［5］C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra, Academic Press, 1956.

排列，组合［英 permutation, combination 法 permutation, combinaison 德 Permutation, Kombination 俄 размещение, сочетание 日 順列，組合セ］ 从 n 个元素构成的集合 $M=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 中取出 r 个元素排成一列，把顺序也考虑进去，各自的排法称为从 M 中取出 r 个元素的**排列**；从 M 中不考虑顺序取出 r 个元素，各自的取法称为从 M 中取出 r 个元素的**组合**. 组合也可以说是 (M 的)具有 r 个元素的子集. 从 M 中取出 r 个元素的排列是指以自然数的集合 $\{1,2,\cdots,r\}$ 为定义域，以 M 的子集为值域的单值函数 f，且满足：当 $i\neq j$ 时 $f(i)\neq f(j)$. 组合不外是在这些排列中值域相同者所构成的等价类. 因排列及组合的个数仅与 M 的元素个数 n 和 r 有关，通常说成是"从 n 个相异的事物中取出 r 个的排列". 特别是，当 $r=n$ 时，说成是"相异的 n 个事物的排列".

设从相异的 n 个事物中取出 r 个的排列及组合的个数分别记为 ${}_nP_r$, ${}_nC_r$, 则

$${}_nP_r=n(n-1)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!$$
$${}_nC_r={}_nP_r/r!=n!/(n-r)!r!$$

成立. 在此 $n!=1\cdot2\cdot\cdots\cdot n$，称为 n 的**阶乘** (factorial). ${}_nC_r$ 也写做 $\binom{n}{r}$. 再者，关于 ${}_nC_r$ 有下列公式:

(1) ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$, ${}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}$

现将集合 M 按某个等价关系分类，设分为分别由 $a_1,\cdots,a_k$ 个元素组成的 $\left(\sum_{i=1}^{k}a_i=n\right)$ k 个等价类. 若仅着眼于类，则这 n 个元素的排列个数由 $n!\Big/\prod_{i=1}^{k}(a_i!)$ 给出.

其次，在 n 个相异的事物中，允许重复地取出 r 个事物构成的排列、组合(分别称为从 n 个中取出 r 个的**重复排列** (repeated permutation)、**重复组合** (repeated combination)) 的个数分别以 ${}_n\Pi_r$, ${}_nH_r$ 表示之，则

$${}_n\Pi_r=n^r,$$
$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r=(n+r-1)!/r!(n-1)!$$

成立. 再者 ${}_nH_r$ 是方程 $\sum_{i=1}^{n}x_i=r$ 的非负整数解的个数.

从集合 M 取出 r 个元素，把顺序考虑进去排在一个圆周上，各自的排法称为从 M 中取出 r 个元素构成的**循环排列** (circular permutation). 这是在从 M 取 r 个构成的排列中，把相互之间仅仅 $\{1,2,\cdots,r\}$ 的循环置换†不同者视为同一而得到的. 从而它的个数是 ${}_nP_r/r$. 又从 n 个相异的珠子中取出 r 个做数珠，其取法个数是：当 $r=1,2$ 时为 ${}_nC_r$，当 $r\geqslant3$ 时为 ${}_nP_r/2r$.

当 n 为自然数时，若使用乘法分配律，则

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^{n-r}b^r$$

成立. 它称为**二项式定理** (binomial theorem), 展开的系数 ${}_nC_r$ 称为**二项式系数** (binomial coefficient). 由 (1) 能够简单计算 ${}_nC_r$ (→数表 3). 这可由像下面那样的写法而看出, 这个图表也称为 **Pascal 三角形** (Pascal's triangle).

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

如代替二项式而考虑 m 项式则可以得到**多项式定理** (polynomial theorem)

$$(a_1 + \cdots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{p_1! \cdots p_m!} a_1^{p_1} \cdots a_m^{p_m}$$

(这里 $\sum$ 表示遍及 $p_1 \geqslant 0, \cdots, p_m \geqslant 0$, $p_1 + \cdots + p_m = n$ 的和)(→数表 3, 4).

[参] [1] E. Netto, Lehrbuch der Combinatorik, Teubner, 第二版 1927; [2] M. P. A. MacMahon, Combinatory analysis I, II, Cambridge Univ. Press, 1915—16 (Chelsea, 1960); [3] J. Riordan, Combinatorial identities, John Wiley, 1968.

组合论 [英 combinatorial analysis 法 analyse combinatoire 德 Kombinatorik 俄 комбинаторика 日 組合せ論] **组合论**的对象是具有组合性质的集合, 以其个数的计算为主要目标. 但作为其变形则表现为存在问题, 渐近式, 近似式, 同余关系等. 要对组合的性质给予明确的定义是困难的, 但和代数学以运算为重点, 数论以数为重点相对比, 比它们更为简单的情况是很多的. 因为所属不明确, 常常是从组合论的考察开始, 但伴随着理论的发展, 又转移到其他分支去了, 这种例子也是很多的. 对称式的理论发展为对称群的特征标理论而被列入代数学, 拉丁方的完备正交系成为有限射影平面而促进了几何学的研究, 分拆数在数论方面的重要性的发现等都是这种例子.

几乎数学的整个领域都提供了素材. 简单的代数系, 例如序集†, 格†, 半群†等的最原始的个数计算原来就是组合论的内容. 近代统计学的应用的各种布局的问题, 电子计算机的程序设计的组合论的方面, 最近也被注意. 此外, 概率论, 分子结构, 工程学等方面产生的题材也归入了组合论.

在个数的计算上, 利用解析学一事是自古以来就广泛地实行着的. 当数论函数 $a(n)$ 的值为复数时, 形式幂级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n$ 称为 $a(n)$ 的母函数†, 当 $f(x)$ 表示解析函数时, 根据其解析的研究得到关于 $a(n)$ 的各种认识. 因此所谓"组合分析"的名称就长期被使用了. 但在复杂的布局中, 首先出现的是存在问题, 因而代数学的方法也提供了有效的手段. 具体说来, 表现为关于有理整系数矩阵的种种变换的不变量等等形式. 近似式、同余关系在数论里是同一范畴的, 即包括在对有理数域的因子的近似里, 但在具体研究时, 除通常的函数论之外, 局部数域的函数论也是有效的. 像这样为了自由使用解析学以外的代数学, 数论等方法, H. J. Ryser 等提出所谓"组合数学"的新名称. 综合这些观点的著作还没有出现. J. Riordan [4] 是解析的, Ryser [5] 是代数的, 报告集[19]则是数论的色彩很浓的. 就理论现状而言, 组合论还没有表现出深刻的统一性, 就一般特征而言, 又有显著复杂性, 这就妨碍了理论的发展. 然而由于电子计算机的出现, 对于庞大的混沌现象增大了控制的力量, 组合论的内容肯定会大大地丰富起来.

【解析方法】 作为体系的一个重要支柱是**包除原理** (principle of inclusion and exclusion). 设集合 Ω 的子集 A 的基数以 $|A|$ 表示之, 而 $A \cap B$ 以 AB 表示之, 则

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &\quad = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_iA_j| + \cdots \\ &\quad\quad + (-1)^{n-1}|A_1A_2\cdots A_n|. \end{aligned}$$

在这里也可以取满足适当条件的测度来代替基数. 当测度是概率时, 上式便成为 Poincaré 公式. M. Fréchet (1940) 将它一般化, 得到了关于非独立非互斥的复合事件的概率公式. 关于个数计算的种种原理可以根据它而得到统一的说明. 例如, 除 Poincaré 公式以外, 关于数论函数之和的 Möbius 反演公式, 有限群论中的 Hall

计算原理，或多元微分的直接定义等都是如此.

母函数的概念是由 P. S. Laplace 建立的，举简单的例子，将 n 个同种事物，譬如 n 个同样大小的白球，分为若干组，分法的个数 $p(n)$ 是 n 的分拆数†，其母函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n$ 等于 $((1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots)^{-1}$. 又，将 n 个互不相同的事物，譬如 n 个人分为若干组，分法的个数 $B(n)$ 是所谓 **Bell 数** (Bell's number). 特别是，$B(5)=52$ 是源氏香数. 关于Bell数的母函数 $\sum_{n=0}^{\infty}B(n)x^n$ 对于 $x\neq 0$ 是发散的，但它的**指数母函数** (exponential generating function) $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n)}{n!}x^n$ 却是收敛的且等于 e^{e^x-1}. 此外，Dirichlet 级数型的母函数 $\sum_{m=1}^{\infty}a(n)n^{-s}$ 等也被考虑，它在数论里经常用到. 从母函数满足的函数等式，可得到 $a(n)$ 满足的关系式，渐近式†(递归公式). (关于分拆数→分拆数.) 又，关于 Bell 数，由 $g'(x)=e^xg(x)$ 得到

$$B(n+1)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(k).$$

为了得到渐近公式，使用母函数也是有效的.

【组合布局】 举两、三个古典解析学解释不了的重要例子.

【拉丁方】 由 n 个记号构成的集合 $A=\{a_1,\cdots,a_n\}$，每个记号各取 n 回，共 n^2 个，排列为 n 行 n 列的正方形，在各行、各列上 A 的每个记号各出现一次，称之为 A 上的**拉丁方** (Latin square) 或 n 阶拉丁方. 当第一行及第一列都是给定的标准排列时，称为不可约的或标准型的拉丁方，其个数以 $L(n)$ 表之，n 阶拉丁方的总数便是 $n!(n-1)!\ L(n)$. $L(n)$ 仅在9阶以下时是已知的，$n=1$ 到9时，依次为 1, 1, 1, 4, 56, 9408, 16942080, 535281401856, 377597570964258816. 将集合 A 上的两个拉丁方 L_1, L_2 重叠而得的方阵，如果在 n^2 个位置上 n^2 个相异的对全部出现，则称 L_1 和 L_2 是**正交的** (orthogonal)，重叠得到的方阵称为 A 上的 **Euler 方阵**或 n 阶 **Euler 方阵** (Euler square). 当 n 为奇数时及 n 为4的倍数时，Euler 方阵是容易做出的，但对 $n=4t+2$ 的情形，Euler 曾猜想过可能不存在，最近 R. C. Bose-S. S. Shrikhande-E. T. Parker (1959) 把该猜想推翻，证明当 $n\neq 2,\ \neq 6$ 时，n 阶 Euler 方阵必定可以做出. 在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的 Euler 方阵中，把 (i,j) 改记为 $n(i-1)+j$ 时，便得到 n 阶**幻方** (magic square). 它的特点是将数1到 n^2 排列在 n 行 n 列的正方形中，各行、各列数的和保持为一定值 $n(n^2+1)/2$.

若有 A 上相互正交的拉丁方 $L_1, L_2,\cdots,L_r$，将它们全部重叠便生成 n 阶 r 次**超 Euler 方阵**. 这时必定有 $r\leqslant n-1$，但若 $r=n-1$，原来的拉丁方系称为 n 阶拉丁方的**完备正交系** (complete orthogonal system). 这又和一直线上含有 n 个点的有限仿射平面是等价的概念，再者，追加 $n+1$ 个无穷远点和一条无穷远直线，便成为和一直线上含有 $n+1$ 个点的有限射影平面是等价的概念. 如果 n 是素数的幂，则可以由有限域† $GF(n)$ 上的解析的平面射影几何学而得到有限射影平面的例子. 对应于素数幂以外的 n 的有限射影平面，从而 n 阶拉丁方阵的完备正交系的例子，迄今还全不知道. 再者，解析的射影几何学以外的射影平面的例子却是有的.

【平衡不完全区组设计】 由 v 个记号 $a_1,\cdots,a_v$ 组成的集合 Ω，命其 b 个子集为 $A_1,\cdots,A_b$，如果 $|A_i|=k\ (<v)$ 是一定的，又对于 Ω 的各元 a_i，含有 a_i 的 A_j 的个数不管 i 如何总是等于一定值 r，而且对于 Ω 的相异二元 $a_i, a_{i'}$，含有它们的 A_j 的个数，不管 i, i' 如何总是等于一定值 λ，则子集系 $\{A_1,\cdots,A_b\}$ 称为含有参数 (b,v,r,k,λ) 的**平衡不完全区组设计** (balanced incomplete block design)，或 $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},\boldsymbol{k},\boldsymbol{\lambda})$ **布局** (configuration). 在这里 $bk=vr$, $r(k-1)=(v-1)\lambda$ 是必要条件，但仅只这些不是对应的 (b,v,r,k,λ) 布局存在的充分条件. 简单的充分条件尚不知道. 在一般理论上对 $b=v$, $r=k$ 的**对称布局** (symmetric configuration) 进行了详细的研究. 这时，也称为指定参数的 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k},\boldsymbol{\lambda})$ **布局**.

于是，有 $(v-1)\lambda=k(k-1)$，但量 $n=k-\lambda$ 是重要的. 譬如，如果 v 是偶数，则为了 (v,k,λ) 布局存在，n 必须是完全平方. 若 v 为奇数，则对应的条件可以使用 Hilbert 的范数剩余记号[†]表示出来. v 和 n 之间的不等式 $4n-1\leqslant v\leqslant n^2+n+1$ 成立. 它有两个极端的情形，首先，若 $v=n^2+n+1$，则 $k=n+1$，$\lambda=1$，从而该布局便是一直线上含有 $n+1$ 个点的有限射影平面，于是又和 n 阶拉丁方的完备正交系一致. 反之，若 $v=4n-1$，则 $k=2n-1$，$\lambda=n-1$，该布局是 $4n$ 阶的 **Hadamard 矩阵** (Hadamard's matrix). n 阶 Hadamard 矩阵是指仅由 $+1$ 和 -1 组成的 n 阶正方阵，而其行列式之值为 $n^{n/2}$ 的. 其中 $n=1$，2 或 4 的倍数. 阶数 $\leqslant 264$ 的 Hadamard 矩阵的例子已被构成(⇀试验设计)

【差集】 如果 (v,k,λ) 布局的基础集合 Ω 特别具有 v 阶循环群[†]的结构，而子集 A_i 能从其中之一 A_1 依 Ω 的元素平移(平行移动) $A_1\to a_iA_1=A_i$ 而得到，那末当 Ω 用加法记述时，A_1 的特性是：只要其中二元之差 $\neq 0$，则 Ω 的非零元素各出现 λ 回. A_1 称为 $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{k},\boldsymbol{\lambda})$ **差集**. 从由解析的射影平面生成的 $(n^2+n+1,n+1,1)$ 布局开始，现在已知的 (v,k,λ) 布局大多数是由 (v,k,λ) 差集经平移而得到的，但象 Hall 建立的 92 阶 Hadamard 矩阵所对应的 (91, 45, 22) 布局那样，也证明了有对应的参数的差集是不存在的. 作为数论的必要条件，也叙述为 v 割圆域[†]的极大实子域中 n 的素理想分解式的形式.

【图】 **图** (graph) $G=(V,E)$ 是由有限集 V 和 V 的相异元素的无序对的有限集 E 组成的. V 和 E 的元素分别称为**顶点** (vertices) 和**棱** (edges). 若 $e=\{u,v\}$，则称 u 和 v 是**邻接的** (adjacent)，e **连接** (joins) u 和 v，且 e 和 $u(v)$ 是相互**关联的** (incident). 注意图 G 是有限一维单纯复形(⇀复形). 两个图 G 和 G' 称为**同构的** (isomorphic)，如果它们作为单纯复形是同构的. 设 $G=(V,E)$ 及 $G'=(V',E')$ 是图. 如果 $V'\subset V$，$E'\subset E$，则图 $G'=G(V',E')$ 称为 $G=G(V,E)$ 的**子图** (subgraph)；特别是，若 $V=V'$，则 G' 称为 G 的**生成子图** (spanning subgraph). **伪图** (pseudo graph) 是三元组 (V,E,Φ)，使得 V 是有限非空集，E 是和 V 不相交的有限集，且 Φ 是由 E 到 V 的所有无序对的集合的映射. 如果 $\Phi(e)=\{u,v\}$，则称棱 e 连接顶点 u 和 v. 对于伪图也可用明显的方式定义邻接和关联. **圈** (loop) 是把 V 的一个顶点同它本身连接起来的棱，**多重棱** (multiple edge) 是连接着同一对顶点的两个或多个棱之一，这一对顶点已由另一个棱连接着. 图是不包含圈及多重棱的伪图. 当保持伪图的邻接而细分圈和多重棱时，伪图能够改变为图. 然而，在关于图论的许多书中，图字实际意味着伪图(如在这里定义的). **有向图** (directed graph) 是由有限非空集 V 和 V 的相异元素的序对的有限集 A 组成的. 关于伪图和关于有向图的术语，能够用类似于定义普通图的那些术语的方式来定义.

连通性. 设 $P=\{v_0,e_1,v_1,e_2,\cdots,e_n,v_n\}$ 是图 G 的顶点和棱的交错序列. 如果对于每个 i，e_i 连接 v_{i-1} 和 v_i，且 $e_i\neq e_j(i\neq j)$，则 P 是 G 中的**道路** (path). 如果 $v_0=v_n$，则 P 是**闭道路** (closed path). 如果 $v_i\neq v_j\ (i\neq j,\{i,j\}\neq\{0,n\})$，则闭道路称为**环道** (circuit). 如果 G 的任何两个顶点都被 G 中的道路连接，则图 G 是**连通的** (connected). G 的极大连通子图称为 G 的**分支** (component). 如果图 G 的每对相异顶点 u 和 v 都至少能用 n 个道路连接，它们除 u 和 v 外没有共同顶点，则称图 G 为 $\boldsymbol{n}$-**连通的.**

Euler 图和 Hamilton 图. 若 G 的所有棱全在 P 中出现，则 G 中的闭道路称为 **Euler 的**，这时 G 称为 **Euler 图** (Eulerian graph). 下述命题一般看做是图论历史中的第一个定理，是 Euler 在 1736 年当他解决有名的 **Königsberg 桥问题** (Königsberg bridge problem) 时证明的. 连通图 G 是 Euler 的，其充分必要条件为：G 的每个顶点的次数都是偶数. 其中顶点 v 的**次数** (degree) 定义为和 v 关联的棱的个数. G 的环道 C 是 **Hamilton 的**，如果 G 的

所有顶点全在C中出现，这时G称为**Hamilton 图** (Hamiltonian graph). 关于 Hamilton 的性质的简单准则(类似上面提到的 Euler 定理)还没有得到.

平面图 (planar graph). 若 $n\geq 3$, 则任意图G在 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中可以实现为多角网络，使得无二棱相交，这时，则称G**嵌入** $\boldsymbol{R}^n$. 能够嵌入平面的图称为**平面图**. 平面图的下述特征属于 Kuratowski. 图为平面的充分必要条件是没有G的子图组合等价于图 1 所示 **Kuratowski 图**的任一个. 注意: 如果图G和G'具有同构的剖分 (→复形)，则G和G'称为**组合等价的** (combinatorially equivalent) (作为单纯复形).

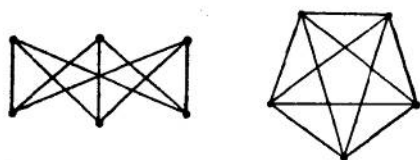


图 1

着色问题 (coloring problems). 如果能够对G的每个顶点指定n种颜色之一，使得对任何一对相邻的顶点指定的颜色都不相同，则称G为 **n 着色的** (n-colorable). 容易证明每个平面图都是 5 着色的，而证明每个平面图都是 4 着色的却是困难的. 实际上，这个问题等价于四色问题(→四色问题).

树 (tree) 不含有环道的连通图 G 称为**树** (tree). 任何连通图都含有一个是树的生成子图,这个子图称为**生成树** (spanning tree). 设T是图G的生成树. 不属于T的G的棱称为T的**弦**(chord). 每个弦对应于G的一个环道，对应于T的某个弦的所有环道的集合能够看做是关于G的环道的基 (→矩阵). 若 $G=(V, E)$ 是图而K是E的子集,则用 $G-K$ 表示G的子图$(V, E-K)$. 若 $G-K$ 不是连通的，则K称为**非连通集** (disconnecting set). 如果没有非连通集K 的真子集是非连通集，则K 称为**割集** (cutset). G的生成树T的每个棱都对应于G的一个割集，且对应于T的某个棱的所有割集的集合可看做是关于G的割集的基.

矩阵 (matrices). 设 $\{v_1, \cdots, v_m\}$ 和 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 分别是图 $G=(V, E)$ 的顶点和棱的集合. 如果所有顶点和棱可按这种形式编号，则图G称为**标号图** (labelled graph). 标号图G的**邻接阵** (adjacency matrix) $A=(a_{ij})$ 是 $m\times m$ 矩阵，其中如果顶点 v_i 和 v_j 是邻接的，则 $a_{ij}=1$, 否则 $a_{ij}=0$. 标号图G的**关联阵** (incidence matrix) $B=(b_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，其中如果 v_i 和 e_j 是关联的，则 $b_{ij}=1$, 否则 $b_{ij}=0$. 设 $(C_1, \cdots, C_s)$ 是标号图G的所有环道的集合,则G的**环道阵** (circuit matrix) $C=(c_{ij})$是 $s\times n$ 矩阵,其中若 C_i 含有 e_j, 则$c_{ij}=1$, 否则 $c_{ij}=0$. 设 $\{K_1, \cdots, K_t\}$ 为标号图G的所有割集的集合,则G的**割集阵** (cutset matrix) $K=(k_{ij})$是 $t\times n$ 矩阵,其中若 K_i 含有 e_j, 则 $k_{ij}=1$, 否则 $k_{ij}=0$. 容易看出 $C{}^tB\equiv 0$ (mod 2), 其中 ${}^tB$ 表示B的转置. 若G是连通的,则 B, C 和 K 的秩分别是 $m-1$, $n-m+1$ 和 $m-1$. 我们把 $m\times m$ 矩阵 $M=(d_{ij})$ 和 $m\times m$ 邻接阵相联系,其定义是: 若 $i\neq j$ 则 $d_{ij}=-a_{ij}$, 及 d_{ii} 是 v_i 的次数. M 由邻接阵唯一确定. 若G是连通的标号图，则 M 的所有余因子是相等的，且G的生成树的个数和这些余因子的共同值一致. 这个事实包含在著名的 Kirchhoff 电网络理论所证明的结论之中.

应用 (Applications). 图论在网络问题中(→网络)和在电网络理论中都很有用. 电网络的各种重要参数可以表示为对应于各棱的某些变数的函数. 近年也出现了在社会科学中的应用. 在图论的许多应用中,具有某种性质的所有子图的枚举经常起着重要的作用. 于是图论的某些方面与许多组合问题有密切的联系.

【参】 [1] M. Hall, Combinatorial theory, Blaisdell, 1967; [2] H. B. Mann, Addition theorems, Interscience, 1965; [3] M. P. A. MacMahon, Combinatorial analysis I, II, Cambridge Univ. Press, 1915, 1916 (Chelsea, 1960); [4] J. Riordan. An introduction to combinatorial analysis, John Wiley, 1958; [5] H. J. Ryser, Combinatorial mathematics, John Wiley, 1963; [6] L. D. Baumert-S. W. Golomb-M. Hall. Discovery of an Hadamard matrix of order 92, Bull. Amer. Math. Soc., 68(1962), 237—238; [7] R. C. Bose-S. S. Shrikhande, On the construction of sets of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of a conjecture of Euler, Trans. Amer. Math. Soc.,

95(1960), 191—209; [8] J. W. Brown, Enumeration of Latin squares with application to order 8, J. Combinat, Theory, 5(1968) 177—184; [9] R. H. Bruck-H. J. Ryser, The nonexistence of certain finite projective planes, Canad. J. Math., 1(1949), 88—93; [10] S. D. Chowla-H. J. Ryser, Combinatorial problems, Canad. J. Math., 2(1950), 93—99; [11] K. Yamamoto (山本幸一), Jacobi sums and difference sets, J. Combinat, Theory, 3(1967), 146—181; [12] L. D. Baumert, Cyclic difference sets, Lecture notes in math. 82, Springer, 1971; [13] W. D. Wallis-A. P. Street,-J. S. Wallis, Combinatorics: Room squares, sumfree sets, Hadamard matrices, Lecture notes in math. 292, Springer, 1972; [14] J. H. van Lint, Combinatorial theory seminar, Eindhoven Univ. of Tech., Lecture notes in math. 382, Springer, 1974; [15] C. Berge, The theory of graphs and its applications, John Wiley, 1962; [16] G. Busacker-T. L. Saaty, Finite graphs and networks, McGraw-Hill, 1965; [17] F. Harary, Graph theory, Addison-Wesley. 1969; [18] O. Ore, Theory of graphs, Amer. Math. Soc., 1962; [19] Combinatorial analysis, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 10, Amer. Math. Soc., 1960; [20] I. Kaplansky-E. Hewitt-M. Hall-R. Fortet, Some aspects of analysis and probability, Surveys in Applied Mathematics 4 的第二部 Survey of combinatorial analysis, p, 35—104. John Wiley, 1958; [21] 山本幸一,ラテン方陣について,数学, 12(1960) 67—79.

数 [英 number 法 nombre 德 Zahl 俄 число 日 数] 从计数物品这种简单活动出发得到了**自然数** (natural number), 用以表示物品的个数或其序. 从自然数开始逐步扩张数的概念, 定义了**整数** (英 integer 法 nombre entier 德 ganze Zahl), **有理数** (rational number), **实数** (real number), **复数** (complex number). 全体自然数、整数、有理数、实数、复数的集合常常分别以 $\boldsymbol{N}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ 表示之.

到有理数的扩张,是为了使求和、差、积、商的运算,即加法、减法、乘法、除法的**四则运算**(英 four arithmetic operations 德 vier Spezies) (也称为**有理运算** (rational operations)) 可以在其中自由地(仅以 0 除例外)进行的扩张. 在自然数论的建立中,下述的基于 Peano 公理系统的方法和 R. Dedekind[1] 的集合论方法是众所熟知的(→藤原松三郎[6], 河田敬義-竹内外史[7]等). 对有理数,再考虑连续性就扩张到实数的范围. 实数理论可用各种不同的方法建立,但下述的 Dedekind 分割的方法 (1872)([2]) 和 G. Cantor 的基本序列的方法 (1872)([3]) 是最广泛熟知的. 另外, Weierstrass 也用无穷级数写了实数理论的讲义 (1859—60) (关于这些→藤原[6]). 在实数的范围内, 1) 四则运算是可能的; 2) 在数之间可以定义大小的序关系;但方程 $x^2+1=0$ 却没有实根. 如若引入数 $a+ib\,(i=\sqrt{-1})$, 则所有二次方程都有根. 这样的数称为虚数, 是在十六世纪时 G. Cardano 开始使用的. L. Euler 从他的公式 $\exp i\theta=\cos\theta+i\sin\theta$ 开始, 在各种计算上将虚数用做便利的工具. $i=\sqrt{-1}$ 的记号是 Euler (1777) 开始使用的. 另一方面, C. F. Gauss 命名该数为复数, 证明了数系数的代数方程在复数范围内必有根,进而考虑其几何表示法(→复数),这种数对于数学来说已成为不可缺少的了.

通常所谓数是指到复数为止的范围而言, 但也有将复数进一步扩张的,如 Hamilton 的四元数†和 Cayley 数†等.

【自然数】 G. Peano 以 1 这个自然数以及使自然数 x 对应于 $x+1$ 的函数 (以后, 以 x' 表示之, 称为 x 的**后继者**(英 successor 德 Nachfolger)) 为基础, 将全体自然数的集合 $\boldsymbol{N}$ 的基本性质归纳为下列的五个公理: 1) $1\in\boldsymbol{N}$; 2) 若 $x\in\boldsymbol{N}$, 则 $x'\in\boldsymbol{N}$; 3) 若 $x\in\boldsymbol{N}$, 则 $x'\neq 1$; 4) 若 $x'=y'(x, y\in\boldsymbol{N})$, 则 $x=y$; 5) 若二条件“$1\in M$”及“若 $x\in M$,则 $x'\in M$”得到满足,则 $\boldsymbol{N}\subset M$. 以上的五个公理称为 **Peano 公理系统**. 满足 Peano 公理系统的集合 $\boldsymbol{N}$ 在同构意义下是唯一的,因此它可以作为 $\boldsymbol{N}$ 的定义,并将 $\boldsymbol{N}$ 的元素称为**自然数**.

根据 Peano 第五公理, 关于自然数 n 的性质 $P(n)$ 若能证明下列二者, 则可导出对于所有的自然数 n, $P(n)$ 都是正确的: i) $P(1)$ 是正确的; 且 ii) 对于任意自然数 k, 假定 $P(k)$ 是正确的,则 $P(k+1)$ 也是正确的. 这样的推理称为**数学归纳法** (mathematical induction) 或**完全归纳法** (complete induction). 与此相应, Peano 第五公理称为**数学归纳法公理** (axiom of mathematical induction). 作为数学归纳法的推广,有**二重数学归纳法** (**或二重归纳法**) (double mathematical induction): 设有关于自然数 m, n

的性质 $P(m, n)$，为了证明它一般是正确的，只须证明下列二者成立．i) $P(m, 1)$ 及 $P(1, n)$ 关于所有的 m, n 是正确的；且 ii) 对于任意自然数 k, l，如果 $P(k+1, l)$ 及 $P(k, l+1)$ 是正确的，则 $P(k+1, l+1)$ 也是正确的．此外也有一些别的使用方法．将它再推广，可以考虑 n 重数学归纳法 $(n = 2, 3, 4, \cdots)$．这些总称为**多重数学归纳法**（或**多重归纳法**）(multiple mathematical induction)．

一般地，对于任意集合 M，当给定直积集† $\boldsymbol{N} \times M$ 到 M 的映射 f 时，则有唯一的 $\boldsymbol{N}$ 到 M 的映射 φ，使得 i) $\varphi(1) = a$; ii) $\varphi(x') = f(x, \varphi(x))$ $(x \in \boldsymbol{N})$ 成立．由 i), ii) 而定义 φ，称为 φ 的**依数学归纳法的定义**(definition by mathematical induction)．

特别是，当给定自然数 a 时，由 i) $\varphi(1)=a'$; ii) $\varphi(x') = \varphi(x)'$ 所定义的映射 $\varphi: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ 写做 $\varphi(b) = a + b$，称为加法．由此，有 $x' = x + 1$．关于加法，**交换律** (commutative law)：$a + b = b + a$，**结合律** (associative law)：$(a+b)+c = a+(b+c)$ 成立．Peano 公理系统和下列 1′)—4′) 等价．1′) $1 \in N$; 2′) 对于 $a, b \in \boldsymbol{N}$，可定义 $a + b \in \boldsymbol{N}$，且交换律和结合律成立；3′) 对于任意的自然数 a, b，$a = b + c (c \in \boldsymbol{N})$ 或 $a = b$ 或 $a + c = b (c \in \boldsymbol{N})$ 其中必有一个也仅有一个成立；4′) 和 5) (数学归纳法)相同．由此可导出**消去律** (cancellation law)：$a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$．另外，当 $a = b$ 或 $a = b + c (a, b, c \in \boldsymbol{N})$ 时定义为 $a \geqslant b$，则由 3′) $\boldsymbol{N}$ 为全序集†，$a \geqslant b \Leftrightarrow a + c \geqslant b + c$ 成立．

对于 $a \in \boldsymbol{N}$ 由 $\varphi(1)=a$, $\varphi(x')=\varphi(x)+a$ 定义的映射 $\varphi: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$，写做 $\varphi(b) = ab$ (或 $a \cdot b$)，称为乘法．**交换律**：$ab = ba$，**结合律**：$(ab)c = a(bc)$，**分配律** (distributive law)：$a(b+c) = ab + ac$，$(a+b)c = ac + bc$ 成立．再者，$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ 及**消去律**：$ac = bc \Leftrightarrow a = b$ 也成立．

以上是以序数的观点引入了自然数，但它还具有作为基数†的性质．当将 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 表示为 M_n 时，有 $\bar{\bar{M}}_n = \bar{\bar{M}}_m \Leftrightarrow m = n$，$\bar{\bar{M}}_m + \bar{\bar{M}}_n = \bar{\bar{M}}_{m+n}$，$\bar{\bar{M}}_m \times \bar{\bar{M}}_n = \bar{\bar{M}}_{mn}$ (→基数)

【整数】 对于 $\boldsymbol{N} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 引入用新记号 $0, -1, -2, \cdots, -n, \cdots$ 表示的数，令 $\boldsymbol{Z} = \{\cdots, -n, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，$\boldsymbol{Z}$ 的元素称为**整数**或**有理整数** (rational integer)．

由 $\boldsymbol{N}$ 构成 $\boldsymbol{Z}$ 时也有下述的代数方法．设自然数数对 (k, l) 的全体为 $M = \boldsymbol{N} \times \boldsymbol{N}$，在 M 上由 $k + n = m + l$ 定义一个等价关系† $(k, l) \sim (m, n)$．(k, l) 的等价类以 $K(k, l)$ 表示之，作 M 的关于等价关系 $\sim$ 的商空间 $M/\sim = M^*$．若用 $\varphi(n) = K(k+n, k)$，$\varphi(0) = K(k, k)$，$\varphi(-n) = K(k, k+n)$ 定义映射 $\varphi: \boldsymbol{Z} \to M^*$，则 $\boldsymbol{Z}$ 和 M^* 是一一对应的．另外，若规定 $K(k, l) + K(m, n) = K(k+m, l+n)$，则在 M^* (从而 $\boldsymbol{Z}$) 上定义了加法，它是 $\boldsymbol{N}$ 中的加法的推广．这时，由于 $K(k, l) - K(m, n) = K(k+n, l+m)$，减法也是可能的，于是 $\boldsymbol{Z}$ 关于加法构成群†．在 $\boldsymbol{Z}$ 中的序如由 $K(k, l) \geqslant K(m, n) \Leftrightarrow k + n \geqslant m + l$ 定义之，则 $\boldsymbol{Z}$ 也是全序集．这是自然数的序关系的推广．特别是，$N = \{a \in \boldsymbol{Z} \mid a > 0\}$．若再规定 $K(k, l) \times K(m, n) = K(km + ln, kn + lm)$，则在 $\boldsymbol{Z}$ 中也定义了乘法，交换律、结合律、分配律是成立的．又对于 $a, b \in \boldsymbol{Z}$，$ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $b = 0$．即 $\boldsymbol{Z}$ 构成整环†．

【有理数】 在整数数对 (a, b) 中，设 $b \neq 0$，设这种数对 (a, b) 的全体为 P．属于 P 的数对之间的等价关系 $(a, b) \sim (c, d)$ 由 $ad = bc$ 定义之．由此关系把 P 分类，各类称为**有理数**．若将 (a, b) 的等价类用 $L(a, b)$ 表示，则和整数的加法、乘法等情形相同，可以像下面那样定义有理数 $x = L(a, b)$，$y = L(c, d)$ 的和 $x + y$，差 $x - y$，积 xy，商 x/y：$x + y = L(ad + bc, bd)$，$x - y = L(ad - bc, bd)$，$xy = L(ac, bd)$，$x/y = L(ad, bc)$，其中商是仅在 $c \neq 0$ 时定义的．由此，有理数全体的集合 $\boldsymbol{Q}$ 构成域†．

上面将特殊形式的整数和自然数看做是相

同的,同样,可把形如 $L(a, 1)$ 的有理数和整数 a 看做是相同的. 于是,有理数 $L(a, b)(b\neq 0)$ 可以表示为整数的商 $a/b(b\neq 0)$ 的形式.

因为 $L(a, b)=L(ca, cb)(c\neq 0)$,故有理数表示为 $x=L(a, b)$ 时, 恒可取 $b>0$. 对于有理数 $x=L(a, b)$, $y=L(c, d)$ (其中 $b>0$, $d>0$), 可由 $x\geqslant y\Leftrightarrow ad\geqslant bc$, 定义大小的序. 这个序关系是整数的序关系的推广. 由此可得: i) $\boldsymbol{Q}$ 是全序集, ii) $x\geqslant y\Rightarrow x+z\geqslant y+z$, iii) $x\geqslant y$ 且 $z\geqslant 0\Rightarrow xz\geqslant yz$, 特别是,当 $x>0$ 时,称 x 为**正**有理数,当 $x<0$ 时,称 x 为**负**有理数.

【实数】 作为从有理数构成实数的代表方法,可以列举 Dedekind 方法和 Cantor 方法.

Dedekind 的实数理论. 有理数全体的集合 $\boldsymbol{Q}$ 的子集 A_1, A_2 的序对 (A_1, A_2), 当满足下列条件时称为 $\boldsymbol{Q}$ 的**分割** (英 cut 德 Schnitt). i) $A_1\neq\varnothing$, $A_2\neq\varnothing$; ii) $\boldsymbol{Q}=A_1\cup A_2$; iii) 若 $a_1\in A_1$, $a_2\in A_2$, 则 $a_1<a_2$. 这时,有下列三种可能. 1) A_1 有最大元, A_2 无最小元; 2) A_1 无最大元, A_2 有最小元; 3) A_1 无最大元, A_2 无最小元. 满足条件 1) 或 3) 的分割称为 (**Dedekind 意义下的**) **实数**. 条件 2) 可以转换为 1). 以下用 $\boldsymbol{R}$ 表示实数全体的集合, 用 α, β, $\cdots$ 等表示各个实数. 1) 的实数 (A_1, A_2) 称为**有理实数**, 3) 的实数称为**无理实数**. 有理实数由 A_1 的最大元 a 唯一确定,于是可记作 $(A_1, A_2)=a^*$. 根据 $a\rightarrow a^*$, 有理数全体的集合 $\boldsymbol{Q}$ 和有理实数全体 $\boldsymbol{Q}^*$ 一一对应.

I) 对于实数 $\alpha=(A_1, A_2)$, $\beta=(B_1, B_2)$, 当 $A_1\subset B_1$ 时,定义为 $\alpha\leqslant\beta$. 这时, $\boldsymbol{R}$ 关于这个序关系 $\leqslant$ 是全序集.

II) 对于实数 $\alpha=(A_1, A_2)$, $\beta=(B_1, B_2)$, 若令 $C_2=\{a+b\,|\,a\in A_2, b\in B_2\}$, $C_1=\boldsymbol{R}-C_2$, 则 $(C_1, C_2)=\gamma$ 是实数. 这时定义 $\alpha+\beta=\gamma$. 关于这个加法, 交换律、结合律成立, $\boldsymbol{R}$ 构成以 0^* 为零元的 Abel 群†. 再者, 实数 $\alpha=(A_1, A_2)$, $\beta=(B_1, B_2)$, 当 $0^*\leqslant\alpha$, $0^*\leqslant\beta$ 时, 若令 $D_2=\{ab\,|\,a\in A_2,\ b\in B_2\}$, $D_1=\boldsymbol{R}-D_2$, 则 $(D_1, D_2)=\delta$ 是实数. 这时,定义 $\alpha\beta=\delta$, 而且,根据 $0^*>\alpha$, $0^*\leqslant\beta$; $0^*\leqslant\alpha$, $0^*>\beta$; $0^*>\alpha$, $0^*>\beta$ 而分别定义为 $\alpha\beta=-((-\alpha)\beta)$, $\alpha\beta=-(\alpha(-\beta))$, $\alpha\beta=(-\alpha)(-\beta)$. 关于这个乘法,交换律、结合律及分配律成立. $\boldsymbol{R}$ 构成以 1^* 为单位元的域.

III) 在序和运算之间有: 1) 若 $\alpha\geqslant\beta$, 则 $\alpha+\gamma\geqslant\beta+\gamma$, 2) 若 $\alpha\geqslant\beta$, $\gamma\geqslant 0^*$, 则 $\alpha\gamma\geqslant\beta\gamma$.

通过使有理数 a 对应有理实数 a^*, 有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{Q}^*$ 是一一对应的,而且在 $\boldsymbol{Q}$ 中的和,积, 0, 1 对应于 $\boldsymbol{Q}^*$ 中的和, 积, 零元, 单位元. 并且序关系依然保持着. 即 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{Q}^*$ 关于运算和序是同构的. 今后, 把 a 和 a^* 看做是相同的. 与此相应,无理实数就简称为**无理数** (irrational numbers).

IV) 对于实数全体 $\boldsymbol{R}$ 的分割 (A_1, A_2) (即 $A_1\neq\varnothing$, $A_2\neq\varnothing$; $\boldsymbol{R}=A_1\cup A_2$; 若 $d_1\in A_1$, $d_2\in A_2$ 则 $d_1<d_2$), 或者 A_1 有最大元,或者 A_2 有最小元. 这个性质称为**实数的连通性** (connectedness of real numbers) 或**连续性** (continuity).

由以上的 I)—IV) 可得: i) 任意实数 α, 可表示为某有理数集 A 的上确界: $\alpha=\sup A$; ii) 还可表示为有理数列 $\{a_n\}$ 的极限: $\alpha=\lim a_n$.

Cantor 的实数理论. 有理数列 $\{a_n\}$ 当满足下列条件时, 称为**基本序列** (fundamental sequence) 或 **Cauchy 序列** (Cauchy sequence): 对于任何正有理数 c,从某项开始以后的所有项 a_n, a_m, 均有 $-c<a_n-a_m<c$. 再者,对于两个 Cauchy 序列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 而言, 当 $\{a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots\}$ 仍然是 Cauchy 序列时, 写做 $\{a_n\}\sim\{b_n\}$. 关系 $\sim$ 是等价关系. 将有理数的 Cauchy 数列全体的集合按等价关系 $\sim$ 分类得到的集合写做 $\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{R}'$ 的元素称为 (**在 Cantor 意义下的**) **实数**. 以下, Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 的等价类写做 $[\{a_n\}]$. 特别是, $a_n=a$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的数列是 Cauchy 序列,把它写做 $[\{a_n\}]=a^*$. 这种类型的实数称为有理实数,此外的实数称为无理实数.

对于实数 $\alpha=[\{a_n\}]$, $\beta=[\{b_n\}]$, $\{a_n+$

$b_n\}$, $\{a_nb_n\}$ 也是 Cauchy 序列，由 $\alpha+\beta=[\{a_n+b_n\}]$，$\alpha\beta=[\{a_nb_n\}]$，可以唯一地定义实数的和、积. 再者，对于 α,β 如从某项开始以后的所有的 a_n, b_n, 均有 $a_n<b_n$, 则定义为 $\alpha<\beta$. 关于以上的运算和序，可以证明 $\boldsymbol{R}'$ 具有 Dedekind 实数情形的性质 I)—IV). 而且可以指出，在 $\boldsymbol{R}'$ 中由实数构成的 Cauchy 序列必定具有极限(**实数的完备性** (completeness of real numbers)).

以上根据两种方法说明了由有理数全体的集合构成实数,(再用上述的 i), ii)) 可以指出这两个实数集合是同构的 (→ 实数).

【复数】 从实数定义复数有各种各样的方法,下面叙述的是 W. R. Hamilton 提出的方法.

实数数对 (a,b) 称为**复数**. 复数的四则运算定义如下: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d)$, $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,bc+ad)$, $\dfrac{(a,b)}{(c,d)}=\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$ (其中 $(c,d)\neq(0,0)$). 由此复数全体的集合 $\boldsymbol{C}$ 构成域†，它的零元†是 $(0,0)$, 单位元†是 $(1,0)$. $\boldsymbol{R}^*=\{(a,0)|a\in\boldsymbol{R}\}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的子域†, 从 $\boldsymbol{R}$ 到 $\boldsymbol{R}^*$ 的映射 $\varphi(a)=(a,0)$ 给出了 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{R}^*$ 的作为域的同构†对应. 于是,如把 $\boldsymbol{R}$ 的元素 a 和 $\boldsymbol{R}^*$ 的元素 $(a,0)$ 看做是相同的，则 $\boldsymbol{C}$ 可以看做是 $\boldsymbol{R}$ 的扩域† ($\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$). 由此, $\boldsymbol{C}$ 的零元是实数 0, 其单位元是实数 1. 复数 $(0,1)$ 称为**虚数单位** (imaginary unit), 以记号 i 表示之. 于是,复数 (a,b) 即为 $a+bi$ (→复数).

【参】 [1] R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Friedrich Vieweg, Braunschweig, 1887 (英译本: Essays on the theory of numbers, Open Court, 1901); [2] R.Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg, Braunschweig 1872, (英译本: Essays on the theory of numbers, Open Court, 1901); [3] G. Cantor, Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann., 5 (1872), 123—132; [4] E. G. H. Landau, Grundlagen der Analysis, Akademische Verlag., Leipzig, 1934 (英译本: Foundations of analysis, Chelsea, 1960); [5] O. Perron, Irrationalzahlen, Walter de Gruyter, Berlin, 第四版 1960; [6] 藤原松三郎,代数学,第一卷,内田老鶴圃,初版 1931; [7] 河田敬義-竹内外史,自然数論,河出,修订版 1951; [8] 高木貞治,数の概念,岩波,1949; [9] 弥永昌吉-小平邦彦,現代数学概説 I, 岩波, 1961; [10] N. Bourbaki, Eléménts de mathématique, I Théorie des ensembles. ch 3, Actualites Sci. Ind., 1243b, 第二版 1967; III. Topologie générale ch. 4, 1143c, 第三版 1960; ch. 8, 1235b, 第三版 1963 (英译本: Theory of sets, Addison-Wesley, 1968; General topology pt. I, Addison-Wesley, 1966); [11] G. Peano, Arithmetices principia nova methodo exposita, Bocca, 1889 (Opere scelte II, Cremona, 1958); [12] G. Cardano, Artis magnae sive de regulis algebraicis, Nuremberg 1545; [13] W. R. Hamilton, Lectures on quaternions, Hodges and Smith, 1853.

实数 [英 real number 法 nombre réel 德 reelle Zahl 俄 вещественное число, действительное число 日 实数]

【实数的公理系统】 全体**实数**的集合以 $\boldsymbol{R}$ 表示. $\boldsymbol{R}$ 具有下列诸性质.

I) 关于四则运算的性质. i) 对于 $x,y\in\boldsymbol{R}$, 称为它们的和 $x+y$ 的数 $w\in\boldsymbol{R}$ 是唯一确定的, $x+y=y+x$ (交换律), $(x+y)+z=x+(y+z)$ (结合律)成立. 另外,有特别的数 0, 对于任意数 x, $x+0=x$ 成立 (0 的存在). 而且，对于 $x\in\boldsymbol{R}$, 有唯一的 $(-x)\in\boldsymbol{R}$, 使 $x+(-x)=0$. ii) 对于 $x,y\in\boldsymbol{R}$, 称为它们的积 xy 的数 $w\in\boldsymbol{R}$ 是唯一确定的, $xy=yx$ (交换律), $(xy)z=x(yz)$ (结合律), $(x+y)z=xz+yz$ (分配律)成立. 另外,有特别的数 1, 对于所有的数 $x\in\boldsymbol{R}$, $1\cdot x=x$ 成立 (1 的存在). 而且对于 $x\neq0(x\in R)$ 有唯一的 $x^{-1}\in\boldsymbol{R}$, 使 $x\cdot x^{-1}=1$. 由以上性质可知加、减、乘、除 (用 0 除除外) 的四则运算是可以实行的(即 $\boldsymbol{R}$ 是域†)

II) 关于序的性质. i) 对于 $x,y\in\boldsymbol{R}$,

$$x<y,\ x=y,\ x>y$$

之中恰有一个成立 (全序†性). 当 $x<y$ 或 $x=y$ 时写做 $x\leqslant y$. 关于序 $\leqslant$, 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$, 则 $x\leqslant z$ (可迁性) (即 $\boldsymbol{R}$ 是全序集†). ii) 序与运算. 若 $x\leqslant y$ 则 $x+z\leqslant y+z$. 又若 $x\leqslant y$, $0\leqslant z$, 则 $xz\leqslant yz$ (即 $\boldsymbol{R}$ 是有序域†).

特别是,当 $x>0$ 时, x 称为**正数** (positive number), 当 $x<0$ 时, x 称为**负数** (negative number). 又对于 $x\geqslant0$ 命 $|x|=x$, 对于

$x < 0$ 命 $|x| = -x$，则 $|x|$ 称为 x 的**绝对值** (absolute value).

III) 关于连续性的性质. 对于 $\boldsymbol{R}$ 的子集 A, B，设 $\boldsymbol{R} = A \cup B$，$A \cap B = \varnothing$（空集），且对于属于 A 的任意元素 a 及属于 B 的任意元素 b，恒有 $a < b$. 此时序对 (A, B) 称为 $\boldsymbol{R}$ 的**分割**（英 cut 德 Schnitt）. 对于 $\boldsymbol{R}$ 的任意分割 (A, B)，恒有 $x \in \boldsymbol{R}$，使得对所有的 $a \in A$，均有 $a \leqslant x$，对所有的 $b \in B$，均有 $b \geqslant x$（即 $x = \sup A = \inf B$）（这样的 x 是唯一确定的）. 这个性质称为 **Dedekind 连续性公理** (Dedekind's axiom of continuity).

由以上三个性质 I), II), III)，实数集 $\boldsymbol{R}$ 除同构外是唯一确定的. 在实数集 $\boldsymbol{R}$ 中，由 1 生成的加法子群 $\{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm n, \cdots\}$ 和整数集 $\boldsymbol{Z}$，特别是，正整数集 $\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 和自然数集 $\boldsymbol{N}$，另外，由 1 生成的子域 $\{m/n | m, n \in \boldsymbol{Z}, n \neq 0\}$ 和有理数集 $\boldsymbol{Q}$，分别可以看成是同一的. 非有理数的实数称为**无理数** (irrational number).

【实数的性质】 1) 对于任意二正数 a, b，必有一个自然数 n，使 $a < nb$ (**Archimedes 公理**).

2) 对于任意二数 a, b，必有有理数 x，使 $a < x < b$ (**有理数的稠密性**).

3) 对于 R 的上方有界†(或下方有界)子集 A，必有上确界† $a = \sup A$（或下确界 $b = \inf A$）.

对于数列 $\{a_n\}$ 及任意正数 c，如果对于从某项以后的所有项 a_n 恒有 $|a_n - b| < c$，则写做 $\lim a_n = b$（或 $a_n \to b$）. b 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限，也称 a_n 收敛于 b.

4) 二数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 之间，如有 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1$，且 $\lim (b_n - a_n) = 0$，则有（唯一的）$c \in \boldsymbol{R}$，使 $\lim a_n = \lim b_n = c$ (**区间套原理** (principle of nested intervals)).

5) 对于数列 $\{a_n\}$ 及任意正数 c，如果对于从某项以后的所有项 a_n, a_m 恒有 $|a_n - a_m| < c$，则 $\{a_n\}$ 称为基本序列或 Cauchy 序列. 实数的基本序列必有极限 (**实数的完备性** (completeness of real numbers)).

反之，对于具有性质 I), II) 的集合 $\boldsymbol{R}$ 而言，III), 3), 1) 及 4), 1) 及 5) 是相互等价的条件.

【区间】 对于二数 a, b（其中 $a < b$），$(a, b) = \{x | a < x < b\}$，$(a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}$，$[a, b) = \{x | a \leqslant x < b\}$，$[a, b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为(**有限**)**区间** (finite interval)，a 称为区间的**左端** (left endpoint)，b 称为区间的**右端** (right endpoint). (a, b) 称为**开区间** (open interval)，$[a, b]$ 称为**闭区间** (closed interval). 再引入记号 ∞，$-\infty$，对于所有实数 x，规定 $\infty > x$，$x > -\infty$，$\infty > -\infty$. ∞ 也写做 $+\infty$. $+\infty$，$-\infty$ 分别称为**正无穷大** (positive infinity)，**负无穷大** (negative infinity). 推广区间的意义，写做 $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$，$(-\infty, b] = \{x | x \leqslant b\}$，$(a, \infty) = \{x | a < x\}$，$[a, \infty) = \{x | a \leqslant x\}$，$(-\infty, \infty) = \boldsymbol{R}$. 这些称为**无限区间** (infinite interval).

对于数列 $\{a_n\}$，如果在任意无限区间 (a, ∞)（或 $(-\infty, a)$）中均含有从某项以后的所有项 a_n，则写做 $a_n \to \infty$（或 $a_n \to -\infty$），∞（或 $-\infty$）称为 a_n 的极限，使用与前边同样的记号 $\lim a_n$.

【实数集 $\boldsymbol{R}$ 的拓扑】 若将 $\boldsymbol{R}$ 的开区间 (a, b) 的全体作为开集的基†，则 $\boldsymbol{R}$ 是拓扑空间†（序拓扑†）. $\boldsymbol{R}$ 满足分离公理† $\boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_3, \boldsymbol{T}_4$. $\boldsymbol{R}$ 以及任意的（有限及无限）区间是连通†的. 有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中是稠密的. $\boldsymbol{R}$ 的子集 F 是紧的，其充分必要条件为 F 是有界闭集 (**Weierstrass 定理**). 特别是，有限闭区间是紧的，$\boldsymbol{R}$ 是局部紧的，满足第二可数公理. 再者，任意的（有限或无限）开区间和 $\boldsymbol{R}$ 是同胚的. $\boldsymbol{R}$ 的拓扑也可以用收敛来定义（→收敛）.

实数的运算是连续的：若 $a_n \to a$，$b_n \to b$，则 $a_n + b_n \to a + b$，$a_n - b_n \to a - b$，$a_n b_n \to ab$，$a_n / b_n \to a/b$（其中 $b \neq 0$，$b_n \neq 0$）. 即 $\boldsymbol{R}$ 是连续域（实数集 $\boldsymbol{R}$ 作为拓扑群及拓扑域时的特征→拓扑 Abel 群）.

$\boldsymbol{R}$ 关于加法的拓扑 Abel 群和正实数全体 $\boldsymbol{R}^+$ 关于乘法的拓扑 Abel 群是同构的. 即存在

满足下列条件的同胚 f 和 g，$f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$，$f(x+y)=f(x)f(y)$，$g:\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$，$g(xy)=g(x)+g(y)$．若令 $f(1)=a$，$g(b)=1$，则有 $f(x)=a^x$，$g(x)=\log_b(x)$．

将 $\boldsymbol{R}$ 看做是关于加法的拓扑 Abel 群时，其真闭子群 Γ 全是离散的，且和整数加法群 $\boldsymbol{Z}$ 同构．即有某个 $c>0$，使 $\Gamma=\{nc \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$．特别是，商群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 和圆周旋转群（一维环面群†）是（作为拓扑群）同构的．$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 称为**以 1 为模的实数加法群**（module of real numbers mod 1）．

【实数直线】 若在 Euclid 直线 l 上确定坐标原点 p_0 及单位点 p_1，则必存在从 l 上全点体的集合 L 到实数集 $\boldsymbol{R}$ 的双射 φ，满足 1) $\varphi(p_0)=0$，$\varphi(p_1)=1$；2) 若 p 在 q 的左方，则 $\varphi(p)<\varphi(q)$；3) 关于二线段 pq 及 $p'q'$（其中 p 在 q 之左，p' 在 q' 之左），$pq\equiv p'q'$（叠合†）$\Leftrightarrow \varphi(q)-\varphi(p)=\varphi(q')-\varphi(p')$．而且这个双射 φ 是唯一的．此时 $\varphi(p)$ 称为点 p 的**坐标**（coordinate），(p_0, p_1) 称为直线 l 的**标架**（frame）．确定了标架的 Euclid 直线 l 称为**实线**（real line）．实线（由于上面列举的映射 φ，可看做和 $\boldsymbol{R}$ 是相同的）通常和实数集用同样记号 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{R}^1$ 表示之．

【参】［1］ 高木貞治，解析概論，岩波，第三版 1961；［2］高木貞治，数の概念，岩波，1950；［3］功力金二郎，解析学要論，弘文堂，1951；［4］ 能代清，极限論と集合論，岩波，1944；［5］ 小松勇作，無理数と極限，東海書房，1948；［6］ 亀谷俊司，初等解析学 I，岩波全書，1953；［7］ N. Bourbaki, Topologie générale, 第三分册, chap. V Nombres réels, Hermann, 1940, 再版 1952, 第三版 1960（英译本：General topology pt. I, Addison-Wesley, 1966）；［8］ R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg, Braunschweig, 1872；［9］ O. Perron, Irrationalzahlen, Teubner, 第二版 1939；［10］ J. Dieudonné, Foundations of modern analysis, Academic Press, 1960, enlarged and corrected printing, 1969.

另→集合的［参］．

复数 ［英 complex number 法 nombre complexe 德 Komplexe Zahl 俄 комплексное число 日 複素数］【复数的代数性质】 用任意实数 a，b 及**虚数单位**（imaginary unit）i 表示为 $a+ib$ 这种形式的数称为**复数**．在 $\alpha=a+ib$，$\beta=c+id$ 之间，有 $\alpha=\beta \Leftrightarrow a=c$ 且 $b=d$．复数的运算定义如下：$\alpha+\beta=(a+c)+i(b+d)$，$\alpha-\beta=(a-c)+i(b-d)$，$\alpha\beta=(ac-bd)+i(ad+bc)$，$\alpha/\beta=(ac+bd)/(c^2+d^2)+i(ad-bc)/(c^2+d^2)$（其中 $c^2+d^2\neq 0$）．关于加法和乘法，交换律、结合律、分配律成立，并构成以 $0=0+i0$ 为加法的零元，以 $1=1+i0$ 为乘法的单位元的交换域†．通常以 $\boldsymbol{C}$ 表示复数的全体．

若令实数 a 对应复数 $a+i0$，则实数的运算和复数的运算是一致的．即实数全体构成的域 $\boldsymbol{R}$ 可同构映射到复数全体的域 $\boldsymbol{C}$ 中．今后将 a 和 $a+i0$ 看做是相同的，$\boldsymbol{R}$ 看做是 $\boldsymbol{C}$ 的子集（子域）．同样地，今后将 $0+i1$ 简单地表示为 i．由上述定义 $i^2=-1$．又因 $\alpha=a+ib=(a+i0)+(b+i0)(0+i1)$，故 $a+ib$ 不只是记号，也可以看做是 $\boldsymbol{C}$ 中的运算的结果．在 $\alpha=a+ib$ 中，a 称为 α 的**实部**（real part），b 称为 α 的**虚部**（imaginary part），用 $a=\Re\alpha$（或 $\operatorname{Re}\alpha$），$b=\Im\alpha$（或 $\operatorname{Im}\alpha$）表示之．非实数的复数称为**虚数**（imaginary number），特别是，$\Re\alpha=0$ 的复数 α 称为**纯虚数**（pure imaginary number）．对于复数 $\alpha=a+ib$，$a-ib$ 称为 α 的**共轭复数**（conjugate complex），以 $\bar{\alpha}$ 表示之．$\overline{\alpha+\beta}=\bar{\alpha}+\bar{\beta}$，$\overline{\alpha\beta}=\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$ 成立，映射 $\alpha\to\bar{\alpha}$ 是使 $\boldsymbol{R}$ 的元素不动的 $\boldsymbol{C}$ 的自同构．再者，可以表示为 $\Re\alpha=(\alpha+\bar{\alpha})/2$，$\Im\alpha=(\alpha-\bar{\alpha})/2i$．

当将复数域 $\boldsymbol{C}$ 看做实数域 $\boldsymbol{R}$ 的扩域时，$\boldsymbol{C}$ 是在 $\boldsymbol{R}$ 上添加不可约方程 $x^2+1=0$ 的根 i 得到的二次扩域．复数域 $\boldsymbol{C}$ 的重要的代数性质是 $\boldsymbol{C}$ 为代数闭域†．即对于以 $\boldsymbol{C}$ 的元素为系数的任意高于零次的多项式 $f(x)$，代数方程 $f(x)=0$ 在 $\boldsymbol{C}$ 中必定有根（代数学基本定理†，C. F. Gauss）．

【复数的拓扑】 对于复数 $a+ib$，它的**绝对值**或**模**（absolute value, modulus）$|\alpha|$ 由 $|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$ 定义之．当 α 为实数时，$|\alpha|$ 和实数的绝对值是一致的．恒有 $|\alpha|\geqslant 0$，且仅限于 $\alpha=0$ 时才有 $|\alpha|=0$．对于任意复数 α，β，$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|$，$|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ 以及 $|\alpha|=|\bar{\alpha}|$ 成立．

α，β 的距离 $\rho(\alpha,\beta)$ 若由 $\rho(\alpha,\beta)=|\alpha-$

$\beta|$ 定义时，则 $\rho(\alpha,\beta)$ 满足距离函数公理，故 $\boldsymbol{C}$ 成为度量空间[†]. 特别是，$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha_0 \Leftrightarrow \lim\rho(\alpha_n,\alpha_0)=0 \Leftrightarrow \lim|\alpha_n-\alpha_0|=0 \Leftrightarrow \lim a_n=a_0$ 且 $\lim b_n=b_0$（其中设 $\alpha_n=a_n+ib_n$, $\alpha_0=a_0+ib_0$）. 由此可知（和实数全体的集合 $\boldsymbol{R}$ 同样）$\boldsymbol{C}$ 是局部紧[†]完备[†]度量空间.

又，就这个拓扑而言（除了以零除以外）四则运算是连续的：若 $\alpha_n\to\alpha_0$ 且 $\beta_n\to\beta_0$，则 $\alpha_n+\beta_n\to\alpha_0+\beta_0$, $\alpha_n-\beta_n\to\alpha_0-\beta_0$, $\alpha_n\beta_n\to\alpha_0\beta_0$, $\alpha_n/\beta_n\to\alpha_0/\beta_0$（其中在最后的情形设 $\beta_n\neq0$, $\beta_0\neq0$）. 于是 $\boldsymbol{C}$ 是拓扑域. 再者，$\alpha\to\bar{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{C}\to\bar{\boldsymbol{C}}$ 的连续映射（同胚自同构）.

【复数平面】 在引入正交坐标的平面上，用坐标为 (a,b) 的点表示复数 $\alpha=a+ib$ 时，这个平面称为**复数平面**或者简称为**复平面**(complex number plane)，**Gauss-Argand 平面**，或 **Gauss 平面** (Gaussian plane)（图 1）. 表示 α 的点简称为点 α，横轴、纵轴分别称为**实轴**(real axis)、**虚轴** (imaginary axis). 关于以原点为极，以实轴为极轴的极坐标而言，设点 α 的坐标为 r,θ，则 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 等于 α 的绝对值 $|\alpha|$，而 θ 称为 α 的**辐角** (argument, amplitude)，以 $\arg\alpha$ 表示之. 在 $\alpha\neq0$ 时，如以 2π 为模则辐角是唯一确定的，对于 $\alpha=0$，辐角是完全任意的实数.

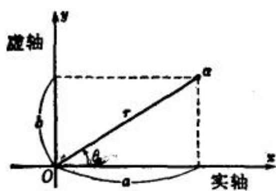


图 1

如果用自原点至点 α 的向量表示复数 α，则 $|\alpha|$ 表示向量 α 的长度. 复数 α,β 的和 $\alpha+\beta$ 对应于向量 α,β 的和. α 用其绝对值 r 和辐角 θ 可以表示为 $\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$. 称之为 α 的**极形式** (polar form). $\bar{\alpha}=r(\cos\theta-i\sin\theta)=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$, $\alpha^{-1}=\bar{\alpha}/|\alpha|^2=r^{-1}(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta))$ $(\alpha\neq0)$，以及 $\alpha_1\alpha_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))$（其中设 r_j 为 α_j 的绝对值，θ_j 为其辐角）. 由此，有 $\arg\alpha_1\alpha_2\equiv\arg\alpha_1+\arg\alpha_2 \pmod{2\pi}$, $\arg\bar{\alpha}=\arg\alpha^{-1}=-\arg\alpha$. 特别是，$\alpha^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$. $r=1$ 的情形称为 **de Moivre 公式**. 在 $\boldsymbol{C}$ 中，1 的 n 次根由 $\rho_j=\cos 2\pi j/n+i\sin 2\pi j/n$ $(j=0,1,2,\cdots,n-1)$ 给出（图 2）.

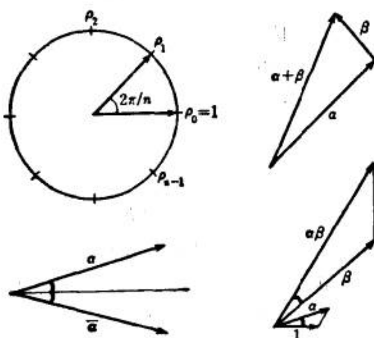


图 2

在复数平面上，$\alpha\to\bar{\alpha}$ 是关于实轴的反射，$\alpha\to\alpha+\beta$ 是沿向量 β 的方向的平行移动，$\alpha\to\alpha\beta$ 是将 α 旋转 $\arg\beta$，再放大 $|\beta|$ 倍的相似变换，$\alpha\to\bar{\alpha}^{-1}$ 则是关于**单位圆**(unit circle) $\{\alpha\,|\,|\alpha|=1\}$ 的反演.

复数域 $\boldsymbol{C}$ 中的距离 $\rho(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ 和复数平面上的二点 α,β 在 Euclid 平面上的的距离是一致的. 即复数域 $\boldsymbol{C}$ 和 Euclid 平面是等距的. 从而 $\boldsymbol{C}$ 的拓扑和 Euclid 平面的拓扑是同胚的.

【复数球面】 以复数平面 P 的原点 O 为中心，以 1 为半径的球面 Σ，它和 P 相交于以 O 为中心的单位圆，Σ 上的二点 $N(0,0,1)$, $S(0,0,-1)$ 分别称为**北极** (north pole)，**南极** (south pole)（图 3）. 这里，坐标是空间的正交坐标，第 1、第 2 坐标轴则为 P 的实轴、虚轴. 连结 P 上的点 z（z 是复数）和 N 的直线与 Σ 在 N 以外的点 $Z=(x_1,x_2,x_3)$ 处相交. 这里，$z=(x_1+ix_2)/(1-x_3)$, $x_1=(z+\bar{z})/(1+|z|^2)$, $x_2=(z-\bar{z})/i(1+|z|^2)$, $x_3=(|z|^2-1)/(|z|^2+$

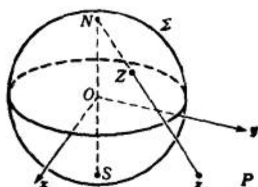


图 3

1). 这个对应 $z \to Z$ 称为从 N 的**球极平面射影**(stereographic projection). 它使 P 和 $\Sigma - \{N\}$ 成保角对应. 因此,当用 $\Sigma - \{N\}$ 的点 Z 表示复数 z 时,Σ 称为**复数球面** (complex sphere) 或 **Riemann 球面** (Riemann sphere). 相应于被排除的点 N,可把一个新元素添加于复数平面 P 上,称之为 P 的**无穷远点** (point at infinity),以记号∞表示之. 对包含∞的复数平面,可根据复数球面的拓扑而引入它的拓扑. 即作为∞的基本邻域系,可取形如 $\{z \mid |z| > M\} \cup \{\infty\}$ 的集合. 在此邻域中若取 $\zeta = 1/z$ 为局部复坐标,则上述这些基本邻域系可以表示为 $\{\zeta \mid |\zeta| < M^{-1}\}$. 其中在∞处设 $\zeta = 0$. 如此规定时,复数球面可以看做是 Riemann 面(即一维复流形).

在复数平面、复数球面上,当以 z 和 w 表示其变数时,相应地称为 **z 平面** (z-plane), **w 平面**(w-plane), **z 球面** (z-sphere), **w球面** (w-sphere).

【线性分式函数】 给定满足 $ad - bc \neq 0$ 的复常数 a, b, c, d 时,形如

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{1}$$

的函数称为**线性分式函数** (linear fractional function) 或简称为**线性函数** (linear function). 当将它看做是由 z 球面到 w 球面的映射时,称为 **Möbius 变换** (Möbius transformation), **线性分式变换** (linear fractional transformation) 或者简称为**线性变换** (linear transformation). 通常的线性变换是当 $c = 0$ 时的特例,为了区别,也可将这种情形特别称为**整线性变换** (德 ganzlineare Transformation). 若 $a:b:c:d$ 相同,则(1)表示同一变换,故取 $ad - bc = 1$ 并不失其一般性.

(1) 除仅在一点 $-d/c$ ($c = 0$ 时为∞)处具有一阶的极点以外,在全 z 球面上是全纯的单叶函数†,其反函数也是线性函数. 线性变换的全体,就变换的合成而言构成群†. 模群†是它的一个子群.

如果将复数平面上的直线也看做是一种圆,则线性变换把任意的圆映射为圆,故这个变换成为**圆圆对应**(德 Kreisverwandtschaft). 设在平面上有以 O 为中心以 r 为半径的一个圆和二点 P, P', 如果 O, P, P' 按此顺序在一直线上,且有 $OP \cdot OP' = r^2$ 成立,则称 P, P' 关于这个圆对称,或者说处在**反射** (德 Spiegelungsbild) 的位置上. 使 P 移到 P' 的变换称为关于这个圆的**反演** (inversion), O 称为**反演中心**, r 称为**反演半径**. 设 z, z' 是关于复数平面上的圆 C 而对称的二点,线性变换把 C, z, z' 变为 D, w, w', 则 w, w' 是关于 D 对称的(**反射原理** (principle of reflection)). 故在线性变换下对称性是不变的,又四点 z_1, z_2, z_3, z_4 的非调和比†

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z_1 - z_3)/(z_1 - z_4) : (z_2 - z_3)/(z_2 - z_4)$$

在线性变换下不变. 即若 z_i 的像为 $w_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (w_1, w_2, w_3, w_4)$.

【标准型】 若除 $w = z$ 的情形不计,则变换(1)的不动点,即满足 $z = (az+b)/(cz+d)$ 的点,可有两个或有一个,对于有两个的情形以 p, q 表示之,只有一个的情形可看做 $p = q$. 当 $c = 0$ 时,p 或 q 是 ∞,当 $c = a - d = 0$ 时,则 p, q 都是 ∞.

当 p, q 为相异的有限点时,(1)可以变形为标准型

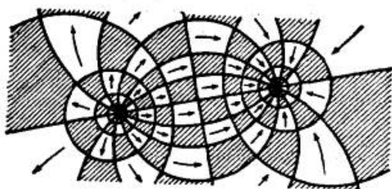
$$\frac{w - p}{w - q} = \alpha \frac{z - p}{z - q}, \quad \alpha = \frac{a - cp}{a - cq} \neq 1.$$

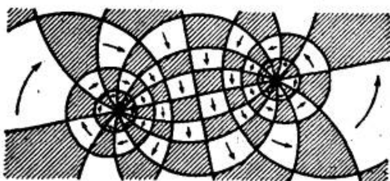
在这个变换里,当 $\arg \alpha = 0$ 时 (1) 称为**双曲变换** (hyperbolic transformation) (图 4), 当 $|\alpha| = 1$ 时,称为**椭圆变换** (elliptic transformation) (图 5), 在其它情形则称为**斜驶变换** (loxodromic

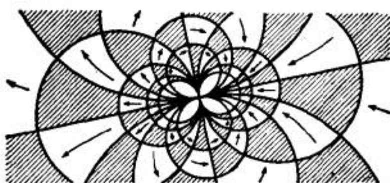
transformation). 这个分类在 p 是有限而 $q=\infty$ 时,即 $w-p=\alpha(z-p)$ 时也适用. 当 $p=q$ 时,若 p 为有限,(1) 可改写如下:

$$\frac{1}{w-p}=\frac{1}{z-p}+\beta,\ \beta=\frac{c}{a-cp}.$$

此时(1)称为**抛物变换** (parabolic transformation)(图 6). 这个名称当 $p=q=\infty$ 时, 即 $w=z+\beta$ 时也适用. (1) 是属于哪一类呢? 如令 $ad-bc=1$, 消去 $z=(az+b)/(cz+d)$ 的分母, 得到二次方程 $cz^2-(a-d)z-b=0$, 我们可用它的判别式 $D=(a+d)^2-4$ 而简易地作出判断. 即当 $a+d$ 为实数时, 根据 $D>,<,=0$, (1) 便分别是双曲、椭圆、抛物的,若 $a+d$ 不是实数,则是斜驶的.


图 4 双曲变换


图 5 椭圆变换


图 6 抛物变换

设 D, D' 为任意两个圆盘,从 D 到 D' 的一一保角映射†的线性函数是恒存在的,且具有这个性质的函数只限于线性函数.(这时以一条直线和无穷远点作为边界所包含的半平面也看做是一个闭圆盘.)而且如果指定 D 的边界上的三点 a, b, c 分别对应于 D' 的边界点 a', b', c', 则这个变换是唯一确定的.

【Poincaré 度量】 因为从 $|z|<1$ 到 $|w|<1$ 的保角映射的变换为 $w=\varepsilon(z-z_0)/(1-\bar{z}_0z)$ ($|\varepsilon|=1$, $|z_0|<1$) (→公式 13), 故在对应的 z 和 w 之间,

(2) $\quad |dw|/(1-|w|^2)=|dz|/(1-|z|^2)$

成立. $|dz|/(1-|z|^2)$ 称为 **Poincaré 微分不变式** (Poincaré's differential invariant). 现在在单位圆盘 $|z|<1$ 内,考虑线素†是由 $ds=|dz|/(1-|z|^2)$ 给出的度量,则在此度量之下 $|z|<1$ 是 Лобачевский 的非 Euclid 空间†, 这个度量称为 **Poincaré 度量** (Poincaré metric). 又根据 Poincaré 微分不变式, 变换 (2) 不改变曲线的长度, 故可以看做是这个空间的运动†. 这时, 连结单位圆内给定的二点 z_1, z_2 的测地线†便是和单位圆周相正交的圆弧.设这个圆弧和单位圆周的交点为 z_3, z_4, 若按 z_4, z_1, z_2, z_3 这个顺序排列在圆周上, 则 z_1 到 z_2 的测地线的非 Euclid 长度是由 $\frac{1}{2}\log(z_1, z_2, z_3, z_4)$ 给出的(→非 Euclid 几何学).

【参】 [1] 辻正次, 函数論, 上, 下, 朝倉, 1951; [2] 小松勇作, 等角写像論, 上卷,共立出版 1944; [3] 黑須康之介, 複素数, 培風館, 1959; 关于引进复数的历史及对初等几何的应用, 有 [4] N. Bourbaki, Eléments de mathématique III, Topologie générale ch. 8. Nombers complexes, Actualités Sci. Ind., 1235b, Hermann, 第三版, 1963 (英译本: General topology, pt. 2, Addison-Wesley, 1966); [5] L. V. Ahlfors, Complex analysis, McGraw-Hill., 第二版, 1966; [6] 小松勇作, 複素数とその函数, 平凡社, 1950, 关于线性变换, 有 [7] C. Carathéodory, Funktionentheorie, I, Birkhäuser, Basel, 1950; [8] L. R. Ford, Automorphic functions, McGraw-Hill, 1929 (Chelsea, 1951); [9] 松本敏三, 一次函数, その応用, 富山房, 1940.

序 [英 order 法 ordre 德 Ordnung 俄 порядок, упорядоченность 日 順序] 【序关系】 序是从数的大小 $\leqslant$, 集合的包含 $\subset$ 等关系中抽象出来的概念.在考虑的范围内,满足下列三个条件的关系 $\leqslant$ 称为**序**或**序关系** (order relation) 或者说**半序** (semi-order, partial order). 1) **自反律** (reflexive law) $x\leqslant x$; 2) **反对称律** (antisymmetric law) 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$, 则 $x=y$; 3) **可迁律** (transitive law) 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$,

则 $x \leqslant z$.

其元素间已定义了序的集合X称为**序集**或**有序集** (ordered set) 或**半序集** (semi-ordered set, partially ordered set). 对于序集A的任意两元素 x, y, 若恒有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$, 则 $\leqslant$ 称为**全序** (total order) 或**线性有序** (linear order), A称为**全序集** (totally ordered set) 或**线性有序集**(linearly ordered set). 序集A的子集,关于A的序仍然可以看做是序集.

$x \leqslant y$ 也写做 $y \geqslant x$, 二元关系$\geqslant$也称为$\leqslant$的**对偶**(dual),它也是序. 一般说来,关于序的概念、条件、命题等,如将序换为它的对偶,所得到的概念、条件、命题等称为原来的对偶. 例: 当 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$ 时, 写做 $x < y$; 当 $x \geqslant y$ 且 $x \neq y$ 时,写做 $x > y$. $>$ 是 $<$ 的对偶. 关于序的某个一般的命题若为真,它的对偶也是真的. 这个事实称为关于序的**对偶原理** (duality principle). 再者, 由上述定义, $x \leqslant y$ 和"$x < y$ 或 $x = y$"是等价的.

【诸定义】 在序集中,形如 $\{x|a<x<b\}$ 的子集以 (a, b) 表示之, (a, b) 以及形如 $\{x|x<a\}$, $\{x|x>a\}$ 的集合称为**区间** (interval). 特别是, $S(x)=\{x|x<c\}$ 称为由 c 确定的**截段** (英 segment 德 Abschnitt). $a \leqslant b$ 时 a, b 的对称为**商** (quotient), 有时写做 b/a.

当 $a<c<b$ 时, 称为 c 在 a, b **之间** (between). 特别是,当全序集中相异二元之间必有其它元素时,称该全序集是**稠密的** (dense). 当 $a<b$ 而 a, b 之间没有元素时, a 称为 b 的**紧接前** (immediately before) 元, b 称为 a 的**后继元**或**紧接后** (immediately after) 元. 如此,关于数的大小,前后的顺序等术语,对一般的序也经常使用.

在序集A中, 当对于子集X的所有元素x, 均有 $x \leqslant a$ 时, a 称为X的**上界** (upper bound). 当有这样的 a 时,X称为**上方有界的**(bounded to the above). 其对偶是**下界**(lower bound), **下方有界的**(bounded to the below). 当上下方都有界时简称为**有界的** (bounded). 当 a 是X的上界,且 $a \in X$ 时, a 称为X的**最大元**(maximum element), 这样的 a (如果存在)是唯一确定的,以 $\max X$ 表示之. 其对偶是**最小元** (minimum element), $\min X$. 在X的上界的集合中若有最小元,便称之为X的**最小上界** (least upper bound) 或**上确界** (supremum), 写做 l. u. b. X 或 $\sup X$. 其对偶是**最大下界** (greatest lower bound) 或**下确界** (infimum), 写做 g. l. b. X 或 $\inf X$.

设X是在某个映射[†] φ 之下某个集 Λ 的象 $\varphi(\Lambda)$, 当 Λ 表示为$\{\lambda|C(\lambda)\}$的形式时, $\sup X$ 写做 $\sup\limits_{C(\lambda)} \varphi(\lambda)$, 称为对于满足 $C(\lambda)$ 的 λ 而言 $\varphi(\lambda)$ 的上确界. 在不致误解时, 亦可写做 $\sup\limits_{\lambda} \varphi(\lambda)$, $\sup \varphi(\lambda)$ 等,而简称为 $\varphi(\lambda)$ 的上确界. 关于 inf, Max, min 等也同样.

对于集合 X 的元素 a 和 X 的任何元素 x, $a<x$ 都不成立时, a 称为X的**极大元** (maximal element),其对偶是**极小元** (minimal element). 若有最大(小)元,它便是唯一的一个极大(小)元. 一般地, 极大(小)元即使存在也不一定是唯一的.

【链条件】 当序集X的任意非空子集都具有极小元时,称为X满足**极小条件** (minimal condition). 它的对偶称为**极大条件** (maximal condition). 在序集 X 中, 其元素的无限序列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ 如果满足 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$, 便称为**升链** (ascending chain), 在X中不存在任何升链的条件称为**升链条件**(ascending chain condition). 升链及升链条件的对偶称为**降链** (descending chain) 及**降链条件** (descending chain condition). 这两个条件合称为**链条件** (chain condition). (若应用选择公理[†],则)极大条件和升链条件以及极小条件和降链条件分别是等价的.

当全序集X满足极小条件时, 即X的任意非空子集都具有最小元时,X称为**良序集** (well-ordered set), 它的序称为**良序** (well-order). 良序集的子集还是良序集. 良序集的对偶称为**逆良序集** (inversely well-ordered set).

关于良序集X的元素 x 的某个命题 $P(x)$, 设 i) 对于 X 的最小元 x_0, $P(x_0)$ 是真的; ii)

对于X的任意元素x而言，只要对于$y<x$的所有元素$y\in X$，$P(y)$是真的，则$P(x)$也是真的。这时，$P(x)$对于X的所有元素x都是真的。这个定理叫做**超限归纳法**（transfinite induction）。当X为自然数全体组成的集合时，它便是数学归纳法。为了定义从良序集X到集合Y的映射F，设 i) 对于X的最小元x_0，$F(x_0)$有定义；ii) 对应于X的元素x的截段记为$S(x)$，对于任意的x都给出一个方法，它使定义域为$S(x)$的任意映射$f:S(x)\to Y$，都唯一地对应于Y的某个元素$G(f)$，则有唯一的映射$F:X\to Y$，对于所有的x，使得$F(x)=G(F|S(x))$成立。这样定义F称为**依超限归纳法的定义**（definition by transfinite induction）。这些在关于序数的命题及序数的函数上往往会用到（→序数）。

【有向集】 其任意有限子集都是上方有界的那种序集称为**有向集**（英 directed set 法 ensemble supérieurement filtrant）。设B为有向集A的子集。如果对于A的所有元素a，$\{b|b\geqslant a\}\cap B\neq\varnothing$，则称$B$在$A$中是**共尾的**（cofinal）。这时$B$也是有向集。如果对于$A$的某个元素$a$，有$\{b|b\geqslant a\}\subset B$，则称$B$在$A$中是**同尾的**（residual）。这时$B$在$A$中也是共尾的。$B$在$A$中共尾和$A-B$在$A$中不同尾是等价的。

【同态】 序集A到序集A'上的映射φ：$A\to A'$，当若$a\leqslant b$则必有$\varphi(a)\leqslant\varphi(b)$时，称为序集的**同态**（homomorphism）或**序同态**（order homomorphism），且当φ是一一对应而φ^{-1}也是A'到A上的同态时，φ称为**同构**（isomorphism）或**序同构**（order isomorphism）。当使$A'=\varphi(A)$的同态φ或同构φ存在时，相应地称为A'**（序）同态**（homomorphic）或**（序）同构**（isomorphic）于A。又映射$\varphi:A\to A'$，当若$a\leqslant b$则有$\varphi(a)\geqslant\varphi(b)$时，称为**对偶（序）同态**（dual homomorphism），且当φ为双射，φ^{-1}也是对偶同态时，称为**对偶（序）同构**（dual isomorphism）。

【直和与直积】 设集合S是其子集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的直和†，各子集$A_\lambda$中有确定的序。对于$a,b\in S$，如有$\lambda\in\Lambda$，使$a,b\in A_\lambda$，且按$A_\lambda$的序有$a\leqslant b$时，则定义$a\leqslant b$。如此得到的序集$S$称为序集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的**直和**（direct sum）。对于序集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的直积集† $P=\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$的二元素$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，$(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$，如关于任意的$\lambda\in\Lambda$，均有$a_\lambda\leqslant b_\lambda$，则定义$(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\leqslant(b_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$。如此得到的序集$P$称为序集族$\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的**直积序集**（direct product ordered set）。

【序和与序积】 对于两两不相交的序集族$\mathfrak{A}=\{A,B,\cdots\}$，若$\mathfrak{A}$本身又是序集，则可以在直和集† $S=\sum X(X\in\mathfrak{A})$中，定义序$\leqslant$如下。在$S$中所谓$x\leqslant y$是指 1）有$A$，使$x$，$y\in A\in\mathfrak{A}$，而按$A$的序有$x\leqslant y$，或者 2）有$A$，$B$，使$x\in A\in\mathfrak{A}$，$y\in B\in\mathfrak{A}$，而$A<B$。用这种方法得到的序集称为由$\mathfrak{A}$构成的**序和**（ordered sum），通常用$\sum_{\mathfrak{A}}X$表示之。特别是，当$\mathfrak{A}=\{A,B\}$，而$A<B$时，其序和以$A+B$表示之。

设有序集的直积集$\prod_\lambda X_\lambda$及其子集X，其指标集Λ是序集，对于X的任意相异元素$x=\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$y=\{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\Lambda$的子集$\{\lambda|x_\lambda\neq y_\lambda\}$必有最小元。这时，若对于$\{\lambda|x_\lambda\neq y_\lambda\}$的最小元$\mu$，有$x_\mu<y_\mu$，则规定$x<y$，这样所得到的$X$的序，称为$X$的**字典式序**（lexicographic order）。若Λ为良序集，命$X=\prod_\lambda X_\lambda$，则$X$称为$\{X_\lambda\}$的**序积**（ordered product）。对于序集A，B，$\cdots$，设$X_1=A$，$X_2=B$，$\cdots$，关于序$1<2<\cdots$构成的序积通常用$AB\cdots$表示之，其中的序称为直积$A\times B\times\cdots$的字典式序。

【伪序集】 在集合X的元素之间的关系xRy，当自反律及可迁律成立，而反对称律未必成立时，称为**伪序**（pseudo-order）或**前序**（preorder）。例如，对于实数对(x,y)，如令$x_1\leqslant x_2\Leftrightarrow(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$，则得到一个伪序。在伪序$xRy$中，若规定$x\sim y\Leftrightarrow(xRy$且$yRx)$，则$\sim$是集合$X$中的一个等价关系。由这个等价关系所得的商集设为$[X]=X/\sim$，对于$x$，$y\in X$的等价类$[x]$，$[y]$，若定义$[x]\leqslant$

$[y] \Leftrightarrow xRy$，则 $\leqslant$ 是 $[X]$ 的序关系．当在伪序集 X 中任意有限子集都上方有界时，X 称为**伪有向集** (pseudo-directed set)．另一结构，范畴和函子．

【参】［1］ N. Bourbaki, Eléments de mathématique, I. Théorie des ensembles, ch. 3, Actualités Sci. Ind., 1243b, Hermann, 第二版 1967 (英译本: Theory of sets, Addison-Wesley, 1968);［2］ G. Birkhoff, Lattice theory, Amer. Math. Soc. colloq. Publ., 1940, 修订版 1948.
另一集合的[参].

序数 ［英 ordinal number 法 nombre ordinal 德 Ordinalzahl 俄 порядковое число, трансфинитное число 日 順序数］ 当序集† A，B 是序同构†时写做 $A \cong B$．这时 $\cong$ 是等价关系．依此 $\cong$ 来分类，各类称为**序型** (order type)．序集 A 所属的类称为 A 的序型．在历史上，序数首先是作为良序集的序型定义的．但已经知道，如果将上面那样定义的序型看做集合，则在集合论里发生矛盾，故现在认为序数的上述定义是危险的．J. von Neumann 给出了下面所叙述的序数的定义．因这样的危险性在基数†的定义中也存在，故为了避免它的危险性便(象后面叙述的那样)利用序数而给出基数的定义．

【序数的定义】 满足下列条件 1)，2) 的集合 α 称为**序数**：1) 当将 $\in$ 表示的二元关系作为序时 α 是良序集†；2) 若 $\beta \in \alpha$，则 $\beta \subset \alpha$．

根据这个定义，空集是序数．以 0 表示之．又 $1 = \{0\}$，$2 = \{0, 1\}$，$3 = \{0, 1, 2\} \cdots$ 是序数．这些本身为有限集的序数称为**有限序数** (finite ordinal number)．有限序数和自然数(包括 0)可以看做是相同的．自然数全体的集合 $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 也是序数，像 ω 这样的其本身为无限集的序数称为**超限序数** (transfinite ordinal number)．

对于任意良序集 A，和 A 序同构的序数是唯一存在的．该序数称为 A 的序数．

在本条中用小写希腊字母表示序数．

将 $\alpha \in \beta$ 以 $\alpha < \beta$ 表示之，根据它定义序数的大小．0 是最小的序数，有限序数的大小和普通的大小关系一致．又，ω 是最小的超限序数．当 $\alpha < \beta$ 或 $\alpha = \beta$ 时写做 $\alpha \leqslant \beta$，这样定义的关系 $\leqslant$ 是全序†关系，序数的全体可以根据 $\leqslant$ 而成为良序的．从而，关于序数可以使用超限归纳法†．

若 α 为任意序数，则 $\alpha' = \{\xi \mid \xi \leqslant \alpha\}$ 也是序数，给出了 α 的紧接后†序数．α 的紧接前†序数最多有一个．不具有紧接前序数的超限序数称为**极限序数** (limit ordinal number)，其它的序数称为**孤立序数** (isolated ordinal number)．ω 是最小的极限序数．对于序数的任意集合 A，$\{\xi \mid \exists \eta (\xi < \eta \in A\}$ 是序数．这个序数是 A 的上确界† $\sup A$．

【序数的和、积、幂】 序数的**和** (sum) $\alpha+\beta$，**积** (product) $\alpha \cdot \beta$ (或 $\alpha\beta$)，**幂** (power) α^β，可以用关于 β 的超限归纳法定义之，且具有下列性质．其中，γ 为极限序数，关于幂，设 $\alpha > 0$．

$$\alpha + 0 = \alpha, \quad \alpha + \beta' = (\alpha + \beta)',$$
$$\alpha + \gamma = \sup\{\alpha + \xi \mid \xi < \gamma\};$$
$$\alpha \cdot 0 = 0, \quad \alpha \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta + \alpha,$$
$$\alpha \cdot \gamma = \sup\{\alpha \cdot \xi \mid \xi < \gamma\};$$
$$\alpha^0 = 1, \quad \alpha^{\beta'} = \alpha^\beta \cdot \alpha,$$
$$\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\xi \mid \xi < \gamma\}.$$

关于和、积，有**结合律** (associative law)：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$，$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$，及**左分配律** (left distributive law)：$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$．关于幂，有 $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$，$\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$．若 α，β 分别为良序集 A，B 的序数，则 $\alpha + \beta$ 是序和† $A + B$ 的序数，$\alpha \cdot \beta$ 是序积† BA 的序数．

设 $\pi > 1$，任意序数 α 可唯一地表示为形式

$$\alpha = \pi^{\beta_1}\gamma_1 + \pi^{\beta_2}\gamma_2 + \cdots + \pi^{\beta_n}\gamma_n,$$
$$\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_n \geqslant 0;$$
$$0 < \gamma_i < \pi, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

称之为序数 α 的**标准型** (normal form)，特别是，当 $\pi = \omega$ 时，称为 **Cantor 标准型** (Cantor's normal form)．

设 f 为由序数到序数的函数，当若 $\alpha < \beta$ 则 $f(\alpha) < f(\beta)$ 时，f 称为**严格单调的** (strictly monotone)．如果 f 是严格单调的，则 $\alpha \leqslant f(\alpha)$．

对所有极限序数 γ，$f(\gamma)=\sup\{f(\xi)|\xi<\gamma\}$ 时，f 称为**连续的**（continuous），严格单调且连续的函数称为**正规函数**（normal function）。若 f 为正规函数，则对任意 α，有 β 使 $f(\beta)=\beta>\alpha$。实际上，可由 $\beta_0=f(\alpha+1)$，$\beta_{n+1}=f(\beta_n)$ 定义 $\beta_n(n<\omega)$，再令 $\beta=\sup\{\beta_n|n<\omega\}$ 即可。因 $f(\alpha)=\omega^\alpha$ 是正规函数，故满足 $\omega^\varepsilon=\varepsilon$ 的 ε 是存在的。这样的序数 ε 称为 **ε 数**（德 Epsilonzahl）。关于序数 α,β，如果有单调函数 f 使 $\alpha=\sup\{f(\xi)'|\xi<\beta\}$，则称 β **共尾**（cofinal）于 α。共尾于 α 的最小的序数称为 α 的**共尾度**（cofinality），以 $cf(\alpha)$ 表示之。

【基数的定义】 当集合 M,N 之间具有一一对应时表示为 $M\sim N$。若 $\alpha\sim\xi$，则 $\alpha\leqslant\xi$，这样的序数 α 称为**始数**（德 Anfangszahl）或**基数**（cardinal）。

根据选择公理†，可以证明对于任意集合 M，使 $M\sim\alpha$ 的基数 α 是唯一存在的。这个 α 称为**集合** M 的**基数**（potency of a set），记作 $\bar{\bar{M}}$。

有限序数全是基数，ω 是最小的超限基数。由序数全体到超限基数全体上的单调函数是唯一存在的且为正规函数。这个函数对于 α 的值以 $\aleph_\alpha$ 或 ω_α 表示之。特别是，$\aleph_0=\omega$，$\aleph_1$ 是不可数†的最小基数，也是不可数的最小序数。有限序数称为**第一类序数**（ordinal of the first number class），满足条件 $\aleph\leqslant\alpha<\aleph_1$ 的 α 称为**第二类序数**（ordinal of the second number class）。第三类以上的序数概念也可以同样定义之。

【不可达序数】 对于 α 的共尾度 $cf(\alpha)$，恒有 $cf(\alpha)\leqslant\alpha$ 成立。使 $cf(\alpha)=\alpha$ 的序数 α 称为**正则的**（regular），$cf(\alpha)<\alpha$ 时的 α 称为**奇异的**（singular）。对于任意序数 α，$cf(\alpha)$ 是正则基数，从而任意正则数是基数。当 $\alpha=\omega_\beta$ 是正则的，而 β 又是极限序数时，α 称为**弱不可达的**（weakly inaccessible）。定义一个使序数对应于集合的函数 R：$R(0)=\varnothing$ 及 $R(\alpha)=\bigcup\{\mathfrak{P}(R(\xi))|\xi<\alpha\}$（超限归纳法†）。在此，$\mathfrak{P}(M)$ 表示 M 的幂集†。正则数 $\alpha>\omega$ 如果满足条件："对于使得 $x\in R(\alpha)$，$y\subset R(\alpha)$ 的任意集合 x,y，若存在从 x 到 y 上的映射，则有 $y\in R(\alpha)$"，α 便称为**强不可达的**（strongly inaccessible）。若正则数 α 强不可达，则也是弱不可达的。强不可达的数通常定义为满足条件"若 $\beta<\alpha$，则 $\overline{\overline{\mathfrak{P}(\beta)}}<\alpha$"的正则数 $\alpha>\omega$，根据选择公理，这个定义和上述定义是等价的。根据广义连续统假设†，强不可达和弱不可达是等价的。

【参】 [1] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, I. Théorie des ensembles, ch 3, Actualités Sci. Ind., 1243b 第二版, Hermann, 1967 (英译本: Theory of sets, Addison-Wesley, 1968); [2] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre II, Math. Ann., **49**(1897), 207—246. (*Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1932* (英译本: Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers, Open Court, 1915); [3] J. von Neumann, Zur Einführung der transfiniten Zahlen, Acta Sci. Math. Szeged., **1**(1923), 199—208 (Collected works I, Pergamon, 1961).

另一集合的[参].

格 [英 lattice 法 réseau 德 Verband 俄 решётка 日 束] 【格的定义】 对于有序集† L 的元素 x,y，当 $\{x,y\}$ 的上确界†、下确界†存在时，它们分别称为 x,y 的**并**（join），**交**（meet），以 $x\cup y$，$x\cap y$ 表示之。当 L 的任二元素都具有并和交时，L 称为**格**或**格序集**（lattice-ordered set）。在格 L 中下列三法则成立。1) $x\cup y=y\cup x$，$x\cap y=y\cap x$（**交换律**）；2) $x\cup(y\cup z)=(x\cup y)\cup z$，$x\cap(y\cap z)=(x\cap y)\cap z$（**结合律**）；3) $x\cup(y\cap x)=(x\cup y)\cap x=x$（**吸收律**）；$(x,y,z\in L)$。反之，在某集合 L 中确定两种运算 $\cup,\cap$，若法则 1), 2), 3) 成立，则 $x\cup y=y$ 和 $x\cap y=x$ 是等价条件，若此条件成立，则规定 $x\leqslant y$，就这个关系 $\leqslant$ 而言 L 是格。而且此时 $\{x,y\}$ 的上确界、下确界等于 $x\cup y$，$x\cap y$。根据以上的事实，也可以把格定义为给出满足 1), 2), 3) 的运算 $\cup,\cap$ 的代数系†。另外，在格中 4) $x\cup x=x\cap x=x$（**幂等律**）成立。

再者，在有序集 L 中，当仅假定对于 L 的任意元素 x,y，$x\cup y$ 均存在时，L 称为**上半格**（upper semi-lattice），当仅假定 $x\cap y$ 存在时，L 称为**下半格**（lower semi-lattice）。

【格的例】 一个给定集合 S 的子集的全体

$\mathfrak{P}(S)$ 关于包含关系是完全格而且是分配格．一个给定群†的不变子群†的全体关于包含关系是完全格而且是模格．代替不变子群而考虑一个给定群的关于给定算子域的容许子群全体时也有同样的结果．特别是，一个给定环†的所有的理想†全体也是同样的．再者，射影空间†的子空间全体也是模格．

【诸定义】 从格 L 到格 L' 的映射 f，如果满足 $f(x\cup y)=f(x)\cup f(y)$，$f(x\cap y)=f(x)\cap f(y)$ $(x, y\in L)$，则称为**格（序）同态**或简称为**同态**（lattice homomorphism）．双射同态 f 称为**格(序)同构**或简称为**同构**（lattice isomorphism），其逆映射也是同构．这时则称格 L, L' 是**同构的**．一般地，当有序集之间的映射 f 满足条件"若 $x\leqslant y$，则 $f(x)\leqslant f(y)$"时，则称 f 是保序的．格之间的同态必定是保序的，而其逆未必成立．但保序的双射必是同构的．

若将格 L 中的序换为对偶†序，则并与交对调所得到的新格 L'，称为 L 的**对偶格**（dual lattice）．

由格 L 到格 L' 的映射 f，如果满足

$$f(x\cap y)=f(x)\cup f(y),$$
$$f(x\cup y)=f(x)\cap f(y),$$

则称为**对偶格同态**（dual lattice-homomorphism）．且当 f 为双射时，f 称为**对偶格同构**（dual lattice-isomorphism）．称 L 和 L' 是相互**对偶格同构的**．

设格 L' 是格 L 的子集，当标准单射 $L'\to L$ 是同态时，L' 称为 L 的**子格**（sublattice）．当格 L 的子集 L' 满足条件"若 $x, y\in L'$，则 $x\cup y\in L'$，$x\cap y\in L'$"时，可以把运算 $\cup$, $\cap$ 诱导于 L' 中而使 L' 成为子格．例如，对于格 L 的二元素 a, b，满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的元素 x 的全体是子格．将它写做 $[a, b]$，称为 L 的**区间**（interval）．如果在格 L 中按等价关系 R 构成的商集 L/R 是格，而标准满射 $L\to L/R$ 又是同态，则 L/R 称为 L 的**商格**（quotient lattice）．当格 L 的等价关系 R 满足条件"若 $x\equiv x'$, $y\equiv y'\ (\mathrm{mod}\ R)$，则 $x\cup y\equiv x'\cup y'$, $x\cap y\equiv x'\cap y'\ (\mathrm{mod}\ R)$"时，可以把运算 $\cup$, $\cap$ 诱导于 L/R 中而使 L/R 成为商格．格族 $\{L_i\}_{i\in I}$ 的直积集 $L=\prod_{i\in I} L_i$，对于由 $(x_i)\cup(y_i)=(x_i\cup y_i)$，$(x_i)\cap(y_i)=(x_i\cap y_i)$，定义的运算 $\cup$, $\cap$ 而言也是格，称为 $\{L_i\}_{i\in I}$ 的**直积格**（direct product lattice）．

【完全格】 在有序集 L 中，当任意非空子集都具有上确界和下确界时，L 称为**完全格**（complete lattice）．当任意非空可数子集都具有上确界和下确界时，L 称为 **σ 完全格**（σ-complete lattice）．这些显然是格，反之，任意格都是某个完全格的子格．再者，当非空的上方（下方）有界†子集 E 都具有上确界（下确界）时，则称 L 是**条件完全的**（conditionally complete）．当 E 为可数集而具有上述性质时，称 L 为**条件 σ 完全的**（conditionally σ-complete）．一般地，对任意的有序集 L，存在某个完全格 $\bar{L}$ 和保序单射 $f: L\to\bar{L}$，而满足条件"任意的 $\xi\in\bar{L}$ 是某个 $X, Y\subset L$ 的像 $f(X)$, $f(Y)$ 的上确界、下确界"．上述条件和条件"对于任意的完全格 $\bar{L}'$ 和保序单射 $f': L\to\bar{L}'$，有保序单射 $\varphi:\bar{L}\to\bar{L}'$ 使 $\varphi\circ f=f'$"是等价的．由此可以看出在格同构的意义下 $\bar{L}$, f 是唯一的．$\bar{L}$ 称为有序集 L 的**完备化**（completion）．例如，实数全体再添加 $+\infty$ 和 $-\infty$ 的集合便是有理数全体的完备化．

【分配格】 关于格 L，当下列相互等价的条件(**分配律**)成立时，L 称为**分配格**（distributive lattice）: 1) $x\cup(y\cap z)=(x\cup y)\cap(x\cup z)$; 2) $x\cap(y\cup z)=(x\cap y)\cup(x\cap z)$; 3) $(x\cup y)\cap(y\cup z)\cap(z\cup x)=(x\cap y)\cup(y\cap z)\cup(z\cap x)$; $(x, y, z\in L)$．分配格的对偶格、子格、商格、直积格都是分配格．给定集合 S 的子集的全体 $\mathfrak{P}(S)$ 是分配格，它的子格称为 S 中的**集格**（lattice of sets）．任意分配格都同构于某个集格．一般地，从分配格 L 到 $\mathfrak{P}(S)$ 的同态称为 L 在 S 中的**表示**（representation）．

当格 L 具有最大元 I 和最小元 O，而对于任意元素 x，均有元素 x'，使 $x\cup x'=I$，$x\cap x'=O$ 时，L 称为**有补格**（complemented lattice）．而 x' 称为 x 的**补元**（complement）．既是分配格

又是有补格时，称为 **Boole 格** (Boolean lattice) 或 Boole 代数†. 在 Boole 格中任意元的补元是唯一的. 给定集合 S 的子集全体的格 $\mathfrak{P}(S)$ 是以 S 为最大元,以 $\varnothing$ 为最小元的 Boole 格. 它的子格 L 当满足条件"若 $X \in L$ 则 X' (补集) $\in L$"时也是 Boole 格，这个集格特别称为**集 Boole 格** (Boolean lattice of sets). 任意的 Boole 格都可用某个集 Boole 格同构地表示之 (又→Boole 代数).

当格的元素 a 和任意元素 x, y 所生成的子格都是分配格时，a 称为**中间元素** (neutral element)，当 a 又具有补元时，a 称为**中心元** (central element). 格 L 的中心元的全体称为格的**中心** (centre).

【模格】 关于格 L，当条件 (**模法则**) "若 $x \leqslant z$，则 $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$" 成立时，$L$ 称为**模格** (modular lattice). 分配格恒为模格. 模格的对偶格、子格、商格、直积格仍为模格. 具有算子区的群的容许子群全体的格是模格,而关于不变子群的 Jordan-Hölder 定理及 O. Schreier 的加细定理(→群)可以如下地推广到一般的模格上.

一般地，对于有序集 L 的元素对 x, y，当 $x \geqslant y$ 时称为**商** (quotient)，写做 x/y. 特别是，当 $x > y$ 而 $x > z > y$ 的元素 z 不存在时，x/y 称为**素商** (prime quotient). 此时 x 称为**素于 y 上**或称为 **y 的上素元** (prime over y)，y 称为**素于 x 下**或称为 **x 的下素元** (prime under x). L 的元素序列 $C: x_0, x_1, \cdots, x_k$，如果满足 $x_{i-1} \geqslant x_i (1 \leqslant i \leqslant k)$，则称为**降链** (descending chain)，而 k 称为它的**长度** (length). 另外，x_{i-1}/x_i 称为由 C 所确定的商. 当它们都是素商时，C 称为**合成列** (composition series). 在两个降链 $C: x_0, x_1, \cdots, x_k$, $D: y_0, y_1, \cdots, y_l$ 中，如果 $x_0 = y_0$，$x_k = y_l$，且任意的 x_i 均等于某个 y_j 时，D 称为 C 的**加细** (refinement). 其次再定义降链之间的等价. 首先关于商 x/y，x'/y'，当条件 "$x = x' \cup y$, $y' = x' \cap y$" 或 "$x' = x \cup y'$, $y = x \cap y'$" 成立时，写做 $x/y \approx x'/y'$. 如果有有限个商 $q_0, q_1, \cdots, q_r$，使得 $x/y = q_0$, $x'/y' = q_r$，且 $q_{i-1} \approx q_i (1 \leqslant i \leqslant r)$，则称 x/y 和 x'/y' 是等价的. 一般地，两个降链 C, C' 如果其长度相等，它们所确定的商是一一对应的，而且对应的商又是等价的，则称 C 和 C' 是等价的. 今设 L 为模格. 如果 L 中的商 x/y, x'/y' 是等价的，则区间 $[y, x]$, $[y', x']$ 作为格是同构的 (Dedekind 原理). 再者，在两个降链 $C: x_0, x_1, \cdots, x_k$，与 $C': x'_0, x'_1, \cdots, x'_l$ 之间，若 $x_0 = x'_0$, $x_k = x'_l$，则 C 的某个加细和 C' 的某个加细是等价的. 特别是，连结任意二元素的各合成列，只要存在，便是相互等价的 (→连续几何).

在具有最小元 O 的模格 L 中，当连结 L 的元素 a 和 O 的有限合成列存在时，其长度 k 是一定的. 写做 $k = d(a)$，称为元素 a 的**高度** (height). 当不存在这样的有限合成列时，规定 $d(a) = \infty$. 对于 L 的元素 a, b，当 $d(a \cup b) < \infty$ 时，$d(a \cup b) + d(a \cap b) = d(a) + d(b)$ 成立,称之为模格的**维数定理** (dimension theorem). 当 L 存在最大元 I 时，$d(I)$ 称为格 L 的**高度**.

兼为有补格的模格 L 称为**有补模格** (complemented modular lattice). L 的最小元 O 的上素元 x 称为 L 的**原子元** (atomic element). 当有补模格 L 的任意两个原子元有共同的补元时，L 称为**不可约的** (irreducible).

【格群】 在有序集 G 中给定群†的运算，当条件"若 $x \leqslant y$，则 $xz \leqslant yz$, $zx \leqslant zy$ $(x, y, z \in G)$" 成立时，G 称为**有序群** (ordered group). 特别是，当 G 为全序集时，称为**全序群** (totally ordered group). 再者，当 G 为格时，上述条件和 "$(x \between y)z = xz \between yz$, $z(x \between y) = zx \between zy$ (复号同序)" 是等价的. 此时 G 称为**格序群**或**格群** (lattice-ordered group). 格群不具有最大元、最小元，恒为分配格. 如果 $\{x_i\}$ 具有上确界，则 $(\sup_i x_i) \cap y = \sup_i (x_i \cap y)$ (**完全分配律**) 成立. 格群作为格的结构已由 P. Lorenzen-A. H. clifford-中山正研究清楚了. 特别是，交换格群作为格群同构于全序格群的直积的某个子群. 格群除单位元以外不具有有限阶的元素. 反之，除单位元以外不具有有限阶的元素的交换群，

关于适当的全序成为格群．再者，任何自由群关于适当的全序恒为格群．此外，关于全序格群，岩沢健吉（1948）等人研究过．

格群G的元素x，当$x \geqslant e$（单位元）时称为正元，$x \leqslant e$ 时称为负元．满足下述条件的G称为 **Archimedes 格群**：关于G的元素x，y，若$x^n \leqslant y$对于任意自然数n都成立，则必定有$x \leqslant e$．Archimedes 格群恒同构于完全格群的某个子群，反之，完全格群必是 Archimedes 格群，是交换的，且同构于格序线性空间†和若干个由有理整数所构成的格群的直积（岩沢健吉，1948）．特别是，全序 Archimedes 格群同构于实数全体构成的格群的某个子群．

当格群的正元素全体满足极小条件†时，该格群是交换的，它的任意元素可唯一的表示为单位元的上素元的幂积的形式．有限次代数数域†的分式理想†的全体，便是这种格群的有代表性的例子．另 → 有序线性空间，连续几何．

〔参〕［1］G. Birkhoff, Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., New York, 1940, 修订版 1948；［2］中山正，束論 I，岩波，1944；［3］岩村聯，束論，共立出版，1966；［4］鈴木通夫，群と束，§4 束群，現代の数学 I，共立出版，1950；［5］弥永昌吉-小平邦彦，现代数学概説 I，岩波，1961；［6］P. Dubreil-M. L. Dubreil-Jacotin, Leçons d'algèbre moderne, Dunod, 第二版，1961（英译本：Lectures on modern algebra, Oliver & Boyd, 1967）．

Boole 代数［英 Boolean algebra 法 algèbre booléienne 德 Boolesche Algebra 俄 булева алгебра 日 ブール 代数］【Boole 代数】Boole 代数是 G. Boole 在进行逻辑运算（→ 符号逻辑）时引入的，而今天已包括在更一般的格†（格序集）的概念中（→ 格），在逻辑以外，它作为可测†集等的集格†在分析学里也经常出现．

现在给定集合L，假设它的任意二元素x，y，均对应着L的元素$x \cup y$，$x \cap y$，并满足下列法则．1）$x \cup y = y \cup x$，$x \cap y = y \cap x$（交换律）；2）$x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$，$x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$（结合律）；3）$x \cup (y \cap x) = (x \cup y) \cap x = x$（吸收律）；4）$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$，$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$（分配律）；$(x, y, z \in L)$．又从 1)，2)，3) 可直接导出"$x \cup x = x \cap x = x$（幂等律）"．又当$x \cup y = y$时，规定$x \leqslant y$，则关于关系$\leqslant$而言$L$是有序集†．这里再设下列法则成立．5）有最小元 0 及最大元I存在，对任意元素x，有某个元素x'，使$x \cup x' = I$，$x \cap x' = 0$（互补律）．此时L称为 **Boole 代数**或 Boole 格†．并且，对于x而言，x'是唯一确定的，称为x的**补元**（complement）．二项运算$(x, y) \to x \cup y$，$x \cap y$及一项运算$x \to x'$合称为 **Boole 运算**（Boolean operations）．关于它们，**de Morgan 法则** $(x \cup y)' = x' \cap y'$，$(x \cap y)' = x' \cup y'$ 成立．

【广义 Boole 代数】在有序集中，对于$a \leqslant b$的二元a，b，把满足$a \leqslant x \leqslant b$的元素$x$全体写做$[a, b]$，称为**区间**（interval）．Boole 代数的区间$[a, b]$关于诱导运算$\cup$，$\cap$而言，仍然是 Boole 代数．但其最小元，最大元为a，b，在$[a, b]$中x的补元等于$a \cup (x' \cap b) = (a \cup x') \cap b$．一般地，当给定运算$\cup$，$\cap$的集合$L$满足上述法则 1)—4)，具有最小元 0，它的所有区间均满足法则 5)（即构成 Boole 代数）时，L称为**广义 Boole 代数**（generalized Boolean algebra）．

【Boole 环】满足条件"$xx = x\ (x \in L)$"（即任意元素都是幂等元†）的环†L称为**广义 Boole 环**（generalized Boolean ring），特别是，当它具有单位元时，称为 **Boole 环**（Boolean ring）．在广义 Boole 环中$x + x = 0\ (x \in L)$成立，且恒为交换环†．对于（广义）Boole 代数L的二元素x，y，把$x \cap y$在区间$[0, x \cup y]$中的补元写做$x + y$，把$x \cap y$本身写做xy时，L关于运算$(x, y) \to x + y$，xy是（广义）Boole 环．反之，对于任意的（广义）Boole 环L，令$x \cup y = x + y + xy$，$x \cap y = xy$，则关于运算$(x, y) \to x \cup y$，$x \cap y$而言，L是（广义）Boole 代数．（广义）Boole 代数L的子集$J \neq \varnothing$关于对应的环的结构是理想†，其充分必要条件是满足条件"$x \cup y \in J\ (x, y \in J)$，$x \cap y \in J\ (x \in J, y \in L)$"．一般地，在任意格中，将满足此条件的非空子集称为**理想**（ideal）．关于 Boole 代数的各种应用，例如→［1］．

【Boole 代数的表示】 任何 Boole 代数 L 都同构于某集合 X 的子集所成的 Boole 格. 如果 L 具有有限高度，则 L 同构于 X 的一切子集所成的 Boole 格 $\mathfrak{P}(X)$. 一般地，X 可取为 L 的全体极大理想的集. 命 $a \in L$，并命 $O(a) = (\mathrm{m} | \mathrm{m} \in X, a \notin \mathrm{m})$，则该同构可由映射 $a \to O(a)$ 得到. 如果我们用 $\{O(a) | a \in L\}$ 作为开基底，在 X 中定义拓扑，则 X 是紧的完全不连通的 T_1 空间，而 $O(a)$ 便可刻划为 X 中的紧开集. 这样的空间 X 叫做 **Boole 空间** (Boolean space) (M. H. Stone [4], [5])

在任何完全 Boole 代数 L 中，完全分配律：$(\sup_I x_i) \cap y = \sup_I (x_i \cap y)$ 及其对偶恒成立. 它们等价于更强的关系：$(\sup_I x_i) \cap (\sup_J y_j) = \sup_{IJ} (x_i \cap y_j)$ 及其对偶. 要使一个 Boole 代数 L 能够同构于 X 的一切子集所成的 Boole 代数 $\mathfrak{P}(X)$，其充分必要条件是最强的完全分配律：$\inf_I (\sup_{J(i)} x_{ij}) = \sup_F (\inf_I x_{i, \varphi(i)})$ (其中 F 是下列的函数 φ 全体所成的集：对每个 $i \in I$，值 $\varphi(i) \in J(i)$) 及其对偶成立.

【参】 [1] H. G. Flegg, Boolean algebra and its application, Blackie, 1964; [2] P. R. Halmos, Lectures on Boolean algebras, van Nostrand, 1963; [3] R. Sikorski, Boolean algebras, Erg. d. Math., Springer, 第二版, 1964; [4] M. H. Stone, The theory of representations for Boolean algebras, Trans, Amer. Math. Soc., **40**(1936), 37—111; [5] M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc., **41**(1937) 375—481; [6] G. Boole, Collected logical works I, II, Open Court, 1916.

另→格的[参].

连续几何 [英 continuous geometry 法 géométrie continue 德 kontinuierlische Geometrie 俄 непрерывная геометрия 日 連続幾何] 所谓连续几何是 J. von. Neumann 在研究 Hilbert 空间的算子环†时从所遇到的某种格†(格序集)，抽象其作为格的性质而引入的概念([1])，可以看做是把射影几何的线性子空间所构成的格的性质推广到无限维空间去的结果.

设 L 是完备有补模格(→格[模格])，且具有两种连续性：即对于 L 的任意元素 a 及关于 L 的序为良序†的子集 W，恒有 $a \cap \sup w = \sup (a \cap w)$ $(w \in W)$ 及其对偶成立，则 L 称为**连续几何**. 格 L 的中心† Z 称为连续几何 L 的**中心** (centre)，当 Z 仅含有 O, I 时，L 称为**不可约的** (irreducible)，否则称为**可约的** (reducible). 可约的连续几何和一些不可约连续几何的直积的某个子格是同构的.

在连续几何 L 中，可以定义具有下列性质 1), 2), 3), 4) 且取值于某个完全格序线性空间† M 的函数 $d(x)$：1) $d(x) \geqslant 0$；2) 若 $d(x) = d(y)$，则 x, y 具有共同的补元；3) $d(x \cup y) + d(x \cap y) = d(x) + d(y)$；4) 对关于 L 的序而言为良序的子集 W，有 $\sup d(w) = d(\sup w)$ $(w \in W)$. 这样的 $d(x)$ 称为在 L 中的**维数函数** (dimension function). 给出 L 的自同构变换群 G 后，可以引入更一般的维数函数，它对 G 不变，而其它条件则稍稍减弱 (岩村联 [4]). 维数函数的值域 M 可以取为实数加法群这一事实和 L 的不可约性是等价的. 此时 $d(w)$ 的值仅有有限多个或构成某个区间.

【连续几何的表示】 具有单位元的环，若对于任意元素 a 都存在元素 x 使 $axa = a$ 成立，则称为**正则环** (regular ring). 在连续几何 L 中，若有 L 的元素 x 和自然数 n，使 $d(I) = nd(x)$ $(n \geqslant 4)$，则 L 和某个正则环 R 的主左理想构成的格 (序是 $\supset$) 同构. 把 R 分解为诸理想的直和，对应于把 L 分解为诸格的直积，L 是不可约的有限维的和 R 是非交换域上的矩阵环是等价的. 而且这时，如将 L 看做射影几何，则其坐标可由这个非交换域给出. 在连续几何中，并、交常常用和、积的记号表示，直积也称为直和. 也有将完备性减弱为条件 σ 完全†的情形.

【参】 [1] J. von Neumann, Continuous geometry, Princeton, 1936—1937; [2] 前田文友, 連続幾何学, 岩波, 1952; [3] F. Maeda (前田文友) Kontinuierliche Geometrie, Springer, 1958; [4] T. Iwamura (岩村联), On continuous geometries I, II, Jap. J. Math., **19** (1944), 57—71, **2**(1950), 148—164; [5] Л. А. Скорняков, Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, Физматгиз, 1961.

拓扑空间 [英 topological space 法 espace topologique 德 topologischer Raum 俄 топологи-

ческое пространство　日 位相空間］ 在分析学中，极限和连续的概念，像数的运算一样也是基本的．在一般的抽象空间中，若给定适当的结构就可以定义极限和连续的概念，从而可以展开分析学中所使用过的理论．一般地，这样的结构称为**拓扑**（topology）．对某集合X引入拓扑结构（**拓扑化**（topologize））有种种方法．虽然也有直接将收敛概念公理化的方法（→收敛），但通常都是使用邻域系的方法（F. Hausdorff）；对集合A添加其聚点组成集合$\overline{A}$，称之为闭包，将它的性质加以公理化的方法（C. Kuratowski）；以及给出开集系的方法等．

【拓扑的定义】 邻域、开集、闭集、开核、闭包等概念可以定义为满足下列公理者．

邻域公理（**U**）．设集合X的各点x都对应于X的子集族$\mathfrak{U}(x)$（即确定一个映射$X\to\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(X))$），1）若$U\in\mathfrak{U}(x)$，则$x\in U$；2）若$U_1$，$U_2\in\mathfrak{U}(x)$，则$U_1\cap U_2\in\mathfrak{U}(x)$；3）若$U\in\mathfrak{U}(x)$，$U\subset V$，则$V\in\mathfrak{U}(x)$；4）对$U\in\mathfrak{U}(x)$，有$W\in\mathfrak{U}(x)$，使"对所有$y\in W$，有$U\in\mathfrak{U}(y)$"．此时，$\mathfrak{U}(x)$称为点$x$的**邻域系**（neighbourhood system），属于$\mathfrak{U}(x)$的子集U称为x的**邻域**（英 neighbourhood　法 voisinage　德 Umgebung）．

开集公理（**O**）．X的子集族$\mathfrak{O}$（即$\mathfrak{P}(x)$的子集），如果满足条件：1）X，$\varnothing\in\mathfrak{O}$；2）若$O_1$，$O_2\in\mathfrak{O}$，则$O_1\cap O_2\in\mathfrak{O}$；3）若$O_\lambda\in\mathfrak{O}$（$\lambda\in\Lambda$），则$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda\in\mathfrak{O}$，那末$\mathfrak{O}$便称为**开集系**（system of open sets），属于$\mathfrak{O}$的集合O称为**开集**（英 open set　法 ensemble ouvert　德 offene Menge）．

闭集公理（**F**）．X的子集族$\mathfrak{F}$，如果满足条件：1）X，$\varnothing\in\mathfrak{F}$；2）若$F_1$，$F_2\in\mathfrak{F}$，则$F_1\cup F_2\in\mathfrak{F}$；3）若$F_\lambda\in\mathfrak{F}(\lambda\in\Lambda)$，则$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda\in\mathfrak{F}$，那末$\mathfrak{F}$便称为**闭集系**（system of closed sets），属于$\mathfrak{F}$的集合F称为**闭集**（英 closed set　法 ensemble fermé　德 abgeschlossene Menge）．

开核公理（**I**）．使X的所有子集A都对应于X的子集A^i（即确定一个映射$\mathfrak{P}(X)\to\mathfrak{P}(X)$），如果满足条件：1）$X^i=X$；2）$(A\cap B)^i=A^i\cap B^i$；3）$A^i\subset A$；4）$A^{ii}=A^i$，则称$A^i$为$A$的**内部**（interior）或**开核**（open kernel），属于A^i的点称为A的**内点**（inner point, interior point）．A^i也可写做A°，Int A．

闭包公理（**A**）．使X的所有子集A都对应于X的子集A^a，如果满足条件：1）$\varnothing^a=\varnothing$；2）$(A\cup B)^a=A^a\cup B^a$；3）$A^a\supset A$；4）$A^{aa}=A^a$，则称$A^a$为$A$的**闭包**（closure）．属于$A^a$的点称为$A$的**触点**（德 Berührungspunkt）．A^a也记做A^b，$\overline{A}$或ClA．

当这些概念中的一个确定时，便可导出其它的概念，它们之间的关系，可照下述的意义而相互决定．

（**UO**）O是开集$\Leftrightarrow$对于所有的$x\in O$，均有$O\in\mathfrak{U}(x)$，

（**OU**）U是x的邻域$\Leftrightarrow$有$O\in\mathfrak{O}$，使$x\in O\subset U$，

（**UI**）A的开核是满足下列条件的X的点x的全体：有$U\in\mathfrak{U}(x)$，使$U\subset A$成立．

（**IU**）U是x的邻域$\Leftrightarrow x\in U^i$

（**OI**）A的开核是被A包含的所有的$O(\in\mathfrak{O})$的并集（被A包含的最大的$O(\in\mathfrak{O})$）．

（**IO**）O是开集$\Leftrightarrow O=O^i$，

（**OF**）F是闭集$\Leftrightarrow F^c\in\mathfrak{O}$（其中$F^c=X-F$（$F$的补集）），

（**FO**）O是开集$\Leftrightarrow O^c\in\mathfrak{F}$，

（**FA**）A的闭包是包含A的所有$F(\in\mathfrak{F})$的交集（包含A的最小的$F(\in\mathfrak{F})$），

（**AF**）F是闭集$\Leftrightarrow F=F^a$，

（**AI**）$A^i=A^{cac}$，

（**IA**）$A^a=A^{cic}$，

（**AU**）U是x的邻域$\Leftrightarrow x\notin U^{ca}$

（**UA**）A的闭包是满足下列条件的点x的全体：对任意$U\in\mathfrak{U}(x)$，有$U\cap A\neq\varnothing$．

对集合X，引入上述诸概念之一，从而可以引入其余所有概念时，称为对集合X引入**拓扑**τ，而集合X称为**拓扑空间**，记作(X,τ)．无论选哪个概念为基本概念都生成完全相同的体系．例如，将开集选为基本概念，设公理（**O**）

成立，若以 (**OU**), (**OI**), (**OF**), (**FA**) 作为定义，则上述的 (**U**), (**I**), (**F**), (**A**) 及其他的性质可以作为定理得到证明. 当强调由开集系 $\mathfrak{O}$ 引入拓扑时，用拓扑空间 $(X, \mathfrak{O})$ 代替 (X, τ) 表示之. 同样也可以用拓扑空间 $(X, \{\mathfrak{U}(x)\})$，拓扑空间 (X, a) 表示之.

【拓扑空间的例子】 1) **离散拓扑**. $\mathfrak{O} = \mathfrak{P}(X)$ 满足公理 (**O**). 此拓扑空间 $(X, \mathfrak{O})$ 称为**离散（拓扑）空间** (discrete topological space). 在此空间中，所有子集都是开集，对于所有的子集 A，都有 $A^a = A^i = A$，包含 x 的所有集合都是 x 的邻域. 2) **平凡（拓扑）**. 由 $\mathfrak{O} = \{X, \varnothing\}$ 确定的拓扑空间 $(X, \mathfrak{O})$，称为**平凡（拓扑）空间**. 在此空间中，闭集仅有 X, $\varnothing$ 两个. 当 $A \neq X$ 时，$A^i = \varnothing$，当 $A \neq \varnothing$ 时，$A^a = X$. 点 x 的邻域仅有 X. 3) **度量拓扑**. 在任意二点 x, y 之间定义了距离 $\rho(x, y)$ 的度量空间† X 中，确定点 a 的 ε 邻域为 $U_\varepsilon(a) = \{x \mid x \in X, \rho(x, a) < \varepsilon\}$，如把含有 x 的某个 ε 邻域的那些集合的全体作为 x 的邻域系 $\mathfrak{U}(x)$，则公理 (**U**) 成立，从而定义了拓扑空间 $(X, \{\mathfrak{U}(x)\})$. 4) **序拓扑** (order topology). 在定义了全序 $\leqslant$ 的全序集† X 中，若取以包含 x 的一个区间为子集的那些集合的全体，作为点 x 的邻域系 $\mathfrak{U}(x)$，则 X 是拓扑空间. 5) **收敛拓扑**. 在拓扑空间中可以定义收敛的概念，反之，也可以由收敛确定拓扑(→收敛). 特别是，在度量空间中，由点列的收敛可以定义拓扑. (→度量空间).

【广义拓扑空间】 当不假定闭包公理 (**A**) 中的全部性质时，有所谓**广义拓扑空间** (generalized topological space). 可以研究在此空间中，公理 (**A**) 的每个条件究竟表示什么样的拓扑性质等等 ([1], [2]).

【基本邻域系】 所谓邻域系 $\mathfrak{U}(x)$ 的子族 $\mathfrak{U}_0(x)$ 是**基本邻域系** (fundamental neighbourhood system)，**完全邻域系** (complete neighbourhood system) 或**邻域系的基** (base, basis)，系指对于任意 $U \in \mathfrak{U}(x)$，均有 $V \in \mathfrak{U}_0(x)$，使得 $V \subset U$. 基本邻域系具有下列性质 (**U**$_0$). 1) 对于所有 $V \in \mathfrak{U}_0(x)$，均有 $x \in V$; 2) 若 $V_1, V_2 \in \mathfrak{U}_0(x)$，则有 $V_3 \in \mathfrak{U}_0(x)$，使 $V_3 \subset V_1 \cap V_2$. 3) 对于 $V \in \mathfrak{U}_0(x)$，有 W，使 $W \in \mathfrak{U}_0(x)$，$W \subset V$ 且具有性质：若 $y \in W$，则必有 $V_y \in \mathfrak{U}_0(y)$ 使 $V_y \subset V$. 在度量空间中 ε 邻域的全体是基本邻域系. 在一般拓扑空间中，含有 x 的开集（称之为 x 的**开邻域** (open neighbourhood)）的全体是基本邻域系.

反之，当给定满足(**U**$_0$)的系 $\{\mathfrak{U}_0(x) \mid x \in X\}$ 时，"U 是 x 的邻域$\Leftrightarrow$有 $V \in \mathfrak{U}_0(x)$，使 $U \supset V$" 由此定义邻域系，就可以确定一个拓扑空间 $(X, \{\mathfrak{U}(x)\})$. 称之为由基本邻域系 $\{\mathfrak{U}_0(x)\}$ 所确定的拓扑空间. 具有基本邻域系的性质 (**U**$_0$) 的两个系 $\{\mathfrak{U}(x)\}$ 及 $\{\mathfrak{V}(x)\}$，如果它们分别确定的拓扑相等，便称 $\{\mathfrak{U}(x)\}$ 和 $\{\mathfrak{V}(x)\}$ 是**等价的** (equivalent). 等价的充分必要条件是：对任意 $U \in \mathfrak{U}(x)$，有 $V \in \mathfrak{V}(x)$ 使得 $V \subset U$，又对任意 $V \in \mathfrak{V}(x)$，有 $U \in \mathfrak{U}(x)$ 使得 $U \subset V$.

属于基本邻域系的邻域称为**基本邻域** (fundamental (basic) neighbourhood). 也有仅将基本邻域或开邻域称为邻域的（在本条中不采用）.

【开集系的基和子基】 所谓开集系 $\mathfrak{O}$ 的子族 $\mathfrak{O}_0$ 是**开集系的基或开基** (open base)，系指任意开集 $O \in \mathfrak{O}$ 均可表为被 O 包含的 $W (W \in \mathfrak{O}_0)$ 的并集而言. $\mathfrak{O}_0$ 具有下列诸性质 (**O**$_0$). 1) 对于任意 $x \in X$，有 $W \in \mathfrak{O}_0$ 使 $x \in W$; 2) 对于 $W_1, W_2 \in \mathfrak{O}_0$ 及任意 $x \in W_1 \cap W_2$，有 $W_3 \in \mathfrak{O}_0$，使 $x \in W_3 \subset W_1 \cap W_2$. 对于集合 X，当给定具有上述性质 (**O**$_0$) 的集族时，如将由 $\mathfrak{O}_0$ 的任意个素元的并集表示的集合全体设为 $\mathfrak{O}$，则确定拓扑空间 $(X, \mathfrak{O})$. 在此意义下，开基 $\mathfrak{O}_0$ 的元素称为**基本开集** (fundamental open set).

所谓开集系 $\mathfrak{O}$ 的子族 $\mathfrak{O}_{00}$ 是**开集系的子基**或**准基** (subbase)，系指属于 $\mathfrak{O}_{00}$ 的有限个集合的交所表示的集合全体 $\mathfrak{O}_0$ 是开集系的基. 子基具有下列性质 (**O**$_{00}$)：对于任意 $x \in X$，有 $W \in \mathfrak{O}_{00}$，使 $x \in W$. 反之，对集合 X 给定具有性质 (**O**$_{00}$) 的集族 $\mathfrak{O}_{00}$，属于它的有限个集合的交所表示的集合全体设为 $\mathfrak{O}_0$，$\mathfrak{O}_0$ 的任意个元素的并集表示的集合全体设为 $\mathfrak{O}$，则确定拓扑空间

$(X, \mathfrak{O})$，$\mathfrak{O}_{00}$ 便是开集系的子基．这时，称 $\mathfrak{O}_{00}$ **生成** (generate) $\mathfrak{O}$．在此意义下，给定满足 $(\mathbf{O}_{00})$ 的集族，便可对集合 X 定义拓扑．**闭集系的基，闭集系的子基及基本闭集**，可以和上述定义对偶地定义之（也有把在这种意义下的基的元素称为基的）．

【连续映射】 以拓扑空间 X 为定义域，而值域包含在拓扑空间 Y 中的映射 f，它在 X 的点 a 处是**连续的**（英 continuous 法 continu 德 stetig），系指下列相互等价的条件之一（从而其全部）成立．1）对于 $f(a)$ 的任意邻域 V，可适当选出 a 的某邻域 U，使 $V \supset f(U)$；1'）对于 $f(a)$ 的任意邻域 V，$f^{-1}(V)$ 是 a 的邻域；2）对于 $a \in \overline{A}$ 的任意 A，均有 $f(a) \in \overline{f(A)}$．连续性也可以用收敛的概念定义之（⇀收敛）．

当 f 在 X 的各点 x 都连续时，称映射 f 在拓扑空间 X 中**连续**或 f 是**连续映射** (continuous mapping)．为了 f 是连续映射，下列相互等价的命题是充分必要的．1）$f^{-1}(\mathfrak{O}(Y)) \subset \mathfrak{O}(X)$；1'）对于 Y 的任意基本开集 O'，$f^{-1}(O')$ 是 X 的开集；2）$f^{-1}(\mathfrak{F}(Y)) \subset \mathfrak{F}(X)$；3）对于所有的 $A \subset X$，有 $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$．其中 $\mathfrak{O}(X)$，$\mathfrak{O}(Y)$，$\mathfrak{F}(X)$，$\mathfrak{F}(Y)$ 分别表示 X，Y 的开集系，闭集系，在 3）中 $\overline{A}$ 表示在 X 中的闭包，$\overline{f(A)}$ 表示在 Y 中的闭包．由连续映射 f 所成的象 $f(X)$ 称为 X 的**连续象** (continuous image)．给定拓扑空间 X，Y，Z 和映射 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$，若 f 在 $a \in X$ 处连续，g 在 $f(a) \in Y$ 连续，则合成 $g \circ f$: $X \to Z$ 在 a 处是连续的．从而若 f，g 是连续映射，则合成 $g \circ f$ 也是连续映射．

当连续映射 $f: X \to Y$ 是双射，逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 也连续时，称 f 为**同胚** (homeomorphism) 或**拓扑映射** (topological mapping)，当这样的 f 存在时，称 X 和 Y 是**同胚的** (homeomorphic)，写做 $X \approx Y$．为了双射 $f: X \to Y$ 是拓扑映射，下列各条件是充分必要的．1）$f(\mathfrak{O}(X)) = \mathfrak{O}(Y)$；2）$f(\mathfrak{F}(X)) = \mathfrak{F}(Y)$；3）对于任意的 $A \in \mathfrak{P}(X)$，有 $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$；4）对于任意的 $A \in \mathfrak{P}(X)$，有 $(f(A))^i = f(A^i)$；5）对任意的 $x \in X$，有 $f(\mathfrak{U}(x)) = \mathfrak{U}(y)$ $(y = f(x))$．同胚是一个等价关系†．相互同胚的空间具有的共同性质称为**拓扑** (topological) 性质或**拓扑不变** (topologically invariant) 性质．判定两个拓扑空间是否同胚的问题称为**同胚问题** (homeomorphism problem)．

对映射 $f: X \to Y$ 而言，当 X 的开集 O 的象 $f(O)$ 是 Y 的开集时 $(f(\mathfrak{O}(X)) \subset \mathfrak{O}(y))$ 称 f 为**开映射** (open mapping)，当 $f(\mathfrak{F}(X)) \subset \mathfrak{F}(Y)$ 时称为**闭映射** (closed mapping)，拓扑映射是双射且为连续的开(闭)映射．

【拓扑的强弱】 设在集合 X 上定义了两个拓扑 τ_1，τ_2，若 X 的恒等映射 $I_X: X \to X$ 作为从拓扑空间 (X, τ_1) 到拓扑空间 (X, τ_2) 的映射是连续的，则称拓扑 τ_1 比拓扑 τ_2 **强** (strong)（或者说 τ_2 比 τ_1 **弱** (weak)），记为 $\tau_1 \geqslant \tau_2$（或者 $\tau_2 \leqslant \tau_1$）．设关于拓扑 τ_1，τ_2 的开集系，闭集系，邻域系，闭包分别以 $\mathfrak{O}_1$，$\mathfrak{O}_2$，$\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$，$\mathfrak{U}_1(x)$，$\mathfrak{U}_2(x)$，A^{a_1}，A^{a_2} 表示，则下列条件之一的成立是 $\tau_1 \geqslant \tau_2$ 的充分必要条件．1）$\mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}_2$ 2）$\mathfrak{F}_1 \supset \mathfrak{F}_2$；3）对于所有的 x，$\mathfrak{U}_1(x) \supset \mathfrak{U}_2(x)$；4）$A^{a_1} \subset A^{a_2}$．从而，若设在 X 上所定义的拓扑全体为 $\boldsymbol{S}$，则在 X 上所定义的拓扑的强弱关系不外是把 $\mathfrak{P}(X)$ 中按包含关系定义的序关系根据 $\tau_1 \geqslant \tau_2 \Leftrightarrow \mathfrak{O}_1 \supset \mathfrak{O}_2$ 搬过来而已．于是 $\boldsymbol{S}$ 的强弱关系 $\tau_1 \geqslant \tau_2$ 是序关系．离散拓扑是最强的拓扑．对于拓扑的集合 $\{\tau_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$，在比所有的 τ_λ 均强的拓扑中有最弱的拓扑 $\tau_1 = \sup\{\tau_\lambda\}$，在比所有的 τ_λ 均弱的拓扑中有最强的拓扑 $\tau_2 = \inf\{\tau_\lambda\}$．即 $\boldsymbol{S}$ 是完全格†．设 τ_λ 的开集系为 $\mathfrak{O}_\lambda$，τ_1，τ_2 的开集系为 $\mathfrak{O}_1$，$\mathfrak{O}_2$，则 $\mathfrak{O}_1$ 是由 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$ 生成的，而 $\mathfrak{O}_2 = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{O}_\lambda$．

根据拓扑强弱的定义可知，如果对集合 X，Y 分别确定两个拓扑 τ_1，τ_2；σ_1，σ_2，并设映射 $f: X \to Y$，1）如果从拓扑空间 (X, τ_2) 到拓扑空间 (Y, σ_1) 的映射 f 是连续的，则当 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$ 时，$f: (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_2)$ 也是连续的；2）如果 $f: (X, \tau_2) \to (Y, \sigma_1)$ 是连续的，则当 $\tau_1 \geqslant \tau_2$ 时，$f: (X, \tau_1) \to (Y, \sigma_1)$ 也是连续的．

【诱导拓扑】 设Y是拓扑空间，f是由X到Y的映射．现在对X引入拓扑，若它使f连续，则关于比它更强的X的拓扑而言，f也是连续的．使f是连续的X的最弱的拓扑称为由f诱导的(**诱导**)**拓扑** (induced topology)．设拓扑空间Y的开集系为$\mathfrak{O}(Y)$,则$\mathfrak{O}(X)=f^{-1}(\mathfrak{O}(Y))=\{f^{-1}(O)\mid O\in\mathfrak{O}(Y)\}$ 满足公理(**O**)．它所给出的拓扑便是由f诱导的拓扑．亦即使f为连续的最弱拓扑是由f诱导的拓扑．用这个术语，所谓由拓扑空间X到拓扑空间Y的映射f是连续的，可以叙述为由f诱导的拓扑比X的原来的拓扑弱．

【子空间】 对于拓扑空间X的子集M，当$x\in M$时，用$f(x)=x$定义单射$f:M\to X$，由f诱导的拓扑称为M对于X的**相对拓扑** (relative topology)．具有相对拓扑的拓扑空间M称为X的**拓扑子空间** (topological subspace)或**子空间** (subspace)．就子集叙述拓扑的诸性质时，通常是就上述拓扑而言的，为了强调这一点，常常附加**相对的** (relative) 一词．例如说成是**相对邻域，相对开(闭)集**等．在拓扑子空间M中开集系，闭集系，邻域系分别是$\mathfrak{O}(M)=\{O\cap M\mid O\in\mathfrak{O}(X)\}$，$\mathfrak{F}(M)=\{F\cap M\mid F\in\mathfrak{F}(X)\}$，$\mathfrak{U}_M(x)=\{U\cap M\mid U\in\mathfrak{U}(x)\}$．$M$的子集$A$在拓扑空间$M$中的闭包是$M\cap\overline{A}$ ($\overline{A}$是在X中的闭包)．

将拓扑空间X的各点的某邻域做为子空间，若某拓扑性质成立时，称此性质**局部地** (locally) 成立．局部地闭的子集称为**局部闭集** (locally closed set)．所谓A是局部闭集，意味着在A的各点x的适当邻域V中，$V\cap A$关于V的相对拓扑是闭集．这时可以表示为$A=O\cap F$ (O是开集，F是闭集)，反之，像这样表示的集合A是局部闭集．

【和空间，直和空间】 设对集合X的子集族$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的各元$X_\lambda$定义了拓扑$\tau_\lambda$，使$\tau_\alpha$，$\tau_\beta$在$X_\alpha\cap X_\beta$上所诱导的相对拓扑是相等的(称为$\tau_\alpha$，$\tau_\beta$在$X_\alpha\cap X_\beta$上相等)，再设$X=\bigcup X_\lambda$．设$f_\lambda:X_\lambda\to X$是由$f_\lambda(x)=x(x\in X_\lambda)$定义的单射．以使所有的$f_\lambda$均为开映射的$X$的最弱拓扑作为拓扑的拓扑空间$X$称为**和**(**拓扑**)**空间** (sum topological space)，这个拓扑称为**弱拓扑** (weak topology)．此拓扑的开集系$\mathfrak{O}$是对各λ均使$O\cap X_\lambda$为X_λ的开集的O的全体．设X为$\{X_\lambda\}$的和空间，f_λ为$X_\lambda\to X$的单射，Y为拓扑空间，映射$g:X\to Y$是连续的充分必要条件为$g_\lambda=g\circ f_\lambda$全是连续的．

当对所有的$\lambda\neq\mu$，$X_\lambda\cap X_\mu=\varnothing$时，$X=\bigcup\limits_\lambda X_\lambda$称为**直和**(**拓扑**)**空间** (direct-sum topological space)．此时X_λ在X中是既闭且开的．

【直积空间】 对集合X和映射族$f_\lambda:X\to X_\lambda$ (X_λ是拓扑空间，$\lambda\in\Lambda$) 而言，使所有的f_λ都是连续的X的最弱拓扑是存在的．设f_λ对X的诱导拓扑为τ_λ，则$\sup\{\tau_\lambda\}=\tau$即为所求．特别是，在直积集$X=\prod\limits_\lambda X_\lambda$中，使射影$\mathrm{pr}_\lambda:X\to X_\lambda$全是连续的最弱拓扑称为$X$的**直积拓扑** ((direct) product topology) 或直积空间的**弱拓扑**，具有直积拓扑的拓扑空间$X=\prod\limits_\lambda X_\lambda$称为**直积(拓扑)空间** ((direct) product topological space)．设X_λ的开集系为$\mathfrak{O}_\lambda$，则以$\bigcup\limits_\lambda \mathrm{pr}_\lambda^{-1}\mathfrak{O}_\lambda$为子基的开集系$\mathfrak{O}$确定了直积拓扑．也可以说是对有限个$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，取$x_{\lambda_i}$在$X_{\lambda_i}$中的任意邻域$U_i$，把

$$\bigcap_i \mathrm{pr}_{\lambda_i}^{-1}U_i=\prod_{\lambda\neq\lambda_1,\cdots,\lambda_n}X_\lambda\times U_1\times\cdots\times U_n$$

作为点$x=\{x_\lambda\}$的基本邻域而得到的拓扑．从拓扑空间Y到直积拓扑空间X的映射f是连续的，和对于各λ，$\mathrm{pr}_\lambda\circ f:Y\to X_\lambda$是连续的，二者是等价的．射影$\mathrm{pr}_\lambda$全是连续开映射．连续映射族$f_\lambda:X_\lambda\to Y_\lambda$的直积映射

$$\prod_\lambda f_\lambda:\prod_\lambda X_\lambda\to\prod_\lambda Y_\lambda$$

关于直积拓扑是连续的．

在直积集合$\prod\limits_\lambda X_\lambda$中，设$\mathfrak{O}_\lambda$为$X_\lambda$的开集系，现在可以考虑以

$$\mathfrak{O}_0=\prod_\lambda\mathfrak{O}_\lambda=\left\{O=\prod_\lambda O_\lambda\,\middle|\,O_\lambda\in\mathfrak{O}_\lambda\right\}$$

作为开集系的基的拓扑．称之为**箱拓扑** (box

topology）或**强拓扑**（strong topology）．这是对于各 λ，唯一地对应于点 x_λ 的一个邻域 U_λ，从而作出 $\prod_\lambda U_\lambda$，以它作为点 $x=\{x_\lambda\}$ 的基本邻域而得出的拓扑．关于箱拓扑，射影 pr_λ 是连续开映射，对于连续映射族 $f_\lambda: X_\lambda \to Y_\lambda$，直积映射 $\prod_\lambda f_\lambda: \prod_\lambda X_\lambda \to \prod_\lambda Y_\lambda$ 是连续的．就有限直积而言，直积拓扑和箱拓扑是一致的．一般地，直积拓扑则比箱拓扑弱．直积空间的拓扑通常使用直积拓扑．

【商拓扑】 给定拓扑空间 X 到集合 Y 的满射 f，若有 Y 的拓扑使 f 为连续的，则关于比它更弱的 Y 的拓扑而言，f 也是连续的．使 f 连续的 Y 的最强拓扑称为由满射 f 诱导的（**诱导**）**拓扑**．设 X 的开集系为 $\mathfrak{O}(X)$，则以 $\mathfrak{O}(Y)=\{O\mid O\subset Y, f^{-1}(O)\in\mathfrak{O}(X)\}$ 作为开集系的拓扑就是这个拓扑．特别是，对于用集合 X 的等价关系 $\sim$ 构成的商空间 $Y=X|\sim$，由标准映射 $\varphi: X\to Y$ 诱导的拓扑称为 Y 的**商拓扑**（quotient topology）或**同化拓扑**（identification topology），拓扑空间 Y 称为**商（拓扑）空间**（quotient topological space）．此时只要 $f\circ\varphi: X\to Z$ 是连续的，则映射 $f: Y\to Z$ 也是连续的．

对空间 X 作**分解**（partition, decomposition），即取 X 的子集族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，使 $X=\bigcup_\lambda A_\lambda$，$A_\lambda\cap A_\mu=\varnothing(\lambda\neq\mu)$ 成立，确定等价关系 $\sim$，使得各 A_λ 成为等价类，便得到商空间 $Y=X/\sim$．此时，Y 是将 X 中 A_λ 的各点**同化**（identify）而得到的，或者说 Y 是**同化空间**（identifying space）．此时 Y 是将各 A_λ 看做点的空间 $\{A_\lambda\}$，而标准映射 φ 则定义为当 $x\in A_\lambda$ 时 $\varphi(x)=A_\lambda\in Y$．设有拓扑空间 X 的分解 $\{A_\lambda\}$，各 A_λ 是闭集，如果对于包含 A_λ 的任意开集 U 有开集 V 存在，使得 V 是若干个 A_λ 的并集，且 $A_\lambda\subset V\subset U$，则它便称为**上半连续分解**（upper semi-continuous decomposition）．标准映射 $\varphi: X\to Y=\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是闭映射和分解是上半连续的，二者是等价的．

【Baire 空间】 就拓扑空间 X 的子集 A 而言，$X-\bar{A}$ 称为 A 的**外部**（exterior），属于它的点称为 A 的**外点**（exterior point），$\bar{A}\cap\overline{X-A}$ 称为 A 的**边界**（boundary），属于它的点称为 A 的**边界点**（boundary point, frontier point）．当 $\bar{A}=X$ 时，称 A 在 X 中是**稠密的**（dense）．$X-A$ 稠密，即 A 不含内点时，称 A 为**边缘集**（英 border set 法 ensemble frontière 德 Randmenge），当 $\bar{A}$ 是边缘集时，称 A 为**疏的**（英 nowhere dense 法 non-dense, rare 德 nirgendsdicht）．可用至多可数个疏集的并表示的集合称为**第一范畴的**（英 the first category 法 de premier catégorie, maigre）**集**，非第一范畴的集称为**第二范畴的**（the second category）**集**．在实数空间 $\boldsymbol{R}$ 中，有理数全体 $\boldsymbol{Q}$ 是第一范畴的，无理数全体 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$ 是第二范畴的，它们都是在 $\boldsymbol{R}$ 中稠密的边缘集．有限个疏集的并集是疏集，可数个第一范畴的集的并集是第一范畴的集．A 在 X 中是疏集的充分必要条件为：对于非空的任意开集 O，$O\cap A$ 在 O 中不是稠密的．

在拓扑空间 X 中，若 X 的子集 A 为第一范畴的，则其补集 $X-A$ 在 X 中稠密，这时 X 称为 **Baire 空间**（Baire space）．为了是 Baire 空间，下列各条件分别是充分必要的．1）X 的非空开集是第二范畴的集；2）对于 X 的闭集 $F_1, F_2, \cdots$，若 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$ 具有内点，则最少有一个 F_n 具有内点；3）如果 X 的开集 $O_1, O_2, \cdots$ 在 X 中都是稠密的，则 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 在 X 中也是稠密的．Baire 空间的开集作为子空间是 Baire 空间．拓扑完备空间[†]（特别是完备度量空间）是 Baire 空间（Baire-Hausdorff 定理）．局部紧 Hausdorff 空间（见后述）也是 Baire 空间．如果集合 A 可由适当的开集 O 和第一范畴的集 P_1, P_2 表示为 $A=(O\cup P_1)-P_2$，则 A 称为具有 **Baire 性质**（Baire property）．Borel 集[†]具有 Baire 性质．

【聚点】 设 x 为 X 的一点，A 为 X 的子集，若 $x\in\overline{A-\{x\}}$，则 x 称为 A 的**聚点**（英 accumulation point 法 point limite, point d'accumulation 德 Häufungspunkt）．A 的聚点集称为 A

的**导集** (derived set)，以 A' 或 A^d 表示之. $x \in A'$ 与 x 的任意邻域最少含有 x 以外的 A 的一个点，二者是等价的. $\bar{A} = A' \cup A$. $A - A' = A^s$ 的点称为 A 的**孤立点** (isolated point)，仅由孤立点组成的集合 ($A = A^s$ 时) 称为**孤点集** (isolated set) 或**离散集** (discrete set). 当 A 的任意非空子集都具有孤立点时称 A 为**无核集** (scattered set). 当 A 不具有孤立点时 ($A \subset A'$ 时)，称 A 为**自密集** (英 dense in itself). A 的自密的子集中最大者称为 A 的**自密核** (德 insichdichter Kern). 当 $A = A'$ 时称 A 为**完备集** (perfect set).

若 x 为 A 的聚点，则对于 x 的任意邻域 U，有 $U \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$，还可根据 $U \cap (A - \{x\})$ 的基数⁺而将聚点分类. 当 $U \cap A$ 的基数是 $\aleph_1$ 以上时，称 x 为 A 的**凝聚点** (condensation point). 当对所有的邻域 U，$U \cap A$ 的基数都等于 A 的基数时，称 x 为 A 的**完全聚点**或**最大聚点** (法 point d'accumulation maximée).

【可数公理】 对于拓扑空间 X 的各点 x，都有由最多可数个邻域 $U_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 所组成的 x 的基本邻域系时，称 X 满足**第一可数公理** (first countability axiom). 度量空间满足第一可数公理 ($1/n$ 邻域 $(n = 1, 2, \cdots)$ 的全体构成基本邻域系). 在第一可数公理成立的空间中，其拓扑可由点列的收敛来确定. 例如，子集 A 的闭包可表为由 A 的点所构成的点列的极限的全体 (→收敛). 当 X 具有由可数个元组成的开集系的基时，称为满足**第二可数公理** (second countability axiom) 或**完全可分的** (perfectly separable). Euclid 空间满足第二可数公理. 若 X 具有由至多可数个点所组成的稠密子集，则称 X 为**可分的** (separable). 满足第二可数公理的拓扑空间必满足第一可数公理，是可分的，且具有 Lindelöf 性质(见后述). 一般地说，其逆命题哪一个也未必正确. 第一可数公理，可分性，Lindelöf 性质全是独立的条件. 若度量空间是可分的，则满足第二可数公理. 非可分的度量空间也是存在的.

【分离公理】 在通常用到的拓扑空间 X 中，往往满足下面列举的某些**分离公理** (axiom of separation).

(T_0) Колмогоров 公理. 对于相异二点 x, y，至少存在一方譬如 x 的邻域，它不含有另一方即 y.

(T_1) 第一分离公理或 **Fréchet 公理**，对于相异二点 x, y，存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V，使 $x \notin V$，$y \notin U$.

(T_1) 和下面的 (T_1') 是等价的.

(T_1') 对于任一点 x 而言，由一点 x 所组成的集合 $\{x\}$ 是闭集.

(T_2) 第二分离公理或 **Hausdorff 公理.** 对于相异二点 x, y，存在 x 的邻域 U 及 y 的邻域 V，使 $U \cap V = \varnothing$.

(T_3) 第三分离公理或 **Vietoris 公理.** 对于任意点 x 和任意集合 A，若 $x \notin \bar{A}$，则存在开集 O_1, O_2，使 $O_1 \cap O_2 = \varnothing$，$x \in O_1$，$A \subset O_2$. (称为 x 和 A 可用开集**分离** (separate).)

这个 (T_3) 和下列的条件 (T_3')，(T_3'') 是等价的.

(T_3') 各点具有由闭集组成的基本邻域系.

(T_3'') 对于任意点 x 及任意闭集 F，若 $x \notin F$，则 x 和 F 可用开集分离.

(T_4) 第四分离公理或 **Tietze 第一公理.** 不具有共同点的任意闭集 F_1, F_2，可用开集分离(有开集 O_1, O_2，使 $F_1 \subset O_1$，$F_2 \subset O_2$，$O_1 \cap O_2 = \varnothing$).

(T_5) Tietze 第二公理. 对于任意集合 A_1, A_2，若 $A_1 \cap \bar{A}_2 = \bar{A}_1 \cap A_2 = \varnothing$，则 A_1, A_2 可以用开集分离.

容易理解 (T_5) ⇒ (T_4); (T_0) 及 (T_3) ⇒ (T_2); (T_4) 及 (T_1) ⇒ (T_3).

Урысон 定理: (T_4) 和下列各条件是等价的.

(T_4') 对于不具有共同点的任意闭集 F_1, F_2，有在 F_1 上取值 0，在 F_2 上取值 1 的 X 上的实值连续函数 $f(x)$，使 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ $(x \in X)$ 成立.

(T_4'') 在任意闭集上定义的任意实值连续函数可扩张为在 X 全体上定义的实值连续函数.

可以考虑比公理 (T_4') 更弱的公理 (T_T) 或

者更强的公理 ($\mathbf{T}_V$).

($\mathbf{T}_T$) **Тихонов 分离公理.** 对于一点 x 及闭集 F, 若 $x \notin F$, 则在 x 处为 0, 在 F 上为 1 的实值连续函数是存在的.

($\mathbf{T}_V$) Н. Веденисов 对于任意非空闭集 F, 在 F 上为 0 在其它处不为 0 的实值连续函数是存在的.

有 $(\mathbf{T}_T) \Rightarrow (\mathbf{T}_3)$; $(\mathbf{T}_V) \Rightarrow (\mathbf{T}_4')$; $(\mathbf{T}_4')$ 及 $(\mathbf{T}_1) \Rightarrow (\mathbf{T}_T)$.

用上述公理定义通常所用的拓扑空间, 如表 1. 在此表中下面的空间是上面空间的特殊化, 完备正规空间 → $\mathbf{T}_5$ 拓扑空间 → $\mathbf{T}_4$ 拓扑空间 → 完全正则空间 → $\mathbf{T}_3$ 拓扑空间 → $\mathbf{T}_2$ 拓扑空间 → $\mathbf{T}_1$ 拓扑空间 → $\mathbf{T}_0$ 拓扑空间. 度量空间是完备正规空间, 但反之一般不成立. 什么样的拓扑空间可以看做是度量空间也被考察了 (→度量空间). 在第二可数公理成立的条件下, 正则空间是正规空间 (Тихонов 定理) 且可度量化 (Тихонов-Урысон 定理).

表 1

公 理	空间的名称(有两个以上的是别名)
(T_0)	**T_0 拓扑空间, Кормогоров 空间**
(T_1)	**T_1 拓扑空间, Kuratowski 空间**
(T_2)	**T_2 拓扑空间, Hausdorff 空间, 分离空间**(法 espace séparé)
$(\mathbf{T}_0) + (\mathrm{T}_3)$	**T_3 拓扑空间, 正则空间** (regular space)
$(\mathbf{T}_1) + (\mathbf{T}_T)$	**完全正则空间** (completely regular space), **Тихонов 空间**
$(\mathbf{T}_1) + (\mathbf{T}_4)$	**T_4 拓扑空间, 正规空间** (normal space)
$(\mathbf{T}_1) + (\mathrm{T}_5)$	**T_5 拓扑空间, 完全正规空间** (completely normal space)
$(\mathbf{T}_1) + (\mathbf{T}_V)$	**完备正规空间** (perfectly normal space)

正规空间的闭子集是正规空间, 但一般的子空间未必是正规的. 拓扑空间 X 是完全正规空间的充分必要条件为: X 的任意子空间是正规空间. 正规空间是完备正规空间的充分必要条件为: 任意闭(开)集是 $G_\delta(F_\sigma)$ 集.

表 2 表示拓扑空间诸性质在子空间, 积空间, 商空间中是否有传递性. (传递时记做○, 不传递时记做×. 见 [9], [17].)

【覆盖】 集合 X 的子集族 $\mathfrak{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$,

表 2

		T_1	T_2	T_3	CR	T_4	T_5	M	C_I	C_II	C	S	L
子空间	一般	○	○	○	○	×	○	○	○	○	×	×	×
	闭集	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○
	开集	○	○	○	○	×	○	○	○	○	×	○	×
直积空间	一般	○	○	○	○	×	×	×	×	×	○	×	×
	有限积	○	○	○	○	×	×	○	○	○	○	○	×
	可数积	○	○	○	○	×	×	○	×	×	○	○	×
商空间		×	×	×	×	×	×	×	×	×	○	○	○

T_1: T_1 拓扑空间, T_2: Hausdorff 空间,
T_3: 正则空间, CR: 完全正则空间,
T_4: 正规空间, T_5: 完全正规空间,
M: 可度量化的, C_I: 第一可数公理,
C_II: 第二可数公理, C: 紧性,
S: 可分性, L: Lindelöf 性质.

当属于 $\mathfrak{M}$ 的所有集合的并集等于 X 时, $\mathfrak{M}$ 称为集合 X 的**覆盖** (covering). 对于 X 的子集 A, 若 $A \subset \bigcup_\lambda M_\lambda$(并集), 则 $\mathfrak{M}$ 称为子集 A 的**覆盖**. 当 $\mathfrak{M}$ 为有限集或为可数集时, 分别称为**有限覆盖** (finite covering) 或**可数覆盖** (countable covering), 当属于 $\mathfrak{M}$ 的各个集合都是开集或都是闭集时, 分别称为**开覆盖** (open covering) 或**闭覆盖** (closed covering). 对于 X 的任意点 x, 若能选取它的适当邻域, 使与之相交的集合($\mathfrak{M}$的元素)是有限个, 则称 $\mathfrak{M}$ 为**局部有限的** (locally finite, scattered). 属于 $\mathfrak{M}$ 的任意集合仅与属于 $\mathfrak{M}$ 的有限个集合相交或者和属于 $\mathfrak{M}$ 的其它任何集合都不相交时, 称 $\mathfrak{M}$ 为**星型有限的** (star-finite). 当 $\mathfrak{M}$ 是可数个局部有限的集族的并时, 称为 **σ 局部有限的** (σ-locally finite). 在两个覆盖 $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ 中, 属于 $\mathfrak{M}$ 的每个集合被属于 $\mathfrak{N}$ 的某个集合包含时, 称 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathfrak{N}$ 的**加细** (refinement), 记作 $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$. 当属于覆盖 $\mathfrak{M}$ 的任意 $r+1$ 个集合都无共同点, 而适当选取 r 个则有共同点时, r 称为 $\mathfrak{M}$ 的**阶** (order).

属于覆盖 $\mathfrak{M}$ 的集合中与 X 的子集 A 相交者的并集记作 $S(A, \mathfrak{M})$, 称为由 $\mathfrak{M}$ 产生的 A 的**星型集** (star). 对 X 的各点 x 构成的星型集 $S(x, \mathfrak{M})$ 的族 $\{S(x, \mathfrak{M})\}_{x \in X}$ 用 $\mathfrak{M}^\Delta$ 表示之, 属于 $\mathfrak{M}$ 的各集合 M_α 的星型集 $S(M_\alpha, \mathfrak{M})$ 的族 $\{S(M_\alpha, \mathfrak{M})\}_{M_\alpha \in \mathfrak{M}}$ 用 $\mathfrak{M}^*$ 表示之. $\mathfrak{M}^\Delta$, $\mathfrak{M}^*$

是X的覆盖. $\mathfrak{M}\prec\mathfrak{M}^{\Delta}\prec\mathfrak{M}^{*}\prec\mathfrak{M}^{\Delta\Delta}$. 对于二覆盖$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, 当$\mathfrak{M}^{*}\prec\mathfrak{N}$时, 称$\mathfrak{M}$为$\mathfrak{N}$的**星型加细**(star-refinement), 当$\mathfrak{M}^{\Delta}\prec\mathfrak{N}$时, 称为**Δ加细**(Δ-refinement).

可数个开覆盖$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots$当满足$\mathfrak{M}_{n+1}^{\Delta}\prec\mathfrak{M}_n (n=1, 2, \cdots)$时, 称为**正规列**(normal sequence), 对于覆盖$\mathfrak{M}$, 当满足$\mathfrak{M}\succ\mathfrak{M}_1$的正规列$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots$存在时, 称$\mathfrak{M}$为**正规覆盖**(normal covering). 对于拓扑空间X上的实值连续函数$f(x)$, $\{x|f(x)\neq 0\}$的闭包称为f的**支集**(carrier). X上的非负连续函数族$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$称为**单位分解**(partition of unity), 是指当设f_α的支集为C_α时, $\{C_\alpha\}$是局部有限覆盖,且对于各点$x\in X$, 有$\sum_\alpha f_\alpha(x)=1$而言. 又当$\{C_\alpha\}$是覆盖$\mathfrak{M}$的加细时,称$\{f_\alpha\}$为**从属于覆盖$\mathfrak{M}$的单位分解**. 从属于$\mathfrak{M}$的单位分解仅限于$\mathfrak{M}$是正规覆盖时存在. 若$T_1$空间$X$有伪距离† ρ, 令$\mathfrak{M}_n=\{U(x; 2^{-n})\}_{x\in X}$ ($U(x; \varepsilon)=\{y|\rho(x, y)<\varepsilon\}$), 则$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots$是开覆盖的正规列. 反之,对于开覆盖的正规列$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots$可确定伪距离$\rho$, 使得若$x\in S(y, \mathfrak{M}_n)$, 则$\rho(x, y)\leqslant 2^{-n}$, 若$x\notin S(y, \mathfrak{M}_n)$, 则$\rho(x, y)\geqslant 2^{-n-1}$. 特别是,若在任意的$x$处, $\{S(x, \mathfrak{M}_n)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$是基本邻域系,则ρ是X的距离.

【紧性】 对于拓扑空间X的任意开覆盖,如果它有有限开覆盖的加细, 则称X为**紧的**(compact); 如果它有可数开覆盖的加细, 则称X具有**Lindelöf性质**(Lindelöf property); 如果它有局部有限开覆盖的加细, 则称X为**仿紧的**(paracompact); 如果它有星型有限开覆盖的加细, 则称X具有**星型有限性**(star-finite property). 即X是紧的或具有Lindelöf性质, 是指对于X的任意开覆盖$\mathfrak{M}$, 可在$\mathfrak{M}$中选出适当有限个或可数个集合使其并集等于X而言.

下列各条件都是紧性的充分必要条件. 1) 若X的闭子集族$\{F_\lambda\}_{\lambda\in A}$具有**有限交性质**(finite intersection property), 即若$\{F_\lambda\}$中的任意有限个集合必有公共点,则$\bigcap_\lambda F_\lambda\neq\varnothing$; 2) X的任意无限子集都具有完全聚点; 3) X的任意有向点族†都具有收敛子族; 4) X的任意完全有向点族或极大滤子†都是收敛的.

若X的子集A关于相对拓扑是紧的, 则A称为**紧集**(compact set). 若A的闭包是紧的,则A称为**相对紧的**(relative compact).

【紧拓扑空间】 紧拓扑空间的闭集是紧的, Hausdorff空间的紧子集是闭集. 就从紧空间X到拓扑空间Y的连续映射f而言, 1) $f(X)$是紧的; 2) 若Y为Hausdorff空间, 则f是闭映射; 3) 若Y是Hausdorff空间, 而f是双射, 则f是同胚. 拓扑空间$\{X_\lambda\}_{\lambda\in A}$的直积空间$\prod_\lambda X_\lambda$是紧的充分必要条件为: 各$X_\lambda$是紧的(**Тихонов定理**). 紧Hausdorff空间是正规空间, 对于它可赋予距离的充分必要条件是满足第二可数公理. 对于度量空间,紧性和全有界†且完备†是等价的. 在Euclid空间中紧集和有界闭集是一致的. 在离散空间中只有有限集是紧的.

减弱紧性的条件, 1) 当X的任意点列都含有收敛子列时, X称为**列紧的**(sequentially compact). 2) 当对于X的任意可数开覆盖恒有有限开覆盖作为其加细时, X称为**可数紧的**(countably compact). 3) 当X上的任意实值连续函数都有界时, X称为**伪紧的**(pseudocompact). 也有人将可数紧的称为紧的, 将紧的称为**重紧的**(bicompact); 将紧Hausdorff空间称为**紧空间**(compact space); 将一般的紧拓扑空间称为**拟紧空间**(quasi-compact space) (N. Bourbaki [16]). 在T_1空间中可数紧性和X的任意无限子集必有聚点是等价的. 可数紧的是伪紧的,在正规空间中其逆也成立. 完备一致空间†是伪紧的, 则是紧的. 在满足第二可数公理的空间中, 列紧和紧是一致的. 列紧的是可数紧的, 在满足第一可数公理的空间中其逆也成立.

【紧化】 对于拓扑空间X, 如果有拓扑空间Y使得1) Y是紧的, 2) 从X到Y的子集X_1的同胚存在, 3) X_1在Y中稠密, 则Y称为X

的**紧化**（compactification）．若将 X 和 X_1 看做是同一的，则 X 稠密地嵌入紧空间中．对完全正则空间 X 而言，可更进一步要求，4）Y 是 Hausdorff 空间，5）X 的任意有界实连续函数可以连续地扩张到 Y 上，这样的紧化是存在的，且除同胚外它是唯一确定的．这个紧化 $\beta(X)=Y$ 称为 **Stone-Čech 紧化**（Stone-Čech compactification）．当 X 为完全正则空间时，从 X 到 $I=[0,1]$ 的连续函数的全体记为 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，而从 X 到**超平行体**（parallelotope）$I^\Lambda=\prod_\lambda I_\lambda(I_\lambda=I)$ 的映射 φ 定义为 $\varphi(x)=\{f_\lambda(x)\}_{\lambda\in\Lambda}$，则 φ 是从 X 到 $\varphi(X)$ 的同胚映射（Тихонов 嵌入定理）．再者，令 $\overline{\varphi(X)}=Y$，则 Y 是 X 的 Stone-Čech 紧化．仅限于 $X_1\times X_2$ 是伪紧的，$\beta(X_1\times X_2)=\beta(X_1)\times\beta(X_2)$ 才成立（I. Glicksberg [18]）．

对于拓扑空间 X，取不被 X 包含的一点 ∞，并集 $X\cup\{\infty\}$ 的子集 U 是开集，其定义为：当 $U\not\ni\infty$ 时，U 是 X 的开集，或当 $U\ni\infty$ 时，$X-U$ 是 X 的紧闭集（$U=X\cup\{\infty\}$ 也包括在内）．此时得到的拓扑空间 $X\cup\{\infty\}$（若 X 非紧的）是 X 的紧化，这个 $X\cup\{\infty\}$ 称为 X 的**一点紧化**(one-point compactification)(П. С. Александров)．一般地它不是 Hausdorff 空间．n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的一点紧化和 n 维球面 S^n 是同胚的．

【H 闭性】 当在以 Hausdorff 空间 X 为子空间的任何 Hausdorff 空间中，X 都是其闭集时，称 X 为 **H 闭的**（德 H-abgeschlossen）([2]，[14])．紧 Hausdorff 空间是 H 闭的．Hausdorff 空间是 H 闭的充分必要条件为：对于 X 的任意开覆盖 $\{N_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 恒可用适当的有限个 $\overline{N}_\gamma$ 覆盖 X．H 闭空间的直积拓扑空间是 H 闭的．对于任意 Hausdorff 空间 X，可做出 H 闭空间 X^*，使 $X^*=\overline{X}$（小松醇郎 [2]，p. 126）．和 H 闭同样，在包含它的任意正则空间中都是闭的那种正则空间称为 **r 闭的**（德 r-abgeschlossen）(N. Weinberg [19])．

【局部紧空间】 当在拓扑空间 X 的各点都可取出紧邻域时，称 X 为**局部紧**(locally compact) 空间．再者，在一致拓扑空间 X 中，当在各点都有相对紧的一致邻域时，称为**一致局部紧的**(uniformly locally compact)（→一致空间）．非紧的拓扑空间 X 是局部紧 Hausdorff 空间，X 的一点紧化是 Hausdorff 空间，以及 X 与某一紧 Hausdorff 空间的开集同胚，三者是等价的．此时 X 是完全正则的，对各点 $x\in X$ 而言，x 的紧的邻域全体是 x 的基本邻域系．局部紧 Hausdorff 空间 X 的任意局部闭集（从而开集以及闭集）都是局部紧的，若 Hausdorff 空间 X 的子空间 A 是局部紧的，则 A 是局部闭集．Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是局部紧的．从而**局部 Euclid 空间**（locally Euclidean space）（在各点可取出和 Euclid 空间的开集同胚的邻域的空间）是局部紧的．

【仿紧 Hausdorff 空间】 仿紧 Hausdorff 空间（也简称为仿紧空间）是正规的．就 Hausdorff 空间而言，下列各条件是等价的．1）仿紧；2）**全正规**（fully normal），即对任意开覆盖都存在 Δ 加细的开覆盖；3）对任意开覆盖都有从属于它的单位分解．另外，就正规空间而言，上列 2)，3) 可作如下的减弱：对于 T_1 空间 X 的任意有限开覆盖，存在 Δ 加细或星型加细的有限开覆盖，等价于 X 是正规空间．在正规空间中对于任意局部有限开覆盖都有从属于它的单位分解．

设 X 为连通局部紧空间，下列条件是等价的．1）X 是仿紧的；2）X 是至多可数个紧集的并集；3）在一点紧化 $X\cup\{\infty\}$ 的点 ∞ 处第一可数公理成立；4）存在 X 的局部有限开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 使 $\overline{U}_\lambda$ 是紧的；5）X 可表示为至多可数个开集 U_n 的并集，使得 $\overline{U}_n$ 是紧的，且 $\overline{U}_n\subset U_{n+1}$；6）具有星型有限性．

度量空间是仿紧的（A. H. Stone [20]）．若 X 为仿紧 Hausdorff 空间，则它在连续闭映射下的象也是仿紧的（E. Michael [21]）．X 和任意的紧 Hausdorff 空间的积空间是正规的（J. Dieudonné）．度量空间的直积空间 $\prod_\lambda X_\lambda$ 是正规的（或仿紧的），其充分必要条件为：非紧

的 X_λ 最多只有可数个 (Stone [20]).

【实紧空间】 设 X 为完全正则空间. 有一个最小的一致拓扑, 使 X 上所有实值连续函数都是一致连续的, 就这个最小的一致拓扑而言, 如果 X 是完备的, 则 X 称为**实紧的** (real compact) (→ 一致空间). 这个概念首先是由 E. Hewitt 引入的, 称之为 Q 空间. 若 X 具有 Lindelöf 性质, 它便是实紧的. 设 X_1, X_2 为实紧空间, $C(X_1)$, $C(X_2)$ 分别是 X_1, X_2 上的实值连续函数全体构成的环, 若 $C(X_1)$ 和 $C(X_2)$ 代数同构, 则 X_1 和 X_2 是同胚的 (Hewitt). 若 X 是实紧的, 则 X 和实数空间 $\boldsymbol{R}$ 的直积空间的闭子空间同胚, 其逆也成立.

【真映射】 从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f 称为**真映射** (proper mapping), 是指对任意拓扑空间 Z, 由 $g(x, z) = (f(x), z)$ 定义的映射 $g: X \times Z \to Y \times Z$ 是闭映射而言. 特别是, 若 Z 仅由一点组成时, 显然真映射 f 是闭映射. 从紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射总是真映射. 紧 Hausdorff 空间 X 由等价关系～构成商空间 Y 时, Y 成为 Hausdorff 空间, 与标准映射 $\varphi: X \to Y$ 成为真映射, 二者是等价的. 从拓扑空间 X 到由一点组成的空间 $\{y_0\}$ 的映射是真映射, 其充分必要条件为: X 是紧的.

对于局部紧 Hausdorff 空间 X, Y, 就连续映射 $f: X \to Y$ 而言, 下列三个条件是等价的. 1) f 是真映射, 2) Y 的任意紧集 K 的逆像 $f^{-1}(K)$ 是紧的. 3) 对于 X, Y 的一点紧化 $X_1 = X \cup \{x_\infty\}$, $Y_1 = Y \cup \{y_\infty\}$, 由 $f_1(x) = f(x)(x \in X)$, $f(x_\infty) = y_\infty$ 而定义 $f_1: X_1 \to Y_1$, 则 f_1 是连续的. 当 f 是真映射时, 若定义 X 的等价关系～如下: 当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, 令 $x_1 \sim x_2$. 设从商空间 $X/\sim$ 及 $f: X \to Y$ 而得到在 $X/\sim$ 上的诱导映射 $g: X/\sim \to Y$, 则 g 为 $X/\sim$ 和 $f(X)$ 的同胚.

【具有星型有限性的空间】 连通局部紧且仿紧的空间具有星型有限性. 各连通分支†是仿紧的且具有星型有限性, 是空间全体具有该性质的充分必要条件. 故局部紧且仿紧的空间具有星型有限性. 因为一致局部紧 Hausdorff 空间的连通分支是可数个紧集的和 (A. weil), 故一致局部紧空间具有星型有限性. 再者, 具有 Lindelöf 性质的正则空间也具有星型有限性 (森田紀一 [22]).

图 1, 图 2 中把迄今列举过的各种性质的相互关系用→表示出来.

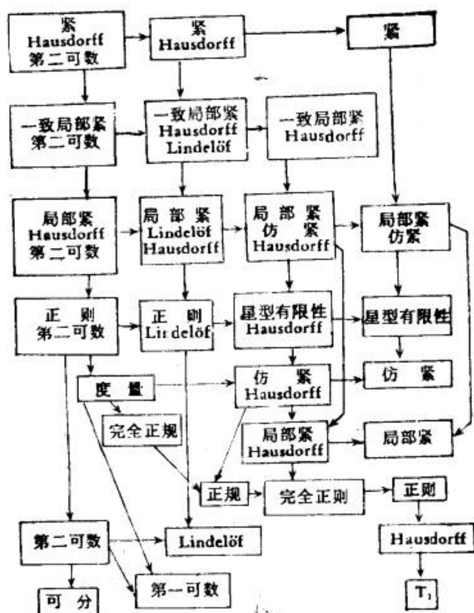


图 1

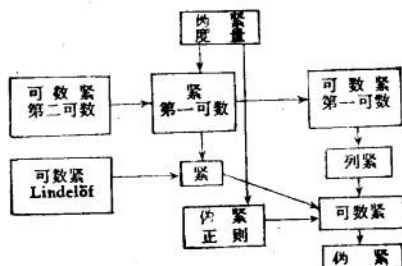


图 2

【参】 [1] 功力金二郎, 抽象空間論, 岩波数学講座, 1933; [2] 小松醇郎, 位相空間論, 岩波, 1947; [3] 中山正, 集合・位相・代数系, 至文堂, 1949; [4] 稲垣武, 点集合論, 岩波, 1949; [5] 河野伊三郎, 位相空間論, 共立出版, 1954; [6] 亀谷俊司, 集合と位相, 同演習, 朝倉, 1961; [7] 竹之内脩, トポロジー, 広川, 1962; [8] 野口広, 位

相空間論,至文堂,1964; [9] 河田敬義-三村征雄,現代数学概説II,岩波,1965; [10] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Teubner, 1914; [11] M. Fréchet, Les espaces abstraits, Gauthier-Villars, 1928; [12] C. Kuratowski, Topologie I, II, Monogr. Mat. Warsaw, I 1933, 修订版 1948, II 1950; [13] W. Sierpinski, Introduction to general topology, University of Toronto Press, 1934; [14] P. S. Alexandroff (П. С. Александров)-H. Hopf, Topologie I, Springer, 1935; [15] J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology, Princeton, 1940; [16] N. Bourbaki, Les structures fondamentales de l'analyse III, Topologie générale, Actualités Sci. Ind., Hermann, 第一分册 1940, 第三版 1960, 第二分册 1940, 修订版 1951, 第三、四分册 1948, 第五分册 1949; [17] J. L. Kelley, General topology, van Nostrand, 1955; [18] I. Glicksberg, Stone-Čech compactifications of products, Trans. Amer. Math. Soc., **90**(1959), 369—382; [19] N. Weinberg, Sur les espaces topologiques régulièrement fermés, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **31** (1941), 523—524; [20] A. H. Stone, Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **54**(1948), 977—982; [21] E. Michael, Another note on paracompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **8**(1957), 822—828; [22] K. Morita(森田紀一), Star-finite coverings and the star-finite property, Math. Japonicae, **1**(1948), 60—68; [23] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo, **22**(1906), 1—74; [24] F. Riesz, Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti del IV Congr. Intern. Mat. Roma 1908, 11, 18—24, Rome, 1909; [25] J. G. Hocking-G. S. Young, Topology, Addi son-Wesley, 1961; [26] L. Gillman-M. Jerison, Rings of continuous functions, van Nostrand, 1960; [27] S. A. Gaal, Point set topology, Academic Press, 1964; [28] E. Čech, Topological spaces, Academia, 1966; [29] J. Nagata (長田潤一), Modern general topology, Noordhoff, 1968; [30] R. Engelking, Outline of general topology, North-Holland and Polish Scientific Publishers, 1968.

度量空间 [英 metric space 法 espace métrique 德 metrischer Raum 俄 метрическое пространство 日 距離空間] n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中二点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的距离是

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

一般地,有 $\rho(x, y) \geqslant 0$ 且满足

I) $\rho(x, x) = 0$, 反之, 若 $\rho(x, y) = 0$, 则 $x = y$,

II) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

III) 对任意三点 x, y, z,

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y, z).$$

III) 称为**三角定律** (triangle law).

将 Euclid 空间的距离概念抽象化, M. Fréchet (1906) 定义了度量空间.

【度量空间的定义】 当集合 X 的任意二元素 x, y, 唯一地对应着一个非负实数 $\rho(x, y)$, 满足上述公理 I), II), III) 时,称为对 X 赋予了**距离**或者**度量** (metric). X 和 ρ 的组 (X, ρ) 或单独的 X 称为**度量空间**. X 的元素称为点, ρ 称为**距离函数** (distance function), $\rho(x, y)$ 称为**二点** x, y 的**距离** (distance). 距离函数也可以写做 $d(x, y)$, $\mathrm{dis}(x, y)$ (distance 的简写). 另外将 I) 减弱为

I′) $\rho(x, x) = 0$

时, 称为**伪距离** (pseudo-distance), X 称为**伪度量空间** (pseudo-metric space).

度量空间的例子. 1) n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$, 特别是,实数集 $\boldsymbol{R}$, $\rho_1(x, y) = |x-y|$. 2) 函数空间 $L_p(\Omega)^\dagger$. 3) 函数空间 $C(\Omega)^\dagger$. 4) 数列空间 s, 即以实数序列为点的空间 ($\boldsymbol{R}^N$), 二点 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$, $y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots)$ 的距离定义为

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|/(1+|x_n - y_n|).$$

5) 数列空间 m, 即有界实数序列组成的空间, 二点 $x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$, $y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots)$ 的距离定义为 $\rho(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$. 6) **Baire 零维空间** (Baire's zero space). 对于集合 Ω, $\Omega^N \ni x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$, $y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots)$ 的距离 $\rho(x, y)$ 定义为使 $x_n \neq y_n$ 成立的最小的 n 的倒数. 7) 在任意集合 X 中,由 $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ $(x \neq y)$ 定义 ρ, 则 X 是度量空间. 称之为**离散度量空间** (discrete metric space). 8) 在任意集合 X 中, 若对所有的元素 x, y, 定义 $\rho(x, y) = 0$, 则 ρ 是伪距离,此时 X 称为**平凡伪度量空间**.

对于度量空间 X 的子集 M, $\sup\{\rho(x, y) | x, y \in M\}$ 称为 M 的**直径** (diameter), 直径为有限的集合 M 称为**有界的** (英 bounded 法 borné 德 beschränkt). 对于二子集 A, B, $\inf\{\rho(x, y) | x \in A, y \in B\}$ 称为 A, B 的**距离**, 记做 $\rho(A, B)$. 有 $\rho(A, B) = \rho(B, A)$. 当度量空间 X 的子集族 $\mathfrak{M} = \{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 X 的覆盖

时，即当 $X=\bigcup_{\lambda} M_\lambda$（并集）时，将属于 $\mathfrak{M}$ 的各集合 M_λ 的直径 $d(M_\lambda)$ 的上限 $\sup\{d(M_\lambda)|\lambda\in\Lambda\}$ 称为**覆盖网格的宽度**（mesh of covering）。对于正数 ε，当覆盖网格的宽度不超过 ε 时，称 $\mathfrak{M}$ 为 **ε 覆盖**（ε-covering）。当对于任意正数 ε，均存在有限个子集组成的 ε 覆盖时，X 称为**全有界的**（totally bounded）。度量空间 X 的任意子集 X_1，若用 X 的距离 ρ 定义 $x, y\in X_1$ 的距离为 $\rho_1(x, y)=\rho(x, y)$，则 X_1 关于距离函数 ρ_1 是度量空间。(X_1, ρ_1) 称为 (X, ρ) 的**度量子空间**（metric subspace）。所谓子集是**全有界的**，系指作为度量子空间是全有界的而言。全有界集必是有界集。在 n 维 Euclid 空间中有界集必是全有界的。

在二度量空间 X_1, X_2 之间，当有双射 $f:X_1\to X_2$，对于 X_1 的任意二点 x, y，使得 x, y 的距离都和 $f(x), f(y)$ 的距离相等时，即在 f 之下保持距离不变时，f 称为**等距映射**（isometric mapping），X_1，X_2 称为**等距的度量空间**。

设 X 为具有距离函数 ρ 的度量空间，而 f 是从 Y 到 X 的双射。对于 Y 的任意二点 y_1, y_2，如果规定 $\rho'(y_1, y_2)=\rho(f(y_1), f(y_2))$，则 ρ' 为距离函数，而 Y 是度量空间。称为由映射 f **诱导的度量空间**（induced metric space）。此时，f 为等距映射。

对于 n 个度量空间 $(X_1,\rho_1),\cdots,(X_n,\rho_n)$，直积集 $X=X_1\times\cdots\times X_n$ 的任意二点 $(x_1,\cdots,x_n), (y_1,\cdots,y_n)$ 的距离 ρ，若规定为

$$\rho((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) =\sqrt{\rho_1(x_1, y_1)^2+\cdots+\rho_n(x_n, y_n)^2},$$

则 (X, ρ) 是度量空间。称为 $(X_1, \rho_1), \cdots (X_n, \rho_n)$ 的**积度量空间**（product metric space）。n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 是 n 个实数全体的度量空间 $(\boldsymbol{R}, \rho_1)$ 的积度量空间。

【度量空间的拓扑】 对于度量空间 (X,ρ) 的任意点 x，及任意正数 ε，$U_\varepsilon(x)=\{y|\rho(x, y)<\varepsilon\}$ 称为 x 的 **ε 邻域**（ε-neighbourhood）。把 ε 邻域的全体作为基本邻域系†可以对于 X 引入拓扑（→拓扑空间）。即：1）子集 O 是开集，系指对于属于 O 的任意点 x，取充分小的正数 ε，可使 x 的 ε 邻域被 O 包含。2）子集 F 是闭集，系指若点 x 的任意 ε 邻域都含有 F 的点，则必有 $x\in F$。3）子集 U 是 x 的邻域，系指 x 的某个 ε 邻域被 U 包含。4）x 是子集 A 的内点，系指 x 的某个 ε 邻域被 A 包含，内点的全体是 A 的开核 A^i。5）x 是 A 的触点，系指 x 的所有 ε 邻域均含有 A 的点。触点的全体是闭包 $\overline{A}$。$x\in\overline{A}$ 与 $\rho(x, A)=0$ 是等价的。用上述的任意一个作为定义均可对 X 引入拓扑。

设 X 为度量空间，则 X 满足第一可数公理。X 是 Hausdorff 空间，而且 X 也是正规空间。因度量空间的子集也是度量空间，故 X 的所有子空间都是正规的，即 X 是完全正规空间。另外，度量空间是仿紧的。

对伪度量空间也可以同样规定拓扑。它也满足第一可数公理。但一般不是 Hausdorff 空间。

【点列的收敛】 对于度量空间 X 的点列 $\{x_n\}$，当存在点 x，使 $\rho(x_n, x)\to 0(n\to\infty)$ 时，称 $\{x_n\}$ **收敛**于 x，记作 $\lim x_n=x$，称 x 为 $\{x_n\}$ 的**极限**。这个收敛和拓扑意义下的收敛是一致的（→收敛）。因第一可数公理成立，拓扑也可用点列收敛来定义。即能够表示为属于 A 的点列的极限的点的全体等于 $\overline{A}$。

【可分度量空间】 对于度量空间 X，下列条件是等价的：1）有由 X 的可数个开集组成的集族 $\mathfrak{O}_0$，使得 X 的所有开集均可以表示为属于 $\mathfrak{O}_0$ 的开集的并（第二可数公理†成立）；2）在 X 中稠密的 X 的可数子集存在（是可分的†）；3）对于 X 的任意开覆盖 $\mathfrak{M}$，从 $\mathfrak{M}$ 中可选出可数个开集覆盖 X（具有 Lindelöf 性质†）。此时这个度量空间称为**可分度量空间**（separable metric space）。数列空间 s 是可分的。可分度量空间可以不改变距离而嵌入数列空间 m 中。即等距于 m 的子空间。

【紧度量空间】 关于度量空间 X，下列条件是等价的。1）对于 X 的任意开覆盖 $\mathfrak{M}$，从 $\mathfrak{M}$ 中可选出有限个开集，使其并集等于 X（是紧的†）；2）对于 X 的任意可数开覆盖 $\mathfrak{M}$，从 $\mathfrak{M}$

中可选出有限个开集，使其并集等于X(是可数紧的†)；3) X的任意点列$\{x_n\}$都具有收敛子序列(是列紧的†)；4) 对于非空闭集序列$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \cdots$，属于所有$F_n$的点必存在；5) 任意无限子集$M$必具有聚点$x$(即$x \in \overline{M - x}$)。此时称$X$为**紧度量空间**(compact metric space)。紧度量空间上的实值连续函数必具有最大值和最小值。

紧度量空间是全有界的。全有界的度量空间是可分的。特别是，紧度量空间是可分的。对于紧度量空间X的开覆盖$\mathfrak{U} = \{U_\lambda\}$，必有一个正数$\delta$，使直径小于$\delta$的子集$A$必定包含在某个$U_\lambda$中。此$\delta$称为开覆盖$\mathfrak{U}$的**Lebesgue数**(Lebesgue number)。

所谓度量空间的子集A是**紧的**，系指作为度量子空间它是紧的，若$\overline{A}$是紧的，则A称为**相对紧的**。实数的有界闭区间，Euclid空间$\boldsymbol{R}^n$的有界闭集是紧的。将这一事实用条件1)，4)，5)叙述时，分别称为**Heine-Borel定理**或**Borel-Lebesgue定理**，**Cantor交定理**，**Bolzano-Weierstrass定理**。

【直积空间的拓扑】 关于度量空间$(X_1, \rho_1), \cdots, (X_n, \rho_n)$，如果对于它们的直积集$X = \prod_{i=1}^{n} X_i$的任意二点$x = (x_1, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, \cdots, y_n)$，用$\rho_p(x, y) = (\rho_1(x_1, y_1)^p + \cdots + \rho_n(x_n, y_n)^p)^{\frac{1}{p}}$，$p \geqslant 1$，$\rho_\infty(x, y) = \max_i \{\rho_i(x_i, y_i)\}$确定$X$的距离，则用这些距离所确定的$X$的拓扑全都和$X$的直积拓扑一致。特别是，在$n$维Euclid空间$\boldsymbol{R}^n$中，由$\rho_p(p \geqslant 1)$及$\rho_\infty$可以确定同一拓扑。

关于可数个度量空间$(X_1, \rho_1), \cdots, (X_n, \rho_n), \cdots$，如果对于直积集$X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$的任意二点$x = (x_1, x_2, \cdots)$，$y = (y_1, y_2, \cdots)$，用

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}$$

定义距离ρ，则由ρ所确定的拓扑和X的直积拓扑一致。在非可数无限个度量空间的直积集中要想定义距离，使由距离所确定的拓扑和直积拓扑一致是不可能的。

【一致拓扑】 度量空间是一致空间，作为一致性†的基，可取$X \times X$的可数个子集$\{(x, y) | \rho(x, y) < 1/2^n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ (→一致空间)。

【一致连续】 由度量空间(X, ρ)到度量空间(Y, σ)的映射f是**连续的**(continuous)，系指对于X的各点x及任意正数ε，可以确定一正数δ，使$f(U_\delta(x)) \subset V_\varepsilon(f(x))$ (其中$V_\varepsilon(y) = \{y' | \sigma(y, y') < \varepsilon\}$)，即若$\rho(x, x') < \delta$，则$\sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon$。这个$\delta$一般依赖于$x$及$\varepsilon$，特别是，当$\delta$与$x$无关，仅由$\varepsilon$可以确定(对$x \in X$，选取共同的$\delta$)时，$f$是**一致连续的**(uniformly continuous)。(一致连续的概念可推广到一致拓扑空间)。连续映射未必是一致连续的。特别是，从紧度量空间X到度量空间Y的连续映射必定是一致连续的。

【完备度量空间】 度量空间(X, ρ)的点列$\{x_n\}$是**基本序列**(fundamental sequence)或是**Cauchy序列**(Cauchy sequence)，系指当$m, n \to \infty$时，$\lim \rho(x_m, x_n) = 0$成立。收敛点列是基本序列，但基本序列未必收敛。当所有基本序列都收敛时，度量空间(X, ρ)称为**完备的**(complete)。例1)，2)，3)，4)，5)的度量空间是完备的。但在例3)中须设Ω是紧Hausdorff空间。紧度量空间是完备的；反之，度量空间是紧的，其充分必要条件是全有界且完备。

对于度量空间X，可以确定一个完备度量空间Y及从X到Y的子集X_1上的等距映射φ，使$\overline{X}_1 = Y$。(Y, φ)称为X的**完备化**或**完备扩张**(completion)。X的完备化在下列意义下本质上是唯一的。若X有两个完备化(Y_1, φ_1)，(Y_2, φ_2)，则有从Y_1到Y_2上的等距映射f，使$\varphi_2 = f \circ \varphi_1$。对于$X$的完备化$(Y, \varphi)$，若将$X$和$\varphi(X)$看做是同一的，则度量空间恒可看做是完备度量空间的稠密子空间。若将有理数全体$\boldsymbol{Q}$完备化，则得实数全体$\boldsymbol{R}$。

Baire-Hausdorff定理：在完备度量空间X中，第一范畴的集†是边缘集†。即就至多可数个其闭包不含内点的集合而言，其并集必不具

有内点．这一条件与下述条件等价：对 X 的任意闭集 $F_1, F_2, \cdots$，若 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 具有内点，则必有某个 F_n 具有内点．

【度量化问题】 如果能够给予拓扑空间 X 以适当的距离，使由此距离确定的拓扑与 X 原来的拓扑一致，则称拓扑空间 X 为**可距离化的**或者**可度量化的** (metrizable)． 满足第二可数公理†的 T_1 空间†，其可度量化的充分必要条件是它为正则空间† (Урысон-Тихонов 定理)． 但度量空间未必满足第二可数公理，故上述定理不是可度量化的充分必要条件．

可度量化的充分必要条件有如下列． 1) 对于拓扑空间 X 的任意二点 x, y，恒对应着非负实数 $d(x, y)$，除距离公理 I), II) 之外它还满足 III′)：有实值函数 φ，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\varphi(\varepsilon) \to 0$，对于任意三点 x, y, z 及任意正数 ε，若 $d(x, y) < \varphi(\varepsilon)$，$d(y, z) < \varphi(\varepsilon)$． 则必有 $d(x, z) < \varepsilon$ (E. W. Chittenden 1917)． 2) 在 T_1 空间 X 中，有 X 的可数个开覆盖族 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots$，i) 对于 $\mathfrak{M}_{n+1} \ni U_1, U_2$ 而言，若 U_1, U_2 有共同点，则必有 U 存在，使 $U \in \mathfrak{M}_n$，$U_1 \cup U_2 \subset U$；ii) 对于 X 的任意点 x，取含 x 且属于 $\mathfrak{M}_n$ 的任意开集 U_n，则 $\{U_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 是基本邻域系 (П. С. Александров, П. С. Урысон 1923 及 N. Aronszajn)． 3) X 为 T_1 空间，在各点 x，可取可数基本邻域系 $\{U_n(x)\}$ 及邻域序列 $\{S_n(x)\}$，使得 i) 若 $y \notin U_n(x)$，则 $S_n(y)$ 和 $S_n(x)$ 没有共同点；ii) 若 $y \in S_n(x)$，则 $S_n(y) \subset U_n(x)$ (長田潤一[1])． 4) X 为正则的并具有 σ 局部有限基 (Nagata (長田潤一), J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., **1**(1950); Ju. M. Smirnov (Ю. М. Смирнов), Успехи Мат. Наук **6** (1951))．

【度量空间的商空间】 设从度量空间 X 到拓扑空间 Y 上的满射 f 是连续闭映射． Y 是可度量化的，其充分必要条件为：对每一点 $y \in Y$，逆像 $f^{-1}(y)$ 在 X 中是紧的． (见 A. H. Stone [4]，森田紀一-花井七郎 [5])． 任意度量空间均可表为由某个 Baire 零维空间的子空间的连续闭映射所确定的商空间(森田)．

【参】 →拓扑空间的[参]．其他：[1] J. Nagata (長田潤一), A contribution to the theory of metrization, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., **8** (1957), 185—192; [2] K. Morita (森田紀一), A condition for metrizability of topological spaces and for n-dimensionality, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, **5**(1955), 33—36; [3] A. H. Stone, Non-separable Borel sets, Rozprawy Mat., **28**(1962); [4] A. H. Stone, Metrizability of decomposition spaces, Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956), 690—700; [5] K. Morita (森田紀一)-S. Hanai (花井七郎), Closed mappings and metric spaces, Proc. Japan Acad., **32**(1956), 10—14.

收敛 [英 convergence 法 convergence 德 Konvergenz 俄 сходимость 日 収束] 在实数范围内收敛的概念，首先是对于数列，函数序列，级数，定积分等引入的(→级数，积分学)． 随后，将它一般化，而在有序集†中定义，现在它已应用到度量空间†，拓扑空间†，一致空间†中去了．

【数列的收敛】 所谓数列 $\{a_n\}$ 是**收敛的** (convergent) 或者**收敛**(converge)于 a，系指对于任意正数 ε，可以选取适当的(充分大的)自然数 n_0，使得对于比 n_0 大的所有 n，均有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立． 这时写做 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ 或 $a_n \to a$，a 称为数列 $\{a_n\}$ 的**极限** (limit)． 数列的极限如果存在则是唯一的．

关于实数的集合 A，若存在某实数 b，使 $a \leqslant b (a \in A)$ 时，则 A 称为**上方有界的**，使 $a \geqslant b (a \in A)$时，A 称为**下方有界的**，当上下方都有界时称为**有界的** (bounded)． 关于实数序列 $\{a_n\}$，当 $a_n \leqslant a_{n+1}$ (或 $a_n \geqslant a_{n+1}$) ($n = 1, 2, \cdots$) 时，称为**单调递增的** (monotone increasing) (或**单调递减的** (monotone decreasing))，写做 $a_n \uparrow a (a_n \downarrow a)$．

【数列收敛的判断】 有界单调的实数序列 $\{a_n\}$ 是收敛的，其极限当单调递增时为 $\sup\{a_n\}$，当单调递减时为 $\inf\{a_n\}$． 关于任意的有界实数序列 $\{a_n\}$，令 $\alpha_n = \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$，$\beta_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$，则 $\alpha_n \leqslant a_n \leqslant \beta_n$，$\{\alpha_n\}$，$\{\beta_n\}$ 分别为单调递增，单调递减的． 从而，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n (= \sup_n \alpha_n)$，$\lim_{n\to\infty} \beta_n (= \inf_n \beta_n)$ 是存在的． 分别称为数列 $\{a_n\}$ 的**下限** (inferior limit)，**上限** (superior limit)，分别以 $\liminf_{n\to\infty} a_n$ 或 $\underline{\lim}\, a_n$，

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ 或 $\overline{\lim} a_n$ 表示之. 数列 $\{a_n\}$ 的收敛子序列的极限值，称为该数列的**聚值**（英 accumulation value　德 Häufungswert). 对于有界的实数序列，聚值的集合的上确界、下确界分别为上限、下限. 上限 b 也可以说是具有下述性质的数 b: “对于任意正数 ε, 使 $b+\varepsilon<a_n$ 成立的 n 是有限个，使 $b-\varepsilon<a_n$ 成立的 n 是无限个”. 下限也有同样的性质.

关于实数序列 $\{a_n\}$, 如果存在实数序列 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{u_n\}$ 是单调递增的, $\{v_n\}$ 是单调递减的, $u_n\leqslant a_n\leqslant v_n$, 且 $\lim(v_n-u_n)=0$, 则 $\lim a_n$ 存在,且等于 $\lim u_n=\lim v_n$ (**区间套公理**). 特别是，若 $\limsup a_n=\liminf a_n$, 则 $\lim a_n$ 存在，其逆也成立. 若 $\lim a_n=a$, 则当 $n, m\to\infty$ 时 $|a_n-a_m|\to 0$, 其逆也成立. 即对于任意正数 ε, 若能确定自然数 n_0, 使对于 $n, m\geqslant n_0$ 的所有 n, m, 均有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$, 则 $\{a_n\}$ 是收敛的(**Cauchy 判别准则** (Cauchy's criterion)).

【无穷大】 当实数集 A 上方无界时，形式地表示为 $\sup A=+\infty$, 下方无界时形式地表示为 $\inf A=-\infty$. 在实数序列 $\{a_n\}$ 中，当对于任意实数 b, 均有自然数 n_0, 使对所有的 $n\geqslant n_0$ 均有 $a_n>b$ 时，表示为 $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$. $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 也是类似的. 记号 $+\infty$, $-\infty$ 分别称为正**无穷大** (infinity)、负**无穷大**, 当 $\lim a_n=+\infty(-\infty)$ 时，称其极限值是 $+\infty(-\infty)$. 这时称数列 $\{a_n\}$ 是**发散的** (divergent), 或习惯上说**发散** (diverge) 于正（负）无穷大. 若当 $\sup\{a_n\}=+\infty$ 时，规定 $\limsup a_n=+\infty$, 当 $\inf\{a_n\}=-\infty$ 时,规定 $\liminf a_n=-\infty$, 则,关于上限、下限及极限的结论在含有 $\pm\infty$ 时也成立.

在发散数列中，$\lim a_n=+\infty(-\infty)$ 者称为**定发散的**，其它的称为**不定发散的或振动的** (oscillate).

关于数列的极限，下列公式成立. 若 $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$, 则 $\lim(\alpha a_n\pm\beta b_n)=\alpha a\pm\beta b$, $\lim a_n b_n=ab$. 又若 $b_n\neq 0$, $b\neq 0$, 则 $\lim(a_n/b_n)=a/b$. 在实数序列的情况，当 a 或 b 是无穷大时这些性质也成立. 但须解释为: 对实数 α, 有 $\alpha\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$ $(\alpha>0)$, $\alpha\cdot(\pm\infty)=\mp\infty(\alpha<0)$, $\alpha\pm\infty=\pm\infty$, $\alpha/\pm\infty=0$. 而 $0\cdot(\pm\infty)$, $+\infty+(-\infty)$, $\pm\infty/\pm\infty$ 的情况须除外.

【点列的收敛】 关于拓扑空间（→拓扑空间)中的点列 $\{a_n\}$ 和点 a 而言，所谓点列 $\{a_n\}$ **收敛** (converge) 于 a, 是指对于 a 的任意邻域 U, 均可选取适当的自然数 n_0, 使得对于 $n\geqslant n_0$ 的所有 n, 均有 $a_n\in U$. a 称为 $\{a_n\}$ 的收敛点，**极限点** (limiting point) 或简称为**极限** (limit), 表示为 $\lim_{n\to\infty} a_n=a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$.

特别是,实数全体 $\boldsymbol{R}$ 是拓扑空间,而点 a 的邻域是包含区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$($\varepsilon$ 是正数) 的集合，故实数序列的极限是在拓扑空间中的极限的特殊情形. 设在 $\boldsymbol{R}$ 上添加记号 $+\infty$, $-\infty$, 记为 $\bar{\boldsymbol{R}}$, 引入序 $-\infty<\alpha<+\infty$ $(\alpha\in\boldsymbol{R})$, 设 $+\infty(-\infty)$ 的邻域为对于某个 $\alpha\in\boldsymbol{R}$, 含 $\{x>\alpha\mid x\in\bar{\boldsymbol{R}}\}$($\{x<\alpha\mid x\in\bar{\boldsymbol{R}}\}$) 的 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的子集，则 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 是拓扑空间, $\lim a_n=+\infty(-\infty)$ 便是在拓扑空间 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 中点列的极限. $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的元素称为**广义实数** (generalized real number).

特别是，当拓扑空间是具有距离函数 ρ 的度量空间（→度量空间）时, $a_n\to a$ 和 $\rho(a_n, a)\to 0$ 是等价的.

关于拓扑空间的点列的收敛，下述性质 **S**) 成立. **S**) 1) 若关于所有的 n, 均有 $a_n=a$, 则 $a_n\to a$; 2) 若 $a_n\to a$, 则关于 $\{a_n\}$ 的任意子序列 $\{a_{k_n}\}$, 必有 $a_{k_n}\to a$; 3) 关于一点 a 和点列 $\{a_n\}$,若对于 $\{a_n\}$ 的任意子序列 $\{a_{k_n}\}$ 而言, $\{a_{k_n}\}$ 都有子序列收敛于 a, 则 $a_n\to a$. 特别是，就 Hausdorff 空间†(例如度量空间)而言还有: **S***) 若有 a 使 $a_n\to a$, 则这样的点 a 是由 $\{a_n\}$ 唯一确定的(极限是唯一的).

【函数值的极限】 设实变数 x 的实值函数 f 在 a 的某邻域内除点 a 外都有定义，所谓 $\lim_{x\to a} f(x)=b$ 或当 $x\to a$ 时 $f(x)\to b$, 是指对于任意正数 ε,均可选取正数 δ, 使得“若 $0\neq|x-$

$a| < \delta$，则 $|f(x) - b| < \varepsilon$”成立．当改为“若 $a < x < a + \delta$，则 $|f(x) - b| < \varepsilon$”时，称为“当 $x \to a + 0$ 时 $f(x) \to b$”．至于“当 $x \to a - 0$ 时 $f(x) \to b$”也可相应地定义．当 $b = +\infty\,(-\infty)$ 时，也按数列时那样定义之．“当 $x \to +\infty$ 时 $f(x) \to b$”的定义，是指对于任意正数 ε，可以选择实数 k，使“若 $x > k$，则 $|f(x) - b| < \varepsilon$”成立．当 $x \to -\infty$ 时，或当 $b = \pm\infty$ 时也可同样定义之．

一般地，从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射 f，对于 X 的定点 a 和 Y 的定点 b，$\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ 或“当 $x \to a$ 时 $f(x) \to b$”，是指对于 b 的任意邻域 V，均可选取 a 的适当的邻域 U，使 $f(U \cap D - \{a\}) \subset V$．在此 D 表示 f 的定义域（在 a 点 f 未定义亦可）．若 Y 是 Hausdorff 空间，当确定 f 和 a 时，这样的 b 如果有就是唯一的．这个 b 称为当 $x \to a$ 时 $f(x)$ 的**极限值**（limiting value）或**极限**（limit）．

如上所述，在 $\bar{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ 中引入拓扑，关于实值函数 f 的 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$，可以解释为将 f 看做从拓扑空间 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 到 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的映射时的极限．易知，普通的极限和由 $\boldsymbol{R}$ 的拓扑确定的极限是一致的．若当 $x \to a(\pm\infty)$ 时 $f(x) \to +\infty(-\infty)$，虽称其极限值是 $+\infty(-\infty)$，但通常也说发散于 $+\infty(-\infty)$，和数列的情形相同．设自然数列为 $\boldsymbol{N}$，在 $\boldsymbol{N} \cup \{+\infty\} = \bar{\boldsymbol{N}}$ 中如果作为 $\bar{\boldsymbol{R}}$ 的子空间而引入相对拓扑†，则实数序列（点列）的极限和映射 $\bar{\boldsymbol{N}} \to \bar{\boldsymbol{R}}$ 的极限是一致的．

关于从度量空间 X 到度量空间 Y 的映射 f，“当 $x \to a$ 时 $f(x) \to b$”，和对于任意正数 ε，均可选取正数 δ，使得“若 $0 \ne \rho_X(x, a) < \delta$，则 $\rho_Y(f(x), b) < \varepsilon$”成立是一致的．其中 ρ_X 是 X 的距离，ρ_Y 是 Y 的距离．这和“关于任意 $x_n \to a$ 的点列 $\{x_n\}$，均有 $f(x_n) \to b$”是一致的．

因复数的全体 $\boldsymbol{C}$ 是和平面等距的度量空间（→复数），当 $X = \boldsymbol{C}$ 或 $Y = \boldsymbol{C}$ 时，关于复数 z_1, z_2 的距离 $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$，便成为上述的特殊情形．再者，如添加无穷远点†$\infty$ 于 $\boldsymbol{C}$ 上，构成 Riemann 球面† $\bar{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$，在 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 上如规定 ∞ 的邻域为含 ∞，且含 $\{z \mid |z| > r$（r 是正数）$\}$ 的 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 的子集，则在 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 上引入了拓扑．于是，“当 $z \to \infty$ 时 $f(z) \to b$”，“当 $x \to a$ 时 $f(x) \to \infty$”等，便是把 f 看做从 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 或到 $\bar{\boldsymbol{C}}$ 的映射而定义的．$f(z) \to \infty$ 和 $1/f(z) \to 0$ 是等价的．

【无穷大的阶，无穷小的阶】 复值函数 f（$X \to \boldsymbol{C}$ 的映射），当 $x \to a$ 时 $f(x) \to \infty$ 或 $f(x) \to 0$ 的情形，分别简称为 f 在 a 为**无穷大**（infinity）或为**无穷小**（infinitesimal）．对于两个无穷大 f, g，当 f/g 是无穷小时称 f 是比 g **低阶的**（lower order）**无穷大**，称 g 是比 f **高阶的**（higher order）**无穷大**．当 f/g，g/f 都有界时，称 f, g 是**同阶的**（same order）**无穷大**，表示为 $f \sim g$．这个关系是等价关系．当 $f \sim g^n$ 时，称 f 是关于 g 的 **n 阶无穷大**．当 f, g 都是无穷小时，若 f/g 是无穷小，则称 f 是比 g **高阶的无穷小**，g 是比 f **低阶的无穷小**．可以和无限大的情况同样地定义**同阶无穷小**，**n 阶无穷小**．特别是，在 $X = \boldsymbol{C}$，$a = \infty$ 时，我们把“在 ∞”省略了．又关于在 ∞ 为无穷大时，如 $g(z) = z$，为无穷小时，如 $g(z) = z^{-1}$ 的情况，则把“关于 g”也省略了，当 $f \sim z^n$ 或 $f \sim z^{-n}$ 时通常把 n 称为**无穷大的阶或无穷小的阶**．

为了简单地记述无穷大的数，无穷小的数，自 E. Landau（[10]）以来惯常使用以下的记号．若 f, g 是无穷大，当 $x \to a$ 时 $|f(x)/g(x)|$ 有界，则称 $f(x)$（至多）有 $g(x)$ 的**阶**（order 德 Ordnung），写做当 $x \to a$ 时 $f(x) = O(g(x))$，当 $f(x)/g(x)$ 在 a 为无穷小时，则称 $f(x)$ 比 $g(x)$ 有较小的阶，写做当 $x \to a$ 时 $f(x) = o(g(x))$．O, o 来源于 Ordnung 的字头，称之为 **Landau 符号**（Landau's symbol）．$f(x) = h(x) + O(g(x))$ 的意义是 $f(x) - h(x) = O(g(x))$．使用 O, o 时虽然必须明确指出“当 $x \to a$ 时”，但在不致发生误解时，特别是在讨论复变函数而 $a = \infty$ 时常常可以省略．在数列 $\{a_n\}$ 的情形下，也使用同样的符号．当然是指在 $n \to \infty$ 时．

【有向点族的收敛】 **Moore-Smith 收敛** (Moore-Smith convergence). 从某有向集† $\mathfrak{A}$ 全体到集合 X 的单值映射 $\alpha \to x_\alpha(\alpha \in \mathfrak{A})$,即以 $\mathfrak{A}$ 为指标集的点族,称为在 X 的**有向点族** (directed family of points),或**有向点集**或**有向点列**,用 $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, $\{x_\alpha\}_{\mathfrak{A}}$ 或 $\{x_\alpha\}$ 表示之. 对于任意的 $Y \subset X$,当 $\{\alpha | x_\alpha \in Y\}$ 或 $\{\alpha | x_\alpha \in X - Y\}$ 至少有一方在 $\mathfrak{A}$ 中同尾†时,$\{x_\alpha\}$ 称为**完全有向点族** (complete directed family of points). 在两个有向点族 $\{x_\alpha\}_{\mathfrak{A}}$, $\{y_\beta\}_{\mathfrak{B}}$ 之间,作为集合有 $\{x_\alpha | \alpha \in \mathfrak{A}\} \supset \{y_\beta | \beta \in \mathfrak{B}\}$ 时,$\{y_\beta\}_{\mathfrak{B}}$ 称为 $\{x_\alpha\}_{\mathfrak{A}}$ 的**部分有向点族** (partial directed family of points),如果对于任意的 $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$,恒可选取适当的 $\beta_0 \in \mathfrak{B}$,使 $\{x_\alpha | \alpha \geqslant \alpha_0\} \supset \{y_\beta | \beta \geqslant \beta_0\}$ 成立,则 $\{y_\beta\}_{\mathfrak{B}}$ 称为 $\{x_\alpha\}_{\mathfrak{A}}$ 的**共尾** (cofinal) **部分有向点族**. 特别是,当 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的共尾部分有向集时,$\{x_\beta\}_{\mathfrak{B}}$ 是共尾部分有向点族.

所谓拓扑空间 X 的有向点族 $\{x_\alpha\}_{\mathfrak{A}}$ **收敛**于 X 的点 x,是指对于 x 的任意邻域 U,恒可选取适当的 α_0,使得 $\{x_\alpha | \alpha \geqslant \alpha_0\} \subset U$ 而言. 写做 $x_\alpha \to x(\alpha \in \mathfrak{A})$,或简单地写做 $x_\alpha \to x$. 当 $\mathfrak{A} = \mathbf{N}$ 时,这无非是点列 $\{x_n\}$ 的收敛.

关于这个收敛,下列基本性质 **D**) 成立. **D**) 1) 若关于所有的 α,均有 $x_\alpha = x$,则 $x_\alpha \to x$; 2) 若 $x_\alpha \to x$,而 $\{y_\beta\}$ 是 $\{x_\alpha\}$ 的共尾部分有向点族,则 $y_\beta \to x$; 3) 若 $\{x_\alpha\}$ 的共尾部分有向点族 $\{y_\beta\}$ 必含有收敛的共尾部分有向点族 $\{z_\gamma\}$,使 $z_\gamma \to x$,且 x 与 $\{y_\beta\}$ 的选取无关而是一定的,则 $x_\alpha \to x$; 4) 设 $x_\alpha \to x(\alpha \in \mathfrak{A})$ 且对各 $\alpha \in \mathfrak{A}$, $y_{\alpha\beta} \to x_\alpha(\beta \in \mathfrak{B}_\alpha)$,构造直积有向集 $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \prod \mathfrak{B}_\alpha$,当 $p: \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$, $p_\alpha: \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}_\alpha$ 为射影时,若确定 $z_\gamma = y_{\alpha\beta}$ (其中,$\gamma \in \mathfrak{C}$, $\alpha = p(\gamma)$, $\beta = p_\alpha(\gamma)$),则 $z_\gamma \to x$. 又,**D***)"一个有向点族至多收敛于一点"这个条件和在 X 中 Hausdorff 公理成立是等价的.

x_α 的收敛点用 $\lim x_\alpha$ 或 $\lim\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} x_\alpha$ 表示之.

$x_\alpha \to x$ 和"x 包含在 $\{x_\alpha\}$ 的任意共尾部分有向点族所确定的集合的闭包中"是等价的(也可以看做是 $x_\alpha \to x$ 的定义). 当对于所有的 $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$,均有 $x \in \overline{\{x_\alpha | \alpha \geqslant \alpha_0\}}$ 时,称 x_α **部分收敛** (partially converge) 于 x.

用伪有向集† $\mathfrak{A}$ 代替有向集 $\mathfrak{A}$,可以定义**伪有向点族** (pseudo-directed family of points). 关于它,与上述同样的性质也成立.

【滤子的收敛】 当集合 X 的子集的集合 Φ 具有下列性质时,称为**滤子**(filter). i) $X \in \Phi$; ii) $\varnothing \notin \Phi$ ($\varnothing$ 是空集); iii) 设 $A \subset B \subset X$,若 $A \in \Phi$,则 $B \in \Phi$; iv) 若 $A, B \in \Phi$,则 $A \cap B \in \Phi$. 当给定 X 的子集的集合 $\mathfrak{B}$,对于 $\mathfrak{B}$ 的任一元 B,使 $A \supset B$ 的 X 的子集 A 的全体 Φ 构成滤子时,$\mathfrak{B}$ 称为**滤子基** (filter base),亦称 $\mathfrak{B}$ **生成** (generate) Φ. $\mathfrak{B}$ 是滤子基的条件是 i) $\varnothing \notin \mathfrak{B}$; ii) 若 $A, B \in \mathfrak{B}$,则有 $C \in \mathfrak{B}$ 使 $A \cap B \supset C$. 当真包含滤子 Φ 的滤子不存在时,Φ 称为**极大滤子** (maximal filter). 任意滤子均被某个极大滤子包含. 对于滤子族 $\{\Phi_\lambda\}$,其交 $\bigcap \Phi_\lambda$ 是滤子. 对于 Λ 的滤子基 $\mathfrak{F}$, $\bigcup\limits_{M \in \mathfrak{F}} \left(\bigcap\limits_{\lambda \in M} \Phi_\lambda \right)$ 也是滤子.

在拓扑空间 X 中,用 $\mathfrak{U}(x)$ 表示点 x 的邻域系†. 对于 X 的滤子 Φ,当 $\Phi \supset \mathfrak{U}(a)$ 时写做 $\Phi \to a$,称为**滤子 Φ 收敛**于点 a. 当由滤子基 $\mathfrak{B}$ 生成的滤子 Φ 收敛于 a 时,称为滤子基 $\mathfrak{B}$ 收敛于 a.

如此确定的滤子收敛,具有下列基本性质 **L**). **L**) 1) 对于 X 的点 a,滤子 $\Phi_a = \{A | a \in A \subset X\}$ 收敛于 a; 2) 关于滤子 Φ, Ψ,若 $\Phi \to a$, $\Psi \supset \Phi$,则 $\Psi \to a$; 3) 在滤子族 $\{\Phi_\lambda\}$ 中,若所有的 $\Phi_\lambda \to a$,则 $\bigcap\limits_{\lambda} \Phi_\lambda = \Phi \to a$; 4) $X \supset Y$,对于 Y 的所有点 y,X 都有一滤子 Φ_y,使 $\Phi_y \to y$,又若 Y 的滤子基 $\mathfrak{B}$ 所生成的 X 的滤子 Ψ 收敛于 a,则 $\bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}} \left(\bigcap\limits_{y \in B} \Phi_y \right)$ 也收敛于 a. 又,**L***)"任意滤子的收敛点如果有也只限于一个"和在 X 中 Hausdorff 公理成立是等价的.

【各种收敛的关系】 点列收敛是有向点族收敛的特殊情形. 从 **D** 的 1), 2), 3) 可以导出 **S** 的 1), 2), 3),从 **D*** 可以导出 **S***. 其次对于有向点族 $\{x_\alpha\}_{\mathfrak{A}}$, X 的子集的集合 $\{\{x_\alpha | \alpha \in \mathfrak{A}, \alpha \geqslant \alpha_0\} | \alpha_0 \in \mathfrak{A}\}$ 是 X 的滤子基,设

由它生成的滤子为Φ，$x_\alpha \to a$ 和 $\Phi \to a$ 是等价的. 从 **L** 可以引出 **D**, 从 **L*** 可以引出 **D***. 关于函数(映射) $f:X \to Y$ 和X的点 a, $\{f(U \cap D-\{a\}) | U \in \mathfrak{U}(a)\}$ 是滤子基. 其中 $\mathfrak{U}(a)$ 是 a 的邻域系, D是 f 的定义域, $U \cap D - \{a\} \neq \varnothing$. 设它生成的滤子为 Φ. "$x \to a$ 则$f(x) \to b$"和 $\Phi \to b$ 是等价的. 由上述可知,到现在为止所叙述的各种收敛都可以用滤子收敛表示出来.

【收敛和拓扑】 在拓扑空间中可以定义有向点族及滤子的收敛概念. 反之由收敛概念也可以引入拓扑. 设在集合X中对各滤子规定了收敛性,使得满足性质 **L**. 这时, 如上所述, 可以定义有向点族的收敛性,而满足 **D**. 于是 $x_\alpha \in A$ 的有向点族 $\{x_\alpha\}$ 的极限点的全体定义为 $\bar{A}$, 关于 $\bar{A}$ 闭包公理成立(→拓扑空间). 这样便在X中引入了拓扑. 关于这个拓扑, 下列性质成立. i) $a \in \bar{A} \Leftrightarrow$ 有使 $x_\alpha \to a (x_\alpha \in A)$ 的 $\{x_\alpha\}$. ii) $a \in A^i \Leftrightarrow$ 关于使 $x_\alpha \to a$ 的所有 $\{x_\alpha\}$, 均有 $\{x_\alpha\} \cap A \neq \varnothing$. iii) U 是 a 的邻域 $\Leftrightarrow$ 关于使 $x_\alpha \to a$ 的所有 $\{x_\alpha\}$, 均有 $\{x_\alpha\} \cap U \neq \varnothing$. 当由拓扑规定有向点族的收敛时, i), ii), iii) 成立. 于是, 拓扑 → 滤子的收敛 → 有向点族的收敛 → 新拓扑,这样定义时,新拓扑和原拓扑一致. 由滤子(或有向点族)的收敛出发得到关于滤子(或有向点族)的新的收敛概念, 这些概念和开始给出的一致. 如上所述,给出拓扑概念和给出滤子或有向点族的收敛概念是完全等价的.

与拓扑空间有关的概念可用收敛的概念叙述如下. 拓扑空间是紧的和所有完全有向点族是收敛的,二者是等价的,也和所有极大滤子是收敛的是等价的. 对于拓扑空间 X, Y 而言,映射 $f:X \to Y$ 在 a 处连续, 其充分必要条件是: 1) 关于使 $x_\alpha \to a$ 的所有有向点族,均有$f(x_\alpha) \to f(a)$; 2) 关于使 $\Phi \to a$ 的所有滤子 Φ, 均有 $f(\Phi) = \{f(M) | M \in \Phi\} \to f(a)$. 连续性与函数值的极限的意义下的 3) 若 $x \to a$ 则 $f(x) \to f(a)$, 二者是等价的.

以收敛概念为基础定义拓扑是 M. Fréchet 开始的. 定义了点列的收敛, 使满足条件 **S** 的 1), 2) 和 **S*** 的空间称为 **Fréchet *L* 空间** (法 espace L) (1906). 再满足 **S** 的 3) 时称为**星型收敛** (star convergence), 定义了这种收敛的空间称为 ***L** 空间** (L^*-space). 在 Fréchet L 空间X中,使 $x_n \in A$, $x_n \to a$ 的 $\{x_n\}$ 存在的点 a 的全体设为 $\bar{A}$, 则 $\bar{A} \supset A$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\bar{\varnothing} = \varnothing$, X是广义拓扑空间 ($\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ 未必成立). 在满足第一可数公理的 Hausdorff 空间X中,由拓扑定义点列的收敛,若由该收敛确定新的 $\bar{A}$, 则新拓扑和原拓扑是一致的. 如果把点列的收敛推广到滤子或有向点族的收敛, 则在广义拓扑空间中, 收敛和拓扑的对应便是完全的. 为此, E. H Moore 和 H. L. Smith 考虑了有向点族的收敛.

【(o) 收敛】 实数全体是有序集, 实数列的收敛概念可以推广为有序集的元素列的收敛. 对于有序集 S 的元素列 $\{a_n\}$, 当有 S 的元素列 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 及 $a \in S$, 满足下列条件时, 称$\{a_n\}$ **(o) 收敛**于 a ((o)-converge), 可表示为 $a_n \to a$: $u_n \leqslant a_n \leqslant v_n$, $u_n \leqslant u_{n+1}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$, $a = \sup u_n = \inf v_n$. 这时点列的收敛性质 S 的 1), 2) 和 S^* 成立. 当对于 $\{a_n\}$ 的任意子序列 $\{b_n\}$, $\{b_n\}$ 的某子序列 $\{c_n\}$ (o) 收敛于 a 时, 称 $\{a_n\}$ **星型 (o) 收敛**于 a ((o)-star converge). 关于它 **S** 和 **S*** 成立.

对于集合 X, X 的子集全体 $\mathfrak{P}(X)$ 按包含关系构成有序集. 集合序列 $\{A_n\}$ (o) 收敛于集合A是与条件

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

相一致的. A 与集合序列 $\{A_n\}$ 的极限† 即 $\lim A_n$ 相一致.

【参】 [1] 高木貞治,解析概論, 岩波, 第三版 1961; [2] 一松信, 解析学序説, 上, 裳華房, 1962; [3] G. Birkhoff, Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 修订版 1948; [4] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, III. Topologie générale, ch. 1, Actualités. Sci. Ind., 1142d, Hermann, 第四版 1965 (英译本: General topology, Addison- Wesley, 1966); [5] J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology, Ann. Math. studies, Princeton Univ. Press 1940; [6] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circ. Mat. Palermo, **22** (1906), 1—74; [7] E. H. Moore-H. L. Smith, A general theory of limits, Amer. J. Math., **44** (1922), 102—121; [8] G. Birkhoff, Moore-Smith

convergence in general topology, Ann. of Math., (2) **38** (1937), 39—56; [9] H. Cartan, Théorie des filtres, C. R. Acad. Sci. Paris, **205** (1937), 595—598; Filtres et ultrafiltres, ibid., 777—779. 其他→拓扑空间的[参]. 关于 Landau 符号, [10] E. G. H. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Teubner, 1909 (Chelsea, 1953).

连通 [英 connected 法 connexe 德 zusammenhängend 俄 связанный 日 連結] 所谓拓扑空间† R 是**连通的**,系指不能有R的非空闭真子集 A, B, 使 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=R$ 成立. 所谓R的子集 S 是连通的,系指R的子空间† S 是连通的. 若R的子集A是连通的,则其闭包 $\bar{A}$ 也是连通的. 设 $\{A_\alpha\}$ 为R的连通子集族,若任取其中两个 A_α, A_β, $\bar{A}_\alpha\cap A_\beta=A_\alpha\cap\bar{A}_\beta=\varnothing$ 都不成立,则族 $\{A_\alpha\}$ 的并集 $\bigcup_\alpha A_\alpha$ 是连通的. 在连续映射下连通集A的象是连通的. 且连通空间族$\{A_\alpha\}$的直积空间是连通的. 当取拓扑空间R的任意一点p时, 含p的所有连通集的并集仍然是连通集. 即含p的最大连通集存在. 此集称为含p的**连通分支** (connected component) 或含p的**分支** (component). n 维 Euclid 空间、$n(\geqslant 1)$ 维球面是连通的, 但 S^0 即由二点组成的 T_1 空间†不是连通的, 各点分别构成它的一个分支. 拓扑空间R内的连通开集称为R的**区域**(英 domain, region 德 Bereich, Gebiet).

取拓扑空间 R 的点 p, 如果对于包含p的任意邻域 U, 都有被U包含的p的邻域V存在, 使得关于子空间U中的p的分支总含有 V, 则称R在p点是**局部连通的** (locally connected). 当R在所有点处都局部连通时, 称R为**局部连通的**.

【弧连通】 所谓拓扑空间R的二点 a, b 是可用**弧连结的**,是指有由闭区间 $I=[0,1]$ 到R的连续函数 $f(x)$, 使 $f(0)=a$, $f(1)=b$ 成立. 当R的任意二点都可用弧连结时, R称为**弧连通的** (arcwise connected). 若R为弧连通的,则R必为连通的,但反之未必成立. 上面叙述的连通空间的例子都是弧连通的例子. 和连通的情况相同,关于弧连通可以定义**分支**、**局部弧连通性**等. 完备度量空间若是连通且局部连通的, 则必是局部弧连通的. 作为连通但非弧连通的集合的例子, 有 $y=\sin\frac{1}{x}$ (x 是非 0 实数) 的图形和 $\{(0,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$ 的并集 (正弦曲线†). 设 S 与 R 为拓扑空间, 若映射空间† R^S 为弧连通的, 则 S 到 R 的所有连续映射都是相互同伦†的,从而, 在R中都是零伦†的.

用 $S^n(n\geqslant 0)$ 表示 n 维球面, 当 R^{S^n} 是弧连通时,定义R为 **n 连通的** (n-connected). 所谓R是 0 连通的,系指R是弧连通的,若R是 1 连通的,则称R为**单连通的** (simply connected). 当 $n\geqslant 2$ 时 n 连通的称为**多连通的** (multiply connected).

当 R^R 为弧连通时, 称 R 为**可缩的** (英 contractible 德 zusammenziehbar). 这是和用 $e(x)=x$ 定义的R的恒等映射† $e(x)$ 为零伦是等价的. 若R为可缩的, 则对于所有的n当然是n连通的. n 维球面 S^n 对于所有 $n>i$ 的整数 i 是 i 连通的, 但不是n连通的. n 维单形是可缩拓扑空间的例子.

设p为拓扑空间R的一点, 若对于p的任意邻域 U, 有被U包含的p的邻域V存在, 使得由 $e(x)=x$ 定义的从V到U中的恒等映射 $e(x)$ 在U内零伦, 则称R在p处是**局部可缩的** (locally contractible), 当R在所有点处都局部可缩时,称R为**局部可缩的**. 同样地,设p为拓扑空间R的一点,若对p的任意邻域U, 有被U包含的p的邻域V存在,从 S^n 到V的任意连续映射 $f(x)$ 作为 S^n 到U的连续映射而言都在U上零伦, 则称R在p处是**局部 n 连通的** (locally n-connected). 当R在所有点处都局部n连通时, 称R为**局部 n 连通的**. 若空间为局部可缩的, 则对所有的n都是局部n连通的. 多面体是局部可缩的.

若对于所有 $i\leqslant n$ 的 i, R 是 i 连通或局部 i 连通的, 则分别称R为**到 n 连通的或到 n 局部连通的**(到n连通也有称为n连通的). 所谓R是 **ω 连通的或局部的 ω 连通**,系指对于所有自然数 n,R都是n连通的或局部n连通的. 多面体是局部可缩的, 从而是局部ω连通的. 但

即使是局部 ω 连通的，也未必是局部可缩的.

以下暂时假定 R 为局部连通的可分度量空间†. 有下述定理(→[4], [5], [6]): 1) 如果 R 是可分度量空间 S 的闭子集，而 $S-R$ 是有限维的，则必存在 S 的开集 $U\supset R$ 及由 U 到 R 的连续函数 $f(x)$，使当 $x\in R$ 时，$f(x)=x$ 成立. 即 R 是 S 的邻域收缩核†. 2) 如果 R 是可分度量空间 S 的闭子集，而 $S-R$ 是有限维的，当给出由 R 到任意可分度量空间 X 的连续映射 $f(x)$ 时，则存在 S 的开集 $U\supset R$，及由 U 到 X 的连续映射 $F(x)$，使当 $x\in R$ 时，有 $F(x)=f(x)$. 即 $f(x)$ 可延拓到 U 上.

另外，设拓扑空间 R 是局部紧 Hausdorff 空间，若对于 R 的点 p 的任意邻域 U，有被 U 包含的 p 的邻域 V，使得 U 的以 V 为模的所有 n 维 Čech 同调群†（上同调群）均成为 0，则 R 称为在 p 处是**局部 n 同调连通的**（**局部 n 上同调连通的**）. 关于这些→[3].

【连续统，间断集】 最少含两点的连通紧度量空间称为**连续统** (continuum). 不含连续统的集合称为**间断集** (discontinuum). 作为类似的概念，任一分支都是由一点组成的集合称为**完全不连通的** (totally disconnected). 在闭区间 [0, 1] 上坐标可表为

$$t=\frac{n_1}{3}+\frac{n_2}{3^2}+\cdots+\frac{n_i}{3^i}+\cdots,\ n_i=0\text{ 或 }2$$

的点集是可数个仅由 0, 1 二点组成的 Hausdorff 空间的直积，它是紧完备集†和间断集. 称之为 **Cantor 间断集** (cantor's discontinuum) 或者简称为 **Cantor 集** (Cantor set)，或者**三分点集** (ternary set).

首先从区间 I 的中间去掉长度为 ε_1 的开区间. 其次在剩下的两个闭区间 I_{11}, I_{12} 的中间分别去掉长度为 ε_2 的开区间(图 1). 如此进行到第 n 回，得到 2^n 个闭区间 I_{ni}，在各个 I_{ni} 的中间去掉长度为 ε_{n+1} 的开区间. 设 $I^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{2^n}I_{ni}$，$C=\bigcap_{n=1}^{\infty}I^{(n)}$，称 C 为**广义 Cantor 集**. 广义 Cantor 集和三分点集是同胚的.

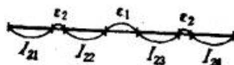


图 1

当对度量空间 R 的任意二点 a, b 及任意正数 ε，可选出 R 的点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 使 $d(x_i, x_{i+1})<\varepsilon(x_0=a,\ x_n=b)$ 时，称 R 为**链连通的** (well-chained). 链连通的紧集是连续统.

当最少含有二点的连续统 K 不能表示为与 K 不相同的两连续统 K_1, K_2 之并时，称 K 为**不可分解的** (indecomposable). 设 K 为含点 a, b 的连续统，如果 K 的任何真子连续统都不含二点 a, b，则称 K 为**不可约的** (irreducible)(→曲线).

【Jordan 曲线定理】 和圆周同胚的拓扑空间称为 **Jordan 曲线** (Jordan curve). **Jordan 曲线定理** (Jordan's curve theorem): "平面 $\boldsymbol{R}^2$ 内的 Jordan 曲线 J 将 $\boldsymbol{R}^2$ 分为内外两个区域" (C. Jordan, Cours d'analyse, 第二版 1893). 详言之，"$\boldsymbol{R}^2-J$ 恰好是两个区域† G_1, G_2 的直和 G_1+G_2，J 是 G_1, G_2 的共同边界†". 此时，令 p 为 J 的任意一点，必有一 **Jordan 弧** (Jordan arc)（和线段同胚的集合），它以 p 为一端，而 p 以外的部分则被某个 $G_i(i=1, 2)$ 所包含(A. Schönflies). 将这一事实表达为: "J 是从 G_i **可达的** (accessible)". 反之，设 $\boldsymbol{R}^2\supset J$, $\boldsymbol{R}^2-J=G_1\cup G_2$, $G_1\cap G_2=\varnothing$ (G_i 为区域)，若 J 从 G_1 及从 G_2 都可达，则 J 便是 Jordan 曲线. Jordan 曲线 J 和圆周 C 的同胚可以扩张为含 J 的 $\boldsymbol{R}^2$ 和含 C 的平面的同胚(甚至于为保角映射†)(→保角映射). 代替 $\boldsymbol{R}^2$ 及 J 取 $\boldsymbol{R}^{n+1}$（或 $n+1$ 维拓扑球面† S^{n+1}）及其中的拓扑球面 S^n，这时仍有 $\boldsymbol{R}^{n+1}-S^n$（或 $S^{n+1}-S^n$）$=G_1\cup G_2$, $G_1\cap G_2=\varnothing$ (G_i 为区域)，且 S^n 为 G_1, G_2 的共同边界†，而从 G_1, G_2 中的哪一个都可到达 S^n (L. E. J. Brouwer, Math. Ann. **71**(1912)).

从 n 维球面 Σ^n 到 n 维拓扑球面 S^n 上的同胚 h，能否扩张为以 Σ^n 为赤道的 $n+1$ 维球面 Σ^{n+1} 到含 S^n 的 $n+1$ 维拓扑球面 S^{n+1} 上的同胚 H 呢? 这个问题称为 **Schönflies 问题** (Schönflies problem)，当 $n\geqslant 2$ 时，一般是不成立的 (→流形 [野生空间]). 但是当同胚 h 可微时，

若 $n \neq 3, 6$，则有可微扩张H存在（S. Smale, Ann. of Math. **74** (1961)）。特别是，当同胚 h 能扩张为同胚 $h': \Sigma^n \times [-1, 1] \to S^{n+1}$ 时（即 S^n 具有两襟(bicollared)的情形），h 可扩张为同胚 H. 本定理也称为 Brown-Mazur 定理（M. Brown, Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960)）.

【参】 [1] C. Kuratowski, Topologie II, Monograf. Mat., Warsaw, 1950; [2] S. Lefschetz, Topics in topology, Princeton, 1942; [3] R. L. Wilder, Topology of manifolds, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1949; [4] G. T. Whyburn, Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1942; [5] S. T. Hu, Elements of general topology, Holden-Day, 1964; [6] O. Hanner, Retraction and extension of mappings of metric and nonmetric spaces, Arkiv Mat. Svenska Vetens. Akad., **2**(1952), 315—360; [7] K. Borsuk, Theory of retracts, Monograf. Mat., (1967); →拓扑空间的［参］. 关于 Jordan 曲线定理 [8] P. S. Alexandroff (П. С. Александров)-H. Hopf, Topologie I, Springer, 1935; [9] S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton, 1949; [10] M. H. A. Newman, Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge Univ. Press, 第二版 1951; [11] 弥永昌吉, Jordan の曲线定理, 现代の数学 I, 共立出版, 1949.

维数 [英 dimension 法 dimension 德 Dimension 俄 размерность 日 次元] 在十九世纪末期，已经知道在线段上的点和正方形内的点之间存在一一对应（G. Cantor）及由线段到正方形全体的连续映射† (G. Peano)，同时，伴随着点集论的进展，将多角形或多面体等简单图形以外的点集也作为图形而被考察了，为此对从来含混地使用的维数概念便有给以确切定义的必要. 1913 年 L. E. J. Brouwer 基于 H. Poincaré 的想法定义了维数，到 1922 年 K. Menger 与 П. С. Урысон 建立了可分度量空间的维数论的基础. 关于其后的发展，П. С. Александров, W. Hurewicz 的贡献是大的. 一般的（不限于可分）度量空间的维数论，由 M. Катетов 和森田紀一互相独立地建立了基本定理. 进而关于一般的正规空间†也有论述，但在度量空间中同样的结果未必还成立.

【维数的定义】 对正规拓扑空间R的任意有限开覆盖，都有阶数最多为 $n+1$ 的加细开覆盖时（→拓扑空间［覆盖］），即对于使 $R = G_1 \cup \cdots \cup G_s$ 成立的任意开集 $G_1, \cdots, G_s$，都有开集 $H_1, \cdots, H_s$ 使得 $R = H_1 \cup \cdots \cup H_s$, $H_i \subset G_i$ 且任意 $n+2$ 个 H_i 没有共同点，便写做 $\dim R \leqslant n$. 如果 $\dim R \leqslant n$ 但 $\dim R \leqslant n-1$ 不成立，便写做 $\dim R = n$. $\dim R$ 称为R的**维数**，或者为了和其它的维数相区别，可称为**覆盖维数** (covering dimension) 或者称为 **Lebesgue 维数** (Lebesgue dimension). 它是基于 Lebesgue 的设想定义的.

此外，又有归纳定义的维数. 首先，当R为空集时，规定 $\operatorname{Ind} R = -1$，当 $\operatorname{Ind} R \leqslant n-1$ 已被定义时，所谓 $\operatorname{Ind} R \leqslant n$ 是指对于R的任意闭集 F，开集 G，只要 $F \subset G$ 都有开集V存在，使 $F \subset V \subset G$，且 $\operatorname{Ind}(\bar{V} - V) \leqslant n-1$ 成立而言，这样便归纳地定义了 $\operatorname{Ind} R$. 此外，规定 $\operatorname{ind} \varnothing = -1$，对$R$的任意点$p$及其开邻域 G，如果有开集 V 存在，使 $p \subset V \subset G$, $\operatorname{ind}(\bar{V} - V) \leqslant n-1$ 成立，便定义为 $\operatorname{ind} R \leqslant n$，这样又归纳地定义了 $\operatorname{ind} R$（至于 $\operatorname{Ind} R = n$, $\operatorname{ind} R = n$ 的定义仍与覆盖维数的情形相同）. $\operatorname{Ind} R$, $\operatorname{ind} R$ 分别称为R的**大归纳维数** (large inductive dimension)，**小归纳维数**(small inductive dimension). 这里 $\operatorname{ind} R$ 的定义是 Menger 给出的.

对于任何整数 n, $\dim R \leqslant n$ 都不成立时，称R的维数为无限的. 对于其它的维数也可同样定义. 这些维数对拓扑映射都不变，即都是拓扑不变量.

Euclid 空间内的无理点集，Cantor 间断集†，Baire 空间†等是零维的，Hilbert 空间内的有理点集是一维的.

【度量空间的维数】 关于度量空间的维数下列诸定理成立（[5], [6]）. 设 R, S 为度量空间，则 $\dim R = \operatorname{Ind} R$ 成立；若 $A \subset R$ 则 $\dim A \leqslant \dim R$；若R为可数个闭集 $F_i (i = 1, 2, \cdots)$ 的并，则 $\dim R = \max(\dim F_i)$（**维数的加法定理** (sum theorem for dimension)）；$\dim(A \cup B) \leqslant \dim A + \dim B + 1$；若 $\dim R = n$ 则R可表为$n+1$个 0 维集的并集（**维数的分解定理** (decomposition theorem for dimension)）；$\dim(R \times S) \leqslant \dim R + \dim S$，其中 $R \neq \varnothing$（**维数的乘积定理** (product theorem for dimension)）.

$\dim R \leqslant n$ 成立的充分必要条件如下所述：

1) 存在从适当的 Baire 空间† $B(\tau)$ 的子空间到 R 上的连续闭映射 f，使得对 R 的各点 x，$f^{-1}(x)$ 最多由 $n+1$ 个点组成．(森田 [7])；2) 存在 R 的距离，在 R 上诱导的拓扑与原拓扑相同，使得对于任意正数 ε，R 的任意点 x，及 R 的任意 $n+2$ 个点 $y_i(i=1,\cdots,n+2)$，若 y_i 与 x 的 $\varepsilon/2$ 邻域的距离都小于 ε，则最少有二点 y_i，$y_j(i\neq j)$ 的距离小于 ε．(長田潤一[8])

当 $\dim R=n+m(m>0)$ 时，由适当的 m 维空间到 R 上的如 1) 那样的 f 存在与否的所谓 Hurewicz 问题，在可分的情形由 J. H. Roberts，在一般的情形由永見啓応已肯定的解决了 ([9])．

若度量空间 R 是可数个具有星型有限性†的闭集的并集，特别是如果它是可分的，则 $\operatorname{Ind} R$ 与 $\operatorname{ind} R$ 是一致的 ([1]，[3]，[6])．对一般情形，P. Roy 指出两者未必一致 ([10])．

【Euclid 空间与维数】 由上述定义，n 维 Euclid 空间† $\boldsymbol{R}^n$ 恰好是 n 维的，和我们的直观一致．在证明 $\dim \boldsymbol{R}^n\geqslant n$ 时须用到"n 维立方体的有限闭覆盖的阶数当属于覆盖的各集合的直径充分小时必 $\geqslant n+1$"这个所谓 Lebesgue **铺石定理**(德 Pflastersatz) ($\dim \boldsymbol{R}^n\leqslant n$ 的证明是容易的)．设 X 为 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的任意子集，f 为由 X 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 $f(X)$ 上的任意拓扑映射．若 x 为 X 的内点，则 $f(x)$ 为 $f(X)$ 的内点．当 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 A 同胚于另外的集合 $B(\subset\boldsymbol{R}^n)$ 时，B 也是开集 (Brouwer **区域不变性定理** (invariance theorem of domain))．此定理关于任意流形也成立，但对一般可分度量空间未必成立．根据区域不变性定理可知 $\boldsymbol{R}^m$ 和 $\boldsymbol{R}^n(m\neq n)$ 之间没有拓扑映射．称为关于 Euclid 空间的**维数不变性定理** (theorem of invariance of dimension)．Euclid 空间内的点集的维数是有限的，反之，n 维可分度量空间同胚于 $2n+1$ 维 Euclid 空间内的某子集，特别是其中至多仅有 n 个坐标是有理数的点全体的集合的子集 (Menger-Nöbeling **嵌入定理** (英 embedding theorem 德 Einbettungssatz))．从而有限维的可分度量空间在拓扑学中不外是 Euclid 空间内的点集．再者，n 维可分度量空间同胚于适当的 n 维紧度量空间的子集．

对于 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^m$ 内的有界闭集 F，和任意正数 ε，将各点移动不超过 ε，而能将 F 映到 $\boldsymbol{R}^m$ 内的 n 维多面体的连续映射存在的充分必要条件是 $\dim F\leqslant n$ 成立．

【正规拓扑空间的维数】 设 R 为正规拓扑空间，则有 $\operatorname{Ind} R\geqslant\dim R$，$\operatorname{Ind} R\geqslant\operatorname{ind} R$，但等号未必成立．由 E. Čech, П. С. Александров, C. H. Dowker, E. Hemmingsen，森田等人得到下列诸定理 ([3])．若 $\dim R\leqslant n$，则对 R 的任意局部有限开覆盖，都有阶数至多为 $n+1$ 的加细覆盖；若 A 是 R 的 F_σ 集或具有星型有限性，则 $\dim A\leqslant\dim R$；若 R 的闭覆盖 $\{F_\alpha\}$ 为 σ 局部有限†的，则 $\dim R=\max(\dim F_\alpha)$．

从 R 的任意闭集到 n 维球面 S^n 的任意连续映射都可扩张为 R 到 S^n 的连续映射的充分必要条件是 $\dim R\leqslant n$．若 R,S 是仿紧†的，而 R 是局部紧†的或者 $R\times S$ 是具有星型有限性的，则当 $R\neq\varnothing$ 时，有 $\dim(R\times S)\leqslant\dim R+\dim S$；若 R 是 CW 复形，则等号成立 ([11])．Катетов 证明了由 R 的有界连续函数全体的环 $C^*(R)$ 可以确定 $\dim R$ ([13])．

【同调维数】 Александров 引入并研究了同调维数的概念，使维数论得到了巨大发展 (Math. Ann., **106**(1932))．紧 Hausdorff 空间 R 关于交换群 G 的**同调维数** (homological dimension) 被定义为这样的最大整数 n，即使得有闭集 A，而 n 维 Čech 同调群† $H^n(R,A,G)$ 不是 0．**上同调维数** (cohomological dimension) $D(R;G)$ 可用 Čech 上同调群 $H^*(R,A;G)$ 同样地定义之．当 $\dim R<\infty$ 时，有 $\dim R=D(R;\boldsymbol{Z})$ ($\boldsymbol{Z}$ 是整数加法群)．关于任意群 G 的上同调维数可用几个关于特定群的上同调维数表示出来，而积空间 $R\times S$ 的上同调维数可用 R,S 的上同调维数表示出来 (M. F. Bochstein)．为了使紧空间 R 对任意紧空间 S 有 $\dim(R\times S)=\dim R+\dim S$，必须且只须对任意质数 p，有 $\dim R=D(R;\boldsymbol{Q}_p)$ ($\boldsymbol{Q}_p$ 是以 1 为模的 m/p^i

形的有理数加法群)(В. Больтянский);此结果在 R 为任意仿紧 Hausdorff 空间时也成立(児玉之宏[16]).

【维数和测度】 对于可分度量空间 R, $\dim R \leqslant n$ 成立,仅限于 R 同胚于 $2n+1$ 维 Euclid 空间内的 $n+1$ 维的测度为零的集合的情形(E. Szpilrajn).

【M. Fréchet 的维数型】 和在集合论的基数的情形类似,空间 R 和空间 S 的子集同胚,反之,当 S 和 R 的子集同胚时,可以定义 R 和 S 具有相同的**维数型** (dimension type). 关于它和维数的关系曾由功力金二郎研究了.

[参] [1] W. Hurewicz-H. Wallman, Dimension theory, Princeton, 1941; [2] K. Menger, Dimensionstheorie, Teubner, 1928; [3] 森田紀一,次元論,現代数学叢書,岩波, 1950; [4] П. С. Александров, Современное состояние теории размерности Успехи Мат. Наук 6(1951), 43—68; [5] M. Katětov, On the dimension of non-separable spaces I. Čzech. Math. J., 2 (1952), 333—368; [6] K. Morita (森田紀一), Normal families and dimension theory for metric spaces, Math. Ann., 128 (1954), 350—362; [7] K. Morita (森田紀一), A condition for the metrizability of topological spaces and for n-dimensionality, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 5(1955), 33—36; [8] J. Nagata (長田潤一), Note on dimension theory for metric spaces, Fund. Math., 45 (1958), 143—181; [9] K. Nagami, (永見啓応) Mappings of finite order and dimension theory, Jap. J. Math., 30 (1960), 25—54; [10] P. Roy, Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962) 609—613; [11] K. Morita, (森田紀一) On the dimension of product spaces, Amer. J. Math., 75 (1953), 205—223; [12] C. H. Dowker, Local dimension of normal spaces, Quart. J. Math., 6(1955), 101—120; [13] L. Gillman-M. Jerison, Rings of continuous functions, Princeton, 1960; [14] K. Kunugui (功力金二郎), Sur la théorie du nombre de dimensions, Thèse, Paris, 1930; [15] J. Nagata (長田潤一), Modern dimension theory, Noordhoff, 1965; [16] Y. Kodama (児玉之宏), Note on cohomological dimension for non-compact spaces, J. Math. Soc. Japan, 18 (1966), 343—359; [17] K. Nagami (永見啓応), Dimension theory, Academic Press, 1970; [18] L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Ann., 70(1911). 161—165; [19] H. Lebesgue, Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espaces à n et $n+p$ dimensions, Math. Ann., 70 (1911), 166—168; [20] L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets, Math. Ann., 71 (1912), 305—313; [21] L. E. J. Brouwer, Über den natürlichen Dimensionsbegriff, J. Reine Angew. Math., 142 (1913), 146—152; [22] P. Uryson, Les multiplicités cantoriennes, C. R. Acad. Sci. Paris, 175(1922), 440—442.

一致空间 [英 uniform space 法 espace uniforme 德 Raum mit Uniformstruktur, uniformer Raum 俄 равномерное пространство 日 一様空間] 在度量空间中曾考虑过但在一般拓扑空间中却没有考虑过的诸概念,例如, Cauchy 序列†(基本序列),完备†性,一致连续†函数等,为了在比度量空间更一般的空间中也能考虑它们,A. Weil 引入了一致空间的概念([4]). 现在已知的定义方法有数种,下面除去关于拓扑的分离性外用 Weil 给出的定义的形式叙述之([1],[2]).

集合 X 的直积 $X\times X$ 的对角集 $\{(x,x)|x\in X\}$ 以 Δ 表示之,对于 $X\times X$ 的子集 U, V, 令 $U\circ V=\{(x,y)|$ 有适当的 $z\in X$, 使 $(x,z)\in U,(z,y)\in V\}$,又令 $U^{-1}=\{(x,y)|(y,x)\in U\}$.

【一致空间的定义】 设集合 X 的直积 $X\times X$ 的非空子集族 $\mathscr{U}$ 满足下列条件 I)—V): I) 若 $U\in\mathscr{U}$, $U\subset V$, 则 $V\in\mathscr{U}$; II) 若 U, $V\in\mathscr{U}$, 则 $U\cap V\in\mathscr{U}$; III) 若 $U\in\mathscr{U}$, 则 $\Delta\subset U$; IV) 若 $U\in\mathscr{U}$, 则 $U^{-1}\in\mathscr{U}$; V) 对 $U\in\mathscr{U}$, 有 $V\in\mathscr{U}$, 使 $V\circ V\subset U$. 此时,称为在 X 中由 $\mathscr{U}$ 定义了**一致性**(或**一致结构**)(uniformity). 属于 $\mathscr{U}$ 的集合称为关于由 $\mathscr{U}$ 定义的 X 的一致性的**近域**(法 entourage), $\mathscr{U}$ 称为**近域系**(法 système d'entourage)或**一致性**. 当对集合 X 给出一致性时,此 X 或者组$(X,\mathscr{U})$称为**一致空间**.

设有近域的某集合 $\mathscr{B}$,如果对于任意近域 U, 均存在 $V\in\mathscr{B}$, 使 $V\subset U$, 则 $\mathscr{B}$ 称为**一致性的基** (base for uniformity). 对于一致空间 $(X,\mathscr{U})$,为使 $X\times X$ 的子集族 $\mathscr{B}$ 是一致性的基,其充分必要条件是下列 II′)—V′) 同时满足: II′) 对于 $U,V\in\mathscr{B}$, 有 $W\in\mathscr{B}$, 使 $W\subset U\cap V$; III′) 若 $U\in\mathscr{B}$, 则 $\Delta\subset U$; IV′) 若 $U\in\mathscr{B}$, 则有 $V\in\mathscr{B}$, 使 $V\subset U^{-1}$; V′) 若 $U\in\mathscr{B}$, 则有 $V\in\mathscr{B}$, 使 $V\circ V\subset U$. 反之,当 $X\times X$ 的子集族 $\mathscr{B}$ 满足 II′)—V′)时,若设 $\mathscr{U}=\{U\subset X\times X|U$ 含有某个 $V\in\mathscr{B}\}$,则 $\mathscr{U}$ 对 X 定义了一致性. 关于某个一致性的近域 V **是对称的** (symmetric), 系指 $V=V^{-1}$. 对称

的近域的全体构成一致性的基.

【一致空间的拓扑】 设$(X,\mathscr{U})$为一致空间,对于X的子集A和$X\times X$的子集U,定义X的子集$\{y|$ 对某个 $x\in A$, $(x,y)\in U\}$,记作$U(A)$.使各点$x\in X$对应于集族$\mathscr{U}(x)=\{U(x)|U\in\mathscr{U}\}$. 此时,如以$\mathscr{U}(x)$做为$x$的邻域系†则唯一确定$X$的拓扑.此拓扑称为$(X,\mathscr{U})$的**一致拓扑或属于一致性的拓扑** (topology of the uniformity,uniform topology). 当谈到一致空间的拓扑时,即使不加说明也认为指一致拓扑. 于是一致空间也称为**一致拓扑空间** (uniform topological space). 设$\mathscr{B}$为一致空间$(X,\mathscr{U})$的一致性的基,就各点$x\in X$而言,$\mathscr{B}(x)=\{U(x)|U\in\mathscr{B}\}$构成在$x$处的基本邻域系. 在$X\times X$中考虑直积拓扑时,在所有对称的近域中、开集的全体及闭集的全体分别构成一致性的基.一致空间$(X,\mathscr{U})$是T_1拓扑空间†的充分必要条件为:所有的近域的交是Δ,这时,$(X,\mathscr{U})$的一致性称为 **T_1一致性** (T_1-uniformity),而$(X,\mathscr{U})$称为 **T_1一致空间** (T_1-uniform space). T_1一致空间恒为正则的. 从而特别是T_2拓扑空间,故当一致空间是T_1拓扑空间时也称为 **Hausdorff** 一致空间或者**分离的** (separated)一致空间. 此外一致空间满足 Тихонов 分离公理†,特别是,T_1一致空间也是完全正则†的.

【一致空间的例】 1) 集合X的直积$X\times X$的对角集设为Δ,若令$\mathscr{U}=\{U\subset X\times X|\Delta\subset U\}$,则$(X,\mathscr{U})$是$T_1$一致空间,$\mathscr{B}=\{\Delta\}$是一致性的基. 这个一致性称为**离散一致性** (discrete uniformity).

2) 一致邻域族[(4)].在集合X的各点x处,对于同一指标集A,而定义X的子集$U_\alpha(x)$使满足下列条件 i)—iv) 时,称$\{U_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}(x\in X)$为对$X$定义的**一致邻域族** (uniform family of neighbourhoods): i) 对任意的α, x, 有$x\in U_\alpha(x)$; ii) 对于$x,y\in X$, $x\neq y$, 有$\alpha\in A$, 使$y\notin U_\alpha(x)$; iii) 对于$\alpha,\beta\in A$,可适当选取$\gamma\in A$,使对所有$x\in X$,均有$U_\gamma(x)\subset U_\alpha(x)\cap U_\beta(x)$; iv) 对$\alpha\in A$,可取适当的$\beta\in A$,对于$x,y,z\in X$,若$x\in U_\beta(z)$, $y\in U_\beta(z)$,则必有$y\in U_\alpha(x)$. 此时,设$U_\alpha=\{(x,y)|x\in X, y\in U_\alpha(x)\}$,则$\{U_\alpha|\alpha\in A\}$满足一致性的基的条件. 而且根据 ii) 它满足比 III′) 更强的条件: $\bigcap_{\alpha\in A}U_\alpha=\Delta$. 例如,设$T_1$拓扑群†$G$的单位元的基本邻域系为$\{U_\alpha|\alpha\in A\}$,若令$U_\alpha^l(x)=xU_\alpha$及$U_\alpha^r(x)=U_\alpha x$,则$\{U_\alpha^l(x)\}$及$\{U_\alpha^r(x)\}$都是一致邻域族,分别称为左一致性†,右一致性†,一般地,所定义的两个一致性并不相同(→拓扑群).

3) 一致覆盖族. 当集合X的覆盖†族$\{\mathfrak{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$满足下列条件 i)—iii) 时,称为**一致覆盖族** (uniform family of coverings): i) 对所有的$\alpha\in A$,使$\mathfrak{U}\prec\mathfrak{U}_\alpha$均成立的覆盖$\mathfrak{U}$仅限于覆盖$\Delta=\{\{x\}\}_{x\in X}$; ii) 对于$\alpha,\beta\in A$,有$\gamma\in A$,使$\mathfrak{U}_\gamma\prec\mathfrak{U}_\alpha\cup\mathfrak{U}_\beta$; iii) 对于$\alpha\in A$,有$\beta$,使$\mathfrak{U}_\beta^\Delta\prec\mathfrak{U}_\alpha$ (即$\mathfrak{U}_\beta$是$\mathfrak{U}_\alpha$的Δ加细†). 当$\{U_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}(x\in X)$是$X$的一致邻域族时,如对各$\alpha$,令$\mathfrak{U}_\alpha=\{U_\alpha(x)\}_{x\in X}$,则$\{\mathfrak{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$是一致覆盖族. 其次,当设$\mathfrak{U}=\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$为$X$的一个覆盖时,定义$S(x,\mathfrak{U})=\bigcup\{U_\lambda|x\in U_\lambda\}$. 当$\{\mathfrak{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$是一致覆盖族时,令$U_\alpha(x)=S(x,\mathfrak{U}_\alpha)$,则$\{U_\alpha(x)\}_{\alpha\in A}(x\in X)$是$X$的一致邻域族. 即对$X$定义一致覆盖族和对$X$定义$T_1$一致性是等价的.

4) 在度量空间(X,d)中,对$r>0$,设$U_r=\{(x,y)|d(x,y)<r\}$,若令$\mathfrak{U}=\{U_r\}_{r>0}$,则$\mathfrak{U}$是一致性的基,由此确定的一致拓扑显然和距离拓扑相同.

【一致空间中的诸概念】 所谓一致空间中的诸概念不外是对拓扑空间的种种概念用一致拓扑的语言予以描述,其重要者列举于下.

所谓从一致空间$(X,\mathscr{U})$到一致空间$(X',\mathscr{U}')$的映射f是**一致连续的** (uniformly continuous), 系指对于任意$U'\in\mathscr{U}'$,可取适当的$U\in\mathscr{U}$,使得若$(x,y)\in U$,则$(f(x),f(y))\in U'$. 这同f关于X和X'的一致拓扑而言是连续的,即若使用一致邻域族,则对任意α,可确定某个β,使得当$y\in U_\alpha(x)$时,有$f(y)\in$

$U_\beta(f(x))$，两者是等价的．若 $f:X \to X'$，$g:X' \to X''$ 都是一致连续的，则 $g\circ f:X \to X''$ 也是一致连续的．从一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 到一致空间 $(X', \mathscr{U}')$ 的双射 f，当 f 及 f^{-1} 都是一致连续时，称为**一致同胚** (uniform isomorphism)，而 $(X,\mathscr{U})$ 和 $(X',\mathscr{U}')$ 称为**一致同胚的** (uniformly equivalent)．一致同胚是由一致拓扑决定的同胚．一致同胚的概念定义了一致空间之间的等价关系．

在同一集合 X 上定义两个一致性 $\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$，当恒等映射 $(X,\mathscr{U}_1)\to(X,\mathscr{U}_2)$ 是一致连续时，称一致性 $\mathscr{U}_1$ 比一致性 $\mathscr{U}_2$ **强** (stronger)，或者说 $\mathscr{U}_2$ 比 $\mathscr{U}_1$ **弱** (weaker)．当 $\mathscr{U}_1$ 比 $\mathscr{U}_2$ 强(弱)而 $\mathscr{U}_1$ 和 $\mathscr{U}_2$ 不相等时，称为 $\mathscr{U}_1$ 比 $\mathscr{U}_2$ 真强(弱)．离散一致性是对任意集合所能定义的最强的一致性．当集合 X 的近域只限于 $X\times X$ 时，所得的一致性是最弱的一致性，但这不是 T_1 一致性．若限于 T_1 一致性而言，在集合 X 上所能定义的最弱的一致性一般不存在．$\mathscr{U}_1$ 是比 $\mathscr{U}_2$ 强的一致性，其充分必要条件是 $\mathscr{U}_2$ 的近域也是 $\mathscr{U}_1$ 的近域．

设 f 为从集合 X 到一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 的映射，由 $g(x,y)=(f(x),f(y))$ 定义从 $X\times X$ 到 $Y\times Y$ 的映射 g，则 $\mathscr{B}=\{g^{-1}(V)\,|\,V\in\mathscr{V}\}$ 显然满足一致性的基的条件 II')—V')．于是由 $\mathscr{B}$ 确定的近域全体的集合(一致性) $\mathscr{U}$ 称为在 f 之下 Y 的一致性 $\mathscr{V}$ 的**原象** (inverse image)．$\mathscr{U}$ 和所谓使 f 是一致连续的 X 的最弱的一致性是等价的．从而从一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 到一致空间 $(Y,\mathscr{V})$ 的映射 f 是一致连续的，其充分必要条件是在 f 之下一致性 $\mathscr{V}$ 的原象比一致性 $\mathscr{U}$ 弱．对一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的子集 A，由在恒等映射 $(A\to X)$ 之下一致性 $\mathscr{U}$ 的原象可以定义一致性 $\mathscr{V}$，称之为由 $\mathscr{U}$ 诱导的 A 的**相对一致性** (relative uniformity, relativization)．显然，$\mathscr{V}=\{U\cap(A\times A)\,|\,U\in\mathscr{U}\}$．一致空间 $(A,\mathscr{V})$ 称为 $(X,\mathscr{U})$ 的**一致子空间** (uniform subspace)．$(A,\mathscr{V})$ 的一致拓扑是 $(X,\mathscr{U})$ 的拓扑在 A 中诱导的拓扑(相对拓扑)．

设 $\{(X_\lambda,\mathscr{U}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一致空间族，从直积集 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 到各 X_λ 的射影记为 pr_λ 使 pr_λ 是一致连续的最弱的 X 的一致性 $\mathscr{U}$ 称为**直积一致性** (product uniformity)，$(X,\mathscr{U})$ 称为 $\{(X_\lambda,\mathscr{U}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的**直积一致空间** (product uniform space)．$(X,\mathscr{U})$ 的拓扑显然是 $(X_\lambda,\mathscr{U}_\lambda)$ 的拓扑的直积．

【度量化】 设 d 为在集合 X 上定义的伪距离*，对于各正实数 r，令 $V_{d,r}=\{(x,y)\in X\times X\,|\,d(x,y)<r\}$，$\{V_{d,r}\,|\,r>0\}$ 显然满足一致性的基的条件 II')—V')．由此定义的一致性称为**伪度量一致性** (pseudo-metric uniformity) 或者说**由伪距离生成的一致性** (uniformity generated by a pseudo-distance)．此时确定的一致拓扑显然和由伪距离 d 引起的拓扑相同．当在 X 上适当确定伪距离 d，由此产生的伪度量一致性和由 $\mathscr{U}$ 产生的一致性恰好能够相同时，一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 称为**可伪度量化的** (pseudo-metrizable)，当伪距离 d 能取做距离时，相应地称为**可度量化的** (metrizable)．一致空间可伪度量化的充分必要条件是其一致性的基可取为可数的．从而为使一致空间可度量化，其充分必要条件是：其一致性是 T_1 一致性并且具有可数的基．当对集合 X 定义了伪距离族 P 时，对任意的 $d\in P$ 和任意正实数 r，令 $V_{d,r}=\{(x,y)\in X\times X\,|\,d(x,y)<r\}$．使所有的 $V_{d,r}$ 均为近域的最弱的一致性称为由**伪距离族生成的一致性** (uniformity generated by pseudo-metrics)．也可以说这是使属于 P 的所有伪距离在 $X\times X$ 上关于直积一致性而言同时一致连续的 X 的最弱的一致性．

所有的一致空间 X 的一致性和在直积一致空间 $X\times X$ 上一致连续的伪距离全体 P_X 所生成的一致性是相同的．由此进一步可知，所有的一致空间 X 与(其个数等于 P_X 的基数的)伪度量空间的直积的子空间一致同胚．特别是，T_1 一致空间与(其个数等于 P_X 的基数的)度量空间的直积的子空间一致同胚．在拓扑空间 (X,τ) 中能够定义一致性，使其一致拓扑和 τ 相同的充分必要条件是 (X,τ) 满足 Тихонов

分离公理[†]，特别是，其一致性是 T_1 一致性的充分必要条件为：(X,τ) 是完全正则[†]的（[2]）。

【完备性】 关于一致空间 $(X,\mathscr{U})$，当 X 的子集 A 对于 $U\in\mathscr{U}$ 有 $A\times A\subset U$ 时，称 A 为 **U 阶小集合** (small set of order U)。若 A，B 是 U 阶小集合，则 $A\cup B$ 也是 U 阶小集合。设有 X 上的滤子[†] $\mathfrak{F}$，如果对于任意的 $U\in\mathscr{U}$，它均含有 U 阶小集合，则 $\mathfrak{F}$ 称为（关于一致性 $\mathscr{U}$ 的）**Cauchy 滤子** (Cauchy filter)，即含有任意小集合的滤子。一致空间的收敛滤子是 Cauchy 滤子。设 f 为从一致空间 X 到一致空间 X' 的一致连续映射，则 X 的 Cauchy 滤子基在 f 之下的象还是 X' 的 Cauchy 滤子基。若一点是 Cauchy 滤子 $\mathfrak{F}$ 的每个集合的触点，则它是 $\mathfrak{F}$ 的极限点，从而被收敛于点 x 的滤子所包含的 Cauchy 滤子也收敛于点 x，这是明显的。

一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 的有向点族[†] $X(\mathfrak{A})=\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ ($\mathfrak{A}$ 是由序 $\leqslant$ 定义的有向集)，如果对任意的 $U\in\mathscr{U}$，均可适当选取 $\gamma\in\mathfrak{A}$，使对所有的 $\gamma\leqslant\alpha$，$\gamma\leqslant\beta$，均有 $(x_\alpha,x_\beta)\in U$，则称为（关于一致性 $\mathscr{U}$ 的）**Cauchy 有向点族** (Cauchy directed family of points, Cauchy net, [2]) 或者**基本有向点族** (fundamental directed family of points)。特别是，对自然数全体 N，在上述条件之下 $x(N)$ 称为 **Cauchy 序列** (Cauchy sequence) 或**基本序列** (fundamental sequence)。设 $\{x_\alpha\}$ 为 Cauchy 有向点族，对于 $\alpha\in\mathfrak{A}$，令 $A_\alpha=\{x_\beta\in x(\mathfrak{A})\mid\alpha\leqslant\beta\}$，则 $\mathfrak{B}=\{A_\alpha\mid\alpha\in\mathfrak{A}\}$ 是滤子基，而且由此定义的滤子是 Cauchy 滤子。如用伪有向点族代替有向点族，也可以同样处理。设 $\mathfrak{F}$ 是 Cauchy 滤子，其基为 $\mathfrak{B}$，对于 $U,V\in\mathfrak{B}$，当 $U\supset V$ 时，定义为 $U\leqslant V$，则 $\mathfrak{B}$ 按此 $\leqslant$ 是伪有向集。于是由各 $U\in\mathfrak{B}$ 选出一点 x_U，构成伪有向点族 $\{x_U\}_{U\in\mathfrak{B}}$，这是 Cauchy 伪有向点族。关于 Cauchy 滤子的收敛性的命题，可以用和它等价的关于 Cauchy（伪）有向点族的收敛性的命题的形式来叙述。

一致空间 X 的 Cauchy 滤子未必具有极限点。所有的 Cauchy 滤子都是收敛的一致空间称为（关于它的一致性）**完备的** (complete)。完备的一致空间简称为**完备空间** (complete space)。完备空间的闭子空间关于相对一致性是完备的。特别是，可度量化的一致空间是完备的，其充分必要条件是它的所有 Cauchy 序列是收敛的，这和对度量空间的完备性的定义是相同的（→度量空间）。

由一致空间 X 到一致空间 X' 的映射 f 在 X 的**子集 A 上是一致连续的** (uniformly continuous on a subset)，系指 f 向 A 的收缩关于相对一致性是一致连续的。设 f 是由一致空间 X 的子集 A 到完备的 T_1 一致空间中的一致连续映射，则 f 可以唯一地扩张为 $\bar{A}$ 上的一致连续映射 $\bar{f}$。

度量空间可以由一一等距[†]映射映射到完备度量空间的稠密子集上；而 T_1 一致空间和 T_1 完备空间的稠密子空间是一致同胚的。如果有由一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 到完备空间 $(X^*,\mathscr{U}^*)$ 中的一致同胚映射 f，使得 $f(X)$ 是 X^* 的稠密子集，则组 $(f,(X^*,\mathscr{U}^*))$ 称为 $(X,\mathscr{U})$ 的**完备化** (completion)。T_1 一致空间的 T_1 完备化是唯一的（一致同胚的看做是同一的）。

【和紧空间的关系】 拓扑空间 (X,τ) 上的一致性 $\mathscr{U}$ 和 τ 是**相容的** (compatible)，系指由 $\mathscr{U}$ 产生的一致拓扑和 τ 是相同的。当和 τ 相容的 $\mathscr{U}$ 存在时，(X,τ)（及 τ）便称为**可一致化的** (uniformizable)。在紧 Hausdorff 空间 (X,τ) 中和 τ 相容的一致性是唯一确定的。此时 $\mathscr{U}$ 由 $\varDelta$ 在 $X\times X$ 中的邻域的全体组成。而紧 Hausdorff 空间关于此一致性是完备的。因此紧 Hausdorff 空间的所有子空间都是可一致化的。又所有局部紧 Hausdorff 空间也是可一致化的。由紧 Hausdorff 空间到一致空间的连续映射是一致连续的。所谓一致空间 $(X,\mathscr{U})$ 是**全有界的** (totally bounded) 或**准紧的** (precompact)，系指对于各 $U\in\mathscr{U}$，均有由有限个 U 阶小集合所组成的 X 的覆盖。要使一致空间是紧的，全有界且完备是充分必要的。设 f 为由一致空间 X 到一致空间 Y 的一致连续映射，则 X 的全有界子集 A 的像 $f(A)$ 是 Y 的全有界

子集(以上→[1],[2]). 另外,当 $(X, \mathscr{U})$ 的子集 A,关于相对一致性是全有界时称为是**全有界的**. 在一致空间 X 中,做为各点的邻域基可取全有界的开集时,X 称为**局部全有界的**(locally totally bounded).

【拓扑完备】 设 $X, Y, A\subset X, B\subset Y$ 都是完备 T_1 一致空间,而做为一致覆盖族的基其基数至多是 τ 时,若有拓扑映射使 $f(A)=B$,则 f 可分别扩张到 X, Y 中至多是 τ 个开集的交集上 (M. A. Лаврентьев). 由此,当 X, Y 都是度量空间时,度量空间 X 和完备度量空间同胚的充分必要条件为:X 是完备空间的 G_δ 集†([6]). 将此性质赋予拓扑的特征时,度量空间 X 和完备度量空间同胚的充分必要条件为:X 是拓扑完备的 (E. Čech 1937). 这里所谓**拓扑完备空间** (topologically complete space) 系指它是 Hausdorff 空间且和某紧 Hausdorff 空间的 G_δ 集同胚,也称为 **Young 空间** (Young space).

【参】 [1] N. Bourbaki, Topologie générale, chap. 2, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1940, 修订版 1961; [2] J. L. Kelley, General topology, van Nostrand, 1955; [3] J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology, Princeton, 1940; [4] A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1938; [5] 河田敬義-三村征雄,現代数学概説 II, 岩波, 1965; [6] 小松醇郎,位相空間論, 岩波, 1947; [7] J. R. Isbell, Uniform spaces, Amer. Math. Soc. Math. surveys, 1964; [8] H. Nakano (中野秀五郎), Uniform spaces and transformation groups, Wayne State Univ. Press, 1968.

一致收敛 [英 uniform convergence 法 convergence uniforme 德 gleichmässige Konvergenz 俄 равномерная сходимость 日 一様収束]【实值函数序列的一致收敛】 所谓在集合 B 上定义的实值函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 B 上**一致收敛**于函数 $f(x)$ 或者说是**一致收敛的** (uniformly convergent),系指 f_n 关于范数 $\|\varphi\|=\sup\{|\varphi(x)|\,|\,x\in B\}$ 是收敛的,即 $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$. 详细说来,对于任意正数 ε,可适当确定一个与 x 无关的自然数 N,使得对于所有的 $n>N$ 及 $x\in B$,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 均成立. 一致收敛也称为**均匀收敛**. 根据实数的完备性 (Cauchy 判别准则†),函数序列 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于某个函数的充分必要条件是对于任意正数 ε,可确定一个与 x 无关的自然数 N,使得对于 $m, n>N$ 及所有的 $x\in B$,$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ 均成立. 函数项级数 $\sum_n f_n(x)$ 或无穷乘积 $\prod_n f_n(x)$ 的一致收敛可由其部分和或部分积的序列的一致收敛来定义. 特别是,若取绝对值的函数项级数 $\sum_n |f_n(x)|$ 在 B 上一致收敛,则原级数 $\sum_n f_n(x)$ 也在 B 上一致收敛,此时称 $\sum_n f_n(x)$ 是**一致绝对收敛的** (uniformly absolutely convergent, absolutely and uniformly convergent).

对于函数序列 $\{f_n(x)\}$,满足 $|f_n(x)|\leqslant M_n$ 的常数序列 $\{M_n\}$ 称为它的**强级数** (dominant, majorant). 具有收敛的强级数 $\sum_n M_n$ 的函数项级数 $\sum_n f_n(x)$ 是一致绝对收敛的 (**Weierstrass 判别法**). 另外,或者 $\sum_n f_n(x)$ 在 B 上一致收敛,而对于函数序列 $\{\lambda_n(x)\}$,$\sum_n |\lambda_n(x)-\lambda_{n+1}(x)|$ 的部分和是一致有界的(即有与 $x\in B$ 无关且与项数无关的上界),或者 $\sum_n |\lambda_n(x)-\lambda_{n+1}(x)|$ 在 B 上一致收敛且 $\lambda_n(x)$ 一致收敛于 0,而 $\left|\sum_n f_n(x)\right|$ 的部分和是一致有界的. 在这两种情形之下,$\sum_n \lambda_n(x)f_n(x)$ 在 B 上都是一致收敛的.

【一致收敛和逐点收敛】 设 $\{f_n(x)\}$ 为 B 上的实值函数序列,当对各点 $x_0\in B$,数列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛于 $f(x_0)$ 时,称 $f_n(x)$ **逐点收敛** (pointwise convergence) 或**单纯收敛** (simple convergence) 于 $f(x)$. 如将 B 上的函数 $f(x)$ 以 $\boldsymbol{R}^B=\prod_{x\in B}\boldsymbol{R}$ 中的值 $\prod_{x\in B}f(x)=[f]$ 表示时,这不外是在 $\boldsymbol{R}^B$ 的直积拓扑†下,点列 $[f_n]$ 收敛于 $[f]$.

当 B 是拓扑空间,$\{f_n(x)\}$ 是连续函数列时,即使它逐点收敛于 $f(x)$,极限 $f(x)$ 也未必是连续的,若一致收敛于 $f(x)$,则 $f(x)$ 是连续的. 反之,即使极限函数 $f(x)$ 是连续的,也未必是一致收敛的,特别是,当 B 是紧†集,$\{f_n(x)\}$ 是单调函数序列 ($f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$ 或 $f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$)

时，如果 $\{f_n(x)\}$ 逐点收敛于连续函数 $f(x)$，则必是一致收敛的 (**Dini 定理**).

【集族上的一致收敛】 在解析学中常常说函数序列 $\{f_n(x)\}$ **广义一致收敛** (uniform convergence in wider sense) 于 $f(x)$. 这个术语有两个意义，或指对定义域 B 的各点 x_0，有邻域 U 存在，在 U 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$，或指在 B 内各紧集 K 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. 在 B 是局部紧空间[†]时这两个定义是一样的，但如要区别，可将后者称为**紧一致收敛** (uniform convergence on compact sets). 一般地，设有 B 的子集族 $\mathfrak{P}$，对 B 上定义的实值函数全体的集合 $\mathfrak{F}$，由范数族 $\|f\|_K = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}(K \in \mathfrak{P})$ 可以引入拓扑 T，关于此拓扑，函数序列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $f(x)$ 时，称 $f_n(x)$ 在**集族 $\mathfrak{P}$ 上一致收敛** (uniform convergence on $\mathfrak{P}$). 特别是，当 $\mathfrak{P}$ 为 $\{B\}$ 或为 $\{\{x\} \mid x \in B\}$ 或由 B 上全体紧集构成时，便分别相当于通常的一致收敛，逐点收敛，紧一致收敛. 在 $\mathfrak{P}$ 是可数集时，拓扑 T 是可度量化的[†]. 而且，以上的许多定义及结果，也可以推广到其函数值是复数，或在赋范空间内，或在一般的一致空间内的情形.

【映射空间的拓扑】 对于拓扑空间 X, Y，用 $C(X, Y)$ 表示全体连续映射 $f: X \to Y$ 的集合. $C(X, Y)$ 或其子集 $\mathfrak{F}$ 都称为**映射空间** (mapping space, space of continuous mappings). 自然映射 $\phi: \mathfrak{F} \times X \to Y$ 由 $\phi(f, x) = f(x)$ $(f \in \mathfrak{F}, x \in X)$ 来定义，对 X 的紧集 K 及 Y 的开集 U，令 $W(K, U) = \{f \in \mathfrak{F} \mid f(K) \subset U\}$，以有限个 $W(K_i, U_i)$ 的交作为开集系的基，从而对 $\mathfrak{F}$ 引入的拓扑，称为映射空间 $\mathfrak{F}$ 的**紧开拓扑** (compact-open topology). 若对于 X 的任一紧子集 K，当 ϕ 在 $\mathfrak{F} \times K$ 上连续时，称 ϕ 在紧区上连续. 若 X, Y 为 Hausdorff 空间[†]，则紧开拓扑是能使 ϕ 在紧区上连续的 $\mathfrak{F}$ 的最弱[†]拓扑. 又此时若 $\mathfrak{F}$ 关于此拓扑是紧的，则紧开拓扑和逐点收敛拓扑是一致的.

再者，当 Y 是度量空间[†](一般地，当 Y 是一致空间[†]) 时，$\mathfrak{F}$ 的紧开拓扑和紧一致收敛拓扑是一致的. 所谓 $\mathfrak{F}$ 在 $x \in X$ 是**等度连续的** (英 equicontinuous 法 également continu)，系指对任意 $\varepsilon > 0$ (若为一致空间，则对 Y 的任意近域[†] $V \subset Y \times Y$) 可适当取 x 的邻域 U，使得对于所有 $p \in U$ 及 $f \in \mathfrak{F}$，均有 $\rho(f(x), f(p)) < \varepsilon$ (若为一致空间，则 $(f(x), f(p)) \in V$) 成立. 当 X 为局部紧 Hausdorff 空间时，从 X 到 Y 的连续映射族 $\mathfrak{F}$ 关于紧开拓扑，即紧一致收敛拓扑是相对紧的 (即闭包是紧的)，其充分必要条件为：在各点 $x \in X$ 处，$\mathfrak{F}$ 是等度连续的，且集合 $\{f(x) \mid f \in \mathfrak{F}\}$ 是 Y 的相对紧集 (**Ascoli 定理**). 特别是，在 Y 是实数空间时，若 $\mathfrak{F}$ 是等度连续且一致有界的，则 $\mathfrak{F}$ 是相对紧的，从而由 $\mathfrak{F}$ 的任意函数序列 f_n 中必可选出紧一致收敛的子序列 $f_{n(\nu)}$ (**Ascoli-Arzelà 定理**).

【正规族】 P. Montel (1912) 将对于紧一致收敛拓扑为相对紧的函数族称为**正规族** (normal family). 这个术语特别适用于复解析函数族. 这时，函数值容许为 ∞，象空间 Y 便是 Riemann 球面[†]. 他用这个概念成功地统一处理了当时已知的复变函数论的许多结果.

有限维复流形 X 上的一致有界的解析函数族 $\mathfrak{F}$ 是正规族 (**Montel 定理**). 再者，$\mathfrak{F}$ 的所有函数若不取三个确定数作为值，便是正规族. 而且，各个 $f \in \mathfrak{F}$ 所不取的三个值即使随 f 变化，只要它们在 Riemann 球面[†]上的距离是下方有界的，那末 $\mathfrak{F}$ 也是正规族. 由此证明了 Picard 定理[†]. 即设 $w = f(z)$ 在 $|z| < \infty$ 上是亚纯函数，在环形域 $D = \{1 < |z| < 2\}$ 上考虑函数族 $f_n(z) = f(z/2^n)$，当 $f(z)$ 是超越函数[†]时，因 $f_n(z)$ 在 D 上不能是正规族，故 $f(z)$ 最多除两个值外将取所有的值. G. Julia 用类似的方法将结果精密化，而得到关于 Julia 方向[†]的结果.

F. Marty 对单变量解析函数(或亚纯函数) $w = f(z)$ 使用**球面导数** (spherical derivative) $|f'(z)|/(1 + |f(z)|^2)$，证明了为使解析函数族 $\mathfrak{F} = \{f(z)\}$ 是正规族，其充分必要条件为 $f \in \mathfrak{F}$ 的球面导数是一致有界的. 此定理包含了上述 Montel 定理及其各种推广. 如果适当利用它，也可证明定量的结果，例如关于 Borel

方向†的定理.

从单变量解析函数族 $\mathfrak{F}$ 的任意函数序列 f_n 中选出适当的子序列 $f_{n(\nu)}$，当 $f_{n(\nu)}$ 在除去孤立点的剩余部份上一致收敛时，称 $\mathfrak{F}$ 为**拟正规族**（quasi-normal family）．此时，若非一致收敛点的最少个数是 p，则称 $\mathfrak{F}$ 为 p 阶拟正规族．例如 p 叶函数†最多是 p 阶拟正规族．

正规族在复变函数论方面的应用，除上述的值分布论之外，也用来证明某个泛函的极值函数的存在，它经常是作为正规族中的函数序列的子序列的极限而构造出来的．Riemann 映射定理†的证明便是一例．另外，关于全纯函数的迭代(iteration)的极限函数的研究等，我们还不知别的有力的方法呢！关于亚纯函数的迭代，Julia (1919) 详细研究过，至于初等超越函数的迭代也被研究过．作为其它的应用，A. Wintner (1949)利用多变量解析函数的正规族给出解析函数的隐函数定理的精密化．

【参】［1］N. Bourbaki, Topologie générale, chap. X, Espaces fonctionnels, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1949, 修订版 1963；［2］J. L. Kelley, General topology, chap. 7, van Nostrand, 1955；［3］J. Dieudonné, Foundations of modern analysis, Academic Press, 1960. 关于复函数的正规族：［4］P. Montel, Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, 1927；［5］G. Valiron, Familles normales et quasinormales de fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, 1929.

范畴和函子［英 category and functor　法 catégorie et foncteur　德 Kategorie und Funktor　俄 категория и функтор　日 圏と関手］【范畴】作为一例，考虑所有的群．在任意两个群 X, Y 之间，有各种同态 $X \to Y$．其全体写做 $\mathrm{Hom}(X, Y)$．对于两个同态 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$，可以确定同态 $g \circ f: X \to Z$ 作为其合成．像这个例子这样，一般地，设确定了数学**对象**（object）的一个范围，对于该范围内的任意两个对象 X, Y，又指定了称为从 X 到 Y 的**射**（英 morphism, arrow　法 morphisme, flèche）的集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$．设对于射 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$，规定射 $g \circ f \in \mathrm{Hom}(X, Z)$，称为它们的**合成**（composite　法 composé）．射 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ 也可以写做 $f: X \to Y$ 或 $X \xrightarrow{f} Y$．这时，如果满足下列三条件(公理)，则所给定的对象、射、合成的总体概念称为**范畴**．1）对于射 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$，有 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$；2）对于任意对象 X，有某射 $1_X: X \to X$，使得关于任意射 $f: X \to Y$, $g: Z \to X$ 均有 $f \circ 1_X = f$, $1_X \circ g = g$；3）如果对象序对 (X, Y), (X', Y') 不相同，则 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 和 $\mathrm{Hom}(X', Y')$ 是不相交的．

由条件 1)，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ 关于合成运算构成半群．这个半群由条件 2）具有单位元 1_X．于是 1_X 由 X 唯一确定．条件 3）意味着对于射 f，使 $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ 的对象序对 (X, Y) 是唯一确定的．由此，仅将射及其合成作为基础也可以给出范畴的定义．

范畴 $\mathscr{C}$ 的全体对象写做 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，全体射写做 $\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$．$X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 也可以简写为 $X \in \mathscr{C}$．$\mathrm{Hom}(X, Y)$ 也可详细写做 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$．范畴 $\mathscr{C}$ 的**子范畴**（subcategory）$\mathscr{C}'$，是指 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}') \subset \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，关于 $X, Y \in \mathscr{C}'$ 有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X, Y) \subset \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$，且在 $\mathscr{C}'$ 中的射的合成和在 $\mathscr{C}$ 中的合成彼此相同而言．特别是，当对于任意 $X, Y \in \mathscr{C}'$，均有 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ 时，$\mathscr{C}'$ 称为 $\mathscr{C}$ 的**完全**（英 full 法 pleine）子范畴．范畴 $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ 的积 $\mathscr{C}_1 \times \mathscr{C}_2$ 以由对象序对和射的对用自然方法定义之．

【范畴的例】 1）集范畴．以集合为对象，以其间的映射为射，以映射的合成作为射的合成，便得到一个范畴．称之为**集范畴**（category of sets），以 (Sets) 或 (Ens) 表示之．其中对于空集 $\varnothing$，约定 $\mathrm{Hom}(\varnothing, Y)$ 恒由一个元素构成，而当 $Y \neq \varnothing$ 时约定 $\mathrm{Hom}(Y, \varnothing)$ 为空的．2）**群范畴**（category of groups）．以群为对象，以其间的同态为射，得到的范畴已如上述．以 (Gr) 表示之．若对象仅限于 Abel 群，则作为 (Gr) 的完全子范畴得到 **Abel 群范畴**（category of Abelian groups）．以 (Ab) 表示之．3）模范畴．固定环 R，以左 R 模为对象，以 R 线性映射为射，得到一个范畴．称之为**左 R 模范畴**（category of R-left modules），以 ${}_R\mathscr{M}$ 表示之．

同样地，也可以定义右R模范畴$\mathscr{M}_R$. 当R是单式环†时，将对象限于单式左(右)R模，得到完全子范畴. 通常简单地称之为左(右)R模范畴. 再者，如果R是交换的，${}_R\mathscr{M}$和$\mathscr{M}_R$可以看做是相同的. 特别是，当$R=\boldsymbol{Z}$(整数环)时，${}_R\mathscr{M}$和(Ab)可以看做是相同的. 当R为域时，${}_R\mathscr{M}$也称为R上线性空间的范畴. 4) **环范畴**. 以环为对象，以环同态为射可得到范畴. 特别是，仅以单式交换环为对象，以单式同态为射得到的范畴简称为**交换环范畴**(category of commutative rings)，写做(Rings). 5) 流形范畴. 以可微流形为对象，以可微映射为射得到范畴. 关于解析流形和解析映射也同样. 6) 拓扑空间范畴. 以拓扑空间为对象，以连续映射为射得到范畴. 称之为**拓扑空间范畴**(category of topological spaces)，以(Top)表示之. 另外，以连续映射的同伦类为射，用自然方法确定其合成，得到新的范畴. 写做(Hot)或(Htp). 7) 固定偏序集I. 以I的元素为对象，以$x \leqslant y$的I的元素对(x, y)为从x到y的射，得到范畴. 其中射(x, y), (y, z)的合成规定为(x, z).

在1)—6)中，对象的全体$\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$不是集合而是类†(→集合[类]). 关于范畴的逻辑基础→[5], [6].

【图表】 若给定向量集$\{A_\alpha\}$和点集$\{B_\beta\}$，关于各向量A_α确定其始点和终点，则$\{A_\alpha, B_\beta\}$称为**图表**(diagram). (通常仅处理所有的B_β都是某个A_α的始点或终点的情形)(图1). 所谓**范畴$\mathscr{C}$的图表**是指在某个图表$\{A_\alpha, B_\beta\}$上，使各个A_α对应于射$f_\alpha \in \mathrm{Hom}(X, Y)$($X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$)，使各个点$B_\beta$对应于对象$Z_\beta \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$，且若$A_\alpha$的始点是$B_\beta$，终点是$B_\gamma$，则$f_\alpha \in \mathrm{Hom}(B_\beta, B_\gamma)$而言(图2). 再者，当取任意二点$B_\beta$, B_γ时，对于任意的以B_β为始点，B_γ为终点的向量的结合$A_{\alpha_1} \circ A_{\alpha_2} \circ \cdots \circ A_{\alpha_m}$(即$A_{\alpha_1}$的始点是$B_\beta$，$A_{\alpha_i}$的终点是$A_{\alpha_{i+1}}$的始点，且$A_{\alpha_m}$的终点是$B_\gamma$)，若$f_{\alpha_m} \circ f_{\alpha_{m-1}} \circ \cdots \circ f_{\alpha_1}$是某一固定的射($\in \mathrm{Hom}(B_\beta, B_\gamma)$)，则这个范畴$\mathscr{C}$中的图表称为**交换图表**(commutative diagram). 例如图2是交换图表，因为$f_3 \circ f_1 = f_4 \circ f_2 = f_5$成立.

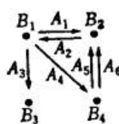


图 1

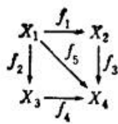


图 2

【诸定义】 在范畴$\mathscr{C}$中，射$f: X \to Y$是**同构射**(或**同构**)(isomorphism, equivalence)，系指存在着适当的射$g: Y \to X$，使$f \circ g = 1_Y$, $g \circ f = 1_X$. 这时，g由f唯一确定，它也是同构射. g称为f的**逆射**(inverse morphism). g的逆射是f. 同构射也可写做$f: X \xrightarrow{\sim} Y$. 当同构射$X \to Y$存在时，称$X$, Y是**同构的**(isomorphic)，记为$X \cong Y$. 同构射的合成是同构射. 特别是，同构射$X \to X$不外是半群$\mathrm{Hom}(X, X)$的可逆元. 称之为X的**自同构**(automorphism). 同构射在集范畴中是双射，在群范畴中是同构，在R模范畴中是R同构，在环范畴中是环同构，在可微流形范畴中是微分同胚，在拓扑空间范畴中是同胚. 所谓射$f: X \to Y$是**单射**(monomorphism, injection)，系指对于任意对象Z和射$u, v: Z \to X$($u \neq v$)均有$f \circ u \neq f \circ v$. 所谓$f: X \to Y$是**满射**(epimorphism, surjection)，系指对偶地，对于任意的射$u, v: Y \to Z$($u \neq v$)均有$u \circ f \neq v \circ f$. 在集范畴中，单射及满射和作为映射的单射和满射(→集合)是一致的. 既为单射又为满射时称为**双射**(bijection). 同构射恒为双射，但在一般范畴中其逆不成立.

对于到X的两个单射$f_1: X_1 \to X$, $f_2: X_2 \to X$，如果有两个射$g_1: X_1 \to X_2$, $g_2: X_2 \to X_1$使得$f_1 = f_2 \circ g_1$, $f_2 = f_1 \circ g_2$，则称f_1, f_2是等价的(图3). 由这个等价关系构成的类称为X的**子对象**(subobject). 同样地，将由X出发的满射进行分类可以定义**商对象**(quotient object).

如果范畴$\mathscr{C}$中的对象e满足条件“对于任意对象Y，$\mathrm{Hom}(Y, e)$均由一个元素组成”，则e称为$\mathscr{C}$中的**终对象**(final object). 和它

对偶地，如果对象 e' 满足条件“对于任意对象 Y, $\mathrm{Hom}(e', Y)$均由一个元素组成”，则 e' 称为 $\mathscr{C}$ 中的**始对象** (initial object, cofinal object). 在两个终对象之间，可唯一确定同构射，关于始对象也如此. 在集范畴中凡由一个元素组成的集合，在拓扑空间范畴中凡由一点组成的空间，都是终对象. 在群范畴和模范畴中仅由单位元或零元组成者都既是终对象同时也是始对象. 在交换环范畴中零环 $\{0\}$ 是终对象，整数环 $\boldsymbol{Z}$ 是始对象.

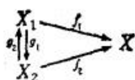


图 3

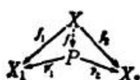


图 4

【直积与对偶直积】 对于范畴 $\mathscr{C}$ 中的对象 X_1, X_2, 满足下列条件的对象 P 和射 p_i: $P \to X_i (i=1, 2)$ 组成的组 (P, p_1, p_2) 称为 X_1, X_2 的**直积** (direct product): 对于任意射 $f_i: X \to X_i (i=1, 2)$, 使 $p_i \circ f = f_i$ 成立的射 $f: X \to P$ 是唯一存在的(图 4). 若 (P', p'_1, p'_2) 也是直积，则由上述条件可知，使 $p'_i \circ f = p_i (i=1, 2)$ 成立的射 $f: P \to P'$ 是唯一确定的，这是同构射. 在此意义下，直积是唯一的. 用 $X_1 \times X_2$ 或 $X_1 \Pi X_2$ 表示 X_1, X_2 的直积. 集合、群、环、拓扑空间等范畴的直积与在各相应项目中所叙述的直积概念是一样的. 在一般范畴中，直积未必存在. 今设关于对象 X, 其直积 $X \times X$ 存在，则使 $1_X = p_1 \circ \Delta_X = p_2 \circ \Delta_X$ 成立的射 $\Delta_X: X \to X \times X$ 是唯一确定的. 称为 X 的**对角射** (diagonal morphism). 今设直积 $(X_1 \times X_2, p_1, p_2)$ 与 $(X'_1 \times X'_2, p'_1, p'_2)$ 存在，若给定射 $f_i: X_i \to X'_i (i=1, 2)$, 则使 $p'_i \circ f = f_i \circ p_i (i=1, 2)$ 成立的射 $f: X_1 \times X_2 \to X'_1 \times X'_2$ 是唯一确定的. 这个 f 写做 $f_1 \times f_2$. 若给定射 $g_i: X \to X_i (i=1, 2)$, 则使 $p_i \circ g = g_i (i=1, 2)$ 成立的射 $g: X \to X_1 \times X_2$ 是唯一确定的. 这个 g 写做 (g_1, g_2). 若 $X \times X$ 存在，则 $(g_1, g_2) = (g_1 \times g_2) \circ \Delta_X$.

再者，与直积相对偶地，满足下列条件的对象 S 以及射 $j_i: X_i \to S (i=1, 2)$ 所组成的组 (S, j_1, j_2) 称为 X_1, X_2 的**对偶直积** (direct coproduct) 或**直和** (direct sum): 对于任意的射 $f_i: X_i \to X (i=1, 2)$, 使 $f \circ j_i = f_i (i=1, 2)$ 成立的射 $f: S \to X$ 是唯一存在的(图 5). 在与直积同样的意义下，对偶直积也是唯一的，以 $X_1 + X_2$ 或 $X_1 \amalg X_2$ 表示之. 在集范畴中它与直和集是一致的. 在群范畴中对偶直积不外是自由积⁺. 在 Abel 群范畴或一般地 R 模范畴中，两个对象的直积与对偶直积(直和)可以看做是相同的(→模[直积和直和]). 在交换环范畴中对偶直积不外是整数环 $\boldsymbol{Z}$ 上的张量积⁺.

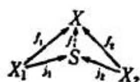


图 5

而且，一般地，对于对象族 $\{X_i\}_{i \in I}$ 可以定义直积及对偶直积，即对象 P 和射 $p_i: P \to X_i$ 族的组 $(P, \{p_i\}_{i \in I})$ 当满足条件“对于任意射 $f_i: X \to X_i (i \in I)$, 使 $p_i \circ f = f_i (i \in I)$ 成立的射 $f: X \to P$ 是唯一存在的”时，称为 $\{X_i\}_{i \in I}$ 的直积. 它在同构意义下也是唯一的. 对偶直积也同样. 还有→[对偶范畴], [函子的表示].

【对偶范畴】 在范畴的理论中，常常可以对概念和命题进行对偶讨论. 为了明确它的意义，可定义范畴 $\mathscr{C}$ 的**对偶范畴** $\mathscr{C}^\circ$ (dual category). 设 $\mathscr{C}^\circ$ 的对象是 $\mathscr{C}$ 的对象，即 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C}^\circ) = \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$. 对于任意的对象 X, Y, 令 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^\circ}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y, X)$, 射 f, g 在 $\mathscr{C}^\circ$ 中的合成 $f \circ g$ 规定为在 $\mathscr{C}$ 中的合成 $g \circ f$. 这时显然 $\mathscr{C}^\circ$ 构成范畴. 一般地，关于对象和射的命题，将射的方向倒过来便称为对偶命题，而在 $\mathscr{C}$ 中的对偶命题与在 $\mathscr{C}^\circ$ 中的原命题是相同的. 例如，在 $\mathscr{C}$ 中的单射(满射)是在 $\mathscr{C}^\circ$ 中的满射(单射)，在 $\mathscr{C}$ 中的终(始)对象是在 $\mathscr{C}^\circ$ 中的始(终)对象. 再者，在 $\mathscr{C}$ 中的直积(直和)是在 $\mathscr{C}^\circ$ 中的直和(直积). 对偶范畴的定义虽然是形式的，但在叙述具体的范畴之间的关系时是很方便的. 例如

Abel 群范畴的对偶范畴和交换紧拓扑群范畴是等价的（Понтрягин 对偶定理†）.

【对象上的范畴】 固定范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对象 S, $X\in\mathscr{C}$ 和射 $f:X\to S$ 的组 (X, f) 称为 S 上的对象或 **S 对象**（S-object），f 称为它的**结构射**（structure morphism）. 在不致发生误解时，可简单地称为"S 对象 X". 对于 S 对象 (X, f), (Y, g), 使 $f=g\circ h$ 成立的射 $h:X\to Y$ 称为由 (X, f) 到 (Y, g) 的 **S 射**（S-morphism）. 以 S 对象为对象，以 S 射为射得到的范畴称为在 $\mathscr{C}$ 中的 S 对象的范畴，以 $\mathscr{C}/S$ 表示之. $(S, 1_S)$ 为其终对象. 在 $\mathscr{C}/S$ 上 S 对象 X, Y 的直积（直和）称为在 $\mathscr{C}$ 上的**纤维积（和）**（fibre product (sum)），写做 $X\times_S Y$ 或 $X\Pi_S Y(X\amalg_S Y)$.

在交换环范畴 $\mathscr{C}$ 的对偶范畴上，来考虑一个对象 K 上的对象，不外是考虑 K 上的交换多元环. 在 $\mathscr{C}^\circ$ 上的纤维积 $A\times_K B$ 不外是作为多元环的张量积 $A\otimes_K B$.

【函子】 从范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{C}'$ 的**共变函子**（covariant functor）是指使 $\mathscr{C}$ 的对象 X 对应于 $\mathscr{C}'$ 的对象 $F(X)$, $\mathscr{C}$ 的射 $f:X\to Y$ 对应于 $\mathscr{C}'$ 的射 $F(f):F(X)\to F(Y)$ 的函数，且满足条件 $F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$, $F(1_X)=1_{F(X)}$. 对偶地，**反变函子**（contravariant functor）是将上述定义修改为 $F(f):F(X)\leftarrow F(Y)$, $F(g\circ f)=F(f)\circ F(g)$ 而得到的. 这无非是从对偶范畴 $\mathscr{C}^\circ$ 到 $\mathscr{C}'$ 的（或 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'^\circ$ 的）共变函子. 共变函子和反变函子合称为**函子**（functor），但也有仅指共变函子的. 多变量函子可以定义为由范畴的积出发的函子.

共变（反变）函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 是**一一的**（faithful），系指关于任意的 $X, Y\in\mathscr{C}$, 由 F 所确定的映射 $\mathrm{Hom}(X, Y)\to\mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$ $(f\sim\to F(f))$（反变时为 $\to\mathrm{Hom}(F(Y), F(X))$）是单射. 在一一的共变函子之下，$\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的一个子范畴可以看做是相同的. 特别是，当 F 所确定的映射全为双射时，函子 F 称为**完全一一的**（fully faithful）. 完全一一函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 也称为由 $\mathscr{C}$ 向 $\mathscr{C}'$ 内的**嵌入**（embedding）. 此时 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 的完全子范畴同构. 再者，完全一一共变函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 若满足条件"对于任意的 $X'\in\mathscr{C}'$, 均存在某个 $X\in\mathscr{C}$ 使得 $F(X)\rightleftarrows X'$"，则 F 称为范畴间的**等价**（equivalence）. 此时 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{C}'$ 可以看做是相同的. 和等价同样定义的反变函子，即等价 $\mathscr{C}\to\mathscr{C}'^\circ$（或 $\mathscr{C}^\circ\to\mathscr{C}'$），称为从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$ 的**反等价**（antiequivalence）.

【函子的例】 1) 设 $\mathscr{C}$ 为群（或环）范畴，使 $X\in\mathscr{C}$ 对应于"忘记"其群（或环）结构的集合 $F(X)$, 使同态 f 对应 f 自身 $F(f)$, 由此得到一一的共变函子 $F:\mathscr{C}\to(\mathrm{Sets})$. 2) 固定任意范畴 $\mathscr{C}$ 的对象 X. 使 $Y\in\mathscr{C}$ 对应集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$, 使射 f 对应映射 $f\circ$, 由此得到共变函子 $h_X:\mathscr{C}\to(\mathrm{Sets})$. 这里对于 $f:Y\to Y'$ 定义 $(f\circ)(g)=f\circ g(g\in\mathrm{Hom}(X, Y))$. 同样地，使 $Y\in\mathscr{C}$ 对应集合 $\mathrm{Hom}(Y, X)$. 使射 f 对应映射 $\circ f$, 由此得到反变函子 $h^X:\mathscr{C}\to(\mathrm{Sets})$. 3) 设 $\rho:A\to B$ 为环之间的同态，使左 A 模 M 对应某系数扩张 $\rho^*(M)=B\otimes_A M$, 使 A 同态 f 对应 B 同态 $\rho^*(f)=1_B\otimes f$, 由此得到共变函子 $\rho^*:{}_A\mathscr{M}\to{}_B\mathscr{M}$. 4) 设 R 为环，使左 R 模 M 对应其对偶模 $M^*=\mathrm{Hom}_R(M, R)$, 使 R 线性映射 f 对应其转置映射 ${}^t\rho=\circ\rho$, 由此得到反变函子 ${}_R\mathscr{M}\to\mathscr{M}_R$. $\mathscr{M}_R\to{}_R\mathscr{M}$ 也可同样得到. 5) 使可微流形 X 对应其上的可微函数全体的交换环 $F(X)$, 使可微映射 f 对应环同态 $\circ f$, 由此得到一一的反变函子 F. 6) 固定 Abel 群 A, 使拓扑空间 X 对应上同调群 $H(X, A)$, 使连续映射 $f:X\to Y$ 对应其诱导同态 $H(Y, A)\to H(X, A)$, 由此得到反变函子 $(\mathrm{Top})\to(\mathrm{Ab})$. 7) 固定拓扑空间 X, 在其开集全体 $T(X)$ 上按包含关系引入序. 这可看做是一个范畴（⇀[范畴的例] 7)）. 从 $T(X)$ 到 $A(b)$ 的反变函子不外是 X 上的 Abel 群的预层†. 用任意的范畴代替 (Ab)，便可以定义预层（⇀层）.

【函子间的射】 设 $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ 为范畴，共变函子 $\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 的全体用 $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ 表示. 对于 $F, G\in\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$, 从 F 到 G 的（**函子间的**）

射（functorial morphism）或**自然变换**（natural transformation）是指使所有的 $X\in\mathscr{C}$ 对应 $\mathscr{C}'$ 的射 $\varphi(X):F(X)\to G(X)$ 的函数 φ，满足条件"关于 $\mathscr{C}$ 的任意射 $f.X\to Y$，$G(f)\circ\varphi(X)=\varphi(Y)\circ F(f)$"．即设下列的图表是交换的．

$$\begin{array}{cccc} X & F(X) & \xrightarrow{\varphi(X)} & G(X) \\ f\downarrow & F(f)\downarrow & & \downarrow G(f) \\ Y & F(Y) & \xrightarrow{\varphi(Y)} & G(Y) \end{array}$$

关于反变函子间的射也可同样定义之．例如，设 A, B 为 Abel 群，则由(Top)到(Ab)的反变函子 $H^i(\cdot,A)$, $H^i(\cdot,B)$ 之间的射是上同调算子．

就函子间的射 $\varphi:F\to G$ 而言，如果对于任意的 $X\in\mathscr{C}$, $\varphi(X):F(X)\to G(X)$ 都是同构射，则 φ 的逆射 $G\to F$ 存在．此时称 φ 为**函子间的同构射**（functorial isomorphism, natural isomorphism）或简单地称为**同构**，表示为 $\varphi:F\cong G$．若 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 为集合，以共变函子 $\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 为对象，以函子间的射为射，和自然合成一起得到一个范畴 $\mathrm{Hom}(\mathscr{C},\mathscr{C}')$．$\mathrm{Hom}(\mathscr{C}^\circ,\mathscr{C}')$ 无非是以反变函子 $\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ 为对象的范畴．特别是，可将 $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}^\circ,(\mathrm{Sets}))$ 写作 $\hat{\mathscr{C}}$．

当给定范畴 $\mathscr{C}$ 时，对于共变（或反变）函子 $F:\mathscr{C}\to(\mathrm{Sets})$ 与对象 $X\in\mathscr{C}$，可定义标准双射 $\phi_X:\mathrm{Hom}(h_X,F)\cong F(X)$（或 $\mathrm{Hom}(h^X,F)\cong F(X)$）．在此只须令 $\phi_X(\varphi)=\varphi(X)1_X$ 即可．它的逆映射可由对于 $\xi\in F(X)$ 令 $\varphi(Y)u=F(u)\xi(Y\in\mathscr{C})$ 而确定．特别是，若设 $F=h_Y$（或 h^Y）则得到标准双射 $\mathrm{Hom}(h_X,h_Y)\cong\mathrm{Hom}(Y,X)$（或 $\mathrm{Hom}(h^X,h^Y)\cong\mathrm{Hom}(X,Y)$）．因此，若把 $\mathrm{Hom}(\mathscr{C},(\mathrm{Sets}))$（或 $\mathscr{C}=\mathrm{Hom}(\mathscr{C}^\circ,(\mathrm{Sets}))$）看做范畴，并使 $X\in\mathscr{C}$ 对应 h_X（或 h^X），使 $\mathscr{C}$ 的射对应上述的标准双射所对应的函子间的射，由此便得到完全一一反变（或共变）函子 $\mathscr{C}\to\mathrm{Hom}(\mathscr{C},(\mathrm{Sets}))$（或 $\mathscr{C}\to\mathrm{Hom}(\mathscr{C}^\circ,(\mathrm{Sets}))$）．

【伴随函子】 设 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$, $F':\mathscr{C}'\to\mathscr{C}$ 为范畴之间的共变函子．现在，使任意的 $M\in\mathscr{C}$, $M'\in\mathscr{C}$ 都对应于一个双射 $\theta_{M,M'}:\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,F'(M'))\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(M),M')$，而满足条件"$\mathscr{C}$ 的射 $N\to M$ 与 $\mathscr{C}'$ 的射 $M'\to N'$ 所确定的下列的图表是交换的"．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,F'(M')) & \xrightarrow{\theta_{M,M'}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(M),M') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(N,F'(N')) & \xrightarrow{\theta_{N,N'}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(N),N') \end{array}$$

这时，F 称为 F' 的**左伴随函子**（left adjoint functor），F' 称为 F 的**右伴随函子**（right adjoint functor）．上述条件意味着 F 所确定的由 $\mathscr{C}\times\mathscr{C}'$ 到集范畴的函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(F(M),M')$ 和 F' 所确定的函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,F'(M'))$ 是同构的（→[函子间的射]）．

例如对于环 A, B，固定两侧 B-A 模 L，确定函子 $F:{}_A\mathscr{M}\to{}_B\mathscr{M}$，$F':{}_B\mathscr{M}\to{}_A\mathscr{M}$ 如下，其中射的对应是依自然方式确定的：

$F(M)=L\otimes_A M$, $F'(M')=\mathrm{Hom}_B(L,M')$．

这时，F 是 F' 的左（F' 是 F 的右）伴随函子．特别是，若取同态 $\rho:A\to B$ 确定函子 $\rho^*:{}_A\mathscr{M}\to{}_B\mathscr{M}$，$\rho_*:{}_B\mathscr{M}\to{}_A\mathscr{M}$，则 ρ^* 是 ρ_* 的左（ρ_* 是 ρ^* 的右）伴随函子（→模 [Hom 和 ⊗]，[系数环的扩张和限制]）．关于伴随函子的例子→[10]．

【函子的表示】 作为一例，对于集合 T 考虑下列问题．考虑适当的群 X 和映射 $\xi:T\to X$，条件"对于任意群 Y 和映射 $\eta:T\to Y$，使 $u\circ\xi=\eta$ 成立的同态 $u:X\to Y$ 是唯一存在的"（图 6）能够成立吗？这是可能的．只须取由 T 生成的自由群† X 和标准映射 $\xi:T\to X$ 即可．现在把映射 $T\to Y$ 的全体写做 $F(Y)$，对于群之间的同态 $f:Y\to Y'$，若根据 $F(f)\eta=f\circ\eta(\eta\in F(Y))$ 而确定映射 $F(f):F(Y)\to F(Y')$，则得到由群范畴 $\mathscr{C}$ 到集范畴的共变函子 $F:\mathscr{C}\to(\mathrm{Sets})$．此时关于 $X\in\mathscr{C}$, $\xi\in F(X)$，上面的条件可以改述如下．

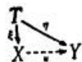


图 6

“对于任意的 $Y\in\mathscr{C}$ 和 $\eta\in F(Y)$，使 $F(u)\xi=\eta$ 的射 $u:X\to Y$ 是唯一存在的”。

一般地，当给出由任意范畴 $\mathscr{C}$ 到集范畴的共变（或反变）函子 $F:\mathscr{C}\to(\mathrm{Sets})$ 时，称满足上述条件（反变时，上条件须修正为 $u:Y\to X$）的 $X\in\mathscr{C}$ 和 $\xi\in F(X)$ 的组 (X,ξ) **表示**（represent）函子 F，而 ξ 称为 $F(X)$ 的**典型元**（canonical element）。当有这样的 X 和 ξ 存在时，称 F 是**可表示的**（representable）。上述条件便是所谓**普遍映射性**（universal mapping property）的一个形式化。而且，若 (X',ξ') 也表示 F，则满足 $F(u)\xi=\xi'$ 的唯一存在的射 $u:X\to X'(X'\to X)$ 是同构射。再者当 (X,ξ) 表示 F 时，根据标准双射 $\phi_X:\mathrm{Hom}(h_X,F)\xrightarrow{\sim}F(X)$，而对应于 $\xi\in F(X)$ 的函子之间的射 $\varphi:h_X\to F$（反变时 $h^X\to F$）是一个同构，且有 $\varphi(X)1_X=\xi$。反之，如果函子之间的同构 $\varphi:h_X\to F$（或 $h^X\to F$）存在，由上述的双射所对应的元素取做 $\xi=\varphi(X)1_X\in F(X)$ 时，则 (X,ξ) 表示 F。

再举出开始列举的自由群以外的例子。1）当给出范畴 $\mathscr{C}$ 的对象族 $\{X_i\}_{i\in I}$ 时，对于任意的 $Y\in\mathscr{C}$，令 $F(Y)=\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(YX_i)$，对于射 $f:Y\to Y'$，如果由 $F(f)(f_i)=(f_i\circ f)$ 而确定映射 $F(f):F(Y')\to F(Y)$，则得到反变函子 $F:\mathscr{C}\to(\mathrm{Sets})$。表示 F 的 (X,ξ) $\left(\text{其中 }\xi\in F(X)=\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(X,X_i)\right)$ 无非是 $\{X_i\}$ 的直积。即所谓 F 是可表示的，意味着 $\{X_i\}$ 的直积存在。关于直和也是同样的。2）设 R 为环，M 为右 R 模，N 为左 R 模。对于任意（加法的）Abel 群 Y，设 R 均衡映射（→模[张量积]）$M\times N\to Y$ 的全体记为 $F(Y)$。对于同态 $f:Y\to Y'$，根据它与 f 的合成，而确定自然映射 $F(f):F(Y)\to F(Y')$。于是得到共变函子 $F:(\mathrm{Ab})\to(\mathrm{Sets})$，而张量积 $M\otimes_R N$ 及标准映射 $M\times N\to M\otimes_R N$ 便表示 F。即 F 是可表示的。3）设 R 为交换环，S 为其子集。对任意交换环 Y，令 $F(Y)$ 是使 S 的元素变成可逆元的那些同态 $R\to Y$ 的全体，对于同态 $f:Y\to Y'$，根据它与 f 的合成而确定 $F(f):F(Y)\to F(Y')$，由此得到共变函子 $F:(\mathrm{Rings})\to(\mathrm{Sets})$。此时，商环† $S^{-1}R$ 和标准同态 $R\to S^{-1}R$ 表示 F。

【范畴中的群】 假设在范畴 $\mathscr{C}$ 中存在终对象 e，并存在有限直积。今给定对象 $G\in\mathscr{C}$ 和射 $\alpha:G\times G\to G$，$\beta:G\to G$，$\varepsilon:e\to G$，如果图 7 的图表是交换的，则 $(G,\alpha,\beta,\varepsilon)$ 称为在 $\mathscr{C}$ 中的群，或简称为 **$\mathscr{C}$ 群**（$\mathscr{C}$-group）。也称为在 $\mathscr{C}$ 中的**群对象**（group object）。

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{\alpha\times 1_G} & G\times G \\ {\scriptstyle 1_G\times\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ G\times G & \xrightarrow{\alpha} & G \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} G\times e & \xrightarrow{1_G\times\varepsilon} & G\times G \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\alpha} & \\ G & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{(1_G,\beta)} & G\times G \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\ e & \xrightarrow{\varepsilon} & G \end{array}$$

图 7

若 $\mathscr{C}$ 为集范畴，根据 α 可在集合 G 中定义运算，根据 ε，e 的象是单位元，$\beta(x)$ 是 x 的逆元，故 G 是通常的群。若 $\mathscr{C}$ 为拓扑空间范畴，则 G 为拓扑群†，若 $\mathscr{C}$ 为解析流形范畴，则 G 为 Lie 群†，若 $\mathscr{C}$ 为代数流形范畴，则 G 为代数群†，若 $\mathscr{C}$ 为概型†范畴，则 G 为群概型。

再者，利用函子 h^X 可将集范畴的群概念移置到范畴 $\mathscr{C}$ 上去，从而定义 $\mathscr{C}$ 群。即取某个对象 $G\in\mathscr{C}$，设对于任意 $Y\in\mathscr{C}$，$h^G(Y)=\mathrm{Hom}(Y,G)$ 都具有群结构，射 $f:Y\to Y'$ 的诱导映射 $h^G(Y')\to h^G(Y)$ 是群同态。换言之，设 h^G 是由 $\mathscr{C}$ 到群范畴的反变函子。那末，具有这个结构的对象 G 就可以称为 $\mathscr{C}$ 群。

【加性范畴】 对于范畴 $\mathscr{C}$ 的对象 X，Y，在 $\mathrm{Hom}(X,Y)$ 上给出加法群结构，当下列条件成立时，$\mathscr{C}$ 称为**加性范畴**（additive category）。1）射的合成满足两侧分配律 $h\circ(f+g)=h\circ f+h\circ g$，$(f+g)\circ h=f\circ h+g\circ h$；2）有某个对象 $0'$，使 $\mathrm{Hom}(0',0')=\{0\}$；3）两个对象的直积或直和恒存在。此时，2）的 $0'$ 是终对象又是始对象，称之为**零对象**（zero object）。又两个对象的直积与直和都存在且可以看成是相同

的. 加性范畴的对偶范畴也是加性范畴. 当由加性范畴 $\mathscr{C}$ 到加性范畴 $\mathscr{C}'$ 的函子 F 关于射满足 $F(f+g)=F(f)+F(g)$ 时, 称为**加性函子** (additive functor). 在加性范畴 $\mathscr{C}$ 中, 关于两个变元而言 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ 都是由 $\mathscr{C}$ 到 (Ab) 的加性函子.

对于任意环 R, 所有的左 (右) R 模范畴 ${}_R\mathscr{M}(\mathscr{M}_R)$ 都是加性范畴. 在这种情形下的术语, 多半也可用到一般加性范畴上. 以下所用的术语, 对 R 模范畴而言, 便和通常的一致. 加性范畴 $\mathscr{C}$ 的射 $f:A\to B$ 的**核** (kernel) 是指具有下列性质的对象 A' 和单射 $i:A'\to A(f\circ i=0)$ 所组成的组: 满足 $f\circ u=0$ 的射 $u:X\to A$ 必可用 i 整除, 即有 $v:X\to A'$, 使 $u=i\circ v$. 对偶地, 当满射 $j:B\to B'(j\circ f=0)$ 能整除使 $u\circ f=0$ 的所有射 $u:B\to X$ 时, B' 和 j 所组成的组称为 f 的**余核** (cokernel). 以 $A'=\mathrm{Ker}\,f$, $B'=\mathrm{Coker}\,f$ 表示之. $j:B\to\mathrm{Coker}\,f$ 的核称为 f 的**象**(image), 记作 $\mathrm{Im}\,f$, $i:\mathrm{Ker}\,f\to A$ 的余核称为 f 的**余象** (coimage), 记作 $\mathrm{Coim}\,f$. 如果这些都存在, 则根据定义, 有唯一的射 $\mathrm{Coim}\,f\to\mathrm{Im}\,f$, 使得 f 等于合成射 $A\to\mathrm{Coim}\,f\to\mathrm{Im}\,f\to B$.

加性范畴 $\mathscr{C}$ 满足下列条件时, 称为 **Abel 范畴** (Abelian category). 1) 所有射都具有核和余核; 2) 对于所有射 f, 上述的射 $\mathrm{Coin}\,f\to\mathrm{Im}\,f$ 是 $\mathscr{C}$ 的同构射. Abel 范畴的对偶范畴也是 Abel 范畴. (Ab), ${}_R\mathscr{M}$, 环式空间† $(X, \mathcal{O})$上的 $\mathcal{O}$ 模的层范畴等是重要的 Abel 范畴. 对(Ab)成立的命题大部分在一般的 Abel 范畴上也成立. 特别是, 在 Abel 范畴中和模同样可以定义正合序列†的概念, 有限个对象的纤维积(和)恒存在. Abel 范畴间的函子若将正合序列变为正合序列则称为**正合函子**(exact functor). 正合函子是加性函子. 当 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 是集合, $\mathscr{C}'$ 是 Abel 范畴时, 范畴 $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ 是 Abel 范畴. 又由 Abel 范畴 $\mathscr{C}$ 和满足若干条件的子范畴 $\mathscr{C}'$ 可以做出称为**商范畴** (quotient category) 的 Abel 范畴 $\mathscr{C}/\mathscr{C}'$ (Serre 关于 Abel 群的类的理论) (→ [4]). 关于 Abel 范畴, 有如下值得注意的结果. 其 $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ 是集合的 Abel 范畴可以用共变正合函子而嵌入到某个环 R 上的模范畴 ${}_R\mathscr{M}$ 上去. (**完全嵌入定理** (B. Mitchell, Amer. J. Math., 86 (1964))).

范畴和函子的概念由 [1] 引入, 首先被用在拓扑学上, 其次用在同调代数以及代数几何上(→同调代数).

【参】 [1] S. Eilenberg-S. MacLane, General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc., **58** (1945), 231—294; [2] S. Eilenberg-N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952; [3] H. Cartan-S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton, 1956; [4] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., **9**(1957), 119—221; [5] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Thèse, Paris, 1962; [6] S. MacLane, Homology, Springer, 1963; [7] 米田信夫, Universality について I, II, 数学, **13**(1961—62), 109—112, **14** (1962—63), 39—43; [8] P. Freyd, Abelian categories, Harper, 1964; [9] B. E. Mitchell, The theory of categories, Academic Press, 1965; [10] S. MacLane, Categorical algebra, Bull. Amer. Math. Soc., **71**(1965), 40—106; [11] I. Bucur-A. Deleanu, Introduction to the theory of categories and functors, Interscience, 1968.

归纳极限和射影极限 [英 inductive and projective limit 法 limite inductif et projectif 德 direkter Limes und inverser Limes 俄 индуктивный предел и проективный предел 日 帰納的極限と射影的極限] 归纳极限和射影极限是以任意伪序†集 I 为指标集, 在任意范畴†上定义的. 首先作为特殊情形, 设 I 为关于序 $i\leqslant j$ 而言的向右方向的有向集†, 并只就集合、群、拓扑空间叙述极限的定义. 最简单的则是 I 为自然数全体构成的有序集 $\boldsymbol{N}$ 的情形.

【集合的极限】 设对于各 $i\in I$ 给出集合 X_i, 对于 I 的满足 $i\leqslant j$ 的各元素对 (i, j) 给出映射 $\varphi_{ji}:X_i\to X_j$, 则当 $\varphi_{ii}=1_{X_i}$ (X_i 的恒等映射), $\varphi_{ki}=\varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}(i\leqslant j\leqslant k)$ 成立时, 这个体系称为集合的**归纳系**或**顺向系** (inductive system, direct system), 记为 (X_i, φ_{ji}). 现在在 $X_i(i\in I)$ 的直和集 S 中确定等价关系如下: "$x\in X_i$, $y\in X_j$ 是等价的, 是指对于某个 $k\in I$, 有 $i\leqslant k$, $j\leqslant k$, 且 $\varphi_{ki}(x)=\varphi_{kj}(y)$". 设 D 为关于这个等价关系的 S 的商集, 则标准映射 $f_i:X_i\to D(i\in I)$

显然具有下列两个性质：I 1) $f_j \circ \varphi_{ji} = f_i (i \leqslant j)$；I 2) 对于任意集合 X 和满足条件 $g_j \circ \varphi_{ji} = g_i$ $(i \leqslant j)$ 的映射 $g_i: X_i \to X (i \in I)$ 而言，满足条件 $f \circ f_i = g_i (i \in I)$ 的映射 $f: D \to X$ 是唯一存在的．(D, f_i) 称为归纳系 (X_i, φ_{ji}) 的**归纳极限或顺向极限** (inductive limit, direct limit)，以 $\varinjlim X_i$ 或 $\operatorname{ind\,lim} X_i$ 表示之．

和上述情况相对偶，给出集合 $X_i (i \in I)$ 及映射 $\psi_{ij}: X_j \to X_i (i \leqslant j)$，当条件 $\psi_{ii} = 1_{X_i}, \psi_{ik} = \psi_{ij} \circ \psi_{jk} (i \leqslant j \leqslant k)$ 成立时，这个体系称为集合的**射影系或逆向系** (projective system, inverse system)，略记为 (X_i, ψ_{ij})．现在如果取 $X_i (i \in I)$ 的直积集的子集 $P = \{(x_i) \mid \psi_{ij}(x_j) = x_i (i \leqslant j)\}$，则标准映射 $p_i: P \to X_i (i \in I)$ 显然具有下列两个性质：P 1) $\psi_{ij} \circ p_j = p_i (i \leqslant j)$；P 2) 对于任意集合 X 和满足条件 $\psi_{ij} \circ q_j = q_i (i \leqslant j)$ 的映射 $q_i: X \to X_i (i \in I)$ 而言，满足条件 $p_i \circ p = q_i (i \in I)$ 的映射 $p: X \to P$ 是唯一存在的．(P, p_i) 称为射影系 (X_i, ψ_{ij}) 的**射影极限或逆向极限** (projective limit, inverse limit)，以 $\varprojlim X_i$ 或 $\operatorname{proj\,lim} X_i$ 表示之．

再者，如将 I 限制在其共尾[†]子集 J 上，这两个极限是不变的．

【群和拓扑空间的极限】 在上述记号中，设 X_i 为群，φ_{ji}, ψ_{ij} 为同态．这时 (X_i, φ_{ji}) 称为群的归纳系，(X_i, ψ_{ij}) 称为群的射影系．作为集合的归纳极限 $D = \varinjlim X_i$ 有唯一的群的结构，使各 $f_i: X_i \to D$ 都是同态的．D 称为这个归纳系的**归纳极限群** (inductive limit group)．当 X 为群，g_i, f 为同态时，D 具有性质 I 1)，I 2)．作为集合的射影极限 $P = \varprojlim X_i$，有唯一的群的结构 (X_i 的直积群的子群的结构)，使各 $p_i: P \to X_i$ 都是同态，当 X 为群，q_i, p 为同态时，性质 P 1)，P 2) 成立．P 称为这个射影系的**射影极限群** (projective limit group)．再者，当 X_i 为某环 A 上的模时，如取 A 同态代替同态，结果也完全相同．

其次，设 X_i 为拓扑空间，φ_{ji}, ψ_{ij} 为连续映射．这时，(X_i, φ_{ji}) 称为拓扑空间的归纳系，(X_i, ψ_{ij}) 称为拓扑空间的射影系．在 $D = \varinjlim X_i$ 中引入 X_i 的直和拓扑空间的商空间[†]的拓扑，于是 f_i 便是连续的，当 X 为拓扑空间，g_i，f 为连续映射时，性质 I 1)，I 2) 成立．在 $P = \varprojlim X_i$ 中引入 X_i 的直积拓扑空间的子空间的拓扑，于是 p_i 便是连续的，当 X 为拓扑空间，q_i，p 为连续映射时，性质 P 1)，P 2) 成立．此时 D 及 P 分别称为**归纳极限空间** (inductive limit space) 及**射影极限空间** (projective limit space)，Hausdorff 空间[†]（紧空间[†]）的射影极限空间仍为 Hausdorff 空间(紧空间)．

进一步，如果设 X_i 为拓扑群，$\varphi_{ji}\ \psi_{ij}$ 为连续同态，则 $\varinjlim X_i$，$\varprojlim X_i$ 为拓扑群，就拓扑群、连续同态而言，性质 I 1)，I 2)，P 1)，P 2) 成立(→拓扑群)．特别是，有限群的射影极限称为**副有限群** (pro-finite group)，是完全不连通的[†]紧群，它们表现为 p-adic 整数环[†]以及无限次扩张的 Galois 群等．作为归纳极限的例子，可以举出连续函数在拓扑空间 X 的一点 x 处的芽[†]，以及其它种种的芽(→层)．

【范畴中的极限】 设 I 为伪序集，$\mathscr{C}$ 为范畴．对于各 $i \in I$，给出 $\mathscr{C}$ 的对象 X_i，以及对于 I 的各元素对 (i, j)，$i \leqslant j$，给出 $\mathscr{C}$ 的射 $\varphi_{ji}: X_i \to X_j$，当 $\varphi_{ii} = 1_{X_i}$，$\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji} (i \leqslant j \leqslant k)$ 成立时，体系 (X_i, φ_{ji}) 称为在 $\mathscr{C}$ 中的**归纳系**．可以对偶地定义在 $\mathscr{C}$ 中的**射影系** (X_i, ψ_{ij})．这无非是在对偶范畴 $\mathscr{C}^\circ$ 中的归纳系．又若将 I 看做一个范畴(→范畴和函子[范畴的例])，则归纳系(射影系)无非是从 I 到 $\mathscr{C}$ 的共变（反变）函子．设对象 $D \in \mathscr{C}$ 和射 $f_i: X_i \to D (i \in I)$，具有以 X 为对象，以 g_i, f 为射的性质 I 1)，I 2)．此时，体系 (D, f_i) 称为 (X_i, φ_{ji}) 的**归纳极限**，写做 $\varinjlim X_i$．同样地，当对象 $P \in \mathscr{C}$，射 $p_i: P \to X_i (i \in I)$ 具有经同样修正后的性质 P 1)，P 2) 时，(P, p_i) 称为 (X_i, ψ_{ij}) 的**射影极限**，写做 $\varprojlim X_i$．由性质 I 2)，P 2)，这两极限如果存在则是唯一的．

对集范畴、群范畴、模范畴、拓扑空间范畴等而言，归纳极限和射影极限恒存在．再者，

当I的序 $i \leqslant j$ 意味着 $i = j$ 时，亦即相异二元之间没有序时，归纳极限不外是直和，射影极限不外是直积（→范畴和函子［直积与对偶直积］）.

就同一个I的两个归纳系 (X_i, φ_{ji})，(X'_i, φ'_{ji}) 而言，如果射 $\varphi_i: X_i \to X'_i (i \in I)$ 满足条件 $\varphi'_{ji} \circ \varphi_i = \varphi_j \circ \varphi_{ji} (i \leqslant j)$，则 (φ_i) 称为两系间的射. 这不外是将归纳系看做I到$\mathscr{C}$的函子时函子间的射而已（→范畴和函子［函子间的射］）. 今若 $\varinjlim X_i$，$\varinjlim X'_i$ 存在，则可以自然地定义射 $\varinjlim \varphi_i: \varinjlim X_i \to \varinjlim X'_i$. 关于射影系也同样.

再者，关于抽象的"函子的极限"→［5］，关于副范畴（pro-category）的理论→［6］.

【参】［1］弥永昌吉-小平邦彦，现代数学概説 I，岩波，1961；［2］S. Lefschetz, Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1942；［3］S. Eilenberg-N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952；［4］H. Cartan-S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton, 1956；［5］M. Artin, Grothendieck topology, Lecture notes, Harvard Univ., 1962；［6］A. Grothendieck, Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique II, Le théorème d'existence en théorie formelle des modules, Sém. Bourbaki, Exposé 195, 1959--1960 (Benjamin, 1966).

层［英 sheaf 法 faisceau 德 Garbe 俄 пучок 日 層］【预层】设X为拓扑空间†. 对于X的各开集U给出 Abel 群 $\mathscr{F}(U)$，对于 $U \subset V$ 给出同态 $r_{UV}: \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$，如果 $\mathscr{F}(\varnothing) = \{0\}$，$r_{UU} = 1$（恒等映射），对于 $U \subset V \subset W$，有 $r_{UW} = r_{UV} \circ r_{VW}$，则这个体系称为$X$上的 Abel 群的**预层**（presheaf）. 对于 $a \in \mathscr{F}(V)$ 写做 $r_{UV}(a) = a|U$，称为a在U上的限制. X上的两个预层 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$ 间的同态 φ，是指群同态 $\varphi(U): \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ 的族 $\{\varphi(U)\}$，且对于 $U \subset V$ 恒有 $r_{UV} \circ \varphi(V) = \varphi(U) \circ r_{UV}$ 成立. 预层的全体和它们的同态，组成预层的范畴†.

【层】当预层$\mathscr{F}$满足下列局部性条件时，$\mathscr{F}$称为（**Abel 群的**）**层**：设U为X的开集，$\{U_i\}_{i \in I}$ 为U的开覆盖†，并设对于各 $i \in I$ 当给出 $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$，使得对于所有的对 i, j，$s_i | U_i \cap U_j = s_j | U_i \cap U_j$ 均成立时，有唯一的 $s \in \mathscr{F}(U)$，对于所有的i都使 $s | U_i = s_i$ 成立.

层的同态即预层的同态. 层的全体也构成一个范畴. 设$\mathscr{F}$为预层，x为X的点. 对于x的开邻域的集合引入与包含关系相逆的序而得到的有向集，设为 $\mathfrak{N}_x$，则对于 $U \in \mathfrak{N}_x$ 而言 $\mathscr{F}(U)$ 成为归纳系. 其归纳极限群†以 $\mathscr{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)$ 表示之，称为$\mathscr{F}$在x上的**茎**（stalk）. $s \in \mathscr{F}(U)$ 在 $\mathscr{F}_x$ 内的像称为"s在x上的**芽**(germ)"，以 s_x 表示之. 预层的同态 $\varphi: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 诱导出茎的同态 $\varphi_x: \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$.

【层空间】对茎 $\mathscr{F}_x$ 的直和集† $\mathscr{F}' = \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x$，像下述那样引入拓扑：取$X$的开集$U$和 $\mathscr{F}(U)$ 的元素s，将s在U的各点处确定的芽的集合 $\{s_x | x \in U\}$ 写做 $M_{U,s}$，变动U和s所得到的 $M_{U,s}$ 的集合取为 $\mathscr{F}'$ 的开集的基. 设将 $\mathscr{F}_x$ 的点映到x上的映射记为 $p: \mathscr{F}' \to X$，则p是连续的，在各 $p^{-1}(x) (= \mathscr{F}_x)$ 中引入 Abel 群的结构，它满足下列二条件. 1）p是局部同胚. 2）$p^{-1}(x)$ 的群运算在下述意义下是连续的：使 (a, b) 对应 $a + b$ 的映射是由纤维积 $\mathscr{F} \times_X \mathscr{F}$（即直积空间 $\mathscr{F} \times \mathscr{F}$ 的子空间 $\{(a, b) | p(a) = p(b)\}$）到$\mathscr{F}$的连续映射，使a对应$-a$的映射是由$\mathscr{F}$到$\mathscr{F}$的连续映射. 一般地，具备满足这些条件的结构的拓扑空间 $\mathscr{F}'$ 称为X上的**层空间**（sheaf space）.

给出层空间 $\mathscr{F}'$，如果由X的子空间A到 $\mathscr{F}'$ 上的连续映射s能使 $p \circ s = 1_A$，则s称为A上 $\mathscr{F}'$ 的**截面**（section），A上截面的全体用 $\Gamma(A, \mathscr{F}')$ 表示之. 对 $\Gamma(A, \mathscr{F}')$ 可用自然的方法确定加法而构成 Abel 群. 使开集U对应 $\Gamma(U, \mathscr{F}')$，若根据截面的限制，定义 $r_{UV}(r_{UV}(s) = s | U)$，则得到$X$上的层. 将它记做 $\mathscr{F}''$，使$\mathscr{F}$对应 $\mathscr{F}''$ 的函数是预层范畴到层范畴的共变函子†. $\mathscr{F}''$ 称为由预层$\mathscr{F}$**诱导的层**（induced sheaf）. 若$\mathscr{F}$为层，则可以证明 $\mathscr{F} \cong \mathscr{F}''$. 反之，若由层空间 $\mathscr{F}'$ 做层 $\mathscr{F}''$，由 $\mathscr{F}''$ 做层空间 $\mathscr{F}'''$，则在自然的意义下有 $\mathscr{F}''' \cong \mathscr{F}'$. 由于可将如此对应的层和层空间看做同一事物的两个表现，通常使用

同一记号表示它们. 特别是,若 $\mathscr{F}$ 为层,往往用 $\Gamma(U,\mathscr{F})$ 代替 $\mathscr{F}(U)$.

对于层的截面 $s\in\Gamma(X,\mathscr{F})$, 使得 s 的值是 $\mathscr{F}_x$ 的非零点的 $x\in X$ 的集合是闭集 (即使 X 是 Hausdorff 空间,层空间也未必是 Hausdorff 空间), 将它称为 s 的**支集** (support), 以 supp s 表示之.

迄今为止所叙述的关于预层、层、层空间的理论,如果以群、环等代替 Abel 群,全部事实同样成立,从而得到**群层**,**环层**等(在环层的情形,对空集的值是仅由 0 组成的环). 一般地,在范畴 $\mathscr{C}$ 上取值的 X 上的预层是指从 X 的开集全体组成的范畴到 $\mathscr{C}$ 的反变函子, X 上两预层 $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ 之间的同态不外是指函子 $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ 之间的射.

Abel 群(即 $\mathscr{A}$ 模)的预层、层分别构成 Abel 范畴†. 对于预层的同态 $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$, Ker f, Coker f 等可分别由 $(\mathrm{Ker}\,f)(U)=\mathrm{Ker}\,f(U)$, $(\mathrm{Coker}\,f)(U)=\mathrm{Coker}\,f(U)$ 等给出. 但当 $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ 是层时, 层的范畴的核和作为预层的核相同, 而层的范畴的余核是由作为预层的余核所构成的层. 从而层的范畴的核, 余核, 象, 正合序列等作为茎看待时就是普通模的那些. 即 $f:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 在各点 $x\in X$ 处诱导出 $f_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$, 且 $(\mathrm{Ker}\,f)_x=\mathrm{Ker}\,f_x$, $(\mathrm{Im}\,f)_x=\mathrm{Im}\,f_x$, $(\mathrm{Coker}\,f)_x=\mathrm{Coker}\,f_x$, 又 $0\to\mathscr{F}\xrightarrow{f}\mathscr{G}\xrightarrow{g}\mathscr{H}\to 0$ 是正合序列, 当且仅当对于 X 的各点 x, $0\to\mathscr{F}_x\xrightarrow{f_x}\mathscr{G}_x\xrightarrow{g_x}\mathscr{H}_x\to 0$ 是正合序列.

【层的例】 1) 设 G 为 Abel 群(或为其它的代数系), 给予 G 以离散拓扑, 作直积 $X\times G$, 就构成层. 称之为**常数层** (constant sheaf) 或**平凡层** (trivial sheaf). 2) 设 X 为拓扑空间, Y 为拓扑 Abel 群(例如实数、复数等), 若 $\mathscr{F}(U)$ 为 $U\to Y$ 的连续映射的全体, r_{UV} 为自然限制 $(r_{UV}f=f|V(f\in\mathscr{F}(U)))$, 则得到层. 此时, $x\in X$ 上的茎是到 Y 的连续映射在 x 处的芽的全体. 称之为在 Y 中取值的**连续映射的芽的层** (sheaf of germs of continuous functions). 3) 在 2) 中, 设 X 为解析流形, Y 为可换 Lie 群, 同样可定义在 Y 中取值的**解析映射的芽的层** (sheaf of germs of analytic mappings). 当 Y 为复数域 C 时, $\mathscr{F}$ 便是**解析函数的芽的层** (sheaf of germs of analytic functions) (或称为**全纯函数的芽的层** (sheaf of germs of holomorphic functions)) 的空间 $\mathscr{O}$. $\mathscr{O}$ 上的连通分支不外是由其上一点给出的函数元素所生成的解析函数†. 至于 C^r 流形上的 **C^r 类** ($s\leqslant r$) **函数的芽的层** (sheaf of germs of functions of class C^r), 亦可同样定义. 4) 对于在拓扑空间 X 上的向量丛† B, 设 $\mathscr{F}(U)=\Gamma(U)$ (U 上的 B 的全体截面构成的模), 若 r_{UV} 为自然限制, 则得到层. 此时, $x\in X$ 上的茎是在 x 处的 B 的截面的芽的全体. 这个层称为**向量丛 B 的截面的芽的层** (sheaf of germs of sections of a vector bundle). 当 X 是微分流形(复流形), 而 $\Gamma(U)$ 是可微的(全纯)截面时也可以同样定义. B 是 X 上的张量丛†, 特别是 r 次微分形式 $\mathscr{D}^r(X)$ ($r=0,1,\cdots,n$, $n=\dim X$) 的情形是常常用到的. $\mathscr{D}^r(X)$ 的截面的芽的层 $\mathfrak{A}^r(X)$ 称为 C^∞ 类**微分形式的芽的层** (sheaf of germs of differential forms).

【层系数的上同调论】 X 上的 Abel 群的层的范畴以 $\mathscr{C}^X$ 表示之. 在 $\mathscr{C}^X$ 上有充分多的单射†对象存在 (A. Grothendieck). 如果在层 $\mathscr{F}$ 中对任意开集 U 而言 $r_{UX}:\Gamma(X,\mathscr{F})\to\Gamma(U,\mathscr{F})$ 都是满射†, 则 $\mathscr{F}$ 称为**散布的** (英 scattered 法 flasque 德 welk). 单射层是散布的.

取 X 的闭集的非空族 Φ, 使之具有下列性质: 1) $A,B\in\Phi\Rightarrow A\cup B\in\Phi$; 2) 被 Φ 的元包含的 X 的闭集也属于 Φ. 对于 $\mathscr{F}\in\mathscr{C}^X$, 令 $\Gamma_\Phi(\mathscr{F})=\{s\,|\,s\in\Gamma(X,\mathscr{F}),\ \mathrm{Supp}\,s\in\Phi\}$, 则 Γ_Φ 是由 $\mathscr{C}^X$ 到 Abel 群的范畴 (Ab) 的左正合†共变函子†. 从而由同调代数的一般理论, 可以定义 Γ_Φ 的右导函子† $R^q\Gamma_\Phi:\mathscr{C}^X\to(\mathrm{Ab})$ ($q=0,1,2,\cdots$). 令 $R^q\Gamma_\Phi(\mathscr{F})=H^q_\Phi(X,\mathscr{F})$, 称为具有支集族 Φ 的**以层 $\mathscr{F}$ 为系数的上同调群**或者说**以层 $\mathscr{F}$ 为系数的上同调群** (cohomology group with coefficient sheaf $\mathscr{F}$) (→同调代数[卫星函子, 导函子]). 当 Φ 由所有闭集组成时, 简单地写做 $H^q(X,\mathscr{F})$.

即上同调群 $H^q_\Phi(X,\mathscr{F})$ 可以定义为: 由

层 $\mathscr{F}$ 的单射分解† $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}' \to \cdots$ 所诱导出的链复形 $\Gamma_\Phi(\mathscr{L}^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^1) \xrightarrow{d^1} \Gamma_\Phi(\mathscr{L}^2) \xrightarrow{d^2} \cdots$ 的 q 次上同调，即 $H^q_\Phi(X, \mathscr{F}) = \mathrm{Ker}\, d^q / \mathrm{Im} d^{q-1} (q = 0, 1, \cdots; d^{-1} = 0)$.

我们有：$H^0_\Phi(X\mathscr{F}) = \Gamma_\Phi(\mathscr{F})$，又对应于层的正合序列 $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$，可以得到正合序列 $0 \to H^0_\Phi(X, \mathscr{F}) \to H^0_\Phi(X, \mathscr{G}) \to H^0_\Phi(X, \mathscr{H}) \to H^1_\Phi(X, \mathscr{F}) \to H^1_\Phi(X, \mathscr{G}) \to H^1_\Phi(X, \mathscr{H}) \to H^2_\Phi(X, \mathscr{F}) \to \cdots$

如果不假定在上同调群的定义中 $\mathscr{L}^i$ 为单射的，而假定在层的正合序列 $0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{L}^0 \to \mathscr{L}^1 \to \cdots$ 中各 $\mathscr{L}^i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 满足 $H^q_\Phi(X, \mathscr{L}^i) = 0 (q = 1, 2, \cdots)$，则 $H^q_\Phi(X, \mathscr{F})$ 仍可以完全同样计算．例如，散布的层是 Γ_Φ 非循环的，故由 $\mathscr{F}$ 的散布的分解可以计算 $H^q_\Phi(X, \mathscr{F})$ (R. Godement)．例如，设 X 是 n 维仿紧 C^∞ 类微分流形且 $\mathscr{F} = \boldsymbol{R}$，则对于 X 上的 r 次 C^∞ 类微分形式的芽的层† $\Omega^r(X)$ 而言，$0 \to \boldsymbol{R} \to \Omega^0(X) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(X) \xrightarrow{d^1} \cdots$ (d^i 是外微分†)是层的正合序列（**poincaré 定理**)，而且 $H^p(X, \Omega^i(X)) = 0 (p > 0)$．从而对于截面所构成的链复形 $0 \to \mathfrak{D}^0(X) \xrightarrow{d^0} \mathfrak{D}^1(X) \xrightarrow{d^1} \cdots$，有 $H^q(X, \boldsymbol{R}) = \mathfrak{C}^q(X)/\mathfrak{E}^q(X) (\mathfrak{C}^q(X) = \mathrm{Ker}\, d^q, \mathfrak{E}^q(X) = \mathrm{Im}\, d^{q-1}) (0 \leqslant q \leqslant n)$ 成立．这便证明了 de Rham 定理：de Rham 上同调群†和实系数（奇异）上同调群†是同构的（→ 微分流形 [Rham 的上同调群]）．即使非交换群的层也可以定义一维上同调（[1]）.

【Čech 上同调群】 设 $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ 为 X 的开覆盖，写做 $U_i \cap U_j = U_{ij}$，令 $C^p(\mathscr{F}) = \prod_{i_0, \cdots, i_p} \Gamma(U_{i_0 \cdots i_p}, \mathscr{F}) (p = 0, 1, 2, \cdots)$．它的元素称为 p 次上链．映射 $d: C^p(\mathscr{F}) \to C^{p+1}(\mathscr{F})$ 由 $(df)_{i_0 \cdots i_{p+1}} = \sum_{r=0}^{p+1} (-1)^r (f_{i_0 \cdots \hat{i}_r \cdots i_{p+1}} | U_{i_0 \cdots i_{p+1}})$ 定义．如此得到的链复形的 q 次上同调群写做 $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$．若开覆盖 $\mathfrak{B}$ 是 $\mathfrak{U}$ 的加细，再定义标准同态 $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \to H^q(\mathfrak{B}, \mathscr{F})$，可考虑将开覆盖进行加细时的 $H^q(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ 的归纳极限．这个极限群以 $\check{H}^q(X, \mathscr{F})$ 表示之，称之为 X 的**层 $\mathscr{F}$ 为系数的 Čech 上同调群** (Čech cohomology group with coefficient sheaf $\mathscr{F}$)．在 $q = 0, 1$ 时，它和 $H^q(X, \mathscr{F})$ 相同，若 X 是仿紧†的，则对所有的 q，它和 $H^q(X, \mathscr{F})$ 相同.

【和连续映射的关系】 设 X, Y 为拓扑空间，$f: X \to Y$ 为连续映射．对于 Y 上的层 $\mathscr{F}$，(将 $\mathscr{F}$ 看做是层空间)纤维积 $X \times_Y \mathscr{F}$ 是 X 上的层．用 $f^*(\mathscr{F})$ 或 $f^{-1}(\mathscr{F})$ 表示之，称为 $\mathscr{F}$ 的**原象**或**逆象** (inverse image)．使 $\mathscr{F}$ 对应 $f^*(\mathscr{F})$，则是从 $\mathscr{C}^Y$ 到 $\mathscr{C}^X$ 的正合函子．再设 $\mathscr{G}$ 为 X 上的层．使 Y 的每个开集 U 对应于 $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{G})$，这样便得 Y 上的层．以 $f_*(\mathscr{G})$ 表示之，称为 $\mathscr{G}$ 的**直接象** (direct image)．f_* 是 $\mathscr{C}^X \to \mathscr{C}^Y$ 的左正合函子，可以考虑它的右导函子 $R^q f_*$．$R^q f_*(\mathscr{G})$ 是由使 U 对应于 $H^q(f^{-1}(U), \mathscr{G})$ 的预层所构成的层.

由 $\mathscr{F}$ 到 $f_*(\mathscr{G})$ 的同态 ψ 也称为由 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的 f 同态，给出 ψ 一事等价于：给出茎的同态族 $\psi_x: \mathscr{F}_{f(x)} \to \mathscr{G}_x (x \in X)$ 使之满足连续性条件："对 Y 的开集 U 和 U 上的截面 $s \in \Gamma(U, \mathscr{F})$ 而言，由 $f^{-1}(U)$ 到 $\mathscr{G}$ 的映射 $\varphi(x) = \psi_x(s(f(x)))$ 是连续的."

在 f_* 和 f^* 之间，有关系 $\mathrm{Hom}(f^*(\mathscr{F}), \mathscr{G}) \cong \mathrm{Hom}(\mathscr{F}, f_*(\mathscr{G}))$．另外，有 Leray 的谱序列†

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(\mathscr{G})) \Rightarrow H^n(X, \mathscr{G}),$$

它联系着 X 的和 Y 的上同调.

【环式空间】 设 X 为拓扑空间，$\mathscr{O}$ 为 X 上具有单位元的交换环的层，在各点 $x \in X$，设 $\mathscr{O}_x \neq \{0\}$．则对 $(X, \mathscr{O})$ 称为**环式空间** (英 ringed space 法 espace annelé 德 geringter Raum)．$\mathscr{O}$ 称为它的**构造层** (structure sheaf)．由 $(X, \mathscr{O})$ 到 $(X', \mathscr{O}')$ 的射是指由连续映射 $f: X \to X'$ 及 f 同态 $\theta: \mathscr{O}' \to \mathscr{O}$ 所组成的对 (f, θ)．特别是，若各 $\mathscr{O}_x$ 为局部环†，则 $(X, \mathscr{O})$ 称为**局部环式空间** (英 local-ringed space 法 espace annelé en anneaux locaux)．作为局部环式空间的射 $(f, \theta): (X, \mathscr{O}) \to (X', \mathscr{O}')$，$\theta$ 须为局部的（即对各 $x \in X$，$\theta_x: \mathscr{O}'_{f(x)} \to \mathscr{O}_x$ 均把

极大理想映到极大理想之中). 这些概念在代数几何学及多变量函数论中是重要的.

【层的直积，张量积】 设 X 为拓扑空间，$\mathscr{F}_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 为 X 上模的层. 对各 U 确定 $\mathscr{F}(U)=\prod_\lambda \mathscr{F}_\lambda(U)$，$r_{UV}=\prod_\lambda r_{UV}^{\mathscr{F}_\lambda}$，于是得到 X 上的层 $\mathscr{F}$. 表示为 $\mathscr{F}=\prod_\lambda \mathscr{F}_\lambda$，称为 $\{\mathscr{F}_\lambda\}$ 的**直积** (direct product). 在 X 的各点 x，自然地定义 $\mathscr{F}_x\to\prod_\lambda \mathscr{F}_{\lambda x}$，这是单射，但也未必是全射. 当 Λ 为有限集时，也可写为 $\mathscr{F}=\mathscr{F}_1+\cdots+\mathscr{F}_n$，从而可称为**直和**(direct sum). 另外，X 上的层的归纳极限 $\mathscr{F}=\text{ind.}\lim\mathscr{F}_\lambda$ 也可同样定义之，此时 $\mathscr{F}_x\cong\text{ind.}\lim\mathscr{F}_{\lambda x}$ 恒成立.

对于环式空间 $(X,\mathcal{O})$，当下述条件成立时，便把 X 上的模的层 $\mathscr{F}$ 称为 **$\mathcal{O}$ 模的层**(sheaf of $\mathcal{O}$-modules)(或者简称为 **$\mathcal{O}$ 模** ($\mathcal{O}$-module)): 对于各 U，$\mathscr{F}(U)$ 是 $\mathcal{O}(U)$ 模，且对于 $V\subset U$，$\rho_{UV}:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ 是与同态 $\mathcal{O}(U)\to\mathcal{O}(V)$ 相容的同态. 此时，对各 x，$\mathscr{F}_x$ 均成为 $\mathcal{O}_x$ 模. 就 X 上的 $\mathcal{O}$ 模的层而言，可以定义 $\mathcal{O}$ 子模的层，$\mathcal{O}$ 剩余模的层等. 另外，对两个 $\mathcal{O}$ 模的层 $\mathscr{F}$，$\mathscr{G}$，由 $U\to\mathscr{F}(U)\otimes_{\mathcal{O}(U)}\mathscr{G}(U)$，$r_{UV}=r_{UV}^{\mathscr{F}}\otimes r_{UV}^{\mathscr{G}}$ 可定义预层，由此而确定的层 $\mathscr{H}$ 称为 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 的**张量积** (tensor product)，写做 $\mathscr{H}=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{G}$. 此时对于各 $x\in X$，$\mathscr{H}_x=\mathscr{F}_x\otimes_{\mathcal{O}_x}\mathscr{G}_x$ 成立.

对 $\mathcal{O}$ 模的层 $\mathscr{F}$ 考虑所谓凝聚†层是重要的，关于这方面→代数流形[上同调论].

【历史】 J. Leray 为了把连续映射的局部性质和全局的上同调连系起来引入了层系数上同调群(与上所述稍有不同)，此外又建立了谱序列的理论 (1945 年)，另一方面，对于多变量函数论岡潔有"不定域理想"的设想，两者由 H. Cartan 等统一处理成上面那样的形式，作为局部性和全局性的连系，层论已被应用到数学的许多分支 (→代数流形，复流形，多变量解析函数，解析空间).

[参] [1] F. Hirzebruch, Neue topologischen Methode in der algebraischen Geometrie, Erg. d. Math., Springer, 1956, 第二版 1962, 第三版 1966(英译本: Topological methods in algebraic geometry); [2] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., 9 (1957) 119—221; [3] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1958; [4] 秋月康夫, 調和積分論, 下, 岩波, 1956; [5] 一松信, 多変数解析函数論; 培風館, 1960; [6] 河田敬義, 層の理論, 東大セミナリー. ノート, 1960; [7] R. G. Swan, The theory of sheaves, Univ. of Chicago Press, 1964; [8] G. E. Bredon, Sheaf theory, McGraw-Hill, 1967; [9] J. Leray, L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue, J. Math. Pures, Appl., 29 (1950), 1—139; [10] H. Cartan, Séminaire de topologie algébrique, Paris, 1948—1949; 1950—1951; [11] A. Borel, Séminaire de topologie algébrique de l'Ecole polytechnique fédérale, 1951. (Cohomologie des espaces localement compacts d'après J. Leray, Lecture notes in math. 2, Springer, 1964.)

三、代 数 学（域、环和模）

代数学 ［英 algebra 法 algèbre 德 Algebra 俄 алгебра 日代数学］ 用符号表示未知数这种代数的原始思想，和十进位记数法一样，来源于印度．在文艺复兴时期，它作为"新的数学"经阿拉伯传到欧洲．但是，用文字来记一般表达式的符号方法是到 F. Viète（1540—1603）才开始确立的．这样，**代数学**的第一个问题就是解方程．低次代数方程的解法在远古人们就已经知道．代数学传入欧洲以后，首先由G. Cardano, L. Ferrari 得出三次和四次方程的一般解法．关于五次以上的方程，人们都在努力寻求一般解法．一直持续到十九世纪中叶，这种努力仍然没有成功．最后，N. H. Abel（1802—29）和 E. Galois（1811—32）把这个问题否定地解决了．他们不仅考虑每个方程，而且考虑以其根的有理变式为根的所有方程，从而引进了域†的概念．他们还注意到由根的置换群的性质刻划代数解的问题．在发现 Galois 群以后，代数学的主流已进入群论或者用群论方法进行研究的时代（→Galois 理论）．这在当时数学的算术化乃至公理化构造的气氛中，发展成为本世纪的抽象代数学． 在十九世纪与二十世纪之交，H. Weber 的三卷巨著[8]被认为是代数学的标准著作． E. Steinitz 的域论（[1]）就是它的初期的一个里程碑．

今天，代数学的研究对象是代数系†，即在元素之间定义了合成法则的抽象元素的集合，着重研究它们的结构†．群、环、域与格等就是最原始的和最基本的代数系．其中起基本作用的概念是同构†、同态†．把同一种代数系以及它们之间的同态映射合在一起来考虑就产生了范畴的概念，而函子就是范畴之间的一种同态（→范畴和函子）．从二十世纪四十年代到五十年代，这些概念首先在同调代数†中得到应用．同调代数是由于代数拓扑的方法的引进而发展起来的，而现在在整个数学中成为广泛应用的基本概念．

一个重要的有广泛应用的代数分支是线性空间†（或者更一般地是某个环上的模†）的理论．这个分支称为**线性代数**（linear algebra）．关于环上的有限生成模之间的同态，可由矩阵†表示出来．用矩阵来表示群或环等代数系的分支称为表示论†．代数学的方法，为数论、代数几何学等以及现代数学的所有分支提供了强有力的有效方法．

代数学之所以发展到现代的这种形式，很大程度上应归功于二十世纪二十年代末期以 E. Noether, E. Artin, W. Krull, B. L. van der Waerden 等人为代表的德国学派的活动．特别是在二十世纪三十年代初，van der Waerden 所著的教科书[2]，对以后的整个数学有很大的影响．法国的 N. Bourbaki（[3]）也受到它的影响，特别是关于后来线性代数的发展给出详尽的描述．与 Noether 差不多同时期，日本的園正造在代数学方面做了先驱性的工作．在他之后，京都大学的代数学家秋月康夫、永田雅宜等，进行了有关代数几何学的很多研究．另一方面，1930 年前后在德国随 Noether 学习的正田建次郎回日本后，他的学生中山正、浅野啓三、東屋五郎等卓越代数学家辈出．关于同调代数，森田紀一和他的学生有显著的贡献．

【参】 [1] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, J. Reine Angew. Math., **137** (1910), 167—309; [2] B. L. van der Waerden, Moderne Algebra, Springer, I 1930, II 1931（后改书名为 Algebra。中译本： B. L. 范德瓦尔登，代数学，科学出版社，I 1963, II 1976）; [3] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Livre II, Algèbre, ch. 1—9, Actualités Sci. Ind., 1144b, 1236b, 1044, 1102b, 1179a, 1261a, 1272a, Hermann, 1958—64; [4] 正田建次郎，抽象代数学，岩波，1932; [5] 正田建次郎-浅野啓三，代数学 I, 岩波，1952; [6] 中山正-東屋五郎，代数学 II, 岩波，1954; [7] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965; [8] H. M. Weber, Lehrbuch der Algebra, F. Vieweg, I 1894; II 1896; III 1891; [9] G. Birkhoff-S. MacLane, A

survey of modern algebra, Macmillan, third edition, 1965.

矩阵 [英 matrix 法 matrice 德 Matrix 俄 матрица 日 行列] 设 K 是任意环†或域†(可以是非交换的，在很多情形下以实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$ 作为 K)．K 中的**矩阵**是属于K的 mn 个元素 $a_{ik}(i=1,\cdots,m;k=1,\cdots,n)$ 排成的如下一个矩形阵列:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

构成矩阵的元素 a_{ik} 称为(i,k)**分量**(component, entry)或**元素** (element)．上面的矩阵详称为 (m,n) **型矩阵** (matrix of (m,n)-type)．特别是,(n,n)型矩阵称为 n 阶**方阵**(square matrix)，有时把一般的矩阵称为**矩形矩阵**．矩阵的横(左右)排称为**行**(英 row 德 Zeile)，纵(上下)排称为**列** (英 column 德 Spalte)．上面的矩阵也常简记为(a_{ik})或 A．$a_{ik}=0(i\neq k)$的方阵称为**对角矩阵**(diagonal matrix)．若对角矩阵中所有的 a_{ii} 都相等，则此对角矩阵称为**纯量矩阵** (scalar matrix)．把 $\delta_{ii}=1$，$\delta_{ij}=0(i\neq j)(i,j=1,2,\cdots,n)$这样的符号称为 **Kronecker** δ (Kronecker's delta)．(i,k)分量是 δ_{ik} 的 n 阶方阵 I 称为**单位矩阵** (unit matrix, identity matrix)．在矩阵记法中两边的括号也常用[ ]或‖ ‖来表示．

特别是，仅由一行构成的矩阵$(a_1,\cdots,a_n)$称为K中的 n 维**行向量**(row vector)，仅由一列构成的矩阵$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$称为$m$维**列向量**(column vector)．由(m,n)型矩阵A的各行或各列构成的m个行向量与n个列向量称为A的行向量与列向量．

【矩阵的运算】 两个矩阵 $A=(a_{ik})$，$B=(b_{ik})$ 相等是指二者的形式完全一致，即二者是同型的，且 $a_{ik}=b_{ik}(i=1,\cdots,m;k=1,\cdots,n)$．两个矩阵的和 $A+B$ 仅在两者同型时由 $A+B=(a_{ik}+b_{ik})$ 来定义．两个矩阵之积 AB 仅在 A 的列数与B的行数相等时由 $AB=(c_{ik})\left(c_{ik}=\sum_j a_{ij}b_{jk}\right)$来定义．$K$的元素与矩阵的乘积定义为 $a(a_{ik})=(aa_{ik})$，$(a_{ik})a=(a_{ik}a)$．因而K中所有同型的矩阵关于加法构成K模†．关于矩阵的乘法，结合律和分配律均成立．从而 K 中全体 n 阶方阵构成环，称为 K 上的 n 阶**全阵代数** (total (full) matrix algebra)，常用 K_n 或 $M_n(K)$ 来表示．当K是具有单位元 1 的环时，单位矩阵 I 是 K_n的单位元．全部分量都是 0 的矩阵称为**零矩阵**(zero matrix)，同样用 0 表示．若设仅有(i,k)分量是 1 而其余分量都是 0 的矩阵为 E_{ik}，则 K_n 的任意矩阵A可以唯一地表示成 E_{ik} 的线性组合 $A=(a_{ik})=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}E_{ik}$，而且关系式$E_{ij}E_{kl}=0$ $(j\neq k)$；$E_{ik}E_{kl}=E_{il}$；$aE_{ik}=E_{ik}a(a\in K)$成立．E_{ik} 称为**矩阵单位** (matrix unit)．

设A是 K_n 的矩阵，当满足 $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ 的矩阵 A^{-1} 存在时，A^{-1} 称为 A 的**逆矩阵** (inverse matrix)．存在逆矩阵的矩阵称为(K中的) **正则矩阵** (regular matrix)，**非奇异矩阵** (nonsingular matrix) 或**可逆矩阵** (invertible matrix)．若A存在逆矩阵，则其逆矩阵是唯一确定的．若 K 是可交换的，则矩阵 A 为正则矩阵的充分必要条件是行列式† $|A|$ 为K的正则元†．再者，在K为域的情形，则A为正则矩阵的充分必要条件是 $|A|\neq 0$．

把 (m,n) 型矩阵 $A=(a_{ik})$ 的行与列互换后所构成的 (n,m)型矩阵 $A'=(b_{ik})(b_{ik}=a_{ki})$，称为$A$的**转置矩阵** (transposed matrix)，常以 ${}^tA$ 表示．当K为可交换时，若 $AB=C$，则有 ${}^tB\,{}^tA={}^tC$．使得 ${}^tA=A$ 的方阵 A 称为**对称矩阵** (symmetric matrix) 或**交错矩阵** (alternating matrix)，而使得${}^tA=-A$ 的方阵A称为**斜对称矩阵**(skew-symmetric matrix)或**反对称矩阵**(anti-symmetric matrix)．方阵$A=(a_{ik})$当 $a_{ik}=0$ $(i<k)$ 时称为**下三角形矩阵**，当 $a_{ik}=0(i>k)$时称为**上三角形矩阵**，二者合起来称为**三角形矩阵** (triangular matrix)．

【矩阵的 Kronecker 积】 对于域 K 中的

(m, n)型矩阵 $A=a_{ik}$ 与 (r, s) 型矩阵 $B=(b_{jl})$，下标是 $\lambda=(i, j)$，$\mu=(k, l)$ 的 (mr, ns) 型矩阵 $C=(c_{\lambda,\mu})$ $(c_{\lambda,\mu}=a_{ik}\ b_{jl})$，称为 A，B 的 **Kronecker 积** (Kronecker product)，通常以 $C=A\otimes B$ 表示．由 λ, μ 的适当排列方法，C 可以表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B\cdots a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B\cdots a_{2n}B \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B\cdots a_{mn}B \end{pmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} b_{11}A\cdots b_{1s}A \\ b_{21}A\cdots b_{2s}A \\ \cdots\cdots \\ b_{r1}A\cdots b_{rs}A \end{pmatrix}.$$

公式 $A\otimes(B_1+B_2)=A\otimes B_1+A\otimes B_2$，$(A_1+A_2)\otimes B=A_1\otimes B+A_2\otimes B$，$c(A\otimes B)=(cA)\otimes B=A\otimes(cB)$，$(A_1\otimes B_1)(A_2\otimes B_2)=(A_1A_2)\otimes(B_1B_2)$ 均成立(这里假定和、积能够定义)．

【矩阵的秩】 若域 K 中的 (m, n) 型矩阵 A 存在不等于 0 的 r 阶子行列式†，而它的所有阶数 $\geqslant r+1$ 的子行列式都等于 0，则称 r 为 A 的**秩**(rank)．若以 $\rho(A)$ 表示 A 的秩，则对于矩阵的积，一般地有 $\rho(PAQ)\leqslant\rho(A)$，当 P, Q 是正则矩阵时等式成立．又 A 的 m 个行向量中线性无关†的最大个数以及 n 个列向量中线性无关的最大个数，都等于 A 的秩．$n-\rho(A)$ 称为 A 的**零度** (nullity)．零度等于由齐次线性方程组 $A\mathfrak{x}=0$ 的解构成的线性空间的维数(基本解的个数)．在 K 是非交换域的情形，也可把行（或列）向量中左（或右）线性无关的最大个数定义为矩阵的秩．又→线性空间［子空间与商空间］．

【初等因子】 设 $\mathfrak{o}$ 是有理整数的整环 $\boldsymbol{Z}$，或域 K 上的多项式环† $K[x]$，或者更一般地是主理想整环†，若 A 是 $\mathfrak{o}$ 中的矩阵，则从 A 的左边和右边乘以适当的 ($\mathfrak{o}$ 中的) 可逆矩阵，可将 A 化为下列形式的对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} e_1 & & & & 0 \\ & e_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e_r & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix},\quad e_{i+1}\text{ 可被 } e_i \text{ 整除}.$$

此处 r 是 A 的秩．若不计正则元因子，则 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是唯一确定的，称为 A 的**初等因子** (elementary divisor)．上述事实也可在一定程度上推广到 $\mathfrak{o}$ 是非交换的情形(→线性空间［半线性映射］)．若使用行列式，则初等因子可如下确定：设 A 的所有 k 阶子行列式的最大公因子为 d_k，则 $\mathfrak{o}$ 的元素 $e_i=d_i/d_{i-1}$ $(i=1, \cdots, r, d_0=1)$ 就是 A 的初等因子．$d_1, d_2, \cdots, d_r$ 称为 A 的**行列式因子** (德 Determinantenteiler)．设 p 是 e_r 的一个素因子，e_i 能被 p 的 ρ_i 次方整除，但不能被 ρ_{i+1} 次方整除，则 p^{ρ_i} $(i=1, \cdots, r)$ 称为以 p 为底的**单初等因子** (simple elementary divisor) (→Noether 环)．

【特征多项式，特征值】 设 $A=(a_{ik})$ 是域 K 中的 n 阶方阵．行列式 $F(x)=|xI-A|$ 是 $K[x]$ 中的 n 次多项式，称为 A 的**特征多项式** (proper polynomial 或 characteristic polynomial)．代数方程 $F(x)=0$ 称为 A 的**特征方程** (proper equation 或 characteristic equation)，它的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 称为 A 的**特征值**(英 proper value, eigenvalue 德 Eigenwert)或**特征根** (characteristic root)．A 的行列式† $\det A$ 等于特征值的积 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$．特征值的和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ 称为 A 的**迹**(英 trace 德 Spur)或**对角和** (diagonal sum)，记作 $\operatorname{tr} A$ 或 $S_p(A)$．在 K 是代数封闭的情况下，当且仅当 λ 是 A 的特征值时，存在列向量 $\mathfrak{x}\neq 0$ 使 $A\mathfrak{x}=\lambda\mathfrak{x}$．这个解 $\mathfrak{x}$ 称为对应于特征值 λ 的**特征向量**(proper vector, eigenvector)或**特征解** (proper solution, characteristic solution)．特别当 a_{ik} 是实数且 $a_{ik}=a_{ki}$ 时，则 A 的特征值是实数，这时特征方程 $F(x)=0$ 也称为**长期方程** (secular equation)．特别是，若设 $F(x)$ 是 A 的特征多项式，则 $F(A)$ 是零矩阵，即 $F(A)=0$．这称为 **Hamilton-Cayley 定理**．它可应用于逆矩阵的数值计算．

这样，在 $K[x]$ 中存在首项系数为 1 的多项式 $f(x)$，使 $f(A)=0$．设其中次数最低的是 $\varphi(x)$，则具有上述性质的任意 $f(x)$ 均可被 $\varphi(x)$ 整除．这个 $\varphi(x)$ 称为 A 的**最小多项式** (minimal polynomial)．若 $K[x]$ 中的矩阵 $xI-A$ 的初等因子是 $e_1(x), \cdots, e_n(x)$，则 $\varphi(x)=e_n(x)$．当 $F(x)=x^n$ 时，A 称为**幂零矩阵**

(nilpotent matrix). 当 $F(x)=(x-1)^n$ 时, A 称为**幂单矩阵**(unipotent matrix). (→线性空间[线性变换]).

【标准型】 对于域 K 中的 n 阶方阵 A, B, 若存在正则矩阵 P, 使得 $B=P^{-1}AP$, 则称 A 与 B 是**相似的** (similar). A 与 B 相似的充分必要条件是: $K[x]$ 中的矩阵 $xI-A$ 与 $xI-B$ 的初等因子相同. 其次, 设 K 是代数闭域[†](例如复数域), λ 是矩阵 A 的一个特征值, $xI-A$ 的以 $x-\lambda$ 为底的不等于 1 的单初等因子是 $(x-\lambda)^{\rho_1}, \cdots, (x-\lambda)^{\rho_s}$, 作下面的矩阵:

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} P_1 & & & 0 \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & P_s \end{pmatrix}, \text{其中 } P_i = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

(P_i 是 ρ_i 阶方阵, 但当 $\rho_i=1$ 时 P_i 是仅由元 λ 构成的一阶矩阵). 若 A 的所有相异的特征值是 $\lambda_1, \cdots, \lambda_t$, 则 A 与把 t 个矩阵 $A_{\lambda_i}(i=1, \cdots, t)$ 排在对角线上所得的矩阵相似. 后一矩阵称为 A 的 **Jordan 标准型**(Jordan's canonical form). 这个标准型成为对角矩阵的充分必要条件是: A 的最小多项式无重根. 此时 A 称为**半单的**(semi-simple)(→线性空间[线性变换]).

【矩阵的指数函数】 设 $A_\nu=(a_{ij}^{(\nu)})(\nu=0, 1, 2, \cdots)$ 为复数域 $\boldsymbol{C}$ 中的方阵, 级数 $A_0+A_1+\cdots+A_\nu+\cdots$ 称为收敛的, 如果它的各分量构成的级数 $a_{ij}^{(0)}+a_{ij}^{(1)}+\cdots+a_{ij}^{(\nu)}+\cdots$ 收敛. 对于方阵 A,

$$I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{\nu!}A^\nu+\cdots$$

总是收敛的, 用 $\exp A$ 表示. $\exp({}^tA)={}^t(\exp A)$; $\exp(-A)=(\exp A)^{-1}$; 若 $AB=BA$, 则 $\exp(A+B)=\exp A\cdot\exp B$. 且 $\det(\exp A)=\exp(\operatorname{tr}A)$. 此外, 若 $F(t)=\exp(tA)$, 则 $dF(t)/dt=AF(t)$ (→变换群).

【正规矩阵, 酉矩阵, Hermite 矩阵】 复数域 $\boldsymbol{C}$ 中的方阵 $A=(a_{ik})$ 的共轭转置矩阵 ${}^t\bar{A}=(\bar{a}_{ki})$ ($\bar{a}$ 是 a 的共轭复数)以 A^* 表示, 称为 A 的**伴随矩阵**(adjoint matrix). 满足 $AA^*=A^*A$ 的方阵 A 称为**正规矩阵** (normal matrix), 满足 $U^*U=I$ 即 $U^{-1}=U^*$ 以及 $H^*=H$ 的矩阵 U, H 都是正规矩阵, 前者依据 G.Frobenius 称为**酉矩阵**(unitary matrix)(以下简称 u 矩阵), 后者称为 **Hermite 矩阵**(Hermitian matrix)(以下简称 h 矩阵). 又满足 $P^2=P$ 的 h 矩阵 P, 称为**射影矩阵** (projection matrix).

全体 u 矩阵关于乘法构成群. 若 A 是正规矩阵, U 是 u 矩阵, 则 U^*AU 是正规矩阵. 若 H 是 h 矩阵, Q 是任意矩阵, 则 Q^*HQ 是 h 矩阵, 若 A 是任意的正规矩阵, 则 A 可由适当的 u 矩阵变换为对角矩阵 (即存在 u 矩阵 U, 使 $U^*AU=U^{-1}AU$ 是对角矩阵). 反之, 具有这样的性质的矩阵是正规矩阵. 特别是, h 矩阵、u 矩阵可由适当的 u 矩阵变换为对角矩阵. 而且若 h 矩阵是实对称矩阵, 则它可由正交矩阵(见后)变换为对角矩阵. 若 $A_1, \cdots, A_m$ 是可互相交换的正规矩阵, 则可用同一个 u 矩阵 U 把 $U^{-1}A_iU$ 全都化成对角矩阵. 又 h 矩阵的特征值全都是实数, u 矩阵的特征值的绝对值全都等于 1.

当 h 矩阵 H 的特征值全都为正 (或者全都为正或 0) 时, 称 H 是**正定的** (positive definite) (或者**半正定的** (positive semi-definite)). 若 H 是 h 矩阵, 则 $\exp H$ 是正定的 h 矩阵, 反之, 对于正定的 h 矩阵, 必存在唯一的 h 矩阵 H, 使得所给 h 矩阵可表示为 $\exp H$ 的形式. 任意的正则矩阵 A, 可以唯一地表示为 u 矩阵 U(或 U') 和正定的 h 矩阵 H (或 H') 的积 $A=UH$ (或 $A=H'U'$). 这时 A 为正规矩阵的充分必要条件是 $UH=HU$.

满足 $A^*=-A$ 的方阵 A 称为**斜 Hermite 矩阵** (skew-Hermitian matrix) (简称斜 h 矩阵) 或**反 Hermite 矩阵**(anti-Hermitian matrix). 斜 h 矩阵的特征值全都是纯虚数. 若 A 是斜 h 矩阵, 则 $\exp A$ 是 u 矩阵, 反之, 充分接近单位矩阵 I 的 u 矩阵 U (亦即 $U-I$ 的所有元具有充分小的绝对值), 必可唯一地表示为 $\exp A$ 的形式(A 是斜 h 矩阵).

【正交矩阵】 分量全都为实数的 h 矩阵 H

是对称矩阵．分量全都为实数的 u 矩阵 O，即满足 $O^{-1}={}^tO$ 的矩阵 O，称为**正交矩阵**(orthogonal matrix)．全体正交矩阵关于乘法构成群．对于任意实对称矩阵 S，可通过适当的正交矩阵 T，使 $T^{-1}ST$ 成为实对角矩阵．任意正交矩阵 O 可通过适当的正交矩阵 T 化成下列形式：

$$T^{-1}OT=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & P_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & P_s\end{pmatrix},$$

$$P_i=\begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i\end{pmatrix}.$$

正交矩阵 O 的行列式 $|O|$ 的值是 ± 1．$|O|=1$ 的正交矩阵称为**特征正交矩阵**（proper orthogonal matrix)．若 A 是实交错矩阵，则 $\exp A$ 是特征正交矩阵；反之，充分接近单位矩阵的特征正交矩阵必可唯一地表示为这种形式．特征值都不等于 -1 的特征正交矩阵 O 与实交错矩阵 A，通过 $O=(I-A)(I+A)^{-1}$，$A=(I-O)(I+O)^{-1}$ 一一对应．这一对应称为 **Cayley 变换**(Cayley transformation)．

满足 ${}^tT=T^{-1}$ 的（复）方阵 T 称为**复正交矩阵**(complex orthogonal matrix)，它可唯一地表示为 $T=O\exp iA$（其中 O 是正交矩阵，A 是实交错矩阵，$i^2=-1$)．

【无限矩阵】 把（非交换）域 K 中的元素 $a_{\sigma\tau}(\sigma,\tau\in\Gamma)$ 排成具有无限多行与无限多列的阵列：

$$\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & a_{\sigma\tau} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix},$$

称为**无限(阶)矩阵**(infinite matrix)（σ，τ 是表示行或列的下标，它们分别取遍无限集 Γ)．关于无限矩阵的相等、加法以及与 K 的元的乘法的定义，与通常有限矩阵的情形完全一样．乘法一般没有定义．若一个无限矩阵各行(或列)的元除有限个外全都是 0，则称它为**行（或列）有限**(row (column) finite) **矩阵**．关于行(或列)有限矩阵，与有限矩阵的情形相同，可以把矩阵 $(a_{\sigma\tau})$，$(b_{\sigma\tau})$ 的积定义为矩阵 $(c_{\sigma\tau})$，它的分量 $c_{\sigma\tau}=\sum_{\nu}a_{\sigma\nu}b_{\nu\tau}$，因此，全体行(或列)有限矩阵构成环．设 $\mathfrak{M}$ 是 K 上的无限维线性空间[†]，即无限维右 K 模[†]，于是 $\mathfrak{M}$ 中存在线性无关的 K 基 $\{u_\tau\}$，使得 $\mathfrak{M}$ 的任意元可表为有限多个 u_τ 的线性组合．设 A 是 $\mathfrak{M}$ 的线性变换[†]，若设 $Au_\tau=\sum_{\sigma}u_\sigma a_{\sigma\tau}(a_{\sigma\tau}\in K)$，则当固定 τ 变动 σ 时，$a_{\sigma\tau}$ 除有限个外全都是 0，于是列有限矩阵 $(a_{\sigma\tau})$ 对应于 A．基于这个对应，$\mathfrak{M}$ 的线性变换构成的环与列有限矩阵构成的环同构．在 K 是拓扑域的情形，可以对这些环进行更详细的讨论．

其次，设 K 是复数域，Γ 是自然数集．关于矩阵 (a_{ik}) $(i,k=1,2,\cdots)$，若对任意的 x_i 与 y_k，

$$\left|\sum_{i,k=1}^{m,n}a_{ik}x_iy_k\right|\leqslant M\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right)^{\frac12}$$

（M 是常数）

成立，则 (a_{ik}) 称为**有界矩阵**(bounded matrix)．全体有界矩阵构成环．若 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 是 Hilbert 空间[†] $\mathfrak{H}$ 的一个完全正规正交系，则对于 $\mathfrak{H}$ 的连续线性算子 A，有 $A\varphi_k=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i a_{ik}$；通过使 A 对应有界矩阵 (a_{ik})，可把 $\mathfrak{H}$ 的连续线性算子构成的环同构地映射到有界矩阵构成的环上（→Hilbert 空间)．

【参】［1］藤原松三郎，行列及び行列式，岩波全書，修订版 1961；［2］浅野啓三，線型代数学提要，共立出版，1948；［3］遠山啓，行列論，共立全書，1951；［4］古屋茂，行列と行列式，培風館，1957；［5］佐武一郎，行列と行列式，裳華房，1958；［6］O. Schreier-E. Sperner, Vorlesungen über die Theorie der Matrizen, Teubner, 1932；［7］C. C. MacDuffee, Theory of matrices, Springer, 1933 (Chelsea, 1946)；［8］J. H. M. Wedderburn, Lectures on matrices, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1934；［9］N. Bourbaki, Algèbre, chap. 2, Actualités Sci. Ind., Hermann, 第三版 1962；[10] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1953（中译本：Ф. Р. 甘特马赫尔，矩阵論，上、下，高等教育出版社，1955)；[11] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1959（中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，人民教育出版社，1962)；[12] А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956（中译本：

А. И. 马力茨夫，线性代数基础，高等教育出版社，1959)；[13] R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann, 1963; [14] R. Bellman, Introduction to matrix analysis, McGraw-Hill, 1960; [15] A. S. Householder, The theory of matrices in numerical analysis, Blaisdell, 1964; [16] L. Fox, An introduction to numerical linear algebra, Clarendon Press, Oxford, 1964; [17] S. Lang, Linear algebra, Addison-Wesley, 1966; [18] S. MacLane - G. Birkhoff, Algebra, Macmillan, 1967; [19] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965.

行列式 [英 determinant 法 déterminant 德 Determinante 俄 детерминант 日 行列式]

【定义】 对于 n 阶方阵† $A=(a_{ik})(i,k=1,\cdots,n)$，由 n^2 个元素 a_{ik} 定义的式子

$$\Sigma(\operatorname{sgn}P)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 A 的**行列式**. 其中$P=\begin{pmatrix}1 & 2 \cdots n\\ p_1 & p_2\cdots p_n\end{pmatrix}$ 是数码 1 到 n 的置换，$\operatorname{sgn}P$ 是置换的符号（即当 P 是偶置换时，$\operatorname{sgn}P=1$，而当 P 是奇置换时，$\operatorname{sgn}P=-1$）. 上式中的和是对 $n!$ 个所有可能的 P 求和. A 的行列式以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

表示，也简记作 $|a_{ik}|$ 或 $|A|$，也使用记号 $\det A$. A 的元素 a_{ik} 通常是实数或复数，但不作特别说明时，以下的理论对一般的交换环† R 的元也成立.

【与外代数的关系】 设交换环 R 上的一个 n 维线性空间(自由模†)的基是 $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$，考虑其外代数† (Grassmann 代数†). 令

$$e'_i=a_{i1}e_1+a_{i2}e_2+\cdots+a_{in}e_n,a_{ij}\in R,$$

则 $e'_1\wedge e'_2\wedge\cdots\wedge e'_n=|a_{ik}|e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n$. 反之，利用外代数，可以由上面的关系定义行列式. 行列式的一些性质，可以由外代数非常容易地求得.

【行列式的基本性质】 1) A 与其转置矩阵† ${}^tA$ 有相同的行列式，因而对于行列式的行成立的定理，对于列也成立.

2) A 的一行（或列）的每个元乘以（R 的）元 c 得到的矩阵的行列式等于 $c|A|$. 特别是，当 A 的一行(或列)的元都是 0 时，其行列式 $|A|$ 等于 0.

3) 设 $A=(a_{ik})$ 的一行（例如第 i 行）换成 $a'_{i1},\cdots,a'_{in}$ 及 $a_{i1}+a'_{i1},\cdots,a_{in}+a'_{in}$ 后得到的矩阵分别是 A' 及 A''，则 $|A''|=|A|+|A'|$. 对于列也有同样的定理.

4) 设 A 的行（或列）施以置换 Q 后所得到的矩阵是 A_Q，则 $|A_Q|=(\operatorname{sgn}Q)|A|$. 特别是，两行(或列)互换后，行列式改变符号.

5) 若 A 的两行(或列)相同，则行列式 $|A|$ 等于 0.

6) A 的某一行（或列）乘以任意元后加到另一行(或列)上去时，行列式的值不变.

7) 设（在具有单位元的交换环 R 中）n^2 个变量 $x_{ik}(i,k=1,\cdots,n)$ 的函数，即矩阵 $X=(x_{ik})$ 的函数 $\varphi(x_{ik})=\varphi(X)$（取值为 R 的元）具有下述性质：i)若 X 的一行乘以(R 的)元 λ，则 φ 的值也乘以 λ；ii) 设 X 的任意一行（例如第 i 行）换成 $x'_{i1},\cdots,x'_{in}$ 及 $x_{i1}+x'_{i1},\cdots,x_{in}+x'_{in}$ 所得的矩阵分别是 X' 及 X''，则 $\varphi(X'')=\varphi(X)+\varphi(X')$；iii) 若 X 的两行相同，则 φ 的值等于 0. 此时 $\varphi(X)=c|X|(c\in R)$.

8) 设 R 为域 K，设在域 K 中取值的函数 $\varphi(X)=\varphi(x_{ik})$ 具有以下性质：i) 若把 X 的一行乘以 λ，则 φ 的值也乘以 λ；ii) 若把 X 的任一行的元加到另一行的对应元上，则 φ 的值不变. 此时 $\varphi(X)=c|X|(c\in K)$.

【Laplace 展开定理】 设 $A=(a_{ik})$是 n 阶方阵，$(i_1,\cdots,i_r)(i_1<\cdots<i_r)$ 是由数码 1, 2, $\cdots$, n 构成的 r 元组，其余的是 $(i_{r+1},\cdots,i_n)(i_{r+1}<\cdots<i_n)$. $(k_1,\cdots,k_r),(k_{r+1},\cdots,k_n)$ 的意义也同样. A 的 $i_1,\cdots,i_r$ 行与 $k_1,\cdots,k_r$ 列交叉处的 r^2 个元素按照原样构成的 r 阶行列式，称为 A 的 r **阶子行列式** (minor)，记作

$$a_{(i_1,\cdots,i_r)(k_1,\cdots,k_r)}.$$

特别是，当$(i_1,\cdots,i_r)=(k_1,\cdots,k_r)$ 时，称这个子行列式为**主子行列式**(principal minor). 又设 $\lambda=i_1+\cdots+i_r$，$\mu=k_1+\cdots+k_r$，则冠以正负号的 $n-r$ 阶子行列式

$$\tilde{a}_{(i_1,\cdots,i_r)(k_1,\cdots,k_r)}=(-1)^{\lambda+\mu}a_{(i_{r+1},\cdots,i_n)(k_{r+1},\cdots,k_n)}$$

称为A中$a_{(i_1,\cdots,i_r)(k_1,\cdots,k_r)}$的**余因子**(cofactor)．特别是，当$r=1$时，$a_{ik}$的余因子是$\tilde{a}_{ik}=(-1)^{i+k}\Delta_{ik}$，此处$\Delta_{ik}$表示去掉$A$的第$i$行与第$k$列后得出的$n-1$阶子行列式．

若把$(i_1,\cdots,i_r)$，$(j_1,\cdots,j_r)$，$(k_1,\cdots,k_r)$分别简记作(i)，(j)，(k)，则有

$$\sum_{(j)} a_{(i)(j)}\tilde{a}_{(k)(j)}=\begin{cases}|A|, & (i)=(k),\\ 0, & (i)\neq(k),\end{cases}$$

$$\sum_{(j)} a_{(j)(k)}\tilde{a}_{(j)(i)}=\begin{cases}|A|, & (i)=(k),\\ 0, & (i)\neq(k).\end{cases}$$

此处$\sum_{(j)}$是指固定$(i)(k)$而(j)取遍$\binom{n}{r}$个组合的总和．这称为**Laplace 展开定理**(Laplace's expansion theorem)．若B，C是方阵，A是形如

$$A=\begin{pmatrix}B & 0\\ * & C\end{pmatrix}\text{ 或 }A=\begin{pmatrix}B & *\\ 0 & C\end{pmatrix}$$

的矩阵，则由上面的公式，有$|A|=|B||C|$．现在对组合适当地附上号码，例如按字典顺序，由这个顺序，如果把$(i_1,\cdots,i_r)$，$(k_1,\cdots,k_r)$分别看作行与列的号码，则上面的 Laplace 展开定理可以用$\binom{n}{r}$阶方阵表示如下：

$$(a_{(i)(k)})(\tilde{a}_{(k)(i)})=(\tilde{a}_{(k)(i)})(a_{(i)(k)})=\begin{pmatrix}|A| & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & |A|\end{pmatrix}$$

(i)是行的号码，(k)是列的号码．
特别是，当$r=1$时，

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{kj}=\begin{cases}|A|, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}\tilde{a}_{ji}=\begin{cases}|A|, & i=k,\\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

【行列式的积】 设$A=(a_{ik})$，$B=(b_{ik})$是n阶方阵，则对于乘积

$$AB=C=(c_{ik})$$

$$\left(c_{ik}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk},\ i,k=1,\cdots,n\right),$$

$|AB|=|A||B|$成立．方阵$A=(a_{ik})$有逆矩阵†A^{-1}的充分必要条件是行列式$|A|\neq 0$，此时$A^{-1}=(b_{ik})(b_{ik}=\tilde{a}_{ki}/|A|)$．又$|A^{-1}|=|A|^{-1}$(在以具有单位元的交换环$R$的元为元素的情形，上述条件为$|A|$是$R$的正则元†)．

【行列式的一些定理】 1)以n阶方阵$A=(a_{ik})$中a_{ik}的余因子$\tilde{a}_{ik}$为元素的行列式$|\tilde{a}_{ik}|$等于$|A|^{n-1}$．一般地，有

$$|a_{(i_1,\cdots,i_r)(k_1,\cdots,k_r)}|=|A|^{\binom{n-1}{r-1}},$$

$$|(\tilde{a}_{i_1,\cdots,i_r)(k_1,\cdots,k_r)}|=|A|^{\binom{n-1}{r}}.$$

2) 由矩阵$(\tilde{a}_{ik})$的$i_1,\cdots,i_r$行与$k_1,\cdots,k_r$列构成的r阶子行列式等于

$$|A|^{r-1}\tilde{a}_{(i_1,\cdots,i_r)(k_1,\cdots,k_r)}.$$

3) 若以$\Delta\begin{pmatrix}i_1 i_2\cdots i_r\\ k_1k_2\cdots k_r\end{pmatrix}$表示去掉矩阵$A$的$i_1,\cdots,i_r$行与$k_1,\cdots,k_r$列后得到的$n-r$阶矩阵的行列式，则

$$|A|\Delta\begin{pmatrix}i\ j\\ k\ l\end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix}i\\ k\end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix}j\\ l\end{pmatrix}-\Delta\begin{pmatrix}i\\ l\end{pmatrix}\Delta\begin{pmatrix}j\\ k\end{pmatrix},\ i<j,\ k<l.$$

4) **Sylvester 定理**．若取n阶方阵$A=(a_{ik})$的$1,\cdots,r,r+i$行与$1,\cdots,r,r+k$列构成$r+1$阶子行列式，并以$b_{ik}(i,k=1,\cdots,n-r)$表示这个子行列式，则

$$|b_{ik}|=|A|\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr}\end{vmatrix}^{n-r-1}.$$

5) 若A是(n,m)型矩阵，B是(m,n)型矩阵，则AB是n阶方阵．当$n>m$时，$|AB|=0$．当$n\leqslant m$时，设$(i)=(i_1,\cdots,i_n)$ $(i_1<\cdots<i_n)$是由$1,\cdots,m$中取n个的组合，$A_{(i)}$是由A的$i_1,\cdots,i_n$列构成的n阶方阵，$B_{(i)}$是由B的$i_1,\cdots,i_n$行构成的n阶方阵，则

$$|AB|=\sum_{(i)}|A_{(i)}||B_{(i)}|$$

((i)取遍$\binom{m}{n}$个组合)成立．

6) Kronecker 积的行列式．若A是m阶方阵，B是n阶方阵，则$|A\otimes B|=|A|^n|B|^m$．

7) 设H是n阶 Hermite 矩阵†，H_k是由H的$1,\cdots,k$行与$1,\cdots,k$列构成的k阶矩

阵．这时，H 是正定的，当且仅当 $|H_k|>0$ $(k=1,\cdots,n)$．

【特殊行列式】 1) Vandermonde 行列式．形如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的行列式称为 **Vandermonde 行列式** (Vandermonde's determinant)，它等于 $x_1,\cdots,x_n$ 的最简交代多项式† $\prod_{i>k}(x_i-x_k)$．

2) **循环行列式** (cyclic determinant).

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_0 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=0}^{n-1}(x_0+\zeta^i x_1+\zeta^{2i}x_2+\cdots+\zeta^{(n-1)i}x_{n-1}),$$

其中 ζ 是 1 的 n 次原根．

3) **Gram 行列式** (Gramian)．设 $\alpha_i=(a_{i1}\ a_{i2}\cdots a_{in})$ 是 n 维向量，(α_i,α_j) 是内积，则

$$\begin{vmatrix} (\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_n,\alpha_1) & (\alpha_n,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_n,\alpha_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}^2.$$

4) 对于交错矩阵 X (即 ${}^tX=-X$)，有

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & \cdots & x_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -x_{1n} & -x_{2n} & -x_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)^2, & n \text{ 是偶数}, \\ 0, & n \text{ 是奇数}, \end{cases}$$

其中 (适当确定符号) $P_n(\cdots,x_{ij},\cdots)$ 是变量 x_{ij} 的多项式，称为这些变量的 **Pfaff 多项式** (Pfaffian).

【参】 [1]高木貞治,代数学講義,共立出版,修订版 1965; [2] 藤原松三郎,代数学 I, 内田老鶴圃, 1928; [3]藤原松三郎,行列及び行列式,岩波全書,修订版 1961; [4] 荒又秀夫, 行列及び行列式, 東海書房, 1947; [5]浅野啓三,線型代数学提要,共立出版,1948; [6]遠山啓,行列論,共立全書,1953; [7]佐武一郎,行列と行列式,裳華房,1958; [8]古屋茂,行列と行列式,培風館,1957; [9] G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Walter de Gruyter, Leipzig, 修订版 1925 (Chelsea, 1948); [10] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 3, Actualités Sci. Ind., 1044, Hermann, 新版 1958; [11] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1953 (中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔,矩阵论,高等教育出版社, 1955); [12] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1959 (中译本: А. Г. 库洛什, 高等代数教程, 人民教育出版社, 1962 年); [13] R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann, 1963; [14] S. MacLane-G. Birkhoff, Algebra, Macmillan, 1967.

线性方程组 [英 linear equations 法 équations linéaires 德 lineare Gleichungen 俄 линейные уравнения 日 1次方程式] 当给定 m 个线性型 $f_i=a_{i1}X_1+\cdots+a_{in}X_n(i=1,\cdots,m)$ 以及 m 个数 $b_1,\cdots,b_m$ 时，形如

(1) $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=b_i,\quad i=1,\cdots,m$

的式子称为**线性方程组** (linear equations)，满足它的数 $x_1,\cdots,x_n$ 或数向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 称为线性方程组(1)的**解** (solution)．特别是，形如

(2) $a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n=0,\quad i=1,\cdots,m$

的线性方程组称为**齐次线性方程组** (linear homogeneous equations)．线性方程组的理论并不限定系数和解都是数，它对一般的 (非交换) 域 K 的元也照样成立．但是在非交换域的情形，由于有左乘、右乘的区别，因而以下在括号内注明左或右．

若 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 是 (2) 的解，则它的(右)线性组合 $\Sigma\boldsymbol{x}_ic_i\,(c_i\in K)$ 也是(2)的解，即(2)的解构成线性空间．当(2)有非零解时，若 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 是(2)的(右)线性无关解，而其他的解全部由它们的(右)线性组合得出，则 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_s$ 称为(2)的**基本解组** (system of fundamental solutions)．若线性型 $f_1,\cdots,f_m$ 中 (左)线性无关的最大个数是 r，则当且仅当 $r<n$ 时(2)有非零解，其基本解的个数是 $n-r$．因而，若方程的个数小于

未知数的个数，则必有非零解.

其次，若(1)有一个解 $\boldsymbol{x}_0$，则(1)的每个解 $\boldsymbol{x}$ 可由 $\boldsymbol{x}_0$ 加上(2)的一个解 $\boldsymbol{y}$ 得出. 而且(1)有解的充分必要条件是：若线性型 $f_1, \cdots, f_m$ 之间有线性关系 $\Sigma c_i f_i = 0\ (c_i \in K)$，则必有 $\Sigma c_i b_i = 0$. 换言之，下面的两个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

的秩†相同. 特别是，(1) 仅有一个解的充分必要条件是 A 与 $\widetilde{A}$ 的秩都等于 n. 又若 $m = n$（从而 A 是方阵），则当且仅当 A 有逆矩阵†时，(1)有唯一解，就是 ${}^t\boldsymbol{x} = A^{-1}\,{}^t\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n))$.

【Cramér 公式】 在 K 是域的情形，可以用行列式具体地给出解的公式. 首先设 $m = n$，行列式 $\Delta = |A| \neq 0$. 此时，(1)仅有一组解，这组解就是 $x_k = \Delta_k/\Delta\ (k = 1, \cdots, n)$. 此处 Δ_k 是把矩阵 A 的第 k 列 $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk}$ 换成 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 后所得的矩阵 A_k 的行列式. 这称为 **Cramér 公式**. 在一般情形下，设 A 与 $\widetilde{A}$ 的相同的秩为 r，若适当改变方程与未知数的顺序，使 $|a_{ik}| \neq 0\ (i, k = 1, \cdots, r)$，则在前 r 个方程中，给 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ 以任意值，用 Cramér 公式解出 $x_1, \cdots, x_r$，由此可以得到一般解. (2)有非零解的充分必要条件是 A 的秩小于 n；因而当 A 为方阵时，此充分必要条件就是 $|A| = 0$. 关于线性方程组理论在几何学中的应用→仿射几何学. 关于数值解→线性方程组的数值解法.

在一般（非交换）域 K 的情形，设 L 是 K 的扩域，若 K 中的线性方程组在 L 中有解，则它在 K 中也有解. 特别是，若 K 中的(2)在 L 中有非零解，则它在 K 中也有非零解. K 中的基本解也同样是 L 中的基本解.

【参】 [1]高木貞治，代数学講義，共立出版，1930，修订版 1948； [2] 浅野啓三，線型代数学提要，共立出版，1948； [3] S. Lang, Linear algebra, Addison-Wesley, 1966. 其他→行列式，线性空间，矩阵，线性方程组的数值解法的[参].

多项式 [英 polynomial 法 polynôme 德 Polynom 俄 многочлен, полином 日 多項式]

【一元多项式】 设 k 是一个交换环†，$a_0, a_1, \cdots, a_n \in k$，则形如

(1)　$f(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$

的式子，称为 k 上的变量 X 的**多项式**. 如果 $a_n \neq 0$，则称数 n 为多项式 $f(X)$ 的**次数**(degree)，记作 $\deg f$. 如果 $a_n = 1$，则多项式 (1) 称为**首项系数是 1 的多项式** (monic polynomial). k 上的全体多项式关于通常的加法、乘法构成交换环，称为 k 上的一个变量 X 的**多项式环** (polynomial ring)，以 $k[X]$ 表示. 由 k 作 $k[X]$，称为往 k 中**添加** (adjoin) 变量 X.

【多元多项式】 $k[X]$ 中再添加一个变量 Y 构成的环 $k[X][Y]$，记作 $k[X, Y]$，它的元 $\Sigma a_{\mu\nu}X^{\mu}Y^{\nu}$ 称为 k 上的两个变量 X 和 Y 的多项式. 一般地，$k[X_1, \cdots, X_m] = k[X_1, \cdots, X_{m-1}][X_m]$ 称为 k 上的 **m 个变量 $X_1, \cdots, X_m$ 的多项式环** (polynomial ring of m variables)，它的元

(2)　$F(X_1, X_2, \cdots, X_m)$

$$= \Sigma a_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}X_1^{\nu_1}X_2^{\nu_2}\cdots X_m^{\nu_m}$$

（Σ 是由 $\nu_1 = \nu_2 = \cdots = \nu_m = 0$ 开始的对非负整数 ν_i 的有限和）称为 k 上的 **m 个变量 $X_1, X_2, \cdots X_m$ 的多项式（m 元多项式）** (polynomial of m variables). 构成这个多项式的 $a_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}X_1^{\nu_1}X_2^{\nu_2}\cdots X_m^{\nu_m}$ 称为多项式 F 的**项**(term)，$a_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m}$ 称为这一项的**系数** (coefficient)，$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_m$ 称为这一项的**次数** (degree). 多项式 F 的所有项的次数中的最大数，称为 F 的**次数**. 次数是 0 的项 $a_{0\cdots0}$ 称为 F 的**常数项** (constant term). 仅由 $X_1, \cdots, X_m$ 的 n 次项构成的多项式称为 **n 次齐次多项式** (homogeneous polynomial of degree n)，**n 次齐次式**或 **n 次型** (form of degree n). 仅由一项构成的多项式，即形如 $aX_1^{\nu_1}X_2^{\nu_2}\cdots X_m^{\nu_m}$ 的式子，称为**单项式** (monomial). 在由(2)表示的变量 $X_1, \cdots, X_m$ 的多项式 $F(X_1, \cdots, X_m)$ 中，把 $X_1, \cdots X_m$ 换成环 k 的元（或以 k 为其子环的交换环 K 的元）$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$，就称为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 的多项式. 当 $F(\alpha_1, \cdots, \alpha_m) = 0$ 时，称 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 为 $F(X_1, \cdots, X_m)$ 的（或 K 中的）**零点**（英 zero point 德 Nullstelle）或**根** (root).

【多项式环的构造】 设 k 是整环†，考虑 k

上的无限维向量† $f=(a_0, a_1, a_2, \cdots)$，其中只有有限个分量 a_i 是非零的. 若 f 中最后的非零分量是 a_n，则定义 n 为 f 的次数 $\deg f$（对 $0=(0, 0, 0, \cdots)$不定义次数）. f 与 $g=(b_0, b_1, b_2, \cdots)$ 的和与积定义如下:

$$f+g=(a_0+b_0, a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_\nu+b_\nu, \cdots),$$

$$fg=(a_0b_0, a_0b_1+a_1b_0, \cdots, \sum_{\lambda+\mu=\nu} a_\lambda b_\mu, \cdots).$$

从而 $f, g, \cdots$ 的全体成为具有 1 的整环. 令 $X=(0, 1, 0, 0, \cdots)$，则 n 次的 $f=(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, 0, \cdots)$ 可表示为 (1) 的形式. 这些 $f, g, \cdots$ 构成的整环就是 $k[X]$，X 称为代数意义下的**变量** (variable) 或**不定元** (德 Unbestimmte). 对于次数，公式（当两端有意义时）$\deg(f+g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$，$\deg(fg)=\deg f+\deg g$ 成立.

特别地，设 k 是域，则当给出 $f, g \in k[X]$（但 $f \neq 0$, $\deg g \geqslant 1$）时，就有适当的 $q, r \in k[X]$ 满足下式（**除法定理** (theorem of division algorithm)）: $f=gq+r$ ($\deg g > \deg r$ 或 $r=0$). 称 q 为 f 除以 g 的**整商** (integral quotient)，称 r 为 f 除以 g 的**剩余** (remainder).

【素因子分解】 设 k 是整环. 因为 $k[X]$ 是整环，从而 $k[X_1, \cdots, X_m]$ 是整环，所以有关整除性的各种概念（约数，倍数等）都是能定义的（→交换环）. 若 k 中素因子分解唯一性定理† 成立，则该定理在 $k[X]$，从而 $k[X_1, \cdots, X_m]$ 中也同样成立. 这时，所有系数的最大公约数是 1 的多项式称为**本原多项式** (primitive polynomial). k 上的每个多项式可以唯一地表示成 k 中的一个元与某个本原多项式的乘积. 本原多项式的乘积仍是本原多项式 (Gauss 定理).

若 k 是域，则在 $k[X]$ 与 $k[X_1, \cdots, X_m]$ 中可以唯一地进行素因子分解. 特别是，为了求 $k[X] \ni f, g$ 的最大公因子 (f, g)，可用 **Euclid 辗转相除法** (Euclidean algorithm)，即反复应用除法定理:

$$f=gq_1+r_1, \quad g=r_1q_2+r_2,$$

$$r_1=r_2q_3+r_3, \cdots,$$

$$\deg g > \deg r_1 > \deg r_2 > \cdots.$$

经过有限次后，得 $r_{\nu-1}=r_\nu q_{\nu+1}$ ($r_{\nu+1}=0$). 这个 r_ν 就是 (f, g). 因而 $k[X]$ 是主理想环†.

【剩余定理】 设 k 是整环，$f(X) \in k[X]$，$g(X)=X-\alpha$ ($\alpha \in k$)，则有

$$f(X)=(X-\alpha)q(X)+r,$$

$$q(X) \in k[X], \quad r \in k.$$

从而有 $f(\alpha)=r$，即 $f(X)$ 除以 $X-\alpha$ 的剩余等于 $f(\alpha)$. 这称为**剩余定理** (remainder theorem). 若 $f(\alpha)=0$，则 $f(X)$ 在 $k[X]$ 中能被 $X-\alpha$ 整除.

【不可约多项式】 当 n 次多项式 f 有 ν 次 ($n>\nu>0$) 因式时，f 称为**可约的** (reducible)，否则称为**不可约的** (irreducible). 一次多项式是不可约的. 若 k 是域，则 f 是 $k[X]$ 中的素元与 f 是不可约多项式等价. 在有理数域上，一元多项式 (1) 在下面的条件下是不可约的 (**Eisenstein 定理**): 对于一个素数 p，有 $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$，$a_0 \equiv a_1 \equiv \cdots \equiv a_{n-1} \equiv 0 \pmod p$，$a_n \not\equiv 0 \pmod p$. 又若代数数域 k 上的 m 元多项式 (2) 是不可约的，则在 F 中给 $X_{\mu+1}, \cdots, X_m$ (μ 是满足 $0<\mu<m$ 的任意自然数) 以 k 中的适当的值，能使所得到的 μ 元多项式是不可约的 (**Hilbert 不可约性定理** (Hilbert's irreducibility theorem, J. Reine Angew. Math., **110** (1892)). 这类 Eisenstein 定理与 Hilbert 不可约性定理有种种推广与精确化. 例如关于素域† 上有限生成的† 无限域，Hilbert 不可约性定理成立 (K. Dörge, W. Franz, 稻葉栄次).

【微分】 给定域 k 上的多项式

$$f(X_1, \cdots, X_m)=\sum a_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_m} X_1^{\nu_1} X_2^{\nu_2} \cdots X_m^{\nu_m},$$

则此多项式关于 X_i 的（形式）**微分** (derivation) 是指多项式

$$f_i(X_1, \cdots, X_m)=\sum \nu_i a_{\nu_1\cdots\nu_m} X_1^{\nu_1} \cdots X_i^{\nu_i-1} \cdots X_m^{\nu_m},$$

以 $\dfrac{\partial f}{\partial X_i}$ 来表示. 特别是，在 $m=1$ 的情形，以 $\dfrac{df}{dX}$ 来表示. 通常的微分运算法则对于形式微分也成立. 对于 $k[X]$ 中的不可约多项式 $f(X)$，

依条件 $\frac{df}{dX}=0$ 成立或不成立，分别称 $f(X)$ 为**不可分的**(inseparable)或**可分的**(separable)．若域 k 的特征为 0，则 $f(X)(\neq 0)$ 是可分的．当 k 的特征为 p 时，$f(X)$ 是不可分的充分必要条件是 $f(X)=g(X^p)$．

【有理式】 域 k 上的多项式环 $k[X_1,\cdots,X_n]$ 的商域†记作 $k(X_1,\cdots,X_n)$，称为 k 上变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的**有理式域**(field of rational expressions)或**有理函数域**(field of rational functions)．属于它的元称为变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**有理式**(rational expression)，它可以表示成 $X_1,\cdots,X_n$ 的两个多项式 $f(X_1,\cdots,X_n)$，$g(X_1,\cdots,X_n)\neq 0$ 的商．又以 k 的元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 代换 $X_1,\cdots,X_n$ 作成的 $\frac{f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}{g(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}$ (但设分母不为 0)，称为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的有理式．

【对称多项式与交代多项式】 对于整环 k 上变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的多项式 $f(X_1,\cdots,X_n)$，若将变量 $X_1,\cdots,X_n$ 以所有的方式改变顺序所得到的式子都相同，则称 f 为 $X_1,\cdots,X_n$ 的**对称多项式**(symmetric function or symmetric polynomial)．如果以所有的方式改变变量的顺序时，只能得到两个不同的式子，而不能得到其他不同的式子，则称 f 为**交代多项式**(alternating function or alternating polynomial)．对于 $X_1,\cdots,X_n$ 的对称多项式(交代多项式) $f(X_1,\cdots,X_n)$，以 k 的元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 代换 $X_1,\cdots,X_n$ 而得到的 $f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，称为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的对称多项式(交代多项式)．

设在展开 $(X-X_1)\cdots(X-X_n)$ 后所得的 X 的多项式中，X^{n-k} 的系数是 $(-1)^k\sigma_k$，则有 $\sigma_1=\Sigma X_i=X_1+X_2+\cdots+X_n$，$\sigma_2=\Sigma X_iX_j=X_1X_2+X_1X_3+\cdots+X_{n-1}X_n,\cdots,\sigma_n=X_1X_2\cdots X_n$．很明显，它们都是 $X_1,\cdots,X_n$ 的对称多项式．若 φ 是 n 元多项式环 $k[Y_1,\cdots,Y_n]$ 的元，则 $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 也是 $X_1,\cdots,X_n$ 的对称多项式．反之，$X_1,\cdots,X_n$ 的任意对称多项式可以唯一地表示成 $\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)$ 的形式，即 $X_1,\cdots,X_n$ 的对称多项式的全体无非就是 $k[\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n]$．这称为**对称多项式的基本定理**(fundamental theorem on symmetric polynomials)，$\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**基本对称多项式**(fundamental symmetric polynomials or fundamental symmetric functions)．例如，设 $s_\nu=\Sigma X_i^\nu$，则有 $s_1=\sigma_1$，$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$，$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$，$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$．基本对称多项式与 s_ν 之间有下面的关系：$s_\nu-\sigma_1s_{\nu-1}+\sigma_2s_{\nu-2}-\cdots+(-1)^{\nu-1}\sigma_{\nu-1}s_1+(-1)^\nu\nu\sigma_\nu=0\ (\nu=1,2,\cdots,n)$，$s_\mu-\sigma_1s_{\mu-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{\mu-n}=0\ (\mu=n+1,n+2,\cdots)$ (**Newton 公式**)．

对 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个差的积 $(X_2-X_1)(X_3-X_1)\cdots(X_n-X_1)(X_3-X_2)\cdots(X_n-X_{n-1})=p(X_1,\cdots,X_n)$，施以 $X_1,\cdots,X_n$ 的偶置换不变，施以奇置换变为 $-p$，所以它是 $X_1,\cdots,X_n$ 的交代多项式．p 称为这些变量的**最简交代多项式**(simplest alternating polynomial)．一般地，若 f 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的任意交代多项式，则这些变量的偶置换使 f 变为它本身，奇置换使 f 变为一个值 f^*．当 $f^*=-f$ 时称为**狭义交代多项式**(alternating polynomial in the restricted sense)．如果 k 的商域的特征不等于 2，则狭义交代多项式 f 被最简交代多项式 p 所整除，若记成 $f=ps$，则 s 是对称多项式．一般地，设 $f+f^*=g$，$f-f^*=h$，则 g 是对称多项式，h 是狭义交代多项式，且可写成 ps 的形式，于是 $f=(g+ps)/2$ (g，s 是 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 的对称多项式)．

【判别式】 最简交代多项式的平方 $p^2=D$ 是对称多项式，因此成为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ 的多项式．$D=0$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 中有某些相等的判定条件．若 $x_1,\cdots,x_n$ 是 n 次代数方程† $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根，则 D 称为这个代数方程的**判别式**(discriminant)．判别式可由方程的系数表示．例如，若 $n=2$，则 $a_0^2D=a_1^2-4a_0a_2$，若 $n=3$，则 $a_0^4D=a_1^2a_2^2+18a_0a_1a_2a_3-4a_0a_2^3-4a_1^3a_3-27a_0^2a_3^2$．

【参】 [1] 高木貞治，代数学講義，共立出版，修訂版

1965; [2]藤原松三郎，代数学 I，内田老鶴圃，1928；[3] B. L. van der Waerden, Algebra I, Springer, 第四版，1955（中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学 I，科学出版社，1963）；[4] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 4, Actualités Sci. Ind., 1102b, Hermann, 第二版，1959；[5] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1959（中译本：А. Г. 库洛什，高等代数教程，人民教育出版社，1962）；[6] R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann, 1963. 关于 Hilbert 不可约性定理，[7] S. Lang, Diophantine geometry, John Wiley, 1962.

代数方程 [英 algebraic equation 法 équation algébrique 德 algebraische Gleichung 俄 алгебраическое уравнение 日 代数方程式] 【一般情形】 设 $F_1(X_1,\cdots,X_m),\cdots,F_r(X_1,\cdots,X_m)$ 为域† k 上 m 个变量 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 的 r 个多项式†. 方程 $F_1=0,\cdots,F_r=0$ 称为 k 上的 ***m* 元代数方程** (algebraic equations with m unknowns). 当 $r\geqslant 2$ 时，它们称为 r 个方程的**方程组** (system of equations) 或**联立方程** (simultaneous equations). 多项式 $F_1,\cdots,F_r$ 的系数称为此方程组的**系数**(coefficient)，$F_1,\cdots,F_r$ 的次数中的最大者称为方程组的**次数**(degree).

解代数方程，无非是求多项式环† $k[X_1,\cdots,X_m]$ 中多项式 $F_1,\cdots,F_r$ 的（在一个包含 k 的代数闭域†中的）公共零点†. 不存在零点时，方程组称为**不相容的** (inconsistent)；只存在有限个零点时，称为**正则的** (regular)；存在无限个零点时，称为**不定的** (indeterminate). 对于不定方程（在本条中，以下代数方程简称为方程），若在 $X_1,\cdots,X_m$ 中适当地确定 d 个 $X_{\nu_1},\cdots,X_{\nu_d}$ $(1\leqslant d\leqslant m)$ 的值，即设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d$ 是 k 中适当的元，把方程 $X_{\nu_1}-\alpha_1=0,\cdots,X_{\nu_d}-\alpha_d=0$ 加到原方程组上，则方程组即化为正则的. 正则方程可用消去法†归结为 $m=r=1$ 的情形.

【一元方程】 由上面的理由，形如 $f(X)=0$ 的方程是重要的方程，其中

(1) $\quad f(X)=a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_n.$

若 $a_0\neq 0$，则 (1) 就给出了一元 n 次方程的一般形式.

按照 $f(X)$ 在多项式环 $k[X]$ 中是不可约的或可约的(→多项式)，方程 $f(X)=0$ 也称为**不可约的** (irreducible) 或**可约的** (reducible). 在 k 的某一代数扩域 K 中，$f(X)$ 可分解成

(2) $\quad f(X)=a_0(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n).$

因而 n 次代数方程有 n 个根 (Kronecker 定理). $(-1)^i a_i/a_0$ 等于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的 i 次基本对称多项式†. 这些根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中也可能有相等的. α 在 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中出现 ρ 回时，称 α 为(1)的 ***ρ* 重根** (ρ-ple root)，而 ρ 称为 α 的**重数** (multiplicity). 若 $\rho=1$，则 α 称为**单根** (simple root)；若 $\rho\geqslant 2$，则称为**重根**(multiple root). 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中所有互异的根是 $\beta_1,\cdots,\beta_\nu$，且 β_i 的重数是 ρ_i，则(2)也可表示为

(2′) $\quad f(X)=a_0(X-\beta_1)^{\rho_1}\cdots(X-\beta_\nu)^{\rho_\nu},$

$$\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_\nu=n.$$

如果 $\rho_1,\cdots,\rho_\nu$ 不能被 k 的特征†整除，则 f 与 $f'=na_0X^{n-1}+(n-1)a_1X^{n-2}+\cdots+a_{n-1}$ 的最大公因子 g 是 $(X-\beta_1)^{\rho_1-1}\cdots(X-\beta_\nu)^{\rho_\nu-1}$. 所以用 g 来除 f，就可把重数化简为 1. 在特征为 0 的域中，不可约方程无重根. 方程(1)有无重根，由它的判别式† D 是否为 0 来判定（→Galois 理论，域）.

【特殊方程】 假定域 k 的特征为 0. 1) 二项方程. 形如 $X^m-a=0$ 的方程称为**二项方程** (binomial equation). 这种方程可用**开方** (extraction of root)运算来求解. 若以 $\sqrt[m]{a}$ (a 的 m 次根)表示诸根之一(a 是正实数时，$\sqrt[m]{a}$ 通常表示正实根)，则 $\sqrt[m]{a}$ 乘以 $1,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{m-1}$ 后，就得到 $X^m-a=0$ 的 m 个根，这里 ζ 是一个 m 次本原单位根.

2) 互反方程. 在方程 $a_0X^n+a_1X^{n-1}+\cdots+a_{n-1}X+a_n=0$ 中，如果 $a_0=a_n, a_1=a_{n-1},\cdots$，则这个方程称为**互反方程** (reciprocal equation). 若 $n=2m+1$，则 $X=-1$ 是它的一个根. 左端除以 $X+1$，就得到一个 $2m$ 次的互反方程. 若 $n=2m$，则解这个方程归结为解关于 $Y=X+X^{-1}$ 的一个 m 次方程与关于 X 的二次方程 $X^2-XY+1=0$.

【次数较低的方程】 仍然假定域 k 的特征为 0. (→公式 1) 1) 一次方程 $a_0X+a_1=0$ 的根是 $(-a_1)/a_0$. 2) 二次方程 $a_0X^2+a_1X+a_2=0$ 的根是 $(-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2})/2a_0$. 3) 为

了解三次方程 $a_0X^3+a_1X^2+a_2X+a_3=0$，我们令 $A_1=9a_0a_1a_2-2a_1^3-27a_0^2a_3$，$A_2=a_1^2-3a_0a_2$，并设 $T^2-A_1T+A_2=0$ 的两个根是 t_1, t_2。若取 ω 为 1 的任一立方根，则 $(-a_1+\omega\sqrt[3]{t_1}+\omega^2\sqrt[3]{t_2})/3a_0$ 就是原方程的根 (**Cardano 公式**)。用这个方法来解实系数三次方程 $aX^3+bX^2+cX+d=0$ 时，纵然三个根都是实数，仍然必须利用复数的立方根。也曾尝试求一个在实数范围内的代数解法，但其后证明这是不可能的。这就是说，如果上述方程在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的扩域 $\boldsymbol{Q}(a, b, c, d)$ 上是不可约的，而且它有三个实根，那么，仅用四则运算与实根式来求这个方程的根是不可能的，因而这种情形称为**不可约情形** (拉 casus irreducibilis)。4) 四次方程 $a_0X^4+a_1X^3+a_2X^2+a_3X+a_4=0$ 可以归结为解三次方程(L. Ferrari) (→公式 1)。这样地通过对方程的系数施行有限次四则运算与开方运算表示出它的根，称为方程的**代数解法** (algebraic solution)。五次以上的方程一般没有代数解法 (N. H. Abel) (→Galois 理论)。

【解析理论】 下面设 k 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$。对于这种情形，由于实用上的需要，很早以前就已进行了研究。

$k=\boldsymbol{C}$ 的情形。$\boldsymbol{C}$ 是代数闭域† (**Gauss 定理**)，即具有(实系数或)复系数的方程必有复根。关于方程的根存在的 Gauss 定理常常称为**代数基本定理** (fundamental theorem of algebra)。因而在 $\boldsymbol{C}$ 中(2)与(2')成立。

设(1)的 n 个根(重根重复列出)是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，则每个 α_i 都是方程的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的连续函数。关于 $f(X)=0, f'(X)=0$ 的根在复平面上的位置，有下面的定理。

1) 复平面上包含 $f=0$ 的所有的根的凸多边形，也包含 $f'=0$ 的所有的根 (C. F. Gauss)。

2) 若 C 是复平面上的一条不通过 $f=0$ 的根的可求长 Jordan 曲线†，则在 C 的内部，$f=0$ 的根的个数 (C, f) 等于 $\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ (重根的个数以其重数计算，以下同)。

3) 若在复平面上的 Jordan 曲线 C 上的每一点 z，总有 $|f(z)|>|g(z)|$，则 $f=0$ 与 $f+g=0$ 在 C 的内部有相同数目的根(**Rouché 定理**)。

4) 方程(1)的根的绝对值不超过 $\max(|a_1/a_0|, \cdots, |a_n/a_0|)+1=M$。

5) 设 D 是 f 的判别式†，$|\alpha_i|\leqslant M(i=1, \cdots, n)$，则 $|\alpha_i-\alpha_j|^2\geqslant |D|/(2M)^{n(n-1)-2}=E$。因为由 f 可以知道 $|D|$，又由 4) 可得到 M 的一个值，所以也可以算出 E。用直径 $\leqslant\sqrt{E}/2$ 的网络来覆盖复平面上以原点为圆心、以 M 为半径的圆，若设各个网络的边界是 $C_1, \cdots, C_N$，则在 C_i 的内部 $f=0$ 最多只有一个根。

若 $k=\boldsymbol{R}$，即若 $f\in\boldsymbol{R}[X]$，假定(2')的 $\beta_1, \cdots, \beta_\nu$ 中，$\beta_1, \cdots, \beta_\lambda\in\boldsymbol{R}$，而其余的 $\notin\boldsymbol{R}$，则 $\nu-\lambda=2\kappa$ 是偶数，且可把 $\beta_{\lambda+1}, \cdots, \beta_\nu$ 适当地改排，使得 $\bar\beta_{\lambda+1}=\beta_{\lambda+\kappa+1}, \cdots, \bar\beta_{\lambda+\kappa}=\beta_\nu$ ($\bar\beta$ 是 β 的共轭复数)，且 $\rho_{\lambda+1}=\rho_{\lambda+\kappa+1}, \cdots, \rho_{\lambda+\kappa}=\rho_\nu$。此时，$\beta_1, \cdots, \beta_\lambda$ 称为(2)的**实根** (real root)，其余的称为**虚根** (imaginary root)。

6) 若 $f\in\boldsymbol{R}[X]$，$a_0>a_1>\cdots>a_n$，则(1) 的根的绝对值小于 1 (掛谷宗一 -Eneström 定理)。

当 $f\in\boldsymbol{R}[X]$ 时，关于 $f=0$ 的实根有下面的定理：设 $a, b\in\boldsymbol{R}$，以 $N(a, b)$ 表示区间 (a, b) 中 $f=0$ 的实根的个数。对于有限个实数的序列 $c_1, c_2, \cdots, c_p$，令去掉其中 $c_i=0$ 的项后所得到的序列为 $c_{\nu_1}, \cdots, c_{\nu_q}$。以 $V(c_1, c_2, \cdots, c_p)$ 表示序列 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 中的**变号** (德 Zeichenwechsel)的个数，则

$$V(c_1, c_2, \cdots, c_p)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q-1}(1-\operatorname{sgn}c_{\nu_j}c_{\nu_{j+1}}).$$

7) $N(0, \infty)\equiv V(a_0, a_1, \cdots, a_n) \pmod 2$，而且 $N\leqslant V$ (**Descartes 定理**)。

8) 设 $V(f(c), f'(c), \cdots, f^{(n)}(c))=V(c)$，则 $N(a, b)\equiv V(a)-V(b) \pmod 2$，而且 $N\leqslant V(a)-V(b)$ (**Fourier 定理**)。

9) 假定 $f=0$ 已去掉了重根，再由 $f=f_0$，

$f' = f_1$，应用除法定理†构成 $\boldsymbol{R}[X]$ 的元的序列 $f_0, f_1, \cdots, f_l$，使得 $f_{i-1} = f_i q_i - f_{i+1}(i = 1, 2, \cdots, l-1, f_l \in \boldsymbol{R})$，令 $V(c) = V(f_0(c), f_1(c), \cdots, f_l(c))$． 于是 $N(a, b) = V(a) - V(b)$ (**Sturm 定理**)．由这条定理,我们可以任意精确地求出实根的位置．

10) 当 $a_0 > 0$ 时，$f = 0$ 的根全部在虚轴的左侧，即 $\Re\alpha_i < 0$ 的充分必要条件是：取下列矩阵的前 r 行 r 列所得的主子行列式† ($r = 1, 2, \cdots, n$)全部为正 (A. Hurwitz)：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \cdots\cdots\cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \cdots\cdots\cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \cdots\cdots\cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \cdots\cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a_{n-2} \quad a_n \end{pmatrix}.$$

在 $f \in \boldsymbol{C}[X]$ 的情形,关于它的根在给定直线的一侧,或在给定圆(例如,单位圆等)的内部的条件，已经得到各种结果 (→ 代数方程的数值解法)．

【参】 [1] 藤原松三郎,代数学 I, 内田老鶴圃, 1928; [2] 高木貞治,代数学講義,共立出版,修订版 1965; [3] 守屋美賀雄,方程式,至文堂, 1964; [4] L. E. Dickson, Elementary theory of equations, John Wiley, 1914; [5] J. Dieudonné, La théorie analytique des polynômes, Mém. Sci. Math., Fasc. 93, Gauthier-Villars, 1938; [6] M. Marden, The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable. Amer. Math. Soc., 1949; [7] W. Specht, Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten, Teubner, 1958; [8] A. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1959 (中译本: A. Г. 库洛什,高等代数教程,人民教育出版社, 1962); [9] M. M. Постников, Теория Галуа, Физматгиз, 1960 (英译本: M. M. Postnikov, Foundations of Galois theory, Pergamon, 1962.

域 [英 field 法 corps 德 Körper 俄 поле 日 体] 【域的定义】 若在至少含有两个元的集合K中,可以定义两种运算(加法与乘法),且满足下面的公理 1), 2), 3)，则称 K 为**域**：1)对于K的任意两个元 a, b，定义了它们的和 $a + b$，且加法的结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$ 与交换律 $a + b = b + a$ 都成立；对于任意的 $a, b \in K$，满足 $a + x = b$ 的 $x \in K$ 是唯一存在的．即对于加法来说，K 构成一个 Abel 群†．这个加法群†的单位元†以 0 表示,称为K的**零元** (zero element, neutral element)．2) 对于 K 的任意两个元 a, b，定义了它们的积 ab；且乘法的结合律 $(ab)c = a(bc)$ 与交换律 $ab = ba$ 成立；对于任意的 $a, b \in K$(但 $a \neq 0$)，满足 $ax = b$ 的 $x \in K$ 是唯一存在的．因而由K中除去 0 所得的集合关于乘法构成一个 Abel 群 K^*．K^* 称为K的**乘法群** (multiplicative group)．K^* 的单位元以 1 表示,称为K的**单位元**(unit element, identity element)．3) 加法、乘法之间的分配律 $a(b + c) = ab + ac$ 成立．换言之,域是其非零元关于乘法构成群的交换环†．

其非零元关于乘法构成群的非交换环，称为**非交换域** (non-commutative field)．域与非交换域统称为域．上面定义的域(即K^*构成 Abel 群的域) 有时特别称为**交换域** (commutative field)．在本条中,当考虑的域包括非交换域时,记作(**非交换**)**域**或**可除环**．**体** (英 sfield 德 Schiefkörper)这个词用来既表示非交换域又表示(非交换) 域,多数情况指的是后一种意义．关于(非交换)域→代数．

【一般性质】 由于域是交换环，所以在一般交换环中成立的事实,例如对任意 a, b, $a0 = 0a = 0$, $(-a)b = a(-b) = -ab$ 等,当然在域中也成立．若域K 的子环† k 构成域,则称 k 是 K 的**子域** (subfield)，K 是 k 的**扩(张)域** (overfield, extension field)．如果除了K本身以外,域 K 没有其他的子域,则K 称为**素域**(prime field)．

若由域K 到域 K' 上的映射 f 是环的同态，即满足 $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$,则称 f 为域的同态．因为域作为环来说是单† 的,所以域的同态映射 f，除非对于一切 a 都有 $f(a) = 0$，总是一个单射．从K到K'上的同态如果是双射,则称为**同构** (isomorphism)，此时，称K与 K' 是**同构的** (isomorphic)．域K到其自身上的同构,称为K的**自同构** (automorphism)．诸如此类的概念均以一般代数系†为准．

若存在一个自然数 n，使域K 的 n 个单位元 1 的和 $n1$ 为 0，那末，这样的 n 中的最小素

数 p 称为K的**特征**(characteristic). 如果对于任何自然数 n 都不能有 $n1=0$, 则称K的特征为0.

【域的例子】 全部有理数构成有理数域 $\boldsymbol{Q}$, 全部实数构成实数域 $\boldsymbol{R}$, 全部复数构成复数域 $\boldsymbol{C}$, 这些都是特征为0的域. 复数域的子域称为**数域** (number field). 有理数域是素域, 特征为0的素域与有理数域同构. 在全部有理整数构成的环 $\boldsymbol{Z}$ 中, 以素数 p 为模的同余类的全体 $\boldsymbol{Z}_p\{0, 1, 2, \cdots, p-1(\bmod p)\}$, 构成特征为 p 的素域, 称为 p 的**剩余类域** (residue class field). 特征为 p 的素域都与 $\boldsymbol{Z}_p$ 同构. 只含有限个元的域称为**有限域** (finite field).

【域的扩张】 由域 k 得出扩张域 K, 称为把 k **扩张** (extend) 到K. K的包含 k 的子域称为 k 与K的**中间域** (intermediate field). 常用记号 K/k 来表示K是 k 的扩张. 在两个域 K_1/k_1, K_2/k_2 中, 如果 K_1 与 K_2 之间的同构对应 φ 导出 k_1 与 k_2 之间的同构对应 ψ, 则 φ 称为 ψ 的**扩张** (extension). 给定两个域 k_1, K_2, 当 K_2 包含与 k_1 同构的子域 k_2 时, k_1 有与 K_2 同构的扩域 K_1, 而且存在 K_1 与 K_2 之间的同构对应 φ, 它成为给定的 k_1 与 k_2 之间的同构对应 ψ 的扩张. 构成这样的域 K_1, 常常称为把 k_1 嵌入 K_2. 特别是, 当 k 的两个扩域 K_1, K_2 同构, 且 k 的元自身对应时, 称 K_1 与 K_2 为 **k 同构的** (k-isomorphic).

在 K/k 中, 设 S 是 k 的任意子集. K/k 的包含S的最小中间域 L 称为在 k 上**添加** (adjoin) S 所构成的域, 以 $k(S)$ 表示. $k(S)$ 是以 k 的元为系数的、S 的任意有限个元的有理式的全体. 特别是, 只有一个元 t 添加于 k 所构成的域 $k(t)$, 称为 k 的**单扩张** (simple extension), t 称为 $k(t)$ 的**本原元**(primitive element). 以 k 的元为系数的有理函数域 $k(X)$, 可看成是以 X 为本原元的 k 的单扩张.

当给定域K的子域 $k_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 时, 包含所有这些子域的最小域 L 是确定的. 域 L 称为 $\{k_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 的**合成域** (composite field).

【代数扩张, 超越扩张】 对于域 k 的扩域 K 的元 α, 如果存在以 k 的元为系数的某个非零多项式 $f(X)$, 使 $f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n$ 等于0, 则 α 称为 k 上的**代数元** (algebraic element), 否则 α 称为 k 上的**超越元** (transcendental element). 代数元 α 总是多项式环† $k[X]$ 中某一不可约多项式 $f(X)$ 的根, 如果不考虑 k 的元的因子 ($\neq 0$), 则这个不可约多项式对于 α 是唯一确定的. 上述 $f(X)$ 称为 α 在 k 上的**最小多项式** (minimal polynomial). 若K的元都是 k 上的代数元, 则称域K是 k 的**代数扩张** (algebraic extension), 否则称域K是 k 的**超越扩张** (transcendental extension). 若 K_1 是K的代数扩张, K是 k 的代数扩张, 则 K_1 也是 k 的代数扩张. 在域 k 的扩域K中, 所有 k 上的代数元构成 k 的一个代数扩域. 若 t 是 k 上的超越元, 则单扩张 $k(t)$ 与以 k 的元为系数的单变量X的有理函数域是 k 同构的. 若 t 是 k 上的代数元, 则 $k(t)$ 与以 $f(X)$ 为模的多项式环 $k[X]$ 的剩余类域†是 k 同构的, 这里 $f(X)$ 是 t 在 k 上的最小多项式.

【有限扩张】 域 k 的扩域K称为 k 的**有限扩张** (finite extension), 如果K中的元的任何无限集都不能在 k 上线性无关†, 即K是 k 上的有限维线性空间†. 它的维数称为K关于 k 的**次数** (degree), 记作 $(K:k)$ 或 $[K:k]$. 若域K是域 k 的有限扩张, 域 L 是域 K 的有限扩张, 则 L 也是 k 的有限扩张, 且 $(L:K)(K:k)=(L:k)$. 域 k 的每个有限扩张都是 k 的代数扩张, 而且是在 k 中添加有限个代数元而得到的. 反过来, 在 k 中添加有限个代数元而得到的域是 k 的有限扩张. 特别是, 若域K是 k 的单代数扩张 $k(\alpha)$, 则 α 在 k 上的最小多项式的次数等于 $k(\alpha)$ 关于 k 的次数, 也称它为 α 关于 k 的**次数**(degree). 域 $k(\alpha)$ 的任何元都可以表示成一个以 k 的元为系数的 α 的多项式. 另一方面, 对于 $k[X]$ 的任一不等于常数的多项式 $f(X)$, 存在 k 的一个单代数扩张 $k(\alpha)$, 使得 α 是 $f(X)=0$ 的一个根.

【正规扩张】 域 k 的代数扩张K称为 k 的**正规扩张**(normal extension), 如果 $k[X]$ 的在K

中具有一个根的任何不可约多项式总是能够分解成 $K[X]$ 中的线性因式的积. 域 k 的一个代数扩域 K 称为多项式 $f(X)\in k[X]$ 的**最小分裂域**(英 splitting field 德 Zerfällungskörper), 如果 $f(X)=(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_n)$,而 $K=k(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 即 $f(X)$ 的最小分裂域 K 是把 $f(X)$ 的全部根添加到 k 上而得到的域. 域 k 上某一多项式的最小分裂域是 k 的有限正规扩张,反之,k 的有限正规扩张是某一多项式 $f(X)\in k[X]$ 的最小分裂域. 对于任意给定的多项式 $f(X)\in k[X]$, 在 k 的扩域中必存在 $f(X)$ 的最小分裂域,而且 $f(X)$ 的所有最小分裂域都是 k 同构的.

【可分扩张, 不可分扩张】 根据域 k 上的代数元 α 在 k 上的最小多项式 $f(X)$ 是可分的† 或不可分的†, α 分别称为 k 上的**可分元** (separable element)或**不可分元**(inseparable element).若 k 的代数扩张 K 的所有元都是 k 上的可分元, 则称域 K 是 k 的**可分扩张**(separable extension), 否则称为**不可分扩张**(inseparable extension). 元 α 是 k 上的可分元, 当且仅当 α 在 k 上的最小多项式 $f(X)$ 在其分裂域 K 中无重根. 若 α 是 k 上的不可分元, 则 α 的 n 次最小多项式在其分裂域 K 中具有 $f(X)=f_0(X)^{p^r}$ 的形式, 而 $f_0(X)=(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_m)(\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 是 K 中互异的元). 此处 p (素数) 是 k 的特征. 在 $f(X)$ 的次数 n 与互异的根的个数 m 之间有关系式 $n=mp^r(r\geqslant 1)$. 当 $m=1$ 时, α 称为 k 上的**纯不可分元** (purely inseparable element). 如果 k 的一个代数扩张中, 所有不属于 k 的元都是 k 上的纯不可分元, 则 k 的这个代数扩张称为**纯不可分扩张**(purely inseparable extension). 在 k 的代数扩张 K 中, k 上的全体可分元的集合 K_0 是 k 与 K 的中间域,称它为 K 中 k 的**最大可分域** (maximal separable field). 若 $K\neq K_0$, 则 k 的特征是素数 p; 这时, K 是 K_0 的纯不可分扩张. 域 k 的可分扩张的可分扩张也是 k 的可分扩张;而 k 的有限可分扩张是 k 的单扩张.

当 $k[X]$ 中不存在不可分的不可约多项式时, k 称为**完全域** (perfect field).否则 k 称为**不完全域** (imperfect field). 特征为 0 的域都是完全域;特征为 p (素数)的域 k 是完全域,当且仅当对于任意元 $a\in k$, 多项式 X^p-a 在 k 内必有一个根.完全域的代数扩张都是可分扩张.不完全域则存在不可分扩张. 有限域是完全域.

【代数闭域】 设 k 是域. 若 $k[X]$ 中每一个不为常数的多项式都可分解成 $k[X]$ 中线性式的积, 即若 $k[X]$ 中只有线性式才是不可约多项式, 则称 k 为**代数闭域** (algebraically closed field). 若 k 是代数闭域,则不存在 k 的(除 k 本身以外的)代数扩张. 代数闭域显然是完全域. 对于任意域 k, 总存在 k 的代数扩张 K,它构成代数闭域. 这些代数闭域是相互 k 同构的, 因而可看成唯一的 (E. Steinitz). 这个域称为 k 的**代数闭包** (algebraic closure). 当给定域 k 及其扩张域 K 时, 若 K 中所有 k 上的代数元都属于 k, 即若 k 的代数闭包与 K 的交是 k, 则称 k 在 K 中是代数封闭的. 复数域是代数闭域 (C. F. Gauss). 这就是"代数学基本定理"(→代数方程).

【共轭】 若 k 的扩张域 K 的两个元 α,β 都是 k 上的代数元,且是 $k[X]$ 中同一个不可约多项式 $f(X)$ 的根 (即二者在 k 上的最小多项式相同), 则称 α,β 是 k 上的**共轭** (conjugate) **元**. 此时,称 K 的子域 $k(\alpha)$, $k(\beta)$ 是 k 上的**共轭域**. $k(\alpha)$ 与 $k(\beta)$ 在使得 $\sigma(\alpha)=\beta$ 的对应 σ 下是 k 同构的. 特别是, 若 K 是 k 的正规扩张,则 K 的元 α 的共轭元的个数 n, 在 α 是 k 上的可分元的情形下, 等于 α 的最小多项式的次数.一般地说, α 的最小多项式 $f(X)$ 在 $K[X]$ 中可分解成 $f(X)=((X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\cdots(X-\alpha_m))^{p^r}$, $n=mp^r$, $\alpha=\alpha_1$ 的共轭元的个数是 m. 对于 α 来说, m, p^r 是唯一确定的,与 k 的含 α 的正规扩张 K 的取法无关. $k(\alpha)$ 是 k 的正规扩张的充分必要条件为: $k(\alpha)$ 与它的全部共轭域相重合.

设 α 是 k 上的可分代数元, α 在 k 上的共轭元是 $\alpha_1=\alpha,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 则它们的积 $A=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 与它们的和 $B=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 属于 k. 若 α 在 k 上的最小多项式是 $f(X)=$

$X^n + c_1X^{n-1} + \cdots + c_n$，则 $A = (-1)^n c_n$，$B = -c_1$. A, B 分别称为元 α 在 k 上的**范数**(norm)与**迹**(英 trace 德 Spur)，以 $A = N(\alpha)$，$B = Tr(\alpha)$ 表示. 对于 k 的有限可分扩张 K，当 $(K:k) = n$，K 的元 α 的最小多项式的次数是 m, $n = mr$ 时，就把 α 关于 K/k 的范数定义为 $N_{K/k}(\alpha) = N(\alpha)^r$，把 α 关于 K/k 的迹定义为 $Tr_{K/k}(\alpha) = rTr(\alpha)$. 对于 $\alpha, \beta \in K$，等式 $N_{K/k}(\alpha\beta) = N_{K/k}(\alpha) \cdot N_{K/k}(\beta)$，$Tr_{K/k}(\alpha+\beta) = Tr_{K/k}(\alpha) + Tr_{K/k}(\beta)$ 成立. 关于代数扩张的 Galois 理论→ Galois 理论.

【超越扩张】 设K是k的一般扩域，而$u_1, \cdots, u_r$ 是K的元. 域K的元v称为与 $u_1, u_2, \cdots, u_r$ 在 k 上**代数相关**(algebraically dependent)，如果 v 是 $k(u_1, \cdots, u_r)$ 上的代数元. 域K的子集S称为在 k 上**代数无关** (algebraically independent)，如果任意的 $u \in S$ 都不与 S 中任何其他的有限个元 $u_1, \cdots, u_r$ 代数相关. K的子集 S 称为 k 上的**代数无关基**(algebraically independent basis) 或**超越基** (transcendence basis)，如果 S 在 k 上是代数无关的，且 K 是 $k(S)$ 的代数扩张. 当K是 k 的扩域时，它在 k 上的代数无关基 S 必定存在，而且集合 S 的基数†仅由K，k 唯一确定. 这个基数称为K在 k 上的**超越次数** (degree of transcendency)（当 S 是无限集时，有时也简单地说它的超越次数是无穷大）. 特别是，当 $K = k(S)$ 时，域K称为 k 的**纯超越扩张** (purely transcendental extension).

设K是 k 的扩域，如果 K/k 的任何有限生成的中间域都具有一个 k 上的可分超越基，则 K 称为 k 的一个**可分生成扩张** (separably generated extension). 如果K本身具有一个 k 上的可分超越基，则K是可分生成的，但反之则不然.

若K是 k 的超越次数为 n 的纯超越扩张，L是K的有限(可分)扩张，则域K称为 k 的 **n 变量有理函数域** (rational function field in n variables)，L 称为 k 的 **n 变量代数函数域** (algebraic function field in n variables).

其次，设 k 是域K和L的公共子域，且K的在 k 上线性无关的任何子集在L上也都线性无关，那么，L的在 k 上线性无关的任何子集在K上也都线性无关，这时，称K与L为在 k 上**线性无关联的**或**线性不相交的** (linearly disjoint). 当域 k 的扩域 $K = k(x_1, \cdots, x_n)$ 与 $\bar{k}$ 的代数闭包 $\bar{k}$ 在 k 上线性不相交时，则称K关于 k 是**正则的** (regular)，又称K是 k 的**正则扩张** (regular extension). $k(x)$关于 k 是正则的充分必要条件是：k 在 $k(x)$ 中是代数封闭的，而且 $k(x)$ 是 k 的可分生成扩张.

【微分】 当域K到其自身的映射 D 满足 $D(a+b) = D(a)+D(b)$ 与 $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ $(a, b \in K)$时，D 称为**微分**(derivation). 满足 $D(c) = 0$ 的一切 c 构成一个子域. 设它是 k，则称D为域 k 上的微分. 在特征为 p 的域上，对于任意元 x，有 $D(x^p) = 0$. k 上的全体微分构成一个 k 模†. 若 k 的扩张域 $K = k(x_1, \cdots, x_n)$ 的 (k 上的)微分构成的线性空间是 s 维的，则可由K中选取适当的元 $u_1, \cdots, u_s$，使得K成为 $k(u_1, \cdots, u_s)$ 的可分扩张. 一般地，若K在 k 上的超越次数是 r，则有 $s \geq r$. 当且仅当 $s = r$ 时，K是 k 上可分生成扩张.

【有限域】 由于有限域是 E. Galois (1830，全集，p.15)首先研究的，所以也称为 **Galois 域** (英 Galois field 德 Galoisfeld). 不存在有限的非交换域 (**Wedderburn 定理**，J. H. M. Wedderburn, Trans. Amer. Math. Soc., **6** (1905)). E. Witt 给出了这条定理的简单证明 (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **8** (1931)). 有限域的特征 p 是素数，元的个数是 p^α. 反之，对于任意素数 p 与任意自然数 α，必定存在元的个数为 p^α 的有限域，而且这样的域都是互相同构的，用 $\boldsymbol{GF}(p^\alpha)$ 或 $\boldsymbol{F}_q(q = p^\alpha)$ 等来表示. 对于任意整数 m，必定存在 $GF(p^\alpha)$ 的 m 次扩域，而且它必是循环扩张†. 对于 $GF(p^\alpha)$ 的任意元 a，有 $a^{p^\alpha} = a$，所以 a 的 p 次根必定属于 $GF(p^\alpha)$. 因而，有限域是完全域. $GF(p^\alpha)$ 的全部非零元关于乘法构成一个循环群.

【有序域】 若在域K中确定了一个全序†，使当 $a > b$ 时，有 $a + c > b + c$，当 $a > b$ 且 $c > 0$ 时，有 $ac > bc$，则K称为**有序域**(ordered

field). 有序域的特征是 0. 根据 $a>0$ 或 $a<0$, 称 a 是**正** (positive) 元或**负** (negative) 元. 若 a 是有序域 K 的任意元, 则或者 $a\geqslant 0$ 或者 $-a\geqslant 0$. a 的**绝对值** (absolute value) 以 $|a|$ 表示, 定义为 a 本身或 $-a$, 依照 $a\geqslant 0$ 或 $a<0$ 而定. 设 ε 是正元, 若定义 $\{x|a-\varepsilon<x<a+\varepsilon\}$ 为 $a\in K$ 的邻域, 则 K 构成一个 Hausdorff 空间†, 如果对于 K 的任意两个正元 a 与 b, 恒存在自然数 n, 使得 $na>b$, 则 K 称为 **Archimedes 有序域** (Archimedean ordered field). 如果存在两个有序域之间的同构, 使得正元总对应于正元, 则此同构称为**相似同构** (德 ähnlich-isomorph). 有理数域、实数域都是 Archimedes 有序域的例子. 任意的 Archimedes 有序域与实数域的子域相似同构. (关于非 Archimedes 有序域, 参看 R. Baer, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., (1927).)

数的绝对值的概念在抽象域上也能得到推广, 这就是所谓赋值(→赋值).

【实域】 在域 k 中, 如果 -1 (1 是 k 的单位元) 不能表示成 k 的元的平方和, 则称 k 为**实域** (英 real field 德 formal-reeller Körper). 实数域是实域的一个模型. 有序域是实域. 若某一实域的任何真代数扩张都不是实域, 则称它为**实闭域** (德 reell-abgeschlossener Körper). 实数域是实闭域. 实闭域的代数闭包可由添加 -1 的一个平方根来得到. 若实闭域的元 a 不是某一元的平方, 则 $-a$ 一定是某一元的平方. 使得实闭域成为有序域的唯一方法是: 定义非 0 元的平方为正元. 已经证明, 任意一个实域必是某一实闭域的子域, 所以实域是有序域, 因而它的特征是 0. 实域的概念是由 E. Artin 引入的 (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **5** (1927)). 他用实域的理论肯定地解决了"n 个变量的正定有理式 (即对于变量的任何实数值都取正值的实系数有理式) 可否表示成有理式的平方和"的问题, 即所谓 Hilbert 第十七问题. A. Pfister 证明了更精确的结果: $R(X_1,\cdots,X_n)$ 中任何正定函数都最多是 2^n 个平方的和.

【参】 [1] 正田建次郎, 抽象代数学, 岩波, 1932; [2] 守屋美賀雄, 代数学 I, II, 朝倉, 1949; [3] 正田建次郎-浅野啓三, 代数学 I, 岩波, 1952; [4] 秋月康夫-鈴木通夫, 高等代数学 I, 岩波全書, 1952; [5] 弥永昌吉-小平邦彦, 現代数学概説 I, 岩波, 1961; [6] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, J. Reine Angew. Math., **137** (1910), 167—309; [7] H. Hasse, Höhere Algebra, Sammlung Göschen, Walter de Gruyter I 1926, II 1927; [8] E. Steinitz-H. Hasse, Algebraische Theorie der Körper, Walter de Gruyter, 1930; [9] B. L. van der Waerden, Algebra I, Springer, 第四版, 1955 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学 I, 科学出版社, 1963); [10] A. A. Albert, Fundamental concepts of higher algebra, Univ. of Chicago Press, 1958; [11] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, ch. 5, Actualités Sci. Ind., 1102b, Hermann, 第二版, 1959; [12] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra III, van Nostrand, 1964; [13] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965; [14] L. Rédei, Algebra I, Akademische Verlagsgesellschaft, 1959.

Galois 理论 [英 Galois theory 法 théorie de Galois 德 Galoissche Theorie 俄 теория Галуа 日 ガロア理論] 【研究的历史】 自从十六世纪得出三次、四次方程的一般解法以后, 长期遗留的悬而未决的五次方程的问题, 到十九世纪初才由 N. H. Abel 解决了. 接着 E. Galois 建立了用根式构造代数方程的根的一般原理, 这原理是用方程的根的某种置换群 (即 Galois 群) 的结构来描述的. **Galois 理论**的建立, 不仅完成了其前辈 J. L. Lagrange, P. Ruffini, Abel 等人开始的研究, 而且还为开辟近世代数学的道路建立了划时代的业绩. J. W. Dedekind 把这个结果解释为关于域的自同构群的对偶定理. Galois 理论在后来 E. Steinitz 建立的交换域的一般理论中起着重要作用. 随着本世纪二十年代拓扑代数系的概念的形成, W. Krull 推广了 Dedekind 的思想, 建立了无限代数扩张的 Galois 理论 (Math. Ann., **100** (1928)). Galois 理论的发展的另一路线, 也是 Dedekind 开创的 (Werke, III, 1876—77), 导致非交换环的 Galois 理论. 从 1940 年前后, 这个理论成为 N. Jacobson (Ann. of Math. **41** (1940)), 中山正等人的活跃的研究课题而一直继续到现在.

【定义】 给定域 L 的一个自同构†群 G (运算是映射的合成), L 的子域 $F(G)=\{a\in L|a^\sigma=a,\sigma\in G\}$ 称为 G 的**不变域** (invariant field).

反过来，当设K是L的子域时，使得K的元不变的L的全体自同构组成的群以 $G(L/K)$ 来表示. 如果存在L的自同构群G，满足 $F(G)=K$，则交换域的代数扩张† L/K 称为 **Galois 扩张** (Galois extension). 这时，称 $G(L/K)$ 为 L/K 的 **Galois 群** (Galois group). $G(L/K)$的不变域是K. 如果 L/K 是有限扩张，则必有 $G=G(L/K)$. L/K 为 Galois 扩张的充分必要条件是: 它是可分的†且是正规†的. 当 $G(L/K)$ 是 Abel 群†或循环群†等时，相应地把扩张 L/K 称为 **Abel 扩张** (Abelian extension) 或**循环扩张** (cyclic extension) 等.

【Galois 理论的基本定理】 设 L/K 是一个有限 Galois 扩张，G是它的 Galois 群，则在 L/K 的中间域M的集合与G的子群H的集合之间存在对偶格同构†. 在这种同构下，L/K 的中间域M对应到子群 $H=G(L/M)$；反之，G的子群H对应到 $M=F(H)$. 扩张次数$[L:M]$等于对应的子群H的阶数（特别是，$[L:K]$ 是G的阶数)，$[M:K]$ 等于群指数 $(G:H)$. 如果子域M与M'在K上共轭†，则对应的子群 $G(L/M)$ 与 $G(L/M')$ 在G中互为共轭，反之亦然. 特别是，M/K 是 Galois 扩张，当且仅当对应于M的子群H是G的一个正规子群†. 在这种情况下，Galois 群 $G(M/K)$ 与商群 G/H 同构.

【基域的扩张】 设 L/K 是有限 Galois 扩张，K'/K 是任何扩张，L'是L与K'的合成域†，则 L'/K' 也是一个 Galois 扩张，基于限制映射，L'/K' 的 Galois 群与 $G(L/L\cap K')$ 同构.

【正规基定理】 设 L/K 是有限 Galois 扩张，G 是 Galois 群，则存在L的一个元 u，使 $\{u^\sigma|\sigma\in G\}$ 成为L在K上的一个基. 这样的基称为**正规基** (normal basis). 若以 $K[G]$ 表示G在K上的群环†，则由运算 $\Sigma a_\sigma\sigma(x)=\Sigma a_\sigma x^\sigma$ 可对L引进 $K[G]$ 模†的结构，而正规基的存在意味着L与 $K[G]$ 本身是 $K[G]$ 同构的，换言之，G 的通过L的K线性表示等价于G的正则表示†.

【Galois 扩张的例子】 1) 割圆域†. 设K的特征与m互素，ζ是 1 的一个m次原根，$L=K(\zeta)$，则 L/K 是 Abel 扩张，其 Galois 群与以整数m为模的不可约剩余类†群 $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$的一个子群同构. 特别是，当 $K=\boldsymbol{Q}$时，由于割圆多项式†是不可约的，这个子群与$(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$重合，因而扩张次数 $[\boldsymbol{Q}(\zeta):\boldsymbol{Q}]$ 等于 $\varphi(m)$，这里φ是 Euler 函数†.

2) 有限域†K的特征p不为 0，K的元的个数q是p的幂，而且K是由q唯一确定的，用 $GF(q)$ 或 $\boldsymbol{F}_q$ 来表示. 于是 $GF(q)$ 的n次扩张只有 $GF(q^n)$，它是循环扩张.

3) Kummer 扩张. 设K含有 1 的 m 次原根 ζ，K的乘法群用K^*来表示. K的扩域L能表为 $L=K(\sqrt[m]{a_1},\cdots,\sqrt[m]{a_r})$ $(a_i\in K)$的形式的充分必要条件是: L/K 是 Abel 扩张，而且一切 $\sigma\in G(L/K)$ 都满足 $\sigma^m=1$. 此时，L/K 称为**指数为 m 的 Kummer 扩张** (Kummer extension of exponent m). K上指数为m的 Kummer 扩张L与商群 $K^*/(K^*)^m$的有限子群$H/(K^*)^m$之间，由关系 $H=L^m\cap K^*$ 与 $L=K(\sqrt[m]{H})$而成一一对应. 此外，$H/(K^*)^m$ 与 $G(L/K)$的特征标群†之间存在标准同构(因而 $H/(K^*)^m$ 与 $G(L/K)$ 同构). 设 $L=K(\theta)$是K的一个m次循环 Kummer 扩张，σ是 Galois 群 $G(L/K)$ 的生成元，则 **Lagrange 预解式** (Lagrange's resolvent) $(\zeta,\theta)=\theta+\zeta\theta^\sigma+\cdots+\zeta^{m-1}\theta^{\sigma^{m-1}}$ 满足 $(\zeta,\theta)^\sigma=\zeta^{-1}(\zeta,\theta)$，$(\zeta,\theta)^m\in K$，由$(\zeta,\theta)$ 反过来可以计算出θ(及其共轭). 特别是，L可由(ζ,θ)在K上生成.

4) Artin-Schreier 扩张. 设K的特征 $p\neq 0$. 对于K的扩域中任一元a，以 $\mathscr{P}_a$ 表示a^p-a，而以 $(1/\mathscr{P})a$ 表示 $\mathscr{P}X-a=0$ 的一个根. K的一个有限扩域 L 能表为 $L=K((1/\mathscr{P})a_1,\cdots,(1/\mathscr{P})a_r)$ $(a_i\in K)$ 的形式的充分必要条件是: L/K 是一个 Galois 扩张，其 Galois 群是一个指数†为p的 Abel 群. 这时，L/K 称为 **Artin-Schreier 扩张** (Artin-Schreier extension). K上的 Artin-Schreier 扩张L与加法群 $K/\mathscr{P}K$ 的有限子群 $H/\mathscr{P}K$ 之间，由关系式 $H=\mathscr{P}L\cap K$，$L=K((1/\mathscr{P})H)$而成一一对

应. 此外, $H/\mathscr{P}K$ 与 $G(L/K)$ 的特征标群(从而也与 $G(L/K)$ 本身) 同构. 更一般地, 对于特征为 p 的域的指数为 p^n 的 Abel 扩张 L(即 L 为所给域的 Galois 扩张,使得它的 Galois 群是指数为 p^n 的 Abel 群), 我们用 K 上的长度为 n 的 Witt 向量†的模来代替 K, 可以类似地进行描述.

【方程的 Galois 群】 L/K 是有限 Galois 扩张的充分必要条件是: L 为某一可分的†多项式 $f(X)\in K[X]$ 的最小分裂域†. 这时, $G(L/K)$ 称为**多项式 $f(X)$ 或代数方程 $f(X)=0$ 的 Galois 群** (Galois group of a polynomial, Galois group of an equation). 当它是 Abel 群或循环群时, $f(X)=0$ 就称为 **Abel 方程** (Abelian equation) 或**循环方程** (cyclic equation). 而当 L 由 $f(X)=0$ 的任意一个根生成时, $f(X)=0$ 就称为 **Galois 方程**(Galois equation). 一般地, $G(L/K)$ 可以一一地表示为 $f(X)=0$ 的根的一个置换群. 若这个群是本原的†,则称 $f(X)=0$ 为**本原方程** (primitive equation). 在根的置换的全体中, Galois 群的指数称为**偏差**(德 Affekt). 当偏差是 1 时, 称为**无偏差** (德 affektlos). 若 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 K 上代数无关†的超越元†, 则称 $K(u_1, u_2, \cdots, u_n)[X]$ 中的方程 $F_n(X)=X^n-u_1X^{n-1}+\cdots+(-1)^nu_n=0$ 为 n 次的**一般方程** (general equation). $F_n(X)=0$ 的 Galois 群与 n 次对称群† $\mathfrak{S}_n$ 同构. 若 K 的特征不是 2, 则交代群† $\mathfrak{A}_n$ 所对应的二次子域是添加 $F_n(X)$ 的判别式† D 的平方根而得到的域 $K(\sqrt{D})$.

【代数方程的可解性】 设 K 的特征是 0, $f(X)\in K[X]$, L 是 $f(X)$ 的最小分裂域. 如果存在一个由 K 的有限扩张所组成的链 $K\subset L_1\subset\cdots\subset L_r=L$, 使得 $L_i=L_{i-1}(\sqrt[n_i]{a_i})(a_i\in L_{i-1})$, 则方程 $f(X)=0$ 称为**可用根式解** (solvable by radicals). 它的充分必要条件是 $f(X)$ 的 Galois 群为可解群† (Galois). 特别是, Abel 方程可用根式解. 循环方程能用 Lagrange 预解式解出, 理论上一般可解方程都可通过重复上述步骤来解出. 由于 $\mathfrak{S}_n$ 是可解群的充分必要条件为 $n\leqslant 4$, 所以 n 次的一般方程仅当 $n=1, 2, 3, 4$ 时才可用根式解 (Abel). 再者,方程可仅由平方根来求解的充分必要条件是: 其 Galois 群的阶数为 2 的幂. 我们可以利用这一事实来解决三等分角、等分圆周等几何作图问题 (→几何作图问题).

【无限 Galois 扩张】 如果 Galois 扩张 L/K 是无限的, 则 Galois 群也是无限群. 设 $\{M_\nu\}$ 是 L/K 的全体有限正规子扩张, 令 $H_\nu=G(L/M_\nu)$, 则取 $\{H_\nu\}$ 作为单位元的邻域系的基†, 就赋予 G 以拓扑群†的结构. 这个拓扑称为 **Krull 拓扑** (Krull topology) (Krull, Math. Ann. **100** (1928)). 这时, G 与有限群的族 $\{G/H_\nu\}$ 的射影极限†同构, 且 G 是完全不连通†的紧†群. L/K 的中间域的集合与这个拓扑群 G 的闭子群的集合之间, 通过映射 (Galois 群) ⟷ (不变域) 而成为一一对应, 这样我们就把有限扩张的 Galois 理论推广到无限扩张的情形. Kummer 扩张等等理论也可推广到无限扩张的情形.

【Galois 上同调】 设 L/K 是有限 Galois 扩张, G 是 L/K 的 Galois 群, 则加法群 L 与乘法群 L^* 都具有 G 模结构. 由于存在正规基, 所以以模 L 为系数的 G 的上同调群†, 对于任何维数来说都是 0. 至于乘法群 L^*, 我们有 $\hat{H}^0(G, L^*)\cong K^*/N(L^*)$ (N 表示范数† $N_{L/K}$) 与 $\hat{H}^1(G, L^*)=0$ (称为 **Hilbert 定理 90**(或 Hilbert-Speiser 定理)). 特别是, 循环扩张中使 $N(a)=1$ 的元 a, 可表示成 $a=b^{1-\sigma}$ 的形式 (σ 是 Galois 群的生成元). $\hat{H}^2(G, L^*)$ 与以 L 为分裂域† 的 K 上的中心单代数†的 Brauer 群†同构. 在数域的情形, 已提出诸如整环†、单位群†、理想群†、伊代尔群†等 G 模, 它们的上同调的研究在数论中具有重要意义. 在许多情况下, 与单扩张 L/K 相比, 我们更多地注意于研究 K 的 Galois 扩域及它们之间的 K 同构所成的范畴†. 换言之, 我们考虑 K 的 Galois 扩张的范畴到 Abel 群的范畴的函子† $L\to F(L)$, 并研究由 $F(L)$ 所诱导的关于 $G(L/K)$ 模结构的上同调. 在无限代数扩张的情形, 我们应用 Galois 群的关于 Krull 拓扑的连续上闭链, 来考

虑有限次子域的上同调的归纳极限†([13],[14]).

Galois 理论是鲜明地概括了可分代数扩张的本质的一个成功的理论的典型. 人们对类似的理论及推广等也进行了种种尝试.

【不可分扩张】 在不可分扩张 L/K 的情形,K 微分†常常起着相当于 Galois 扩张中的 K 自同构的作用. 用微分能够构造类似于 Galois 理论的理论. 设 K 是一个特征为 $p \neq 0$ 的域,L/K 是指数†为 1 的有限纯不可分扩张†. L 的全体 K 微分 $D(L/K)$ 构成 K 上的一个限制 Lie 代数†,并具有 L 上线性空间的结构, 其维数等于 L/K 的次数. 在 L/K 的中间域 M 的集合与 (限制 Lie 代数) $D(L/K)$ 的子 Lie 代数 H 的集合之间,通过 $H = D(L/M)$, $M = \{a \in L \mid \partial(a) = 0, \partial \in H\}$ (H 的常数域)给出了一一的对偶格同构对应(Jacobson). J. Dieudonné 揭示了应用半微分的概念能分析一般的纯不可分扩张的子域; 另一方面, Jacobson 应用域的自表示、Galois 合成等概念,成功地建立了交换域的一般 Galois 理论,它既包含 Galois 扩张的情形, 又包含纯不可分扩张的情形. 把这些理论推广到非交换环上的研究也已在进行.

【环的 Galois 理论】 单代数中的中心化子†的理论可以解释为关于内自同构群的某种 Galois 对应的理论, 也可以通过叉积†由单代数的中心化子的理论推出交换域的 Galois 理论. 另一方面, 1940 年左右, 得到了可除环关于有限外自同构群的 Galois 理论,它与可交换的情形是相类似的. 以后从下列各点出发继续进行了许多研究: 用在自同构群内考虑内自同构的方法来把这两个理论结合起来; 由可除环推广到一般的环,如单环、本原环†或半准素环†; 减弱有限性的条件. 在这些理论中的主要方法是首先考虑关于一个扩张 S/R 的自同态环 $\mathrm{Hom}_R(S,S)$, 然后考虑其中的自同态(或者微分) 的作用([3],[11]).

【Galois 代数】 作为 Kummer 扩张理论的推广, H. Hasse 引进了 Galois 代数的概念. 若 G 是交换域 K 上的交换代数 A 的有限自同构群,则 A 具有一个 $K[G]$ 模结构 ($K[G]$ 是 G 在 K 上的群环). 假定 A 与 $K[G]$ 本身是 $K[G]$ 同构的, 则称 A 是具有 Galois 群 G 的 **Galois 代数** (Galois algebra)(→[正规基定理]). 关于它的结构问题,嵌入问题,与群 G 的正则表示的分解相对应的 A 的分解问题等,都进行了研究,它们都可应用于数论的研究. 虽然 A 大多是交换域的直和,但已试图进行某些推广,例如对于非交换 Galois 代数的研究.

[参] [1] 正田建次郎-浅野啓三, 代数学 I, 岩波 1952; [2] 秋月康夫-鈴木通夫,高等代数学 I, 岩波全書, 1952; [3] 中山正-東屋五郎,代数学 II, 岩波, 1954; [4] 守屋美賀雄, 方程式,至文堂, 1964; [5] R. Dedekind, Über die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen, Gesammelte mathematische Werke, Braunschweig, 1930—32, vol. 2, p.272—291; [6] E. Artin, Galois theory, Univ. of Notre Dame Press, 第二版, 1948; [7] N. Bourbaki, Eléments de Mathématique, Algèbre, chap. 5, Actualités Sci. Ind. 1102b, Hermann, 第二版, 1959; [8] Н. Г. Чеботарев, Основы теории Галуа, ОНТИ, 1937 (德译本: N. G. Čebotarev, Grundzüge der Galoisschen Theorie, Noordhoff, Groningen, 1950); [9] P. Wolf, Algebraische Theorie des Galoisschen Algebren, Deutscher Verlag der Wiss., 1956; [10] B. L. van der Waerden, Algebra I, Springer, 第四版, 1955 (中译本: B. L. 范德瓦尔登, 代数学 I, 科学出版社, 1963); [11] N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1956; [12] R. Bourgne-J.-P. Azra, Ecrits et mémoires mathématiques d' Évariste Galois, Gauthier-Villars, 1962; [13] J.-P. Serre, Corps locaux, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1962; [14] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lectures notes in math. 5, Springer, 1964; [15] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra III, van Nostrand, 1964; [16] М. М. Постников, Теория Галуа, Физматгиз, 1960 (英译本: M. M. Postnikov, Foundations of Galois theory, Pergamon, 1962); [17] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965; [18] L. Rédei, Algebra I, Akademische Verlag., 1959.

线性空间 [英 linear space 法 espace linéaire 德 linearer Raum 俄 линейное пространство, векторное пространство 日 線形空間]

【定义】 如果对于集合 L 的任意两个元 a 与 b, 可确定 L 的唯一的一个元 $a + b$, 称为 a 与 b 的和, 对于域† K 的任意元 α 与 L 的任意元 a, 可确定 L 的唯一的一个元 αa, 称为以 α 乘 a 的**纯量乘积** (scalar multiple), 且满足下列条件 1)—8),则称 L 为**域 K 上的线性空间** (linear space over K)或**向量空间** (vector space): 1) $(a + b) + c = a + (b + c)$; 2) 存在零元 0, 使对一

切 $a\in L$，有 $a+0=0+a=a$；3) 对于任意的 $a\in L$，存在 $x=-a\in L$，使得 $a+x=x+a=0$；4) $a+b=b+a$；5) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$；6) $(\alpha\beta)a=\alpha(\beta a)$；7) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$；8) $1a=a$. K 的元称为**纯量** (scalar)，L 的元称为**向量** (vector). K 又称为线性空间 L 的**系数域** (field of scalars) 或**基域** (basic field, ground field).

以上的定义同样适用于 K 是非交换域的情况. 注意到纯量乘积 $\alpha a(\alpha\in K, a\in L)$ 的写法，也把 L 称为 K 上的**左线性空间**(left linear space). 相对于左线性空间，可以类似地定义**右线性空间**(right linear space). 实际上，一个左(右)线性空间就是一个单式的左(右) K 模[†] (→模). K 是交换域时，基于规定 $\alpha a=a\alpha$，可不区分左右. 为简单起见，本条将只讨论交换域上的线性空间. 可以类似地建立非交换域上的线性空间的理论，详情→模.

K 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$ 时，K 上的线性空间分别称为**实线性空间** (real linear space) 或**复线性空间** (complex linear space). 以下固定域 K，当单称线性空间时，指的是域 K 上的线性空间.

例. 1) 几何向量. 在 Euclid 空间[†]中，或者更一般地，在仿射空间[†]中，任意两点 P, Q 所对应的向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的集合构成一个线性空间. 2) n 元数向量. 以 K^n 表示域 K 的 n 个元 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 所成的有序组 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的集合. 在 K^n 中，若定义了运算 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)+(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$，$\lambda(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\lambda\alpha_1,\cdots,\lambda\alpha_n)$，则这个集合 K^n 就成为 K 上的一个线性空间. 它的元称为 ***n* 元向量**(n-tuple). 当 K 是数域时，称为 ***n* 元数向量**，也称为 ***n* 维数向量**. α_i 称为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的**第 *i* 分量** (i-th component). 对于两个 n 元向量 $a=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $b=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，定义 a, b 的**内积**(inner product) 为 $(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i$. 在 $K=\boldsymbol{C}$ (复数域)的情形，通常定义内积为 $(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\bar{\beta}_i$. 3) 数列. 在数域 K 的元的无限序列 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 的集合中，如果定义了与 2) 同样的运算，则这个集合就成为 K 上的线性空间. 4) 函数. 在集 I 上定义而在域 K 上取值的函数的全体，记作 K^I. 若在 K^I 中定义了运算 $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$，则这个集合 K^I 就成为 K 上的线性空间. 例 2) 是 $I=(1,\cdots,n)$ 的情形，而例 3) 则是 $I=\boldsymbol{N}$ (全体自然数)的情形. 特别是，设 K 是实数域，I 是实数的一个区间，考虑 K^I 的子集. I 上所有连续函数的集合 $C(I)$，I 上所有可微函数的集合 $D(I)$，I 上所有实解析函数的集合 $A(I)$ 等都构成线性空间. 5) 多项式. 以域 K 的元为系数的、n 个变量 $X_1,\cdots,X_n$ 的多项式的全体，记作 $K[X_1,\cdots,X_n]$，它关于通常的运算构成线性空间.

【线性映射】 设 L, M 都是域 K 上的线性空间，当 L 到 M 的映射 φ 满足下面两个条件时，φ 就称为**线性映射** (linear mapping) 或**线性算子** (linear operator)：1) $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$；2) $\varphi(\lambda a)=\lambda\varphi(a)$ $(a, b\in L, \lambda\in K)$. 线性映射无非就是 K 模之间的 K 同态. 当把 K 本身看成一个线性空间时，线性映射 $L\to K$ 称为 L 上的**线性型** (linear form). L 到它本身的线性映射，特别称为 L 的**线性变换** (linear transformation). L 的恒等映射是线性变换. 线性映射 $\varphi: L\to M$, $\psi: M\to N$ 的合成映射 $\psi\circ\varphi: L\to N$ 是线性映射. 当线性映射 $\varphi: L\to M$ 是双射[†]时，逆映射 $\varphi^{-1}: M\to L$ 是线性映射. 这样的 φ 称为**同构** (isomorphism). 当存在一个同构 $L\to M$ 时，写作 $L\cong M$. 当线性变换 $L\to L$ 是同构时，也称它为**正则** (regular, non-singular) 线性变换.

例. 1) 以 L 表示 Euclid 空间 (或仿射空间) E 中的所有几何向量所构成的线性空间. 由 E 的合同变换[†](或仿射变换[†])所诱导的映射 $L\to L$ 是一个线性变换. 2) 设 (α_{ij}) 是 K 的元的一个 (m,n) 型矩阵[†]. 若对于任意的 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in K^n$，使 $(\eta_1,\cdots,\eta_m)\in K_m$ 与之对应，其中

$\eta_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\xi_j (1 \leqslant i \leqslant m)$，则得到一个线性映射$K^n \to K^m$. 3）对于区间$I$上的实值可微函数$f$，若取其导数$f'$与它对应，则得到一个线性映射$D(I) \to R^I$.

【线性组合】 设L是域K上的线性空间. L的元的序列$a_1, \cdots, a_n$的**线性组合**（linear combination）是L中可表示为$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ $(\alpha_i \in K, i = 1, \cdots, n)$的元. 当至少有一组不全为0的$K$的元$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$使得$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$时，$a_1, \cdots, a_n$称为**线性相关的**（linearly dependent）；否则，$a_1, \cdots, a_n$称为**线性无关的**（linearly independent）. 如果在线性空间L中存在线性无关的n个元的序列，但不存在线性无关的$n+1$个元的序列，则n称为线性空间L的**维数**（dimension），以$\dim L$表示. 当存在这样的n时，L称为**有限维的**（finite dimensional）；不存在时，L称为**无限维的**（infinite dimensional）. 在无限维线性空间中，存在任意长的线性无关元的序列. n元向量空间K^n是n维的.

线性空间L的元的序列$(a_1, \cdots, a_n)$称为**基**或**基底**(basis)，如果L的任意元a可以唯一地表示为$a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n (\alpha_i \in K, i = 1, \cdots, n)$的形式，也就是使$(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in K^n$对应到$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \in L$的线性映射$K^n \to L$是双射，因而是同构. $(a_1, \cdots, a_n)$是L的基这个条件，等价于下述三个条件中的任意两个：1）$a_1, \cdots, a_n$线性无关；2）L的任何元都是$a_1, \cdots, a_n$的线性组合；3）L是n维的. 由此可推出，基$(a_1, \cdots, a_n)$的长n一定等于维数. 在表达式$a = \Sigma \alpha_i a_i$中，α_i称为a关于这个基的**第i分量**（i-th component）或**第i坐标**（i-th coordinate）.

【线性映射的空间】 所有线性映射$L \to M$的集合在定义了运算$(\varphi + \varphi')(a) = \varphi(a) + \varphi'(a)$与$(\lambda\varphi)(a) = \lambda\varphi(a)$以后，就成为一个线性空间. 这个空间以$\mathbf{Hom}_K(L, M)$来表示.

假定线性空间L与M分别具有基$(a_1, \cdots, a_l)$与$(b_1, \cdots, b_m)$，则任一线性映射$\varphi: L \to M$可用一个(m, l)型矩阵(α_{ij})来表示，这个矩阵由$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^{m} b_i \alpha_{ij} (1 \leqslant j \leqslant l)$来确定（为方便起见，把纯量写在右面）. 对应$\varphi \to (\alpha_{ij})$给出了由线性空间$\mathrm{Hom}_K(L, M)$到所有$(m, l)$型矩阵所成的线性空间的一个同构. 再者，若线性空间N具有基$(c_1, \cdots, c_n)$，线性映射$\psi: M \to N$以(n, m)型矩阵(β_{ki})来表示，则合成映射$\psi \circ \varphi: L \to N$由积$(\beta_{ki})(\alpha_{ij})$来表示. 一个线性空间$N$的全体线性变换$\mathrm{Hom}_K(N, N)$构成$K$上的一个代数†，在对应$\varphi \to (\alpha_{ij})$之下，它与$n$阶全阵代数$K_n$同构. 它的可逆元†是$N$的正则线性变换，其全体形成一个群，记作$GL(N)$，称为$N$上的一般线性群†. 在上述同构下，这个群对应于所有n阶正则矩阵†所构成的群$GL(n, K)$.

【无限维线性空间】 对于无限维线性空间，大多是从拓扑方面来研究（→拓扑线性空间，拓扑 Abel 群［线性拓扑］），但这里我们只从代数方面来考虑. 设$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$为线性空间$L$中的一族元素，这个族的线性组合是指$L$中可表成$\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda a_\lambda (\alpha_\lambda \in K$，但除去有限个$\lambda$外，$\alpha_\lambda = 0)$的一个元. 如果仅在所有的$\alpha_\lambda$都等于0时，这样的元才能为0，则$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$称为**线性无关的**. 如果$L$的任何元都可以唯一地表示成$\sum_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda a_\lambda$的形式，则$\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$称为$L$的**基**. 当$\Lambda = \{1, \cdots n\}$时，这些定义与已经叙述过的定义是一致的. 一般来说，Λ可以是无限集. 任何线性空间都具有基（→选择公理［Zorn 引理］）. 基的基数由L确定. 两个线性空间同构的充分必要条件是：它们的基具有相等的基数.

【子空间与商空间】 设L是域K上的线性空间，如果L的一个非空子集N满足下列两个条件：1）$a, b \in N$蕴涵$a + b \in N$；2）$\lambda \in K$，$a \in N$蕴涵$\lambda a \in N$；则对于L上的运算所诱导的运算，N成为K上的一个线性空间，称它为L的**线性子空间**(linear subspace)或简称为**子**

空间 (subspace). 这时,由 $\varphi(a)=a(a\in N)$ 确定的标准映射 $\varphi: N\to L$ 是单射线性映射.

设 S 是 L 的子集, S 的元的所有线性组合是包含 S 的最小子空间,称为由 S **生成** (generate) 的子空间. L 的子空间 N 与 N' 的交 $N\cap N'$ 与**和** (sum) $N+N'=\{a+a'|a\in N, a'\in N'\}$ 仍是子空间.类似地,多个子空间的交与和也是子空间. 若 N, N' 是有限维的,则等式 $\dim N+\dim N'=\dim(N\cap N')+\dim(N+N')$ 成立. 再者,当 L 的每个元可以唯一地表为 $a+a'(a\in N, a'\in N')$ 的形式时, L 称为 N 与 N' 的**直和** (direct sum). L 为 N 与 N' 的直和,当且仅当 L 由 N, N' 生成,且 $N\cap N'=\{0\}$. 这时, N' 称为 N 的**补子空间** (complementary subspace). 任意子空间都具有补子空间. 关于线性空间的直积与直和→模[直积与直和].

给定 L 的元之间的一个等价关系 R,如果满足下列两个条件,则称 R 与 L 的运算是**相容的** (compatible): 1) 由 $R(a,a')$, $R(b,b')$ 可以推出 $R(a+b, a'+b')$; 2) 由 $R(a,a')$, 可以推出 $R(\lambda a,\lambda a')(\lambda\in K)$. 这时,全体等价类即商集† L/R, 对于所诱导的运算构成 K 上的一个线性空间,称为 L 的**商线性空间**(quotient linear space),或简称**商空间** (quotient space). 这时,由 $a\in\varphi(a)(a\in L)$ 所确定的标准映射 $\varphi: L\to L/R$ 是满线性映射. 再者, 含有 0 的等价类 N 是 L 的子空间,且含有 $a\in L$ 的等价类是 $a+N=\{a+b|b\in N\}$. 等价关系 $R(a, a')$ 与关系 $a-a'\in N$ 是等价的. 反之,对于任何子空间 N,由这个方法可得到一个与运算相容的等价关系. 对这个等价关系所构成的商空间,用 L/N 来表示,称为由 N 产生的**商空间**或**剩余(类)空间** (residue class space). 如果 L/N 是有限维的, 则其维数称为 N 关于 L 的**余维数** (codimension), 记作 $\operatorname{codim} N$.

对于线性空间之间的线性映射 $\varphi: L\to M$, 它的**象** (image) $\varphi(L)$ 是 M 的子空间, 它的**核** (kernel) $N=\{a\in L|\varphi(a)=0\}$ 也是 L 的子空间. 映射 φ 诱导出同构 $\bar{\varphi}: L/N\to\varphi(L)$ (→模[算子同态]). 若 L 是有限维的, 则 $\dim L-\dim N=\dim\varphi(L)$. φ 的象的维数称为 φ 的**秩** (rank), φ 的核的维数称为 φ 的**零度** (nullity). (m,n) 型矩阵 (α_{ij}) 的秩与零度 (→ 矩阵), 就是 [线性映射] 一节的例 2) 所说的线性映射 $K^n\to K^m$ 的秩与零度.

【对偶空间】 设 L 是域 K 上的线性空间, 则 L 上所有线性型的集合 $\operatorname{Hom}_K(L,K)$ 是一个线性空间, 用 L^* 来表示, 称为 L 的**对偶空间** (dual space). L^* 无非是作为 K 模的 L 的对偶模†. 对于 L 的元 a 与 L^* 的元 a^*, 把 $a^*(a)$ 记作 $\langle a, a^*\rangle$,常称为 a 与 a^* 的**内积**(inner product). 对于线性映射 $\varphi: L\to M$, 由 $({}^t\varphi)b^*=b^*\circ\varphi$ $(b^*\in M^*)$来定义一个线性映射 ${}^t\varphi: M^*\to L^*$. 映射 ${}^t\varphi$ 称为 φ 的**对偶映射** (dual mapping) 或**转置映射** (transposed mapping), 它由关系式 $\langle a, {}^t\varphi(b^*)\rangle=\langle\varphi(a), b^*\rangle$ $(a\in L,\ b^*\in M^*)$ 所确定. 于是, ${}^t(\varphi_1+\varphi_2)={}^t\varphi_1+{}^t\varphi_2$, ${}^t(\psi\circ\varphi)={}^t\varphi\circ{}^t\psi$, ${}^t1_L=1_{L^*}$. 若 φ 是满射†,则 ${}^t\varphi$ 是单射†; 若 φ 是单射, 则 ${}^t\varphi$ 是满射. 特别是, 若 φ 是同构,则 ${}^t\varphi$ 也是同构. 当 φ 的秩为有限时, ${}^t\varphi$ 的秩与 φ 的秩相等. 对于同构 $\varphi: L\to M$, ${}^t\varphi$ 的逆映射 ${}^t\varphi^{-1}=\check{\varphi}$: $L^*\to M^*$ 称为 φ 的**逆步映射** (contragredient). 我们有 $(\psi\circ\varphi)^\vee=\check{\psi}\circ\check{\varphi}$.

对于线性空间 L 的子空间 N, 把 L^* 的子空间 $\{a^*\in L^*|\langle a, a^*\rangle=0\ (a\in N)\}$记作 $N^\perp$, 称为与 N **正交的** (orthogonal) 子空间. 这时有标准同构

$$(L/N)^*\cong N^\perp, N^*\cong L^*/N^\perp.$$

对于 L^* 的子空间 N', 也同样确定 L 的子空间 $N'^\perp=\{a\in L|\langle a, a^*\rangle=0(a^*\in N')\}$. 如果让 $N^\perp$ 对应 N, $N'^\perp$ 对应 N', 则 L 的有限余维子空间的全体与 L^* 的有限维子空间的全体成一一对应, 而 N 的余维数与 $N^\perp$ 的维数相等. 特别是,当 L 是有限维时,有标准同构 $L\cong(L^*)^*$. 按上述方法, L 的全部子空间与 L^* 的全部子空间一一对应, 这在线性空间中称为**对偶性** (duality).

对于具有有限基 $(e_1,\cdots,e_n)$的线性空间 L, 由关系 $\langle e_j, e_i^*\rangle=0(i\neq j)$, $\langle e_i, e_i^*\rangle=1$ 所确定的 L^* 的元的序列 $(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ 构成

L^* 的一个基,称为 $(e_1,\cdots,e_n)$的**对偶基** (dual basis). 对于具有标准有限基的线性空间,例如 K^n 等,令对偶基中的元对应于给定的基的相应元,基于这样得到的同构,可以把所给空间看成等同于它的对偶空间.

【多线性映射】 设 L, M, N 是域K上的线性空间, f 是直积 $M\times N$ 到L的映射. 假定对任意固定的 $b\in N$, 使 $x\in M$ 对应到 $f(x, b)\in L$ 的映射 $M\to L$ 是线性映射,而且对任意固定的 $a\in M$, 使 $y\in N$ 对应到 $f(a, y)\in L$ 的映射 $N\to L$ 也是线性映射, 则称 f 为由 $M\times N$ 到 L 的**双线性映射** (bilinear mapping). 全体双线性映射由运算 $(f+g)(x, y)=f(x, y)+g(x, y)$, $(\alpha f)(x, y)=\alpha f(x, y)$ 构成线性空间,记作 $\mathscr{L}(M, N; L)$. 一般地, 当给定线性空间 $M_1,\cdots,M_n$ 时, 如果映射 $f:M_1\times\cdots\times M_n\to L$ 关于每个变量是线性的, 则称 f 为**多线性映射** (multilinear mapping), 其全体记作 $\mathscr{L}(M_1,\cdots,M_n; L)$, 它也构成线性空间. 特别是,当 $L=K$ 时, 分别把双线性映射或多线性映射称为**双线性型** (bilinear form) 或**多线性型** (multilinear form).

特别是, 如果 $M_1=\cdots=M_n=M$, 且多线性映射 $f:M_1\times\cdots\times M_n\to L$ 对于 $\{1,\cdots,n\}$ 的任意置换 σ 均满足 $f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})=f(x_1,\cdots,x_n)$ $(x_i\in M)$, 则 f 称为**对称的** (symmetric). 若当 $i\neq j$, $x_i=x_j$ 时, 有 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=0$, 则 f 称为**交错的** (alternating). 这时, 对于任何置换 σ, 必有 $f(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(n)})=\operatorname{sgn}\sigma\cdot f(x_1,\cdots,x_n)$ ($\operatorname{sgn}\sigma$ 当 σ 是偶置换[†]时为 $+1$, 奇置换[†]时为 -1). 具有这一性质的 f 称为**斜对称的** (skew-symmetric) 或**反对称的** (anti-symmetric). 当域的特征不是 2 时, 若 f 是斜对称的, 则它必是交错的.

设 M, N 是域K上的线性空间, 而Φ是 $M\times N$ 上的一个双线性型. 由 $\Phi(x, y)=(d_\Phi(y))(x)=(s_\Phi(x))(y)$ $(x\in M, y\in N)$ 所确定的映射 $d_\Phi:N\to M^*$, $s_\Phi:M\to N^*$ 都是线性映射. 若 M, N 是有限维的,则 d_Φ 与 s_Φ 的秩相等, 称为Φ的**秩** (rank). 若取 M 的基 $(x_1,\cdots,x_m)$, N的基$(y_1,\cdots,y_n)$, 设它们的对偶基分别是 $(x_1^*,\cdots,x_m^*)$, $(y_1^*,\cdots,y_n^*)$, 则有 $d_\Phi(y_j)=\sum_{i=1}^{m}x_i^*\Phi(x_i, y_j)$, $s_\Phi(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\Phi(x_i, y_j)y_j^*$. 矩阵 $(\Phi(x_i, y_j))$ 称为关于给定基的**双线性型 Φ 的矩阵** (matrix of a bilinear form). 它的秩等于Φ的秩. 如果 d_Φ, s_Φ 都是单射, 从而它们都是同构, 则Φ称为**非退化的** (non-degenerate). 这时, d_Φ, s_Φ 可看成互为转置的映射,而M与N^*, N 与 M^* 都可看成是等同的. 特别是,若Φ是 $M\times M$ 上的一个非退化双线性型,我们就有由M到其对偶空间 M^* 上的一个同构,并据此同构认为M与M^*是等同的,这时M称为**自对偶的** (self-dual).

设M是域K上的线性空间, 如果映射 $Q: M\to K$ 满足下面两个条件, 则称它为M上的**二次型** (quadratic form): 1) $Q(\alpha x)=\alpha^2Q(x)$ $(\alpha\in K, x\in M)$; 2) 由 $\Phi(x,y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$ $(x, y\in M)$ 所定义的映射 $\Phi: M\times M\to K$ 是 $M\times M$ 上的一个双线性型. 这时, Φ 称为**与二次型 Q 相伴的双线性型**(bilinear form associated with a quadratic form), 可以证明它是对称的. 于是, 若 K 的特征 $\neq 2$, 则 $\Phi(x, x)=2Q(x)$ $(x\in M)$, $Q(x)=(1/2)\Phi(x, x)$. 一般地,对于任意双线性型$f:M\times M\to K$, 由 $Q(x)=f(x, x)$ 所定义的映射 $Q: M\to K$ 是一个二次型. 若$(x_1,\cdots,x_n)$是M的一个基, 则二次型Q可表达成: $Q\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i\right)=\sum_{(i,j)}\alpha_{ij}\xi_i\xi_j$ (对所有非有序对 $\{i, j\}$ 求和),这里 $\alpha_{ii}=Q(x_i)$, $\alpha_{ij}=\Phi(x_i, x_j)$ $(i\neq j)$(→ 二次型). 线性空间M与M上的一个非退化二次型Q合在一起,称为**度量线性空间** (metric vector space), 记作(M, Q). 伴随Q的双线性型 $\Phi(x, y)$ $(x, y\in M)$称为 x, y (关于 Q) 的**内积** (inner product).

【张量积】 假定 M, N 为域K上的线性空间. 它们的**张量积** $M\otimes N$ (有时为了明确表示基域是K而记为 $M\otimes_K N$),可用来"线性化"由 $M\times N$ 到任何线性空间的双线性映射,其定义

如下．首先考虑一个由 $M\times N$ 所生成的线性空间 F，以 R 表示 F 中所有形式为 $(x+x',y)-(x,y)-(x',y)$，$(x,y+y')-(x,y)-(x,y')$，$(\alpha x,y)-\alpha(x,y)$，$(x,\alpha y)-\alpha(x,y)$（其中 $x,x'\in M$，$y,y'\in N$，$\alpha\in K$）的元所生成的子空间．我们把商空间 F/R 记为 $M\otimes N$．这时，把 F 的含有 $(x,y)\in M\times N$ 的剩余类（$M\otimes N$ 的元）记为 $x\otimes y$．使 (x,y) 对应到 $x\otimes y$ 的映射 $M\times N\to M\otimes N$ 是双线性的，称为**标准双线性映射**（canonical bilinear mapping）．由定义，关系式 $(x+x')\otimes y=x\otimes y+x'\otimes y$，$x\otimes(y+y')=x\otimes y+x\otimes y'$，$(\alpha x)\otimes y=\alpha(x\otimes y)=x\otimes(\alpha y)$ 成立．

张量积可由下述性质来刻划．对于任意线性空间 L 与任意双线性映射 $f:M\times N\to L$，存在唯一的一个线性映射 $\varphi:M\otimes N\to L$，使得 $f(x,y)=\varphi(x\otimes y)$．也就是说，使线性映射 $\varphi:M\otimes N\to L$ 对应到由 $f(x,y)=\varphi(x\otimes y)$ 定义的双线性映射 $f:M\times N\to L$，就得到同构 $\mathrm{Hom}\ (M\otimes N,L)\cong\mathscr{L}(M,N;L)$．$M\otimes N$ 的每个元都可表为有限个形如 $x\otimes y$（$x\in M$，$y\in N$）的元之和．设 M 的基为 $\{x_i\}_{i\in I}$，N 的基为 $\{y_j\}_{j\in J}$，则 $\{x_i\otimes y_j\}_{i\in I,j\in J}$ 构成 $M\otimes N$ 的基．特别是，在有限维的情形，$\dim(M\otimes N)=\dim M\cdot\dim N$．

设 $M_1,M_2,\cdots$ 是域 K 上的线性空间．使 $x_1\otimes x_2$ 对应到 $x_2\otimes x_1$（$x_i\in M_i$）的同构 $M_1\otimes M_2\to M_2\otimes M_1$ 是唯一确定的．又使 $(x_1\otimes x_2)\otimes x_3$ 对应到 $x_1\otimes(x_2\otimes x_3)$（$x_i\in M_i$）的同构 $(M_1\otimes M_2)\otimes M_3\to M_1\otimes(M_2\otimes M_3)$ 也是唯一确定的．因此，$(M_1\otimes M_2)\otimes M_3$ 与 $M_1\otimes(M_2\otimes M_3)$ 可看作是等同的，记为 $M_1\otimes M_2\otimes M_3$．一般地，自然可以定义 $M_1\otimes\cdots\otimes M_n$ 与标准多线性映射 $M_1\times\cdots\times M_n\to M_1\otimes\cdots\otimes M_n$，对应于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的元可记为 $x_1\otimes\cdots\otimes x_n$．有如前述，给定任意的线性空间 L，有自然同构 $\mathrm{Hom}\ (M_1\otimes\cdots\otimes M_n,L)\cong\mathscr{L}(M_1,\cdots,M_n;L)$．反之，给定线性空间 $M_1,\cdots,M_n$，空间 $M_1\otimes\cdots\otimes M_n$ 可以刻划为一个线性空间 N 与一个给定的多线性映射 $\phi:M_1\times\cdots\times M_n\to N$，使得：(i) N 由象 $\phi(M_1\times\cdots\times M_n)$ 所生成；(ii) 对任意的多线性映射 $f:M_1\times\cdots\times M_n\to L$，存在唯一的线性映射 $f':N\to L$，满足 $f=f'\circ\phi$．张量积 $M_1\otimes\cdots\otimes M_n$ 常常记作 $\bigotimes_{i=1}^{n}M_i$，元 $x_1\otimes\cdots\otimes x_n$ 常常记作 $\bigotimes_{i=1}^{n}x_i$．

给定线性映射 $f_i:M_i\to M_i'(1\leqslant i\leqslant n)$，存在唯一的线性映射 $f:M_1\otimes\cdots\otimes M_n\to M_1'\otimes\cdots\otimes M_n'$，使得 $f(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)=f_1(x_1)\otimes\cdots\otimes f_n(x_n)$．把这个映射 f 记作 $f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ 或 $\bigotimes_{i=1}^{n}f_i$，称为 f_i（$1\leqslant i\leqslant n$）的**张量积**（tensor product）．当 M_i（$1\leqslant i\leqslant n$）是有限维时，对应 $(f_1,\cdots,f_n)\to f_1\otimes\cdots\otimes f_n$ 确定同构 $\bigotimes_{i=1}^{n}\mathrm{Hom}\,(M_i,M_i')\to\mathrm{Hom}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}M_i,\bigotimes_{i=1}^{n}M_i'\right)$．特别是，若 $M_1'=\cdots=M_n'=K$，则基于对应 $x_1'\otimes\cdots\otimes x_n'\to x_1'\cdots x_n'$ 而看作 $\bigotimes_{i=1}^{n}M_i'=K$，就得到同构 $\bigotimes_{i=1}^{n}M_i^*\to\left(\bigotimes_{i=1}^{n}M_i\right)^*$．具体地说，同构 $f:\bigotimes_{i=1}^{n}M_i^*\to\left(\bigotimes_{i=1}^{n}M_i\right)^*$ 是由 $f\left(\bigotimes_{i=1}^{n}x_i^*\right)\left(\bigotimes_{i=1}^{n}x_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\langle x_i,x_i^*\rangle$（$x_i^*\in M_i^*$，$x_i\in M_i$）来确定的．

【张量】 设 $E^{(\lambda)}(\lambda=1,\cdots,k)$ 为域 K 上的线性空间，特别当 $E^{(1)}=\cdots=E^{(k)}=E$ 时，以 $\bigotimes^{k}E$ 来表示 $\bigotimes_{\lambda=1}^{k}E^{(\lambda)}$，称为 E 的 ***k* 次张量空间**（tensor space of degree k）$\left(\bigotimes^{0}E\text{ 表示 }K\right)$．令 E^* 为 E 的对偶空间，把 $\left(\bigotimes^{p}E\right)\otimes\left(\bigotimes^{q}E^*\right)$ 记作 $T_q^p(E)$，并设 $T_0^p(E)=\bigotimes^{p}E$，$T_q^0(E)=\bigotimes^{q}E^*$，$T_0^0(E)=K$．$T_q^p(E)$ 称为 E 的 **(p,q) 型张量空间**（tensor space of type (p,q)），它的元称为 E 上的 ***p* 次反变 *q* 次共变张量或 (p,q)**

型张量(tensor of type (p,q)). 特别是,$(p,0)$型张量称为 **p 次反变张量** (contravariant tensor of degree p); 而 $(0,q)$ 型张量称为 **q 次共变张量** (covariant tensor of degree q). $(0,0)$ 型张量就是**纯量** (scalar). $T_0^1(E)=E$ 的元也称为**反变向量** (contravariant vector), $T_1^0(E)=E^*$ 的元也称为**共变向量**(covariant vector). 当 $p\neq 0$, $q\neq 0$ 时, (p,q) 型张量称为**混合张量** (mixed tensor).

设 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 E 的一个基, 且设它在 E^* 中的对偶基为 $(f^1,\cdots,f^n)$, 则 $e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}$ $(i_\lambda, j_\mu=1,\cdots,n;\ \lambda=1,\cdots,p,\ \mu=1,\cdots,q)$ 是 $T_q^p(E)$ 的一个基. 因而 (p,q) 型张量 t 可唯一地表示成

$$t=\sum\xi_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f^{j_1}\otimes\cdots\otimes f^{j_q}.$$

$\left\{\xi_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\right\}$ 称为 t 关于基 $(e_1,\cdots,e_n)$ 的**分量** (component), ξ 的上行指数称为**反变指数** (contravariant index), 下行指数称为**共变指数** (covariant index).

设 $(\bar e_1,\cdots,\bar e_n)$ 是 E 的另一基, 它的对偶基是 $(\bar f^1,\cdots,\bar f^n)$. 设基之间的变换是

$$\bar e_i=\sum_{j=1}^n\alpha_i^je_j,\qquad \bar f^i=\sum_{j=1}^n\beta_j^if^j$$

则有

$$\sum_{k=1}^n\beta_k^i\alpha_j^k=\delta_j^i.$$

在 t 关于 $(e_1,\cdots,e_n)$ 的分量与关于 $(\bar e_1,\cdots,\bar e_n)$ 的分量之间有下面的变换法则:

$$\bar\xi_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}=\sum_{k_1,\cdots,k_p}\sum_{l_1,\cdots,l_q}\beta_{k_1}^{i_1}\cdots\beta_{k_p}^{i_p}\alpha_{j_1}^{l_1}\cdots\alpha_{j_q}^{l_q}\xi_{l_1\cdots l_q}^{k_1\cdots k_p}.$$

在张量计算中, 和号$\sum$后面上下成对地出现相同的指数时, 这个指数称为**哑指数** (dummy index). 对于哑指数 i, 通常省去 $\sum_{i=1}^n$. 这就是所谓 **Einstein 约定** (Einstein's convention). 例如, $\xi_i\eta^i$ 表示 $\sum_{i=1}^n\xi_i\eta^i$. 这样, 张量的分量的变换法则就成为

$$\bar\xi_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}=\beta_{k_1}^{i_1}\cdots\beta_{k_p}^{i_p}\alpha_{j_1}^{l_1}\cdots\alpha_{j_q}^{l_q}\xi_{l_1\cdots l_q}^{k_1\cdots k_p}.$$

由

$$\Phi\left(\bigotimes_{i=1}^p x_i\otimes\bigotimes_{j=1}^q y_j^*,\ \bigotimes_{j=1}^q y_j\otimes\bigotimes_{i=1}^p x_i^*\right)=\prod_{i=1}^p\langle x_i,x_i^*\rangle\prod_{j=1}^q\langle y_j,y_j^*\rangle$$

可决定 $T_q^p(E)\times T_p^q(E)$ 上的一个非退化双线性型 Φ. 由此可把 $T_q^p(E)$ 看作等同于 $T_p^q(E)$ 的对偶空间, 反之亦然 (→[多线性映射]). 这时, $T_q^p(E)$ 的基 $(e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f^{j_1}\cdots\otimes f^{j_q})$ 与 $T_p^q(E)$ 的基 $(e_{j_1}\otimes\cdots\otimes e_{j_q}\otimes f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_p})$ 互为对偶. 再连同自然同构 $T_p^q(E)^*\cong\mathscr L\left(\prod^q E,\prod^p E^*;K\right)$, 就得到自然同构 $T_q^p(E)\to\mathscr L\left(\prod^q E,\prod^p E^*;K\right)$. 具体地说, 依据这个同构, 认定 $t\in T_q^p(E)$ 等同于与它相对应的 $q+p$ 线性型 $\prod^q E\times\prod^p E^*\to K$, 就有

$$t(x_1,\cdots,x_q,y_1^*,\cdots,y_p^*)=\zeta_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\xi_1^{j_1}\cdots\xi_q^{j_q}\eta_{i_1}^1\cdots\eta_{i_p}^p,$$

这里 $\{\xi_\lambda^j\}$ 是 $x_\lambda\in E=T_0^1(E)$ 的分量, $\{\eta_i^\mu\}$ 是 $y_\mu^*\in E^*=T_1^0(E)$ 的分量, 而 $\left\{\zeta_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\right\}$ 是 $t\in T_q^p(E)$ 的分量. 特别是, 由自然同构 $T_0^p(E)\cong\mathscr L\left(\prod^p E^*,K\right)$, $T_p^0(E)\cong\mathscr L\left(\prod^p E,K\right)$, 可将 p 次反变张量与对偶空间 E^* 上的 p 线性型, p 次共变张量与 E 上的 p 线性型都看成是等同的.

【张量代数】 若使 $T_q^p(E)$ 的元 $x_1\otimes\cdots\otimes x_p\otimes x_1^*\otimes\cdots\otimes x_q^*$ 与 $T_s^r(E)$ 的元 $y_1\otimes\cdots\otimes y_r\otimes y_1^*\otimes\cdots\otimes y_s^*$ 一起对应到 $T_{q+s}^{p+r}(E)$ 的元 $x_1\otimes\cdots\otimes x_p\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_r\otimes x_1^*\otimes\cdots\otimes x_q^*\otimes y_1^*\otimes\cdots\otimes y_s^*$, 我们就能唯一地确定一个双线性映射 $T_q^p(E)\times T_s^r(E)\to T_{q+s}^{p+r}(E)$. 与 $t\in T_q^p(E)$, $u\in T_s^r(E)$ 组成的对 (t,u) 相对应的元记成 $t\otimes u$, 称为 t 与 u 的**积** (product). 若设 t, u,

$t\otimes u$ 的分量分别为 $\xi^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$，$\eta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}$，$\zeta^{a_1\cdots a_{p+r}}_{b_1\cdots b_{q+s}}$，则有

$$\zeta^{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_r}_{j_1\cdots j_q l_1\cdots l_s}=\xi^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\,\eta^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.$$

取 $T(E)$ 为 $T^p_q(E)$ $(p,q=0,1,2,\cdots)$ 的直和空间. 推广积$\otimes$到 $T(E)$ 上，使其满足分配律，则 $T(E)$ 构成域K上的一个代数，称为 E 上的**张量代数** (tensor algebra). $T^p_0(E)$ $(p=0,1,2\cdots)$ 的直和是 $T(E)$ 的一个子代数，也称为 E 上的**(反变)张量代数**.

【缩约】 $T^p_q(E)$的关于第 k 个反变指数与第 l 个共变指数的**缩约** (contraction)，是指使 $T^p_q(E)$ 的元 $x_1\otimes\cdots\otimes x_p\otimes x_1^*\otimes\cdots\otimes x_q^*$ 映射成 $T^{p-1}_{q-1}(E)$ 的元 $\langle x_k,x_l^*\rangle x_1\otimes\cdots\otimes x_{k-1}\otimes x_{k+1}\otimes\cdots\otimes x_p\otimes x_1^*\otimes\cdots\otimes x_{l-1}^*\otimes x_{l+1}^*\otimes\cdots\otimes x_q^*$ 的唯一确定的线性映射 C^k_l: $T^p_q(E)\to T^{p-1}_{q-1}(E)$，其中 $\langle x_k,x_l^*\rangle$ 是 x_k 与 x_l^* 的内积. $(p-1,q-1)$ 型张量 $C^k_l(t)$ 称为 (p,q) 型张量 t 的**缩约张量** (contracted tensor). 若 t 的分量是 $\xi^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$，则 $C^k_l(t)$ 的分量是

$$\eta^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}}=\sum_{s=1}^{n}\xi^{i_1\cdots i_{k-1}s i_k\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{l-1}s j_l\cdots j_{q-1}}.$$

【张量表示】 对于线性映射 $f:E\to F$，把张量积 $f\otimes\cdots\otimes f$: $T^p_0(E)=\bigotimes^p E\to\bigotimes^p F=T^p_0(F)$ 记作 f^p. $f^p(p=0,1,2,\cdots)$ 确定一个代数同态 $\sum_{p=0}^{\infty}T^p_0(E)\to\sum_{p=0}^{\infty}T^p_0(F)$. 其次，设 f 为同构，并设 ${}^tf^{-1}=f^*$ 为它的逆步映射 $E^*\to F^*$，以 f_q 表示张量积 $f^*\otimes\cdots\otimes f^*$: $T^0_q(E)=\bigotimes^q E^*\to\bigotimes^q F^*=T^0_q(F)$，并以 f^p_q 表示张量积 $f^p\otimes f_q$: $T^p_q(E)\to T^p_q(F)$. 映射 f^p_q 是同构，系 $\{f^p_q\}(p,q=0,1,2,\cdots)$ 确定一个代数同构 $T(E)\to T(F)$. 特别是，若 f 是 E 的正则线性变换，则 f^p_q 是线性空间 $T^p_q(E)$ 的正则线性变换，而且对应 $f\to f^p_q$ 确定一般线性群之间的同态 $GL(E)\to GL(T^p_q(E))$. 这个同态称为 $GL(E)$ 的**张量表示** (tensor representation).

【对称张量与交错张量】 如果一个 p 次反变张量在自然同构 $T^p_0(E)\to\mathscr{L}\left(\prod^p E^*,K\right)$下所对应的 p 线性型是对称的或交错的，则分别称此张量为**对称的** (symmetric) 或**交错的** (alternating). 共变张量也同样，如果它在自然同构 $T^0_p(E)\to\mathscr{L}\left(\prod^p E,K\right)$ 下所对应的 p 线性型是对称的或交错的，则分别称此张量为对称的或交错的. **斜对称** (skew-symmetric) (或**反对称** (anti-symmetric)) 张量也同样定义. 我们来把上面的定义换为直接的形式. 为简单起见，设域K的特征不为 2，以 $\mathfrak{S}_p$ 表示数码 $1,\cdots,p$ 的全体置换的群 (p 次对称群). 对于任意的 $\sigma\in\mathfrak{S}_p$，使 $x_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma^{-1}(p)}$ 对应于 $x_1\otimes\cdots\otimes x_p$ 的线性变换 $T^p_0(E)\to T^p_0(E)$ 是唯一确定的且是正则的，仍以 σ 表示. 同样，也可唯一确定 $T^0_p(E)$ 的正则线性变换 σ. 元素 $t\in T^p_0(E)$ (或 $T^0_p(E)$) 是对称张量，当且仅当对于任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_p$，恒有 $\sigma t=t$; t 是交错张量，当且仅当对于任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_p$，恒有 $\sigma t=(\operatorname{sgn}\sigma)t$. 若 t 的分量是 $\{\xi^{i_1\cdots i_p}\}$ (或 $\{\xi_{i_1\cdots i_p}\}$)，t 是对称 (交错) 张量，当且仅当它的分量关于指数 $i_1,\cdots,i_p$ 的置换是对称(交错)的. $T^p_0(E)$ 或 $T^0_p(E)$ 的线性变换 $S_p=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\sigma$ 称为**对称化算子** (symmetrizer)，$A_p=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}(\operatorname{sgn}\sigma)\sigma$ 称为**交错化算子** (alternizer). 对于任意的 t，S_pt 是对称张量，A_pt 是交错张量.

$T^p_0(E)$的对称(交错)张量构成的子空间是关于张量表示 $GL(E)\to GL(T^p_0(E))$ 的不变子空间.

【外积】 以下为简单起见，设基域K的特征是 0. 设N为交错化算子 A_p: $T^p_0(E)\to T^p_0(E)$ 的核，即使得 $A_pt=0$ 的 t 构成的子空间，商空间 $T^p_0(E)/N$ 记作 $\bigwedge^p E$. $x_1\otimes\cdots\otimes x_p$ $(x_i\in E)$ 在自然映射 $T^p_0(E)\to\bigwedge^p E$ 下的象以

$x_1\wedge\cdots\wedge x_p$ 来表示，称为 $x_1,\cdots,x_p$ 的**外积**(exterior product)．线性空间 $\bigwedge^p E$ 称为 E 的 ***p* 重外幂空间**或简称 ***p* 重外幂**(p-fold exterior power)．关于外积，有

$$x_1\wedge\cdots\wedge(x_i+x_i')\wedge\cdots\wedge x_p=x_1\wedge\cdots\wedge x_i\wedge\cdots\wedge x_p+x_1\wedge\cdots\wedge x_i'\wedge\cdots\wedge x_p,$$

$$x_1\wedge\cdots\wedge(\alpha x_i)\wedge\cdots\wedge x_p=\alpha(x_1\wedge\cdots\wedge x_i\wedge\cdots\wedge x_p);$$

对于任意的 $\sigma\in\mathfrak{S}_p$，有

$$x_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge x_{\sigma(p)}=(\operatorname{sgn}\sigma)x_1\wedge\cdots\wedge x_p.$$

A_p 诱导一个自然同构 $\bigwedge^p E\to\mathfrak{A}^p$，这里 $\mathfrak{A}^p$ 是 p 次反变交错张量的全体，因而 $\bigwedge^p E$ 的元与 p 次反变交错张量可看作是等同的．这时，$A_p(x_1\otimes\cdots\otimes x_p)=x_1\wedge\cdots\wedge x_p$．同样，$\bigwedge^p E^*$ 与全体 p 次共变交错张量构成的线性空间看作是等同的．$\bigwedge^p E$ 的元称为 ***p*-向量**(p-vector)，而 $\bigwedge^p E^*$ 的元称为 ***p*-余向量**(p-covector)（→ 坐标[标架与坐标] 4) Plücker 坐标)．若设 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 E 的基，则 $e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_p)$ 构成 $\bigwedge^p E$ 的基，$\bigwedge^p E$ 的元 t 可唯一地表示为 $t=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_p}\alpha^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ 或 $t=\frac{1}{p!}\sum\limits_{i_1,\cdots,i_p}\alpha^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ 的形式．但在后一表示式中，$\alpha^{i_1\cdots i_p}$ 关于 $i_1,\cdots,i_p$ 是交错的，它就是张量 t 的分量．$\bigwedge^p E$ 的维数等于 $\binom{n}{p}$，若 $p>n$，则 $\bigwedge^p E=\{0\}$．设 $(f^1,\cdots,f^n)$ 是 $(e_1,\cdots,e_n)$ 的对偶基，则 $\bigwedge^p E$ 的元 $t=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_p}\alpha^{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$ 与 $\bigwedge^p E^*$ 的元 $s=\sum\limits_{i_1<\cdots<i_p}\beta_{i_1\cdots i_p}f^{i_1}\wedge\cdots\wedge f^{i_p}$ 的内积定义为

$$\langle s,t\rangle=\sum_{i_1<\cdots<i_p}\alpha^{i_1\cdots i_p}\beta_{i_1\cdots i_p}.$$

这时有

$$\langle x_1\wedge\cdots\wedge x_p,\ y_1\wedge\cdots\wedge y_p\rangle=\det(\langle x_i,y_j\rangle),$$

其中 $x_i\in E$，$y_j\in E^*$，$\langle x_i,y_j\rangle$ 是 x_i 与 y_j 的内积．由这个内积，$\bigwedge^p E^*$ 与 $\bigwedge^p E$ 的对偶空间可看作是等同的．

$\bigwedge^p E\left(\text{或}\bigwedge^p E^*\right)$ 的元 t 与 $\bigwedge^q E\left(\text{或}\bigwedge^q E^*\right)$ 的元 s 的**外积**(exterior product) $t\wedge s$ 定义为

$$t\wedge s=\frac{1}{p!q!}A_{p+q}(t\otimes s).$$

$t\wedge s$ 是 $\bigwedge^{p+q}E\left(\text{或}\bigwedge^{p+q}E^*\right)$ 的元，我们有 $t\wedge s=(-1)^{pq}s\wedge t$．特别是，有

$$(x_1\wedge\cdots\wedge x_p)\wedge(x_{p+1}\wedge\cdots\wedge x_{p+q})=x_1\wedge\cdots\wedge x_{p+q}.$$

以 $\wedge E$ 表示 $\bigwedge^p E(p=0,1,2,\cdots,n)$ 的直和，E 的两个元 $x=\sum\limits_{p=0}^n x^p$，$y=\sum\limits_{p=0}^n y^p$ ($x^p,y^p\in\bigwedge^p E$) 的积定义为

$$x\wedge y=\sum_{p+q=0}^{n}x^p\wedge y^q.$$

于是，积 $\wedge$ 满足结合律．$\wedge E$ 称为线性空间 E 的**外代数**(exterior algebra) 或 **Grassmann 代数**(Grassmann algebra)．若 E 的维数是 n，则 $\wedge E$ 的维数是 2^n．当 E 关于 K 的基是 $(e_1,\cdots e_n)$ 时，常把 $\wedge E$ 记作 $\wedge_K(e_1,\cdots,e_n)$．类似地定义对偶空间 E^* 的外代数 $\wedge E^*$，可以认为 $\wedge E$ 与 $\wedge E^*$ 互为对偶空间．

【线性变换】 设 L 是域 K 上的 n 维线性空间，φ 是 L 的线性变换．φ 的**特征向量**(proper vector, eigenvector) 是一个向量 $a\in L$，使得存在 $\alpha\in K$，满足 $\varphi(a)=\alpha a$．当 $a\neq0$ 时，α 由 a 确定，称为 φ 的**特征值**(proper value, eigenvalue)．任取 L 的基，关于这个基表示 φ 的方阵 F 的特征多项式† $\chi(X)$ 与基的取法无关．$\chi(X)$ 称为 φ 的**特征多项式**(proper polynomial, eigenpolynomial)．$\alpha\in K$ 是 φ 的特征值，当且仅当 α 是方程 $\chi(X)=0$ 的根．对于 φ 的一个特征值 α，L 的子空间 $N_\alpha=\{a\in L\mid\varphi(a)=\alpha a\}$ 称为关于 α 的**特征(子)空间**．$N_\alpha'=\{a\in L\mid$ 对于某个 $k>0$，$(\varphi-\alpha 1_L)^k(a)=0\}$ 是包含 N_α 的

子空间，称为关于α的广义特征空间. 为简单起见,设$\chi(X)=0$的全部根都在K中,则L可分解成$N'_{\alpha_1},\cdots,N'_{\alpha_s}$的直和，其中$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是方程$\chi(X)=0$的不同的根. N'_{α_i}的维数等于方程$\chi(X)=0$的根α_i的重数.

任何满足$p(\varphi)=0$的多项式$p(X)$都可被一个首一多项式（最高次项系数是1的多项式）$\mu(X)$整除. 这个$\mu(X)$是由φ唯一确定的,称为φ的**最小多项式**(minimal polynomial). φ的特征值都是方程$\mu(X)=0$的根. 因为$\chi(X)$可被$\mu(X)$整除,所以$\chi(\varphi)=0$ (W. R. Hamilton-A. Cayley). 更详细地说,如果令$p(X)\cdot a=(p(\varphi))(a)$ $(p(X)\in K[X], a\in L)$,则L具有多项式环$K[X]$上的模的结构. 这时,存在首一多项式$q_1(X),\cdots,q_n(X)$,满足下面两个条件: 1) $q_{i+1}(X)$可被$q_i(X)$整除$(1\leqslant i\leqslant n-1)$; 2) L是某些单项†子模$L_1,\cdots,L_n$的直和,使得φ在L_i上的限制的最小多项式是$q_i(X)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. 这些$q_i(X)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$是由$\varphi$唯一确定的,它们就是$XI-F$的初等因子,而$F$是$\varphi$关于$L$的某一基的矩阵(→矩阵[初等因子],交换环[Dedekind环和主理想环]). 而且,$q_1(X)\cdots q_n(X)=\chi(X)$, $q_n(X)=\mu(X)$.

设φ是L的线性变换，当把L看作是由φ所确定的$K[X]$模时,如果它是半单†的,则φ也称为**半单的**(semisimple). 因此,φ是半单的,当且仅当φ的最小多项式$\mu(X)$在$K[X]$中没有非常数的平方因子. 特别是,若$\mu(X)=0$的根全都在K中，且都是单根，则φ必是半单的. 这个条件等价于: 关于L的适当的基,φ可由对角矩阵†表示. 从而L可分解成特征空间$\{N_\alpha\}$的直和. 这时,就称φ为**可对角化的**(diagonalizable).

若K是完全域†,则L的任何线性变换φ可表示为一个半单线性变换φ_s与一个幂零线性变换φ_n的和: $\varphi=\varphi_s+\varphi_n$. 这里$\varphi_s$与$\varphi_n$是由$\varphi$唯一确定的,而且是可以互相交换的. φ_s与φ_n分别称为φ的**半单分量**(semisimple component)与**幂零分量**(nilpotent component). 再者,φ_s, φ_n都可由φ的无常数项的多项式来表示. φ是正则的,当且仅当φ_s是正则的. 特别是,若φ_s等于恒等变换1_L,则正则线性变换φ称为**幂单的**(unipotent). 任意正则线性变换φ可以唯一地表示为可互换的半单线性变换与幂单线性变换的积: $\varphi=\varphi_s\varphi_u$. 这里,$\varphi_s$是上述的半单分量,$\varphi_u=1_L+\varphi_s^{-1}\varphi_n$是幂单的,称为$\varphi$的**幂单分量**(unipotent component). →代数群.

【半线性映射】 设L是域K上的线性空间,L'是域K'上的线性空间. 当映射$\varphi:L\to L'$与$\rho:K\to K'$满足下面的条件时,组(φ,ρ)称为**半线性映射**(semilinear mapping)(为方便起见,把纯量写在右边): 1) $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$; 2) $\varphi(a\lambda)=\varphi(a)\rho(\lambda)$; 3) $\rho(\alpha+\beta)=\rho(\alpha)+\rho(\beta)$; 4) $\rho(\alpha\beta)=\rho(\alpha)\rho(\beta)$ $(a,b\in L; \lambda,\alpha,\beta\in K)$. 有时也称$\varphi$是关于$\rho$的半线性映射. 另→模[系数环的扩张和限制]. 上面的条件3),4)意味着ρ是域的同态(实际上是单射). 当$K=K'$,ρ是恒等同构时,$\varphi:L\to L'$就是线性映射. 当$L=L'$,$K=K'$时(通常ρ是一个自同构),φ称为关于ρ的**半线性变换**(semilinear transformation).

对于半线性映射$(\varphi,\rho):L\to L'$, $K\to K'$与$(\varphi',\rho'):L'\to L''$, $K'\to K''$(其中L''是K''上的线性空间),合成$(\varphi'\circ\varphi,\rho'\circ\rho)$也是半线性映射. 若给出$L$在$K$上的基$(e_1,\cdots,e_n)$与$L'$在$K'$上的基$(e'_1,\cdots,e'_{n'})$,则半线性映射$(\varphi,\rho)$: $L\to L'$, $K\to K'$由关系式$\varphi(e_j)=\sum_{i=1}^{n'}e'_i\alpha_{ij}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$确定一个矩阵$(\alpha_{ij})$. 反之,一个同态$\rho$与一个$(n',n)$型矩阵$A=(\alpha_{ij})$由上述关系式唯一确定一个半线性映射$\varphi$. 因此,对一个固定的基,半线性映射可由组$(A,\rho)$来表示,这里$A$是一个$(n',n)$型矩阵. 如果关于$\rho':K'\to K''$的半线性映射$\varphi'$: $L'\to L''$可由组(A',ρ')来表示,则合成$(\varphi'\circ\varphi,\rho'\circ\rho)$可由组$(A'A^\rho,\rho'\circ\rho)$来表示,其中$A^\rho$是把$A$的分量换成它在映射$\rho$下的象而得到的矩阵,即$A^\rho=(\rho(\alpha_{ij}))$.

考虑关于自同构$\rho:K\to K$的半线性变换

$\varphi: L \to L$. 设对于L的一个基$(e_1, \cdots, e_n)$, φ以(A, ρ)来表示,而对于另一个基$(f_1, \cdots, f_n)$, φ以(B, ρ)来表示. 这时,若令 $f_j = \sum_{i=1}^{n} e_i p_{ij}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$以确定基变换的矩阵$P = (p_{ij})$, 则$B = P^{-1}AP^{\rho}$. 有这种关系的$(A, \rho)$与$(B, \rho)$称为**相似的**(similar).

【半双线性型】 设K为域, 但不一定是交换域, J是它的反自同构†. 对于K上的左线性空间M, N, 当映射 $\Phi: M \times N \to K$ 满足下面的条件时,称为 $M \times N$ 上关于J的(右)**半双线性型**(sesquilinear form): 1) $\Phi(x + x', y) = \Phi(x, y) + \Phi(x', y)$; 2) $\Phi(x, y + y') = \Phi(x, y) + \Phi(x, y')$; 3) $\Phi(\alpha x, y) = \alpha\Phi(x, y)$; 4) $\Phi(x, \alpha y) = \Phi(x, y)\alpha^J$ $(x, x' \in M, y, y' \in N, \alpha \in K)$. 当$J$是恒等同构时, K必然是交换的, 而Φ就是一个双线性型(→[多线性映射]). 作为K与J的一个例子,可以取K为复数域, J为共轭算子. 一般地,对于K上的左线性空间E, 定义 $x\lambda = \lambda^{J^{-1}}x$ $(x \in E, \lambda \in K)$, 这就得到一个右线性空间,以E^J来表示. 这时,上面的条件4) 就应是 4') $\Phi(x, y\alpha) = \Phi(x, y)\alpha$; 若$K$是交换的,则$\Phi$就是 $M \times N^J$ 上的双线性型. 对于 $M \times N$ 上的一个半双线性型Φ, 由

$$\Phi(x, y) = \langle x, d_\Phi(y)\rangle = \langle y, s_\Phi(x)\rangle^J$$

$(x \in M, y \in N)$所确定的映射 $d_\Phi: N^J \to M^*$, $s_\Phi: M^{J^{-1}} \to N^*$ 是右线性空间之间的线性映射. 当 M, N 是有限维时, d_Φ 与 s_Φ 的秩相等,称为Φ的**秩**(rank). 以下假定线性空间全部是有限维的.

设$(x_1, \cdots, x_m)$, $(y_1, \cdots, y_n)$分别是M, N的基, 它们的对偶基分别是$(x_1^*, \cdots, x_m^*)$, $(y_1^*, \cdots, y_n^*)$, 则有 $d_\Phi(y_j) = \sum_{i=1}^{m} x_i^*\Phi(x_i, y_j)$, $s_\Phi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} y_j^*\Phi(x_i, y_j)^{J^{-1}}$. 矩阵$(\Phi(x_i, y_j))$称为关于给定基的**半双线性型$\Phi$的矩阵**,它的秩等于$\Phi$的秩. 若 d_Φ 与 s_Φ 都是单射, 因而是同构,则Φ称为**非退化的**(non-degenerate). 假定 $\Phi': M' \times N' \to K$ 是关于J的另一个半双线性型. 这时, 对于任何线性映射 $u: M \to M'$, 总有唯一的一个线性映射$u^*: N' \to N$, 使得$\Phi'(u(x), y') = \Phi(x, u^*(y'))$ $(x \in M, y' \in N')$. u^*称为u的**左伴随**(left adjoint)线性映射. 同样地, 对于线性映射$v: N \to N'$, 总有唯一的一个线性映射$v^*: M' \to M$, 使得$\Phi'(x', v(y)) = \Phi(v^*(x'), y)$ $(x' \in M', y \in N)$. v^*称为v的**右伴随**(right adjoint)线性映射. 这时, 有 $u^* = d_\Phi^{-1} \circ {}^t u \circ d_{\Phi'}$, $v^* = s_\Phi^{-1} \circ {}^t v \circ s_{\Phi'}$. 特别是,若$u, v$为同构, 则 $\Phi(x, y) = \Phi'(u(x), v(y))$ $(x \in M, y \in N)$成立的充分必要条件是 $u^{-1} = v^*$, $v^{-1} = u^*$.

$M \times M$ 上的半双线性型Φ也简称为M上的半双线性型. 以下设J是对合†(即$J = J^{-1}$), 记作 $\lambda^J = \bar{\lambda}$ $(\lambda \in K)$. 如果条件 5) $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$ $(x, y \in M)$成立, 则Φ称为M上的**Hermite 型**(Hermitian form), 而当 5') $\Phi(x,y) = -\overline{\Phi(y, x)}$成立时, Φ称为M上的**反 Hermite 型**(anti-Hermitian form)或**斜 Hermite 型**(skew-Hermitian form). 特别是, 若J是恒等同构,则Hermite 型(或反 Hermite 型)就是M上的对称双线性型(或交错双线性型). 线性空间M与M上的一个非退化 Hermite 型Φ合称为**Hermite 度量线性空间**(Hermitian linear space), $\Phi(x, y)$称为 $x, y \in M$ 的 **Hermite 内积**(Hermitian inner product)或简称**内积**.

【参】 [1] 弥永昌吉-小平邦彦, 現代数学概説 I, 岩波, 1961; [2] 浅野啓三, 線型代数提要, 共立出版, 1948; [3] 秋月康夫-鈴木通夫, 高等代数学 II, 岩波全書, 1957; [4] 弥永昌吉-杉浦光夫, 代数学, 岩波, 1960; [5] А. И. Мальцев, Линейная алгебра, Гостехиздат, 1948 (中译本: А. И. 马力茨夫, 线性代数基础(修订本), 高等教育出版社, 1959); [6] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 2, 3, 7, 8, 9, Actualités Sci. Ind. 1236b, 1044, 1179a, 1261a, 1272a, Hermann, 1958—1964; [7] И. М. Гельфанд, Лекции по линейной алгебре, Гостехиздат, 1951 (中译本: И. М. 盖尔冯德, 一次代数学, 商务印书馆, 1953); [8] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra II, van Nostrand, 1953 (中译本: N. 贾柯勃逊, 抽象代数学, 卷 2, 科学出版社, 1960); [9] C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra, Academic Press, 1956; [10] W. Graeub, Lineare Algebra, Springer, 1958; [11] P. R. Halmos, Finite-dimensional vector spaces, van Nostrand, 1958; [12] R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann, 1963; [13] Д. А. Райков, Векторные пространства, Физматгиз, 1962 (英译本: D. A. Raikov,

Vector spaces, Noordhoff, 1965); [14] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965; [15] O. Schreier- E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra I, II, Vandenhoeck, 第四版, 1959 (英译本: Introduction to modern algebra and matrix theory, Chelsea, 1959).

二次型 [英 quadratic form 法 forme quadratique 德 quadratische Form 俄 квадратичная форма 日 2 次形式] 以域† K 的元为系数的变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式称为**二次型**. 它一般表示为下列形式:

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} c_{ik} x_i x_k.$$

当系数是实数或复数时, 称为**实二次型** (real quadratic form) 或**复二次型** (complex quadratic form). 设 V 是 K 上的 n 维数向量空间, x 是以 $x_1, \cdots, x_n$ 为分量的向量. 如果将上式用 $Q(x)$ 来表示,则 $x \to Q(x)$ 给出了由 V 到 K 中的映射, 因而也可把定义在 V 上的二次型 $Q(x)$ 记作 $Q(V)$. 一般地, 这样的映射 $Q(x)$ 给出二次型的充分必要条件是: 1) $Q(ax) = a^2 Q(x)$ $(a \in K)$, 2) $Q(x+y) - Q(x) - Q(y) = B(x, y)$ 构成 V 上的一个对称双线性型† (→线性空间). $B(x, y)$ 称为二次型 Q 的**相伴双线性型** (associated bilinear form).

以下,设 K 的特征†不为 2. 若令 $a_{ik} = a_{ki} = c_{ik}/2 (i < k)$, $a_{ii} = c_{ii} (i = 1, \cdots, n)$, 则有 $Q(x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$. 由系数组成的 n 阶对称矩阵 $A = (a_{ik})$ 称为二次型 Q 的**矩阵** (matrix). 行列式 $|A|$ 称为 Q 的**判别式** (discriminant), 以 $\Delta(Q)$ 来表示(有时称 $(-1)^{n(n-1)/2} 2^n |A|$ 为判别式). A 的秩称为 Q 的**秩** (rank). 若用向量的内积符号表示, 则二次型 Q 及其相伴双线性型可写为下列形式:

$$Q(x) = (x, Ax) = {}^t x A x,$$

$$2^{-1} B(x, y) = (x, Ay) = {}^t x A y.$$

当 $B(x, y)$ 为非退化 (即 $|A| \neq 0$) 时, Q 称为**非退化的** (non-degenerate).

若对 $Q(x)$ 的变量施以线性变换 $x_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x'_j$ 即 $x = Px'$, 则得到 $x'_1, \cdots, x'_m$ 的二次型 $Q'(x')$. 它的矩阵是 ${}^t PAP$, 判别式是 $|P|^2 |A|$. 若存在将二次型 Q 变为二次型 Q' 的线性变换 $x = Px'$, 而 P 的系数属于 K (或 K 的含有其单位元 1 的子环 R), 则称 Q 在 K (或 R) 上表示 Q'. 特别是, 当 $|P| \neq 0$ (或 $|P|$ 是 R 的正则元) 时, 称 Q' 在 K (或 R) 上与 Q 是**等价的** (equivalent). 这个关系是等价关系. 等价的二次型的秩相等. 秩是 r 的任意二次型, 在 K 上与形式为 $\sum_{i=1}^{r} a_i x_i^2$ $(a_i \neq 0, i = 1, \cdots, r)$ 的二次型等价. 一般地, 对于 $K^* (= K - \{0\})$ 的元 a, b, 如果 $ab^{-1} \in (K^*)^2$, 则记作 $a \sim b$. 于是, 如果 Q 与 Q' 等价, 则有 $\Delta(Q) \sim \Delta(Q')$.

以下, 域 K 固定为某一个域, 并设二次型的系数以及变量的线性变换的系数全都属于 K. 特别是二次型的等价, 指的是在 K 上等价.

K 上的二次型 Q 不一定表示 0 (即对于某一 $x \in K^*$, 有 $Q(x) = 0$), 但如果 Q 为非退化且表示 0, 则 Q **也表示** K^* 的任意的元 μ. Q 表示 K^* 的元 μ 的充分必要条件是: $Q'(x_1, \cdots, x_{n+1}) = Q(x) - \mu x_{n+1}^2$ 表示 0.

【复二次型】 若设 K 是复数域 $\boldsymbol{C}$, 则秩为 r 的任意二次型与 $\sum_{i=1}^{r} x_i^2$ 等价. 因此, 两个二次型等价, 当且仅当二者的秩相等.

【实二次型】 若设 K 是实数域 $\boldsymbol{R}$, 则秩为 r 的任意二次型 Q 与形式为 $\sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q} x_{p+j}^2$ $(p + q = r)$ 的二次型等价. 这时, p 与 q 由 Q 唯一确定. 这称为 **Sylvester 惯性律** (Sylvester's law of inertia). (p, q) 称为 Q 的**符号差** (signature). 两个二次型等价, 当且仅当两者的符号差相同. 符号差是 $(n, 0)$ 或 $(0, n)$ 的 n 个变量的二次型分别称为**正定型** (positive definite form) 或**负定型** (negative definite form). 二者合称为**定型** (definite form). 不是定型的二次型称为**不定型** (indefinite form). 下列条件的每一条都是 Q 为正定型的充分必要条件: i) 当 $x_1, \cdots, x_n$ 取实数值时, 若 $x \neq 0$, 则 $Q(x) > 0$; ii) Q 的矩阵的主子行列式† 全部 > 0.

Q是负定型，当且仅当 $-Q$是正定型. 当 n 个变量的二次型Q的符号差是$(r, 0)$（或$(0, r)$）$(1 \leqslant r < n)$时，Q称为**半正(或负)定型** (positive (negative) semidefinite form).

把单位型 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ 变为自身的线性变换 $x = Px'$ 称为**正交变换**(orthogonal transformation)，这时P是正交矩阵. 通过对变量进行正交变换，任意二次型与对角型 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ 等价. 这时，$a_1, \cdots, a_n$ 是 Q 的矩阵的特征值. 两个二次型基于一个正交变换等价的充分必要条件是二者的矩阵的特征值相同.

【有限域与 $\mathfrak{p}$-adic 域上的二次型】 有限域† $\boldsymbol{F}_q$ 上的两个非退化二次型 Q, Q' 等价的充分必要条件是： Q, Q' 的秩相等，且 $\Delta(Q) \sim \Delta(Q')$. 对于秩 $r \geqslant 3$ 的二次型 Q，必定存在 $x \in \boldsymbol{F}_q$，使得 $Q(x) = 0$.

$\mathfrak{p}$-adic 域† K 上的两个非退化二次型 Q, Q' 等价的充分必要条件是： $\Delta(Q) \sim \Delta(Q')$，而且它们具有相等的秩，并具有相等的 **Minkowski-Hasse 特征标** (Minkowski-Hasse character) χ. χ 的定义如下：设非退化二次型Q的 Clifford 代数† 是 $C(Q)$，当 n 是偶数时，令 $C^*(Q) = C(Q)$，当 n 是奇数时，令 $C^*(Q) = C^+(Q)$，于是按照 $C^*(Q) \cong M_t(K)$ 或 $C^*(Q) \cong M_t(K) \otimes D(K)$ (这里 $M_t(K)$ 是K上 t 阶全阵代数，$D(K)$ 是K上唯一的四元数体†)，令 $\chi(Q) = 1$ 或 $\chi(Q) = -1$. 对于秩 $r \geqslant 5$ 的二次型 Q，必定存在元 $x \in K^*$，使得 $Q(x) = 0$.

【一般域K上的二次型】 以下所述的事实在任意域K上都成立. $x_1, \cdots, x_n$ 的二次型 Q_1 与 $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ 的二次型 Q_2 的和成为 $x_1, \cdots, x_{n+m}$ 的二次型，称为 Q_1 与 Q_2 的**直和** (direct sum)，以 $Q_1 \oplus Q_2$ 或 $Q_1 + Q_2$ 来表示，即

$$Q_1 \oplus Q_2(x_1, \cdots, x_{n+m}) = Q_1(x_1, \cdots, x_n) + Q_2(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}).$$

$Q_1 \oplus Q_2$ 的矩阵是将 Q_1 的矩阵与 Q_2 的矩阵沿对角线排列而得到的矩阵. 此时，若 Q_1 与 Q_1' 等价，且 $Q_1 \oplus Q_2$ 与 $Q_1' \oplus Q_2'$ 等价，则 Q_2 与 Q_2' 等价 (Witt 定理).

形式为 $x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots x_{2r-1}x_{2r}$ 的二次型称为**核型** (kernel form)，记作 N_r. 任意非退化二次型 $Q(x_1, \cdots, x_n)$ 与核型 $N_r(x_1, \cdots, x_{2r})$ 同二次型 $Q_0(x_{2r+1}, \cdots, x_n)$ 的直和是等价的，其中 Q_0 满足：若 $Q_0 \neq 0$，则仅当 $x_{2r+1} = \cdots = x_n = 0$ 时，有 $Q_0(x_{2r+1}, \cdots, x_n) = 0$. 这时，$N_r$ 与 Q_0 不计等价是唯一确定的. $N_r \oplus Q_0$ 称为Q的 **Witt 分解** (Witt decomposition) (E. Witt [8]). r 称为二次型Q的**指数** (index). 当 $Q(x) = 0 (x \in V)$ 时，x 称为关于Q是**奇异的** (singular). 在V的子空间W中，当对于一切 $x \in W$ 都有 $Q(x) = 0$ 时，W 称为关于Q是**全奇异的**(totally singular)子空间. 设B是Q的伴随对称双线性型 (域K的特征不为2)，则当且仅当 $B(x, x) = 0$ 时，$x(\in V)$ 关于Q是奇异的. 如果 $B(x, x) = 0$，则称 x 是**迷向的** (isotropic). 当且仅当对于一切 $x, y \in W$，$B(x, y) = 0$ 时，$W(\subset V)$ 是全奇异的，这时，W称为**全迷向的**(totally isotropic). Q的指数 r 等于 V 的极大全奇异子空间的维数. 在 $K = \boldsymbol{R}$ 的情形，设(p, q)是Q的符号差，则指数 $r = \min(p, q)$. 应当注意，在有些书中，也把 $p-q$，p 或 q 称为Q的指数. 为区别起见，也称指数 r 是**全迷向指数** (index of total isotropy)，称 $p-q$ 是**惯性指数** (index of inertia).

非退化二次型为核型的充分必要条件是：在 $K = \boldsymbol{C}$ 的情形，Q 的秩 $n \equiv 0 \pmod 2$；在 $K = \boldsymbol{R}$ 的情形，$n \equiv 0 \pmod 2$，$p - q = 0$；在 $K = \boldsymbol{F}_q$ 的情形，$n \equiv 0 \pmod 2$，$\Delta(Q) \sim 1$；在K是 $\mathfrak{p}$-adic 域的情形，$n \equiv 0 \pmod 2$，$\Delta(Q) \sim 1$，$\chi(Q) = 1$.

设 $Q = N_r \oplus Q_0$，$Q' = N_s \oplus Q_0'$ 是二次型 Q, Q' 的 Witt 分解. 当 Q_0 与 Q_0' 等价时，Q 与 Q' 称为属于同**型** (type). 全体非退化二次型的集合以 $\boldsymbol{W}$ 表示. 如果我们定义Q的型与Q'的型之和为 $Q + Q'$ 的型，则 $\boldsymbol{W}$ 构成交换群. 核型所属的型是 $\boldsymbol{W}$ 的单位元. $\boldsymbol{W}$ 称为 **Witt 群** (Witt group). $\boldsymbol{W}$ 的结构依赖于 K.

若K是复数域,则W是二阶循环群；若K是实数域,则W是无限阶循环群；一般来说，若K是关于非 Archimedes 赋值的局部域†,则W是有限群．若K是由q个元组成的有限域，则当$q\equiv 1 \pmod 4$时，W是两个二阶循环群的直积；当$q\equiv 3 \pmod 4$时，W是四阶循环群；当q是2的幂时，W是二阶循环群．

【Hermite 型】 以复数为系数的复变量$x_1,\cdots,x_n$的表达式

$$H(x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\bar{x}_i x_k,\ a_{ik}=\bar{a}_{ki}$$

称为 **Hermite 型** (Hermitian form),其中$\bar{a}_{ki}$,$\bar{x}_i$分别表示a_{ki},x_i的共轭复数．对于变量的任意值, Hermite 型的值恒为实数．对于 Hermite 型,也可以和二次型同样地来定义矩阵、判别式、秩和伴随半双线性型†．Hermite 型的矩阵是 Hermite 矩阵,它的主子行列式是实数．若对于$H(x)$的变量作线性变换$x=Px'$，则得到x'的 Hermite 型,其矩阵是${}^t\bar{P}AP$．任意 Hermite 型与形式为$\sum_{i=1}^{p}\bar{x}_i x_i-\sum_{j=1}^{q}\bar{x}_{p+j}x_{p+j}$的型等价．这时,$(p,q)$称为$H(x)$的**符号差** (signature)．**正定 (负定,不定) Hermite 型** (positive definite (negative definite, indefinite) Hermitian form)可以和实二次型同样地来定义．下述条件的每一条都是H为正定 Hermite 型的充分必要条件：i) 当$x_1,\cdots,x_n$取复数值时,若$x\neq 0$,则$H(x)>0$; ii) H的矩阵的主子行列式都>0．半定 Hermite 型也可和二次型同样地来定义．

把 Hermite 型$\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i x_i$变为自身的线性变换称为**酉变换** (unitary transformation)．酉变换的矩阵是酉矩阵†．任意 Hermite 型H可以通过酉变换变为$\sum_{i=1}^{n}a_i\bar{x}_i x_i$，其中$a_1,\cdots,a_n$是$H$的矩阵的特征值．

Hermite 型可作如下推广．可除环† (division ring) K到它自身上的线性映射$a\to\bar{a}$,如果满足$\bar{\bar{a}}=a$，$\overline{ab}=\bar{b}\bar{a}$，则称为$K$的**对合** (involution)．此时，在K中取值的变量$x_1,\cdots,x_n$的式子$H(x)=\sum_{i,k=1}^{n}\bar{x}_i a_{ik}x_k$ $(a_{ik}=\bar{a}_{ki})$称为 Hermite 型．任意 Hermite 型与形式为$\sum_i \bar{x}_i a_i x_i$的 Hermite 型是等价的．而且当对于$x_1,\cdots,x_n$的任意值，存在K的元a使$H(x)=a+\bar{a}$时,则对H有类似于 Witt 分解的分解．下面是具有不是恒等映射的对合的可除环的两个例子: (i) K是域L的二次扩域; ii) K是域L上的四元数代数†．

【代数数域上的二次型】 设K是有限次代数数域,由K的 Archimedes 或非 Archimedes 素除子†$\mathfrak{p}$产生的K的完备化以$K_\mathfrak{p}$来表示．设Q,Q'是K上的非退化二次型．Q在K上表示Q',当且仅当Q在一切$K_\mathfrak{p}$中表示Q',因而使$Q(x)=0$的$x\in K$存在的充分必要条件是：对一切$\mathfrak{p}$，存在$x_\mathfrak{p}\in K_\mathfrak{p}$，使$Q(x_\mathfrak{p})=0$ (→[6], [7],[9])．特别是,Q与Q'在K上等价,当且仅当它们在所有$K_\mathfrak{p}$上等价．因此,代数数域K上的非退化二次型(关于等价性)的不变量是Q的秩n; Q的判别式Δ; 在K的各素除子†$\mathfrak{p}$中Q的 Minkowski-Hasse 特征标$\chi_\mathfrak{p}$; 对各实无限素除子†$\mathfrak{p}_{\infty,\lambda}(\lambda=1,\cdots,r_1)$，$Q$在$K_{\mathfrak{p}_{\infty,\lambda}}$上的惯性指数$j_\lambda$．$(n,\chi_\mathfrak{p},\chi_{\mathfrak{p}_{\infty,\lambda}},j_\lambda,\Delta)$是$K$上二次型的不变量组的充分必要条件是下面的 1)—4) 成立: 1) 对于除有限个$\mathfrak{p}$外的全部$\mathfrak{p}$,有$\chi_\mathfrak{p}=1$, 2) $\prod_\mathfrak{p}\chi_\mathfrak{p}=1$ (与范数剩余记号的乘积公式†等价), 3) 在$K_{\mathfrak{p}_{\infty,\lambda}}$中$\Delta\sim(-1)^{(n^2+j_\lambda)/2}$, 4) $\chi_{\mathfrak{p}_{\infty,\lambda}}=1$ $(j_\lambda\equiv 0,1,2,7 \pmod 8)$, $=-1$ $(j_\lambda\equiv 3,4,5,6 \pmod 8)$ (→[6], [7], [9])．这称为 **Minkowski-Hasse 定理**．一般地,如果对代数数域K某一命题成立的充分必要条件是该命题对所有的$K_\mathfrak{p}$成立，则称 **Hasse 原理** (Hasse principle) 对此性质成立．

【二次型的类与种】 设K是有限次代数数域．若K上二次型Q,Q'在K的主整环†$\mathfrak{o}$上等价,则称Q与Q'属于同**类** (class)．又若 i) 对于全部非 Archimedes 的素除子$\mathfrak{p}$，Q与Q'在$K_\mathfrak{p}$的主整环$\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$上等价，ii) 对于全部 Archimedes 的素除子$\mathfrak{p}$，Q与Q'在$K_\mathfrak{p}$上等价,则称Q

与 Q' 属于同**种**(英 genus 德 Geschlecht). 一个种是由有限个类合并而成的. 例如, 在有理数域中,若 $m \leqslant 8$,则 $\sum_{i=1}^{m} x_i^2$ 所属的种由一个类组成,若 $m > 8$,则由两个以上的类组成.

【实二次型的约化】 一般地引进下面的符号. 设 $\mathfrak{A}$ 是 m 阶方阵, $\mathfrak{X}$ 是 m 行 n 列的矩阵. 以 $\mathfrak{A}[\mathfrak{X}]$ 表示 ${}^t\mathfrak{X}\mathfrak{A}\mathfrak{X}$. 这时变量 $x_1, \cdots, x_m$ 的二次型以 $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = {}^t\mathfrak{x}\mathfrak{S}\mathfrak{x}$ 表示,此处 $\mathfrak{S}$ 是二次型的矩阵, $\mathfrak{x}$ 是以 $x_1, \cdots, x_m$ 为分量的列向量.

两个实二次型在有理整数环中等价时, 称为属于同**类** (class). 设 $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}](\mathfrak{S} = (s_{ij}))$ 是 m 个变量的正定二次型,如果对满足 $1 \leqslant k \leqslant m$ 的任意自然数 k, 和以有理整数 $g_1, \cdots, g_m$ $((g_k, \cdots, g_m) = 1)$ 为分量的向量 $\mathfrak{g}_k$, 总有 $\mathfrak{S}[\mathfrak{g}_k] \geqslant s_{kk}$, 而且 $s_{ll+1} \geqslant 0 (1 \leqslant l \leqslant m-1)$, 则 $\mathfrak{S}$ 称为**约化二次型** (reduced quadratic form). 任意正定型的类中,至少存在一个(一般只有一个)约化型. 若 $\mathfrak{R} = (r_{kl})$ 为约化的,则有不等式:

$$0 < r_{11} \leqslant r_{22} \leqslant \cdots \leqslant r_{mm};$$

$$\pm 2r_{kl} \leqslant r_{ll}, k < l;$$

$$r_{11}r_{22}\cdots r_{mm} < c(m)|\mathfrak{R}|$$

($c(m)$ 仅是 m 的函数). 一切 m 阶的对称矩阵组成 $m(m+1)/2$ 维线性空间,全体正定对称矩阵组成其中的凸开集 P, 全体正定约化型的集合 R 是以有限个超平面为边界, 以原点为顶点的凸角锥. 设 $\mathfrak{S}$ 是不定的二次型, $(n, m-n)$ 是它的符号差, 则使得 $\mathfrak{S}^{-1}[\mathfrak{H}] = \mathfrak{S}$ 的正定型 $\mathfrak{H}$ 的全体组成 $n(m-n)$ 维簇 $\mathfrak{H}(\mathfrak{S})$. 若 $\mathfrak{H}(\mathfrak{S})$ 和 R 有公共点, 则 $\mathfrak{S}$ 称为约化的. 关于上面定义的约化二次型, 当 D 是自然数时, 判别式为 $\pm D$ 的定或不定的约化有理整系数二次型的个数是有限的,因而判别式为 $\pm D$ 的有理整系数二次型的类的个数也是有限的.

【单位】 设 $\mathfrak{S}$ 是一个有理系数的 m 阶对称矩阵,以 $O(\mathfrak{S})$ 表示所有满足 $\mathfrak{S}[\mathfrak{W}] = \mathfrak{S}$ 的实系数 m 阶方阵 $\mathfrak{W}$ 的集合, 并以 $\Gamma(\mathfrak{S})$ 表示 $O(\mathfrak{S})$ 中系数是有理整数的方阵的集合. $\Gamma(\mathfrak{S})$ 的元称为 $\mathfrak{S}$ 的**单位** (unit). 若 $\mathfrak{S}$ 是定的, 则 $\Gamma(\mathfrak{S})$ 是有限群, 否则是无限群, 但在 $m=2, -|\mathfrak{S}| = r^2$ (r 是有理数)时除外. $O(\mathfrak{S})$ 是一个 Lie 群⁺, $\Gamma(\mathfrak{S})$ 是一个具有有限个生成元的离散子群. 齐性空间⁺ $O(\mathfrak{S})/\Gamma(\mathfrak{S})$ 对于定义于该空间上的一个 Haar 测度⁺来说,其测度是有限的.

【Minkowski-Siegel-玉河理论】 设 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ 分别是 m 次, n 次有理整系数的正定型 $(m \geqslant n)$. 以 $A(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ 表示方程 $\mathfrak{S}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{T}$ 的有理整数解的个数,而以 $E(\mathfrak{S})$ 表示单位所组成的群 $\Gamma(\mathfrak{S})$ 的阶数. 令:

$$M(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \frac{A(\mathfrak{S}_1, \mathfrak{T})}{E(\mathfrak{S}_1)} + \frac{A(\mathfrak{S}_2, \mathfrak{T})}{E(\mathfrak{S}_2)} + \cdots$$

$$M(\mathfrak{S}) = \frac{1}{E(\mathfrak{S}_1)} + \frac{1}{E(\mathfrak{S}_2)} + \cdots$$

$$A_0(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \frac{M(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})}{M(\mathfrak{S})},$$

此处 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \cdots$ 是 $\mathfrak{S}$ 的种所含的类的表示的一个完全系. $M(\mathfrak{S})$ 称为 $\mathfrak{S}$ 所属**种的测度** (德 Geschlechtsmass). 另一方面,对于自然数 q, 设同余式 $\mathfrak{S}[\mathfrak{X}] \equiv \mathfrak{T} \pmod q$ 的解的个数是 $A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$, 若 q 是素数幂 p^a, 则当 a 充分大时, $\varepsilon_{m,n} q^{-mn+n(n+1)/2} A_q(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ 是一个常数 (此处 $\varepsilon_{m,n}$ 当 $m = n \geqslant 2$ 时是 1/2, 其它情形等于 1). 令这个常数为 $\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$. 再者, 考虑 n 阶对称矩阵所构成的 $n(n+1)/2$ 维欧氏空间中含 $\mathfrak{T}$ 的一个区域 B, 并以 B_1 表示所有能使 $\mathfrak{S}[\mathfrak{X}] \in B$ 的 $\mathfrak{X}$ 所成的区域,则 B_1 是 m 行 n 列矩阵构成的 mn 维空间中的一个区域. 当 B 收敛于一点 $\mathfrak{T}$ 时,以 $\alpha_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ 表 B 与 B_1 的体积之比 $v(B_1)/v(B)$ 的极限, 此时 **Siegel 定理**可表为下形:

$$\alpha_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) \prod_p \alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \varepsilon A_0(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}),$$

$$\varepsilon = \begin{cases} 2, & m = n+1 \text{ 或 } m = n \geqslant 2, \\ 1, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

此处左边的无穷乘积当 $m = n = 2$ 或 $m = n+2$ 时条件收敛(不绝对收敛),乘积 $\prod_p$ 是按素数 p 的自然顺序取的.

这个定理的一个特殊情况是由 H. Minkowski 证明的, 但给出一般性的证明的是 C. L. Siegel ([10]). 除了有限个 p 以外, 一般的

$\alpha_p(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ 都已算出，而 $\alpha_\infty(\mathfrak{S}, \mathfrak{T})$ 的具体形式也已知道. 特别是，当 $\mathfrak{S}$ 是 m 阶单位矩阵 $\mathfrak{E}^{(m)}$ 时，这个式子与表自然数为 m 个平方和的问题有关. 对 $m=2, 3, \cdots, 8$, $\mathfrak{E}^{(m)}$ 的种只含有一个类，因此，令 $n=1$, $\mathfrak{T}=t$（自然数），我们由上式可以得到表 t 为 m 个平方和的方法的个数 (Siegel[10] 的 I). 上面的结果已由 Siegel 自己推广到不定二次型的情形(Siegel [10] 的 II)和以有限次代数数域的元为系数的二次型的情形 (Siegel [10] 的 III). 另外，关于表自然数 t 为 m 个平方和的问题，当 $m=4$, $n=1$ 时，C. G. J. Jacobi 得到了如下的结果:

$$A(\mathfrak{E}^{(4)}, t) = 8\left(\sum_{d|t} d - \sum_{4d|t} d\right),$$

而在 $m=3$, $n=1$ 时，若 t 为奇数，且 $A(\mathfrak{E}^{(3)}, t) > 0$, 则 $t \not\equiv 7 \pmod 8$ (详见 P. T. Bateman, Trans. Amer. Math. Soc., **77** (1951)).

玉河恒夫用代数群的阿代尔群†的理论，证明了正交群的玉河数† $\tau(SO(n, \mathfrak{S})) = 2$, 且可从这个公式导出上述的 Siegel 理论（→代数群[代数数域上的代数群]，[14]).

【ϑ 级数】 设 $Q(x_1, \cdots, x_m)$ 是 m 个变量的有理整系数正定二次型. 对于复数 z, 取

$$F(z, Q) = \sum_{x_1, \cdots, x_m} \exp(2\pi i Q(x_1, \cdots, x_m) z)$$

($x_1, \cdots, x_m$ 取遍全部整数)，若 z 的虚部为正数，则此级数收敛并表示 z 的一个整函数†. 这种形式的级数称为 **ϑ 级数** (theta series)。若把 $Q(x_1, \cdots, x_m) = n$ 的有理整数解的个数记作 $A(n)$, 则有

$$F(z, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} A(n) e^{2\pi i n z}.$$

特别是，若 $m=2k$ 为偶数，则下面的**变换公式** (transformation formula) 成立:

$$F\left(\frac{az+b}{cz+d}, Q\right) = \varepsilon(d)(cz+d)^k F(z, Q).$$

其中 a, b, c, d 是满足 $ad-bc=1$, $c \equiv 0 \pmod N$ 的任意整数，N 是由 Q 确定的自然数，ε 是 mod N 的特征标. 换言之，$F(z, Q)$ 成为对于级为 N 的同余子群†的模形式†. E. Hecke 应用模形式的理论，证明了下式成立:

$$A(n) = A_0(n) + O(n^{k/2}).$$

此处 $A_0(n)$ 是只由 Q 的种所确定的 n 的数论函数. 关于一般 ϑ 级数→ Abel 簇[Θ 函数].

【有理整系数二元二次型】 以下设 $m=2$, 对于有理整系数二次型 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, 我们令判别式为 $b^2 - 4ac = D(Q)$ (对前面的定义的 $\Delta(Q)$ 乘以 -4). 当 $(a, b, c) = 1$ 时，Q 称为**本原的** (primitive). $D(Q)$ 不是平方数时，二次型的理论与二次域† $\mathbf{Q}(\sqrt{D}) = k$ 的数论有密切的关系. 设 k 的判别式为 d, 令 $D = df^2$. 在 $f=1$ 时，k 的理想类与以 d 为判别式的二次型的类 ($D<0$ 时是正定型的类)依下述方式一一对应. 设 $\mathfrak{a}$ 为 k 的一个理想，取它的一个基 α_1, α_2, 则对应于 $\mathfrak{a}$ 的二次型为 $Q(x, y) = N(\mathfrak{a})^{-1} N(\alpha_1 x + \alpha_2 y)$, 这里 N 表示绝对范数. 在 $f>1$ 时必须考虑前导子† f 的整环†，即如果我们考虑所有形式为 $x + fy\omega$ (x, y 是有理整数，ω 的意义见下文) 的数所构成的整环，则可与上面的方式同样地得到此整环的理想类与二次型的类之间的一一对应 (P. G. L. Dirichlet [16]). 对于 $D>0$ 的情形，如果我们对二次型的等价只限于用 $|\mathfrak{U}|=1$ 的变换 $\mathfrak{U}$, 那么就可以作出较精密的分类. 在 $\mathfrak{a} \to Q$ 的对应中，若取

$$\alpha_1 = r > 0, \quad \alpha_2 = s + t\omega, \quad t > 0,$$

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d}/2 & d \equiv 0 \pmod 4, \\ (1+\sqrt{d})/2, & d \equiv 1 \pmod 4) \end{cases}$$

(r, s, t 是有理数)，则得到 k 的理想的狭义分类与二次型的分类之间的关系(→高木貞治[15]).

设判别式 $D>0$ 不是平方数，Pell 方程† $t^2 - Du^2 = \pm 4$ 的整数解是 t, u, 则以 D 为判别式的 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ 的单位由

$$\pm \begin{pmatrix} (t-bu)/2 & -cu \\ au & (t+bu)/2 \end{pmatrix}$$

给出. 设 $t^2 - Du^2 = 4$ 的最小正整数解为 t_0, u_0, 令 $\varepsilon_D = (t_0 + u_0\sqrt{D})/2$, h_D 是以 D 为判别式的二次型的狭义类的个数，则有下面的公

式 (Dirichlet):

$$D^{-\frac{1}{2}}h_D \log \varepsilon_D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{D}{n}\right),$$

此处 $\left(\frac{D}{n}\right)$ 是 Kronecker 符号† $\left(f^2d = D\text{; 若 } (f, n) \neq 1\text{, 则令 } \left(\frac{D}{n}\right) = 0\text{; 若 } (f, n) = 1\text{, 则令 } \left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{d}{n}\right)\right)$ 在 $D < 0$ 时,单位的个数当 $D = -3$ 时是 6; $D = -4$ 时是 4; 其他情形是 2. 设这个数是 w_D, 和上面一样,有

$$2\pi|D|^{-\frac{1}{2}}\frac{h_D}{w_D} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)n^{-1}.$$

至于 h_D, ε_D 的值,除此之外,再没有什么更确切的了解.

【参】 [1] 高木貞治,代数学講義,共立出版, 1930,修订版 1965; [2] 藤原松三郎,代数学 II, 内田老鶴圃, 1929; [3] 浅野啓三,線型代数学提要,共立出版, 1948; [4] 佐武一郎,行列と行列式,裳華房, **1958**; [5] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, Chap. 9, Actualités Sci. Ind. 1272a, Hermann, 1959; [6] M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer, 1952; [7] O. T. O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer, 1963; [8] E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, J. Reine Angew. Math., **176** (1937), 31—44; [9] 佐武一郎,2次形式の理論,東大セミナリー・ノート I, II, 1964; [10] C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen I, II, III, Ann. of Math., **36** (1935), 527—606, **37** (1936), 230—263, **38** (1937), 212—291 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 1, p. 326—405, 410—443, 469—548); [11] C. L. Siegel, On the theory of indefinite quadratic forms, Ann. of Math., **45** (1944), 577—622 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 2, p. 421—466); [12] E. Hecke, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math. -Fys. Meddelelser XIII, **12** (1940) (Math. Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959, p. 789—918); [13] G. L. Watson, Integral quadratic forms, Cambridge Univ. Press, 1960; [14] T. Tamagawa (玉河恒夫) Adèles, Proc. of Symposia in Pure Math. IX: Algebraic groups and discontinuous subgroups (1966), p. 113—121. 关于二元二次型: [15] 高木貞治,初等整数論講義,共立出版, 1931; [16] P. G. L. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 第四版, 1894 (Chelsea, 1969).

环 [英 ring 法 anneau 德 Ring 俄 кольцо 日 環] 【环的定义】 若在集合 A 中定义了加法 $(a, b) \to a + b$ $(a, b \in A)$ 及乘法 $(a, b) \to ab$ $(a, b \in A)$,使得对于加法, A 构成加法群(即有 1) $a + b = b + a$; 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$; 3) 对于任意的 a, b, $a + x = b$ 有且仅有一解), 而且乘法满足条件: 4) $(ab)c = a(bc)$ (结合律); 5) $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ (**分配律** (distributive law)) $(a, b, c \in A)$, 则 A 称为一个**环**. 若把乘法 $A \times A \to A$ 看作是 A 到 A 上的作用, 则 A 是左 A 模†, 右 A 模† 以及两侧 A-A 模†. (→模). 关于 A 的加法的单位元称为**零元** (zero element), 记作 0 ; $a0 = 0a = 0$ $(a \in A)$ 成立. 如果某一元 $e \in A$ 满足 $ae = ea = a$ $(a \in A)$, 则 e 称为 A 的**单位元** (unit element 或 identity element). 若单位元存在, 则它是唯一的, 常记作 1. 具有单位元的环称为**单式环** (unitary ring). 在数学各个领域中具体出现的重要的环, 大都是具有单位元的, 因而所谓环常指单式环. 在由一个元构成的环中,零元也是单位元,这样的环称为**零环** (zero ring). 在有两个以上的元的环中,单位元与零元不同. 若环 A 还满足条件: 6) $ab = ba$ (交换律),则 A 称为**交换环** (commutative ring) (→交换环).

【一些定义】 对于环 A 的元 $a \neq 0$, 若有 $b \neq 0$ 使得 $ab = 0$ 或 $ba = 0$,则 a 称为**零因子** (zero divisor). 含有两个以上的元且无零因子的交换单式环,称为**整环** (integral domain) (→交换环). 在一般的环中, 若 $ab = ba = 0$, 则称 a 与 b 是**正交的** (orthogonal). 若对环中的一个元 a, 存在某个自然数 n, 使 $a^n = 0$, 则 a 称为**幂零元** (nilpotent element). 若 a 满足 $a^2 = a$, 则 a 称为**幂等元** (idempotent element). 若幂等元 e $(e \neq 0)$ 不能表成两个正交的非零幂等元的和, 则 e 称为**本原幂等元** (primitive idempotent element). 对环 A 的子集 S, T, 元 $s + t$ $(s \in S, t \in T)$ 的集合记作 $S + T$; 元 st $(s \in S, t \in T)$ 的集合记作 ST. 特别地, SS 记作 S^2. S^3, S^4, $\cdots$ 也类似. $\{a\} + S$, $\{a\}S$ 等分别记作 $a + S$, aS. 若 $ST = TS = \{0\}$, 则称 S, T 是**正交**的. 若有自然数 n 使 $S^n = \{0\}$, 则 S 称为**幂零的** (nilpotent). 若 $S^2 = S$, 则 S 称为**幂等的** (idempotent).

对单式环 A 的元 a, 满足 $a'a = 1$ 的元 a'

称为 a 的**左逆元** (left inverse element)，满足 $aa''=1$ 的元 a'' 称为 a 的**右逆元** (right inverse element)．元 a 存在左(右)逆元，当且仅当 A 作为左(右) A 模是由 a 所生成的．若 $a\in A$ 既有左逆元又有右逆元，则这两个逆元相等，且仅有一个，称为 a 的**逆元**(inverse element)，以 a^{-1} 表示．有逆元的元称为**可逆元** (invertible element) 或**正则元** (regular element)．单式环的全部可逆元关于乘法构成一个群．若非零环的单式环的非零元都是可逆元，则这样的环称为(非交换)域† ((skew) field, division ring)．若它又满足交换律，则称为**交换域** (commutative field) 或简称域(→域)．在一般的环 A 中，若令 $a\circ b=a+b-ab$ 以定义一个新的乘法 $(a,b)\to a\circ b$，则 A 构成一个以 0 为(关于新定义的运算的)单位元的半群†．对于这个新的乘法的逆元称为**拟逆元** (quasi-inverse element)．有拟逆元的元称为**拟可逆元**(quasi-invertible element)或**拟正则元** (quasi-regular element)．单式环的元 a 是拟可逆元的充分必要条件是 $1-a$ 是可逆元．

【环的例子】 i) 数环．有理整数环 $\boldsymbol{Z}$，有理数域 $\boldsymbol{Q}$，实数域 $\boldsymbol{R}$，复数域 $\boldsymbol{C}$ 等都是很常用的例子 (→代数数域的数论，局部域的数论)．ii) 函数环．定义于集合 I 上、取值于数环 K 中的全部函数的集合 K^I，关于值的运算构成交换环．特别是，若 $K=\boldsymbol{R}$ 而 I 是区间，则 I 上的全部连续函数的集合 $C^0(I)$，全部 r 次连续可微函数的集合 $C^r(I)$，全部解析函数的集合 $C^\omega(I)$ 等都是 $\boldsymbol{R}^I$ 的一个子环．iii) 表达式环．以一个交换环的元为系数的、字母 $X_1,\cdots,X_n$ 的所有多项式的集合 $K[X_1,\cdots,X_n]$，所有形式幂级数的集合 $K\{X_1,\cdots,X_n\}$ 都是交换环(→多项式环，幂级数环)．iv) 模的自同态环†．环 K 上的模† M 的所有自同态的集合 $\mathscr{E}_K(M)$，一般是非交换环．特别是，当 M 是域 K 上的有限维线性空间†时，M 的自同态环与全阵环可看作是等同的(→模，线性空间)．v) 代数．环 A 称为交换环 K 上的代数，如果它同时是 K 上的一个单式模，而且乘法与数乘是交换的，即 $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)(\lambda\in K, a,b\in A)$．例 ii) 与 iii) 中的环都是 K 上的代数．例 iv) 中的环在 K 是交换环时，也是 K 上的代数．还有特殊的代数，如群代数†，张量代数†，Grassmann 代数†，Clifford 代数†等，它们在群论与微分几何学中是有用的(→代数)．(vi) 交换环．对交换环加上各式各样条件的例子有：主理想环†、Dedekind 环†、Krull 环†以及赋值环†、局部环†等，它们在数论与代数几何学中是重要的 (→交换环，Noether 环，赋值)．vii) 其他．在环上赋予与环结构有关的顺序、微分、度量或拓扑而得到的有序域†、微分环†、赋范环†、拓扑环†等，在数学的各个领域中也都是很重要的 (→Banach 代数)．

【同态】 若环之间的映射 $f:A\to B$ 满足条件：1) $f(a+b)=f(a)+f(b)$；2) $f(ab)=f(a)f(b)$ $(a,b\in A)$，则称它为**同态** (homomorphism)．若 f 是双射†，则逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 也是同态．这时 f 称为**同构** (isomorphism)．我们也用更明确的**环同态** (ring homomorphism)和**环同构** (ring isomorphism) 这样的术语．任意环到零环上的同态只有一个．设 A,B 是单式环，同态 $f:A\to B$ 称为**单式** (unitary) 同态，如果对于 A 的单位元 1，$f(1)$ 是 B 的单位元．不作特别声明时，我们通常总是假定这个条件成立．在这样的意义下，有理整数环 $\boldsymbol{Z}$ 到任意单式环的同态是唯一的．同态的合成仍是同态．环 A 的恒等映射 1_A 是同构．环 A 到 A 自身的同态与同构分别称为 A **的自同态** (endomorphism) 与**自同构** (automorphism)．若 a 是单式环 A 的可逆元，则映射 $x\to axa^{-1}(x\in A)$ 是 A 的自同构，它称为**内(自)同构** (inner automorphism)．

如果把同态的条件 2) 换成 2′) $f(ab)=f(b)f(a)$ $(a,b\in A)$，则满足 1)，2′) 的映射称为**反同态**(anti-homomorphism)．特别是，若 f 是双射，则其逆映射也是反同态，称为**反同构** (anti-isomorphism)．**反自同态**(anti-endomorphism) 和**反自同构** (anti-automorphism) 也可类似地定义．

【子环，商环，直积环】 如果环 A 的子集 S 具有环的结构，且标准单射 $S\to A$ 是同态，则 S 称为 A 的**子环** (subring)．于是，S 的环运算无

非就是A的环运算的限制．若只考虑单式环与单式同态，则S必含有A的单位元．包含环A的子集T的最小子环称为由T**生成**(generate)的子环．与T的每个元可交换的全部元构成一个子环，称为T的**中心化子**(centralizer, commutor)．特别是，A的中心化子称为A的**中心**(centre)．

若对于环A的等价关系R所产生的商集†A/R给以环的结构，且标准满射$A \to A/R$是同态，则环A/R称为A的**商环**(quotient ring)．A/R的元α, β的和与积，分别是属于α, β的任意元a, b的和与积所属的等价类．在A/R上能确定这样的运算，当且仅当R与(A的)运算是相容的，即条件"若$R(a, a')$，$R(b, b')$，则$R(a+b, a'+b')$，$R(ab, a'b')$"成立．当A不存在非平凡商环时，A称为**拟单环**(quasi-simple ring)(→[半单环])．若$f: A \to B$是环同态，则f的象$f(A)$是B的子环，且f所确定的A的等价关系$R(R(a, a') \Leftrightarrow f(a) = f(a'))$与$A$的运算相容，因此$f$诱导出同构$A/R \to f(A)$(→[理想])．

设$\{A_i\}_{i \in I}$为一族环，它们的直积集$A = \prod_{i \in I} A_i$由分量的运算$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i)$，$(a_i)(b_i) = (a_i b_i)$确定了环的结构，称为$\{A_i\}_{i \in I}$的**直积环**(direct product ring)．使它的每一元对应于该元的第i个分量的映射$p_i: A \to A_i$称为标准同态．对任何同态$f_i: B \to A_i (i \in I)$，存在唯一的同态$f: B \to A$，使对每一个$i \in I$，有$f_i = p_i \circ f$．

【理想】 作为左(右)A模的环A的子模†称为A的**左(右)理想**(left (right) ideal)．即对于A的加法的子群J满足条件$AJ \subset J$ ($JA \subset J$)时，J称为左(右)理想．J自身关于诱导出的运算是一个(不一定有单位元的)环．若左理想同时也是右理想，则它称为**双边理想**(two-sided ideal)或简称**理想**(ideal)．

对于A的理想J，把$a - b \in J$记作$R(a, b)$．关系R是一个等价关系，且与A的运算相容．关于R的等价类就是模J的**剩余类**(residue class)．所以商环A/R也表示为A/J，称为A的模J的**剩余(类)环**(residue-class ring, factor ring)．若它是域，则称为**剩余(类)域**(residue-class field)．反之，若给出与A的运算相容的任一等价关系R，则0的等价类J形成A的理想，而由J所确定的等价关系与R相同．

环同态$f: A \to B$的(作为模同态的)核†J是A的理想，且f诱导出一个同构$A/J \to f(A)$(同态定理)．对于环A的子环S与理想J，$S+J$是A的子环，$S \cap J$是S的理想．再者，自然同态$S \to (S+J)/J$诱导出同构$S/S \cap J \to (S+J)/J$(同构定理)．

环A的(左，右)理想J称为**极大的**(maximal)，如果$A \neq J$，且A中满足$J \subsetneq J'$的(左，右)理想J'只能是A．同样，J称为**极小的**(minimal)，如果$J \neq \{0\}$且满足$J' \subsetneq J$的(左，右)理想J'只能是$\{0\}$．

对于单式环A的幂等元e，$1-e$是与e正交的幂等元，且$A = Ae + A(1-e)$是左理想的直和．这称为**Peirce 左分解**(Peirce's left decomposition)．右分解也同样．A的一个左理想J可由一个幂等元e表成$J = Ae$的形式的充分必要条件是：存在左理想J'，使A可分解成J与J'的直和$A = J + J'$．一般地，若正交幂等元$e_1, \cdots, e_n$之和是1，则$A = Ae_1 + \cdots + Ae_n$是左理想的直和．反之，对于左理想的直和$A = J_1 + \cdots + J_n$，若$1 = e_1 + \cdots + e_n (e_i \in J_i)$，则$e_1, \cdots e_n$是正交幂等元．特别是，若$J_1, \cdots, J_n$是双边理想，则每个$J_i$都是一个以$e_i$为单位元的环．由自然对应，$A$与直积环$\prod_{i=1}^{n} J_i$同构．这时，$A$称为理想$J_1, \cdots, J_n$的**直和**(direct sum)，记作$A = \sum_{i=1}^{n} J_i$或$A = J_1 \oplus \cdots \oplus J_n$．

若环A作为左(右)A模是 Artin 的†(即对于A的左(右)理想满足极小条件†)或 Noether 的†(即对于A的左(右)理想满足极大条件†)，则A分别称为**左(右) Artin 环**(left (right) Artinian ring)或**左(右) Noether 环**(left (right)

Noetherian ring). 对于交换环，由于无须区分左右，因此可以去掉左与右的字样. 上面的性质可传递到商环与有限个环的直积环，但不一定能传递到子环. 对于一般的环，左(右)理想的极大条件与极小条件是独立的，但在单式环的情形，左(右) Artin 环必是左(右) Noether 环(秋月康夫-C. Hopkins).

【半单环】 单式环 A 作为左 A 模是半单[†]的等价于 A 作为右 A 模也是半单的，这时 A 称为**半单环** (semi-simple ring)(→[根基]). 半单环上的每个模也是半单的. 半单环是左(右) Artin 环，也是左(右) Noether 环. 半单环 A 称为**单环** (simple ring)，如果它不是 $\{0\}$，而且除了 $\{0\}$ 与 A 以外没有其他理想，即它是拟单环. 所以，A 是单环当且仅当 A 是非零的、单式的、拟单的左(右) Artin 环. 任意半单环 A 只有有限个极小理想 $A_1, \cdots, A_n$，而且 A 可分解成它们的直和 $A=A_1\oplus\cdots\oplus A_n$，其中每个 A_i 都是单环，称为 A 的**单分量** (simple component). A 的任一理想都可表示为 A 的有限个单分量的直和. 半单环的商环以及有限个半单环的直积都是半单的.

半单环 A 的任一左(右)理想都可用一个幂等元 e 表成 $Ae(eA)$ 的形式. $Ae(eA)$ 是极小的，当且仅当 e 是本原的. 特别是，极小左(右)理想是包含在某一个单分量中的单左(右) A 模. 两个极小左(右)理想作为 A 模同构的充分必要条件是它们都包含在同一个单分量中. 若 A 的单分量是 $\{A_i\}_{1\leq i\leq n}$，则对任一单 A 模 M，存在唯一的 i，使得 $A_iM\neq\{0\}$，且 M 与包含在 A_i 内的一个极小左理想同构.

若 M 是某一(非交换)域 D 上的有限维线性空间，则其自同态环 $A=\mathscr{E}_D(M)$ 是单的. 反之，对任意环 A，单 A 模 M 的自同态环 $D=\mathscr{E}_A(M)$ 是(非交换)域 (**Schur 引理**). 若 A 是单环，则任何单 A 模 M 都可看成 $D=\mathscr{E}_A(M)$ 上的一个有限维线性空间，且 A 与 $\mathscr{E}_D(M)$ 同构 (**Wedderburn 定理**). 若 M 在 D 上是 r 维的，则 $\mathscr{E}_D(M)$ 与 D 的反同构域 D^0 上的 r 阶全阵环 $M_r(D^0)$ 同构. 维数 r 等于 A 作为 A 模的长[†]. $A=\mathscr{E}_D(M)$ 的中心与 D 的中心同构，它是一个交换域. 因此，一个单环是交换域上的一个代数(→代数).

【根基】 对任意的环 A，在仅由拟可逆元所构成的理想中，存在一个最大的这样的理想，它称为 A 的**根基** (radical)，记作 $\mathfrak{R}(A)$. 剩余类环 $A/\mathfrak{R}(A)$ 的根基是 $\{0\}$. 若 $\mathfrak{R}(A)=\{0\}$，则环 A 称为**半本原环** (semiprimitive ring). 如果环 A 有一个一一[†]单左(右) A 模，则它称为**左(右)本原环** (primitive ring). 使得剩余类环 A/J 是左(右)本原环的所有理想 J 的交就是 $\mathfrak{R}(A)$. 在单式环 A 中，它的所有极大左(右)理想的交与 $\mathfrak{R}(A)$ 相同. 再者，在一个左(右) Artin 环 A 中，根基 $\mathfrak{R}(A)$ 是 A 的最大幂零理想，而 $\mathfrak{R}(A)=\{0\}$ 等价于 A 是一个半单环.

对任意的环 A，在仅由幂零元所构成的理想中，存在一个最大的这样的理想，称为 A 的**幂零根基** (nilradical)，以 $\mathfrak{N}(A)$ 表示，也常简称为根基(→交换环). $\mathfrak{N}(A/\mathfrak{N}(A))=\{0\}$. 一般来说，$\mathfrak{N}(A)\subset\mathfrak{R}(A)$，而当 A 是左(右) Artin 环时，$\mathfrak{N}(A)=\mathfrak{R}(A)$. 若 $A/\mathfrak{N}(A)$ 是左(右) Artin 环因而是半单环，则称 A 是**半准素环** (semiprimary ring). 若 $A/\mathfrak{N}(A)$ 是单的，则 A 称为**准素环** (primary ring). 若 $A/\mathfrak{N}(A)$ 是(非交换)域，则 A 称为**完全准素环** (completely primary ring). 准素环与完全准素环上的全阵环同构.

【参】[1] 正田建次郎，抽象代数学，岩波，1932; [2] 浅野啓三，環論及びイデアル論，共立出版，1949; [3] 中山正-東屋五郎，代数学 II，岩波，1954; [4] 弥永昌吉-小平邦彦，現代数学概説 I，岩波，1961; [5] B. L. van der Waerden, Algebra I, II, Springer, 1955, 1959 (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学 I 1963, II 1976，科学出版社); [6] N. Jacobson, The theory of rings, Amer. Math. Soc. Surveys, 1943; [7] E. Artin - C. J. Nesbitt-R. M. Thrall, Rings with minimum condition, Univ. of Michigan Press, 1944; [8] N. Jacobson, Structure of rings., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1956; [9] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 1, 8, Actualités Sci. Ind., 1144b, 1261a, Hermann, 1964, 1958; [10] C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra, Academic Press, 1956; [11] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra I, van Nostrand, 1951 (中译本：N. 贾柯勃逊，抽象代数学，卷 1，科学出版社，1960); [12] R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann, 1963; [13] J. P. Jans, Rings and homology, Holt-Rinehart-Winston, 1964; [14] S. Lang, Algebra,

Addison-Wesley, 1965; [15] N. H. McCoy, The theory of rings, Macmillan, 1964.

代数 [英 algebra　法 algèbre　德 Algebra　俄 алгебра　日 多元環] 【基本概念】 设K是具有单位元 1 的交换环(→环 [环的定义]), A是一个环, 同时又是单式†K模 (→模). 如果 $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$ $(\lambda\in K,\ a,\ b\in A)$ 成立,则A称为**环 K 上的代数** (algebra over K), 常简记为 A/K. 对于代数, 作为环的术语与作为模的术语可以随意使用. K称为A的系数环†或基环. 特别是,当K为域时,称为系数域或基域, 对这种情形的代数已经进行了很详细的研究. **零代数**(zero algebra),**单式代数**(unitary algebra), **交换代数** (commutative algebra), **(半)单代数**((semi-)simple algebra), **可除代数** (division algebra) 等概念,可由作为环的性质来定义(→环). 同时考虑环的结构和模的结构这两个方面, 就能自然地定义同态、同构等概念,它们可以更具体地称为**代数同态** (algebra homomorphism) 与**代数同构**(algebra isomorphism). 与此相联系,**子代数** (subalgebra), **商代数** (quotient algebra)(**或剩余(类)代数**(residue class algebra)), **直积代数** (direct product algebra) 等, 与环的情形同样地定义。代数A的理想†是这样定义的: 它是作为环的A的理想, 同时又是系数环上的模A的子模. 因此, 在这个意义下, 作为一个环, 代数A的根基也是代数A的理想. 关于单式代数A, 由于它有单位元, 所以作为环的理想也就是代数的理想。

在本条中, 我们今后总是假定所有环都有单位元,而同态总是单式的,因而只考虑公有单位元的子环. 若K上的代数 A 的单位元是 e, 则对应 $\lambda\to\lambda e=\lambda'(\lambda\in K)$ 确定同态 $K\to A$. 它的象 Ke 包含在A的中心†内,而且纯量倍 λa 等于积 $\lambda' a$ $(\lambda\in K,\ a\in A)$. 反之, 由K到A的同态,如果它的象包含于A的中心内,则可用显然的方法使A成为K上的代数. 因此, 给出K上的一个代数A等价于给出一个环A与一个同态 $\rho: K\to A$ 的对 (A,ρ), 使K的象包含在A的中心内. 因为有理整数环 $\boldsymbol{Z}$ 到任意环的(单式)同态唯一存在,所以可把任意的环看作$\boldsymbol{Z}$上的代数. 当K是域时,对于K上的非零代数 A, 可以把K看作包含于A的中心内的子域. 这时K的单位元 1 就是A的单位元.

对于K上的代数 A,B, 在作为K模的张量积 $A\otimes_K B$ 中, 由 $(a\otimes b)(a'\otimes b')=aa'\otimes bb'$ $(a,\ a'\in A,\ b,\ b'\in B)$ 来作乘法,这样形成的K上的代数 $A\otimes_K B$ 是唯一确定的. 这一代数称为 A, B 的**张量积代数**(tensor product algebra). 对应 $a\to a\otimes 1,\ b\to 1\otimes b$ $(a\in A,\ b\in B)$ 分别确定代数同态 $A\to A\otimes_K B$, $B\to A\otimes_K B$,它们称为标准同态. 特别是, 当A是交换代数时,由这一同态,可把 $A\otimes_K B$ 看作A上的代数. 在这种情形, $A\otimes_K B$ 称为把B的系数环K扩张到A而得的代数, 常以 B^A 表示. 代数 $K\otimes_K B$ 与B是标准同构的. 再者, $(A\otimes_K B)\otimes_K C$ 与 $A\otimes_K(B\otimes_K C)$ 也是标准同构的,记作 $A\otimes B\otimes C$. 设 A, B 都是K上的交换代数. 这时, 对于任意交换代数C与同态 $\alpha: A\to C$, $\beta: B\to C$, 存在唯一的同态 $\gamma: A\otimes B\to C$, 满足条件 $\alpha(a)=\gamma(a\otimes 1)$, $\beta(b)=\gamma(1\otimes b)$ $(a\in A,\ b\in B)$. 对于交换代数 A, B, 这一性质刻划了张量积 $A\otimes B$. 在这个意义下, $A\otimes B$ 有时也称为 A, B 的对偶直积(→范畴和函子 [直积与对偶直积]).

【代数的例子】 如前所述, 任意环可看作是有理整数环 $\boldsymbol{Z}$ 上的代数. 但是, 考虑"较大的"或更"合适的"系数环上的代数,常常是有用的. 例如,在交换环K中取值的各种函数环,系数在K中的n元多项式环与幂级数环, 以及K模的自同态环,K上的n阶全阵环等,都是K上的代数(→环[环的例子]). 其他一些重要的代数,如以下将加以阐述的(半)群代数、Hecke 代数、叉积代数等,都是由一个与(半)群结构相关联的标准基来定义的代数. 另一方面, 线性空间的张量代数† 与外代数†, 以及与一个给定的二次型相伴的 Clifford 代数†等, 也都是很重要的(→线性空间, Clifford 代数).

四元数体 (quaternion field) $\boldsymbol{H}$ (或 **Hamilton 的四元数体**) (W. R. Hamilton, 1858) 给出

了最常用的可除代数的例子．它是实数域$\boldsymbol{R}$上的四维线性空间，基是 1, i, j, k, 1是乘法单位元，而 $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$, $ki=-ik=j$. $\boldsymbol{H}$的元称为**四元数**(quaternion)．以实数域为系数域的有限维可除代数，只能是实数域，复数域，或四元数体．

【群代数与 Hecke 代数】 设K是交换环，考虑以群 G 为指标集的模 K_s 的直和 $K^{(G)}$，这里每个 K_s 同构于K(→模[直积与直和])．$K^{(G)}$的元是K的元的族 $(\lambda_s)_{s\in G}$，其中只有有限个分量不为 0．设 $\{u_s\}_{s\in G}$ 是 $K^{(G)}$ 的标准基，即 u_s是$K^{(G)}$的元，其第 s 个分量是 1，其余分量都是 0．若用 $u_s u_t=u_{st}$ $(s, t\in G)$ 来定义乘法，则 $K^{(G)}$ 构成K上的一个代数，称为G在K上的**群代数**(group algebra)．于是，$K^{(G)}$的两个元 $\lambda=(\lambda_s)$, $\mu=(\mu_s)$的积 $\lambda*\mu$ 由

(1) $$(\lambda*\mu)_s=\sum_{s=rl}\lambda_r\mu_l,\ s\in G$$

所给出．往往把 μ_s 与 s 看作相同，因而把G看作$K^{(G)}$的基．在这种情形，$K^{(G)}$ 记作 KG 或 $K[G]$.

在上面的定义中，G也可以是半群．在这种情形，代数 $K^{(G)}$ 称为**半群代数**(semigroup algebra)．例如，设 $\boldsymbol{N}$ 是 0 与全体正整数关于加法所成的半群，以 $\boldsymbol{N}^n$ 表 n 个N的直积．把 $\boldsymbol{N}^n$ 的元 $(i_1, \cdots, i_n)$ 改写成 $X_1^{i_1}, \cdots, X_n^{i_n}$，把加法改为乘法，则$K$上 $\boldsymbol{N}^n$ 的半群代数恰好是多项式环† $K[X_1,\cdots,X_n]$．另外，当G是半群时，即使它是无穷的，仍然可能对任何 $s\in G$，只有G的有限对元 (r, l)，使 $s=rl$．在这种情形下，直积模 K^G 中的乘法仍然由(1)定义．这个代数称为 K 上 G 的**大半群代数**(large semigroup algebra)，而 $K^{(G)}$ 是它的子代数．例如，若取上面的 $\boldsymbol{N}^n$ 作为 G，则得幂级数环† $K\{X_1, \cdots, X_n\}$.

其次，取群G和它的一个子群H，并假定它们满足条件"关于任意的 $s\in G$, $H\cap sHs^{-1}$ 在H中的指数是有限的"，这个条件等价于"G 由 H 产生的任何一个重陪集都是有限个左陪集的并，也同样是有限个右陪集的并"．由H产生的所有左陪集、右陪集和重陪集的集合，分别记作$H\backslash G$, G/H和$H\backslash G/H$，于是直和模$K^{(H\backslash G)}$, $K^{(G/H)}$, $K^{(H\backslash G/H)}$ 的元，可看作是定义于G上而在每个左陪集、右陪集或重陪集上取常值的函数．反之，任何定义于G上的函数都可看作 $K^{(H\backslash G)}$, $K^{(G/H)}$ 或 $K^{(H\backslash G/H)}$ 的元，如果它分别在每个左陪集、右陪集或重陪集上取常值，且除了在有限个相应类型的陪集以外，都取值 0．以下我们就自由地把这两者看作等同．设函数λ: $G\to K$ 在 $s\in G$, $l\in H\backslash G$, $r\in G/H$, $t\in H\backslash G/H$ 上所取的值分别为 $\lambda_s, \lambda_l, \lambda_r, \lambda_t$，则对于 $\lambda, \mu\in K^{(H\backslash G/H)}$，函数 $\lambda*\mu$ 由下式定义：

(2) $$(\lambda*\mu)_s=\sum_{s\in rl}\lambda_r\mu_l,\ s\in G,$$

这里右端是对所有满足 $s\in rl$, $r\in G/H$, $l\in H\backslash G$ 的 (r, l) 求和．实质上它是有限和，因而易知 $\lambda*\mu\in K^{(H\backslash G/H)}$，所以模 $K^{(H\backslash G/H)}$ 关于这一乘法成为K上的代数．它称为 (G, H) 在K上的 **Hecke 代数**(Hecke algebra)，常记成 $\mathscr{H}_K(G, H)$．当 $H=\{e\}$ 时，$\mathscr{H}_K(G, H)$ 恰好是 G 的群代数．一般地，$\mathscr{H}_K(G, H)$ 可看作是把 $\mathscr{H}\boldsymbol{Z}(G, H)$ 的系数环扩张到K所得的代数．$K^{(H\backslash G)}$(或 $K^{(G/H)}$) 构成群代数 $K^{(G)}$ 上的右(或左)模，在这个意义下的自同态环 $\mathscr{E}_{K^{(G)}}(K^{(H\backslash G)})$ (或 $\mathscr{E}_{K^{(G)}}(K^{(G/H)})$) 与 Hecke 代数 $K^{(H\backslash G/H)}$ 是标准同构(或反同构)的．

【一般的叉积】 设G为一群，其元运算于交换环L上，这种运算以 $(s, \lambda)\to s(\lambda)$ $(s\in G, \lambda\in L)$ 表示；即对于任何 $s\in G$，映射 $\lambda\to s(\lambda)$ $(\lambda\in L)$ 是 L上的一个满足 $s(t(\lambda))=st(\lambda)$ $(s, t\in G)$ 的自同构．对于任何 $\lambda, \mu\in L^{(G)}$，我们定义 $\lambda*\mu\in L^{(G)}$ 如下：

(3) $$(\lambda*\mu)_s=\sum_{s=rl}\lambda_r r(\mu_l)f(r, l),\ s\in G,$$

其中 $\{f(r, l)\}_{r,l\in G}$ 是L的元的预先给定的族．假定这族元素满足条件

$$f(s, r)f(sr, l)=s(f(r, l))f(s, rl),$$
$$s, r, l\in G,$$

则 $L^{(G)}$ 形成一个环．基于标准基 $\{u_s\}_{s\in G}$，这个环的结构由 $u_r u_l=f(r, l)u_{rl}$, $u_s\lambda=s(\lambda)u_s$ $(\lambda\in L)$ 来确定．设K是L中所有满足$s(\lambda)=\lambda$

$(s \in G)$ 的 λ 所构成的子环，则环 $L^{(G)}$ 是 K 上的一个代数，称为关于给定的 G 的运算以及给定的**因子组** (factor set) f 的 L 与 G 的**叉积** (crossed product)．在较窄的意义下，只考虑 L 是域，G 是有限群，$f(r, l) \neq 0$，以及 G 在 L 上的运算是一一的情形．在这种情形，我们把 G 与有限 Galois 扩张 L/K 的 Galois 群看作等同，从而把叉积记作 $(L/K, f)$．这是 K 上的一个中心单代数[†](→[域上的有限维代数]，[系数域的扩张])．

若在上述的一般叉积中，G 的运算是平凡的，即若 $L = K$，则 K 与 G 的叉积称为 G 在 K 上关于 f 的**代数扩张** (algebra extension)．通常我们都假定 K 是域，$f(r, l) \neq 0$．当 $f(r, l) = 1$ 时，代数扩张就是群代数．若 G 是有限群，其阶数与 K 的特征互素，则 G 在 K 上的代数扩张(特别是群代数)总是半单的[†]且是可分的[†]．若 G 是有限交换群，而 f 是它的因子组，则由 $\varphi(s, t) = f(s, t)f(t, s)^{-1}$ 可确定一个双同态（即对每个变量均为同态的一个映射）$\varphi: G \times G \to K^*$．$G$ 在 K 上关于 f 的代数扩张是一个中心单代数当且仅当 φ 是非退化的．特别是，若 G 是 n 个二阶群的直积群，则在 G 中适当地取 n 个元 $s_1, \cdots, s_n$ 时，G 的任何元都可以唯一地表成 $s_{i_1} \cdots s_{i_k} (i_1 < \cdots < i_k)$ 的形式．因此，若取 $u_{s_{i_1} \cdots s_{i_k}} = u_{s_{i_1}} \cdots u_{s_{i_k}}$ 为一个代数扩张的基，则任何因子组 f 都可由 $f(s_i, s_j) = \lambda_{ij}$ 来确定，这里 $\lambda_{ij} = 1 \ (i < j)$，$\lambda_{ij} = \pm 1 \ (i > j)$，而 λ_{ii} 是任意的．当 $\lambda_{ij} = -1 \ (i > j)$ 时，相应的代数扩张就是一个 Clifford 代数[†]．再者，若 $\lambda_{ii} = 0$，则它是一个 Grassmann 代数[†]．若 $\lambda_{ii} \neq 0$，且 n 是偶数，则当 K 的特征不为 2 时，所对应的代数扩张是一个中心单代数（详细情形→ Clifford 代数）．

设 K 是实数域，A_n 是与 $\lambda_{ii} = -1$ 对应的 Clifford 代数，则 A_2 是四元数体，A_4 的元称为**十六元数** (sedenion)，在旋子[†]理论以及 Dirac 方程[†]中很重要．一般地，设 K 是特征不为 2 的任意域，用上面的记号，对应 $n = 2$，$\lambda_{12} = 1$，$\lambda_{21} = -1$，$\lambda_{11} = \lambda \neq 0$，$\lambda_{22} = \mu \neq 0$ 的中心单代数 Q 称为**四元数代数** (quaternion algebra)．Q 有一个基 $\{1, u, v, w\}$，满足下面的规律：1 是单位元，$w = uv = -vu$，$u^2 = \lambda$，$v^2 = \mu$ $(\lambda, \mu \in K)$．任何四维中心单代数都与某个四元数代数同构(四元数体是 $K = \boldsymbol{R}$，$\lambda = \mu = -1$ 的情形)．对于 Q 的元 $x = \alpha + \beta\mu + \gamma v + \delta w$，$\bar{x} = \alpha - \beta u - \gamma v - \delta w$ 称为 x 的**共轭** (conjugate)，而 $N(x) = x\bar{x} \in K$ 称为 x 的**范数** (norm)．x 在 Q 中是可逆元当且仅当 $N(x) \neq 0$．

【域上的有限维代数】 以下如无特别声明，总假定所考虑的代数具有单位元且在域 K 上是有限维的．这时，由左(右) Artin 环[†]的一般性质，A 具有下述结构：A 的根基[†] N 是 A 的最大幂零理想；商代数 $A/N = \bar{A}$ 是半单的[†]，并可分解为理想的直和

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \cdots + \bar{A}_n,$$

这些理想也都是单代数．每个单分量 $\bar{A}_i$ 都是某个可除代数 D_i 上的 r_i 阶全阵环，而且 $\bar{A}_i$ 可分解为 r_i 个互为 $\bar{A}$ 同构的极小左理想的直和：

$$\bar{A}_i = \bar{A}\bar{e}_i^{(1)} + \cdots + \bar{A}\bar{e}_i^{(r_i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

其中 $\bar{e}_i^{(1)}, \cdots, \bar{e}_i^{(r_i)}$ 是互相正交的幂等[†]元，它们的和是 $\bar{A}_i$ 的单位元．另一方面，

$$\bar{A}_i = \bar{e}_i^{(1)}\bar{A} + \cdots + \bar{e}_i^{(r_i)}\bar{A}$$

是把 $\bar{A}_i$ 分解成互为 $\bar{A}$ 同构的极小右理想的直和分解式．不但如此，我们还可以从每个剩余类 $\bar{e}_i^{(s)}$ 中选出一个幂等元 $e_i^{(s)}$，使得 $\{e_i^{(s)}\}$ 形成一个正交的幂等元系，它们之和是 A 的单位元，并且

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{r_i} Ae_i^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{r_i} e_i^{(s)}A$$

给出把 A 分解成不可分解的[†]左理想(右理想)的直和．这里 $Ae_i^{(s)}$ 与 $Ae_j^{(t)}$ ($e_i^{(s)}A$ 与 $e_j^{(t)}A$) 为 A 同构，当且仅当 $i = j$．反之，A 的不可分解的直和分解都可这样得到．$Ae_i^{(s)}$ 的子 A 模 $Ne_i^{(s)}$ 是唯一的最大真子模，$Ae_i^{(s)}/Ne_i^{(s)}$ 与 $Ae_j^{(t)}/Ne_j^{(t)}$ 是 A 同构的，当且仅当 $i = j$．任何单 A 模都与某个 $Ae_i^{(s)}/Ne_i^{(s)}$ A 同构．另外，→[Frobenius 代数]，[单列代数]．

K上的任一单代数 A 都与 K 上的某个可除代数 D 上的全阵环 $M_n(D)$ 同构. 这就是 **Wedderburn 定理**,这里 n 由 A 唯一确定; 如果不计同构,则 D 也由 A 唯一确定. 再者,A 的中心与 D 的中心同构. 若 A 的中心与 K 相同,则 A 称为 K 上的**中心单代数**(central simple algebra) 或**正规单代数**(normal simple algebra). 这时,A 的两个单子代数之间的同构, 可以扩张为 A 的内自同构†. 特别是,A 的自同构都是内自同构. 设 B 是 A 的单子代数,以 $V(B)$ 表 B 的中心化子†, 则 $V(B)$ 也是单子代数, 且有 $V(V(B))=B$, $\dim B\cdot\dim V(B)=\dim A$. 特别是,若 B 在 K 上是中心的,则有标准同构 $A\cong B\otimes_K V(B)$. 若 D 是 K 上的中心可除代数, 则 D 的任何极大交换子代数 L 是一个域,且 $(\dim L)^2=\dim A$. 并且, 在这样的 L 中, 有 K 上的可分扩张. 一般地, 中心单代数 A 的维数是一个平方数 r^2, r 称为 A 的**次数**(degree).

• 域 K 上两个中心单代数与同一可除代数上的全阵环同构时,称为**相似**(similar). 这是一个等价关系,其等价类称为**代数类**(algebra class). 因为对中心单代数 A 与单代数 B, $A\otimes_K B$ 是单的,且若 B 是中心的,则 $A\otimes_K B$ 也是中心的,所以,若 A 与 A' 相似, B 与 B' 相似,则 $A\otimes_K B$ 也与 $A'\otimes_K B'$ 相似.因而,在 K 上所有代数类的集合 $\mathscr{B}(K)$ 中,可由$\otimes$定义乘法. 对于中心单代数 A, 若设与之反同构的代数是 A°, 则 $A\otimes_K A^\circ$ 与 K 上的全阵环同构. 由此可知,$\mathscr{B}(K)$形成一个群, 称为 K 上的 **Brauer 群** (Brauer group) 或**代数类群** (algebra class group). 对于中心单代数 A, 与之相似的可除代数的次数, 称为 A 或 A 的代数类的 **Schur 指数** (Schur index). 又,A 的代数类在 Brauer 群中的阶数, 称为 A 的**幂指数**(exponent). 幂指数是 Schur 指数的因子. 反之 Schur 指数的任意素因子是幂指数的因子.

【系数域的扩张】 若 L 是域 K 的扩域,则对 K 上任何一个代数 A, $L\otimes_K A$ 可以看作是 L 上的代数. 把它简记为 A^L, 称为把系数域扩张到 L 而得的代数. 一般地, 环 A 的根基记作 $\mathfrak{R}(A)$. 当 K 上的代数 A 对于 K 的任意扩域 L 都满足 $\mathfrak{R}(A^L)=0$ 时, A 称为**可分代数** (separable algebra). 特别是,若 A 是 K 上的一个代数扩域, 则它是可分代数当且仅当 A 的任一元 (或 A 的一个生成子集的任一元) 在 K 上是可分的† (→域). K 上的(有限维)代数 A 是可分的,当且仅当 A 是半单的, 且它的每个单分量的中心都是 K 的可分扩域. 若代数 A 的商代数 $A/\mathfrak{R}(A)$ 是可分的, 则有子代数 S, 使 $A=S+\mathfrak{R}(A)$, 且 $S\cap\mathfrak{R}(A)=\{0\}$. 若不计内自同构, 则这样的子代数 S 是唯一确定的(J. H. M. Wedderburn-А. И. Мальцев).

K 上的代数 A 是中心单的, 当且仅当对于 K 的任意扩域 L, A^L 是单的. 而后者成立, 当且仅当对于某个扩域 L, A^L 同构于 L 上的一个全阵环. 这样的扩域 L 就是 A 的分裂域†(→表示论 [线性表示的纯量扩张]). 对于 K 上的中心单代数 A, K 的(有限) r 次扩域 L 是 A 的分裂域, 当且仅当存在一个与 A 相似的 r 次中心单代数 B,它有一个 K 同构于 L 的子域. 这时, A 的 Schur 指数是 r 的因子. 再者, A 具有一个分裂域,其扩张次数 r 恰好等于 Schur 指数. 由此可知,A 具有一个分裂域,它是 K 上的一个有限 Galois 扩域.

设域 L 是域 K 上的有限 Galois 扩张,而 G 是它的 Galois 群. 设 f 是关于 G 在 L^* 上的运算的因子组,则叉积 $(L/K,f)$ 是 K 上的中心单代数(→[一般的叉积]). 因为两个因子组 f,g 的积 fg 也是因子组,所以全体因子组构成一个交换群. 因此 $(L/K,fg)$ 与 $(L/K,f)\otimes_K(L/K,g)$ 相似. 另外,如果存在 L^* 的元的族 $\{\lambda_i\}_{i\in G}$, 使得

$$f(r,l)=g(r,l)=r(\lambda_l)\lambda_{rl}^{-1}\lambda_r,\quad r,l\in G,$$

则 f 与 g 称为**相伴的** (associated). 这一概念与 $(L/K,f)$ 与 $(L/K,g)$ 相似是等价的. 所以映射 $f\to(L/K,f)$ 给出了因子组的全体相伴类的群 $H^2(G,L^*)$ (它可等同于 G 的其系数在 L^* 内的二维上同调群†)到 K 上的 Brauer 群 $\mathscr{B}(K)$ 的单同态. 它的象与以 L 为分裂域的全体代数类所成的子群一致. 特别是, 任何代数类都相

似于某个有限 Galois 扩域 L 与它的 Galois 群 G 的叉积.(R. Brauer, E. Noether, A. Albert, 正田建次郎等).

【循环代数】 设 Z 是域 K 上的 n 次循环扩域†, Z 与它的 Galois 群 G 的叉积称为 K 上的**循环代数**(cyclic algebra). 固定 G 的一个生成元 s, 对 K 的任一元 $\alpha \neq 0$, 因子组 $f(s^i, s^j)$ $(0 \leqslant i, j < n)$ 可由 $f(s^i, s^j) = 1$ $(i + j < n)$, $f(s^i, s^j) = \alpha$ $(i + j \geqslant n)$ 来确定. 如果把对应的叉积简写作 (Z, s, α), 则 (Z, s, α) 与 (Z, s, β) 相似,当且仅当 α/β 是 Z 的某一元在 K 上的范数. 另外, Z 与 G 的任何叉积都与某个 (Z, s, α) 相似, 且对应 $\alpha \to (Z, s, \alpha)$ 给出由 $K^*/N_{Z/K}(Z^*)$ (Z/K 的范数类群)到以 Z 为分裂域的 K 上的代数类群的一个同构. 若 K 是 $\mathfrak{p}$-adic 域† 或有限次代数数域†, 则 K 上的任何中心单代数都与某个循环代数同构. 关于这些, 以下给以详述.

设 K 是 $\mathfrak{p}$-adic 域, q 表示模 $\mathfrak{p}$ 的剩余类的个数. 若 A 是 K 上的中心单代数, 则 A 的 (Schur) 指数与幂指数相等, 简称为指数. 另外, K 的有限扩域 L 是 A 的一个分裂域,当且仅当 L 的扩张次数是 A 的指数的倍数. 设 n 是 A 的次数,则在 K 上添加 1 的一个 $q^n - 1$ 次原根 ω 所得的域 $W = K(\omega)$ 是 K 的 n 次循环(且是非分岐†的)扩域, 而且 $\sigma: \omega \to \omega^q$ 生成它的 Galois 群. 这样, 对于适当的 $\alpha \in K^*$, 有 $A \cong (W, \sigma, \alpha)$. 设 α 的 $\mathfrak{p}$-adic 指数赋值† $v(\alpha)$ 为 ν, 则 $\nu/n (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z})$ 由 A 的代数类唯一确定, 称为 A 或 A 的代数类的 **Hasse 不变量** (Hasse invariant). 对于每个代数类, 使它的 Hasse 不变量与之对应, 就得到 K 上的 Brauer 群到有理数的全体 $\boldsymbol{Q}$ 模 $\boldsymbol{Z}$ 的加法群 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 的一个同构 (H. Hasse, 1931).

设 K 是有限次代数数域, A 是 K 上的中心单代数. 对于 K 的(有限或无限)素除子† $\mathfrak{p}$, 令 $K_\mathfrak{p}$ 是 K 的 $\mathfrak{p}$-adic 扩域. 设 $A_\mathfrak{p}$ 是把 A 的系数域扩张到 $K_\mathfrak{p}$ 所得到的代数, 则 $A_\mathfrak{p}$ 是 $K_\mathfrak{p}$ 上的中心单代数. 除去有限个 $\mathfrak{p}$ 以外, $A_\mathfrak{p}$ 与 $K_\mathfrak{p}$ 上的全阵环同构, 并且 A 本身同构于 K 上的全阵环, 当且仅当对于所有 $\mathfrak{p}$, $A_\mathfrak{p}$ 与 $K_\mathfrak{p}$ 上的全阵环同构. $A_\mathfrak{p}$ 的指数 $m_\mathfrak{p}$ 称为 A 的 **$\mathfrak{p}$ 指数** ($\mathfrak{p}$-index), 而 $A_\mathfrak{p}$ 的 Hasse 不变量称为 A 的 **$\mathfrak{p}$ 不变量** ($\mathfrak{p}$-invariant), 以 $(A/\mathfrak{p})$ 表示. 如果 $\mathfrak{p}$ 是无限素除子, 则 $m_\mathfrak{p} = 1$ 或 2, 这时, 我们相应地定义 $\mathfrak{p}$ 不变量为 $(A/\mathfrak{p}) = 0$ 或 $1/2 \ (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z})$. A 的 (Schur) 指数是所有 $\mathfrak{p}$ 指数 $m_\mathfrak{p}$ 的最小公倍数, 并且它与 A 的幂指数相同, 简称为 A 的指数. 关于 $\mathfrak{p}$ 不变量,除去有限个 $\mathfrak{p}$ 以外, $(A/\mathfrak{p}) \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z})$, 而且有

$$\sum_{\mathfrak{p}} (A/\mathfrak{p}) \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z}).$$

反之,如果对于每个 $\mathfrak{p}$, 都给定一个有理数 $\rho_\mathfrak{p}$ 与之对应,使得: i) 除去有限个 $\mathfrak{p}$ 以外,都有 $\rho_\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z})$; ii) 若 $\mathfrak{p}$ 是虚无限素除子,则 $\rho_\mathfrak{p} \equiv 0$, 若为实无限素除子,则 $\rho_\mathfrak{p} \equiv 0$ 或 $1/2 \ (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z})$; iii) $\sum_{\mathfrak{p}} \rho_\mathfrak{p} \equiv 0 \ (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z})$; 则使 $(A/\mathfrak{p}) = \rho_\mathfrak{p} (\operatorname{mod} \boldsymbol{Z})$ 对每个 $\mathfrak{p}$ 成立的中心单代数 A 的代数类是唯一确定的. 这样就完全决定了有限次代数数域上 Brauer 群的结构 (Hasse, 1933).

【Frobenius 代数】 设 A 为域 K 上的代数. 如果 A 的正则表示与对偶正则表示(→表示论[线性表示的系数与特征标])相似,即如果左 A 模 A 与右 A 模 A 的对偶模 A^* 在看成为左 A 模时是 A 同构的, 则 A 称为一个 **Frobenius 代数** (Frobenius algebra). 设 A 的左、右理想的直不可约分解(→[域上的有限维代数])为

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{r_i} A e_i^{(s)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{r_i} e_i^{(s)} A,$$

特别把 $e_i^{(1)}$ 记作 e_i. 此时 A 是 Frobenius 代数, 当且仅当存在 $1, \cdots, n$ 的置换 π, 使 i) $Ae_i \cong (e_{\pi(i)}A)^*$; ii) $r_i = r_{\pi(i)}$. 如果存在只满足条件 i) 的置换 π, 则 A 称为**拟 Frobenius 代数** (quasi-Frobenius algebra).

对于 A 的子集 S, $l(S) = \{a \in A \mid aS = 0\}$, $r(S) = \{a \in A \mid Sa = 0\}$ 分别称为 S 的**左零化子** (left annihilator) 和**右零化子** (right annihilator). 于是, A 是拟 Frobenius 代数, 当且仅当对于所有左、右理想 $\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}$, iii) $l(r(\boldsymbol{l})) = \boldsymbol{l}, r(l(\boldsymbol{r})) = \boldsymbol{r}$ 成立. 这时, 若 M 为左(右) A 模, 并以 $\hat{M}$

表示右(左)A模 $\mathrm{Hom}_A(M, A)$，则有标准同构 $\hat{M} \cong M$，且零化关系给出M的子模的集合与 $\hat{M}$ 的子模的集合之间的一个对偶的一一对应 (M. Hall). 如果拟 Frobenius 代数A除上面的条件 iii) 外,又满足 iv) 对任何左理想 $\boldsymbol{l}$ 与任何右理想 $\boldsymbol{r}$，都有 $\dim \boldsymbol{r} + \dim l(\boldsymbol{r}) = \dim \boldsymbol{l} + \dim r(\boldsymbol{l}) = \dim A$，则$A$是 Frobenius 代数，其逆也成立.

一个代数 A 是 Frobenius 代数的一个判定条件是存在A上的一个线性型 $x \to \lambda(x)$，满足"若对所有 $x \in A$ 有 $\lambda(xa) = 0$，则 $a = 0$"；如果还能选出满足"$\lambda(xy) = \lambda(yx)(x, y \in A)$"的$\lambda$，则$A$称为**对称代数** (symmetric algebra). 半单代数，群代数等都是对称代数. 对于对称代数 A，由左(右) A模M所确定的右(左) A 模 $M^* = \mathrm{Hom}_K(M, K)$ 与 $\hat{M} = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ 是标准A同构的.

若A是 Frobenius 代数,则A的根基N满足 $l(N) = r(N)$，而且N的零化子是主左与主右理想,其逆亦真. 对于 Frobenius 代数A的双边理想 $\boldsymbol{z}$，剩余类代数 $A/\boldsymbol{z}$ 也是一个 Frobenius 代数的充分必要条件为：$l(\boldsymbol{z})$ 与 $r(\boldsymbol{z})$ 分别是主左与主右理想. 若A是对称代数，则任何双边理想 $\boldsymbol{z}$ 都满足 $l(\boldsymbol{z}) = r(\boldsymbol{z})$；$A/\boldsymbol{z}$ 也是对称代数的充分必要条件是：$l(\boldsymbol{z}) = r(\boldsymbol{z})$ 是由中心的一个元生成的主理想.

对于系数域的扩张 L/K，A^L 与 A 同时分别是拟 Frobenius 代数，Frobenius 代数,对称代数(以上属于中山正，1939，1941). Frobenius 代数的概念已被推广到环 A 上的代数 B (F. Kasch, 1954).

【单列代数】 用前面的记号，若K上的代数A的每一个不可约左、右理想 Ae_i，e_iA 都有唯一的组成列,则A称为**一般单列代数**(generalized uniserial algebra). 如果 A 可以像准素环[†]那样分解为理想的直和，而这些理想都是本原环,则A称为**单列代数** (uniserial algebra). 一般单列代数A上的任一左模都可以分解成一些子模的直和,而这些子模是 Ae_i 的A同态象. 如果一个代数的根基N是主左、主右理想,则它是一般单列代数. 代数A是单列代数当且仅当它的每个双边理想都是一个主左与主右理想，即每个剩余类代数都是 Frobenius 代数. 对于K的扩域 L，若 A^L 是单列代数,则A本身是单列的，反之不一定成立. 当对于任意扩域 L，A^L 都是单列时,A称为**绝对单列代数** (absolutely uniserial algebra). A是绝对单列代数的充分必要条件是其根基N是由中心 Z 中的一个元所生成的主理想，且 Z 可以分解成 K 的单扩张 (即形如 $K[a]$ 的理想) 的直和(以上属于浅野啓三，G. Köthe, 中山正,東屋五郎等).

【代数的代数】 考虑域K上一般的 (不必有限维的) 代数 A. 如果A的任一元在K上都是代数的，即每个元都是某个系数在K中的多项式的根,则A称为**代数的代数** (algebraic algebra). 如果存在一个非零的、系数在K中的 (非交换)多元多项式 $p(X_1, \cdots, X_n)$，使当以A的元代入时恒为 0，则称A具有**多项式恒等关系** $p(X_1, \cdots, X_n) = 0$，或称A为一个 **PI 代数**(PI-algebra).PI 代数常具有对于各个变量的齐次线性恒等关系,而且也具有形如 $[x_1, \cdots, x_n]^m = 0$ 的恒等关系(此处 $[\quad]$ 表示对 $1, \cdots, n$ 的全部置换 $i_1, \cdots, i_n$ 的和 $\Sigma(\pm x_{i_1} \cdots x_{i_n})$，$\pm$ 是该置换的符号). 一个代数 A 称为**局部有限的** (locally finite)，如果A中任何有限个元所生成的子代数都是有限维的. Курош 曾提出过这样的问题：如果一个代数的代数A的每个元 a 的次数(即 $\dim K[a]$) 都是有界的,这个A是否为局部有限. 对于 PI 代数,已经找到了这个问题的肯定答案.

关于代数的研究的历史,详见[6]的卷末.

【环的 Brauer 群】 设 R 是一个交换环. 一个 R代数A称为**可分代数** (separable algebra)，如果A作为双边A模是射影模[†](→同调代数). 当基环是一个域时，这与可分性的古典概念是一致的;且A在R上是可分的,当且仅当对R的任一极大理想 $\mathfrak{m}$，$A/\mathfrak{m}A$ 在剩余类域 $R/\mathfrak{m}$ 上总是可分的.中心可分代数也称为**東屋代数**(Azumaya algebra). 若 P 是一个有限生成的一一射影 R模(简称 R **射影生成模**(R-progenerator)),则自

同态环 $End_R(P)$ 是一个東屋 R 代数，两个東屋代数 A_1 与 A_2 称为同一类的（相似的），如果存在 R 射影生成模 P_1 与 P_2，使得 $A_1 \otimes End_R(P_1) \cong A_2 \otimes End_R(P_2)$. 相似类的集合关于 $\otimes$ 成为一个 Abel 群，称为 R 的 **Brauer 群** $B(R)$ (Auslander 与 Goldman [16]). $B(R)$ 的每个元都是有限阶的 [18,19].

$B(R)$ 是从交换环到 Abel 群的一个共变函子. 若 R 是一个域，则 $B(R)$ 的定义就与古典的定义相吻合. 若 R 是一个 Hensel 局部环，其剩余类域是 k，则映射 $B(R) \to B(k)$ 是一个同构([15]). 若 R 是一个正则环，其商域是 K，则 $B(R) \to B(K)$ 是单射. 如果再有 $\dim R \leqslant 2$，就有 $B(R) = \bigcap_{\mathfrak{p}} B(R_{\mathfrak{p}})$，这里 $\mathfrak{p}$ 取遍 R 的所有高度为 1 的素理想. $R_{\mathfrak{p}}$ 是 R 在 $\mathfrak{p}$ 上的局部化，而 $B(R)$ 与 $B(R_{\mathfrak{p}})$ 都看成嵌入于 $B(K)$ 内 [16]. 举一个例，把这些事实与一个代数数域 K 的 $B(K)$ 的结构合在一起，就有 K 的整数环的 $B(R)$ 的结构：若 K 是全虚的，则 $B(R)=0$；若 K 有 $r(>0)$ 个实无限位，则 $B(R) \cong (\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})^{r-1}$.

一个交换 R 代数 S 称为 A 的**分裂环** (splitting ring)，如果 S 代数 $S \otimes A$ 与 $End_S(P)$ 同构，这里的 P 是某个 S 射影生成模. 我们以 $B(S/R)$ 来表示 $B(R)$ 中被 S 分裂的所有代数类所成的子群. 由于一个环上的東屋代数不一定有一个 Galois 扩张为其分裂环，所以用 Galois 上同调来描述 Brauer 群就不再有完全的一般性了. 代替这个，我们有下列 Amitsur 上同调[†]的正合序列（假定 S 是一个 R 射影生成模）：$0 \to H^1(S/R, U) \to \mathrm{Pic}(R) \to H^0(S/R, \mathrm{Pic}) \to H^2(S/R, U) \to B(S/R) \to H^1(S/R, \mathrm{Pic}) \to H^3(S/R, U) \to \cdots$，这里的 $U(T)$ 与 $\mathrm{Pic}(T)$ 相应表示交换环 T 的单位群与秩为 1 的射影模的 Picard 群[†] ([17]). 全 Brauer 群 $B(R)$ 被单映射到 $H^2(R, U) = \varinjlim H^2(S/R, U)$ 内，这里极限是对一一平坦的 R 代数 S 取的.

Grothendieck 与其他人在更一般的几何观点上研究了 Brauer 群 ([18]).

【参】 [1] 浅野啓三，環論及びイデアル論，共立出版，1949；[2] 東屋五郎，単純環の理論，河出，1951；[3] 正田建次郎，抽象代数学，岩波，1932；[4] 正田建次郎，多元数論，岩波講座数学，1935；[5] 中山正，局所類体論，岩波講座数学，1935；[6] 中山正-東屋五郎，代数学 II，岩波，1954；[7] A. A. Albert, Structure of algebras, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1939；[8] E. Artin-C. J. Nesbitt -R. Thrall, Rings with minimum condition, Univ. of Michigan Press, 1944；[9] M. Deuring, Algebren, Erg. d. Math., Springer, 1935, 第二版，1968；[10] N. Jacobson, The theory of rings, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1943；[11] N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1956；[12] B. L. van der Waerden, Algebra II, Springer, 第四版，1959（中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学，科学出版社 II，1976）；[13] C. W. Curtis-I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962；[14] J.-P. Serre, Corps locaux, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1962；[15] G. Azumaya（東屋五郎），On maximally central algebras, Nagoya Math. J., 2(1951), 119—150；[16] M. Auslander-O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., 97(1960), 367—409；[17] S. Chase-A. Rosenberg, Amitsur cohomology and the Brauer group, Mem. Amer. Math. Soc., 52(1965), 34—79；[18] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer, I, II, III, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, 1968, p. 46—188；[19] M.-A. Knus-M. Ojanguren, Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya, Lecture notes in math. 389, Springer, 1974；[20] M. Orzech-C. Small, The Brauer group of commutative rings, Lecture notes in pure and appl. math. 11, Marcel Dekker, 1975.

Clifford 代数　[英 Clifford algebra　法 algèbre de Clifford　德 Cliffordsche Algebra　俄 алгебра Клиффорда　日 クリフォード環]　【定义与基本性质】 设 V 是域 K 上的 n 维线性空间，Q 是 V 上的二次型[†]. 以 $T(V)$ 表示 V 上的张量代数[†]，它的乘法以 $\otimes$ 表示. 以 $I(Q)$ 表示 $T(V)$ 中所有形如 $x \otimes x - Q(x) \cdot 1 (x \in V)$ 的元所生成的双边理想，我们把商代数[†] $T(V)/I(Q)$ 记作 $C(Q)$，并称它为二次型 Q 的 **Clifford 环**或 **Clifford 代数**. $C(Q)$ 的元称为 **Clifford 数**(Clifford number).

因为标准映射 $\tau: V \to T(V)$，$\sigma: T(V) \to C(Q)$ 的合成映射 $\sigma \circ \tau$：$V \to C(Q)$ 是线性的且是单射，所以可把 V 看作 $C(Q)$ 的子空间. 此时，$C(Q)$ 是由单位元 1 与 V 生成的 K 上的代数，且对 V 的一切元 x，有 $x^2 = Q(x) \cdot 1$. 而且 $C(Q)$ 是具有此性质的代数中“最一般的”；即设 A 是 K 上（具有单位元）的代数，并设线性

映射 $f: V \to A$ 满足 $f(x)^2 = Q(x) \cdot 1$（对每个 $x \in V$），则 f 可以唯一地扩张成一个代数同态 $\bar{f}: C(Q) \to A$，使得 $\bar{f}(1) = 1$. 再者，设 Φ 为与 Q 相伴的对称双线性型†：$\Phi(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ $(x, y \in V)$，于是，对 V 的各个元 x, y，有 $xy + yx = \Phi(x, y) \cdot 1$. $C(Q)$ 在 K 上是 2^n 维的，若 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的基，则 $1, e_i, e_ie_j(i<j), \cdots, e_1e_2\cdots e_n$ 构成 $C(Q)$ 的基. 特别是，若 $\{e_i\}$ 是关于 Q 的正交基，则

$$e_ie_j = -e_je_i,\ e_i^2 = Q(e_i) \cdot 1,$$
$$i, j = 1, \cdots, n,\ i \neq j.$$

这是 $C(Q)$ 的生成组 $\{e_i\}$ 所满足的基本关系. 特别是，若 $Q = 0$，则 $C(Q)$ 是 V 上的外代数†（Grassmann 代数†）.

【$C(Q)$ 的主自同构与主反自同构】 在代数 $C(Q)$ 的自同构中，存在唯一的自同构 α，使得对每一个 $x \in v$，满足 $\alpha(x) = -x$. 这个自同构 α 称为 $C(Q)$ 的**主自同构**（principal automorphism），它满足 $\alpha^2 = 1$. 同样，在代数 $C(Q)$ 的反自同构中，存在唯一的反自同构 β，使得对于每一个 $x \in V$，满足 $\beta(x) = x$. 这个反自同构 β 称为 $C(Q)$ 的**主反自同构**（principal anti-automorphism），它满足 $\beta^2 = 1$.

以下设 Q 的判别式† $\neq 0$. 为简单起见，设 K 的特征 $\neq 2$. 设 $C^+ = C^+(Q) = K \cdot 1 + V^2 + V^4 + \cdots$，$C^- = C^-(Q) = V + V^3 + V^5 + \cdots$，则 $C(Q)$ 是子空间 $C^+(Q)$ 和 $C^-(Q)$ 的直和，且有 $C^+C^+ \subset C^+$, $C^+C^- \subset C^-$, $C^-C^+ \subset C^-$, $C^-C^- \subset C^+$. 于是 $C(Q)$ 具有分次代数的结构，其指数群 $\{\pm 1\}$ 是一个阶数为 2 的 Abel 群. 特别地，$C^+(Q)$ 是 $C(Q)$ 的子代数，$C^+(Q)$ 和 $C^-(Q)$ 的元分别称为**偶元**（even element）和**奇元**（odd element），且 $\dim C^+(Q) = \dim C^-(Q) = 2^{n-1}$.

【$C(Q)$和 $C^+(Q)$的结构】 $C(Q), C^+(Q)$ 都是 K 上的半单†代数，且是可分的†. 若 n 是偶数 $2r$，则 $C(Q)$ 是一个以 K 为中心的单代数†，$C^+(Q)$ 的中心 Z 在 K 上是二维的. 若 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的正交基，则 1 与 $z = 2^re_1\cdots e_n$ 构成 Z 的基，且有 $z^2 = 2^{2r}(-1)^rQ(e_1)\cdots Q(e_n) = (-1)^rD$（此处 D 是 Φ 关于 $\{e_i\}$ 的判别式†）. 若 $(-1)^rD$ 在 K 中有平方根，则 $Z \cong K \oplus K$（直和），$C^+(Q)$ 可分解成两个单代数的直和. 若 $(-1)^rD$ 的平方根 $\notin K$，则 Z 是一个域，$C^+(Q)$ 是一个单代数. 特别是，若二次型 Q 的指数†（即 V 的极大全奇异†(totally singular) 子空间的维数）（一二次型）是 r，则 $C(Q)$ 与 K 上的一个 2^r 阶全阵代数†同构，且 $C^+(Q)$ 与 K 上的两个 2^{r-1} 阶全阵代数的直和同构. 其次，若 n 是奇数 $2r+1$，则 $C^+(Q)$ 是一个以 K 为中心的单代数.（特别是，若 Q 的指数是 r，则 $C^+(Q)$ 同构于 K 上的 2^r 阶全阵代数）. 又 $C(Q)$ 的中心 Z 在 K 上是 2 维的，从而 $C(Q) \cong Z \otimes_K C^+(Q)$. 若 V 的正交基是 $e_1, \cdots, e_n$，则 1 与 $z = e_1\cdots e_n$ 是 Z 的基. 设 $z' = 2^{r+1}z$，则 $z'^2 = 2(-1)^rD$（D 是 Φ 关于 $\{e_i\}$ 的判别式）. 于是，若 $2(-1)^rD$ 的平方根 $\notin K$，则 $C(Q)$ 是单代数；若 $\in K$，则 $C(Q)$ 可分解成两个 2^{2r} 维的单代数的直和.

【Clifford 群】 设 G 是 $C(Q)$ 中满足 $sVs^{-1} = V$ 的全部可逆元 s 的集，则 G 关于 $C(Q)$ 的乘法形成一个群，称为 Q 的 **Clifford 群**（Clifford group）. G 的子群 $G^+ = G \cap C^+(Q)$ 称为**特殊 Clifford 群**（special Clifford group）. 由 $s \in G$ 诱导出的 V 上的线性变换 $\varphi(s): x \to sxs^{-1}$，属于 V 关于 Q 的正交变换†群 $O(Q)$，而且映射 $s \to \varphi(s)$ 是 G 到 $O(Q)$ 中的同态，即 φ 是 G 在 V 上的表示†. 这个表示称为 G 的**向量表示**（vector representation）. φ 的核†由 $C(Q)$ 的中心 Z 中（具有逆元）的元构成. 若 $x \in G \cap V$，则 $Q(x) \neq 0$，且 $-\varphi(x)$ 是 V 中的反射†，这个反射是对正交于 x 的超平面取的. 若 $n = \dim V$ 是奇数，则 $\varphi(G) = \varphi(G^+) = SO(Q)$；若 n 是偶数，则 $\varphi(G) = O(Q), \varphi(G^+) = SO(Q)$. 利用 $C(Q)$ 的主反自同构 β，就得到 G^+ 到 K 的乘法群 K^* 中的同态映射 $N: s \to \beta(s)s$. $N(s) = \beta(s)s$ 称为 $s \in G^+$ 的**旋子范数**（spinorial norm）. N 的核是 G^+ 的不变子群，记作 G_0^+，称为（Q 的）**约化 Clifford 群**（reduced Clifford group），$SO(Q)$ 的子群 $\varphi(G_0^+)$ 记作 $O_0^+(Q)$，称为**约化正交群**（reduced orthogonal group）.

特别是,当基域K是实数域$\boldsymbol{R}$时,$O_0^+(Q)$就是 Lorentz 群† $O(Q)$ 的单位元的连通分支†. 若Q是定的，则 $O_0^+(Q) \cong SO(n)$, G_0^+的单位元的连通分支 $Spin(n)$ 由覆盖同态映射φ形成$SO(n)$的一个单连通†的覆盖群† ($SO(n)$ 的每一点覆盖两次). 群 $Spin(n)$ 称为 (n 次) **旋子群** (spinor group).

【旋表示】 以下设基域K是复数域$\boldsymbol{C}$,$n=\dim V \geqslant 3$. 于是有 $O_0^+(Q) \cong SO(n, \boldsymbol{C})$, G_0^+由覆盖同态映射φ形成 $SO(n, \boldsymbol{C})$ 的一个单连通的覆盖群. 以下把 G_0^+ 记作 $Spin(n, \boldsymbol{C})$, 并把它称为(n次)**复旋子群** (complex spinor group). $Spin(n, \boldsymbol{C})$ 是紧 Lie 群 $Spin(n)$ 的复化†(→Lie 群), 而且是 $C(Q)$ 中所有可逆元形成的复 Lie 群† $C(Q)^*$ 的一个复解析子群, 其 Lie 代数† 是代数 $C(Q)$ 由换位子积 $[x, y] = xy - yx$ 而成的 Lie 代数. 对应于 $Spin(n, \boldsymbol{C})$ 的 Lie 子代数为$\sum_{i<j} Ce_ie_j$. 此处 $e_1, \cdots, e_n$是V的正交基.群 $Spin(n,\boldsymbol{C})$的旋表示如下定义.

1) $n=2r+1$ (奇数)的情形. 由于$C^+(Q)$与 $\boldsymbol{C}$ 上的 2^r 阶全阵代数同构,所以除等价外$C^+(Q)$ 只有一个不可约表示† $\tilde{\rho}$ (2^r阶). 若 $\tilde{\rho}$ 限制在$Spin(n, \boldsymbol{C})$ (或 $Spin(n)$) 上,就得到$Spin(n, \boldsymbol{C})$ (或 $Spin(n)$) 的 2^r 阶不可约表示 ρ, 称它为 $Spin(n, \boldsymbol{C})$ (或 $Spin(n)$) 的**旋表示** (spin representation). ρ的表示空间的元称为**旋子** (spinor). 即"旋子是具有 2^r 个分量的量, 这些分量的变换法则按照旋表示进行" (→旋子) 这样的古典说法成立. ρ所确定的$Spin(n, \boldsymbol{C})$的 Lie 代数 ($=B_r$ 型的单 Lie 代数†) 的一个表示, 也称为旋表示. 旋表示对于 $SO(n, \boldsymbol{C})$ 与 $SO(n)$ 是 2 阶表示.

2) $n = 2r$ (偶数)的情形. 由于 $C(Q)$ 与 $\boldsymbol{C}$ 上的 2^r 阶全阵代数同构,所以除等价外只有一个不可约表示 $\tilde{\rho}$ (2^r 阶). $\tilde{\rho}$ 限制在 $Spin(n, \boldsymbol{C})$ (或 $Spin(n)$) 上所得到的表示 ρ, 称为 $Spin(n, \boldsymbol{C})$ (或 $Spin(n)$) 的旋表示. 但是在这里 ρ 不是不可约的; 它可分解成两个互不等价的不可约表示 ρ^+, ρ^- 的直和; ρ^+, ρ^-的阶数都是 2^{r-1}. 若适当选取 $C(Q)$ 的极小左理想L作为$\tilde{\rho}$的表示空间,则 $L^+ = L \cap C^+(Q)$, $L^- = L \cap C^-(Q)$ 分别成为 ρ^+, ρ^- 的表示空间. 表示 ρ^+ (或 ρ^-) 称为 $Spin(n, \boldsymbol{C})$ 或 $Spin(n)$ 的**偶**(**或奇**) **半旋表示** (even (or odd) half-spin representation). 它的表示空间的元称为偶(或奇) **半旋子** (half-spinor). ρ^+, ρ^- 是 $SO(n, \boldsymbol{C})$, $SO(n)$ 的 2 阶表示,由它们所确定的 $Spin(n,\boldsymbol{C})$ 的 Lie 代数 (D_r 型复单 Lie 代数†) 的表示也称为**半旋表示**.

【参】 [1] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 9 Actualités Sci. Ind., 1272a, Hermann, 1959; [2] C. Chevalley, The algebraic theory of spinors, Columbia Univ. Press, 1954; [3] M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer, 1952.

交换环 [英 commutative ring 法 anneau commutatif 德 kommutativer Ring 俄 коммутативное кольцо 日 可換環] 乘法可交换的环(→环)称为**交换环**. 在本条中,所谓环都指具有单位元 1 的交换环.

【理想】 因为我们讨论的环是可交换的, 所以理想†就没有右、左、双边的区别. $\mathfrak{a}$是环R的理想 ⇔ $\mathfrak{a}$ 是R的R子模(→ 模) ⇔ $\mathfrak{a}$ 是由R到某个环 (除 $\mathfrak{a} = R$ 外) 的环同态的核†. 对于理想 $\mathfrak{a}$, 以 $\mathfrak{a}$ 为模的幂零†元的集合 $\{x \mid x^n \in \mathfrak{a} (\exists n)\}$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的**根基** (radical), 常以$\sqrt{\mathfrak{a}}$ 表示, 0 的根基称为环 R 的**根基**, 详言之称为幂零根基†(→环[根基]).

包含环R的子集S的最小理想$\mathfrak{a}$, 称为由S**生成**(generate)的理想. S 称为 $\mathfrak{a}$ 的**基** (basis). 若S是有限集, 则S称为有限基. 当 $\mathfrak{a}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$是环$R$的理想时,它们的**和**(sum)$\sum \mathfrak{a}_\lambda$ 定义为由$\bigcup \mathfrak{a}_\lambda$ 生成的理想. 它是作为模的和. $\mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_n = \{a_1 + \cdots + a_n \mid a_i \in \mathfrak{a}_i\}$ 称为理想的有限和. 有限个理想$\mathfrak{a}_i$ 的**积**(product) $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$ 定义为由 $\{a_1 \cdots a_n \mid a_i \in \mathfrak{a}_i\}$ 生成的理想. 任意个理想的交是理想. 当$\mathfrak{a}$是环 R 的理想且 $S \subset R$ 时, **商**(quotient) $\mathfrak{a}:S$ 定义为理想 $\{x \mid x \in R, xS \subset \mathfrak{a}\}$. 当 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 是理想时, 有 $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b}):\mathfrak{c} = \mathfrak{a}:\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{a}: \sum \mathfrak{b}_\lambda = \bigcap_\lambda (\mathfrak{a}:\mathfrak{b}_\lambda)$.

【素理想】 对于环R的理想$\mathfrak{p}$，当$R/\mathfrak{p}$是整环†时，$\mathfrak{p}$称为**素理想**(prime ideal). $\mathfrak{p}$是素理想当且仅当$\mathfrak{p}\neq R$，且$ab\in\mathfrak{p}(a,b\in R)$蕴涵$a\in\mathfrak{p}$或$b\in\mathfrak{p}$. 有的文献将$R$本身也归入素理想的集合之中. 设$S$是环$R$的(关于乘法且含单位元的)非空子半群，也称它为**乘法封闭集**(multiplicatively closed (sub-) set). R的满足$S\cap\mathfrak{a}=\varnothing$的理想$\mathfrak{a}$中的极大理想$\mathfrak{m}$，称为**关于$S$的极大理想**(maximal ideal with respect to S). $\mathfrak{m}$必是素理想. $S=\{1\}$时，简称为**极大理想**(maximal ideal). 理想$\mathfrak{m}$是R的极大理想$\Leftrightarrow R/\mathfrak{m}$是域.

【Jacobson 根基】 环R的所有极大理想的交J称为R的**Jacobson 根基**(Jacobson radical)，或简称为根基(→环[根基]). 设M是有限R模，N是M的R子模，若$MJ+N=M$，则$M=N$(**Krull-東屋引理**或称**中山引理**).

【Krull 维数】 对于环R的素理想$\mathfrak{p}$，由$\mathfrak{p}$开始的素理想降链$\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_0\supsetneqq\mathfrak{p}_1\supsetneqq\cdots\supsetneqq\mathfrak{p}_n$的长$n$的最大数(若没有最大数，则是$\infty$)称为$\mathfrak{p}$的**高**(height)或**秩**(rank). 对于一般的理想$\mathfrak{a}$，以包含它的素理想的高的最小数定义$\mathfrak{a}$的**高**. R中素理想的高的最大数称为R的**Krull 维数**(Krull dimension)，**维数**(dimension)或**高**(altitude)等. 对理想$\mathfrak{a}$，$R/\mathfrak{a}$的 Krull 维数称为$\mathfrak{a}$的**Krull 维数**或**深**(depth). (秩、维和深，有完全不同意义的用法，容易混淆. 希望能统一起来.)

【准素理想】 对环R的理想$\mathfrak{q}$，若$R\neq\mathfrak{q}$且$R/\mathfrak{q}$的零因子全都是幂零的，则$\mathfrak{q}$称为**准素理想**(primary ideal)(在R本身算作素理想的情形，R也算作准素理想). 此时$\mathfrak{p}=\sqrt{\mathfrak{q}}$是素理想，$\mathfrak{q}$称为属于$\mathfrak{p}$的准素理想或$\mathfrak{p}$**准素**($\mathfrak{p}$-primary)理想. 有限个属于同一素理想$\mathfrak{p}$的准素理想的交是属于$\mathfrak{p}$的准素理想. 若理想$\mathfrak{a}$表为$\mathfrak{a}=\mathfrak{q}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{q}_n$，其中$\mathfrak{q}_1,\cdots,\mathfrak{q}_n$是准素理想，且这个交是**无赘的**(irredundant)(即略去哪一个$\mathfrak{q}_i$都不再与$\mathfrak{a}$相同)，则所有$\sqrt{\mathfrak{q}_i}$都是由$\mathfrak{a}$唯一确定的. 这些$\sqrt{\mathfrak{q}_i}$称为$\mathfrak{a}$的**素因子**(prime divisor)或**相伴素理想**(associated prime ideal). 其中极小的素因子称为$\mathfrak{a}$的**极小**(minimal)**素因子**或**孤立**(isolated)**素因子**. 非极小的素因子称为**嵌入**(embedded)**素因子**. 又素因子中极大的称为**极大**(maximal)**素因子**(关于一般的理想的素因子的定义→[4]). 在上述这种类型的表达式中，n为最小的称为$\mathfrak{a}$的由准素理想给出的**最短表示**(shortest representation)，其中$\mathfrak{q}_i$称为$\mathfrak{a}$的**准素分量**(primary component). 按照$\sqrt{\mathfrak{q}_i}$是否孤立，$\mathfrak{q}_i$分别称为孤立准素分量或嵌入准素分量. 孤立准素分量由$\mathfrak{a}$唯一确定，而嵌入准素分量则不是如此.

【商环】 环R中所有非零因子形成一个乘法封闭集U. 若在集合$\{(r,u)\mid r\in R, u\in U\}$中由$(r,u)\equiv(r',u')\Leftrightarrow ru'=r'u$来定义关系$\equiv$，则$\equiv$是等价关系. 此时$(r,u)$的等价类以$r/u$表示. 若在这些$r/u$的集合$Q$中定义运算：$r/u+r'/u'=(ru'+r'u)/uu'$，$(r/u)(r'/u')=rr'/uu'$，则$Q$就构成一个环. $r/1$与r看作是同一的. 于是，Q是包含R的环，U的元有逆元，而Q是由R与U的所有元的逆元所生成的. 这个性质刻划了Q，Q称为R的**全商环**(ring of total quotients). 若R是整环，则Q是域，称为整环R的**商域**(field of quotients). 设S是R的一个乘法封闭子集且不含0，取$\mathfrak{n}=\{x\mid x\in R, xs=0(\exists s\in S)\}$. 设$\varphi$是自然同态$R\to R/\mathfrak{n}$，则$\varphi(S)$的元都不是零因子. 在$R/\mathfrak{n}$的全商环中，由$R/\mathfrak{n}$与$\varphi(S)$的所有元的逆元生成的环称为$R$关于$S$的**商环**(ring of quotients)，以记号R_S，$R[S^{-1}]$或RS^{-1}等表示. 当M是R模†时，$M\otimes_R R_S$称为M关于S的**商模**(module of quotients). R_S在R上平坦†这一事实是重要的. 同S不相交的R的准素理想$\mathfrak{q}$的全体，与R_S的准素理想$\mathfrak{Q}$的全体，基于$\mathfrak{Q}=\mathfrak{q}R_S(\mathfrak{q}=\mathfrak{Q}\cap R)$是一一对应的. 当$\mathfrak{p}$是$R$的素理想时，$R-\mathfrak{p}$是乘法封闭集. $R_{R-\mathfrak{p}}$称为R**关于素理想$\mathfrak{p}$的商环**或$\mathfrak{p}$的**局部环**(local ring)，以$R_\mathfrak{p}$表示(→Noether 环[Zariski 环]，[局部环]). 商环也称为**分式环**(ring of fractions).

【整除】 在环R中，当$a=bc(a,b,c\in R)$时，b称为a的**因子**(divisor)，a称为b的**倍元**(multiple). 又称a被b**整除**(divisible). 这个

关系称为**整除关系** (divisibility relation),以 $b|a$ 表示. 当 c 有逆元也即 c 是可逆元时,a 与 b 称为**相伴的** (associated). 既不是相伴也不是可逆元的因子(或倍元),称为**真** (proper) 因子(或倍元). 没有真因子的元称为**不可约元** (irreducible element). 当 pR 是素理想时,元 p 称为**素元** (prime element).

如果整环 R 中任一非 0 元总是素元的积,则称**素元分解(或素因子分解)(唯一性)定理** (theorem on unique factorization in prime elements, unique factorization theorem) 在 R 内成立,这时 R 称为**素元分解(整)环**或 **Z. P. E. 环** (英 unique factorization ring (domain) 法 anneau factorial 德 Z. P. E. Ring). 当 R 是素元分解环时,对于非 0 元 $a_1, \cdots, a_n$, 1) 它们的公共因子称为**公因子** (common divisor),同样可定义**公倍元** (common multiple). 2) 如果 c 是公因子,且它的任一真倍元都不是公因子,则 c 称为**最大公因子** (greatest common measure),简记为 G. C. M. (有时也记成 G. C. D.). 同样定义**最小公倍元** (least common multiple),简记为 L. C. M..

【整相关】 设 R 是环 R'' 的一个子环(设 R, R'' 公有单位元). 一个元 $a \in R''$ 称为在 R 上是**整的** (integral) 或**整相关的** (integrally dependent),如果存在整数 n 与 $c_i \in R$, 使 $a^n + c_1a^{n-1} + \cdots + c_n = 0$ 成立. 若 R'' 的子集 S 的全部元在 R 上都是整的,则称 S 在 R 上是**整的**. (R 无单位元时,附加上条件 $c_i \in R^i$ 可同样定义这些概念. 一个重要的特殊情形是理想 R 上的整相关. 参考 D. G. Northcott-D. Rees, Proc. Cambridge Philos. Soc., **50** (1954); 永田雅宜, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, **30** (1956).) 环 R'' 中在 R 上是整的那些元的全体构成一个环 $\tilde{R}$, 称为 R 在 R'' 中的**整闭包** (integrel closure). 当 $R = \tilde{R}$ 时, R 称为在 R'' 中是**整闭的** (integrally closed). 若 R 在它的全商环中是整闭的,则称 R 是**整闭的**. 整闭整环也称为**正规环**(normal ring)(在某些文献中,整闭环称为正规环). 一个元 $a \in R''$ 称为在 R 上**殆整相关的** (almost integrally dependent), 如果存在非零因子 $b \in R$, 使得 $a^nb \in R (n = 1, 2, \cdots)$. 若 R 的全商环的元 a 在 R 上是整的,则 a 在 R 上是殆整的. 若全商环中在 R 上殆整的元全包含在 R 中, 则 R 称为**完全整闭的**(completely integrally closed).

【群定理】 环 R 的全商环 Q 的 R 子模 $\mathfrak{a}$ 称为 R 的**分式理想** (fractional ideal), 如果存在非零因子 $c \in R$, 使 $c\mathfrak{a} \subset R$. 分式理想的积可与理想的积同样来定义. 定义 $\mathfrak{a}^{-1} = \{x | x\mathfrak{a} \subset R\}$. 若 $\mathfrak{a}$ 含有非零因子,则 $\mathfrak{a}^{-1}$ 也是分式理想. 设 R 是完全整闭整环, 对于 0 以外的分式理想, 如果用 $\mathfrak{a}^{-1} = \mathfrak{b}^{-1}$ 来定义 $\mathfrak{a}$ 与 $\mathfrak{b}$ 等价,那末包含非零因子的分式理想的等价类的全体对于乘法形成一个群,这就是**群定理** (德 Gruppensatz). 整环 R 称为一个 **Krull 环** (Krull ring), 如果它满足: 1) 若 $\mathfrak{p}$ 是高为 1 的素理想, 则环 $R_\mathfrak{p}$ 是离散† 赋值环; 2) R 是所有这样的赋值环 $R_\mathfrak{p}$ 的交; 3) 对于 R 的非零元 a, 包含它且高为 1 的素理想仅有有限个. 在 Krull 环中, 对于任意非零分式理想 $\mathfrak{a}$, 存在唯一确定的高为 1 的素理想的幂的积,使得这个积与 $\mathfrak{a}$ 在上面意义下等价(→赋值).

【Dedekind 环和主理想环】 整环 R 称为 **Dedekind (整)环** (Dedekind ring (domain)), 如果 1) R 是 Noether 环† (即满足关于理想的极大条件); 2) R 是正规环; 3) R 的 Krull 维数是 1. 若整环 R 不是域,则 R 是 Dedekind(整)环 $\leftrightarrow$ 非零分式理想的全体关于乘法构成群 $\leftrightarrow$ R 的每一非零理想都可唯一地表示成有限个素理想的积(不计次序). 所有代数整数所成的环(即有限次代数数域的主整环†)是 Dedekind(整)环的一个重要例子. 一般地, 若 R 是 Dedekind (整) 环, K 是 R 的商域, L 是 K 的有限代数扩域,则满足 $R \subset R' \subsetneq K$ 的环 R' 以及 R 在 L 中的整闭包都是 Dedekind (整)环.

由一个元生成的理想称为**主理想** (principal ideal). 由一个元生成的分式理想称为**主分式理想** (principal fractional ideal), 也简称主理想. 当 R 是 Dedekind 环时,由全体非零分式理想构成的群 I 中,全体非零主分式理想 P 作成其子群.

商群 I/P 称为 R 的**理想类群**(ideal class group)，每个类称为**理想类**(ideal class)，I/P 的阶数称为 R 的**类数**(class number)(→代数数域的数论). 有很多 Dedekind 环,它们的类数不是有限的.

如果环 R 的任一理想都是主理想，则 R 称为**主理想环**(principal ideal ring);如果 R 还是整环,则称为**主理想整环**(principal ideal domain). 主理想环是有限个环的直和，而每个直和因子或是主理想整环，或是具有幂零极大主理想的局部环†. 不是域的主理想整环是 Dedekind (整)环，也是素元分解环. 设 A 是主理想环 R 上的 n 阶方阵,则存在 R 上的 n 阶方阵 $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, 满足下面的条件： 1) X^{-1}, Y^{-1} 是 R 上的 n 阶方阵; 2) 若把 XAY 的分量记为 b_{ij}, 则 $b_{ij}=0\ (i\neq j)$, 且 $b_{11}R\supset b_{22}R\supset\cdots\supset b_{nn}R$. 这些 $b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}$, 除去等于 0 的，称为 A 的**初等因子**(elementary divisor). 若把这个事实应用于模，则主理想环 R 上的有限模 M 可直和分解为 $M=m_1R+\cdots+m_rR\ (m_i\in M)$, 且关于 $\mathfrak{a}_i=\{x\in R\,|\,m_ix=0\}$, 有 $\mathfrak{a}_1\subset\mathfrak{a}_2\subset\cdots\subset\mathfrak{a}_r$ 成立(→矩阵[初等因子], Abel 群[有限 Abel 群]).

[参] [1] W. Krull, Idealtheorie, Erg. d. Math., Springer, 1935, 第二版 1968; [2] B. L. van der Waerden, Algebra I, II, Springer, 1955, 1959 (中译本: B.L. 范德瓦尔登,代数学 I, 1963, II, 1976,科学出版社); [3] O. Zariski-P. Samuel, Commutative algebra I, II, van Nostrand, 1958, 1960; [4] M. Nagata (永田雅宜), Local rings, Interscience, 1962; [5] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 1, 8, Actualités, Sci, Ind., Hermann, 1144b, 1964; 1261a, 1958; [6] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre commutative, chap. 1—7, Actualités Sci. Ind., Hermann, Chap. 1, 2, 1290a, 1961; Chap. 3, 4, 1293a, 1967; Chap. 5, 6, 1308, 1964; Chap. 7, 1314, 1965; [7] A. Grothendieck, Eléments de géometrie algébrique, Publ. Math. Inst. HES, no. 4, 1960; [8] D. G. Northcott, Lessons on rings, modules and multiplicities, Cambridge Univ. Press, 1968.

Noether 环 [英 Noetherian ring 法 anneau noethérien 德 Noetherscher Ring 俄 нетерово кольцо 日 ネーター環] 关于左(右) Noether 环的定义,→环[理想]. 在本条中,设环全都是具有单位元 1 的交换环. 交换 Noether 环 R, 即关于 R 的理想极大条件† 成立的具有单位元的交换环，简称 **Noether 环**. 若 R 是整环†，则称 R 是 **Noether 整环**(Noetherian integral domain).

Cohen 定理: 具有单位元的交换环是 Noether 环的充分必要条件是任一素理想†(作为理想)都具有有限基.

Noether 环上由有限个元生成的交换环是 Noether 环(**Hilbert 基定理**(Hilbert's base theorem)). 具有单位元的交换 Artin 环† ⇔ Noether 环，且素理想全部是极大理想† ⇔ 有限个具有幂零†极大理想的 Noether 环的直和环. 若对交换环 R 中的任何非 0 理想 $\mathfrak{a}$, $R/\mathfrak{a}$ 必是 Artin 环，则称在 R 中**限制极小条件**(restricted minimum condition)成立. 关于具有单位元的交换环 R，限制极小条件成立 ⇔ R 是 Artin 环,或 R 是 Noether 整环且其 Krull 维数†是 1. Noether 环 R 的任一理想都可表示成有限个准素理想†的交. 给定一个环 R 及一个 R 模 M，M 的子模 P 称为**准素子模**(primary submodule)，如果 $a\in R$ 是关于 M/P 的**零因子**(zero divisor)(即这样的元 $a\in R$, 对于它存在 $m\in M$, 使得 $am\in P$, $m\notin P$) 则它关于 M/P 是**幂零的**(nilpotent)(即存在 n，使 $a^n(M/P)=0$). 上面所述 Noether 环的理想的性质，可以推广到 Noether 模：若 R 模 M 是 Noether 模，则 M 的每个子模都可以表示成有限个准素子模的交. 若 R 是 Noether 环, M 是有限 R 模, N, N' 是 M 的子模, $\mathfrak{a}$ 是 R 的理想,则有 1) **Artin-Rees 引理**: $\exists r$, $\forall n>r$, $\mathfrak{a}^nN\cap N'=\mathfrak{a}^{n-r}(\mathfrak{a}^rN\cap N')$. 2) **Krull 交定理**(intersection theorem of Krull): $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^nM=\{m\in M\,|\,\exists a\in\mathfrak{a},\ (1-a)m=0\}$, 从而，若 $\mathfrak{m}$ 是 R 的 Jacobson 根基†,则 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{m}^nM=\{0\}$. 3) **Krull 高度定理**(altitude theorem of Krull): 若 $\mathfrak{a}$ 由 s 个元生成，而 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的极小素因子†，则 $\mathfrak{p}$ 的高不大于 s.

【由理想定义的拓扑】 设 R 是交换环，$\mathfrak{a}$ 是 R 的一个理想,而 M 是一个 R 模. 把 $\{\mathfrak{a}^nM\,|\,n=1,2,\cdots\}$ 作为 M 中 0 的基本邻域系†而在

M上引进的拓扑，称为M的 $\mathfrak{a}$-**adic 拓扑**（$\mathfrak{a}$-adic topology）. 由 Artin-Rees 引理，若R是 Noether 环，M是有限R模，N是子R模，$\mathfrak{a}$是R的理想，则N的 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑与作为（引入 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑的）空间M的子空间N上的拓扑相同. 回到一般情形，模M在 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑下是T_0空间† $\Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = \{0\} \Longleftrightarrow M$是度量空间†，其中$M$中两点$a, b$的距离$d(a, b)$由$\inf\{2^{-n} | a - b \in \mathfrak{a}^n M\}$来定义. 关于子模$N$，$M/N$是$T_0$空间$\Leftrightarrow N$是$M$的闭子集$\Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}(N + \mathfrak{a}^n M) = N$. M的元的序列$\{a_n\} = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$称为（$\mathfrak{a}$-adic 拓扑下的）一个 **Cauchy 序列**（Cauchy sequence），如果$\forall n, \exists N, \forall r, \forall s$（都是自然数），有$a_{N+r} - a_{N+s} \in \mathfrak{a}^n M$. 这只须$\forall n, \exists N, \forall r, a_{N+r+1} - a_{N+r} \in \mathfrak{a}^n M$即可. 若这序列收敛于 0（即$\forall n, \exists N, \forall r, a_{N+r} \in \mathfrak{a}^n M$），则$\{a_n\}$称为**零序列**（null sequence）. M中的全体 Cauchy 序列的集合$\mathfrak{M}$，由$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$和$c\{a_n\} = \{ca_n\}$成为一个$R$模. 于是全体零序列的集合$\mathfrak{N}$是它的子$R$模. 若将$M$的元$m$与序列$(m, m, \cdots, m, \cdots)$看作等同，因而将$M$看作$\mathfrak{M}$的一个子模，则可把$R$模$\widehat{M} = \mathfrak{M}/\mathfrak{N}$看作$M/(\bigcap_n \mathfrak{a}^n M)$的（作为 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑产生的度量空间的）完备化†. 称$\widehat{M}$是M的 $\mathfrak{a}$-**adic 完备化**（$\mathfrak{a}$-adic completion）. 若$\mathfrak{a}$有有限基，则（作为完备化的）$\widehat{M}$的拓扑与$\widehat{M}$的 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑相同. 当$M = R$时，若在$\mathfrak{M}$中定义乘法$\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}$，则$\mathfrak{N}$成为交换环$\mathfrak{M}$的理想，因而$\widehat{R} = \widehat{M}$具有环的结构. 假定$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{r} a_i R$，若作出关于变数$x_1, \cdots, x_r$的形式幂级数环† $\widetilde{R} = R\{x_1, \cdots, x_r\}$，则$\widehat{R} \cong \widetilde{R}/\tilde{\mathfrak{n}}$，此处$\tilde{\mathfrak{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{r}(a_i - x_i)\widetilde{R} + \mathfrak{a}^n \widetilde{R}\right)$.

【Zariski 环】 设R为 Noether 环，$\mathfrak{a}$是它的一个理想. R的每个理想对 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑都是闭集$\Leftrightarrow R$中任何满足$1 - b \in \mathfrak{a}$的元b都是可逆元. 满足这一条件时，引入 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑的环R称为 **Zariski 环**（Zariski ring），也常说$(R, \mathfrak{a})$是 Zariski 环. 一个 Zariski 环称为**完备的**（complete），如果它是一个完备的拓扑空间. 若考虑 Zariski 环$(R, \mathfrak{a})$的完备化$\widehat{R}$，则其拓扑是$\mathfrak{a}\widehat{R}$-adic 拓扑，且$(\widehat{R}, \mathfrak{a}\widehat{R})$是一个 Zariski 环. 再者，1）$\widehat{R}$作为$R$模是一一平坦†的；2）若$M$是有限$R$模而$N$是它的子$R$模，则对于 $\mathfrak{a}$-adic 拓扑，N是M的闭集，它们的 $\mathfrak{a}$-adic 完备化与$M \otimes_R \widehat{R}$，$N \otimes_R \widehat{R}$可以看作是等同的.

【局部环】 假定 Noether 环R只有有限个极大理想，而J是它的 Jacobson 根基，则(R, J)是一个 Zariski 环，称为**半局部环**（semilocal ring）. 特别是，只有一个极大理想的 Noether 环称为**局部环**（local ring）. 如果具有单位元的交换环R仅有有限个极大理想，则R称为**拟半局部环**（quasi-semilocal ring）. 如果它仅有一个极大理想，则称为**拟局部环**（quasi-local ring）. 也有人在比上面叙述的条件为弱的条件下，使用局部环、半局部环这些名词，在条件为最弱的用法中，它们分别是拟局部环、拟半局部环的意义. 在这样的情形下，上述的（半）局部环则称为 **Nother（半）局部环**（Noetherian (semi) local ring）.

设R是半局部环，$\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n$是它的极大理想，$J = \mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n$是它的 Jacobson 根基. 在有限$R$模$M$中引入$J$-adic 拓扑. 此时$R$的完备化$\widehat{R}$是半局部环，其极大理想是$\mathfrak{m}_1\widehat{R}, \cdots, \mathfrak{m}_n\widehat{R}$. 而且，$\widehat{R}$与局部环$R_{\mathfrak{m}_i} (i = 1, \cdots, n)$的完备化的直和同构. 因为$R$是 Zariski 环，所以 1）$\widehat{R}$作为$R$模是一一平坦的；2）$M$的子$R$模是$M$的闭集；3）$M$的完备化与$M \otimes_R \widehat{R}$可看作是等同的. 若$(R, \mathfrak{m})$是完备局部环（即既是一个局部环，又是一个完备 Zariski 环），则R包含一个具有下述性质的子环I：1）I是完备局部环，且$I/(\mathfrak{m} \cap I) = R/\mathfrak{m}$；2）设$R/\mathfrak{m}$的特征是$p$（0 或素数），则$\mathfrak{m} \cap I = pI$. 因而，若$\mathfrak{m}$由$n$个元生成，则$R$是$I$上$n$个变量的幂级数环† 的同态像. 这条定理称为**完备局部环的结构定理**（structure theorem of complete local rings）. I称为R的**系数环**（coefficient ring）. 若R包含一个域，则I也是一个域，称为**系数域**（coef-

ficient field). 完备局部环是 Hensel 环†.

若$(R, \mathfrak{m})$是局部环, $\sum_{i=1}^{r} x_i R$ 是属于$\mathfrak{m}$的准素理想, 则 $r \geqslant$(R 的 Krull 维数). 当等号成立时, $x_1, \cdots, x_r$ 称为 R 的**参数系** (system of parameters). 而当 $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^{r} x_i R$ 时, $x_1, \cdots, x_r$ 称为**正则参数系** (regular system of parameters). 具有正则参数系的局部环称为**正则局部环** (regular local ring) (参看 Jacobi 判别准则†). 正则局部环是素元分解环†. 当局部环$(R, \mathfrak{m})$的 Krull 维数是 d 时, R 为正则局部环⇔任意 R 模的同调维数†为有限⇔任意 R 模的同调维数不大于 d ⇔ $R/\mathfrak{m}$ (作为 R 模)的同调维数为有限(实际上 $= d$). 设 R' 是 Noether 环, 如果对于任意素理想 $\mathfrak{p}'$, $R'_{\mathfrak{p}'}$ 是正则局部环, 则 R' 称为**正则环** (regular ring). 正则局部环是正则环.

考虑局部环$(R, \mathfrak{m})$, 当 $\mathfrak{q}$ 是属于 $\mathfrak{m}$ 的准素理想时, 设 $R/\mathfrak{q}^n$ 的(作为 R 模的)长为 $l(n)$, 则存在关于 n 的有理系数多项式 $f(n)$, 使得对于充分大的 n, $f(n) = l(n)$ 成立. $f(n)$ 的次数 d 与 R 的 Krull 维数相等. $f(n)$ 中 n^d 的系数的 $d!$ 倍, 称为 $\mathfrak{q}$ 为**重数** (multiplicity). 若 $x_1, \cdots, x_d$ 是 R 的参数系, 则 $\sum x_i R$ 的重数 μ 不大于 $R/(\sum x_i R)$ 的长. 当它们相等时, 称 $x_1, \cdots, x_d$ 是一个**独特的参数系** (distinct system of parameters). 如果一个局部环具有独特的参数系, 则称它为 **Macaulay 局部环** (Macaulay local ring) 或 **Cohen-Macaulay 局部环**. 一个局部环是 Macaulay 局部环⇔每个参数系是独特的参数系⇔若高为 s 的理想 $\mathfrak{a}$ 由 s 个元生成, 则 $\mathfrak{a}$ 的每个素因子的高是 s. 正则局部环是 Macaulay 局部环. 参数系, 重数等在一般的 Noether 环中也能定义 (→[4]). 如果在 Noether 环 R 中, 对每一个极大理想 $\mathfrak{m}$, $R_{\mathfrak{m}}$ 是 Macaulay 局部环, 则 R 称为**局部的 Macaulay 环** (locally Macaulay ring). 正则环就是一个例子. 再如果对所有极大理想 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ 的高均等于 R 的 Krull 维数, 则 R 称为 **Macaulay 环** (Macaulay ring). 局部的 Macaulay 环 R 上有限个变量的多项式环 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 也是局部的 Macaulay 环. 一般地, 如果理想 $\mathfrak{a}$ 的所有素因子的高都等于 $\mathfrak{a}$ 的高, 则称 $\mathfrak{a}$ 为**纯** (unmixed, pure) **理想**, 否则称为**混合** (mixed) **理想**. 按照这些术语, 在前述的假定下, 若 $R[x_1, \cdots, x_n]$ 的理想 $\mathfrak{a}$ 由 r 个元生成, 且 $\mathfrak{a}$ 的高是 r, 则 $\mathfrak{a}$ 就是一个纯理想 (**纯性定理** (unmixedness theorem)).

当局部环 R 的完备化是正规环†时, R 称为**解析正规的** (analytically normal). 如果一个半局部环 R 的完备化没有非 0 的幂零元, 则 R 称为**解析非分歧的** (analytically unramified). 如果半局部整环 R 是一个域上的有限生成环的商环, 则 R 是解析非分歧的, 若 R 还是正规局部环, 则 R 是解析正规的 (O. Zariski).

在局部环的理论 (特别是重数的理论) 中, 如下的分次环† 常常起着重要的作用. 设$(R, \mathfrak{m})$是局部环, $\mathfrak{q}$ 是属于 $\mathfrak{m}$ 的准素理想, 令 $F_i = \mathfrak{q}^i/\mathfrak{q}^{i+1}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, \mathfrak{q}^0 = R)$, 对作为模的直和 $F = \sum_{i=0}^{\infty} F_i$, 在 $a = a' \pmod{\mathfrak{q}^{i+1}} \in F_i$, $b = b' \pmod{\mathfrak{q}^{j+1}} \in F_j$ 时, 定义 $ab = a'b' \pmod{\mathfrak{q}^{i+j+1}} \in F_{i+j}$, 则 F 成为一个在 $F_0 = R/\mathfrak{q}$ 上由 F_1 所生成的环. 若定义 F_i 是 F 的 i 次分量, 则 F 成为分次环, 这一 F 称为 R 关于 $\mathfrak{q}$ 的**形式环** (form ring, associated graded ring).

【素理想链】 设 R 是 Noether 环, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ 是它的素理想, 且 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$. 连结 $\mathfrak{p}$ 与 $\mathfrak{q}$ 的素理想链 $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \mathfrak{p}_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{q}$ 不能再加细时, 它的长 n 由 $\mathfrak{p}$ 与 $\mathfrak{q}$ 唯一确定这一想法, 一般来说是不正确的(永田雅宜). 但是对于相当广的一类 Noether 环, 这个命题是成立的. 例如, 对于成为局部的 Macaulay 环的同态象的环, 这一点是成立的. 特别是, 在一个域或 Dedekind 环†上由有限个元生成的环就是这样.

【整闭包】 设 R 是 Noether 整环, K 是 R 的商域 k 的有限代数扩域, $\tilde{R}$ 是 R 在 K 内的整闭包†, 于是有: 1) 若 R 的 Krull 维数是 1, R' 是 R 与 K 之间的任一中间环, 则对于 R' 的任一非 0 理想 $\mathfrak{a}'$, $R'/\mathfrak{a}'$ 是一个有限 $R'/(\mathfrak{a}' \cap R)$ 模; 因此, R' 是一个 Noether 整环, 其理想满足限制

极小条件. 2) 设R的 Krull 维数为 2，则$\tilde{R}$是 Noether 环. 3) 一般情形下，$\tilde{R}$是 Krull 环†，而且对于R的素理想$\mathfrak{p}$，$\tilde{R}$只有有限个素理想$\tilde{\mathfrak{p}}$能使$\tilde{\mathfrak{p}} \cap R = \mathfrak{p}$; 且对这样的$\tilde{\mathfrak{p}}$，$\tilde{R}/\tilde{\mathfrak{p}}$的商域是$R/\mathfrak{p}$的商域的有限代数扩域. 上面的 1) 称为 **Krull-秋月定理**. 用上面的记号，若对K的任何取法，$\tilde{R}$总是有限R模，则称R满足**关于整扩张的有限条件** (finiteness condition for integral extensions). 如果对 Noether 环R中的每个素理想$\mathfrak{p}$，$R/\mathfrak{p}$都满足上面的条件，则R称为**伪几何环** (pseudo-geometric ring). 伪几何环中添加有限个元所得出的环也是伪几何环.

【研究史】 在数论中，J. W. R. Dedekind 首先引入了理想，开创了理想论. 当时作为环的研究的主要对象是数域与函数域的子环，抽象地处理 Dedekind 环是由園正造 (Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto, **2** (1917), **3** (1918—1919)) 开始的，接着由 E. Noether (Math. Ann., **83** (1921), **96** (1926)) 开始了所谓 Noether 环论. W. Krull 发表了不少论文，对 Noether 环与一般交换环论的发展作出了重要的贡献 (→[1]). E. Artin，秋月康夫，森新治郎等很多人在其后也对这个理论作出了贡献. 引进局部环的是 Krull (J. Reine Angew. Math., **179** (1938)). 局部环论是由 C. Chevalley (Ann. of Math., **44** (1943)), I. S. Cohen (Trans. Amer. Math. Soc., **59** (1946)) 以及 Zariski (Ann. Inst. Fourier, **2** (1950)) 等人发展的，以后 P. Samuel, 永田, M. Auslander, D. A. Buchsbaum, J.-P. Serre 等许多人作出了很大的贡献 (→[4]). Noether 环的理论在代数几何学中有各种应用.

【参】 [1] W. Krull, Idealtheorie, Erg. d. Math., Springer, 1935, 第二版, 1968; [2] B. L. van der Waerden, Algebra, I, II, Springer, 1955,1959 (中译本: B. L. 范德瓦尔登，代数学，科学出版社，I 1963, II 1976); [3] O. Zariski-P. Samuel, Commutative algebra, I, II, van Nostrand, 1958—1960; [4] M. Nagata (永田雅宜), Local rings, Interscience, 1962; [5] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 1, 8, Actualités Sci. Ind., 1144b, 1261a, Hermann, 1964, 1958; [6] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre commutative, chap. 1—7, Actualités Sci. Ind., Hermann, chap. 1, 2, 1290a, 1961; chap. 3, 4, 1293a, 1967; chap. 5, 6, 1308, 1964; chap. 7, 1314, 1965; [7] J.-P. Serre, Algèbre locale, multiplicités, Lecture notes in Math. 11, Springer, 1965; [8] D. G. Northcott, Lessons on rings, modules and multiplicities, Cambridge Univ. Press, 1968; [9] H. Matsumura (松村英之), Commutative algebra, Benjamin, 1970.

多项式环 [英 polynomial ring 法 anneau de polynômes 德 Polynomring 俄 кольцо полиномов 日 多項式環] 在这一条中的环都是指具有单位元 1 的交换环. 系数在环R中的字母 (或变量，不定元，记号) $X_1, \cdots, X_n$的多项式†的全体，称为R上n个变量$X_1, \cdots, X_n$的**多项式环**，以$R[X_1, \cdots, X_n]$表示 (→多项式，交换环，Noether 环). 另一方面，当R, R'是具有共同的单位元的环，且$R \subset R'$, $S \subset R'$时，以$R[S]$表示S的元在R上所生成的环. 若$S = \{x_1, \cdots, x_n\}$，就有从R上n个变量的多项式环$R[X_1, \cdots, X_n]$到$R[S]$上的一个同态†φ，它由$\varphi(\sum a_{i_1 \cdots i_n} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} (a_{i_1 \cdots i_n} \in R)$来定义. 若$\varphi$是同构†，则$x_1, \cdots, x_n$称为在$R$上是**代数无关的** (algebraically independent)，否则称为**代数相关的** (algebraically dependent). 因此多项式环可看成由代数无关元生成的环.

【理想，齐次环，分次环】 考虑环R上的n变量多项式环$R[X] = R[X_1 \cdots X_n]$. $f \in R[X]$是零因子†的充分必要条件为$\exists a \neq 0$, $a \in R$，使得$af = 0$. 若$\mathfrak{a}$是R的理想†，则$R[X]/\mathfrak{a}R[X] \cong (R/\mathfrak{a})[X_1, \cdots, X_n]$. 因而若$\mathfrak{p}$是$R$的素理想†，则$\mathfrak{p}R[X]$也是$R[X]$的素理想. 若$R$是素元分解环†，则$R[X]$也是素元分解环. 若$R$是正规环†，则$R[X]$也是正规环. 由 Hilbert 基定理†，若$R$是 Noether 环†，则$R[X]$也是 Noether 环. 若$R$的 Krull 维数†是$m$，则$R[X]$的 Krull 维数$\geqslant n + m$; 当$R$是 Noether 环时，等号成立. 若$R$是域†，则$R[X]$不仅是素元分解环，而且是 Macaulay 环†.

由齐次多项式†f_λ (f_λ的次数m_λ也可以因λ而异) 的一个集合所生成的$R[X]$的理想，称为**齐次理想** (homogeneous ideal). 若$\mathfrak{a}$是齐次理想，则把$R[X]/\mathfrak{a}$中的一个元定义为$R[X]/\mathfrak{a}$

的 d 次**齐次元**(homogeneous element),如果它是一个 d 次齐次多项式在以 $\mathfrak{a}$ 为模时所得的类;而 $R[X]/\mathfrak{a}$ 称为**齐次环**(homogeneous ring). 更一般地,当环 R 是它的子模 R_i $(i=0,1,2,\cdots)$ 的直和 $\sum_{i=0}^{\infty} R_i$,且 $R_iR_j \subset R_{i+j}$ 对任意的 i,j 都成立时,定义 R_i 的元为 R 的 i 次**齐次元**,称 R 为**分次环**(graded ring). 齐次环是分次环. 在分次环中仅由齐次元生成的理想称为**齐次理想**(homogeneous ideal)或**分次理想**(graded ideal). 在分次环 $R=\sum_{i=0}^{\infty} R_i$ 中,若 $\sum_{i=1}^{\infty} R_i$ 作为理想由有限个元生成,则 R(作为环)由子环 R_0 上有限个元生成. 因而,$R=\sum R_i$ 是 Noether 环的充分必要条件为 R_0 是 Noether 环,而且 R 是由 R_0 上有限个元生成的. 这时,齐次理想是有限个齐次准素理想†的交,且齐次理想的素因子是齐次素理想. 分次环的概念往往还用于更一般的环.

【零点】 1) 仿射空间的情形. 考虑域 K 上 n 变量多项式环 $K[X]=K[X_1,\cdots,X_n]$ 与包含 K 的域 Ω. Ω 上 n 维仿射空间† $\Omega^n=\{(a_1,\cdots,a_n)\,|\,a_i\in\Omega\}$ 的点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 称为 $K[X]$ 的子集 S 的**零点**(zero point),如果对于任意的 $f(X_1,\cdots,X_n)\in S$,有 $f(a_1,\cdots,a_n)=0$. 若 a_i 在 K 上都是代数的,则点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 称为 K 上的**代数点**(algebraic point). 若 $\forall a_i\in K$,则 $(a_1,\cdots,a_n)$ 称为 K **有理点**(rational point). 在这种意义下可以定义代数零点与有理零点. 因为 S 的零点也是由 S 生成的理想的零点,所以为了考虑 S 的零点,可以只限于 S 是理想的情形. 以 $V(S)$ 表示 S 的零点的全体,若 $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2$ 是 $K[X]$ 的理想,则有 i) $V(\mathfrak{a}_1\cap\mathfrak{a}_2)=V(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)=V(\mathfrak{a}_1)\cup V(\mathfrak{a}_2)$; ii) $V(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)=V(\mathfrak{a})\cap V(\mathfrak{a}_2)$; iii) 若 $\mathfrak{a}_1$ 与 $\mathfrak{a}_2$ 有相同的根基†,则 $V(\mathfrak{a}_1)=V(\mathfrak{a}_2)$.

2) 射影空间的情形. Ω 上 $n-1$ 维射影空间†的点 $(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)(a_i\in\Omega,\exists a_i\neq 0,\lambda\in\Omega,\lambda\neq 0)$ 称为多项式 $f(X_1,\cdots,X_n)$ 的**零点**,如果当设 $f=\sum f_i$(f_λ 是 i 次齐次多项式)时,对于每个 i,都有 $f_i(a_1,\cdots,a_n)=0$(当 Ω 有无限个元时,定义中的条件等价于:不论比例常数 λ 如何,总有 $f(\lambda a_1,\cdots,\lambda a_n)=0$). 所以 S 的零点是包含 S 的最小齐次理想的零点. 从而考虑零点时,只须考虑齐次理想的零点. 与 1) 中的 i) ii) iii) 同样的命题,对于齐次理想 $\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2$ 也成立.

【正规化定理】 设 $\mathfrak{a}$ 为域 K 上 n 变量多项式环 $K[X]=K[X_1,\cdots,X_n]$ 的理想,其高†为 h,则在 $K[X]$ 中存在元 $Y_1,\cdots,Y_n$,使得: 1) $K[X]$ 在 $K[Y]=K[Y_1,\cdots,Y_n]$ 上是整的†; 2) $Y_1,\cdots,Y_h$ 生成 $\mathfrak{a}\cap K[Y]$(这称为**多项式环的正规化定理**(*normalization theorem for polynomial rings*)).

利用这条定理,可得到关于有限生成环的各种重要定理. 下面举出几个. 1)**有限生成环的正规化定理**(normalization theorem for finitely generated rings). 对于整环 I 上有限生成的环 R,可取到 I 的一个非零元 a 和在 I 上代数无关的 R 的元 $z_1,\cdots,z_t$,使得商环† R_S 在 $I[a^{-1},z_1,\cdots,z_t]$ 上是整的,此处 $S=\{a^n\,|\,n=1,2,\cdots\}$. 2) 若 $\mathfrak{p}$ 是域 K 上有限个元生成的整环 R 的素理想,则($\mathfrak{p}$ 的高)+($\mathfrak{p}$ 的深†)=(R 在 K 上的超越次数),且 $\mathfrak{p}$ 的深等于 $R/\mathfrak{p}$ 在 K 上的超越次数. 特别地,若 $\mathfrak{m}$ 是 R 的一个极大理想,则 $R/\mathfrak{m}$ 在 K 上是代数的. 3) **Hilbert 零点定理**(Hilbert zero point theorem). 设 $\mathfrak{a}$ 是域 K 上 n 变量多项式环 $K[X_1,\cdots,X_n]$ 的理想,且设包含 K 的域 Ω 是代数封闭的. 若 $f\in K[X]$,且 $\mathfrak{a}$ 的每个代数零点都是 f 的一个零点,则 f 的某个幂 f^ρ 含于 $\mathfrak{a}$ 中.

【消去法】 设 $f_1,\cdots,f_N$ 是整环 I 上 $m+n$ 个变量的多项式环 $R=I[X_1,\cdots,X_m,Y_1,\cdots,Y_n]$ 的元. 对于 I 的每个极大理想 $\mathfrak{m}$,设 $\varphi_\mathfrak{m}$ 是以 $\mathfrak{m}$ 为模的标准同态,而 $\Omega_\mathfrak{m}$ 是包含 $I/\mathfrak{m}$ 的代数闭域†. 设 $W_\mathfrak{m}$ 为 $\Omega_\mathfrak{m}$ 上 n 维仿射空间 $\Omega_\mathfrak{m}^n$ 的点 $(a_1,\cdots,a_n)$ 中使得 $\varphi_\mathfrak{m}(f_i)(X_1,\cdots,X_m,a_1,\cdots,a_n)=0$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 在 $\Omega_\mathfrak{m}^n$ 内有解的点的全体. 从 $f_1,\cdots,f_N$ **消去**(eliminate) $X_1,\cdots,X_m$,就是要找 $g(Y_1,\cdots,Y_n)\in I[Y_1,\cdots,Y_n]$,使对每一个 $\mathfrak{m}$,$W_\mathfrak{m}$ 的任一点都是

$\varphi_m(g)$ 的零点;这样的一个 g (或方程 $g=0$)称为 $f_1, \cdots, f_N$ 的**结式** (resultant). 所有结式的集合形成 $I[Y_1, \cdots, Y_n]$ 的一个理想 $\mathfrak{a}$, 而 $g_1, \cdots, g_N$ 称为**结式系** (system of resultants), 如果由它们所生成的理想的根基[†]就是 $\mathfrak{a}$. 若 I 是在一个域上有限生成的, 设由 $f_1, \cdots, f_N$ 所生成的理想的根基为 $\mathfrak{b}$, 则 $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}\cap I[Y_1, \cdots, Y_n]$. 特别地, 当 I 是域时, 显然 $W_{(0)}$ 包含于 $\mathfrak{a}$ 的零点的集合 V 中, 但不一定有 $W_{(0)}=V$. 如果每一个 f_i 关于 $X_1, \cdots, X_m$ 是齐次的, 关于 $Y_1, \cdots, Y_n$ 也是齐次的, 则 $W_{(0)}=V$.

实际求结式系的一个方法是, 把 f_i 与 f_j 看作 X_1 在 $I[X_2 \cdots, X_m, Y_1, \cdots, Y_n]$ 上的多项式, 由 f_i, f_j 消去 X_1 而得到结式 $R(f_i, f_j)$, 然后从这些结式中同样地消去 X_2. 这样地依次消去 $X_1, \cdots, X_m$.

求一个变量 X 的两个多项式 f, g 的结式的一个方法是 **Sylvester 消去法** (Sylvester's elimination method). 设 $f=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$, $g=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n$, 并以 $D(f, g)$ 表示下面的 $m+n$ 阶行列式:

$$
n\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.\!\!\!\!\!\!\!\!
m\left\{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right.
\begin{vmatrix}
a_0\ a_1 \cdots a_m & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
0\ a_0 \cdots a_{m-1}\ a_m & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \cdots 0 & a_0\ \ a_1 \cdots\cdots a_{m-1}\ a_m \\
b_0\ b_1 \cdots\cdots b_{n-1}\ b_n & 0 \cdots\cdots\cdots 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \cdots 0\ b_0 & b_1 \cdots\cdots\cdots\cdots b_{n-1}\ b_n
\end{vmatrix}.
$$

于是, $D(f, g)=0$ 的充分必要条件是 f, g 有公共根, 或 $a_0=b_0=0$. 因而, 例如当系数环 I 是素元分解环且 a_0 与 b_0 无公因子时, $D(f, g)$ 是 f 与 g 的结式 $R(f, g)$.

关于其他各种消去法, 参看 B. L. van der Waerden, Algebra, II, Springer.

关于域 K 上有限生成环的正则[†]性的判别法, 参看 Jacobi 判别准则[†](→幂级数环).

历史上, 多项式环的理论, 在与代数几何学保持密切联系中得到了发展. →代数几何学, 代数簇.

【合系理论】 (1) 古典情形. 关于**合系**的概念是由 Sylvester 引入的 (Phil. Trans., **143** (1853)), 然后由 Hilbert [3] 加以推广和澄清, 它的定义可叙述如下: 设 $R=k[X_1, \cdots, X_n]$ 是域 k 上的 n 变量多项式环. R 具有自然分次 (即 R 是一个分次环, 其中每个 $X_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 是一次的, 而 k 的元是零次的). 设 M 是一个有限生成分次 R 模. 若 $f_1, \cdots, f_m$ 构成 M 在 R 上的一个由齐次元组成的极小基, 我们引入 m 个不定元 $u_1, \cdots, u_m$, 且令 $F=\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} Ru_j$, 即由 $u_1, \cdots, u_m$ 所生成的自由 R 模. 令 $\deg(u_j)=\deg(f_j)(1 \leqslant j \leqslant m)$, 并且对 F 赋予分次 R 模的结构. 设 φ 是由 $\varphi(u_j)=f_j$ 所定义的 F 到 M 上的分次 R 同态, 则 $N=\operatorname{Ker}(\varphi)$ 是分次 R 模, 且若不计(分次 R 模的)同构, 则它由 M 唯一确定; N 称为 M 的**第一合系** (first syzygy). 对正整数 r, 可归纳地定义 M 的**第 r 合系** (r-th syzygy) 为 M 的第 $r-1$ 合系的第一合系. **Hilbert 合系定理** (Hilbert syzygy theorem) 断言: 对任何有限生成分次 R 模 M, M 的第 n 合系是自由的, 换句话说, M 容许一个自由分解, 即一个如下形式的正合序列:

$$0 \rightarrow F^{(\nu)} \rightarrow \cdots \rightarrow F^{(1)} \rightarrow F^{(0)} \rightarrow M \rightarrow 0,$$

其中 $\nu \leqslant n$, 且每个 $F^{(i)} (0 \leqslant i \leqslant \nu)$ 是有限生成的自由分次 R 模. 于是, 若 M_d 表示 M 中次数为 d 的齐次部分, 则存在一个次数 $\leqslant n-1$ 的多项式 $P(X)$, 使得对充分大的 d, 有 $\dim_k(M_d)=P(d)$; $P(X)$ 称为分次 R 模 M 的 **Hilbert 多项式** (Hilbert polynomial) (或**特征函数** (characteristic function)).

(2) Serre 的推广. 合系理论由 J.-P. Serre 推广如下[2]: 设 R 是 Noether 环, M 是一个有限生成的 R 模, 于是我们能求得一个有限生成自由 R 模 F 以及 F 到 M 上的一个 R 同态 φ, φ 的核称为 M 的**第一合系**, 它不是由 M 唯一确定的. 但是, 若 N_1 和 N_2 都是 M 的第一合系, 则存在有限生成射影 R 模 P_1 和 P_2, 使得 $N_1 \oplus P_1 \cong N_2 \oplus P_2$ (→模 [Hom 和 $\otimes$]). 对正整数 r, 第 r

合系可如同(1)中那样归纳地定义. Serre 的一个重要结果是: R是一个 Krull 维数至多是n的正规环，当且仅当每个有限生成R模的第n合系是射影的.

(3) 特殊情形. 在如下的特殊情形下，若不计同构，可以唯一地定义M的第一合系: i) R是 Noether 局部环,且M是有限生成R模; ii) R是分次 Noether 环 $\sum_{d\geq 0} R_d$, 其中 R_0是域,而M是有限生成的分次R模[4].

【参】 [1] M. Nagata (永田雅宜), Local rings, Interscience, 1962; [2] J. -P. Serre, Algèbre Locale, multiplicités, Lecture notes in Math., Springer, 1965; [3] D. Hilbert, Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Ann., **36** (1890), 473—534; [4] J. -P. Serre, Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proc. Intern. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo and Nikko (1955), 175—189.

其他 → Noether 环的[参].

幂级数环 [英 power series ring 法 anneau des séries de puissances 德 Potenzreihenring 俄 кольцо степенных рядов 日 ベキ級数環]

【形式幂级数环】 设R是具有单位元 1 的交换环,以 F_d 表示n个字母 (或变量,不定元) $X_1, \cdots, X_n$ 的系数在R中的 d 次齐次多项式† 所构成的模. $a_d\in F_d$ 的形式无限和$\sum_{d=0}^{\infty} a_d=a_0+a_1+\cdots+a_n+\cdots$, 称为$n$个变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的系数在R中的**形式幂级数**(formal power series), 简称**幂级数** (power series). a_d 称为这个幂级数 $\sum a_n$ 的 d 次**齐次部分** (homogeneous part). 0 次部分 a_0 称为**常数项**(constant term). 幂级数的和与积定义为 $(\sum a_d)+(\sum b_d)=\sum(a_d+b_d)$, $(\sum a_d)(\sum b_d)=\sum_d\left(\sum_{i+j=d} a_ib_j\right)$. 由此,所有这样的幂级数构成一个交换环,称为**(形式) 幂级数环** ((formal) power series ring), 以 $R\{X_1, \cdots, X_n\}$ 或 $R[[X_1, \cdots, X_n]]$表示. 若有自然数N,使当 $d>N$ 时,就有 $a_d=0$, 则 $\sum a_d$ 可看作是多项式 $a_0+a_1+\cdots+a_N$. 因而有 $R[X_1, \cdots, X_n]\subset R\{X_1, \cdots, X_n\}$. 若令 $\mathfrak{X}=\sum_i X_iR\{X_1, \cdots, X_n\}$,则 $R\{X_1,\cdots,X_n\}$ 基于 $\mathfrak{X}$-adic 拓扑 (→Noether 环) 形成完备† 环.

设 R' 是一个包含R的交换环,且与R有共同的单位元, $\mathfrak{a}'$ 是它的一个理想,并假定在 $\mathfrak{a}'$-adic 拓扑下, R' 是完备的. 取 $x_1, \cdots, x_n\in\mathfrak{a}'$, 则无限和 $\sum c_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ (i_j 取遍非负整数, $c_{i_1\cdots i_n}\in R$) 在 R' 中有确定的意义 (即, 若令 S_d 为使得 $\sum i_j\leqslant d$ 的各项的有限和, 则定义 $\sum c_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ 为 $\lim_{d\to\infty} S_d$). 这样的元 $\sum c_{i_1\cdots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$ 也称为 $x_1, \cdots, x_n$ 的幂级数. $x_1, \cdots, x_n$ 的所有幂级数的集合也称为 $x_1, \cdots, x_n$ 的幂级数环,也用符号{ }或[[ ]]表示为 $R\{x_1, \cdots, x_n\}$ 或 $R[[x_1, \cdots, x_n]]$. 若令 $\varphi(\sum c_{i_1\cdots i_n} X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n})=\sum c_{i_1\cdots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, 则$\varphi$是形式幂级数环 $R\{X_1,\cdots,X_n\}$到 $R\{x_1,\cdots,x_n\}$上的一个同态. 当这个φ是同构时, $x_1, \cdots, x_n$ 称为在R上是**解析无关的** (analytically independent).

设 $\overline{\mathfrak{m}}$ 为形式幂级数环 $R\{X_1,\cdots, X_n\}$的一个极大理想†, 则 $\overline{\mathfrak{m}}\cap R=\mathfrak{m}$ 是R的极大理想, $\overline{\mathfrak{m}}$ 由 $\mathfrak{m}$ 与 $X_1,\cdots,X_n$ 所生成. $f\in R[X_1,\cdots,X_n]$ 是 $R[X_1,\cdots, X_n]$ 的可逆元† 的充分必要条件为f的常数项f_0是R的可逆元,此时 $f^{-1}=\sum_{d=0}^{\infty} f_0^{-d-1}(f_0-f)^d$. 若下面的条件对于$R$成立,则它们对于 $R\{X_1, \cdots, X_n\}$ 也同样成立: 1) Noether 环†, 2) 局部环†, 3) 半局部环†, 4) 整环†, 5) 正则局部环†, 6) Noether 正规环. 然而若R是素元分解环†, $R\{X_1,\cdots, X_n\}$ 却不一定是素元分解环. 若R是域 (更一般地, 若R是正则半局部整环), 则 $R\{X_1, \cdots, X_n\}$ 是素元分解环. 特别是, 域k上的单变量幂级数环 $k\{X\}$ 是整环,它的商域称为k上的**单变量幂级数域** (power series field in one variable), 记作 $k((X))$; $k((X))$ 的元可唯一地表示为 $\sum_{n=r}^{\infty} a_n X^n$, $a_n\in k$, $a_r\neq 0$ ($r\in\mathbf{Z}$).

【收敛幂级数环】 设K是域, v 是它的乘法赋值† (例如 $K=\mathbf{C}$ (复数域), $v(\alpha)=|\alpha|$ $(\alpha\in\mathbf{C})$). 对于K上的n变量形式幂级数 $f(X_1, \cdots, X_n)=\sum c_{i_1\cdots i_n}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}$, 如果存在适当

的正实数 $r_1, \cdots, r_n, M$，使得对于全部 $(i_1, \cdots, i_n)$，都有 $v(c_{i_1\cdots i_n})r_1^{i_1}\cdots r_n^{i_n} \leq M$，则称 $f(X_1, \cdots, X_n)$ 为**收敛幂级数**(convergent power series)．事实上，在这种情形，若 $a_i \in K$ 且 $v(a_i) < r_i$，则 $\sum c_{i_1\cdots i_n} a_1^{i_1}\cdots a_n^{i_n}$ 在K的完备化†内有和．$K\{X_1, \cdots, X_n\}$ 内的全体收敛幂级数构成一个子环，称为K上的 n 变量**收敛幂级数环**(convergent power series ring)，简称**幂级数环**，以 $K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$ 或 $K\{X_1, \cdots, X_n\}$ 表示．这是一个 Krull 维数为 n 的正则局部环，因而是素元分解环．它的完备化是$K\{X_1, \cdots, X_n\}$．在 v 是平凡†赋值时，$K\{X_1, \cdots, X_n\} = K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$．

Weierstrass 预备定理 (Weierstrass' preparation theorem)：对于 $f = \sum c_{i_1\cdots i_n} X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n} \in K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$，假定 $c_{0\cdots 0i} = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, r-1)$，$c_{0\cdots 0r} \neq 0$．此时，对任意的 $g \in K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$，有唯一确定的 $q \in K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$，使得 $g - qf \in \sum_{i=0}^{r-1} X_n^i K\langle\langle X_1, \cdots, X_{n-1}\rangle\rangle$．特别是(考虑 $g = X_n^r$ 的情形)，在 $K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$ 中存在一个可逆元 u，使得 $fu = f_0 + f_1 X_n + \cdots + f_{r-1} X_n^{r-1} + X_n^r$ $(f_i \in K\langle\langle X_1, \cdots, X_{n-1}\rangle\rangle)$．

从这条定理容易知道，若 $\mathfrak{a}$ 为 $K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$ 的一个理想，其高†为 h，则 $K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle/\mathfrak{a}$ 与一个环同构，这个环是 $n-h$ 变量的收敛幂级数环 $K\langle\langle Y_1, \cdots, Y_{n-h}\rangle\rangle$ 上的有限模．

若取 $K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$ 的素理想 $\mathfrak{p}$，则 $\mathfrak{p}K\{X_1, \cdots, X_n\}$ 是素理想．

Jacobi 判别准则 (Jacobian criterion)．设 R 为域 K 上的 n 变量多项式环 $K[X_1, \cdots, X_n]$，或形式幂级数环 $K\{X_1, \cdots, X_n\}$，或收敛幂级数环 $K\langle\langle X_1, \cdots, X_n\rangle\rangle$．在 R 中定义偏导数† $\partial/\partial x_i$．对于 $f_1, \cdots, f_t \in R$，它的 Jacobi 矩阵† $J(f_1, \cdots, f_t)$ 定义为 (i, j) 分量是 $\partial f_i/\partial x_j$ 的 (t, n) 型矩阵．当 $\mathfrak{p}$ 是理想 $\sum_i f_i R$ 的素因子†，$\mathfrak{q}$ 是包含 $\mathfrak{p}$ 的素理想时，若 $J(f_1, \cdots, f_t) \pmod{\mathfrak{q}}$ 的秩等于 $\mathfrak{p}$ 的高，则 $R_\mathfrak{q}/\sum f_i R_\mathfrak{q}$ 是一个正则局部环．若K是完全域†，则其逆亦成立．(K 不是完全域时，对 $J(f_1, \cdots, f_t)$ 稍加改变，也能得出同样的定理([1]))．

【Hensel 环】 具有单位元的交换环R满足下面的条件 1)，2) 时，就称为 **Hensel 环** (Henselian ring)：1) R只有一个极大理想 $\mathfrak{m}$ (即R是拟局部环†)，2) 若 f, g_0, h_0 是系数在R中的变量 x 的首一多项式 (最高次项的系数是 1 的多项式称为首一多项式 (monic polynomial))，使 $f - g_0h_0 \in \mathfrak{m}R[x]$，且 $g_0R[x] + h_0R[x] + \mathfrak{m}R[x] = R[x]$，则存在 $g, h \in R[x]$，使得 $f = gh$，且 $g \equiv g_0$，$h \equiv h_0$ 模 $\mathfrak{m}$．

完备局部环、收敛幂级数环、完备赋值环†等是 Hensel 环的重要例子．若R是 Hensel 环，R' 是具有单位元的交换环，且是有限生成 R 模，则 R' 是有限个 Hensel 环的直和．对于拟局部环 Q，有一个 Hensel 环 $\tilde{Q}$，称为Q的 **Hensel 化** (Henselization)(关于细节→[1])，使得 1) $\tilde{Q}$ 是一个一一平坦†的 Q 模；2) 若Q的极大理想是 $\mathfrak{m}$，则 $\tilde{Q}$ 的极大理想是 $\mathfrak{m}\tilde{Q}$，而且 $\tilde{Q}/\mathfrak{m}\tilde{Q} = Q/\mathfrak{m}$；3) 若$R$是一个包含 Q 的 Hensel 环，它的极大理想是 $\mathfrak{n}$，且 $\mathfrak{n} \cap Q = \mathfrak{m}$，则有且仅有一个 $\tilde{Q}$ 到R的Q同态 φ；4) 若Q是正规环，则上述的 φ 是到R内的同构 (单射†)；5) 若Q是一个局部环，则 $\tilde{Q}$ 也是一个局部环，且Q在 $\tilde{Q}$ 中是稠密的．

【参】 [1] M. Nagata (永田雅宜), Local rings, Interscience, 1962; [2] O. Zariski-P. Samuel, Commutative algebra II, van Nostrand, 1960.

微分环 [英 differential ring 法 anneau différentiel 德 Differentialring 俄 дифференциальное кольцо 日 微分環] 从具有单位元 1 的交换环R到R内的映射 δ，若对R的任意元 x, y，恒满足条件 i) $\delta(x+y) = \delta x + \delta y$，ii) $\delta(xy) = \delta x \cdot y + x \cdot \delta y$ 时，就称 δ 为R中的**微分**(derivation, differentiation)．环R以及环R中有限个互相可交换的微分合在一起考虑，就称为**微分环**．以下只考虑R包含一个子域，且此子域与R共有单位元 1 的情形．特别是，若R本身为域，则它称为**微分域** (differential field)．

在上面微分环的定义中，没有必要提及微

分环的子域的特征†. 可是，为了使定义对特征不为 0 的情形也能有效地应用，我们可用"高阶微分"代替上述微分来定义微分环. 若 R 到 R 的映射 $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \cdots$ 所成的序列 $\delta=\{\delta_\nu\}$，对 R 的任意元 x, y 与任意非负整数 λ, μ，恒满足条件 i) $\delta_\lambda(x+y)=\delta_\lambda x+\delta_\lambda y$; ii) $\delta_\lambda(xy)=\Sigma\delta_\alpha x\cdot\delta_\beta y$（加法取遍满足 $\alpha+\beta=\lambda$ 的非负整数 α,β 的一切数组）; iii) $\delta_\lambda(\delta_\mu x)=\binom{\lambda+\mu}{\lambda}\delta_{\lambda+\mu}x$; iv) $\delta_0 x=x$; 则 δ 称为 R 内的**高阶微分**(higher differentiation). R 内的两个高阶微分 $\delta=\{\delta_\nu\}$, $\delta'=\{\delta'_\nu\}$ 称为可交换的，如果对任意的非负整数 λ, μ, δ_λ, δ'_μ 总是可交换的.（为了研究特征不为 0 的单变量代数函数域，H. Hasse (1935) 引进了高阶微分的概念.）

对特征为 0 的情形，微分环的上面两种定义是一致的. 为简单起见，以下只限于特征为 0 的情形.

设 $\delta_1, \cdots, \delta_m$ 是微分环 R 的微分. 若 $x\in R$，则 x 的**导数**(derivative)定义为 $\delta_1^{s_1}\delta_2^{s_2}\cdots\delta_m^{s_m}x$ $(s_1\geqslant 0, \cdots, s_m\geqslant 0)$. 当 $\delta_1 x=\cdots=\delta_m x=0$ 时，称 x 是 R 的常数. 若 R 的理想† $\mathfrak{a}$ 满足条件 $\delta_i\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}(i=1\cdots, m)$，则 $\mathfrak{a}$ 称为 R 的**微分理想**(differential ideal). 若微分理想 $\mathfrak{a}$ 是素理想†或半素理想（即满足下述条件的理想：对 R 的元 x，若有自然数 g 使 $x^g\in\mathfrak{a}$，则必有 $x\in\mathfrak{a}$)，则它分别称为**素微分理想**(prime differential ideal)或**半素微分理想**(semiprime differential ideal, perfect differential ideal). 又当 R 的子环 S 满足条件 $\delta_i S\subset S$ 时，S 也可看作关于微分 $\delta_1, \cdots, \delta_m$ 的微分环. 此时 S 称为 R 的微分子环，而 R 称为 S 的微分扩环.

设微分域 K 的微分是 $\delta_1, \cdots, \delta_m$，而 $X_1, \cdots, X_n$ 是 K 的微分扩域中的元，并假定 $\delta_1^{s_1}\delta_2^{s_2}\cdots\delta_m^{s_m}X_i$ $(s_i\geqslant 0, 1\leqslant i\leqslant n)$ 在 K 上是代数无关的†，则它们在 K 上的多项式的全体成为一个微分环，称为 K 上的**微分变元**(differential variable) $X_1, \cdots, X_n$ 的**微分多项式环**(ring of differential polynomials)，以 $K\{X_1, \cdots, X_n\}$ 表示；它的元称为**微分多项式**(differential polynomial). 对这个微分多项式环，类似于通常的多项式环中的 Hilbert 基定理†，我们有下面的 **Ritt 基定理**(basis theorem of Ritt)：给定 K 上 $X_1, \cdots, X_n$ 的微分多项式的任意集合 $\mathfrak{M}$，我们可以从 $\mathfrak{M}$ 中适当选取有限个微分多项式 $P_1, \cdots, P_r$，使对 $\mathfrak{M}$ 的每个元 Q，存在自然数 g，使得 Q^g 可表为 $P_1, \cdots, P_r$ 以及它们的导数的线性组合（线性组合的系数是 $K\{X_1, \cdots, X_n\}$ 的元）. 应用这一定理可得：在微分多项式环中，任意的半素微分理想可以表示为有限个素微分理想的交；如果取最短表示†，则它是唯一的.

令微分多项式等于 0 而得到的方程，就称为**代数微分方程**(algebraic differential equation). 可以仿照代数几何学†中研究通常代数方程的方法去研究这些方程. J. F. Ritt 着眼于基域 K 由亚纯函数†组成的情形，用这样的方法对代数微分方程的解进行了有趣的研究.

其后，微分环、微分域的基本理论也逐步完备起来，发展成如下的理论：1) **Picard-Vessiot 理论**(Picard-Vessiot theory)：这是齐次线性微分方程的一种古典理论，它类似于代数方程的 Galois 理论†. 在这种情形下，Galois 群是线性群，而它的结构刻划了微分方程的解. E. Kolchin 引进了一般微分域的 Picard-Vessiot 扩域的概念，详细考察了使基域的元固定的微分自同构群(与微分可交换的自同构的群)，使古典理论更加精确且更加一般化. 2) **微分域的 Galois 理论**(Galois theory of differential field). Kolchin 更进一步作了推广，引进了微分域的强正规扩域的概念，并建立了它的 Galois 理论. 这个 Galois 群是关于基域的常数域(所有常数形成的子域)上的一个万有域†的代数群†. 反之，每一个代数群都是一个强正规扩域的 Galois 群. 我们也看到，在某种意义上，一个强正规扩域可分解为一个 Picard-Vessiot 扩张与一个 Abel 扩张（即其 Galois 群是一个 Abel 簇†）.（→Kolchin[2]—[5]，奥川光太郎[6]）.

【参】[1] I. Kaplansky, An introduction to differential algebra, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1957; [2] E. R. Kolchin, Algebraic matric groups and the Picard-Vessiot theory of homogeneous ordinary linear differential equa-

tions, Ann. of Math., **49** (1948), 1—42; [3] E. R. Kolchin, Galois theory of differential fields, Amer. J. Math., **75** (1953), 753—824; [4] E. R. Kolchin, On the Galois theory of differential fields, Amer. J. Math., **77** (1955), 868—894; [5] E. R. Kolchin, Abelian extensions of differential fields, Amer. J. Math., **82** (1960), 779—790; [6] K. Okugawa (奥川光太郎), Basic properties of differential fields of an arbitrary characteristic and the Picard-Vessiot theory, J. Math. Kyoto Univ., **2** (1963), 295—322; [7] J. F. Ritt, Differential algebra, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1950.

Witt 向量 [英 Witt vector 法 vecteur de Witt 德 Wittscher Vektor 俄 вектор Витта 日 ヴィットㆍベクトル] 设Γ是特征为0的整环†, p 是一个固定的素数. 对于以Γ的元为分量的无限维向量 $x=(x_0, x_1, \cdots)$,定义它的**付分量**(德 Nebenkomponente) $x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots$ 为 $x^{(0)}=x_0$, $x^{(n)}=x_0^{p^n}+px_1^{p^{n-1}}+\cdots+p^n x_n$. 如果我们定义向量$x$与 $y=(y_0, y_1, \cdots)$ 的和是具有付分量 $x^{(0)}+y^{(0)}, x^{(1)}+y^{(1)}, \cdots$ 的向量, 积是具有付分量 $x^{(0)}y^{(0)}, x^{(1)}y^{(1)}, \cdots$ 的向量, 则这些仍然以Γ的元为分量的向量是唯一确定的.明确写出开始的两项,有

$$x+y=\left(x_0+y_0, x_1+y_1-\sum_{\nu=1}^{p-1}\frac{1}{p}\binom{p}{\nu}x_0^{\nu}y_0^{p-\nu},\right.$$

$$\left.\cdots\right),\ xy=(x_0y_0,\ x_1y_0^p+y_1x_0^p+px_1y_1, \cdots).$$

一般地, 可以证明其第 n 个分量 $\sigma_n(x, y)$, $\pi_n(x, y)$ 是 $x_0, y_0, x_1, y_1\cdots, x_n, y_n$ 的有理整系数多项式. 基于这两个运算, 所有这样的向量的集合成为一个交换环,其中零元是$(0, \cdots)$,单位元是$(1, 0, \cdots)$. 设k是特征为p的域,考虑以k的元为系数的向量$(\xi_0, \xi_1, \cdots)$,它们之间的加法和乘法分别由$(\xi_0, \xi_1, \cdots)+(\eta_0, \eta_1, \cdots)=(\cdots, \sigma_n(\xi, \eta), \cdots)$,$(\xi_0, \xi_1, \cdots)(\eta_0, \eta_1, \cdots)=(\cdots, \pi_n(\xi, \eta), \cdots)$来定义, 因为$\sigma_n, \pi_n$都是有理整系数的, 所以这些运算是有意义的. 在这样的运算下, k上所有这样的向量的集合成为特征为0的整环 $W(k)$. $W(k)$的元称为k上的 **Witt 向量**.

如果令 $V(\xi_0, \xi_1, \cdots)=(0, \xi_0, \xi_1, \cdots)$, $(\xi_0, \cdots)^p=(\xi_0^p, \xi_1^p, \cdots)$, 则公式 $p\xi=V\xi^p$ 成立. 从而对于 $\xi=(\xi_0, \cdots)$, 若第一个非零分量为ξ_n, 令$|\xi|=p^{-n}$, 则这个绝对值$|\ \ |$就给出了$W(k)$的赋值†. 特别是, 若k为完全域†,当以$\{\xi_0\}$表示向量$(\xi_0, 0, 0, \cdots)$时,就有

$$(\xi_0, \xi_1, \cdots)=\Sigma p^i\{\xi_i^{p^{-i}}\}.$$

$W(k)$ 关于这一赋值成为完备赋值环. 因此, $W(k)$ 的商域是以p为素元, 以k为剩余类域的特征为0的完备赋值域. 反之, 设K是关于离散†赋值v为完备的特征为0的域, $\mathfrak{o}$是v的赋值环,k是v的剩余类域,并设k是特征为p的完全域,若p是v的素元,则 $\mathfrak{o}=W(k)$, 若 $v(p)=e>1$, π是v的素元, 则 $\mathfrak{o}=W(k)[\pi]$, π是 Eisenstein 多项式 $X^e+a_1X^{e-1}+\cdots+a_e(a_i\in pW(k),\ a_e\notin p^2W(k))$ 的根. 用这个方法,我们可以明确地确定 $\mathfrak{p}$-adic 数域的结构.

其次考察 $W_n(k)=W(k)/V^nW(k)$,它的元可看作n维向量$(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{n-1})$, 而这些元之间的运算可像前面那样来定义. $W_n(k)$的元称为**长度为 n 的 Witt 向量**. 我们用 $\mathscr{P}\xi=\xi^p-\xi$ 来定义算子 $\mathscr{P}$. 应用它, 就可把 Artin-Schreier 扩张的理论 (→Galois 理论) 推广到特征为p的域上的指数为p^n的 Abel 扩张的情形. 即对于特征为p的域k,设$W_n(k)$的元是 $\xi=(\xi_0, \xi_1, \cdots\xi_{n-1})$, 若 $\mathscr{P}X-\xi=0$ 的一个根是 $\eta=(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_{n-1})$, 则另一根的形式是 $\eta+\alpha(\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}), \alpha_i\in \boldsymbol{F}_p)$ ($\mathscr{P}X-\xi=0$ 的根η的全体以$(1/\mathscr{P})\xi$来表示). 特别是, 若 $\xi_0\notin\mathscr{P}k$, 则 $K=k(\eta_0, \cdots, \eta_{n-1})$ 成为k的p^n次循环扩张. 反之, k的全部p^n次循环扩张都可这样来得到. 一般地, k上指数为p^n的 Abel 扩张K可由 $K=k(((1/\mathscr{P})\xi|\xi\in H)$ (其中$H/\mathscr{P}W_n(k)$是$W_n(k)/\mathscr{P}W_n(k)$的有限子群)得出, 且K/k的 Galois 群与$H/\mathscr{P}W_n(k)$同构.

对于特征为p的域k上的p^n次循环扩张 $K=k((1/\mathscr{P})\beta)$ 与$\alpha\in k$,我们可以定义循环代数$(\alpha, \beta]$, 它以K与u作为生成系,以 $u^{p^n}=\alpha$, $\mathscr{P}\theta=\beta$, $u\theta u^{-1}=\theta+(1, 0, \cdots, 0)$作为基本关系 (其中 $\theta=(\theta_0, \cdots, \theta_{n-1})$, $u\theta u^{-1}=(u\theta_0u^{-1}, \cdots, u\theta_{n-1}u^{-1})$). $(\alpha, \beta]$是指数为p^n的

中心单代数.

应用这些结果,我们可把以有限域 $\boldsymbol{F}_q$ 为系数域的单变量幂级数域(或以 $\boldsymbol{F}_q$ 为系数域的单变量代数函数域)的指数为 p^n 的 Brauer 群†的结构理论,完全类似于 p-adic 域(或有限次代数数域)的情形而加以展开(E. Witt[1]). →代数[循环代数].

$W_n(k)$ 关于加法是交换的代数群†,它在特征为 p 的代数群†以及形式群的理论(→代数群)中是重要的.

【参】[1] E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n, J. Reine Angew. Math., **176** (1937), 126—140; [2] H. Hasse, Zahlentheorie, Akademie-Verlag., 1949; [3] N. Jacobson, Lectures in abstract algebra III, van Nostrand, 1964.

赋值 [英 valuation 法 valuation 德 Bewertung 俄 оценка 日 付値] 赋值有加法赋值和乘法赋值两种. 由于重要的对象是(交换)域†,所以下面都是在域中叙述.

【加法赋值】 设 K 是域, G 是**全序加法群**((totally) ordered additive group)(即赋予全序的交换格群†,其运算以加法表示). 考虑元 ∞,定义它大于 G 的任一元. 若 K 到 $G\cup\{\infty\}$ 的映射 v 满足下面三个条件,则称 v 为 K 的**加法赋值**(additive valuation),简称**赋值**: i) $v(a)=\infty \Leftrightarrow a=0$; ii) $v(ab)=v(a)+v(b)$ $(\forall a, b\neq 0)$; iii) $v(a+b)\geqslant \min\{v(a), v(b)\}$.

G 的子模 $\{v(a)|a\in K-\{0\}\}$ 称为 v 的**值群**(value group). K 的子环 $R_v=\{a|v(a)\geqslant 0\}$ 称为 v 的**赋值环**(valuation ring); 它的唯一的极大理想 $\{a|v(a)>0\}$ 称为 v 或 R_v 的**赋值理想**(valuation ideal). R_v 对于此理想的商域称为 v 的**剩余类域**(residue class field). 我们有 $v(a)\leqslant v(b)\Leftrightarrow aR_v\geqslant bR_v$. K 的两个赋值 v, v' 称为互相**等价**(equivalent),如果 $v(a)\leqslant v(b)\Leftrightarrow v'(a)\leqslant v'(b)$. 这也等价于 v, v' 的赋值环相同. 定义 v 的**秩**(rank)是 R_v 的 krull 维数†, v 的**有理秩**(rational rank)是 v 的值群中在有理数域上线性无关的元的最大个数. 当扩域 K' 的赋值 v' 限制在 K 上与 v 一致时, v' 称为 v 的**扩张**(extension). K 的加法赋值能扩张到 K 的任意扩域上. 秩为 1 的赋值称为**特殊赋值**(special valuation)或**指数赋值**(exponential valuation),与它相对应,一般的加法赋值称为**广义赋值**(generalized valuation). 如果对 K 的子域 k 的全部非 0 元,赋值 v 的值都是 0,则称 v 是 k 上的赋值.

【乘法赋值】 设 K 是域, Γ 是正实数的乘法群. 满足下面三个条件的 K 到 $\Gamma\cup\{0\}$ 的映射 w,称为 K 的**乘法赋值**(multiplicative valuation),简称为**赋值**: i) $w(a)=0\Leftrightarrow a=0$; ii) $w(ab)=w(a)w(b)$; iii) $w(a+b)\leqslant c(w(a)+w(b))$ (c 是正的常数).

$\{w(a)|a\in K-\{0\}\}$ 称为 w 的**值群**(value group). 赋值的扩张,两个赋值等价的定义,与加法赋值的情形相同. w 与 w' 等价 $\Leftrightarrow \exists r>0, \forall a\in K, w(a)=w'(a)^r$. 在每一等价类中,存在一个赋值,使 iii) 中的 c 取 1. 当 $k\subset K$, $w(a)=1$ $(\forall a\in k-\{0\})$ 时, w 称为 k 上的赋值.

如果对于 K 的任意两个元 $a,b(a\neq 0)$,总存在正整数 n,使得 $w(na)\geqslant w(b)$,则称 w 为 **Archimedes 赋值**(Archimedean valuation),否则称为**非 Archimedes 赋值**(non-Archimedean valuation). 若 w 是 K 的 Archimedes 赋值,则存在 K 到复数域 $\boldsymbol{C}$ 中的同构 σ,使得由 $w'(a)=|\sigma(a)|$ 定义的 K 的赋值 u' 与 w 等价. 若 w 是域 K 的非 Archimedes 赋值,则它满足 $w(a+b)\leqslant \max\{w(a), w(b)\}$,因而在这种情形下,由 $v(a)=-\log w(a)$ 定义的 v 是 K 的一个加法赋值,并且或者 v 的秩等于 1,或者 $v(K)=\{1, 0\}$(在后一情形, v 称为平凡的). 反之,秩为 1 的加法赋值,等价于从一个非 Archimedes 赋值通过这样的作法所得到的加法赋值. (秩为 1 的加法赋值称为指数赋值的理由就在于此.)因而,非 Archimedes 赋值确定的赋值环和赋值理想,本质上和秩为 1 的加法赋值相同.

【由赋值定义的拓扑】 当 w 是域 K 的乘法赋值时,若定义 K 的两个元 a,b 之间的距离†为 $w(a-b)$,则 K 成为拓扑域†(这个距离不一定使 K 成为度量空间,然而如果换成适当的等价

的赋值，K就能成为度量空间）.这样，w就确定了K的一个拓扑．若K在这个拓扑之下是完备的，则称w（或K关于w）是**完备的**（complete）．若w在K的扩域K'上的扩张w'是完备的，且对于由w'所定义的拓扑，K在K'中是稠密的，则称w'是w的（或K'是K关于w的）**完备化**（completion）．w的完备化存在，且在同构的意义下是唯一的．当w是非 Archimedes 赋值时，称完备化w'的赋值环是w的赋值环的**完备化**．

当v是域K的加法赋值时，取v的赋值环R_v的非零理想的全体（但$R_v = K$时是0）作为K中0的基本邻域系的基，同样可以把K考虑为拓扑域．只有秩为1的情形是重要的，这种情形与非 Archimedes 赋值是相同的．

域K的完备非 Archimedes 赋值w的赋值环是 Hensel 环[†]．这就意味着w到K的代数扩域K'上的扩张w'具有唯一性．设$[K':K] = n$，则有$w'(a)^n = w(N(a))$，其中N是K'到K上的范数[†]．

【离散赋值】 关于非 Archimedes 赋值（或秩为1的加法赋值）w，若w的赋值理想由一个元p生成，则称p是w的**素元**（prime element），且称w为**离散赋值**（discrete valuation）．w是离散赋值当且仅当w的值群是Γ的离散子集．对于离散加法赋值v，存在等价的v'，使其值群由全体有理整数所构成．这个v'称为**正规赋值**（normal valuation）或**正规化赋值**（normalized valuation）．关于离散乘法赋值，在数论上应用的正规化，与上述的正规化是不同的（→[素除子]（见后））．关于秩大的加法赋值，也常常（在更广的定义下）用离散这个词．此时值群与有限直和$\mathbf{Z} + \cdots + \mathbf{Z}$（$\mathbf{Z}$是全体有理整数，直和中的顺序是字典式序[†]）同构．再者，如果完备离散赋值的赋值环包含一个域，则此赋值环与域上的单变量幂级数环[†]同构．关于其他情形，→Witt 向量．

【赋值的例】 1）**平凡赋值**（trivial valuation）是使$v(a) = 0 (\forall a \in K - \{0\})$的$K$的加法赋值以及使$w(a) = 1 (\forall a \in K - \{0\})$的$K$的乘法赋值．

2）设域K与复数域的子域K'同构，则由K'中的绝对值$|\ |$得到一个 Archimedes 赋值．如前所述，任意 Archimedes 赋值都等价于这样得到的赋值．

3）设R是 Dedekind 环[†]，$\mathfrak{p}$是素理想[†]，取$\pi \in \mathfrak{p}, \pi \notin \mathfrak{p}^2$，则$R$的商域$K$的每个非零元$\alpha$可表示为$\pi^r a b^{-1}$（$r$是有理整数，$a, b \in R, a, b \notin \mathfrak{p}$）的形状，而$r$由$\alpha$唯一确定；如果定义$w(\alpha) = c^{-r}$（$c$是大于1的固定实数），则$w$成为$K$的一个非 Archimedes 赋值．这一$w$称为$K$的 **$\mathfrak{p}$-adic 赋值**（$\mathfrak{p}$-adic valuation）．使得$v(\alpha) = r$的$v$称为 **$\mathfrak{p}$-adic 指数赋值**（$\mathfrak{p}$-adic exponential valuation）．K关于v的完备化记作$K_{\mathfrak{p}}$，称为K的 **$\mathfrak{p}$-adic 扩张**（$\mathfrak{p}$-adic extension）．特别当K是有限次代数数域时，$K_{\mathfrak{p}}$称为 **$\mathfrak{p}$-adic 代数数域**（$\mathfrak{p}$-adic algebraic number field）．

当$\mathfrak{p}$由元p生成时，就把$\mathfrak{p}$-adic 换记作 ***p*-adic**（**赋值**等）．例如，有理数域$\boldsymbol{Q}$关于有理素数p的p-adic 扩张记作$\boldsymbol{Q}_p$，称为 ***p*-adic 域**或 ***p*-adic 数域**（p-adic number field）．$\boldsymbol{Q}_p$的非零元α可以唯一地展开为$\alpha = \sum_{n=r}^{\infty} a_n p^n$（$a_r \neq 0, r \in \boldsymbol{Z}, a_n \in \boldsymbol{Z}, 0 \leqslant a_n < p$）．于是我们得到由$v(\alpha) = r$定义的$\boldsymbol{Q}_p$的赋值$v$．$\boldsymbol{Q}_p$的赋值环记作$\boldsymbol{Z}_p$，称为 ***p*-adic 整数环**（ring of p-adic integers）．$\boldsymbol{Q}_p$的元称为 ***p*-adic 数**（p-adic number），$\boldsymbol{Z}_p$的元称为 ***p*-adic 整数**（p-adic integer）．

4）设$K = k((t))$是域k上单变量幂级数[†]域，当$0 \neq \alpha \in k((t))$展开为$\alpha = \sum_{n=r}^{\infty} a_n t^n$（$a_n \in k, a_r \neq 0, r \in \boldsymbol{Z}$）时，由$v(\alpha) = r$定义的$v$是$K$的一个非 Archimedes 赋值．$K$关于$v$是完备的．

5）设v是域K的加法赋值，其赋值环是R_v，赋值理想是$\mathfrak{m}_v$，v'是域$R_v/\mathfrak{m}_v$的加法赋值，其赋值环是$R_{v'}$．此时$R'' = \{a \in R_v \mid a \pmod{\mathfrak{m}_v} \in R_{v'}\}$成为$K$的赋值环（$\mathfrak{m}_v \in R''$，$R''/\mathfrak{m}_v \cong R_{v'}$）．赋值环为$R''$的赋值$v''$称为$v$与$v'$的**合成**（composite）．

【逼近定理与独立性定理】 **逼近定理**(approximation theorem):设 $w_1, \cdots, w_n$ 是域K的互不等价的非平凡的乘法赋值，则对于K的任意n个元 $a_1, \cdots, a_n$ 以及任意的正数 ε，存在 $a \in K$，使得 $w_i(a-a_i)<\varepsilon(i=1, \cdots, n)$. 由此推出**独立性定理**(independence theorem):对于实常数 $e_1, \cdots, e_n$，若 $\prod_i w_i(a)^{e_i}=1$ $(\forall a \in K-\{0\})$，则 $e_1=\cdots=e_n=0$.

对于加法赋值，类似的定理也成立，但其表述要有不小的改变. 基本结果是如下的独立性定理：设 $R_1, \cdots, R_n$ 是K的(加法赋值的)赋值环，$\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_n$ 是它们的极大理想，若令 $D=\prod_i R_i$，$\mathfrak{p}_i=\mathfrak{m}_i \cap D$，则商环† $D_{\mathfrak{p}_i}$ 与 R_i 相同. 若 $R_i \not\subset R_j(\forall i, j)$，则$D$恰有$n$个极大理想，它们是 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$.

【素除子】 设K是代数数域†或域k上的单变量代数函数域†. K的非平凡乘法赋值(后一情形是k上的赋值)的等价类称为K的**素除子**(prime divisor)或**素点**(prime spot).

n次代数数域的情形：K到复数域$\boldsymbol{C}$中的相异的同构恰有n个. 设它们是 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$，我们可以假定：1) 当且仅当 $i \leqslant r_1$ 时，$\sigma_i(K)$ 包含在实数域中，2) $\sigma_{n-i+1}(a)$ 与 $\sigma_{r_1+i}(a)$ 是共轭复数 $(n-r_1 \geqslant i>0, \forall a \in K)$. 对于 $i \leqslant r_1$，令 $v_i(a)=|\sigma_i(a)|$，对于 $i \leqslant i \leqslant (n-r_1)/2$，令 $v_{r_1+i}(a)=|\sigma_{r_1+i}(a)|^2$，于是 $v_1, \cdots, v_{r_1+r_2}(r_2=(n-r_1)/2)$ 是互不等价的 Archimedes 赋值的极大集. $v_1, \cdots, v_{r_1}$ 的等价类称为K的**实素除子**(real prime divisor)，而 $v_{r_1+1}, \cdots, v_{r_1+r_2}$ 的等价类称为K的**虚素除子**(imaginary prime divisor)，它们总称为K的**无限素除子**(infinite prime divisor). 与此相反，K的非 Archimedes 赋值的等价类称为K的**有限素除子**(finite prime divisor). 对于无限素除子，定义上面的 v_i 为**正规赋值**(normal valuation). 有限素除子是由K的整环 $\mathfrak{o}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 产生的 $\mathfrak{p}$-adic 赋值的类. 如果 $w(a)=c^{-r}$(用上面的记号)中的 c 取为 $\mathfrak{p}$ 的范数 ($\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 的元的个数)，则定义这样的赋值w为**正规赋值**. 这一正规化的重要性质是**乘积公式**(product formula) $\prod_w w(a)=1$ (w 取遍K的全体正规赋值)成立.

对于域k上的单变量代数函数域 K，由适当的正规化(利用 c^f 来代替 $\mathfrak{p}$ 的范数，其中f是赋值环的剩余类域在k上的次数，c 是大于1的常数)，同样的乘积公式成立.

【到有限次代数扩域上的赋值扩张】 设K'是域K的有限次代数扩域，v 是K的加法赋值，v' 是 v 在K'上的扩张. 设 v, v' 的赋值环，赋值理想，值群分别是 R_v, $R_{v'}$; $\mathfrak{m}_v$, $\mathfrak{m}_{v'}$; G, G'. 扩张次数 $f_{v'}=[R_{v'}/\mathfrak{m}_{v'}:R_v/\mathfrak{m}_v]$ 称为 v' 在 v 上的**次数**(degree). 群指数 $e_v=[G':G]$ 称为 v' 在 v 上的**分歧指数**(order of ramification). v' 取遍 v 的全部扩张时的和 $\sum_{v'} f_{v'} e_{v'}$ 不大于$[K':K]$，若 v (秩为1)是离散赋值，则当 i) K' 是K的可分扩张†或 ii) v 是完备时，$\sum_{v'} f_{v'} e_{v'}=[K':K]$ 成立.

【位】 设k, K, L 是域，$k \subset K$，f 是 K 到 $L \cup\{\infty\}$ 的映射(∞满足 $\infty+a=a+\infty=\infty(\forall a \in L)$, $\infty a=a \infty=\infty(\forall a \in L-\{0\})$, $1/\infty=0$, $1/0=\infty$)，使得 $f(ab)=f(a)f(b)$ 以及 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ (限于右边有意义)成立，如果 f 还是k上的同构，则 f 称为k上的**位**(place). 此时 $R=\{x \mid f(x) \neq \infty\}$ 是K的赋值环，且R包含k. 设R的极大理想为 $\mathfrak{m}$，则 f 与下面的 g 在同构的意义下是相同的：若 $a \in R$，令 $g(a)=a(\bmod \mathfrak{m})$，若 $a \notin R$，令 $g(a)=\infty$. 于是，k上的位的同构类与k上的赋值的等价类是一一对应的. 作为代数函数域的位，考虑基域上的位. 一般地，设 $a_1, \cdots, a_n \in R$，则 $(a_1, \cdots, a_n) \rightarrow (g(a_1), \cdots, g(a_n))$ 是k上的特殊化†. 反之，对于K的元 $a_1, \cdots, a_n$, $b_1, \cdots, b_n$，若 $(a_1, \cdots, a_n) \rightarrow (b_1, \cdots, b_n)$ 是k上的特殊化，则存在 $k(a_1, \cdots, a_n)$ 的位 f，使得 $(b_1, \cdots, b_n)$ 与 $(f(a_1), \cdots, f(a_n))$ 是在k上同构的点(这样的 f 一般存在无限多个).

【伪赋值】 环 A 的**伪赋值**(pseudo-valuation) φ 是 A 到非负实数集的满足下面四个条件的映射：i) $\varphi(a)=0 \leftrightarrow a=0$; ii) $\varphi(ab) \leqslant \varphi(a)\varphi(b)$; iii) $\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a)+\varphi(b)$; iv) $\varphi(-a)=\varphi(a)$. 这些条件弱于乘法赋值的条件，但用这些条件，可像本条［由赋值定义的拓扑］一节那样在 A 上引进拓扑，而 A 关于所引进的拓扑成为拓扑环.

【研究史】 K. Hensel 最先考虑 $\mathfrak{p}$-adic 数，并把它应用于数论([1]). J. Kürschák (J. Reine Angew. Math., **142** (1913)) 首先使用公理方法讨论乘法赋值. A. Ostrowski (Acta Math., **41** (1918))接着得到了重要结果.然而乘法赋值定义中的条件 iii) $w(a+b) \leqslant c(w(a)+w(b))$，原来是用 $c=1$ 来定义的. 这样，复素除子的正规赋值就不是赋值. 具有一般的 c 的赋值是由 E. Artin 提出的[3]. 加法赋值论可以说是从 W. Krull (J. Reine Angew. Math., **167** (1932))开始的(然而在这以前就已经有了指数赋值). 赋值论受到重视的原因，首先在于类域论的简化，以及在单变量代数函数论上的应用(这一方面只用到乘法赋值)(→类域论，代数曲线). 其次是在整闭整环†理论上的应用. 第三是在代数几何学上的应用. (后两个方面也用了加法赋值.) 关于代数的伪赋值，参看 M. Deuring, "Algebren" (Erg. d. Math., Springer, 1935).

【参】 [1] K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen, Teubner, 1908; [2] O. F. G. Schilling, The theory of valuations, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1950; [3] E. Artin, Algebraic numbers and algebraic functions, Notes on mathematics and its applications, Gordon and Breach, 1967; [4] O. Zariski- P. Samuel, Commutative algebra II, van Nostrand, 1960. 另→交换环的[参].

阿代尔与伊代尔 ［英 adèle and idèle 法 adèle et idèle 德 Adèle und Idèle 俄 адел и идел 日 アデールとイデール］ 伊代尔（或阿代尔）这一概念最初是由 C. Chevalley (J. Math. Pures Appl., (9), **15** (1936). Ann. of Math., **41** (1940)) 对于有限次代数数域引进的，以后，对有限次代数数域上的单环或者对在有限次代数数域上定义的代数群也有定义，成为用于全部数论中的重要概念. 下面首先定义所谓限制直积的一般概念.

【限制直积】 设 I 是下标集，假定对每个 $\mathfrak{p} \in I$ 给定一个局部紧群 $G_{\mathfrak{p}}$，而且对于除去 I 中确定的有限个元 $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_r$ 外的每个 $\mathfrak{p}$，给定 $G_{\mathfrak{p}}$ 的一个紧开子群 $U_{\mathfrak{p}}$. 以 G 表示直积 $\prod_{\mathfrak{p} \in I} G_{\mathfrak{p}}$ 中满足下述条件的元 $\{\alpha_{\mathfrak{p}}\}$ 的全体：除了有限个 $\mathfrak{p}$ 的 $\mathfrak{p}$ 分量外，都有 $\alpha_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$. 显然，$G$ 对于逐个分量运算构成群. 设 $U=\prod_{i=1}^{r} G_{\mathfrak{p}_i} \times \prod_{\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i} U_{\mathfrak{p}}$，由 Тихонов 定理†，$U$ 关于直积拓扑是局部紧群. 在 G 上引进一个拓扑，使商空间 G/U 具有离散拓扑. G 是局部紧群. 这样得到的拓扑群 G，称为 $\{G_{\mathfrak{p}}\}$ 关于 $\{U_{\mathfrak{p}}\}$ 的**限制直积** (restricted direct product).

【阿代尔与伊代尔】 设 k 是有限次代数数域，I 是 k 的（有限或无限的）素除子† 的全体. 对于 $\mathfrak{p} \in I$，设 $k_{\mathfrak{p}}$ 是 k 关于 $\mathfrak{p}$ 的完备化†，$k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ 是 $k_{\mathfrak{p}}$ 的非零元所成的乘法群，而且对有限素除子 $\mathfrak{p}$，设 $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$，$\mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$ 分别是 $\mathfrak{p}$-adic 整数环†和 $\mathfrak{p}$-adic 单位群.

1) 因为作为加法群的 $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ 是 $k_{\mathfrak{p}}$ 的紧开子群，所以可以作出 $\{k_{\mathfrak{p}}\}$ 关于 $\{\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}\}$ 的限制直积 $\boldsymbol{A}_k$. $\boldsymbol{A}_k$ 通过逐个分量的运算具有环的结构，它是局部紧拓扑环. $\boldsymbol{A}_k$ 称为 k 的**阿代尔环**(adèle ring)，$\boldsymbol{A}_k$ 的元称为**阿代尔**. 也常称 $\boldsymbol{A}_k$ 为 k 的**赋值向量环**(ring of valuation vectors)，称 $\boldsymbol{A}_k$ 的元为**赋值向量** (valuation vector). 对于 $\alpha(\in k)$ 的全部 $\mathfrak{p}$ 分量有 $\alpha \in k_{\mathfrak{p}}$ 的 $\prod_{\mathfrak{p} \in I} k_{\mathfrak{p}}$ 的元也是阿代尔. 这样的阿代尔称为**主阿代尔** (principal adèle). 其次，因为 $\mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}$ 作为乘法群是 $k_{\mathfrak{p}}^{\times}$ 的紧开子群，所以可以作出 $\{k_{\mathfrak{p}}^{\times}\}$ 关于 $\{\mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}\}$ 的限制直积 $\boldsymbol{J}_k$. $\boldsymbol{J}_k$ 称为 k 的**伊代尔群** (idèle group)，$\boldsymbol{J}_k$ 的元称为**伊代尔**. 对于 $\alpha(\in k^{\times})$ 的全部 $\mathfrak{p}$ 分量都是 α 的伊代尔称为**主伊代尔** (principal idèle). 当 $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{A}_k$，$\mathfrak{b} \in \boldsymbol{J}_k$ 时，由对应 $\mathfrak{a} \to \mathfrak{b}\mathfrak{a}$，$\boldsymbol{J}_k$ 的每个元在 $\boldsymbol{A}_k$ 上导出加法群 $\boldsymbol{A}_k$ 的一个自同构. 于

是可把 $\boldsymbol{J}_k$ 看作加法群 $\boldsymbol{A}_k$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}_k)$ 的一个子群. $\boldsymbol{J}_k$ 的拓扑与 $\boldsymbol{J}_k$ 作为 $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{A}_k)$ 的子群的相对拓扑相同. 虽然 $\boldsymbol{J}_k$ 是 $\boldsymbol{A}_k$ 的子集，但是 $\boldsymbol{J}_k$ 的拓扑与 $\boldsymbol{A}_k$ 的拓扑所诱导的相对拓扑不同. 前者是比后者更强的拓扑. 对于有限域上的单变量代数函数域，可以完全同样地定义阿代尔环、伊代尔群.

2) 设 $\mathfrak{R}$ 是 k 上的正规单代数†. 首先取 $\mathfrak{R}$ 的一个主整环† $\mathfrak{O}$, 对于 $\mathfrak{p}\in I$, 令 $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}=\mathfrak{R}\otimes_k k_\mathfrak{p}$. 对于有限的 $\mathfrak{p}$, 令 $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}=\mathfrak{o}_\mathfrak{p}\mathfrak{O}$, 则 $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ 作为加法群是 $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ 的紧开子群. $\{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}\}$ 关于 $\{\mathfrak{O}_\mathfrak{p}\}$ 的限制直积 $A_\mathfrak{R}$ 称为 $\mathfrak{R}$ 的阿代尔群(或阿代尔环). 全部 $\mathfrak{p}$ 分量是 $\alpha\in\mathfrak{R}$ 的阿代尔称为主阿代尔. 设 $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}^\times$ 是 $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ 的乘法群,以 $\mathfrak{U}_\mathfrak{p}$ 表示对于有限素除子 $\mathfrak{p}$, $\alpha\in\mathfrak{R}_\mathfrak{p}^\times$ 且 α 与 α^{-1} 都含于 $\mathfrak{O}_\mathfrak{p}$ 内的元的全体. 可以定义 $\{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}^\times\}$ 关于 $\{\mathfrak{U}_\mathfrak{p}\}$ 的限制直积 $\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}$, 称 $\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}$ 为 $\mathfrak{R}$ 的伊代尔群. 主伊代尔也可同以前一样来定义. $\mathfrak{R}$ 的阿代尔群、伊代尔群,都与开始时取的主整环 $\mathfrak{O}$ 的取法无关，它们作为拓扑群是唯一确定的. 当 $k=\mathfrak{R}$ 时, $\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}$, $\boldsymbol{A}_\mathfrak{R}$ 与 1) 中所述的 $\boldsymbol{J}_k$, $\boldsymbol{A}_k$ 一致.

3) 设 G 是在 k 上定义的代数群†, 对于 $\mathfrak{p}\in I$, 设 G 在 $k_\mathfrak{p}$ 上的全体有理点†为 $G_\mathfrak{p}$. 对于有限的 $\mathfrak{p}$, 设 $U_\mathfrak{p}$ 是满足 $\alpha\in G_\mathfrak{p}$ 且 α 与 α^{-1} 的坐标都是 $\mathfrak{p}$-adic 整数的 α 的全体. 这时, $\{G_\mathfrak{p}\}$ 关于 $\{U_\mathfrak{p}\}$ 的限制直积有定义,称它为 G 的阿代尔群(或伊代尔群).

下面主要是论述代数数域 k 的阿代尔或伊代尔的重要性质([1]),但开始时是作为 k 上的正规单代数 $\mathfrak{R}$ 的阿尔代及伊代尔来论述的. 代数数域的情形可以作为 $k=\mathfrak{R}$ 的特殊情形来考虑(关于代数群的阿代尔群→代数群;[3]).

【阿代尔环与伊代尔群的结构】 $\mathfrak{R}$ 的全体主阿代尔或主伊代尔可分别看成与 $\mathfrak{R}$ 或 $\mathfrak{R}^\times$($\mathfrak{R}$ 的全体可逆元构成的乘法群) 等同, 也同样用 $\mathfrak{R}$ 或 $\mathfrak{R}^\times$ 来表示. $\mathfrak{R}$ 或 $\mathfrak{R}^\times$ 分别是 $\boldsymbol{A}_\mathfrak{R}$ 或 $\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}$ 的离散子群. 商群 $\boldsymbol{A}_\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ 是紧群. 设对于 $\alpha_\mathfrak{p}\in k_\mathfrak{p}$, $|\alpha_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p}$ 是 $k_\mathfrak{p}$ 的正规赋值†; 对于 $\alpha_\mathfrak{p}\in\mathfrak{R}_\mathfrak{p}^\times$, $N_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})$ 是 $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ 到 $k_\mathfrak{p}$ 的缩减范数†. 对于 $\mathfrak{a}=(\alpha_\mathfrak{p})\in\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}$, 因为除去有限个 $\mathfrak{p}$ 外, 有 $|N_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})|_\mathfrak{p}=1$, 所以由 $V(\mathfrak{a})=\prod_{\mathfrak{p}\in I}|N_\mathfrak{p}(\alpha_\mathfrak{p})|_\mathfrak{p}$ 可定义一个正实数 $V(\mathfrak{a})$, 称 $V(\mathfrak{a})$ 为伊代尔 $\mathfrak{a}$ 的**体积** (volume). 对于主伊代尔 $\mathfrak{a}$, 由赋值的乘积公式†, 有 $V(\mathfrak{a})=1$. 设 $\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}^0$ 为 $\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}$ 中使得 $V(\mathfrak{a})=1$ 的元 $\mathfrak{a}$ 的全体. 令 $\boldsymbol{C}_\mathfrak{R}^0=\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}^0/\mathfrak{R}^\times$, 则 $\boldsymbol{C}_\mathfrak{R}^0$ 关于 $\boldsymbol{J}_\mathfrak{R}$ 的 Haar 测度†的测度是有限的. 当且仅当 $\mathfrak{R}$ 是可除代数†时, $\boldsymbol{C}_\mathfrak{R}^0$ 是紧的. 当 $\mathfrak{R}=k$ 时,显然 $C_\mathfrak{R}^0$ 是紧的.

其次,设 $\boldsymbol{Q}$ 是有理数域, $\boldsymbol{Q}$ 关于各个素除子 p 的完备化 $\boldsymbol{Q}_p$ 的一个特征标 λ_p (即由 $\boldsymbol{Q}_p$ 到一维环面群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的连续同态) 定义如下. 若 $p=p_\infty$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的无限素除子, 则对于 $x\in\boldsymbol{Q}_p$, 由 $\lambda_{p_\infty}(x)\equiv -x(\mathrm{mod}\,\boldsymbol{Z})$ 定义 λ_{p_∞},若 p 是有限素除子,则通过由 $\boldsymbol{Q}_p$ 到 $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$, 由 $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ 到 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 和由 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 到 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的自然同态的合成来定义 λ_p. $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ 的特征标 $\lambda_\mathfrak{p}$ 由 $\lambda_\mathfrak{p}=\lambda_p\circ Tr(\mathfrak{R}_\mathfrak{p}/\boldsymbol{Q}_p)$ 来定义. 此处 p 是 $\boldsymbol{Q}$ 的使得 $p\in\mathfrak{p}$ 的素除子, 而 $Tr(\mathfrak{R}_\mathfrak{p}/\boldsymbol{Q}_p)$ 是由 $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ 到 $\boldsymbol{Q}_p$ 的缩减迹†.

对于 $x,y\in\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$, 令 $(x,y)_\mathfrak{p}=\exp(2\pi i\lambda_\mathfrak{p}(xy))$, 则 $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ 关于 $(x,y)_\mathfrak{p}$ 是自对偶的. 又对于 $\mathfrak{a}=(a_\mathfrak{p})$, $\mathfrak{b}=(b_\mathfrak{p})\in\boldsymbol{A}_\mathfrak{R}$, 令 $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle=\pi(a_\mathfrak{p},b_\mathfrak{p})_\mathfrak{p}$, 则 $\boldsymbol{A}_\mathfrak{R}$ 关于 $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$ 也是自对偶的. 主阿代尔群 $\mathfrak{R}$ 关于 $\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle$ 的零化群†是 $\mathfrak{R}$. 因而由 Понтрягин 对偶定理†得知 $\boldsymbol{A}_\mathfrak{R}/\mathfrak{R}$ 是紧的.

再次,设 $\mathfrak{R}=k$. 商群 $\boldsymbol{C}_k=\boldsymbol{J}_k/k^\times$ 称为 k 的**伊代尔类群** (idèle class group), $\boldsymbol{C}_k$ 的元称为**伊代尔类**(idèle class). 如果 k 的伊代尔群 $\boldsymbol{J}_k$ 的特征标 χ 满足 $\chi(k^\times)=1$, 即如果 χ 是伊代尔类群 $\boldsymbol{C}_k$ 的特征标,则 χ 称为 k 的**量特征标**(德 Grössencharakter).(量特征标是由 E. Hecke (Math. Z., **1** (1918), **5** (1920)) 作为理想群上的某种特征标而引入的, 本质上和这里的定义一致([6])). 设 $\boldsymbol{C}_k$ 的单位元的连通分支是 $\boldsymbol{D}_k$, 则 $\boldsymbol{C}_k/\boldsymbol{D}_k$ 是完全不连通的紧群. 因而量特征标 χ 的阶数有限,当且仅当 $\chi(\boldsymbol{D}_k)=1$. (阶数有限的特征标, 对应合同理想类群的特征标.) $\boldsymbol{C}_k/\boldsymbol{D}_k$ 与 k 上的最大 Abel 扩域的 Galois 群作为拓扑群是同构的, 这一事实可由类域论得出 (→类域论). 另一方面, 可以给出 $\boldsymbol{D}_k$ 的具体的结构([2],[8]). 设 k 的实无限素除子的个数是 r_1,

虚无限素除子的个数是 r_2，则 $\boldsymbol{D}_k$ 的特征标群与 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{Q}^{r_1+r_2-1}\times\boldsymbol{Z}^{r_2}$ 是同构的. 此处 $\boldsymbol{R}$ 是具有通常拓扑的实数加法群，$\boldsymbol{Q}$ 是具有离散拓扑的有理数加法群，$\boldsymbol{Z}$ 是具有离散拓扑的有理整数加法群.

对于有限域 k_0 上的单变量代数函数域 k 的阿代尔环、伊代尔群，上述性质照样成立，但其伊代尔类群 $\boldsymbol{C}_k$ 的结构比代数数域的伊代尔类群的结构简单. 也就是说，设 k 的最大 Abel 扩域在 k 上的 Galois 群的元中，对于 $\bar{k}_0$（k_0 的代数闭包）的元 α，使 $\alpha\to\alpha^{q^n}$（q 是 k_0 的元的个数，n 是某个有理整数）这样的元的全体所形成的子群是 G_k，而设其中固定 $\bar{k}_0$ 的各元的子群是 G_k^0 时，赋予 G_k^0 以 Krull 拓扑†，赋予 G_k 拓扑，使得商群 G_k/G_k^0 成为离散群，此时 $\boldsymbol{C}_k$ 与 G_k 作为拓扑群是同构的，这一事实可由类域论证明.

有限次代数数域或有限域上单变量代数函数域的阿代尔环可作如下的公理刻划（岩沢健吉，Ann. of Math., **57** (1953)). 设 $\boldsymbol{A}$ 是具有单位元 1 的半单交换环，并设 $\boldsymbol{A}$ 是既非紧的又非离散的局部紧拓扑环，且 $\boldsymbol{A}$ 包含一个含有 1 的离散子域 k，使得 $\boldsymbol{A}/k$ 是紧的. 此时 k 是有限次代数数域或有限域上的单变量代数函数域，$\boldsymbol{A}$ 作为拓扑环与 k 的阿代尔环同构.

【伊代尔与上同调】 设 K 是有限次代数数域 k 的有限次 Galois 扩张†，$\mathfrak{G}$ 是它的 Galois 群，则 $\mathfrak{G}$ 自然地作用于 K 的伊代尔群 $\boldsymbol{J}_K$ 与伊代尔类群 $\boldsymbol{C}_K$ 上. 对于以 $\boldsymbol{J}_K$ 或 $\boldsymbol{C}_K$ 为系数群的 $\mathfrak{G}$ 的上同调群†的结构，有很多数学家 (G. Hochschild, 中山正, E. Artin, J. Tate) 研究过. 特别是，$H^1(\mathfrak{G},\boldsymbol{C}_K)=\{0\}$, $H^2(\mathfrak{G},\boldsymbol{C}_K)=\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$（$n$ 次循环群）($n=[K:k]$) 这一事实，在类域论的一个证明方法中起着重要的作用([4])(→类域论). 此外，A. Weil 作为 $\boldsymbol{C}_K$ 的由 $\mathfrak{G}$ 作出的某种群扩张†，引进了所谓 Weil 群 $G_{K,k}$，用它定义了最一般的 L 函数，它包含 Artin 的 L 函数†与 Hecke 的具有量特征标的 L 函数为其特例([2])(→ζ 函数).

【阿代尔群上的 Fourier 分析】 通过 $\boldsymbol{A}_k$ 上 Fourier 分析理论的研究，可以证明 k 的 Dedekind ζ 函数†或者 Hecke 的具有量特征标的 L 函数的主要性质，即在全复平面上是亚纯函数以及满足函数方程等事实 (Artin, 岩沢, Tate) ([1], [6]). 对于满足适当条件的 $\boldsymbol{A}_k$ 上的连续函数† $\varphi(\mathfrak{a})$，定义 Fourier 变换

$$\hat{\varphi}(\mathfrak{a})=\int_{\boldsymbol{A}_k}\varphi(\mathfrak{a})\langle\mathfrak{a},\mathfrak{b}\rangle d\mathfrak{b},$$

其中 $d\mathfrak{b}$ 是 $\boldsymbol{A}_k$ 的 Haar 测度†. 由 $d\mathfrak{b}$ 的适当的正规化，应用 Poisson 求和公式†，对于伊代尔 $\mathfrak{a}$，就得到

$$\sum_{\alpha\in k}\varphi(\mathfrak{a}\alpha)=V(\mathfrak{a})^{-1}\sum_{\alpha\in k}\hat{\varphi}(\mathfrak{a}^{-1}\alpha).$$

这也称为 Θ (theta) 公式. 这时考虑 $\boldsymbol{J}_k$ 上的如下的积分:

$$\xi(s)=\int_{\boldsymbol{J}_k}V(\mathfrak{a})^s\chi(\mathfrak{a})\varphi(\mathfrak{a})d^*\mathfrak{a},$$

其中 $d^*\mathfrak{a}$ 是 $\boldsymbol{J}_k$ 的 Haar 测度，s 是复变量，χ 是量特征标即 $\boldsymbol{C}_k$ 的特征标. 这一积分当 $s>1$ 时收敛，利用上面的 Θ 公式可以证明，$\xi(s)$ 可以解析开拓到全复平面，且满足一个函数方程. 当 φ 取特殊形式的函数时，上面的积分可用显式表示为 L 函数与 Γ 函数、指数函数的乘积. 对这样用积分表示 L 函数且应用 Poisson 求和公式(Θ 公式)的方法，不仅对数域的 ζ 函数、L 函数，而且对单代数的 Hey ζ 函数与其他种种 L 函数，也完全适用 (→ζ 函数; 藤崎源二郎[7] 和玉河恒夫, Ann. of Math., **77** (1963)).

【参】 [1] S. Lang, Algebraic numbers, Addison-Wesley, 1964; [2] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), 1—35; [3] A. Weil, Adèles and algebraic groups, Lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1960; [4] E. Artin-J. Tate, Class field theory, Lecture notes, Harvard Univ., 1961 (Benjamin, 1967); [5] 志村五郎-谷山豊, 近代的整数論, 共立出版, 1955; [6] J. Tate, Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions, Thesis, Princeton, 1950 (Algebraic number theory, edited by J. W. S. Cassels and A. Fröhlich, Academic Press, 1967, ch. 15); [7] G. Fujisaki (藤崎源二郎), On the zeta-function of the simple algebra over the field of rational numbers, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **7**(1958), 567—604, **9** (1962), 293—311; [8] E. Artin, Representatives of the connected component of the idèle class group, Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, 51—54; [9] A. Weil, Basic number theory, Springer, 1967.

Cayley 代数 [英 Cayley algebra 法 algèbre

de Cayley 德 Cayleysche Algebra 俄 алгебра Кэли 日 ケーリー代数］ 若在某一域K(特征为0)上的广义四元数代数† Q 的二维模† $Q+Qe$ 中，定义了乘法：$(q+re)(s+te)=(qs+\gamma\bar{t}r)+(tq+r\bar{s})e$ ($q, r, s, t\in Q$, γ 是K的一个元，$\bar{s}$, $\bar{t}$ 是 s, t 的共轭四元数†)，就得出K上八维非结合交错代数† $\mathfrak{C}$ (→Jordan 代数)．称它为**一般 Cayley 代数**(general Cayley algebra)，它的元称为 **Cayley 数**(Cayley number)．对于 $a=q+re$，令 $\bar{a}=\bar{q}-re$，则 $a\to\bar{a}$ 给出了$\mathfrak{C}$的反自同构．若再令 $a\bar{a}=\bar{a}a=N(a)$(范数)，$a+\bar{a}=T(a)$ (迹)，则它们都是K的元，而 a 就是 $x^2-T(a)x+N(a)=0$ 的根．而且 $N(ab)=N(a)N(b)$，二次型 $N(x)=T(x\bar{x})/2$ 就刻划了 $\mathfrak{C}$．特别是，同一个K上的不构成域的(非结合的)一般 Cayley 代数都同构．$\mathfrak{C}$ 是交错域†，当且仅当 $N(a)=0$ 蕴涵 $a=0$；或者，当且仅当Q是非交换的可除代数，而且γ不能表成 $\sigma^2-\lambda\xi^2-\mu\eta^2+\lambda\mu\zeta^2$ 的形式 ($\sigma, \xi, \eta, \zeta\in K$) ($\lambda$, μ 的意义→代数［一般的叉积］)．每个有限次交错域都是一般 Cayley 代数．特别是，当Q是实数域上 $\lambda=\mu=-1$ 的四元数体，且 $\gamma=-1$ 时，一般 Cayley 代数简称为 **Cayley 代数**．以有限次代数数域†为基域的 Cayley 代数只有有限个．

一般 Cayley 代数的微分†形成 G_2 型单 Lie 代数†，反之，G_2 型 Lie 代数作成的代数是一般 Cayley 代数．当K是实数域时，Cayley 代数$\mathfrak{C}$的自同构群†的单位元分支是紧单连通的 G_2 型单 Lie 群†，它刻划了 $\mathfrak{C}$ 的特征．K上的交错域仅有 $\mathfrak{C}$，这一事实的重要性在于射影平面上非 Desargues 几何坐标所属的域是交错域．$\mathfrak{C}$上三阶 Hermite 矩阵† A 中满足 $\mathrm{tr}A=1$, $A^2=A$ 的全体 $\mathscr{L}P_2$，称为 **Cayley 射影平面** (Cayley projective plane)．更进一步令 $\mathfrak{J}$ 是 $\mathfrak{C}$ 上三阶 Hermite 矩阵的全体，如果定义积为 $A\cdot B=(1/2)(BA+AB)$，则 $\mathfrak{J}$ 的自同构群的单位元分支 G 成为紧单连通的 F_4 型 Lie 群．G可迁地作用于 Cayley 射影平面 $\mathscr{L}P_2$ 上，且有 $\mathscr{L}P_2=F_4/Spin(9)$(→公式5 III)．

［参］［1］L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Orell Füssli, 1927; ［2］M. Zorn, Alternativkörper und quadratische Systeme, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **9** (1933), 395—402; ［3］N. Jacobson, Cayley numbers and normal simple Lie algebras of type G, Duke Math. J., **5** (1939), 775—783.

Jordan 代数 ［英 Jordan algebra 法 algèbre de Jordan 德 Jordansche Algebra 俄 алгебра Жордана 日 ジョルダン代数］ **【一些定义】**

设A是域K上的线性空间†．在A上定义了一种乘法，设它是双线性映射†．如果乘法满足结合律†，则A称为K上的代数(→代数)．有时也研究不假定结合律成立的代数，此时A称为**非结合代数** (non-associative algebra) 或**分配代数** (distributive algebra)；反之，满足通常结合律的代数称为**结合代数** (associative algebra)．以下设A是有限维†线性空间，在A的K自同态环† $E(A)$ 中，由A的元的右或左乘得到的同态 R_a, L_a ($a\in A$)以及A的恒等映射†所生成的 $E(A)$ 的子代数†，称为A的**包络代数**(enveloping algebra)．A的右、左与双边理想†等，与代数的情形类似地定义．A的**中心**(centre)的元c是指对于A的任意元a, b，它满足 i) $ac=ca$; ii) $a(bc)=(ab)c$, $a(cb)=(ac)b$, $c(ab)=(ca)b$．为了与结合代数情形的乘法相区别，A的两个元素 a, b 的积以 $a\cdot b$ 表示．定义 $A^{(0)}=A$, $A^{(1)}=A^{\cdot 2}, \cdots$, $A^{(k+1)}=(A^{(k)})^{\cdot 2}$; 如果对于某一 n 有 $A^{(n)}=0$，则A称为**可解代数** (solvable algebra)；如果A的每个元都是幂零†的，则A称为**幂零代数** (nilalgebra)．非结合代数A称为 **Jordan 代数**，如果对于A的任意两个元 a, u, 有 i) $a\cdot u=u\cdot a$; ii) $a^{\cdot 2}\cdot(u\cdot a)=(a^{\cdot 2}\cdot u)\cdot a$．非结合代数$A$称为**交错代数**(alternative algebra)，如果对于A的任意两个元 a, u, 有 i) $a\cdot u^{\cdot 2}=(a\cdot u)\cdot u$; ii) $u^{\cdot 2}\cdot a=u\cdot(u\cdot a)$．再进一步，如果 $a\cdot x=b$, $y\cdot a=b$ ($a\neq 0$) 恒有解，则A称为**交错域** (alternative field)．更一般地，如果由一个元生成的子代数†是结合的，则A称为**幂结合代数** (power associative algebra)．Jordan 代数和交错代数都是幂结合代数．

在以下关于 Jordan 代数的叙述中，总设K

的特征†不为 2，且 A 是有限维的 K 线性空间．对于两个 Jordan 代数 A, B，A 到 B 的线性映射 σ 称为 **Jordan 同态**(Jordan homomorphism)，如果它满足1) $(a^{\cdot 2})^\sigma = (a^\sigma)^{\cdot 2}$; 2) $(a\cdot b\cdot a)^\sigma = a^\sigma\cdot b^\sigma\cdot a^\sigma$．假定 B 不含有零因子†，则有 $(a\cdot b)^\sigma = a^\sigma\cdot b^\sigma$ 或 $(a\cdot b)^\sigma = b^\sigma\cdot a^\sigma$．

设 A 是结合代数，对它的任意两个元 a, b，定义一种新的乘法 $\cdot$: $a\cdot b = (ab+ba)/2$．若 A 的子空间† L 关于乘法 $\cdot$ 是封闭的，则称 L 是**特殊 Jordan 代数**(special Jordan algebra)．特别当 $L = A$ 时，以 A^+ 表示．今设 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 是变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的非交换自由环(即以 $x_1, \cdots, x_n$ 生成的自由半群为基的 K 上的代数)，$K[x_1, \cdots, x_n]^+$ 中由 1 与 x_i 生成的 Jordan 代数，称为具有自由生成元 x_i 的**自由特殊 Jordan 代数** (free special Jordan algebra)，以 $J_0^{(n)}$ 表示．Jordan 代数 A 是**特殊的**(special)，当且仅当存在 A 到某个结合代数 B 的 B^+ 上的同构映射；不是特殊的 Jordan 代数，就称为**例外的** (exceptional)．$J_0^{(2)}$ 的所有同态†象都是特殊的，$J_0^{(3)}/\mathfrak{K}$ 是例外的．此处 $\mathfrak{K}$ 是由 $x^{\cdot 2} - y^{\cdot 2}$ 生成的理想 ($J_0^{(2)} \subseteq K[x, y, z]$)．具有单位元†且由两个元生成的 Jordan 代数是特殊的，对于交错代数 A，Jordan 代数 A^+ 是特殊的．

对于 Jordan 代数 A，条件 ii) 与 $[R_a, R_{a^{\cdot 2}}] = 0$ 是等价的，并且 $[R_a, R_{b\cdot c}] + [R_b, R_{c\cdot a}] + [R_c, R_{a\cdot b}] = 0$ 以及 $[[R_c, R_a], R_b] = R_{[a, b\cdot c]}$ 成立．此处 $[S, T] = ST - TS$，$[a, b\cdot c] = (a\cdot b)\cdot c - a\cdot(b\cdot c)$．这样的式子称为 Jordan 代数的**恒等式** (identity)．

【Jordan 代数的结构】 Jordan 代数 A 中存在最大可解理想 N，N 包含全部幂零理想．N 称为 A 的**根基**(radical)．$N = 0$ 的 Jordan 代数称为**半单的** (semisimple)．A/N 是半单的．半单 Jordan 代数具有单位元，且可分解为极小理想的直和，这些极小理想都是单†代数．特别是，当 K 的特征为 0 时，存在 A 的半单子代数 S，使得 $A = S\oplus N$．今设 e 是 A 的幂等元，λ 是 K 的元，如果令 $A_e(\lambda) = \{x \mid x\in A, e\cdot x = \lambda x\}$，则 A 可表示为 $A = A_e(1)\oplus A_e(1/2)\oplus A_e(0)$．称它为 A 关于 e 的 **Peirce 分解** (Peirce decomposition)． 而且当单位元 1 可表为互相正交的幂等元 e_i 之和时，如果令 $A_{i,i} = A_{e_i}(1)$，$A_{i,j} = A_{e_i}(1/2)\cap A_{e_j}(1/2)$，则 A 可表示为 $A = \sum_{i\leqslant j}\oplus A_{i,j}$．$A_{i,j}$ 称为 **Peirce 空间** (Peirce space)．特别是，如果对一切 i，$A_{i,i} = K\cdot e_i + N_i$，而 N_i 是 $A_{i,i}$ 的幂零理想，则 A 称为**约化代数** (reduced algebra)．这时 e_i 的个数称为 A 的**次数**(degree)．

今设 D 是具有单位元 1 以及对合† ¯ 的交错代数，如果 D 对于某个二次型† $Q(X)$ 满足 $x\cdot\bar{x} = Q(x)\cdot 1 = \bar{x}\cdot x\ (x\in D)$，且 $f(X, Y) = (Q(X+Y) - Q(X) - Q(Y))/2$ 给出一个非退化†双线性型，则 D 称为**组成代数** (composition algebra)．

设 A 是约化单 Jordan 代数，则可分成下列三种情形：1) $A = K\cdot 1$; 2) 存在满足 $1 = e_1 + e_2$ 的幂等元 e_i，使 $A = K\cdot 1\oplus K\cdot(e_1 - e_2) + A_{1,2}$． 若 $x = \alpha(e_1\cdot e_2) + a_{1,2}$，$y = \beta(e_1 - e_2) + b_{1,2}$ 是 A 的元 ($\alpha, \beta\in K$, $a_{1,2}$, $b_{1,2}\in A_{1,2}$)，则由 $x\cdot y = (\alpha\cdot\beta + f(a_{1,2}, b_{1,2}))1$ 可确定 A 的乘法，而且 $A_{1,2}\neq 0$，此处 f 是一个非退化对称双线性型；3) 设 D 是具有对合 ¯ 的组成代数，D_n 是 D 上的 n 阶全阵环†，$r = \mathrm{diag}\{r_1, \cdots, r_n\}$ $(r_i\neq 0)$，当在 D_n 中定义 $a^J = r\cdot\bar{a}\cdot r^{-1}$ 时，有 $A = \{x \mid x\in D_n, x = x^J\}$．

再设 A 是特殊的约化单 Jordan 代数，且 $A_{i,i} = Ke_i$，则次数为 2 的这样的 Jordan 代数必为 Clifford 代数†．三次以上的情形，可划分为五种类型．

对于任意单 Jordan 代数，存在 K 的有限次扩域 P，使 A_P 与下面的五种类型之一同构：1) P_n^+ (P_n 是 P 上的 n 阶全阵代数); 2) P_n^+ 中全体对称矩阵构成的代数；3) $\{x \mid x\in P_{2m}^+,\ x^J = x\}$，此处 $x^J = q^{-1}\,{}^t x q$ (${}^t x$ 是 x 的转置矩阵)，$q = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$ (I_m 是 m 阶单位矩阵)；4) 由 $s_0, s_1, \cdots, s_n$ 生成的代数，满足关系式 $s_0\cdot s_i = s_i$, $s_i^{\cdot 2} = s_0$, $s_i\cdot s_j = 0$ $(i\neq j)$;

5) {Cayley 代数†上的三阶 Hermite 矩阵代数}$^+$.

【Jordan 代数的表示】 Jordan 代数 A 的**表示** (representation) S 是指使 A 的元 a 对应到 K 上的一个线性空间的自同态† S_a 的映射 $a \to S_a$, 它满足下面的条件: i) $[S_a, S_{b\cdot c}] + [S_b, S_{c\cdot a}] + [S_c, S_{a\cdot b}] = 0$; ii) $S_a S_b S_c + S_c S_b S_a + S_{(a\cdot c)\cdot b} = S_a S_{b\cdot c} + S_b S_{a\cdot c} + S_c S_{a\cdot b}$. 另外, K 模 M 是 **Jordan 模** (Jordan module), 是指对于 M 的元 x, 满足 i) $x\cdot a = a\cdot x$; ii) $(x\cdot a)\cdot(b\cdot c) + (x\cdot b)\cdot(a\cdot c) + (x\cdot c)(a\cdot b) = (x\cdot(b\cdot c))\cdot a + (x\cdot(a\cdot c))\cdot b + (x\cdot(a\cdot b))\cdot c$; iii) $x\cdot a\cdot b\cdot c + x\cdot c\cdot b\cdot a + x\cdot a\cdot c\cdot b = (x\cdot c)\cdot(a\cdot b) + (x\cdot a)\cdot(b\cdot c) + (x\cdot b)\cdot(a\cdot c)$ $(a, b, c \in A)$. A 的表示与 A 的 Jordan 模对应. Jordan 代数 A 的**特殊表示** (special representation) 是指 A 到结合代数 E 的 E^+ 中的一个同态映射. 这时存在某一结合代数 U 以及 A 到 U^+ 上的表示 S, 使得对于任意的特殊表示 σ, 存在唯一的 U^+ 到 E^+ 上的同态 η, 满足 $\sigma = \eta S$. 这样的 (U, S) 是唯一确定的, 而且若 A 的维数是 n, 则 U 的维数不大于 $\binom{2n+1}{n}$. 这个 (U, S) 称为 A 的**特殊普遍包络代数** (special universal enveloping algebra). A 是特殊的, 当且仅当 S 是一一对应. A 的不等价的不可约模†只有有限多个. 设 K 的特征是 0, S 是 A 的表示, 则对于 A 的根基 N, $S(N)$ 包含在由 $S(A)$ 生成的结合代数 $S(A)^*$ 的根基中. 特别是, 若 A 是半单的, 则 $S(A)^*$ 也是半单的. 一般地, $S(A)^*$ 的根基 R 是由 $S(N)$ 生成的理想, 且若设 $A = N \oplus T$, 则 $S(A)^* = R \oplus S(T)^*$, 此处 T 是 A 的半单子代数.

【参】[1] A. A. Albert, Non-associative algebras I, II, Ann. of Math., **43** (1942), 685—707, 708—723; [2] A. A. Albert, A structure theory for Jordan algebras, Ann. of Math., **48** (1947), 546—567; [3] N. Jacobson, General representation theory of Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), 509—530; [4] F. D. Jacobson-N. Jacobson, Classification and representation of semi-simple Jordan algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **65** (1949), 141—169; [5] N. Jacobson-C. E. Rickart, Jordan homomorphisms of rings. Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1950), 479—502; [6] N. Jacobson, Lectures on Jordan algebras, Univ. of Chicago, 1964; [7] H. Braun-M. Koecher, Jordan-Algebren, Springer, 1966.

模 [英 module 法 module 德 Modul 俄 модуль 日 加群] 本条考虑的模是具有算子区的模, 特别是环上的模. 域上的模是线性空间(→线性空间). 交换环上的模在代数几何学中有重要的应用 (→代数簇, 交换环, Noether 环). 非交换环特别是群环上的模就是群的线性表示(→表示论). 有理整数环上的模就是不考虑算子区的模, 有限生成 Abel 群的理论可以推广到主理想整环† 上的模的理论. →范畴和函子, 同调代数.

【模】(不带算子区的)**模** M 就是一个交换群, 其群的运算写成和 $a+b$ 的形式: $a+b = b+a (a, b \in M)$. 特别其单位元用 0 表示, a 的逆元写成 $-a$: $a + 0 = a$, $a + (-a) = 0$. M 的所有子群都是正规子群, 由子群 H 产生的左右剩余类不加区别地写成 $a + H$ 的形式 (→群[群的定义]).

在集合 M 到模 N 的映射的全体 N^M 中, 通过值的和定义加法如下: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. 此时 N^M 成为模. 模 M 到模 N 的同态的全体 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 是 N^M 的子群. $\mathrm{Hom}(M, N)$ 称为 M 到 N 的**同态模** (module of homomorphisms). 同态的合成也是同态. 因而, M 的自同态的全体 $\mathrm{Hom}(M, M) = \mathscr{E}(M)$, 关于加法以及合成定义的乘法构成环†, 称它为 M 的**自同态环** (endomorphism ring). $\mathscr{E}(M)$ 的单位元†是 M 的恒等映射, 而其可逆元†无非是 M 的自同构.

模 M 的元的族 $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 中, 若除去有限个 λ 外, 都有 $x_\lambda = 0 (\lambda \in \Lambda)$, 则和 $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ 是确定的. 对 M 的子集的族 $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 形式为 $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda$ ($x_\lambda \in N_\lambda$, 但除去有限个 λ 外都有 $x_\lambda = 0$) 的元的全体记作 $\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$. 若 $N_\lambda (\lambda\in\Lambda)$ 是 M 的子群, 则 $N = \sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda$ 也是子群. N 称为 $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的**和** (sum). 如果 N 的元能唯一地表示为 $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda (x_\lambda \in N_\lambda)$ 的形式, 则称 N 是 $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 的**直和** (direct

sum)．N是直和当且仅当 $N_\lambda \cap \sum_{\lambda \neq \mu \in \Lambda} N_\mu = \{0\}$ $(\lambda \in \Lambda)$.

【带算子区的模】 给定集合A与模M，如果定义了 $a \in A$ 与 $x \in M$ 的积 $ax \in M$，满足条件 1) $a(x+y) = ax + ay$ $(a \in A, x, y \in M)$，则A称为M的**算子区** (operator domain)，M称为**带算子区A的模** (module with operator domain A)，**A上的模** (module over A) 或 **A模** (A-module) (一般地→群[带算子区的群])．由对应 $(a, x) \to ax$ 确定的映射 $A \times M \to M$，称为A到M上的运算[†]． 任意 $a \in A$ 诱导作为模(而不是作为A模)的M的自同态 $a_M: x \to ax$．考虑模M的A模结构无非就是给出映射 $A \to \mathscr{E}(M)(a \to a_M)$．

若N是M的子群，满足 $a \in A$，$x \in N$ 蕴涵 $ax \in N$，则N成为一个A模，称为M的**子A模** (sub-A-module)，或略去A而称为**容许子模** (allowed submodule)．对A模M的子A模的族 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，它们的交 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ 与和 $\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ 都是子A模．

若A模M中的等价关系R满足条件"$a \in A$ 且 $R(x, y)$ 蕴涵 $R(ax, ay)$"，则R称为**与A的运算相容**(compatible with operation)．此时在商集 M/R 上诱导出A的一个运算． 而且若R与加法相容，即若有"$R(x, x')$ 与 $R(y, y')$ 蕴涵 $R(x+y, x'+y')$"，则 M/R 成为A模，称它为M的**商A模** (quotient A-module)． 含有 0 的等价类N是子A模，且 M/R 与 M/N 相同．

【群与环上的模】 当对算子区A赋予群的结构(运算写作乘法)时，则关于A模M，连同上述条件 1)，我们常假定它还满足下述两个条件：2) $(ab)x = a(bx)$，3) $1x = x$ $(a, b \in A, x \in M)$．

当对算子区A赋予环的结构时，关于A模M，连同上述条件 1)，2)，我们常假定它还满足下面的条件：4) $(a+b)x = ax + bx$ $(a, b \in A, x \in M)$．这无非是在模M上确定A模结构的映射 $A \to \mathscr{E}(M)$ 是环同态． 当A具有单位元时，如果这一映射是单式的，即条件 3) 成立，则M称为**单式的** (unitary)．以下设A模都是单式的． 任意的模M，对于有理整数环$\boldsymbol{Z}$，可以自然地看成$\boldsymbol{Z}$模．又M也是$\mathscr{E}(M)$模．

考虑环A上的模M时，A的元称为**纯量** (scalar)，A称为M的**系数环** (ring of scalars) 或**基环** (basic ring, ground ring)，运算 $A \times M \to M$ 称为**纯量乘法** (scalar multiplication)，ax 称为 x 的**纯量倍** (scalar multiple)，它的全体记作 Ax．对M的元的族 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，形式为 $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda x_\lambda$ ($a_\lambda \in A$，但除去有限个λ外，都有 $a_\lambda = 0$) 的M的元称为 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的**线性组合** (linear combination)．这样的元的全体N是包含全部 $x_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 的最小子A模，它等于和 $\sum_{\lambda \in \Lambda} Ax_\lambda$． 称$N$由 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 所**生成** (generate)．$\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 称为N的**生成组** (system of generators)．具有有限生成组的模称为**有限生成的** (finitely generated) 或**有限型的**(of finite type)，也简称**有限的**(finite)．由一个元x生成的模 Ax 称为**单项的**(monomial)．当A是(非交换)域[†]时，A模无非是A上的线性空间(→线性空间)．

对于A模M的元a，如果存在元λ，它不是A的零因子，且使 $\lambda a = 0$，则a称为A模M的**挠元** (torsion element)．如果M的元全部是挠元，则称M是**挠A模** (torsion A-module)．如果除 0 外没有挠元，则M称为**无挠A模** (torsion-free A-module)．如果A模M的元a，对A中任意非零因子λ均可表为 $a = \lambda b(b \in M)$，则a称为**可除** (divisible) **元**． 如果M的全部元是可除元，则M称为**可除A模** (divisible A-module)．

A到模M上的运算，象上面那样写在左侧，即写成 $ax(a \in A, x \in M)$ 这样的形式时，M称为**左A模** (left A-module)．反之，如果用记号 xa，把条件 1)—4) 分别改为对应的写法 (但对于 2) 是 $x(ab) = (xa)b$)，则M称为**右A模** (right A-module)． 若取与A反同构[†]的群或环 $A°$，则左A模与右$A°$模，由记号 ax 与 xa 互相交换而成对应．特别是，当A是交换群或交

换环时，由于 $ax = xa$，左 A 模与右 A 模可以不加区别.

对于两个群或环 A, B，有时在一个模 M 上同时考虑 A 模与 B 模结构. 若 A 的运算与 B 的运算可交换，即在 $a(bx) = b(ax)(a \in A, b \in B, x \in M)$ 的情形下，记法上多把其中一个运算写在右方. 如果赋予 M 左 A 模与右 B 模的结构，且满足条件 5) $(ax)b = a(xb)$，则 M 称为左 A 右 B 模或**两侧 A-B 模** (A-B-bimodule). 设 G 是群，K 是交换环，则考虑两侧 G-K 模与考虑左 $K[G]$ 模是等价的，其中 $K[G]$ 是群环†.

【算子同态】 A 模之间作为模的同态 $f: M \to N$ 还满足条件 $f(ax) = af(x)$ $(a \in A, x \in M)$ 时，就称为 **A 同态** (A-homomorphism). 也可省略 A 而称为**算子同态** (operator homomorphism) 或**容许同态** (allowed homomorphism). 当 A 是环时，称为 **A 线性映射** (A-linear mapping). 特别 A 本身也是 A 模，线性映射 $M \to A$ 也称为 M 上的**线性型** (linear form). A 同态的合成也是 A 同态.

对于 A 模之间的 A 同态 $f: M \to L$，L 的子 A 模 $\mathbf{Im}\, f = f(M)$ 称为 f 的**象** (image). M 的子 A 模 $\mathbf{Ker}\, f = \{x \mid x \in M, f(x) = 0\}$ 称为 f 的**核** (kernel). $\mathbf{Coim}\, f = M/\mathrm{Ker}\, f$ 称为 f 的**余象** (coimage). $\mathbf{Coker}\, f = L/\mathrm{Im}\, f$ 称为 f 的**余核** (cokernel). M 的元 x, y 之间由 $f(x) = f(y)$ 所定义的关系，与由 $N = \mathrm{Ker}\, f$ 确定的等价关系 $x - y \in N$ 一致，且映射 f 诱导出 A 同构 $\bar{f}: M/N \to f(M)$. 这一事实称为关于模的**同态定理** (homomorphism theorem) (→群 [带算子区的群]).

对于 A 模之间的 A 同态序列

$$\cdots \to M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \to \cdots,$$

如果对一切 n，$\mathrm{Im}\, f_{n-1} = \mathrm{Ker}\, f_n$ 都成立，则称它为**正合序列** (exact sequence). A 模 $\{0\}$ 简记为 0. $0 \to N \xrightarrow{f} M$ 与 $M \xrightarrow{g} L \to 0$ 是正合序列分别意味着 $f: N \to M$ 是单射，$g: M \to L$ 是满射. 在 A 模的归纳†(射影†)系 $\{M_\lambda, f_{\lambda\mu}\}$ 中，如果当 $\lambda < \mu (\lambda > \mu)$ 时，映射 $f_{\lambda\mu}: M_\lambda \to M_\mu$ 全都是 A 同态，则极限 $M = \varinjlim M_\lambda$ ($M = \varprojlim M_\lambda$) 也是 A 模. 如果对一切 λ，$0 \to L_\lambda \to M_\lambda \to N_\lambda \to 0$ 是正合序列，且

$$\begin{array}{ccccc} L_\lambda & \to & M_\lambda & \to & N_\lambda \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ L_\mu & \to & M_\mu & \to & N_\mu \end{array}$$

是交换图表，则 $0 \to \varinjlim L_\lambda \to \varinjlim M_\lambda \to \varinjlim N_\lambda \to 0$ 也是正合序列，但这对于射影极限不一定成立.

A 模 M, N 之间的 A 同态 $M \to N$ 的全体记作 $\mathbf{Hom}_A(M, N)$，称为 **A 同态模** (module of A-homomorphisms). 它是模 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 的子群. A 模 M 的 A 自同态的全体 $\mathrm{Hom}_A(M, M) = \mathscr{E}_A(M)$ 是环 $\mathscr{E}(M)$ 的子环†，它等于与所有 a_M $(a \in A)$ 可交换的元的全体. $\mathscr{E}_A(M)$ 的所有可逆元† 形成的群记作 $GL(M)$. 当 A 是交换环时，令 $(af)(x) = af(x)$，即 $af = a_N \circ f$，则 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 成为 A 模. 特别是，$\mathscr{E}_A(M)$ 成为 A 上的代数†. 若 M 是两侧 A-B 模，则由 $(bf)(x) = f(xb)$，$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 成为左 B 模；若 N 是两侧 A-B 模，则由 $(fb)(x) = f(x)b$，$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ 成为右 B 模.

【直积与直和】 若在 A 模的族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的直积集 $P = \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 中，定义加法为 $\{x_\lambda\} + \{y_\lambda\} = \{x_\lambda + y_\lambda\}$，运算为 $a\{x_\lambda\} = \{ax_\lambda\}$，则 P 成为 A 模，称它为 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的**直积模** (direct product module). 以 $p_\lambda: P \to M_\lambda$ 表示把 $\{x_\lambda\}$ 对应到 x_λ 的**标准满射**(同态) (canonical surjection). 现在，如果给出任意的 A 模 M 到 M_λ 的 A 同态 $f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$，则由 $f(x) = \{f_\lambda(x)\}$ 可定义 A 同态 $f: M \to P$，且 $p_\lambda \circ f = f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 成立. 这样的 f 是唯一的.

在 A 模的族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的直积模 $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 中，除有限个 λ 外，其余的 x_λ 都是 0 的元 $\{x_\lambda\}$ 的全体 S，记作 $\sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ $\left(或 \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda\right)$，称为 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的**直和模** (direct sum module). 使 $x_\lambda \in M_\lambda$ 对应到除 λ 分量外其余分量均为 0 的元 $\{\cdots, 0,$

$x_\lambda, 0, \cdots\} \in S$ 的**标准单射**(canonical injection)，记作 $j_\lambda: M_\lambda \to S$. 若给出到任意 A 模 M 的 A 同态 $f_\lambda: M_\lambda \to M$，则由 $f(\{x_\lambda\}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x_\lambda)$ 可定义 A 同态 $f: S \to M$，且 $f \circ j_\lambda = f_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ 成立. 这样的 f 是唯一的. 对于 A 模 M 的子模的族 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，由 $f(\{x_\lambda\}) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ 所确定的 A 同态 $\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda \to M$ 是 A 同构的充分必要条件是: M 作为(不带算子区的)模是 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的直和.

当对于全部 $\lambda \in \Lambda$ 有 $M_\lambda = M$ 时，$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$，$\sum_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ 分别以 M^Λ，$M^{(\Lambda)}$ 表示. M^Λ 是 Λ 到 M 的映射的集合. A 模 $M_1, \cdots, M_n$ 的直积与直和，分别记作 $M_1 \times \cdots \times M_n$，$M_1 + \cdots + M_n$，它们可以看作是同一的. 当 $M_i = M (1 \leqslant i \leqslant n)$ 时，就以 M^n 表示.

【自由模】 设 A 是环，对于 A 模 M 的元的族 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$，当 $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda x_\lambda = 0$ 蕴涵 $a_\lambda = 0$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$ 成立时，$\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 称为**线性无关的** (linearly independent). 这等价于使直和模 $A^{(\Lambda)}$ 的元 $\{a_\lambda\}$ 对应到 $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda x_\lambda \in M$ 的映射 $A^{(\Lambda)} \to M$ 是单射同态. 生成 M 的线性无关元的族 $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 称为 M 的**基** (basis). 这等价于 M 的任意元都可唯一地表示为 $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda x_\lambda (a_\lambda \in A)$ 的形式.

存在基的 A 模称为 A 上的**自由模**(free module). 当 A 是(非交换)域时，A 模总是自由模(→线性空间). 自由模 M 的基(下标集)的基数，在 A 是(非交换)域或交换环时由 M 确定，称它为 M 的**秩** (rank) **或维数** (dimension). 主理想环† 上的自由模的子模是自由模.

【单模与半单模】 如果 A 模 $M \neq \{0\}$ 除本身与 $\{0\}$ 以外无其他子 A 模，则它称为**单的** (simple). 若 M, N 是单的，$f: M \to N$ 是 A 同态，则 f 是同构或 $f = 0$ (**Schur 引理**). 若 A 模 M 是单子模的族 $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的和，则 M 是适当的子族 $\{M_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ $(\Lambda' \subset \Lambda)$ 的直和. 此时，M 称为**半单的** (semisimple) **或完全可约的** (completely reducible).

一般地，当 A 模 M 是子模 N, N' 的直和时，N' 称为 N 的**补子 A 模** (complementary submodule). A 模 M 是半单的，当且仅当任意子 A 模具有补子 A 模.

设 A 是环，于是 A 本身看作 A 模是半单的，当且仅当所有 A 模是半单的. 此时环 A 称为半单†环(→环[半单环]). 半单环 A 上的单模，与 A 中看作 A 模的某一极小左理想† A 同构.

【链条件】 A 模 M 的子模的全体关于包含关系形成有序集. 考虑关于它的极大条件和极小条件，或者分别与之等价的升链条件和降链条件(→序[链条件]). A 模满足极大条件时，称为 **Noether 的** (Noetherian)；满足极小条件时，称为 **Artin 的** (Artinian).

取 A 模 M 的子模 N，若 M 是 Noether 的，则 N 与 M/N 都是 Noether 的. 其逆也成立. 关于 Artin 模也有类似的事实. 设 A 是环，若将 A 本身看作左 A 模是 Noether 的或 Artin 的，则分别称 A 为左 Noether 环† 或左 Artin 环†. 关于右的情形也完全类似. Noether 环或 Artin 环上的有限生成模分别是 Noether 的或 Artin 的，而且在任意的环上，模 M 是 Noether 的当且仅当 M 的全部子 A 模是有限生成的.

在 A 模 M 的子 A 模的有限序列 $\{M_i\}_{0 \leqslant i \leqslant r}$ 中，如果 $M = M_0$，$M_i \supset M_{i+1}$，$M_r = \{0\}$，且 $M_i/M_{i+1} (0 \leqslant i < r)$ 是单的，则这样的有限序列称为 Jordan-Hölder 序列†. 当这样的有限序列存在时，称 M 是**长度有限的**(of finite length)，r 由 M 确定，称为 M 的**长度** (length). 若不计商模 $M_i/M_{i+1} (0 \leqslant i \leqslant r)$ 的顺序，则它们在 A 同构的意义下，就全体来说是唯一确定的 (C. Jordan-O. Hölder). A 模 M 的长度是有限的，当且仅当 M 是 Noether 的且是 Artin 的. 对于半单模，长度有限当且仅当它是有限生成的.

A 模 M 不能表为 M 与 $\{0\}$ 以外的两个子模的直和时，M 称为**不可分解的** (indecomposable). 长度有限的任意 A 模 M 能表示成不等于 $\{0\}$ 的不可分解子模的有限序列 $N_1, \cdots, N_n$ 的直和，若不计顺序，这些直和因子 $N_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 在

A同构的意义下是唯一确定的 (W. Krull-R. Remak-O. Schmidt).

【张量积】 以下设A是环. 我们由右A模M与左A模N构造模$M\otimes_A N$(称它为M和N的**张量积** (tensor product)) 与标准映射$M\times N\to M\otimes_A N$如下. 首先考虑以$M\times N$为基的自由$\boldsymbol{Z}$模(关于加法是自由 Abel 群) F, 令R表示形如 $(x+x', y)-(x, y)-(x', y)$, $(x, y+y')-(x, y)-(x, y')$, $(xa, y)-(x, ay)$ (其中$x, x'\in M$, $y, y'\in N$, $a\in A$)的元的全体所生成的子群. 我们定义$M\otimes_A N=F/R$. 再把$M\otimes_A N$中含有$(x, y)\in F$的元记作$x\otimes y$, 并由对应$(x, y)\to x\otimes y$定义映射$M\times N\to M\otimes_A N$. 于是$(x_1+x_2)\otimes y=x_1\otimes y+x_2\otimes y$, $x\otimes(y_1+y_2)=x\otimes y_1+x\otimes y_2$ 以及 $(xa)\otimes y=x\otimes(ay)$ 成立. 此时$M\otimes_A N$的任一元可表示成$\sum x_i\otimes y_i(x_i\in M, y_i\in N)$的形式.

张量积$M\otimes_A N$与标准映射$M\times N\to M\otimes_A N$可以刻划如下. 一般地对于模$M, N, L$, 如果映射$f: M\times N\to L$满足条件$f(x+x', y)=f(x, y)+f(x', y)$ 和 $f(x, y+y')=f(x, y)+f(x, y')$, 则$f$称为**双加法的** (biadditive). 当M是右A模, N是左A模, 而且f又满足条件$f(xa, y)=f(x, ay)$时, 称f为 **A平衡映射**(A-balanced mapping). 这时有: 1)标准映射$M\times N\to M\otimes_A N$是$A$平衡映射, 2)对任意的模$L$与任意的$A$平衡映射$f: M\times N\to L$, 存在唯一的同态$\varphi: M\otimes_A N\to L$, 使得$f(x, y)=\varphi(x\otimes y)(x\in M, y\in N)$.

若将右A模M, 左A模N看作对于A的反同构环A°的左A°模M, 右A°模N, 则$M\otimes_A N\cong N\otimes_{A^\circ}M$.

特别地, 设A是交换环, $ax=xa$, 则左模与右模没有区别. 一般地,对于A模M, N, L, 如果映射$f: M\times N\to L$是双加法的,而且满足条件$f(ax, y)=f(x, ay)=af(x, y)$ $(a\in A, x\in M, y\in N)$, 则f称为**双线性映射** (bilinear mapping). 它的全体记作$\mathfrak{L}(M, N; L)$, 这是A模$L^{M\times N}$的子模. 双线性映射$M\times N\to A$称为$M\times N$上的**双线性型** (bilinear form). A模M, N的张量积$M\otimes_A N$关于$a(x\otimes y)=(ax)\otimes y(=x\otimes(ay))$成为$A$模. 标准映射$M\times N\to M\otimes_A N$是双线性映射. 对任意的$A$模$L$与双线性映射$f: M\times N\to L$, 存在唯一的$A$线性映射$\varphi: M\otimes_A N\to L$, 使得$f(x, y)=\varphi(x\otimes y)$. 由这个对应$f\longleftrightarrow\varphi$, 得到$A$同构$\mathfrak{L}(M, N; L)\cong \mathrm{Hom}_A(M\otimes N, L)$. 当$A$是域时, $M\otimes_A N$与线性空间的张量积$M\otimes N$(→线性空间[多线性映射],[张量积])一致.

一般地, 若M是两侧B-A模, 如果令$b(x\otimes y)=(bx)\otimes y$, 则$M\otimes_A N$成为左$B$模; 若$N$是两侧$A$-$B$模,如果令$(x\otimes y)b=x\otimes(yb)$, 则$N$成为右$B$模. 特别有$A\otimes_A N\cong N, M\otimes_A A\cong M$.

对于右A模之间的A同态$f: M\to M'$, 左A模之间的A同态$g: N\to N'$, 使得$h(x\otimes y)=f(x)\otimes g(y)$成立的同态$h: M\otimes_A N\to M'\otimes_A N'$是唯一确定的. 称$h$为$f$与$g$的**张量积**,记作$h=f\otimes g$.

下面举一些简单的例子. 又 → [系数环的扩张和限制].

例 1) 设交换环A上的自由模 (例如线性空间) M, N的基为$\{x_i\}_{i\in I}$, $\{y_j\}_{j\in J}$, 此时$M\otimes_A N$是具有基$\{x_i\otimes y_j\}_{i\in I, j\in J}$的自由模. 特别当维数$\dim M$, $\dim N$为有限时,则有$\dim M\otimes_A N=\dim M\dim N$.

例 2) 对于交换环A的理想$\mathfrak{m}$,若将商环$M=A/\mathfrak{m}$看作A模,则$M\otimes_A N\cong N/\mathfrak{m}N$. 例如$(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})\otimes_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}/(m, n)\boldsymbol{Z}$. 此处$(m, n)$是$m, n$的最大公因子.

【Hom 和⊗】 考虑环A上的模. 对A模的直和与直积, 有$\mathrm{Hom}_A\left(\sum_\lambda M_\lambda, \prod_\mu N_\mu\right)\cong\prod_{\lambda,\mu}\mathrm{Hom}_A(M_\lambda, N_\mu)$, $\left(\sum_\lambda M_\lambda\right)\otimes_A\left(\sum_\mu N_\mu\right)\cong\sum_{\lambda,\mu}(M_\lambda\otimes_A N_\mu)$. 对于$A$模的射影极限与归纳极限,有$\mathrm{Hom}_A(\varinjlim M_\lambda, \varprojlim N_\mu)\cong\varprojlim\mathrm{Hom}_A(M_\lambda, N_\mu)$, $(\varinjlim M_\lambda)\otimes_A(\varinjlim N_\mu)\cong\varinjlim(M_\lambda\otimes_A N_\mu)$. A同态$f: M\to M'$通过对应$g\to g\circ f$诱导出同态$\mathrm{Hom}_A(M', N)\to\mathrm{Hom}_A(M, N)$. 特

别地，由正合序列 $M' \to M \to M'' \to 0$ 诱导出下面的正合序列：

(1) $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M', N)$.

A 同态 $f: N \to N'$ 通过对应 $g \to f \circ g$ 诱导出同态 $\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N')$. 特别地，由正合序列 $0 \to N' \to N \to N''$ 诱导出下面的正合序列：

(2) $0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N') \to \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(M, N'')$.

其次，设M是右模，其他是左模. A 同态 $f: N \to N'$ 诱导出同态 $1_M \otimes f: M \otimes_A N \to M \otimes_A N'$. 特别地，由正合序列 $N' \to N \to N'' \to 0$ 诱导出下面的正合序列：

(3) $M \otimes_A N' \to M \otimes_A N \to M \otimes_A N'' \to 0$,

改换左右也得到同样的结果（进一步→范畴和函子[范畴的例]，链复形 [Tor]，[Ext]，同调代数).

设 Q 是 A 模，如果对于 A 模与 A 同态的任意正合序列

(4) $$0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0,$$

它所诱导的序列

(5) $0 \to \mathrm{Hom}_A(M'', Q) \to \mathrm{Hom}_A(M, Q) \to \mathrm{Hom}_A(M', Q) \to 0$

总是正合的，则 Q 称为**内射 A 模** (injective A-module). 这等价于：对于 A 模M的子 A 模M'与 A 同态 $M' \to Q$, $M' \to Q$ 总能扩张成 A 同态 $M \to Q$. 任意 A 模是内射 A 模的子模. 内射 A 模是可除 A 模. 若 A 是 Dedekind 环[†]，则可除 A 模是内射模.

对于(4)，使诱导序列

(6) $0 \to \mathrm{Hom}_A(P, M') \to \mathrm{Hom}_A(P, M) \to \mathrm{Hom}_A(P, M'') \to 0$

恒为正合的 A 模 P 称为**射影 A 模**(projective A-module). 这等价于：对于 A 模M与满射 A 同态 $g: M \to M''$ 以及 A 同态 $f: P \to M''$，恒存在同态 $h: P \to M$，使得 $g \circ h = f$. 任意 A 模是射影 A 模的商 A 模. 射影 A 模没有挠元. 自由 A 模是射影 A 模. 一般来说，A 模是射影 A 模的充分必要条件是它可成为自由 A 模的直和因子.

对于(4)，使诱导序列

(7) $0 \to R \otimes_A M' \to R \otimes_A M \to R \otimes_A M'' \to 0$

恒为正合的右 A 模 R，称为**平坦**(flat) A 模. 射影 A 模是平坦的. 对平坦 A 模 R，当 $R \otimes_A M = \{0\}$ 蕴涵模 $M = \{0\}$ 时，R 称为**一一平坦**(faithfully flat) A 模. 平坦的右 A 模 R 是一一平坦的充分必要条件是：对 A 的任意左理想 $\mathfrak{U}$ ($\neq A$), $R \neq R\mathfrak{U}$ 成立. 若 A 是主理想整环[†]，则 A 模 R 是平坦的充分必要条件是 R 没有挠元. 又 R 是一一平坦的充分必要条件是 R 无挠元且对于 A 的所有素元[†] p，恒有 $R \neq Rp$. 下面是重要的例子：1) 对于交换环 A 及 A 的任意的乘法封闭集 S，商环[†] A_S 作为 A 模是平坦的. 但是 A_S 不是一一平坦的 A 模. 例如 $\boldsymbol{Q}$ 作为 $\boldsymbol{Z}$ 模不是一一平坦的. 2)设 A 是(半)局部环[†]，$\bar{A}$ 是它的完备化，则 $\bar{A}$ 作为 A 模是一一平坦的 (→Noether 环). (关于其他一些性质，→[10] chap. I, [3] § 18—19).

在正合序列 4) 中，当 $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Ker}\,\psi$ 是 M 的 A 直和因子时，(4) 称为**分裂** (split). 这时(5),(6),(7) 对于任意 A 模 Q, P, R 成为正合序列. 在正合序列(4)中，若 M' 是内射模或 M', 是射影模，则(4)分裂.

以下为简单起见，将M是左 A 模，右 A 模，两侧 A-B 模分别记作 ${}_AM$, M_A, ${}_AM_B$. 如前所述，若 ${}_AM_B$, ${}_AN$, 则 ${}_B(\mathrm{Hom}_A(M, N))$; 若 ${}_AM$, ${}_AN_B$, 则 $(\mathrm{Hom}_A(M, N))_B$. 同样，若 ${}_BM_A$, N_A, 则 $(\mathrm{Hom}_A(M, N))_B$; 若 M_A, ${}_BN_A$, 则 ${}_B(\mathrm{Hom}_A(M, N))$. 又若 ${}_BM_A$, ${}_AN$, 则 ${}_B(M \otimes_A N)$; 若 M_A, ${}_AN_B$, 则 $(M \otimes_A N)_B$.

又若 ${}_BL_A$, ${}_AM$, ${}_BN$, 则有

(8) $$\mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_B(L, N)) \cong \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N).$$

同样，设 ${}_AM_B$, L_A, N_B, 则有标准的

(8′) $$\mathrm{Hom}_A(L, \mathrm{Hom}_B(M, N) \cong \mathrm{Hom}_B(L \otimes_A M, N).$$

此处，若 B 是交换环，则(8),(8′)是 B 同构. 又当 L_A, ${}_AM_B$, ${}_BN$ 时，

(9) $(L\otimes_A M)\otimes_B N\cong L\otimes_A(M\otimes_B N)$
成立.

把A模M上的线性型的全体$\mathrm{Hom}_A(M, A)$记作M^*. 若${}_AM$, 则M^*_A; 若M_A, 则${}_AM^*$; 称M^*为M的**对偶模**(dual module). 若把A本身看作A模, 则${}_AA$与A_A可以看作互为另一个的对偶模. 对于模的族$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 标准的$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda\right)^*\cong\prod_{\lambda\in\Lambda}M^*_\lambda$成立. 由此得知,对于有限生成的内射模$M$,有标准同构$(M^*)^*\cong M$. 这样涉及对偶性'的其他研究,与线性空间情形相类似的结果是很多的(→线性空间[对偶空间]).

当A是交换环时, 若设(8), (8')中的$A=B=N$, 则得到标准A同构

$$\mathrm{Hom}_A(M, L^*)\cong\mathrm{Hom}_A(L, M^*)$$
$$\cong(L\otimes_A M)^*\cong\mathfrak{L}(L, M; A).$$

即$L\times M$上的双线性型可表示为线性映射$M\to L^*$或$L\to M^*$.

【系数环的扩张和限制】 固定环之间的同态$\rho: A\to B$, 由A模M构造B模$\rho^*(M)$, 由B模N构造A模$\rho_*(N)$.虽只考虑左模,但右模也一样. 若由

$$b\cdot a=b\rho(a), a\in A, b\in B$$

来定义A在B上的一个右运算, 则B可看作两侧B-A模,以B_ρ表示.

对于任意左A模M, 作左B模

$$\rho^*(M)=B_\rho\otimes_A M,$$

称它为由ρ产生的M的**纯量扩张**(scalar extension). A模之间的A线性映射$f: M\to M'$, 诱导出B线性映射$\rho^*(f)=1_B\otimes f: \rho^*(M)\to\rho^*(M')$.

对于任意左B模N, 作左A模

$$\rho_*(N)=\mathrm{Hom}_B(B_\rho, N),$$

称它为由ρ产生的N的**纯量限制**(scalar restriction), 或**纯量变更**(scalar change). 由对应$h\to h(1)$得到作为模的同构$\mathrm{Hom}_B(B_\rho, N)\to N$. 通过这一同构可把$\rho^*(N)$与$N$等同起来. 此时,$A$的运算由$a\cdot y=\rho(a)y(a\in A, y\in N)$确定. 若$A$是$B$的子环, ρ是使$\rho(a)=a(a\in A)$的标准单射,则A在$\rho_*(N)$上的运算是B在N上的运算的限制. B模之间的B线性映射$f: N\to N'$诱导出的映射$\rho_*(f): \rho_*(N)\to\rho_*(N')$是$A$线性映射.对于左$A$模$M$, 左$B$模$N$, A线性映射$f: M\to\rho_*(N)=N$也称为关于ρ的**半线性映射**(semilinear mapping). 这就是说, f为关于加法的同态, 且$f(ax)=\rho(a)f(x)(a\in A, x\in M)$成立.

纯量扩张与纯量限制的关系由关于任意左A模M与左B模N确定的同构

$$\mathrm{Hom}_A(M, \rho_*(N))\cong\mathrm{Hom}_B(\rho^*(M), N)$$

所给出, 这里左边的元α与右边的元β由关系$\alpha(x)=\beta(1\otimes x)$连结起来. →范畴和函子.

当A, B是交换环时, 对于A模M, M', 得到标准B线性映射

$$\rho^*: B\otimes_A\mathrm{Hom}_A(M, M')\to\mathrm{Hom}_B(B\otimes_A M, B\otimes_A M').$$

当M是有限生成自由模(可以是射影模)时, 这是B同构, 如果用ρ^*的写法,则有$\rho^*(\mathrm{Hom}_A(M, M'))\cong\mathrm{Hom}_B(\rho^*(M), \rho^*(M'))$.

可以举出非交换系数环的纯量扩张的例. 设G是群, H是G的子群. 考虑由标准单射$H\to G$诱导出的群环之间的同态$\rho: K[H]\to K[G]$(K是交换环).对于任意的$K[H]$模M, $\rho^*(M)$称为M的**诱导模**(induced module). $\rho^*(M)$确定的G的表示是M确定的H的表示的诱导表示'. 另外, 固定群G, 也能研究交换环之间的同态$\sigma: K\to\bar{K}$所诱导的同态$\rho: K[G]\to\bar{K}[G]$. 当$K=\bar{K}$且σ是自同构时, $K[G]$模M的"纯量扩张"$\rho^*(M)$确定的表示是M确定的表示的共轭'表示. 设$\bar{K}=K/\mathfrak{A}$($\mathfrak{A}$是K的理想)且σ是标准的满射, 则由$K[G]$模M的纯量扩张$\rho^*(M)$确定的$\bar{K}$上的表示是由M确定的K上的表示的**模$\mathfrak{A}$约化**(reduction modulo $\mathfrak{A}$). 此时$\rho^*(M)$与$M/\mathfrak{A}M$标准同构. 此外, 表示的局部化和完备化,也都可在所谓"纯量扩张"的公式化下去处理(→交换环[商环], Noether环[由理想定义的拓扑]).

【参】[1] 中山正-服部昭, ホモロジー代数学, 共立出版, 1957; [2] 弥永昌吉-小平邦彦, 現代数学概説 I. 岩波, 1961; [3] M. Nagata (永田雅宜), Local rings, Interscience, 1962; [4] 秋月康夫-鈴木通夫, 高等代数学, 波岩全書, I 1952, II 1957; [5] H. Cartan-S. Eilenberg,

Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956; [6] D. G. Northcott, An introduction to homological algebra, Cambridge Univ. Press, 1960; [7] S. MacLane, Homology, Springer, 1963; [8] C. Chevalley, Fundamental concepts of algebra, Academic Prees, 1956; [9] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap. 2, Actualités Sci. Ind., 1236b, Hermann, 第三版, 1962; [10] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre commutative, chap. 1, 2, Actualités Sci. Ind., 1290a, Hermann, 1961; [11] C. W. Curtis-I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962; [12] R. Godement, Cours d'algèbre, Hermann, 1963; [13] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965; [14] S. T. Hu (胡世桢), Elements of modern algebra, Holden-Day, 1965.

链复形 [英 chain complex 法 complexe de chaînes 德 Kettenkomplex 俄 цепный комплекс 日 鎖複体] 【分次模】 当给出以单式†环 A 为算子区的模的以 $\boldsymbol{Z}$ 为下标集的族 $X_n(n\in\boldsymbol{Z})$ 时,它们的直和模† $X=\sum_{n\in\boldsymbol{Z}}X_n$ 称为**分次 A 模** (graded A- module). 各 X_n 称为 X 的 **n 次分量** (component of degree n). 同样,对于 $X\ni x=\sum_n x_n\ (x_n\in X_n)$, x_n 称为 x 的 n 次分量. X 的子 A 模 Y 称为 X 的**齐次子 A 模** (homogeneous A-submodule), 如果 $x\in Y\Rightarrow x_n\in Y(n\in\boldsymbol{Z})$ 成立. 此时 $Y=\sum_n Y_n$ (直和), $Y_n=X_n\cap Y$, $X/Y=\sum_n(X_n/Y_n)$ (直和) 成立. 对于两个分次 A 模 $X=\sum_n X_n$, $Y=\sum_n Y_n$ 之间的线性映射 $f:X\to Y$, 若存在常数 p, 使对任意的 $n\in\boldsymbol{Z}$, 都有 $f(X_n)\subset Y_{n+p}$, 则 f 称为由 X 到 Y 的 **p 次线性映射** (linear mapping of degree p). 若 f 在 X_n 上的限制是 $f_n: X_n\to Y_{n+p}$, 则有 $\mathrm{Ker}\,f=\sum_n\mathrm{Ker}\,f_n$ (直和), $\mathrm{Im}\,f=\sum_n\mathrm{Im}\,f_n$ (直和), $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}f$ 分别是 X, Y 的齐次子 A 模.

【链复形与同调模】 对于分次 A 模 $X=\sum_n X_n$, 若 -1 次的线性变换 ∂, 即 $\partial_n:X_n\to X_{n-1}\,(n\in\boldsymbol{Z})$ 满足 $\partial\circ\partial=0$, 即 $\partial_{n-1}\circ\partial_n=0$ $(n\in\boldsymbol{Z})$, 则 X 与 ∂ 合在一起所成的 (X,∂) 称为 A 上的**链复形**. ∂ 称为它的**边缘算子** (boundary operator):

$$\cdots\to X_{n+1}\xrightarrow{\partial_{n+1}}X_n\xrightarrow{\partial_n}X_{n-1}\to\cdots.$$

此时 $\mathrm{Ker}\,\partial$ 与 $\mathrm{Im}\,\partial$ 分别称为链复形 X 的**闭链模** (module of cycles) 与**边缘模** (module of boundaries), 以 $\mathrm{Ker}\,\partial=Z(X)$, $\mathrm{Im}\,\partial=B(X)$ 表示. 由于它们是 X 的齐次子 A 模,所以 $Z(X)=\sum_n Z_n(X)$ (直和), $Z_n(X)=\mathrm{Ker}\,\partial_n$, $B(X)=\sum_n B_n(X)$ (直和), $B_n(X)=\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$. 因为 $\partial\circ\partial=0$, 所以 $B(X)\subset Z(X)$, $B_n(X)\subset Z_n(X)$ $(n\in\boldsymbol{Z})$. 把商模表示为 $H(X)=Z(X)/B(X)=\sum_n H_n(X)$ (直和), $H_n(X)=Z_n(X)/B_n(X)$, $H(X)$ 称为链复形 (X,∂) 的**同调模** (homology module).

设 (X,∂), (Y,∂') 是 A 上的两个链复形, 当 X 到 Y 的 0 次线性映射 f 满足 $\partial'\circ f=f\circ\partial$ 时, 即当 $\partial'_n\circ f_n=f_{n-1}\circ\partial_n$ $(n\in\boldsymbol{Z})$ 时, f 称为 X 到 Y 的**链复形映射**或**链映射** (chain mapping). 这里 $f(Z(X))\subset Z(Y)$, $f(B(X))\subset B(Y)$, 从而诱导出 A 同态 $f_*:H(X)\to H(Y)$ (同样诱导出 $(f_n)_*:H_n(X)\to H_n(Y)$). f_* 称为由链复形映射 f 所诱导的**同调映射** (homological mapping). 对于链复形映射 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$, 有 $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$, $(1_X)_*=1_{H(X)}$ 成立.

对于两个链复形映射 $f,g:X\to Y$, 若存在次数为 1 的线性映射 $D:X\to Y$, 使得 $f-g=D\circ\partial+\partial'\circ D$, 则 f 与 g 称为**链同伦的** (chain homotopic), 以 $f\simeq g$ 表示. D 称为 f 与 g 之间的一个**链同伦** (chain homotopy). 若 f 与 g 是链同伦的,则由 f, g 诱导出的同调映射相等: $f_*=g_*$. 又对于两个链复形 (X,∂) 与 (Y,∂'), 如果链复形映射 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to X$ 满足 $f\circ g\simeq 1_Y$ 与 $g\circ f\simeq 1_X$, 则称 X, Y **链等价** (chain equivalent). 此时,由于 $f_*:H(X)\to H(Y)$, $g_*:H(Y)\to H(X)$ 互为逆映射,而有 $H(X)\cong H(Y)$ 成立.

若链复形 (X,∂) 的齐次子 A 模 $Y=\sum_n Y_n$ 满足 $\partial Y\subset Y$, 则 (Y,∂) 也成为链复形. (Y,∂) 称为 (X,∂) 的**子链复形** (chain subcomplex). 此时,对 $X/Y=\sum_n(X_n/Y_n)$, $(X/Y,\partial)$ 也是

链复形，称为**商链复形**(quotient chain complex)或X模Y的**相对链复形**(relative chain complex). 显然对于标准单射i与标准满射j，序列$0 \to Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/Y \to 0$是正合的.

对于三个链复形(W, ∂'), (X, ∂), (Y, ∂'')以及链复形映射$f: W \to X$, $g: X \to Y$，设$0 \to W \to X \to Y \to 0$是正合序列. 此时对$y \in Z(Y)$，令$\partial_*(y + B(Y)) = f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1}(y) + B(W)$，这就定义了$-1$次线性映射$\partial_*: H(Y) \to H(W)$(即$\partial_*: H_n(Y) \to H_{n-1}(W)$)，$\partial_*$称为**连通映射**或**连通同态**(connecting homomorphism). 对此，可得下面的正合序列：

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} H_n(W) \xrightarrow{f_*} H_n(X) \xrightarrow{g_*} H_n(Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(W) \xrightarrow{f_*} \cdots.$$

它称为**同调正合序列**(exact homology sequence). 对于链复形与链复形映射的两组正合序列构成的交换图表

$$(1) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & W & \to & X & \to & Y & \to & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow & & \downarrow g & & \\ 0 & \to & N' & \to & X' & \to & Y' & \to & 0, \end{array}$$

$\partial_* \circ g_* = f_* \circ \partial_*: H(Y) \to H(W')$成立. 对于$A$上的链复形$X_\lambda$的归纳极限$\varinjlim X_\lambda$，有$H(\varinjlim X_\lambda) \cong \varinjlim H(X_\lambda)$.

【增广链复形】 对于链复形(X, ∂) $\left(X = \sum_n X_n\right)$，当$X_{-n} = 0\ (n > 0)$时，$X$称为**正链复形**(positive chain complex). 特别对于A模C，若令$Y_0 = C$, $Y_n = 0 (n \neq 0)$, $\partial = 0$，则对于$Y = \sum_n Y_n = C$，$(C, 0)$可看成链复形. 若指定正链复形X到C的链复形映射$\varepsilon: X \to C$(即$\varepsilon: X_0 \to C$)，则X称为**模C上的链复形**(chain complex over C)，ε称为**增广**(augmentation). C上的链复形X称为**零调的**(acyclic)，如果

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} C \to 0$$

构成正合序列. 一般对于增广的正链复形(X, ∂)，令$H_0(X) = \operatorname{Ker} \varepsilon / \operatorname{Im} \partial_1$，由此$C$上正零调链复形$(X, \partial)$满足$H_n(X) = 0 (n = 0, 1, 2, \cdots)$. C上正零调链复形称为C的**左分解**(left resolution). 特别当X_n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$都是射影A模†时，X称为C的**左射影分解**(left projective resolution). 对于任意A模C，C存在左射影分解.

对于线性映射$\alpha: C \to C'$，当C, C'上的链复形X, X'($\varepsilon: X \to C$, $\varepsilon': X' \to C'$)之间的链复形映射$f: X \to X'$满足$\varepsilon' \circ f = \alpha \circ \varepsilon$时，$f$称为$\alpha$上的链复形映射. 设$C$, C'的左射影分解为X, X'，则必存在$\alpha: C \to C'$上的链复形映射$f: X \to X'$. 而且若有两个这样的f, g，则它们必是链同伦的. 特别是，A模C的左射影分解除链等价以外是唯一确定的.

【Tor】 对于右A模M与左A模N，我们如下地定义模$\mathbf{Tor}_n^A(M, N)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，并称它为M和N的**挠积**(torsion product)：设N的左射影分解为

$$\to Y_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to Y_1 \xrightarrow{\partial_1} Y_0 \xrightarrow{\varepsilon} N \to 0,$$

由它与M在A上的张量积†构成链复形$(M \otimes_A Y, 1 \otimes \partial)$：

$$\cdots \to M \otimes_A Y_n \xrightarrow{1 \otimes \partial_n} \cdots \to M \otimes_A Y_1 \xrightarrow{1 \otimes \partial_1} M \otimes_A Y_0 \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} M \otimes_A N \to 0.$$

把这个同调群$H_n(M \otimes_A Y)$记为$\operatorname{Tor}_n^A(M, N)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 特别在$n = 0$的情形，有$\operatorname{Tor}_0^A(M, N) \cong M \otimes_A N$. $\operatorname{Tor}_n^A(M, N)$不依赖于$N$的左射影分解的取法.

【一些性质】 i) 若M或N是平坦†A模，则$\operatorname{Tor}_n^A(M, N) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

ii) 由线性映射$f: M_1 \to M_2$可诱导出同态$f_*: \operatorname{Tor}_n^A(M_1, N) \to \operatorname{Tor}_n^A(M_2, N)$. 特别是，$(1_M)_* = 1$，且若$f: M_1 \to M_2$, $g: M_2 \to M_3$，则$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

iii) 若$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$是正合序列，则

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} \operatorname{Tor}_n^A(M_1, N) \xrightarrow{f_*} \operatorname{Tor}_n^A(M_2, N) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Tor}_n^A(M_3, N) \xrightarrow{\partial_*} \operatorname{Tor}_{n-1}^A(M_1, N) \to \cdots \to \operatorname{Tor}_1^A(M_3, N) \xrightarrow{\partial_*} M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N \to M_3 \otimes_A N \to 0$$

是正合序列，称为 **Tor 的正合序列**. 此处 ∂_* 是连通同态.

iv) 对于(1)，有 $\partial_* \circ g_* = f_* \circ \partial_*$ 成立.

v) $\mathrm{Tor}_n^A\left(\sum_\lambda M_\lambda, N\right) \cong \sum_\lambda \mathrm{Tor}_n^A(M_\lambda, N)$.

vi) $\mathrm{Tor}_n^A(\varinjlim M_\lambda, N) \cong \varinjlim \mathrm{Tor}_n^A(M_\lambda, N)$.

以右 A 模 M 的左射影分解 (X, ∂) 取代 N 的左射影分解构成链复形 $(X \otimes_A N, \partial \otimes 1)$ 的同调群时，就有 $H_n(X \otimes_A N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ $(n = 0, 1, \cdots)$. 因而上面的性质 i)—vi) 当 M 与 N 互换时同样成立.

vii) 设 A 的反同构† 环是 A°，则有 $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^\circ}(N, M)$. 特别地，若 A 是交换环，则 $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ 也是 A 模，且有 $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) \cong \mathrm{Tor}_n^A(N, M)$.

viii) 设 A 是主理想环†，则 $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0$ $(n = 2, 3, \cdots)$. $\mathrm{Tor}_1^A(M, N)$ 可表为 $M *_A N$. 对于正合序列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$，$0 \to M_1 *_A N \to M_2 *_A N \to M_3 *_A N \to M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N \to M_3 \otimes_A N \to 0$ 也作成正合序列. 特别是 $\boldsymbol{Z} *_{\boldsymbol{Z}} N = 0$，$(\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}) *_{\boldsymbol{Z}} N \cong {}_nN$ $(= \{x \in N \mid nx = 0\})$.

【同调群的万有系数定理】 对于 A 上的链复形 (X, ∂) 与任意左 A 模 N，$(X \otimes_A N, \partial \otimes 1)$ 也成为链复形. 特别是，若 A 是主理想环(例如 $\boldsymbol{Z}$)，X 是正链复形，X_n 是无挠 A 模†$(n = 0, 1, \cdots)$，则有

$$H_n(X \otimes_A N) = H_n(X) \otimes_A N + H_{n-1}(X) *_A N$$

成立. 这称为**万有系数定理**(universal coefficient theorem).

【二重链复形】 设 $X_{m,n}$ $(m, n \in \boldsymbol{Z})$ 是左 A 模，取线性映射 $\partial'_{m,n}: X_{m,n} \to X_{m-1,n}$，$\partial''_{m,n}: X_{m,n} \to X_{m,n-1}$，当 $\partial'_{m-1,n} \circ \partial'_{m,n} = \partial''_{m,n-1} \circ \partial''_{m,n} = 0$，$\partial'_{m,n-1} \circ \partial''_{m,n} = \partial''_{m-1,n} \circ \partial'_{m,n} = 0$ 成立时，则 $(X_{m,n}, \partial', \partial'')$ 称为**二重链复形**(double chain complex). 此时，令 $X_n = \sum_{p+q=n} X_{p,q}$，$\partial_n = \sum_{p+q=n} \partial'_{p,q} + \partial''_{p,q}$，则 (X_n, ∂_n) 成为链复形. ∂ 称为**全边缘算子**(total boundary operator)，∂'，∂'' 称为**偏边缘算子**(partial boundary operator).

对于右 A 模构成的链复形 (X, ∂) 与左 A 模构成的链复形 (Y, ∂°)，令 $X_{p,q} = X_p \otimes_A Y_q$，$\partial'_{p,q} = \partial_p \otimes 1$，$\partial''_{p,q} = (-1)^p 1 \otimes \partial^\circ_q$，就得到二重链复形 $(X_{p,q}, \partial', \partial'')$. 称它为 (X, ∂) 与 (Y, ∂°) 的**积二重链复形**(product double chain complex)，简记为 $X \otimes_A Y$. 特别当 (X, ∂) 是右 A 模 M 的左射影分解，(Y, ∂°) 是左 A 模 N 的左射影分解时，积二重链复形 $X \otimes_A Y$ 关于全边缘算子作成的同调群 $H_n(X \otimes_A Y)$ 与 $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ 同构(⇀同调代数).

若 A 是主理想环，X_n，Y_n $(n = 0, 1, \cdots)$ 是无挠 A 模，则有

$$H_n(X \otimes_A Y) \cong \sum_{p+q=n} H_p(X) \otimes_A H_q(Y) + \sum_{p+q=n-1} H_p(X) *_A H_q(Y)$$

成立，称为 **Künneth 定理**.

【上链复形】 对于分次 A 模 $X = \sum_n X^n$，若一次线性变换 $d: X \to X$ (即 $d^n: X^n \to X^{n+1}$)，满足 $d \circ d = 0$，则 d 称为**上边缘算子**(coboundary operator)或**微分**(derivation). (X, d) 称为**上链复形**(cochain complex). 当 (X, ∂) $(X = \Sigma X_n$，$\partial_n: X_n \to X_{n-1})$ 是链复形时，若令 $X = \sum_n X^n$，$X^n = X_{-n}$，$d^n = \partial_{-n}$ $(n = 0, 1, \cdots)$，则 (X, d) 成为上链复形.

设 (X, d) 是上链复形，则 $\mathrm{Ker}\, d = Z(X)$，$\mathrm{Im}\, d = B(X)$ (同样，$\mathrm{Ker}\, d^n = Z^n(X)$，$\mathrm{Im}\, d^{n-1} = B^n(X)$) 分别称为**上闭链模**(module of cocycles)，**上边缘模**(module of coboundaries). $H(X) = \sum_n H^n(X)$ $(H^n(X) = Z^n(X)/B^n(X))$ 称为 X 的**上同调模**(cohomology module). 对这一情形，也可定义**上链(复形)映射**(cochain mapping)，**上链同伦**(cochain homotopic)，**上链等价**(cochain equivalent)，**子上链复形**(cochain subcomplex)，**相对上链复形**(relative cochain complex)，**连通映射**(connecting mapping) $d_*: H^n(N) \to H^{n+1}(L)$ 等等. 由正合序列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 可导出**上同调正合序列**(exact cohomology sequence)

$$\cdots \xrightarrow{d_*} H^n(X) \xrightarrow{f_*} H^n(Y) \xrightarrow{g_*}$$
$$H^n(Z) \xrightarrow{d_*} H^{n+1}(X) \to \cdots.$$

又对于(1),有 $d_* \circ g_* = f_* \circ d_*$ 成立. 对于正上链复形 $X = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$, A 模 M 与 $\varepsilon: M \to X^0$ 定义增广

$$0 \to M \xrightarrow{\varepsilon} X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \to \cdots \xrightarrow{d^n} X^n \to \cdots.$$

当这是正合序列时,X 称为**零调的**,而上面的正合序列称为 M 的**右分解** (right resolution). 对于任意的 A 模 M, 若 X_n $(n=0, 1, \cdots)$ 是内射 A 模,则 X 称为 M 的**右内射分解** (right injective resolution). 对于任意 A 模 M,一定存在M的右内射分解.

【Ext】 对于左 A 模 M, N, Z 模 $\mathbf{Ext}^n_A(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 定义如下. 设M的左射影分解为

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \to X_1 \xrightarrow{\partial_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0,$$

由此作出上链复形 $\mathrm{Hom}_A(X, N)$:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(X_0, N) \to \cdots \to$$
$$\mathrm{Hom}_A(X_{n-1}, N) \to \mathrm{Hom}_A(X_n, N) \to \cdots,$$

这一上同调群 $H^n(\mathrm{Hom}_A(X, N))$ 记作 $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$, 它不依赖于M的左射影分解的取法. 取N的右内射分解: $0 \to N \to Y^0 \to Y^1 \to \cdots$, 由此作出上链复形 $\mathrm{Hom}_A(M, Y)$: $0 \to \mathrm{Hom}_A(M, Y^0) \to \cdots \to \mathrm{Hom}_A(M, Y^n) \to \cdots$. 若作出这一上同调模,则有 $H^n(\mathrm{Hom}_A(M, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$. 而且由上面的链复形$X$与上链复形 Y, 作出二重上链复形 $\mathrm{Hom}_A(X, Y)$, 再取由全上边缘引出的上同调模,就有 $H^n(\mathrm{Hom}_A(X, Y)) \cong \mathrm{Ext}^n_A(M, N)$.

【一些性质】 i) $\mathrm{Ext}^0_A(M, N) \cong \mathrm{Hom}_A(M, N)$.

ii) 若M是射影 A 模或 N 是内射 A 模, 则 $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

iii) 由线性映射 $f: M_1 \to M_2$ (或 $g: N_1 \to N_2$) 可诱导出线性映射 $f^*: \mathrm{Ext}^n_A(M_2, N) \to \mathrm{Ext}^n_A(M_1, N)$ (或 $g^*: \mathrm{Ext}^n_A(M, N_1) \to \mathrm{Ext}^n_A(M, N_2)$).

iv) 对于正合序列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ 或 $0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$, 分别可得 **Ext 的正合序列**

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M_3, N) \to \mathrm{Hom}_A(M_2, N) \to$$
$$\mathrm{Hom}_A(M_1, N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M_3, N) \to \cdots,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M, N_1) \to \mathrm{Hom}_A(M, N_2) \to$$
$$\mathrm{Hom}_A(M, N_3) \to \mathrm{Ext}^1_A(M, N_1) \to \cdots.$$

v) $\mathrm{Ext}^n_A(\Sigma M_\alpha, \prod N_\beta) \cong \prod_{\alpha,\beta} \mathrm{Ext}^n_A(M_\alpha, N_\beta)$.

vi) 若 A 是主理想环,则有 $\mathrm{Ext}^n_A(M, N) = 0$ $(n = 2, 3, \cdots)$. $\mathrm{Ext}^1_A(M, N)$记作 $\mathrm{Ext}_A(M, N)$, 特别是, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, N) = 0$, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, N) \cong N/nN$, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) \cong \hat{M}/n\hat{M}$ (其中 $\hat{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$).

【上同调群的万有系数定理】 设X是主理想环 A 上的链复形, 每个 X_n 是自由 A 模,则有

$$H^n(\mathrm{Hom}_A(X, N)) \cong \mathrm{Hom}_A(H_n(X), N) + \mathrm{Ext}_A(H_{n-1}(X), N)$$

(万有系数定理). 设A是主理想环, X 是 A 上的链复形, Y 是 A 上的上链复形, 每个 X_n 是自由 A 模,每个 Y^n 是内射 A 模,则有

$$H^n(\mathrm{Hom}_A(X, Y)) \cong \sum_{p+q=n} \mathrm{Hom}_A(H_p(X), H^q(Y)) + \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Ext}_A(H_p(X), H^q(Y))$$

(→同调代数,同调群).

【参】 [1] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博, 位相幾何学 Ⅰ, 岩波, 1967.

其他→同调代数、同调群和模的[参].

同调代数 [英 homological algebra 法 algèbre homologique 德 homologische Algebra 俄 гомологическая алгебра 日 ホモロジー代数] 同调代数是随着拓扑学'特别是同调'论的发展而形成的一种代数方法, 它把代数学中以往作个别研究的一些问题,用统一的观点,给予强有力的展开, 基于这一认识, 而形成作为一般体系的领域. 这样一个方法是建立在范畴与函子(→范畴和函子) 的观点上的, 它以不仅处理对象的内部结构, 而且处理对象的机能结构为

其特征．同调代数学是在第二次世界大战后形成的新分支，通过这种考虑方法，发现它在广泛的领域中都得到了应用，现在正随着数学的整个动向而产生很大的影响．全面的参考文献→[2]，[4]，[6]，[7]，[8]．

【复形的(上)同调】 以下主要以 Abel 范畴† $\mathscr{C}$ 来阐述．也可以专门考虑 Abel 群的范畴 (Ab)(即取 Abel 群为对象†，取同态为射†)或 R 模的范畴† ${}_R\mathscr{M}$ (关于这一情形→链复形)．

Abel 范畴 $\mathscr{C}$ 中的(上链)**复形** (complex) C，由对象 $C^n\in\mathscr{C}(n\in\boldsymbol{Z})$ 与称为**微分** (differentiation) 或**边缘算子** (boundary operator) 的射 $d^n: C^n\to C^{n+1}$ (它满足 $d^{n+1}\circ d^n=0\ (n\in\boldsymbol{Z})$) 所构成．分别以 $Z^n(C)$，$B^n(C)$ 来表示 $\operatorname{Ker}d^n$，$\operatorname{Im}d^{n-1}$ 时，我们由正合序列† $0\to B^n(C)\to Z^n(C)\to H^n(C)\to 0$ 来定义 C 的 n **上同调** (cohomology) $H^n(C)$．当 $C^n=0\ (n<0)$ (或 $n>0$) 时，称 C 是**正** (positive) (或**负** (negative)) **复形**．也可以改换符号，以 C_{-n} 表示 C^n．这时微分是 $d_n: C_n\to C_{n-1}$(链复形)，$\operatorname{Ker}d_n=Z_n$ 对于 $\operatorname{Im}d_{n+1}=B_n$ 的商称为 n **同调** (homology) $H_n(C)$．特别对负的复形，通常是这样处理的．对于 R 模的范畴 ${}_R\mathscr{M}$，当 C^n, Z^n, B^n, H^n 成为集合时，它们的元分别称为(n)**上链** (cochain)，**上闭链** (cocycle)，**上边缘** (coboundary)，**上同调类** (cohomology class)．类似地，在**链** (chain) 群 C_n 中，将**闭链** (cycle)($\in Z_n$) 用**边缘** (boundary) ($\in B_n$) 来分类，就确定了**同调类** (homology class) ($\in H_n$)．

复形的**射** (morphism) 或**链变换** (chain transformation) $f: C\to C'$ 是把复形看作函子† $\boldsymbol{Z}\to\mathscr{C}$ 的自然变换†，即 f 是射 $f^n: C^n\to C'^n\ (n\in\boldsymbol{Z})$ (满足 $f^{n+1}\circ d^n=d^{n+1}\circ f^n$) 的族，它诱导出上同调的射 $H^n(C)\to H^n(C')$．映向 C 的单射 $D\to C$ 的等价类，特别是其代表 D，称为 C 的**子复形** (subcomplex)．对于两个链变换 $f,g: C\to C'$，若存在射的族 $h^n: C^n\to C^{n-1}\ (n\in\boldsymbol{Z})$，满足 $f^n-g^n=h^{n+1}\circ d^n+d^{n-1}\circ h^n$，则称这个族为 f 与 g 之间的(**链**)**同伦** ((chain) homotopy)．当 f，g 之间存在同伦时，f，g 在上同调中诱导出相同的射．对于 $f: C\to C'$，如果存在 $f': C'\to C$，使得 $f'\circ f$，$f\circ f'$ 分别同伦于 C，C' 的恒等射，则 f 称为(**链**)**等价** ((chain) equivalence)．当它存在时，就有 $H^n(C)\cong H^n(C')$．复形的正合序列 $0\to C'\to C\to C''\to 0$ 诱导**连通射** (connecting morphism) $H^n(C'')\to H^{n+1}(C')\ (n\in\boldsymbol{Z})$，且 $\cdots\to H^{n-1}(C'')\to H^n(C')\to H^n(C)\to H^n(C'')\to H^{n+1}(C')\to\cdots$ 是正合序列 (**上同调正合序列** (exact cohomology sequence))．关于同调也类似．把对象 $A\in\mathscr{C}$ 看作 $A^0=A$，$d^0=0$ 的复形，指定由 A 到正复形 C 的射 ε 时，C 称为 **A 上的复形** (complex over A)，ε 称为**增广** (augmentation)．A 上的复形 C 作成正合序列 $0\to A\xrightarrow{\varepsilon}C^0\to C^1\to\cdots$ 时，称为**零调的** (acyclic)．A 上的零调正复形称为 A 的右**分解** (resolution)．设 $\{C,\varepsilon\}$，$\{C',\varepsilon'\}$ 分别是 A，A' 上的复形，α 为射 $A\to A'$，如果复形的射 $f: C\to C'$ 满足 $f\circ\varepsilon=\varepsilon'\circ\alpha$，则称 f 为 α 上的射．设负复形 C 的增广是 $\varepsilon: C\to A$，同样可以定义零调，左分解等等．

$\mathscr{C}$ 中的**二重复形** (bicomplex，double complex) C 是一个函子：$\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}\to\mathscr{C}$，它由对象 $C^{p,q}$ 和两种微分 $d_{\mathrm{I}}: C^{p,q}\to C^{p+1,q}$，$d_{\mathrm{II}}: C^{p,q}\to C^{p,q+1}$ 所组成，满足 $d_{\mathrm{I}}^2=d_{\mathrm{II}}^2=0$，$d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{II}}=d_{\mathrm{II}}d_{\mathrm{I}}$ (有时代之以反交换性 $d_{\mathrm{I}}d_{\mathrm{II}}+d_{\mathrm{II}}d_{\mathrm{I}}=0$)．射的定义与上面一样．当 $\sum_{p+q=n}C^{p,q}$ 对于每个 $n\in\boldsymbol{Z}$ 存在时，设它是 n 上链复形，则在 $C^{p,q}$ 上能定义由 $d=d_{\mathrm{I}}+(-1)^p d_{\mathrm{II}}$ 所确定的复形 (复形的单重化)．d 称为**全微分** (total differentiation)，d_{I}，d_{II} 称为**偏微分** (partial differentiation)．$C_{\mathrm{I}}^q=\{C^{p,q}(p\in\boldsymbol{Z}),d_{\mathrm{I}}\}$ 构成复形，它确定上同调 $H^p(C_{\mathrm{I}}^q)=H_{\mathrm{I}}^p(C^q)$．$d_{\mathrm{II}}$ 诱导出 $H_{\mathrm{I}}^p(C^q)\to H_{\mathrm{I}}^p(C^{q+1})$，产生复形 $H_{\mathrm{I}}^p(C)$．这个上同调以 $H_{\mathrm{II}}^q(H_{\mathrm{I}}^p(C))$ 表示．同样可得 $H_{\mathrm{I}}^p(H_{\mathrm{II}}^q(C))$．关于全微分 d 的上同调简记作 $H^n(C)$．可以同样地处理二重链复形 $\{C_{p,q}\}$ 以及多重复形等．

设 T 是二变项的函子 $\mathscr{C}_1\times\mathscr{C}_2\to\mathscr{C}'$，$C_i$ 是 $\mathscr{C}_i$ 中的复形 $(i=1,2)$，则可作出 $\mathscr{C}'$ 中的二重复形 $T(C_1,C_2)$．例如，若 C，C' 是 $\mathscr{C}$ 的正、负复形，则 $\operatorname{Hom}(C',C)$ 成为(二重)正复

形. 又若 C, C' 分别是范畴 $\mathscr{M}_R$, ${}_R\mathscr{M}$ 中的复形, 则张量积† $C\otimes_R C'$ 是范畴 (Ab) 中的复形: **积复形** (product complex). 一般地可定义 $H_p(C)\otimes H_q(C')\to H_{p+q}(C\otimes C')$, 假定 C_n, B_n $(n\in \boldsymbol{Z})$是平坦的†,则利用函子 Tor (见后), 就有下面的正合序列: $0\to \sum_{p+q=n} H_p(C)\otimes H_q(C') \to H_n(C\otimes C')\to \sum_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}(H_p(C),H_q(C'))\to 0$ (**Künneth 公式**). 特别是, 若取 C' 为 $A\in{}_R\mathscr{M}$, 则有正合序列 $0\to H_n(C)\otimes A\to H_n(C\otimes A)\to \mathrm{Tor}_1(H_{n-1}(C),A)\to 0$ (**万有系数定理**(universal coefficient theorem)). 对于上同调, 它有 $0\to \mathrm{Ext}^1(H_{n-1}(C),A)\to H^n(C,A)\to \mathrm{Hom}(H_n(C),A)\to 0$ (正合) 的形式 (→链复形,同调群).

【卫星函子,导出函子】 设 T 是 Abel 范畴之间的加法共变函子 $\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$,如果 T 将 $\mathscr{C}$ 的任意正合序列映为 $\mathscr{C}'$ 的正合序列, 则 T 称为**正合的** (exact). 又对任意的**短正合** (short exact) 序列 $0\to A\to B\to C\to 0$, 若 $T(A)\to T(B)\to T(C)$ 是正合的, 则 T 称为**半正合的** (half-exact), 若在左侧添上 $0\to$ (或在右侧添上 $\to 0$) 是正合的, 则称为**左正合的** (left exact) (或**右正合的** (right exact)). 关于反变函子也可以同样来定义. 定义范畴 $\mathscr{C}$ 的函子 Hom: $\mathscr{C}\times\mathscr{C}\to$ (Ab) ((Ab) 是 Abel 群的范畴) 关于二变项是左正合的. 特别当 $h_P(\cdot)=\mathrm{Hom}(P,\cdot)$ 是正合时,则 P 称为**射影的** (projective); 当 $h^Q(\cdot)=\mathrm{Hom}(\cdot,Q)$ 是正合时, Q 称为**内射的** (injective). 对于任意的对象 A, 若存在由射影对象的满射† $P\to A$ (或到内射对象的单射† $A\to Q$), 则称 $\mathscr{C}$ 具有充分多的射影 (或内射) 对象. 若自然对应 $\mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(h_G(A),h_G(B))$ 是一一的,则 G 称为**生成元** (generator). 同样用 h^G 得到**余生成元** (cogenerator) 的概念. 具有生成元的 Abel 范畴 $\mathscr{C}$, 满足条件"恒存在直和,且关于任意 $A\in\mathscr{C}$ 的子对象† B 与子对象的全序序列 $\{A_i\}$, $(\cup A_i)\cap B=\cup(A_i\cap B)$ 成立"时, 称为 **Grothendieck 范畴** (Grothendieck category). 它具有充分多的内射对象. (Abel 群的范畴: R. Baer, 1940; 一般的: A. Grothendieck, 1957.) 由对象 A 到内射对象 Q 的单射 $f:A\to Q$, 若对于非零单射 $g:B\to Q$ 恒满足 $\mathrm{Im}\,f\cap\mathrm{Im}\,g\neq 0$, 则 $A\to Q$ 称为 A 的**内射包络** (injective envelope). 对于 Grothendieck 范畴中的每个对象,内射包络总是存在的,且除同构外是唯一确定的(模的范畴: B. Eckmann-A. Schopf, 1953; 一般的: B. Mitchell, 1960).

所谓 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$ 的共变 ∂ **函子** (∂-functor) 由 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{C}'$ 的共变函子的序列 $T=\{T^i\}$与对应于 $\mathscr{C}$ 中任意短正合序列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 的连通射 $\partial: T^i(A'')\to T^{i+1}(A')$ 所构成,且满足下面的两个条件: i) 对短正合序列的射, $\partial\circ T^i=T^{i+1}\circ\partial$ 成立; ii) $\cdots\to T^{i-1}(A'')\xrightarrow{\partial} T^i(A')\to T^i(A)\to T^i(A'')\xrightarrow{\partial} T^{i+1}(A')\to\cdots$ 构成复形. 换 ∂ 以 $\partial^*: T^i(A'')\to T^{i-1}(A')$, 且满足同样的条件 i*), ii*) 时,就可定义共变 ∂^* **函子** (∂^*-functor). 对偶地可定义反变 ∂ 函子,反变 ∂^* 函子. 这些也称为**函子的连通序列** (connected sequence of functors). 若在 $-\infty<i<+\infty$ 上定义的 ∂ 函子 (或 ∂^* 函子) 使 ii) (或 ii*)) 中的序列恒为正合, 则称它为**上同调函子** (cohomological functor) (或**同调函子** (homological functor)). ∂ 函子的射 $f:S\to T$ 由与连通射可交换的自然变换 $f^i:S^i\to T^i$ 所构成. 在 $a\leqslant i<b$ 上定义的 ∂ 函子 S, 若对于相同的 i 的范围内定义的任意 ∂ 函子 T 与自然变换 $\varphi:S^a\to T^a$, 存在唯一的 ∂ 函子的射 f, 满足 $f^a=\varphi$, 就称为**万有的** (universal). 对于共变函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$, $b>0$, 如果在 $0\leqslant i<b$ 上定义的万有共变 ∂ 函子满足 $S^0=F$, 则称它为 F 的**右卫星函子** (right satellite), 以 $\{S^iF\}$ 表示. 若 S^iF 存在,则它是唯一确定的,且有 $S^{i+1}F=S^1(S^iF)$. 若 $\mathscr{C}$ 有充分多的内射对象,则右卫星函子必存在, 若 F 是左正合的, 则 $\{S^iF\}$ 成为上同调函子. ∂^* 函子的万有性通过倒转箭头方向来定义, F 的卫星函子 $\{S_iF\}$ 由变换符号记作 $\{S^{-i}F\}$, 称为**左卫星函子** (left satellite).

设 $\mathscr{C}$ 具有充分多的内射对象,若 A 的右分解 $Q=\{Q^i\}$ 中每一 Q^i 是内射的,则称 Q 为 A

的**内射分解**(injective resolution). 这一分解是存在的,且除链等价外是唯一确定的(H. Cartan, 1950). 关于共变函子 $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$, 函子 $A\to H^i(F(Q))$ 与 Q 的取法无关, 称为 F 的第 i **右导出函子**(right derived functor) R^iF. $\{R^iF\}$ 形成上同调函子. 由卫星函子的万有性, 存在 ∂ 函子的射 $\{S^iF\}\to\{R^iF\}$,这个射是同构,当且仅当 F 是左正合的. 同样定义反变函子的**左导出函子**(left derived functor) L_iF. 当 F 为右正合时,左导出函子与左卫星函子同构. 同样地,当 $\mathscr{C}$ 具有充分多的射影对象时,用**射影分解**(projective resolution)来定义共变(反变)函子的左(右)导出函子. 对于多个变项的函子, 除由范畴的直积†作为函子的导出函子外,还有注视某一个变项来定义的**偏导函子**(partial derived functor). 例如,设 $T(A,B):\mathscr{C}_1\times\mathscr{C}_2\to\mathscr{C}'$ 关于 A 是反变函子,关于 B 是共变函子. 若 $\mathscr{C}_2$ 具有充分多的内射对象, 则可用 B 的内射分解 Q 来定义 $R_2^iT(A,B)=H^i(T(A,Q))$. 若 T 满足 i) B 是单射的蕴涵 $A\to T(A,B)$ 是正合函子, 则在任意固定 B 时, $R_2^iT(A,B)$ 成为 A 的上同调函子. 假定在 $\mathscr{C}_1$ 中存在 A 的射影分解 P, 则可定义 $R_1^iT(A,B)=H^i(T(P,B))$ 与全导函子 $R^iT(A,B)=H^i(T(P,Q))$. 若 T 满足 i) 与 ii) A 是射影的蕴涵 $B\to T(A,B)$ 是正合函子(**右平衡的** (right balanced)), 则这三种导出函子全都是同构的. 函子的**左平衡的**(left balanced) 性质也可同样叙述. 当定义范畴的函子 Hom 的右导出函子能够定义时,它以 $\mathrm{Ext}^i(A,B)$ 表示.

【**谱序列**】 我们现在论述关于 R 模的范畴 $_R\mathscr{M}$ 中的上同调. 同调的情形可以用符号替换原理来处理. 在一般的 Abel 范畴中,大致可作同样的讨论([3],[10]). 模 A 的**滤子**(filtration) F 是 A 的子模的族 $\{F^p(A)\mid p\in\boldsymbol{Z}\}$, 它满足 $F^p(A)\supset F^{p+1}(A)$. 当 $\bigcup_p F^p(A)=A$ 时, F 称为由上收敛或**穷举的**(exhaustive), 而当存在 p 使 $F^p(A)=0$ 时, 称为下方有界或**离散的**(discrete). 令 $G^p(A)=F^p(A)/F^{p+1}(A)$, 得到与 F **相伴的**(associated)分次模† $G(A)=\{G^p(A)\mid p\in\boldsymbol{Z}\}$. 滤子化模的射 $f:A\to A'$ 是一个模同态,满足 $f(F^p(A))\subset F^p(A')$. 它诱导出分次模的同态 $G(A)\to G(A')$. 复形 $C=\{C^n,d\}$ 的滤子由满足 $F^p(C)\supset F^{p+1}(C)$ 的子复形 $F^p(C)=\{F^p(C^n)\}$构成. 以下假定 $\bigcup_p F^p(C)=C$, 且对于每一次数 n, 都存在 p, 使 $F^p(C^n)=0$ (**下方有界**(bounded from below)). 特别当 $F^0(C)=C$, $F^{p+1}(C^p)=0$ 时,称为**标准有界**(canonically bounded). 若以 $C^{p,q}$ 记 $G^p(C^{p+q})$, 就产生二重分次模 $\{C^{p,q}\}$, p 称为**滤子次数**(filtration degree), q 称为**余次数**(complementary degree), $p+q$ 称为**全次数**(total degree).

以分次模 $D=\{D^n\}$ 为其**极限**(英 limit 法 aboutissement)的**谱序列**(spectral sequence) $\{E_r\}$ (常记作 $E_2^{p,q}\Rightarrow_p D^n$)是由二重分次模的族 $E_r=\{E_r^{p,q}\mid p,q\in\boldsymbol{Z}\}$ ($r\geqslant 2$, 有时 $r\geqslant 1$) 与满足 $d_r^2=0$ 的 $(r,1-r)$次微分 $d_r:E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ ($p,q\in\boldsymbol{Z}$)所组成的,并满足下面的条件: i)关于 d_r, $H(E_r)\cong E_{r+1}$. 从而有 E_2 的分次子模序列 $0=B_2\subset B_3\subset\cdots\subset Z_3\subset Z_2=E_2$, 使得 $Z_r/B_r\cong E_r$; ii) 存在子模 $Z_\infty\subset\bigcap_k Z_k$ 和 $B_\infty\supset\bigcup_k B_k$, 使得 $E_\infty=Z_\infty/B_\infty$ 与由 D 的某个滤子 F 所产生的二重分次模同构: $E_\infty^{p,q}\cong G^p(D^{p+q})$. 以下,只讨论 $Z_\infty=\bigcap_k Z_k$, $B_\infty=\bigcup_k B_k$ (**弱收敛**(weak convergence))的情形. 若 F 是由上收敛且下方有界的,并且关于每对 p,q, $Z_k(E_2^{p,q})$ 是稳定的,则 $\{E_r\}$ 称为**正则的**(regular); 若对任意的 n, 存在 p_0, 使当 $p<p_0$ 时, 恒有 $E_2^{p,n-p}=0$, 则 $\{E_r\}$ 称为**下方有界**(bounded from below), 特别当 $E_2^{p,q}=0$ ($p<0$, $q<0$) 时,称为**第一象限型**(first quadrant) 或上同调谱序列. 在最后这种情形中,通过**底项**(base terms) $E_k^{p,0}$, **纤维项**(fiber terms) $E_k^{0,q}$ 定义**边缘同态**(edge homomorphism) $E_2^{p,0}\to E_\infty^{p,0}$, $E_\infty^{0,q}\to E_2^{0,q}$. 定义谱序列的射 $f:\{E_r,D\}\to\{E_r',D'\}$为保持谱序列结构的(0,0)次的 $f_r:E_r\to E_r'$,

0 次的 $f:D\to D'$. 当谱序列为正则时，若某个 f_r 是同构，则 f 也是同构. 在射的集合中定义了加法，谱序列就成为加性范畴. 由 Abel 范畴 $\mathscr{C}$ 到这一范畴的加性函子称为**谱函子** (spectral functor). 在滤子化复形 $\{C, F\}$ 中，若设 $Z_r^p=\{a\in F^p(C)\mid da\in F^{p+r}(C)\}$, $B_r^p=dZ_r^{p-r}$, $E_r^p=Z_r^p/(Z_{r-1}^{p+1}+B_{r-1}^p)$, $E_r=\sum_p E_r^p$, 则产生谱序列 $E_2^{p,q}\Rightarrow G(H(C))$. 在二重复形 $C=\{C^{p,q}, d_{\rm I}, d_{\rm II}\}$ 中，定义两个滤子 $F_{\rm I}, F_{\rm II}$: $F_{\rm I}^p(C)=\sum_{s\geqslant p}\sum_q C^{s,q}$, $F_{\rm II}^q(C)=\sum_{t\geqslant q}\sum_p C^{p,t}$, 应用上面的方法，可得到两个谱序列 $H_{\rm I}^p(H_{\rm II}^q(C))\Rightarrow {}_pH^n(C)$, $H_{\rm II}^q(H_{\rm I}^p(C))\Rightarrow {}_qH^n(C)$. 从比较这两个谱序列可以得到许多结果. 设 T 是由 Abel 范畴 $\mathscr{C}$ 到 ${}_R\mathscr{M}$ 的加性共变函子，C 是 $\mathscr{C}$ 中的复形，$Q=\{Q^{p,q}\}$ 是 C 的内射分解，则关于二重复形 $T(Q)$ 如上所作的两个谱序列分别是 $H^p(R^qT(C))\Rightarrow H(T(Q))$, $R^pT(H^q(C))\Rightarrow H(T(Q))$. 这一极限与 Q 的取法无关，称为 T 关于 C 的**超上同调** (hypercohomology)([2],[10]). 同样能定义多重函子的超上同调. 谱序列理论是由 J. Leray (1946) 开创的，J.-L. Koszul (1950) 又把它代数化.

【模的范畴】 具有单位元的环 R 上的左(右)模的范畴 ${}_R\mathscr{M}$ ($\mathscr{M}_R$) 是 Abel 范畴，特别是 Grothendieck 范畴 (→模). 由完全嵌入定理†，关于一般的 Abel 范畴的命题，多数可由 ${}_R\mathscr{M}$ 导出. 在 ${}_R\mathscr{M}$ 中，P 是射影模，当且仅当它与自由模†的直和因子同构. 任意射影模是可数生成射影模的直和 (I. Kaplansky, 1958). 对于有限生成射影模 P_1, P_2，如果存在有限生成自由模 F_1, F_2，使得 P_1+F_1 (直和) $\cong P_2+F_2$ (直和)，则 P_1 与 P_2 称为等价. 按这种等价关系分类，得到以直和作为运算的 Abel 群，称为 R 的**射影类群** (projective class group). 各种空间上的向量丛† 的范畴与适当的函数环上射影模的范畴等价. 与此有关，多项式环上的射影模是否为自由模的问题 (J.-P. Serre 1955) 尚未解决 (已由 Quillen 与 Суслин 在 1976 年独立地肯定解决——译者). 一般地，"大的"射影模多半是自由的. 例如，不可分解的弱 Noether 环†上的非有限生成射影模是自由的 (日野原幸利，1963).

Hom_R 的第 n 个右导出函子以 $\mathbf{Ext}_R^n(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 表示，它成为关于 A 为反变、关于 B 为共变的函子 ${}_R\mathscr{M}\times\mathscr{M}_R\to(\mathrm{Ab})$. Ext_R^0 与 Hom_R 同构，两者可以看作是同一的. 由正合序列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 可诱导出连通同态 $\Delta^n:\mathrm{Ext}_R^n(A',B)\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A'',B)$，从而构成下面的正合序列: $\cdots\to\mathrm{Ext}_R^{n-1}(A',B)\xrightarrow{\Delta}\mathrm{Ext}_R^n(A'',B)\to\mathrm{Ext}_R^n(A,B)\to\mathrm{Ext}_R^n(A',B)\xrightarrow{\Delta}\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A'',B)\to\cdots$ (Ext 的正合序列). 同样地，由正合序列 $0\to B'\to B\to B''\to 0$ 可诱导出 $\Delta^n:\mathrm{Ext}_R^n(A,B'')\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(A,B')$，也有类似的正合序列成立. A 通过 B 的(或 B 通过 A 的) **扩张** (extension) 是指形如 (E): $0\to B\to X\to A\to 0$ 的正合序列. 基于使**示性类** (characteristic class) $\chi_E=\Delta^0(1)\in\mathrm{Ext}_R^1(A,B)$ (1 是 $\mathrm{Hom}_R(B,B)$ 的单位元) 对应于 (E)，A 通过 B 的扩张的等价类的集合与 $\mathrm{Ext}_R^1(A,B)$ 是一一对应的. 此时，这个集合中的加法由所谓扩张的 **Baer 和** (Baer's sum) 的方法作出. 用同样的方法，$\mathrm{Ext}_R^n(A,B)$ 与 n 重扩张 $0\to B\to X_{n-1}\to\cdots\to X_0\to A\to 0$ (正合) 的等价类对应. 反之，由这一观点，可以对于一般的 (不一定存在充分多的射影、内射对象的) 加性范畴†构成 Ext 等的理论 (米田信夫，1954, 1960).

$A\otimes_R B$ 作成右正合共变函子 $\mathscr{M}_R\times{}_R\mathscr{M}\to(\mathrm{Ab})$. 若 $t_P(\cdot)=\cdot\otimes P$ 是正合的，则 P 称为平坦†模. 射影模是平坦的. 一般地，平坦模是有限生成自由模的归纳极限† (M. Lazard, 1964). 若平坦模 P 关于 R 的任意极大理想 $\mathfrak{m}$ 恒满足 $P\neq\mathfrak{m}P$，则 P 称为一一平坦†模. $\otimes$ 与 Hom 互为伴随函子† (→范畴和函子)，从这个观点，也可以对一般的范畴考虑 $\otimes$. $\otimes_R$ 的左导出函子记为 $\mathbf{Tor}_n^R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. $\mathrm{Tor}_n^R(A,B)$ 特别是 $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$ 称为**挠积** (torsion product). $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$ 也记作 $A*_RB$. $\otimes_R$ 是左平衡的，因而由 A 的，B 的或 A 和 B 的射影分解总可得到

Tor. $\mathrm{Tor}_0^R=\otimes_R$. 正合序列 $0\to A'\to A\to A''\to 0$ 诱导出 $\Delta_n:\mathrm{Tor}_{n+1}^R(A'',B)\to\mathrm{Tor}_n^R(A',B)$ 和 Tor 的无限正合序列(对第二变项也同样).

Hom 与⊗的各种关系可导致导出函子之间的相应关系. 例如对 K 上的代数 Λ,Γ, 令 $\Lambda\otimes\Gamma=\Omega$ 时,定义⊤**积** $\mathrm{Tor}_p^\Lambda(A,B)\otimes\mathrm{Tor}_q^\Gamma(A',B')\to\mathrm{Tor}_{p+q}^\Omega(A\otimes A',B\otimes B')$ 作为**外积** (external product); 而当 Λ,Γ 是 K 射影模且 $\mathrm{Tor}_n^K(A,A')=0(n>0)$ 时,就能定义**楔积** (wedge product) $\vee:\mathrm{Ext}_\Lambda^p(A,B)\otimes\mathrm{Ext}_\Gamma^q(A',B')\to\mathrm{Ext}_\Omega^{p+q}(A\otimes A',B\otimes B')$. 后者可由模扩张的合成来描述. ⊤积当 $K=\Lambda=\Gamma=\Omega$ 时成为**内积** (internal product),也叫⌒**积**. 对于 K 上的 Hopf 代数†Λ, 由对偶积†$\Lambda\to\Lambda\otimes\Lambda$ 诱导出 $\mathrm{Ext}_{\Lambda\otimes\Lambda}\to\mathrm{Ext}_\Lambda$. 它与∨积合成就导出**上积** (cup product) $\smile:\mathrm{Ext}_\Lambda^p(A,B)\otimes\mathrm{Ext}_\Lambda^q(A',B')\to\mathrm{Ext}_\Lambda^{p+q}(A\otimes A',B\otimes B')$. 类似地,可定义⊥积、∧积、⊎积、⌒积(**卡积** (cap product)) (→[2]). 若 Λ,Γ,Σ 是 K 上代数, Λ 是 K 射影模,则当 $A\in\mathscr{M}_{\Lambda\otimes\Gamma}$, $B\in{}_\Lambda\mathscr{M}_\Sigma$, $C\in\mathscr{M}_{\Gamma\otimes\Sigma}$, $\mathrm{Tor}_n^\Lambda(A,B)=0(n>0)$时,由 $\mathrm{Hom}_{\Lambda\otimes\Gamma}(A,\mathrm{Hom}_\Sigma(B,C))\cong\mathrm{Hom}_{\Gamma\otimes\Sigma}(A\otimes_\Lambda B,C)$ 用二重复形的方法可导出谱序列 $\mathrm{Ext}_{\Lambda\otimes\Gamma}^p(A,\mathrm{Ext}_\Sigma^q(B,C))\Rightarrow{}_p\mathrm{Ext}_{\Gamma\otimes\Sigma}^n(A\otimes_\Lambda B,C)$.

$A\in{}_R\mathscr{M}$ 的**同调维数** (homological dimension) $\mathrm{h.dim}_R A$, $\mathrm{dh}_R A$, 或**射影维数** (projective dimension) $\mathrm{proj.dim}_R A$, 就是存在 B 使 $\mathrm{Ext}_R^n(A,B)\neq 0$ 的 n 的最大值(如果不存在,则定义它为 ∞). $\mathrm{h.dim}\ A\leqslant 0$ 等价于 A 是射影的. 同样,由函子 $\mathrm{Ext}_R^n(\cdot,B)$ 定义 $B\in{}_R\mathscr{M}$ 的**内射维数** (injective dimension) $\mathrm{inj.dim}_R\ B$, 由 $\mathrm{Tor}_n^R(\cdot,C)$ 定义 $C\in{}_R\mathscr{M}$ 的**弱维数**(weak dimension) $\mathrm{w.dim}_R\ C$. $\sup\{\mathrm{proj.dim}_R\ A\mid A\in{}_R\mathscr{M}\}=\sup\{\mathrm{inj.dim}_R B\mid B\in{}_R\mathscr{M}\}$, 这个值称为 R 的**左全局维数** (left global dimension) $\mathrm{l.gl.dim}\ R$. 它等于循环模†的同调维数的上确界 (M. Auslander, 1955). 右全局维数 $\mathrm{r.gl.dim}\ R$ 也同样地定义. $\sup\{\mathrm{w.dim}_R A\mid A\in\mathscr{M}_R\}=\sup\{\mathrm{w.dim}_R C\mid C\in{}_R\mathscr{M}\}$, 这个值称为 R 的**弱全局维数** (weak global dimension) $\mathrm{w.gl.\ dim}\ R$. $\mathrm{w.gl.dim}\ R\leqq\mathrm{l.gl.dim}\ R$, $\mathrm{r.gl.dim}\ R$. 这些值一般都不相等 (Kaplansky, 1958). 若 R 是 Noether 环†,则关于有限生成模这三个数是相等的(Auslander, 1955), 简称为 R 的**全局维数** (global dimension) $\mathrm{gl.dim}\ R$. $\mathrm{l.gl.dim}\ R=0$ 与 $\mathrm{r.gl.dim}\ R=0$ 都是 R 为 Artin 半单环†的充分必要条件. $\mathrm{w.gl.dim}\ R=0$ 当且仅当 R 是在 J. von Neumann 意义下的正则环† (原田学, 1956). 若 $\mathrm{l.gl.dim}\ R\leqslant 1$, 则称 R 是**左遗传的** (left hereditary); 若 R 的有限生成左理想是射影模,则称 R 是**左半遗传的** (left semi-hereditary). 左而且右(半)遗传的简称为(半)遗传的. 因为交换整环 R 的理想的射影性与可逆性†等价,所以 R 是遗传的当且仅当 R 是 Dedekind 环†. 此时射影类群无非就是理想类群†. 又 R 是半遗传的当且仅当 $\mathrm{w.gl.dim}\ R\leqslant 1$ (服部昭, 1957),此时 R 称为 **Prüfer 环**(Prüfer ring). Dedekind 环上的极大整环†是遗传的. 平坦性与无挠性 (torsion-free) 等价是交换半遗传环的特征 (遠藤静男, 1961). Noether 环 R 作为左 R 模是内射模, 当且仅当 R 是拟 Frobenius 环†(池田正駿, 1952),拟 Frobenius 环的全局维数是 0 或∞ (S. Eilenberg-中山正, 1955). 关于交换环 K 上的多项式环 $R=K[X_1,\cdots,X_n]$, 有 $\mathrm{gl.dim}\ R=\mathrm{gl.dim}K+n$. 在 K 是域的情形, 就是 Hilbert 的合系序列†的理论 (→多项式环),所以一般论述环或范畴的全局维数的理论有时也称为**合系论**(syzygy theory)(Eilenberg, 1956). 一般地说,交换 Noether 环 R 的同调代数在代数几何学中很有用, 对它已进行了详细的研究. 当 $\mathfrak{m}$ 在 R 的极大理想中变动时,有 $\mathrm{gl.dim}\ R=\sup\ \mathrm{gl.dim}\ R_\mathfrak{m}$ ($R_\mathfrak{m}$ 是关于 $\mathfrak{m}$ 的商环†) 成立,从而问题归结为考察局部环†. 局部环上的平坦有限生成模是自由的. 令 K 为由极大理想 $\mathfrak{m}$ 产生的剩余域,则 $\mathrm{Tor}^R(K,K)$ 具有 Hopf 代数的结构(E. F. Assmus, Jr., 1959). 关于 R 的 **Betti 数** (Betti number) $\dim\mathrm{Tor}_i^R(K,K)$, 有详细的结果 (J. Tate, 1957, 等等). 特别是, $\mathrm{gl.dim}\ R<\infty$ 当且仅当 R 是正则的† (Serre, 1955). 当 n 维局部环 R 满足 $\mathrm{Ext}_R^i(K,R)$

$=K(i=n);=0(i\neq n)$ 时，R 称为 **Gorenstein 环** (Gorenstein ring). 这是位于正则环与 Macaulay 环之间的概念(→ Noether 环).

对于环 R 的子环 S 作相对的考察就导出**相对同调代数学** (relative homological algebra). 对此有 G. Hochschild 的理论 (1956): R 模的正合序列作为 S 模的正合序列是分裂†时，称为 **(R,S) 正合序列**((R,S)-exact sequence). 若 $\mathrm{Hom}_R(P,\cdot)$ 把 (R,S) 正合序列映为正合序列，则定义 P 是 **(R,S) 射影的** ((R,S)-projective), 同样可定义 **(R,S) 内射的** ((R,S)-injective), 定义 Hom_R, Tor^R 的**相对导出函子** (relative derived functor) 为 $\mathrm{Ext}_{(R,S)}$, $\mathrm{Tor}^{(R,S)}$. 也有从另一角度考察的相对理论(高須達, 1957). 自然在一般的范畴中，也可由各种观点构成相对理论 (→ [8]).

【代数的上同调论】 设 Λ 是交换环 K 上的代数†, A 是 Λ 两侧模†. 由 Λ 映到 A 的 n 重线性映射称为 n 上链, n 上链的全体构成的模记为 $C^n(C^0=A)$. 边缘算子 $\delta^n: C^n\to C^{n+1}$ 由 $(\delta^n f)(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1})=\lambda_1 f(\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(\lambda_1,\cdots,\lambda_i\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_{n+1})+(-1)^{n+1}f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\lambda_{n+1}$ 来定义. 这一复形的上同调，称为 Λ 的以 A 为**系数模** (coefficient module) 的 n 维 **Hochschild 上同调群** (Hochschild's cohomology group) $H^n(\Lambda, A)$ (Hochschild, 1945). 限于具有性质"若 λ_i 中有 1, 则 $f(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=0$"的上链(正规化 (normalized) 上链)的子复形，可得到同样的上同调群 $H^n(\Lambda, A)$. $\{H^n(\Lambda,\cdot)\}$ 形成 Λ 两侧模的范畴 ${}_\Lambda\mathscr{M}_\Lambda$ 映到 K 模的范畴 ${}_K\mathscr{M}$ 的上同调函子. 若 Λ^0 是 Λ 的反同构象 $\Lambda^e=\Lambda\otimes_K\Lambda^0$ (Λ 的**包络代数** (enveloping algebra)), 则 ${}_\Lambda\mathscr{M}_\Lambda$ 与 ${}_{\Lambda^e}\mathscr{M}$ 及 $\mathscr{M}_{\Lambda^e}$ 可看作是同一的. 若 Λ 是 K 射影的，则 $\{H^n(\Lambda,\cdot)\}$ 与 $\{\mathrm{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda,\cdot)\}$ 同构 (在[2]中，一般地 $\mathrm{Ext}_{\Lambda^e}^n(\Lambda,\cdot)$ 就是 $H^n(\Lambda, A)$). $H^0(\Lambda, A)=\{a\in A\mid \lambda a=a\lambda,\forall\lambda\in\Lambda\}$. 1 上闭链称为由 Λ 到 A 的**微分** (derivation, crossed homomorphism), 1 上边缘称为**内微分** (inner derivation, principal crossed homomorphism). 因而 $H^1(\Lambda, A)$ 是微分类群，与分歧†性有关系. K 是域时, $H^1(\Lambda,\cdot)=0$ 当且仅当 Λ 是可分代数. 一般地，当 Λ 是 Λ^e 射影的，即 $\mathrm{Ext}_{\Lambda^e}^1(\Lambda,\cdot)=0$ 时, Λ 称为 K 上的**可分代数** (separable algebra) (Auslander-O. Goldman, 1960). 这是极大中心代数概念(中山-東屋五郎, 1948)的推广. $H^2(\Lambda, A)$ 与 Λ 的以 A 为核的代数扩张†的等价类一一对应. 满足 $H^2(\Lambda,\cdot)=0$ 的域 K 上的代数 Λ 在幂零核上的扩张必定分裂† (J. H. C. Whitehead-Hochschild). 这对于可分代数的情形成立，并推出 Wedderburn-Мальцев 定理†. $H^3(\Lambda, A)$ 也可解释为与扩张有关.

一般地，存在 A 使 $H^n(\Lambda, A)\neq 0$ 的 n 的最大值，称为 Λ 的**上同调维数** (cohomological dimension) $\dim\Lambda$ (若 n 不存在则 $\dim\Lambda=\infty$). 设 Λ 是域 K 上的有限维代数, N 是它的根基†, 则 $\dim\Lambda<\infty$ 当且仅当 Λ/N 是可分的，且 $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda<\infty$ (池田-永尾汎-中山, 1954).

同样定义 Λ 的以 A 为系数模的同调群 $H_n(\Lambda, A)$, 若 Λ 是 K 射影的，则 $\{H_n(\Lambda,\cdot)\}$ 与 $\{\mathrm{Tor}_n^{\Lambda^e}(\cdot,\Lambda)\}$ 同构.

【群的上同调论】 K 上的一个代数 Λ 与一个代数同态 $\varepsilon:\Lambda\to K$ 所成的对，称为添加 ε 的 K 上的**增广代数** (supplemented algebra ([2]), augmented algebra ([8])). 群 G 的有理整系数群代数† $\boldsymbol{Z}[G]$ 成为添加 $\varepsilon(x)=1(x\in G)$ 的增广代数. 左 G 模的范畴 ${}_G\mathscr{M}$ 与左 $\boldsymbol{Z}[G]$ 模的范畴看作是同一的. 对于有限群 G, 有限生成的射影 G 模不一定是自由的(D. S. Rim, 1959), 它同构于 G 自由模与 $\boldsymbol{Z}[G]$ 的左理想的直和，从而 $\boldsymbol{Z}[G]$ 的射影类群是有限群 (R. G. Swan, 1960). G 的关于 $A\in{}_G\mathscr{M}$ 的**上同调群**、**同调群** (Eilenberg-S. MacLane, 1943) 分别定义为 $H^n(G, A)=\mathrm{Ext}_{\boldsymbol{Z}[G]}^n(\boldsymbol{Z}, A)$, $H_n(G, A)=\mathrm{Tor}_n^{\boldsymbol{Z}[G]}(\boldsymbol{Z}, A)$. 它们的具体描述常通过 $\boldsymbol{Z}$ 的 $\boldsymbol{Z}[G]$ **标准分解** (standard resolution). i) 齐次表示：以集合 G 的直积 G^{n+1} 为基的自由 Abel 群由运算 $x(x_0,\cdots,x_n)=(xx_0,\cdots,xx_n)$ 形成 G 模，这就得到**齐次 n 链** (homogeneous n-chain) 群，

并由 $d(x_0, \cdots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n)$ 来定义边缘算子而得到复形. ii) 非齐次表示: 以 G^n 为基的自由 $Z[G]$ 模定义为**非齐次 n 链** (non-homogeneous n-chain) 群, 并由 $d(x_1, \cdots, x_n) = x_1(x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (x_1, \cdots, x_i x_{i+1}, \cdots, x_n) + (-1)^n (x_1, \cdots, x_{n-1})$ 来定义边缘算子而得到复形. 非齐次 2 上闭链也称为**因子组** (factor set). $H^0(G, A)$ 是 G 不变元所成的子模 A^G, $H_0(G, A)$ 是 A 的使得 G 的运算是平凡的最大剩余类模 A_G. 个给出两群 G, K, 群同态构成的正合序列 $1 \to K \to E \to G \to 1$, 称为 G 的以 K 为核的**群扩张** (group extension). 当 K 是 Abel 群时, 此扩张在 K 中引入 G 模的结构, K 与成为 E 的半直积[†]因子的偏差就产生因子组. $H^2(G, A)$ 一一对应于在 A 中导出 G 模结构的以 A 为核的 G 的群扩张的等价类集 (O. Schreier 的理论). 在 Schur-Zassenhaus 定理 (→有限群) 的证明中, 主要的就是这一观点. $H^3(G, A)$ 可理解为扩张的障碍的集合 (Eilenberg-MacLane, 1947). 对于自由群[†] F, $H^n(F, A) = H_n(F, A) = 0 (n > 1)$. 一般的群 G 可以表为自由群的商群 $G = F/R$. 若令 $R/[R, R] = K$, $F/[R, R] = E$, 则 E 给出了 G 的以 K 为核的扩张. 设对应的 $H^2(G, K)$ 的元是 ξ, 此时对于任意 G 模 A, 把上积 $\chi \to \chi \smile \xi$ 与 $\mathrm{Hom}(K, A) \otimes K \to A$ 组合起来, 给出了同构 $H^n(G, \mathrm{Hom}(K, A)) \cong H^{n+2}(G, A)$ $(n > 0)$ (**上积还原定理** (cup product reduction theorem)) (Eilenberg-MacLane, 1947). 关于同调群也同样有还原定理. 以上积为积的 $\boldsymbol{Z}$ 上的代数 $H(G, \boldsymbol{Z}) = \sum_{n=0}^{\infty} H^n(G, \boldsymbol{Z})$, 当 G 是有限群时, 是有限生成的 (Б. Б. Венков, 1959; L. Evens, 1961).

关于子群 H 的各种映射. 1) 由 $x \in G$ 引出的内自同构诱导出 $H^n(H, A)$ 与 $H^n(xHx^{-1}, A)$ 同构; 若 $H = G$, 它给出 $H^n(G, A)$ 到自身上的恒等映射. 因而当 H 是 G 的正规子群时, 在 $H^n(H, A)$ 中引入了 G/H 模的结构. 关于 $H_n(G, A)$ 也同样. 2) H 是 G 的正规子群时的**膨胀映射** (inflation, lift) Inf: $H^n(G/H, A^H) \to H^n(G, A)$, **压缩映射** (deflation) Def: $H_n(G, A) \to H_n(G/H, A_H)$. 这些都是由非齐次链的对应 $(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1H, \cdots, x_nH)$ 导出的. 3) **限制映射** (restriction) Res: $H^n(G, A) \to H^n(H, A)$, **单射** (injection) Inj (或 correstriction, Cor): $H_n(H, A) \to H_n(G, A)$. 这些都是由非齐次链的嵌入导出的. 又用诱导表示[†]的方法, 给出这些映射的另一个作法. 即, 若令 $\iota^G(A) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}[H]}(\boldsymbol{Z}[G], A)$, 则 Res 由同构 $H^n(H, A) \cong H^n(G, \iota^G(A))$ 结合 $A \to \iota^G(A)$ 所诱导出的同态而成; 又若令 $\iota_G(A) = \boldsymbol{Z}[G] \otimes_{\boldsymbol{Z}[H]} A$, 则 Inj 由同构 $H_n(H, A) \cong H_n(G, \iota_G(A))$ 结合 $\iota_G(A) \to A$ 所诱导出的同态而成. 4) 若 $(G:H) < \infty$, 则有 $\iota^G(A) \cong \iota_G(A)$. 反过来由合成 $H^n(H, A) \to H^n(G, \iota_G(A)) \to H^n(G, A)$ 定义上同调群的 Inj: $H^n(H, A) \to H^n(G, A)$; 由合成 $H_n(G, A) \to H_n(G, \iota^G(A)) \to H_n(H, A)$ 给出同调群的 Res: $H_n(G, A) \to H_n(H, A)$. 特别是, Res: $H_1(G, \boldsymbol{Z}) \to H_1(H, \boldsymbol{Z})$ 与转移[†] $G/[G, G] \to H/[H, H]$ 一致. 5) 设 H 是 G 的正规子群. 考虑 $h \in \boldsymbol{Z}^n(H, A)^G$ 与 $f \in \boldsymbol{Z}^{n+1}(G/H, A^H)$ 之间由 "$\exists g \in C^n(G, A): h = \mathrm{Res}\, g$, $\mathrm{Inf}\, f = \delta g$" 所定义的加法关系 (对应), 特别当由此诱导出同态 $H^n(H, A)^G \to H^{n+1}(G/H, A^H)$ 时, 称为**超度** (transgression). 若 $H^i(H, A) = 0$ $(0 < i < n)$, 则由这些映射形成的 $0 \to H^n(G/H, A^H) \to H^n(G, A) \to H^n(H, A)^G \to H^{n+1}(G/H, A^H) \to H^{n+1}(G, A)$ 是正合序列 (**基本正合序列** (fundamental exact sequence)) (Hochschild-Serre, 1953). 一般地存在谱序列 $H^p(G/H, H^q(H, A)) \Rightarrow {}_pH^n(G, A)$ (R. C. Lyndon, 1948; Hochschild-Serre, 1953), 用这个边缘同态可以导出基本正合序列.

关于子群的相对(上)同调论 (I. T. Adamson, 1954) 可以用相对 Ext, 相对 Tor 来讨论 (Hochschild, 1956). 绝对情形的很多结果可以推广到相对情形. 例如, 基本正合序列 (中

山，服部，1958)．而且也一般地考察了关于G的置换表示†的上同调论(E. Snapper，1964)．

【非 Abel 上同调】 对于非 Abel G 群 A，也类似地由非齐次上链定义上同调“集合”$H^1(G, A)$(以及$H^0(G, A)$)(例如→[11])．对一般的非 Abel 理论也在尝试．

【有限群】 定义范数$N: A \to A$为$N(a) = \sum_{x \in G} xa$，Ker N 以 ${}_N A$ 表示，增广 ε 的核以 I 表示．设$\hat{H}^n(G, A) = H^n(G, A)(n > 0)$，$\hat{H}^0(G, A) = A^G/NA$，$\hat{H}^{-1}(G, A) = {}_N A/IA$，$\hat{H}^{-n}(G, A) = H_{n-1}(G, A)(n > 1)$，则$\{\hat{H}^n(G, \cdot)\}$形成上同调函子(E. Artin-Tate)．这可以作为由$\boldsymbol{Z}$的**完备**(complete)自由分解而来的上同调群来表述(一般地，关于拟 Frobenius 环同样的论述成立(中山，1957)．这种类型的理论称为**完备上同调论**(complete cohomology theory))．A满足$\hat{H}^n(G, A) = 0(n \in \boldsymbol{Z})$当且仅当 h.dim$_{\boldsymbol{Z}[G]} A \leqslant 1$(中山，1957)．若$A$满足条件 i) 关于$G$的 Sylow p 群 G_p，$\hat{H}^1(G_p, A) = 0$；ii) 存在$\xi \in \hat{H}^2(G, A)$，使得$\hat{H}^2(G_p, A)$由 Res ξ 生成，且是与G_p同阶数的循环群，则当 Tor$(A, B) = 0$ 时，关于任意子群H，由与 Res ξ 的上积定义的同态$\hat{H}^n(H, B) \to \hat{H}^{n+2}(H, A \otimes B)(n \in \boldsymbol{Z})$是同构(中山，1957；$B = \boldsymbol{Z}$ 的情形，Tate，1952)．G是循环群时，与$\hat{H}^2(\boldsymbol{Z})$(以下略去$G$)的生成元的上积定义的对应$\hat{H}^n(A) \to \hat{H}^{n+2}(A)$是同构($n \in \boldsymbol{Z}$)．当$\hat{H}^0(A)$，$\hat{H}^1(A)$的阶数有限时，它们的比称为$A$的 **Herbrand 商**(Herbrand's quotient) $h(A)$．对于正合序列 $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$，有 $h(A) = h(A')h(A'')$；对于有限模A，有$h(A) = 1$(合起来得到 Herbrand 引理)．一般地，周期性$\hat{H}^n(A) \cong \hat{H}^{n+p}(A)$ ($n \in \boldsymbol{Z}$，$A \in {}_G\mathscr{M}$)成立当且仅当 Sylow 子群全部是循环群或广义四元数群(Artin-Tate，[2])．

设L/K是有限次 Galois 扩张†，G是 Galois 群†，与L/K有关的各种G模的上同调称为 **Galois 上同调**(Galois cohomology)(→Galois 理论)．关于无限次 Galois 扩张也由研究**连续上闭链**(continuous cocycle)而构成上同调论(**Tate 上同调**(Tate cohomology))(→[11])．有限群及作为其射影极限†的完全不连通紧群†(profinite group)的上同调论通过 Galois 上同调在类域论以及有关领域中有着重要的应用(→类域论)．

【Lie 代数的上同调论】 设交换环K上的 Lie 代数† $\mathfrak{g}$ 是K自由的．$\mathfrak{g}$ 的包络代数† $U = U(\mathfrak{g})$ 作成K上的系数增广环．当A是 $\mathfrak{g}$ 模(= U 模)时，$\mathrm{Ext}_U^n(K, A)$，$\mathrm{Tor}_n^U(K, A)$ 分别称为以A为系数模的 $\mathfrak{g}$ 的**上同调群** $\hat{H}^n(\mathfrak{g}, A)$，**同调群** $H_n(\mathfrak{g}, A)$．它们主要由 Chevalley-Eilenberg (1948) 给出的K的U自由分解 $U \otimes \wedge_K(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$ 的**标准复形**(standard complex))来描述．此处$\Lambda_K(\mathfrak{g})$是K模 $\mathfrak{g}$ 的外代数†，微分($1 \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$以$(x_1, \cdots, x_n)$表示)就由 $d(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x_i(x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(-1)^{i+j}([x_i, x_j], x_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, \hat{x}_j, \cdots, x_n)$ 给出．当 $n > [\mathfrak{g}:K]$ 时，$H^n(\mathfrak{g}, A) = H_n(\mathfrak{g}, A) = 0$．对特征为 0 的域$K$上的半单 Lie 代数† $\mathfrak{g}$，关于任意有限维模 A，有 $H^1(\mathfrak{g}, A) = H^2(\mathfrak{g}, A) = 0$，但 $H^3(\mathfrak{g}, K) \neq 0$．$H^1(\mathfrak{g}, A) = 0$ 与有限维表示的完全可约性(Weyl 定理)等价．$H^2(\mathfrak{g}, A)$，$H^3(\mathfrak{g}, A)$ 与群的情形同样具有与 Lie 代数扩张相关联的意义．由上面 $H^2(\mathfrak{g}, A) = 0$ 可导出 Levi 分解†定理．Chevalley-Eilenberg 将紧 Lie 群†的上同调论代数化而构成上面的上同调论，同时由齐性空间†的上同调引入关于 $\mathfrak{g}$ 的子 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 的相对上同调群 $H^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, A)$．它与 Hochschild (1956) 的相对上同调群 $\mathrm{Ext}^n_{U(\mathfrak{g}), U(\mathfrak{h})}(K, A)$ 不一定一致，但在K是特征为 0 的域，$\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中是可简约†的这个重要情形下是一致的(→ Lie 代数)．

对于域K上的线性代数群† G的变换空间†所成的模，基于**有理内射性**(rational injectivity)的概念也引入了**有理上同调群**(rational cohomology group)(Hochschild，1961)．特别是，设特征为 0 的域K上的幂单†代数群G的 Lie代数是 $\mathfrak{g}$，则 $H(G, A)$ 与 $H(\mathfrak{g}, A)$同构．也可考察相对的情形．

【Amitsur 上同调】 设 R 是交换环，F 是交换 R 代数的范畴 $\mathscr{C}_R$ 到 Abel 群的范畴的共变函子．对于 $S\in\mathscr{C}_R$ 与 $n=0,1,2,\cdots$，记 $S^{(n)}=S\otimes\cdots\otimes S$（$R$ 上 n 重张量积）．令 $\varepsilon_i:S^{(n+1)}\to S^{(n+2)}$ $(i=0,1,\cdots,n+1)$ 是 $\mathscr{C}_R$ 射，定义为 $\varepsilon_i(x_0\otimes\cdots\otimes x_n)=x_0\otimes\cdots\otimes x_{i-1}\otimes 1\otimes x_i\otimes\cdots\otimes x_n$．又定义 $d^n:F(S^{(n+1)})\to F(S^{(n+2)})$ 为 $d^n=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i F(\varepsilon_i)$，就得到一个上链复形 $\{F(S^{(n+1)}),d^n\}$．这个复形及其上同调群分别称为 **Amitsur 复形**（Amitsur complex）与 **Amitsur 上同调群**（Amitsur cohomology groups），通常记作 $C(S/R,F)$ 与 $H^n(S/R,F)$．

若 S/R 是具有 Galois 群 G 的有限 Galois 扩张，则单位群函子 U 的群 $H^n(S/R,U)$ 自然地同构于 $H^n(G,U(S))$．若 S/R 是有限纯不可分扩张，则对于 $n\geqslant 3$ 有 $H^n(S/R,U)=0$．群 $H^2(S/R,U)$ 与 Brauer 群† $B(S/R)$ 有关（一代数[环的 Brauer 群]．

【参】 [1] Séminaire H. Cartan, 1950—1951, Paris, 1951; [2] H. Cartan-S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton, 1956; [3] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J., 9 (1957), 119—221; [4] 中山正-服部昭，ホモロジー代数学，現代数学講座，共立出版，1957; [5] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1958; [6] D. G. Northcott, An introduction to homological algebra, Cambridge, 1960; [7] 弥永昌吉-小平邦彦，现代数学概说 I，岩波，1961; [8] S. MacLane, Homology, Springer, 1963; [9] P. Freyd, Abelian categories, Harper & Row, 1964; [10] A. Grothendieck (-J. Dieudonné), Eléments de géometrie algébrique I, II, III, Publ. Math. Inst. HES., 1960—61; [11] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lecture notes, Springer, 1964; [12] S. Lang, Rapport sur la cohomologie des groupes, Benjamin, 1966; [13] E. Weiss, Cohomology of groups, Academic Press, 1969; [14] H. Bass, Algebraic K-theory, Benjamin, 1968.

四、群　论（有限群、拓扑群、Lie群、表示论）

群　[英 group　法 groupe　德 Gruppe　俄 группа　日　群]　【群的定义】　设对于非空集合G的任意两个元a，b，都可唯一确定G的一个元c，称为a，b的**积**(product)，写成$c=ab$．这样的对应$(a,b)\to ab$称为G中的**乘法**(multiplication)．如果乘法满足以下两个条件，G就称为**群**或**乘法群**(multiplicative group)：i) 乘法满足**结合律**(associative law)，即$a(bc)=(ab)c$，ii) 对于G中任意两个元a，b，都唯一地存在G中的元x，y，满足$ax=b$，$ya=b$．条件ii) 与下述两个条件 iii)，iv) 等价：iii) **单位元**(identity element or unit element)存在，即G中存在一个特别的元e，使得对于G的任意元a，均有$ae=ea=a$；iv) **逆元**(inverse element)存在，即对于G的任一元a，存在x，使得$ax=xa=e$．x称为a的逆元，写成a^{-1}．G的单位元以及a的逆元是唯一确定的．关于乘法群的单位元通常用e或1表示．当$ab=ba$成立时，就称a和b是**交换的**(commutative)．对于G的任二元a，b，一般不假定**交换律**(commutative law) $ab=ba$成立；交换律成立的群称为**Abel群**(Abelian group)或**交换群**(commutative group)．由于 N. H. Abel 在研究方程式论时发现了交换群，故以最初研究者的名字把这种群命名为 Abel 群．交换群的元的乘积又常写成$a+b$的形状，这时对应$(a,b)\to a+b$称为**加法**(addition)，而$a+b$称为a与b的**和**(sum)，并称G为**加法群**或**模**(additive group, module)．加法群的单位元通常用0表示，a的逆元记为$-a$（⇀Abel 群，模）．有时也用乘法、加法以外的写法表示，一般称它们为**合成法**(law of composition)（⇀结构）．

【群的例】　对于域† K上的线性空间†，如果把它的元（向量）的和作为合成法，就成为加法群（⇀线性空间）．域K关于它的加法构成加法群，K中除去加法单位元0以外的所有元素所成的集合，以域的乘法作为合成法构成乘法群，称它为**域的乘法群**(multiplicative group of a field)（⇀域）．以环R的元为元素的所有(n,n)型正则矩阵的全体，以矩阵的乘法作为合成法也构成群，称为R上的n次一般线性群（⇀典型群）．设M是任意集合，M上定义的到自身的一一对应（称它为M的**置换**(permutation)）的全体以$f\circ g(x)=f(g(x))$ $(x\in M)$作为合成法$f\circ g$，也构成群（有时把$f\circ g$写作gf，这时，如果把$f(x)$写作xf，就有$x(gf)=(xg)f$ $(x\in M)$），这个群称为M上的**对称群**†(symmetric group)．如果一个群G的所有元均为集合M上的置换，那末就称G是M上的一个**置换群**(permutation group)．常可把具体给定的群看作各种各样集合上的置换群．例如域K上的n次一般线性群可以看作n维向量的集合上的置换群，也可看作张量空间上的置换群．Euclid 空间中的运动的全体，以运动的合成作为乘法，也构成群．一般线性群中使给定的二次型不变的矩阵的全体，以矩阵的乘法作为合成法，也成为群，称为属于给定二次型的正交群†．当域K为实数域或复数域时，这些群都是Lie群的例子（⇀Lie 群）．其他例子⇀自由群、有限群、拓扑群、代数群等．

【基本概念】　若群G由有限个元组成，则称为**有限群**(finite group)，否则称为**无限群**(infinite group)．G所含的元的个数称为G的**阶**(order)．当群G的非空子集H对于G中所定义的乘法仍成为群时，就称H为G的**子群**(subgroup)．H为G的子群的充分必要条件是：对于H中任意两个元a，b，$a^{-1}b$恒属于H．设$\{H_\lambda\}$是G的子群的一个族，则所有H_λ的交仍是G的子群．

设n为大于2的任意自然数，对于给定的

n 个元 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的积 $a_1a_2\cdots a_n$，只要不改变这 n 个元的排列次序，任意结合所得的结果都相同(一般结合律)．当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$ 时，把 $aa\cdots a$ 写成 a^n．当约定 a^0 为群的单位元并以 $(a^n)^{-1}$ 来定义负指数幂 a^{-n} 时，就有 $a^{-n}=(a^{-1})^n$，且一般指数规则 $a^na^m=a^{n+m}$，$(a^n)^m=a^{nm}$ 对于任意整数 m, n 都成立．对于 G 的元 a，如果存在某个正整数 n，使 a^n 等于 G 的单位元，那末，具有这种性质的最小正整数就称为 a 的**阶数** (order)．如果对于任意正整数 n，a^n 都不是单位元，则 a 的**幂** (power) $a^0(=e)$，$a^{\pm1}$，$a^{\pm2}$，$\cdots$ 均不相等．这时，就称 a 为**无限阶** (infinite order) 的元．若 a 具有有限阶数 d，则 $a^0(=e)$，a，a^2，$\cdots$，a^{d-1} 是 a 的仅有的 d 个互不相同的幂．a 的幂的全体 $\langle a\rangle$ 形成 G 的子群，称为 G 的**循环子群** (cyclic subgroup)．a 的阶数与子群 $\langle a\rangle$ 的阶数相等．$\langle a\rangle$ 本身称为**循环群** (cyclic group)，它是 Abel 群的一个例子(→Abel 群)．

一般地，给定群 G 的一个子集 S，则 G 的所有包含 S 的子群的交称为由 S **生成**(generate)的子群，常记作 $\langle S\rangle$．这是包含 S 的最小子群，它与 G 中形如 $a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_r^{m_r}$ $(a_i\in S, m_i\in Z)$ 的元的全体是相同的．当 $\langle S\rangle=G$ 时，S 的元称为 G 的**生成元** (generators)．当 G 具有有限的生成元集合时，称 G 为**有限生成的** (finitely generated)．当 $S=\{a\}$ 时，把 $\langle S\rangle$ 简记为 $\langle a\rangle$．这时 a 是循环群 $\langle a\rangle$ 的生成元．在 G 中，可能发生这样的情况，即 S 的元的某些幂的积等于单位元，这时就说，这些幂的积是 S 的元之间在 G 中的一个**关系**(relation)．若给定生成元的集合 S，又给出 S 的元之间的所有关系，则可定义一个群(→自由群)．这个群是由所给生成元的集合所生成，且满足所给关系的最一般的群，然而，这个群是否含有单位元以外的元，不可能有一个一般的判定规则(字的问题†)．

当给定群 G 的子集 S 以及 G 的元 x 时，所有形如 $x^{-1}s\,x$ $(s\in S)$ 的元的全体，记作 $x^{-1}S\,x$ 或 S^x，并称 S 与 S^x **共轭**(conjugate)．$(ab)^x=a^x b^x$，$(a^{-1})^x=(a^x)^{-1}$ 成立．当 H 是 G 的子群时，H^x 也是 G 的子群．给定 G 的子集 S，所有使得 $S^x=S$ 的元 x 所成的集合 $N(S)$ 是 G 的子群，称为 S 的**正规化子**(normalizer)．与 S 的一切元皆可交换的元 x 的全体，即 $\{x\mid xs=sx, \forall s\in S\}=Z(S)$，也是 G 的子群，称它为 S 的**中心化子** (centralizer)．G 本身的中心化子 Z 称为 G 的**中心** (centre)，这是一个重要的子群．与 G 的元 a 共轭的所有元构成的集合，称为元 a 的**共轭类** (conjugate class)．G 可分解为若干个互不相交的共轭类，即等于这些共轭类的并集(直和)．

当 G 的子群 H 以及 G 的元 x 给定时，一切形如 hx $(h\in H)$ 的元所成的集合，记为 Hx，称为关于 H 的**左陪集** (left coset)．**右陪集** (right coset) xH 可同样定义．G 可分解为关于 H 的互不相同的诸陪集的不相交并集．关于 H 的不同的左(右)陪集的个数称为 H 的**指数** (index)，常记作 $(G:H)$．设 H 和 K 是 G 的两个子群，HxK 表示 G 中一切可写成形如 hxk $(h\in H, k\in K)$ 的元的全体，称它为关于 H 与 K 的**重陪集** (double coset)．G 可分解为关于 H 与 K 的互不相同的重陪集的不相交并集．当关于子群 H 的左、右陪集相同时，即对所有 x，$Hx=xH$ 均成立时，称 H 为 G 的**正规子群**(normal subgroup)或**不变子群** (invariant subgroup)．这也等价于，对 G 中任意的 x，$H=H^x$ 都成立．这时，两个陪集 Ha，Hb 中的元的乘积的全体是 Hab；我们把 Hab 定义为 Ha，Hb 的积，于是，关于 H 的陪集的全体就构成群，称它为 G 的**模 H 的剩余(类)群** (residue class group modulo H)或**商群** (quotient group)、**因子群** (factor group) 等，记作 G/H．当 G 是加法群时，也常写成 $G-H$，称为**差群** (difference group)．若群 G 除了本身以及只含有单位元的正规子群以外，别无其它真正规子群，则称 G 为**单群** (simple group)．具有有限指数的子群必含有具有有限指数的正规子群．具有有限指数的子群的左、右两种陪集分解中，必有共同的代表元的完全系．若群 G 由有限个元生成，则 G 中具有有限指数的子群也可由有限个元所生成．

给定群 G 中的等价关系† R，如果 xRx'，

yRy' 蕴涵 $(xy)R(x'y')$，则称这个等价关系 R 与乘法是**相容的**(compatible)．当 R 与乘法相容时，商集† G/R 关于诱导的乘法成为一个群，称它为 G 关于等价关系 R 的商群．含单位元的等价类 H 是 G 的一个正规子群，而等价关系 xRx' 就是 $x^{-1}x' \in H$，即 x, x' 属于关于 H 的同一个陪集，从而 G/R 与 G/H 相同．

【同构，同态】 若两个群 G, G' 的元之间存在一一对应 $a \leftrightarrow a'$，而且 $a \leftrightarrow a'$ 和 $b \leftrightarrow b'$ 蕴涵 $ab \leftrightarrow a'b'$，则称 G 与 G' 是**同构的**(isomorphic)，记作 $G \cong G'$．若令 $a' = f(a)$，则 $f: G \to G'$ 是双射†，且 $f(ab) = f(a)f(b)$ 对 G 中任意元 a, b 都成立． 一般地，如果两个群 G、G' 间存在映射 $f: G \to G'$，满足条件 $f(ab) = f(a)f(b)$ $(a, b \in G)$，则称 f 是 G 到 G' 的一个**同态映射**，简称**同态** (homomorphism)．当 f 是单射†时，称为**单射同态** (injective homomorphism)，当 f 是满射†时，称为**满射同态** (surjective homomorphism)． 当存在 $G \to G'$ 的满射同态时，称 G 与 G' 是**同态的**(homomorphic)．同态的合成是同态．若同态 $f: G \to G'$ 是双射，则其逆映射 f^{-1} 也是同态，这样的同态 f 称为 G 到 G' 上的**同构映射**，简称**同构** (isomorphism)．

设 H 是 G 的子群，由 $f(a) = a$ $(a \in H)$ 所定义的 H 到 G 内的单射同态 $f: H \to G$，称为**标准单射** (canonical injection) 或者**自然单射** (natural injection)．对于 G 的商群 G/R，规定 $a \in f(a)$ $(a \in G)$，就得出 G 到 G/R 上的满射同态 $f: G \to G/R$，称这个 f 为**标准满射** (canonical surjection) 或**自然满射** (natural surjection)．

考虑群 G, G' 间的同态 $f: G \to G'$．f 的**象** (image) $f(G)$ 是 G' 的子群，f 的**核** (kernel) $H = \{a \in G \mid f(a) = e'$ (G' 的单位元)$\}$ 是 G 的正规子群．按照等价关系 $f(x) = f(y)$ 确定的等价类是关于 H 的陪集，由 f 可诱导出同构 $\bar{f}: G/H \to f(G)$．这个事实称为群的**同态定理** (homomorphism theorem)． 这条定理可推广如下：为了简单起见，设 $f: G \to G'$ 是满射同态．1) G' 的正规子群 H' 的原象 $H = f^{-1}(H')$ 是 G 的正规子群，且由 f 可诱导出同构 $\bar{f}: G/H \to G'/H'$．2) 对于 G 的子群 H 与正规子群 N，$h \in H$, $n \in N$ 的积 hn 的全体 HN 是 G 的子群，且由标准单射 $H \to HN$ 可诱导出同构 $H/H \cap N \to HN/N$．3) 设 H, N 都是 G 的正规子群，并且 $H \supset N$，则由标准满射 $G \to G/N$ 可诱导出同构 $G/H \to (G/N)/(H/N)$．这些事实都称为群的**同构定理** (isomorphism theorem)．

特别是，群 G 到它自身的同态称为**自同态** (endomorphism)，G 到它自身的同构称为**自同构** (automorphism)． 群 G 的所有自同构关于合成运算构成群，称为 G 的**自同构群** (group of automorphisms)．取定 G 的一个元 a，由对应 $x \to a^{-1}xa$ 所定义的 G 的自同构，称为 G 的**内自同构** (inner automorphism)，G 的所有内自同构形成自同构群的一个正规子群，称为 G 的**内自同构群** (group of inner automorphisms)．这个群与 G 关于其中心的商群同构．

如果群 G, G' 之间的映射 $f: G \to G'$ 满足条件 $f(ab) = f(b)f(a)$ $(a, b \in G)$，则称 f 为 G 到 G' 的**反同态** (anti-homomorphism)，双射反同态称为**反同构**(anti-isomorphism)．特别当 $G = G'$ 时，可同样地定义**反自同态** (anti-endomorphism) 与**反自同构**(anti-automorphism)(例如，由 $f(a) = a^{-1}$ 定义的 $f: G \to G$ 是一个反自同构)．

【带算子区的群】 给定集合 Ω 与群 G，若对于 $\theta \in \Omega$ 以及 $x \in G$，可以定义乘积 $\theta x \in G$，而且满足条件 $\theta(xy) = \theta(x)\theta(y)$ $(x, y \in G)$，则称 Ω 是群 G 的**算子区** (operator domain)，称 G 是带有算子区 Ω 的群，或 **Ω 群** (Ω-group)．θx 也可写成 x^{θ}．由 $(\theta, x) \to \theta x$ 定义的映射称为 Ω 到 G 的运算†．任意 $\theta \in \Omega$ 可以诱导出 Ω 群 G 的一个自同态 $\theta_G: x \to \theta x$．考虑群 G 的 Ω 群的结构无非就是使每一 $\theta \in \Omega$ 对应于 G 的自同态 θ_G．任意的群都可以看作以空集（或仅含恒等自同构的集合）为算子区的群，这样，群的一般理论都可以推广到带算子区的群上去．而且，取定适当的算子区，在某些场合，还可以提高对群本身的研究效果(→Abel 群，模)．

如果 Ω 群 G 的子群 H 满足条件：$\theta \in \Omega$ 和 $x \in H$ 蕴涵 $\theta x \in H$，那末，H 也是 Ω 群，称为 **Ω**

子群(Ω-subgroup)或**容许子群**(admissible subgroup). 如果G的等价关系R与乘法相容，也与算子区中的元(简称算子)**相容**(即满足条件$\theta\in\Omega$和$x\,R\,x'$蕴涵$(\theta x)R(\theta x')$),则商群G/R也成为Ω群. 这时，单位元的等价类既是容许子群，又是正规子群，称它为**容许正规子群**(admissible normal subgroup). 反之，任一容许正规子群H所定义的等价关系与算子是相容的,且商群G/H是Ω群. 如果两个Ω群间的同态$f:G\rightarrow G'$满足条件$f(\theta x)=\theta f(x)$ ($\theta\in\Omega$, $x\in G$),则称f是**Ω同态**(Ω-homomorphism),或**容许同态**(admissible homomorphism),或**算子同态**(operator homomorphism). 当f是同构时，称为**Ω同构**(Ω-isomorphism), 或**容许同构**(admissible isomorphism), 或**算子同构**(operator isomorphism). 群的同态定理以及同构定理，当子群以及同态分别与算子相容时，同样也都成立.

【子群序列】 设$H_1, H_2, \cdots$为群G的(正规)子群的无限序列,并且$H_i\subsetneqq H_{i+1}(i=1,2,\cdots)$,则称这个序列为(正规)子群的**升链**(ascending chain). 同样地,如果$H_i\supsetneqq H_{i+1}(i=1,2,\cdots)$,则称这个序列为(正规)子群的**降链**(descending chain),当群G中不存在升链或者降链时,这时就说G关于(正规)子群适合**升链条件**(ascending chain condition)或者**降链条件**(descending chain condition). 这也就是说，G的所有(正规)子群所成的序集适合升链条件或降链条件(→序[链条件]). 群G关于子群适合升链条件的充分必要条件是: G的每一子群都有有限多个生成元. 以上叙述对于带算子区的群也同样成立. 适合升(降)链条件的Abel群的结构是已经知道的(→交换群),但是,一般地,关于子群同时适合升链条件与降链条件的无限群是否存在，则还不知道. 关于子群适合降链条件的群，不存在无限阶的元，但其逆未必成立. 具有有限多个生成元并且每个元的阶数皆为有限的无限群是存在的(→自由群[Burnside问题]).

【正规列】 设$G_0=G\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_r=\{e\}$($e$是单位元)是群$G$的子群的一个有限序列，且对于所有$i=1,2,\cdots,r$, G_i是G_{i-1}的正规子群,则称它为一个**正规列**(normal chain), r称为这个正规列的长. 商群G_0/G_1, G_1/G_2, $\cdots G_{r-1}/G_r$称为这个正规列的**商群列**(sequence of quotient group). 设$G=H_0\supset H_1\supset H_2\supset\cdots\supset H_s=\{e\}$是$G$的另一个正规列,并且前一正规列中的各项$G_i$都在其中出现,则称第二个正规列是第一个正规列的**加细**(refinement). 对于两个同长的正规列,如果在它们的商群列之间存在一一对应，而且对应的商群又同构，就称这两个正规列是同构的. 给定G的两个正规列,分别将其加细,可得出两个同构的正规列(O. Schreier加细定理). 对于一个由不同的子群所组成的正规列，如果它的任一真加细必有同一子群重复出现的情形，则这个正规列就称为**合成列**(composition series), 也称为**Jordan-Hölder列**(Jordan-Hölder sequence). 合成列的商群列称为**合成商群列**. 合成商群列中每一商群均为单群. 作为上面加细定理的一个特例,我们有这样一个结论:如果群G具有合成列,则组成这个合成商群列的单群列(不管其顺序的话)与合成列的取法无关,而由群G自身唯一确定(这是O. Hölder的结果;对于有限群，C. Jordan早就证明了合成商群的阶数的集合不依赖于合成列的选取. 因此上述定理称为**Jordan-Hölder定理**). G的合成商群列中的每个单群都称为G的**合成因子**(composition factor).

对于带算子区Ω的群G,如果仅考虑Ω子群，则类似于上述的定义及定理仍然成立. 若把G的内自同构群取作Ω,则Ω群G的合成列称为**主合成列**(principal series); 若把G的整个自同构群取作Ω,则这时的合成列称为**特征列**(characteristic series). 无限群未必有合成列，而且即使有合成列,也可能有"无限正规列",即在子群的升链$G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G$中,每一$G_i$均为$G_{i+1}$的正规子群，而且$\bigcup G_i=G$. 实际上，已知具有无限正规列的单群的例子(P. Hall). 具有同构的合成列的两个群也未必是同构的.

凡在群G的正规列中所出现的子群，都称为G的**次正规子群**(subnormal subgroup). 两个次正规子群的交仍是次正规子群，但对于无限群来说,两个次正规子群的**联**(join)(即由二者的并生成的子群)未必是次正规子群. 群的子群的集合与正规子群的集合,对于包含关系来说,分别构成格. 关于这个格与群的关系→[9].

【换位子群】 对于群G的两个元a, b, 称$aba^{-1}b^{-1}=[a, b]$为a, b的**换位子**(commutator). G的一切换位子生成的G的子群C称为G的**换位子群**(commutator subgroup)或**导出群**(derived group). C是G的正规子群. 商群G/C是Abel群. 另一方面，若B是G的正规子群,且G/B是Abel群,则B包含C. 一般地，设A, B是G的子集，a, b分别取遍A, B的元，则这些$[a, b]$所生成的子群称为$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$**的换位子群**(commutator subgroup of A and B)，记作$[A, B]$. 特别地，当A, B是G的正规子群时，$C=[A, B]$也是G的正规子群,并且C包含于A内,也包含于B内,在G/C中A/C的每个元与B/C的每个元皆可交换,而C又是具有这个性质的最小正规子群. G的换位子群C就是$[G, G]$.

如果某个群的换位子群是Abel群,则称这个群是**亚 Abel 群**(meta-Abelian group). 若G具有长为2的正规列$G(=G_0)\supset G_1\supset G_2(=\{e\})$, 且$G_0/G_1$以及$G_1/G_2$均为Abel群,则$G$为亚Abel群. 亚Abel群是下面介绍的可解群的特殊情形.

【可解群】 设群G的换位子群为G_1, G_1的换位子群为G_2, $\cdots$, 这就得到G的一个正规列$G=G_0\supset G_1\supset G_2\supset\cdots$; 若对于某个$r$有$G_r=\{e\}$ (e是G的单位元), 则G称为**可解群**(solvable group). 这时正规列$G(=G_0)\supset G_1\supset\cdots\supset G_r(=\{e\})$的商群列中的每个$G_i/G_{i+1}(i=0, 1, \cdots, r-1)$均为Abel群. 对于有限群$G$, 可解群的定义等价于: 存在$G$的正规列$G\supset H_1\supset H_2\supset\cdots\supset H_s=\{e\}$, 使得它的商群列$G/H_1$, H_1/H_2, $\cdots$, H_{s-1}/H_s中的每个商群的阶数皆为素数. 在特征为0的域中,不可约方程的所有根皆能用根号表示即"代数可解"的充分必要条件是,这个方程的Galois群是可解群(→Galois 理论).

【幂零群】 由$G=G_0$, $G_r=[G, G_{r-1}]$ ($r=1, 2, \cdots$)所定义的G的子群列称为**降中心列**(lower central series); 如果存在自然数n, 使$G_n=\{e\}$, 则称G为**幂零群**(nilpotent group), 并称使$G_n=\{e\}$的最小自然数n为幂零群的**级**(class). 幂零群都是可解群. 设G的中心为Z_1, G/Z_1的中心为Z_2/Z_1, $\cdots$, 这样定义的子群列$Z_0=\{e\}\subset Z_1\subset Z_2\subset\cdots$称为$G$的**升中心列**(upper central series). G为幂零群的充分必要条件是,存在自然数m, 使$Z_m=G$; 具有这样性质的最小自然数恰好等于幂零群G的级. 上面所定义的群G_i与Z_i之间有$[G_{i-1}, Z_i]=\{e\}$的关系. 当G是Lie群时，则G为幂零的充分必要条件是对应于G的Lie代数L是幂零的,即$L^n=0$, 这就是幂零群命名的由来.

【无限可解群】 对于无限群来说，可解与幂零的概念可以用各种方式来推广. 例如，当群G的任一不等于$\{e\}$的同态象都含有不等于$\{e\}$的正规Abel群时，称G为**(广义)可解群**(generalized solvable group); 又当G的任意不等于$\{e\}$的同态象都具有不等于$\{e\}$的中心时，就称G为**(广义)幂零群**(generalized nilpotent group). 对于有限群来说，这些定义与前面的定义是一致的，而对于无限群则不是这样(例如,→[8]).

【群的直积】 有限个群G_1, G_2, $\cdots$, G_n的**直积**或**直积群**(direct product group) G是指所有形如$x=(x_1, \cdots, x_n)$ ($x_i\in G_i$, $i=1, \cdots, n$)的元所构成的群,这里，$x=(x_1, \cdots, x_n)$, $y=(y_1\cdots, y_n)$的积xy定义为$xy=(x_1y_1, \cdots, x_ny_n)$. 直积$G$用记号$G=G_1\times\cdots\times G_n$表示. 设$G_i$的单位元为$e_i$, 则$G$的单位元是$e=(e_1, \cdots, e_n)$. 由对应$(x_1, x_2\cdots, x_n)\to x_i$所定义的同态$G\to G_i$称为**标准满射**(canonical surjection). 又命$H_i=\{(e_1, \cdots, e_{i-1}, x_i, e_{i+1}, \cdots, e_n)\mid x_i\in G_i\}(i=1, \cdots, n)$,

则 H_i 与 G_i 同构，而且满足以下条件 1)，2)，3)：1) H_i 是G的正规子群；2) 当 $i \neq j$ 时，H_i 的元与 H_j 的元可交换；3) G的元可唯一地表成 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的元的积．反之，若一个群G有 n 个子群 $H_1, H_2, \cdots, H_n$，满足上述条件 1)，2)，3)，则 G 与 $H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$ 同构．通常也写成 $G = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_n$，称它为$G$的**直积分解** (direct product decomposition)．每个 H_i 称为G的**直接因子**(direct factor)．条件 1)，2)，3) 与条件 1)，2′)，3′) 等价，这里 2′) 是 $G = H_1H_2 \cdots H_n$；3′) 是 $H_1 \cdots H_{i-1} \cap H_i = \{e\}$，$e$ 是 G 的单位元，$i = 2, 3, \cdots, n$．

若一个群不能表示成异于 $\{e\}$ 的两个子群的直积，则称它为**不可分解群** (indecomposable group)．若G能表示成单群的直积，则称它为**完全可约群** (completely reducible group)．如果G关于正规子群适合升链或降链条件，那末，G可以分解为不可分解群的直积．然而，这种分解一般不是唯一的．关于这个问题，有下面的定理：若 $G = G_1 \times \cdots \times G_n = H_1 \times \cdots \times H_m$ 是把G分解为不可分解群的两种直积分解，则 $m = n$，并且适当调换 G_i，H_j 的次序，可以使每一对都是同构的，而且，假定 G_1 与 H_1 同构，则有 $G = H_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$．这条定理对有限群而言首先是由 J. H. M. Wedderburn 叙述的，而 R. Remak 和 O. Schmidt 给出了完全的证明．后来，W Krull 对一般的带算子区群也给出了证明，因此称为 **Krull-Remak-Schmidt 定理**．O. Ore 把这条定理作为模格†问题加以讨论．

加法群 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 的直积群称为**直和**或**直和加法群** (direct sum additive group)，表成 $G = G_1 + \cdots + G_n$．而且用**直和分解** (direct sum decomposition) 来代替直积分解这一术语．

当给出无限个群的族 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 时，它们的直积群可同上面一样地定义，表为 $\prod_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$．再者，设直积群的元 $(\cdots, x_\lambda, \cdots)$ $(x_\lambda \in G_\lambda)$ 满足下述条件，即使得 x_λ 不等于 G_λ 的单位元的 $\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 仅有有限个，那么由这样的元得出的群称为**限制直积群** (restricted direct product group)．

【群的自由积】 当给定群的族$\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$时，作为"由它们所生成的最一般的群"，可以定义称为 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的自由积的群 G，连同 G_λ 到G的标准单射(同态) $f_\lambda: G_\lambda \to G$．

先考虑 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的直和集† S，并把 G_λ 看作 S 的子集．然后，把 S 的元的有限序列 $a_1, a_2, \cdots, a_n (a_i \in S)$ 称为**字** (word)，所有这些字的集合记作 W．空序列叫做空字，也算作W的元．对于W定义乘法，即以两个字顺次相连作为这两个字的乘积，于是W的乘法满足结合律†．当W中的两个字 w, w' 满足下面两个条件之一时，就用符号 $w \succ w'$ 表示：1) w 中有相邻的两项 a, b 属于同一个 G_λ，将所有这样的元换成积 ab，就成为 w'；2) w 中某项为单位元，将这元去掉，就成为 w'．再者，对于两个字 w, $w' \in W$，如果存在字的有限序列 $w = w_0, w_1, \cdots, w_n = w'$，使得对每一 i，$(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均有 $w_{i-1} \succ w_i$ 或 $w_i \succ w_{i-1}$，这时就记作 $w \equiv w'$．关系 $w \equiv w'$ 是W中的等价关系，并且与W的乘法相容，即由 $w_1 \equiv w_1'$，$w_2 \equiv w_2'$ 可得出 $w_1w_2 \equiv w_1'w_2'$．于是，设W对于这个等价关系的商集为 G，则可由 W 中的乘法诱导出G中的乘法．于是G成为一个群，并以空字的等价类作为单位元．而且，对于任意 $\lambda \in \Lambda$，把属于G_λ的 x 看作字并以 x 所属的等价类(G 的元)作为 x 的象，这样就得到标准单射(同态) $f_\lambda: G_\lambda \to G$．群$G$称为 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的**自由积**或**自由积群** (free product group)，f_λ 称为**标准单射(同态)** (canonical injection)．自由积的概念可用下面的万有性质来刻划：对于任意的群 G' 和任意的同态 f_λ': $G_\lambda \to G' (\lambda \in \Lambda)$，存在唯一的同态映射 $g: G \to G'$，使 $g \circ f_\lambda = f_\lambda' (\lambda \in \Lambda)$．自由积是直积的对偶概念，故也称作对偶直积† (→范畴和函子)．特别当每一个 G_λ 都是元 a_λ 所生成的无限循环群时，则 $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 的自由积就是以 $\{a_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 为生成元系的自由群(→自由群)．

自由积的概念还可以推广如下：设H是某个固定的群，考虑群G以及单射同态$j:H\to G$的对(G, j)的族．两个对(G, j)，(G', j')称为同态，当且仅当存在同态映射$f:G\to G'$，使得$f\circ j=j'$．对于族$\{(G_\lambda, j_\lambda)\}$，把$(G, j)$与标准单射同态$f_\lambda:(G_\lambda, j_\lambda)\to(G, j)(\lambda\in\Lambda)$称为**融合积**（amalgamated product）．融合积由下面的万有性质所刻划：对于任意的(G', j')以及同态映射$f'_\lambda:(G_\lambda, j_\lambda)\to(G', j')$，存在唯一的同态映射$g:(G, j)\to(G', j')$，使得$g\circ f_\lambda=f'_\lambda(\lambda\in\Lambda)$．当$H=\{e\}$时，融合积就是自由积．再者，$f_\lambda:G_\lambda\to G$为单射．若把$G_\lambda$看作$G$的子群，则$G$就由$G_\lambda(\lambda\in\Lambda)$所生成，且$G_\lambda\cap G_\mu=j_\lambda(H)=j_\mu(H)\ (\lambda\neq\mu)$．

利用融合积，可以构成各色各样具有奇妙性质的群，故它是非常有效的工具．例如，可以作出一个除单位元以外其余元均互相共轭的群（B. H. Neumann-G. Higman）；又可以作出一个具有有限个生成元的群而其$\neq\{e\}$的同态象恒为无限群（Higman）；于是可得出一个具有有限个生成元的无限单群等等．

【群的扩张】 给定两个群N，F，作一个群G，使之含有与N同构的正规子群$\bar{N}$，并且$G/\bar{N}\cong F$，这样的G就称为群F基于N的**扩张**（extension）．定出这样的G的结构的问题是 Schreier（Monatsh. f. Math. Phys., **34**（1926），Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **4**（1928））所解决的．假设 1）对于$\sigma\in F$，有N的一个自同构s_σ与之对应；2）对于$\sigma, \tau\in F$，存在$c_{\sigma,\tau}\in N$，使得$s_\sigma(s_\tau(a))=c_{\sigma,\tau}(s_{\sigma\tau}(a))c_{\sigma,\tau}^{-1}(a\in N)$；3）$c_{\sigma,\tau}c_{\sigma\tau,\rho}=s_\sigma(c_{\tau,\rho})c_{\sigma,\tau\rho}$成立．然后，命$G$表示所有记号$as_\sigma(a\in N, \sigma\in F)$的集合，定义$G$的乘法为：$as_\sigma\cdot bs_\tau=(as_\sigma(b)c_{\sigma,\tau})s_{\sigma\tau}$，则$G$成为群，并且$\bar{a}=ac_{1,1}^{-1}s_1(a\in N)$的全体$\bar{N}$成为$G$的正规子群，且使$G/\bar{N}\cong F$．群$F$基于$N$的扩张全都可用这种方式得出．适合条件1)，2)，3）的$(s_\sigma, c_{\sigma,\tau})$称为属于$F$的**因子组**（factor set）．对于两个因子组$(s_\sigma, c_{\sigma,\tau})$，$(t_\sigma, d_{\sigma,\tau})$，如果可以选择$a_\sigma\in N(\sigma\in F)$，使$t_\sigma(a)=s_\sigma(a_\sigma a a_\sigma^{-1})$，$d_{\sigma,\tau}=a_\sigma(s_\sigma(a_\tau))c_{\sigma,\tau}a_{\sigma\tau}^{-1}$成立，那末，就说$(s_\sigma, c_{\sigma,\tau})$与$(t_\sigma, d_{\sigma,\tau})$是**相伴的**（associated）．这时，分别与$(s_\sigma, c_{\sigma,\tau})$，$(t_\sigma, d_{\sigma,\tau})$相对应的群（扩张）是同构的．特别是，当$(s_\sigma, d_{\sigma,\tau})$与$(t_\sigma, 1)$相伴时，这个因子组或与这个因子组对应的群的扩张$G$称为**分裂的**（英 split 德 zerfallen）．这时群G含有与F同构的子群$\bar{F}$，使得$G=\bar{F}\bar{N}$，$\bar{F}\cap\bar{N}=\{e\}$．在这种情形，G也称为N与F的**半直积**或**半直积群**（semidirect product group）．

特别是，如果N是 Abel 群，则由于N的内自同构只能是恒等映射，所以上面的条件 2）成为$s_\sigma(s_\tau(a))=s_{\sigma\tau}(a)$，于是因子组的相伴以及分裂的条件也变得简单了．如果N是 Abel 群，且包含在G的中心内，就称G是N的**中心扩张**（central extension）．

【转移】 设H是G的指数为有限的子群．令关于H的不同的左陪集的代表为$g_i(i=1, 2, \cdots, h)$．当$b\in Hg_i$时，用$g_i=\bar{b}$表示．对于$x\in G$，$H'\prod_{i=1}^{h}g_ix(\overline{g_ix})^{-1}$（与代表系的选取法无关）决定了$H/H'$中一个确定的元，这里$H'$是$H$的换位子群．于是由对应$G'x\to\bar{x}$得出$G/G'$到$H/H'$的一个同态，称它为$G/G'$到$H/H'$的**转移**（英 transfer 德 Verlagerung）．

【群概念的推广】 群的概念有种种推广．首先，设有一个定义了乘法$(a, b)\to ab$的集合S，并且假定在S中结合律成立，就称S为**半群**（semi-group）．若S是交换半群（即$ab=ba$成立），并且在S中“由$ax=bx$可得$a=b$”（**消去律**（cancellation law））成立，则可以作一个群G，使G包含S，而S中的元的乘法在G中仍然保持，并且G的任意元x都可以表示成S的适当的两个元a，b的“商”：$x=a^{-1}b=ba^{-1}$．G的结构是由S唯一确定的，称G为S的**商的群**（group of quotients）．

半群是把群中的结合律单抽出来，而把单位元、逆元的存在舍弃后所得的概念．另一方面，若对于定义了合成法$(a, b)\to ab$的某个集合$Q\ni a, b, c, \cdots$，不要求合成法适合结合律，而只要求对于Q的任意两个元a，c，在Q中

存在唯一的元 b，满足条件 $ab=c$，且 b，c 给定时，在 G 中也存在唯一的元 a，满足条件 $ab=c$，这时，就说 Q 关于所定义的合成法构成**拟群**(quasi-group)．若在拟群 Q 中存在"单位元" e，使对任意元 a，有 $ae=ea=a$，则 Q 就称为**圈**(loop)．对于圈来说，有一些与群的结构理论十分类似的结果成立(R. H. Bruck, Trans. Amer. Math. Soc., **60** (1946))．

再者，如果对于群的乘法不要求任何两个元一定存在乘积，或存在乘积但不要求唯一性，又可得出如下的推广：如果对于集合 M 中任意二元 a，b，有 M 中一个非空子集 ab 与它们对应，则称 M 为**超广群** (hypergroupoid)．如果这个乘法适合结合律 $(ab)c=a(bc)$，并且对 M 中任意二元 a，b，都存在 x，$y\in M$，使 $xa\ni b$，$ay\ni b$ 成立，则称 M 为**超群** (hypergroup)．又如果 M 可分解成不相交的子集 M_0，M_1，M_2，$\cdots$；对于 $a\in M_0$ 以及 $b\in M_i(i=1,2,\cdots)$，可定义同属于 M_i 的 ab，$a\backslash b$，使 $a(a\backslash b)=b$；对于 b，$c\in M_i$ 可定义 b/c，使 $b/c\in M_0$，$(b/c)c=b$；并且乘积 ab（在 a，b 可能求积的情况下）适合结合律 $(ab)c=a(bc)$，这时，称 M 为**混群**(德 Mischgruppe) (A. Loewy, 1927)．又如果 M 可分解成不相交的子集 $M_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$，当 $a\in M_{ij}$，$b\in M_{jk}$ 时，定义了一个元 $ab\in M_{ik}$；当 $a\in M_{ij}$，$b\in M_{ik}$ 时，定义了一个元 $a\backslash b\in M_{jk}$，使得 $a(a\backslash b)=b$；当 $a\in M_{ij}$，$b\in M_{kj}$ 时，定义了一个元 $a/b\in M_{ik}$，使得 $(a/b)b=a$；还有，对于 $a\in M_{ij}$，$b\in M_{jk}$，$c\in M_{kl}$，结合律 $(ab)c=a(bc)$ 成立，这时，称 M 为**广群** (groupoid) (H. Brandt, 1926)．这些推广的概念，也有许多实际的应用．→模、Abel 群、有限群、自由群、表示论、酉表示、Lie 群、拓扑群、拓扑 Abel 群、紧群、不连续群、代数群、格、结晶体群、典型群等．

【群的历史】 群的概念在数学史上出现不是很古的事(十九世纪前半叶)，但是其思想的萌芽则在古代 Euclid 的《原本》中已经出现．此后，群的概念以运动和变换等概念作为基础潜在地形成，到了十九世纪后半叶，它才正式出现，其后在整个数学中占有重要的位置，成为现代数学的基础之一．

有意识地开辟通向群的概念的道路开始于十八世纪末，J. L. Lagrange, A. T. Vandermonde, P. Ruffini 等试图求出高次代数方程的代数解法，因之作方程诸根之间的置换而注意到了群的概念．基于这种思考方法，N. H. Abel 证明了五次以上的一般的代数方程不可能代数求解．A. L. Cauchy 用一个文字来表示置换，将群本身作为研究对象，而群与代数方程之间的关系的完全描述是由 E. Galois (1830 年左右)作出的(→Galois 理论)．这种 Abel 和 Galois 的方程论是群论成功的开始． 这个理论在 1870 年出版的 C. Jordan 的 "Traité des substitutions" 一书中有着详细的介绍，并且得到了发展．在这本书中研究的对象是置换群，而把它抽象化并给出群的最初定义的是 A. Cayley (1854)以及 L. Kronecker (1870)．F. Klein 在其埃尔兰根纲领 (1872) 中强调了群论在几何学中的意义．1880 年左右，M. S. Lie 发展了连续群论(→Lie 群)． 1897 年 W. Burnside 的 "Theory of groups" 出版了，其第二版 (1911) 是群论的经典著作之一，直到现在，仍保有其价值．1900 年左右，G. Frobenius, Burnside 等人进行了抽象群的研究，特别是用矩阵来表示群的表示论(→表示论)的研究，这些研究现在已成为有限群论的基础．由此群论成为数学的一个分支．群论是抽象代数学最先发展的一个部门，二十世纪三十年代的抽象代数学的进步，是大力推进群论思想方法的结果． 由三十年代后期起，有限群的研究逐步开展起来，特别从 1955 年前后开始，对有限群的兴趣大大提高，得到了各种各样的结果(→有限群)．

【参】 [1] 正田建次郎，抽象代数学，岩波，1932；[2] 正田建次郎-浅野啓三，代数学 I，岩波，1952；[3] 秋月康夫-鈴木通夫，高等代数学 I, II，岩波全書 1952, 1957；[4] W. Burnside, Theory of groups of finite order, Cambridge Univ. Press, 第二版，1911； [5] H. Weyl, The classical groups, Princeton Univ. Press, 1939, 修订版，1946； [6] B. L. van der Waerden, Algebra I, II, Springer, 修订版 1955 (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学 I, II，科学出版社，1977)； [7] B. L. van der Waerden,

Gruppen von linearen Transformationen, Erg. d. Math., Springer, 1935; [8] А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, 第二版, 1953 (中译本: А. Г. 库洛什,群论,上册,人民教育出版社, 1964); [9] M. Suzuki (鈴木通夫), Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Erg. d. Math., Springer, 1956; [10] M. Hall, The theory of groups, Macmillan, 1959 (中译本: M. 赫尔, 群论, 科学出版社, 1981); [11] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie I, Teubner, 1937; [12] A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Springer, 第三版, 1937; [13] 浅野啓三-永尾汎, 群論, 岩波全書, 1965; [14] 大島勝, 群論, 共立全書, 1954; [15] W. Specht, Gruppentheorie, Springer, 1956; [16] A. H. Clifford-G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, I, 1961; II, 1967; [17] Е. С. Ляпин, Полугруппы, Гостехиздат, 1960; [18] R. H. Bruck, A survey of binary systems, Erg. Math., Springer, 1958; [19] C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, Gauthier-Villars, 1870 (Blanchard, 1957); [20] G. Frobenius, Gesammelte Abhandlungen I, II, III, Springer, 1968.

Abel 群 [英 Abelian group 法 groupe abélien 德 Abelsche Gruppe 俄 абелева группа 日 アーベル群] 设G是一个群†, 如果对于G的任意两个元 a, b, 交换律 $ab=ba$ 都成立, 则称G是 **Abel 群**或**交换群**(commutative group). G的有限阶元的全体构成一个子群† T, 商群† G/T 除单位元 e 以外,不含任何有限阶元. 如果 $G=T$, 则称G是**挠**(Abel)**群**(torsion group)或**周期群** (periodic group); 如果 $T=\{e\}$, 就称G是**无挠** (Abel) **群** (torsionfree group); 这两种情形以外的 G, 就称为**混合** (Abel) **群** (mixed group). 由于挠(Abel)群可唯一地分解为 Sylow 子群†的直积†, 故其结构可归结为 **Abel p 群** (Abelian p-group) (p 是素数) 的结构. 如果挠群G的每个元的阶数是一个固定的素数p的幂, 则G称为 Abel p 群, 也称为**准素群** (primary group).

【有限 Abel 群】 有限 Abel 群的基本定理是由 L. Kronecker, G. Frobenius, L. Stickelberger 等于十九世纪七十年代发现并证明的. 阶数为 p^n 的 Abel 群G可分解为循环子群† $Z_1, \cdots, Z_r$ 的直积: $G=Z_1\times\cdots\times Z_r$. 这时, 若设 Z_i 的阶数为 p^{n_i}, 则有 $n=n_1+n_2+\cdots+n_r$, 并且可设 $n_i\geqslant n_{i+1}$. 这样的循环群的直积分解并不是唯一的,但 $n_1, n_2, \cdots, n_r$ 的值由G唯一确定. 这时,把 $\{p^{n_1}, p^{n_2}, \cdots, p^{n_r}\}$ 或者$\{n_1, n_2, \cdots, n_r\}$称为$G$的**不变式**(invariant)或者**型** (type). 也常把 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_r$ 的生成元†的集合 $\{z_1, z_2, \cdots, z_r\}$ 称为G的**基**(basis). $(p, p, \cdots, p)$ 型 Abel 群称为**初等 Abel 群** (elementary Abelian group).具有相同不变式的有限 Abel 群是同构†的. G. Hajós (1942) 不限于考虑有限 Abel 群的子群的直积† 分解,更进一步考虑它的子集的直积分解, 并将其成功地应用于数论上(→有限群).

【具有有限生成系的 Abel 群】 具有有限生成系的 Abel 群的理论与有限 Abel 群的理论同样是古典的. 无限阶循环群† 的直积称为**自由 Abel 群** (free Abelian group). 具有有限生成系的 Abel 群G可分解为有限 Abel群与自由 Abel群的直积. 有限部分是G的挠群,自由部分虽然不是唯一确定的, 但是, 将其分解成无限循环群的直积时, 直积因子的个数即G的**秩** (rank) 是唯一确定的. 具有有限生成系的两个 Abel 群, 若它们的挠群同构而且秩也相同, 则这两个群同构. 这个理论可以推广到主理想环上模†的情形 (→交换环 [Dedekind 环, 主理想环]).

【挠群】 关于一般的 Abel 群(未必具有有限生成系) 的结构,只有 Abel p 群(挠群)的情形比较清楚. 关于 Abel p 群,在二十世纪二十年代, H. Prüfer 曾作出重要的研究,三十年代 H. Ulm, L. Zippin 等人对可数基数的情形,得到了完整的结果, 四十年代, Л. Я. Куликов 对一般基数的情形开始了最初的研究, 对这种情形的研究一直继续到现在.

设 $G\neq\{e\}$ 是 Abel p 群,如果对于G的每个元 a, 存在 $x\in G$, 使得 $x^p=a$ 成立,则称G是**可除** (divisible) 群或**完备** (complete) 群. 可除群是 **p^∞ 型群** (group of type p^∞) 的直积 (Prüfer). 所谓 p^∞ 型群,是指与由复数域中 1 的所有 p 幂次根构成的乘法群†同构的群. Abel p 群G的极大可除子群 V 是G的直积因子: $G=V\times R$. R 不含可除子群. 不含可除子群的 Abel p 群称为**约化**(reduced) Abel 群.

设 $x\in G$（G 是 Abel p 群）. 如果对于任意自然数 n，都存在 $y_n\in G$，使得 $x=y_n^{p^n}$，则称 x 是**无限高元**(element of infinite height). G 中所有无限高元构成 G 的子群 G^1. $G^1=\{e\}$ 的可数阶群 G 是循环群的直积，并且所有这样的直积分解皆同构(Prüfer). 这里可数性的假定不能去掉. 我们可按照超限归纳法†定义 G^β 如下：当 $\beta>1$ 为非极限序数†时，命 $G^\beta=(G^{\beta-1})^1$，当 β 是极限序数时，命 $G^\beta=\bigcap_{\alpha<\beta}G^\alpha$. 于是存在最初的序数 τ，使得 τ 不超过 G 的基数，且有 $G^\tau=G^{\tau+1}$. G^τ 是 G 的最大可除子群. 当 G 是约化群时，$G^\tau=\{e\}$. 这时称 τ 为 G 的**型** (type). 当 $\alpha<\tau$ 时，称 $\bar{G}^\alpha=G^\alpha/G^{\alpha+1}$ 为 G 的 **Ulm 因子** (Ulm factor). 群列 $\bar{G}^0,\cdots,\bar{G}^\alpha,\cdots(\alpha<\tau)$ 称为 G 的 **Ulm 因子列** (sequence of Ulm factors). 每一个 Ulm 因子都不含无限高元，而除 $\bar{G}^{\tau-1}$ 以外，$\bar{G}^\alpha$ 含有阶数为任意大的元. 设 τ 为任意的最大是可数基数的序数，并假定对任意序数 $\alpha<\tau$，存在一个可数 Abel p 群 A_α，使 A_α 没有无限高元，但对任意 $\alpha\neq\tau-1$，A_α 有阶数为任意大的元. 于是存在一个型 τ 的约化 Abel p 群，它具有同构于 $A_0,A_1,\cdots,A_\alpha,\cdots(\alpha<\tau)$ 的一个 Ulm 因子列 (Zippin). 若两个可数约化 Abel p 群 A，B 有同一型 τ，并且对于任意 $\alpha<\tau$，对应的 Ulm 因子 $\bar{A}^\alpha$，$\bar{B}^\alpha$ 是同构的，则 A，B 同构(Ulm). 这里可数性的假定不能去掉.

【无挠群】 Abel 群的合成法如果用加法 $a+b$ 表示，则称之为加法群；在加法群中单位元称为**零元** (zero element)，用 0 表示. a 的逆元用 $-a$ 表示，$a+(-b)$ 一般改写成 $a-b$，即 $a+(-b)=a-b$. 加法群可以看成为有理整数环 $\boldsymbol{Z}$ 上的模，从而可以考虑下面阐述的线性相关与线性无关的概念. G 的元 $a_1,\cdots,a_r$ 称为**线性相关的** (linearly dependent)，如果存在不全为 0 的整数 $n_1,\cdots,n_r$，使 $n_1a_1+\cdots+n_ra_r=0$；若 $a_1,\cdots,a_r$ 不是线性相关的，则称为**线性无关的** (linearly independent). 若无限个元中任意有限个都是线性无关的，则称这无限个元为线性无关的. 设 G 中存在 N 个线性无关的元，而不存在 $N+1$ 个线性无关的元，则称这 N 个元为**极大线性无关组**(maximal independent system)，并称 G 的**秩**(rank)是 N. 无挠加法群 G 若不是有限生成群，就不一定是自由加法群†.

关于无挠群的最初的重要工作是由 F. W. Levi (1917) 做出的，A. Г. Курош (1937) 完全解决了有限秩的群的情形，然而一般情形是困难的. 最近，I. Kaplansky, J. Rotman 等人继续进行着研究.

有理数加法群 $\boldsymbol{Q}$ 的秩是 1，反之，秩为 1 的群必与有理数加法群 $\boldsymbol{Q}$ 的某个子群同构. 设对于群 G 的每个元 a，都存在适合条件 $nx_n=a$ 的元 x_n，此处 n 是任意自然数，这时，就称 G 是**可除** (divisible) 群或**完备** (complete) 群. 可除无挠加法群同构于若干个 $\boldsymbol{Q}$ 的直和†. 对任一无挠加法群 G，包含 G 的可除无挠群是存在的. 这些可除无挠加法群中的极小加法群 F 彼此同构，因而唯一确定. F 以有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 作为其算子区†. 设 $\boldsymbol{Q}^{(p)}$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的 p 整数子环 $\{a/b\mid(a,b)=1,p\nmid b\}$，而令 G_p 是 F 中的包含 G 并以 $\boldsymbol{Q}^{(p)}$ 为算子区的最小子群. 再设 $\boldsymbol{Q}_p$ 为 p-adic 数域†，$\boldsymbol{Z}_p$ 为 p-adic 整数环†，则扩张算子区 $\boldsymbol{Q}$ 至 $\boldsymbol{Q}_p$ 时，我们就自然地由 F 得到一个 $\boldsymbol{Q}_p$ 模 F_p. 设 $\bar{G}_p$ 是 G_p 在 $\bar{F}_p$ 中的自然闭包†，则 $\bar{G}_p$ 是具有算子区 $\boldsymbol{Z}_p$ 的 $\boldsymbol{Z}_p$ 模，秩为 N 的 $\boldsymbol{Z}_p$ 模同构于 κ_p 个 $\boldsymbol{Q}_p$ 与 $N-\kappa_p$ 个 $\boldsymbol{Z}_p$ 的直和：$\bar{G}_p\cong\sum_n\boldsymbol{Q}_pv_n+\sum_m Z_pw_m(n=1,\cdots,\kappa_p;\ m=1,\cdots,N-\kappa_p)$. κ_p 称为群 G 的 **p 秩** (p-rank). 作为 G 的不变量，Курош 给出了秩数，对于所有素数 p 的 p 秩，以及矩阵 $\mathfrak{M}_p$ 的序列 $(\mathfrak{M}_p)$ 的某个等价类. 这里 p 取遍所有素数，$\mathfrak{M}_p$ 是 F 的极大无关组的元表成 (v_n,w_m) 的线性组合时在 $\boldsymbol{Q}_p$ 中的系数矩阵.

【一般 Abel 群】 一般的 Abel 群是挠群基于无挠群的扩张†. 设 T 是挠群. 如果存在某个自然数 n，使得对于 T 的每个元 t，均有 $t^n=1$，则称 T 是**有界的** (bounded). 包含挠群 T 作为

最大子挠群的任意 Abel 群 G 以 T 为 G 的直积因子的充分必要条件是：T 为可除群与有界群的直积 (R. Baer-C. Фомин).

【特征标】 如果对于 Abel 群 G 的每个元 a，有一绝对值为 1 的复数 $\chi(a)$ 与之对应，并且满足条件 $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$，则称 χ 为 G 的**特征标** (character). 对于 G 的两个特征标 χ_1, χ_2，若由 $\chi(a)=\chi_1(a)\chi_2(a)$ 定义它们的积 $\chi=\chi_1\chi_2$，则 χ 也是 G 的一个特征标，于是 G 的一切特征标所成的集合 X 对于上面定义的合成法形成一个 Abel 群 $C(G)$，其单位元是恒等特征标 $\chi(a)=1$. X 称为 Abel 群 G 的**特征标群** (character group). 当 G 是有限群时，G 与其特征标群 X 同构，这就蕴涵对偶性 $G=C(C(G))$. 这个事实被 Л. С. Понтрягин 推广到局部紧拓扑 Abel 群[†]. Abel 群的特征标在数论中有各种应用(→拓扑 Abel 群，表示论).

关于具有算子区的加法群→模.

【参】 [1] L. Fuchs, Abelian groups, Pergamon, 1960; [2] I. Kaplansky, Infinite Abelian groups, Univ. of Michigan, 1954; [3] А. Г. Курош, Теория групп, Гостехиздат, 1953 (中译本：А. Г. 库洛什，群论，上册，人民教育出版社，1964). 又→群的[参].

自由群 [英 free group 法 groupe libre 德 freie Gruppe 俄 свободная группа 日 自由群] 设群 F 是生成元分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的无限循环群 $G_1, \cdots, G_n$ 的自由积(→群[群的自由积])，则称 F 为由 n 个元 $a_1, \cdots, a_n$ 生成的**自由群**，n 称为 F 的**秩** (rank). 半群[†]的自由积也与群的情形同样定义，而在 G_i 是由 $1, a_i, a_i^2, \cdots (i=1,2,\cdots,n)$ 形成的无限循环半群的情形，它们的自由积称为 n 个元 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 生成的**自由半群** (free semigroup).

设群 G 是由与 G_i 同构的子群 $H_i (i=1,\cdots,n)$ 生成的，则 G 是 G_i 的自由积 F 的同态象. G_i 的自由积 F 的每一个子群 H，如果不是只含单位元，就是某个自由群与某些子群的自由积，而这些子群中每一个都与某个 G_j 的一个子群在 F 中共轭 (А. Г. Курош, 1934). 特别是，自由群的子群如果 $\neq\{e\}$，则必是自由群 (O. Schreier). 秩为 n 的自由群中指数为 j 的子群的秩等于 $1+j(n-1)$ (Schreier).

设 F 为 n 个元 $a_1, \cdots, a_n$ 生成的自由群，G 为 n 个元 $b_1, \cdots, b_n$ 生成的群，则存在 F 到 G 上的同态 φ，使 $\varphi(a_i)=b_i\ (i=1,\cdots,n)$. 设 φ 的核为 N，又设字 $w(a_1, \cdots, a_n)$ 的类属于 N，则 $w(b_1,\cdots,b_n)=1$，称它为 G 的生成元 $b_1,\cdots,b_n$ 之间的**关系** (relation). 设 N 是 F 中的含有字 $w_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,w_m(a_1,\cdots,a_n)$ 的类的最小正规子群，则称关系 $w_1(b_1,\cdots,b_n)=1,\cdots,w_m(b_1,\cdots,b_n)=1$ 为 G 的**定义关系** (defining relation) 或**基本关系** (fundamental relation). 反之，给定生成元 $a_1, \cdots, a_n$，并给定任意的字 $w_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,w_m(a_1,\cdots,a_n)$，则存在群 G，它以 $a_1,\cdots,a_n$ 为生成元，且以 $w_1(a_1,\cdots,a_n)=1,\cdots,w_m(a_1,\cdots a_n)=1$ 为定义关系. 这个群 G 就是在由 $a_1,\cdots,a_n$ 所生成的自由群 F 中，以含有 $w_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,w_m(a_1,\cdots,a_n)$ 的类的最小正规子群 N 所作的商群 F/N. 自由群就是没有定义关系的群. n, m 为无限的情形也可以同样地处理. 当 n, m 为有限时，就称 G 为**有限表出的** (finitely presented).

【字的问题】 设群 G 是有限表出群，给定某个字类，经过有限多次步骤判定它在 G 中是否等于单位元的问题，称为**字的问题** (word problem). 字的问题一般不可解 (П. С. Новиков, 1955). 例如，已经知道存在 $n=2, m=32$ 的有限表出群，对于它字的问题不可解 (W. Boone). 另一方面，В. А. Тартаковский 证明了对于相当大的一类群，这个问题是可解的. 当 $m=1$ 时，W. Magnus (1931) 证明了问题是可解的. 字的问题真正应该表述为判定问题，而且对于群的字的问题与对于半群的字的问题是密切相关的 (A. M. Turing, 1937; E. L. Post, 1947; A. A. Марков 1947)，在其它的代数系中也能研究类似的问题(→判定问题). 另外，在 G 中，通过有限次步骤判定两个字类在何种情形之下可以经过一个内自同构互相推出的问题，叫做**变换问题** (transformation problem).

设 F 是秩为 n 的自由群，$F = F_1 \supset \cdots \supset F_r \supset F_{r+1} \supset \cdots$ 是 F 的降中心列，则 F_r/F_{r+1} 是秩[†]为 $\mu_n(r) = (1/r)\sum_{d|r}\mu(r/d)n^d$（这里 μ 表示 Möbius 函数[†]）的自由 Abel 群[†]（E. Witt）. F 中所有指数为有限的子群之交是单位群.

【Burnside 问题】 原来的 Burnside 问题是指有限个元生成的周期群[†] 是否为有限群的问题，在这个意义下，E. C. Голод（1964）证明了存在着满足上述要求的无限的 p 群[†]，故答案是否定的. 然而，通常所谓 **Burnside 问题**（Burnside problem）是问：设 G 是由有限个元生成的，G 的每个元都具有能除尽自然数 r 的有限的阶，G 是否为有限群？设 F 是秩为 n 的自由群，N 是由一切 $x^r(x \in F)$ 生成的 F 的正规子群，并且命 $B(r, n) = F/N$，则上面的问题就变成了 $B(r, n)$ 是否为有限群的问题. 当 $r = 2, 3, 4, 6$ 时，$B(r, n)$ 是有限群（И. Н. Санов, M. Hall）. 还有所谓**狭义 Burnside 问题**（restricted Burnside problem）：$B(r, n)$ 的有限商群的阶是否有上界？当 r 是素数时，这个问题已得到肯定的解决（A. И. Кострикин, 1959）.

由两个元 x, y 生成的并且适合关系式 $x^u = y^v = (xy)^w = 1$（u, v, w 皆为自然数）的群在 $1/u + 1/v + 1/w - 1 \leqslant 0$ 的条件下是无限群，而在 $0 < 1/u + 1/v + 1/w - 1 = 2/g$ 的条件下是阶数为 g 的有限群.

再者，存在有限表出群，它与其真商群同构（B. H. Neumann）.

【参】［1］A. Г. Курош, Теоруя групп, Гостехиздат, 1953（中译本：A. Г. 库洛什，群论，上册，人民教育出版社，1964）；［2］M. Hall, The theory of groups, Macmillan, 1959；［3］H. S. M. Coxeter-W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Erg. d. Math., Springer, 1957；［4］A. И. Кострикин, О проблеме Берисайда, Изв. Акад. Наук СССР, **23** (1959), 1—34；［5］E. C. Голод, О Нильалгебрах и финитноапироксимируемых p-группах, Изв. Акад. Наук СССР **28**, (1964), 273—276；［6］W. W. Boone, The word problem, Ann. of Math., **70** (1959), 207—265；［7］П. С. Новиков, Об алгорифмической неразрешимости проблемы тожества слов в теории групп, Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, **44** (1955), 1—143；［8］弥永昌吉，自由群論，岩波，1942；［9］W. Magnus-A. Karrass-D. Solitar, Combinatorial group theory, Interscience, 1966. 其它一群的［参］.

有限群［英 finite group　法 groupe fini　德 endliche Gruppe　俄 конечная группа　日 有限群］【阶数为 n 的有限群的个数】 阶数[†]有限的群称为**有限群**（一群）. 取定自然数 n 时，阶数为 n 的群（同构的群不加区别）究竟有多少个？这是有限群论中历史悠久的一个问题，然而，除了对于 n 的某些特殊的值以外，要求出一般的答案几乎是不可能的. 当 n 是素数 p 时，阶数为 p 的群仅有一个，而且是循环群[†]. 当 n 是素数 p 的平方时，阶数为 p^2 的群是 Abel 群[†]，且只有两个不同的群. 当 n 是两个素数 p, $q(p > q)$ 的乘积且 $p \not\equiv 1 \pmod q$ 时，阶数为 pq 的群仅有一个，而且为循环群；但当 $p \equiv 1 \pmod q$ 时，阶数为 pq 的群则有两个，一个是循环群，另一个为非 Abel 群. 对于比较小的 n，阶数为 n 的群的个数 $f(n)$ 如下所示：

n:	8	12	16	18	20	24	27	28	30	32	60
$f(n)$:	5	5	14	5	5	15	5	4	4	51	13

当 n 是素数 p 的幂，即 $n = p^m$ 时，阶数为 n 的群的个数是 p 与 m 的函数，其实际的值，仅当 $m \leqslant 6$ 时为已知. 例如当 $m = 3$ 时，有 5 个不同的群；而当 $m = 4$ 时，若 $p = 2$ 则有 14 个不同的群，而若 $p > 2$ 则有 15 个不同的群. 当 $m = 5$ 时，可参看 O. Schreier 在 Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **4**（1926）上发表的文章. 当 m 相当大时，阶数 p^m 的群的个数为 p^l，其中 $l = Am^3$, $A \to 2/27\ (m \to \infty)$（G. Higman, Proc. London Math. Soc., **10**（1960）；C. C. Sims, Symposium on group theory at Harvard, 1963）.

【关于有限群的一些基本定理】 下面的几个基本定理对于研究有限群特别有用.

I）有限群 G 的子群的阶数是 G 的阶数的因数（J. L. Lagrange）. 但它的逆定理不一定成立. 如果有限群 G 含有以 G 的阶数的任何因数为阶数的子群，则 G 必为可解群[†]. 特别是，如果对于 G 的阶数的任何因数，G 都含有唯一的以此因数为阶数的子群，那末，G 就一定是循环

群.

II) **Sylow 定理**. 设G的阶数为 $p^n m$，m 与p互素，则G必含有阶数为 p^n 的子群，这样的子群称为G的 **p-Sylow 子群**（p-Sylow subgroup）. G的两个 p-Sylow 子群一定是互为共轭的. G中 p-Sylow 子群的个数模p同余于1. G中阶数为p的幂的子群至少包含在某一个 p-Sylow 子群之中.

阶数为某个素数的幂，例如p的幂的群称为 **p 群**（p-group）.

III) p 群是幂零群†. 于是，至少含有两个元的p群，其中心†必含有单位元以外的元. 关于p群，P. Hall 曾经作过出色的工作（Proc. London Math. Soc., (2) **36** (1933)).

如果群G的阶数为8，具有两个生成元 σ，τ，它们满足关系式 $\sigma^4=1$，$\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}$，$\sigma^2=\tau^2$，则称$G$为**四元群**（quaternion group）. 它同构于四元数体中由$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$组成的乘法群. **广义四元群**（generalized quaternion group）是 2^n 阶的群，具有两个生成元 σ，τ，满足关系式 $\sigma^{2^{n-1}}=1$，$\tau\sigma\tau^{-1}=\sigma^{-1}$，$\tau^2=\sigma^{2^{n-2}}$. 如果一个非 Abel 群的所有子群都是正规子群，则称它为 **Hamilton 群**（Hamilton group）. Hamilton 群是一个四元群、一个奇数阶 Abel 群和一个指数为2（即对于每个元ρ有$\rho^2=1$)的 Abel 群的直积.

对于任意有限群，其合成商群列†中的单群的集合是唯一确定的. 因之，从事有限群的研究时，研究单群以及研究具有给定合成商群列的群的性质，这两件事是基本的. 单群的研究很早就开始了，但是，获得出色的成果还是最近的事(→[有限单群]). 对于上述第二个问题的研究，是由 H. Wielandt 等开始的，他们是把 Sylow 定理试行向各个方面进行推广而取得结果的. 对于有限可解群来说，第一个问题是非常简单的，因而只剩下第二个问题需要研究，但直到现在还没有得到令人满意的结果. 任意有限可解群均含有与它本身的正规化子† 相同的幂零子群H(即 $N_G(H)=H$)，这样的两个幂零子群是共轭的（这与 Lie 代数中 Cartan 子代数的定理是类似的，R. W. Carter, Math. Z., **75** (1960)).

【Hall 子群】 阶数与指数† 互素的子群称为 **Hall 子群**（Hall subgroup）. 设 m，n 是两个互素的自然数，则阶数为 mn 的有限可解群含有阶数为m的子群，而任两个阶数为m的子群又是共轭的. 设l是m的因数，则阶数为l的子群至少包含在某个阶数为m的子群内（P. Hall). 这条定理的第一部分的逆命题也成立：如果对一个有限群的阶数的任何形如 mn ($(m,n)=1$) 的分解，这个群必包含一个m阶子群，则所给有限群是可解的，也就是说，设G为阶数g的有限群，如果对于任何形如 $g=p^m m$ (p 与m互素)的分解，G都含有阶数为m的子群，则G是可解群（P. Hall 可解性准则). 最后这个可解性判定条件，蕴涵“阶数为两个素数幂的乘积 $p^a q^b$ 的有限群是可解群”这条有名的 **Burnside 定理**. 在何种情况下才存在 Hall 子群，尚无一般的定理来判定. 如果G含有正规 Hall 子群 N，那么G含有 Hall 子群 H，它满足条件 $NH=G$，$N\cap H=1$，所有这样的 Hall 子群都是互相共轭的（Schur-Zassenhaus 定理).

关于可解群的上述 Hall 定理是 Sylow 定理的推广，但是，对于非可解群，这样的推广是不成立的. 然而，若有限群G（可解与否都无关)含有阶数为n的幂零 Hall 子群H，则阶数为n的因数的任意子群必与H的某个子群共轭（Wielandt, Math. Z., **60** (1954)，以及 P. Hall, Proc. London Math. Soc., (3) **4** (1954)). Wielandt 等人也曾尝试对于极大π子群（它可以不是 Hall 子群)(→[π可解群])推广这些结果.

【有限幂零群】 有限群G为幂零群的充分必要条件是G等于它的 p-Sylow 子群的直积. 幂零群的任一极大子群都是正规子群. 反之，若有限群的每个极大子群都是正规子群，则这个有限群必是幂零群.

【有限可解群】 有限群为可解群的充分必要条件是：它的每个合成列的商群都是素数阶

的循环群.奇数阶的有限群必为可解群.(**Feit-Thompson 定理**, Pacific J. Math., **13** (1963). 这是有限群论中的最深刻的结果之一,它是长期未得解决的 **Burnside 猜想** (Burnside conjecture) 的肯定回答.)可解群的极大子群的指数为素数幂 (E. Galois). 但是其逆命题不一定成立.

阶数为 168 的唯一的单群具有下述的性质:它的所有极大子群的指数为素数幂. 有限可解群包含自正规化的幂零子群 (也就是一个幂零子群 H, 它满足 $N_G(H)=H$), 而且任意两个这样的子群都是共轭的 (R. W. Carter, Math. Z., **75** (1960); 关于它的推广, 参看 W. Gaschütz, Math. Z., **80** (1963)). 这样的子群称为 **Carter 子群** (Carter subgroup), 它类似于 Lie 代数的 Cartan 子代数. 然而,与 Cartan 子代数不同, 很多单群不包含自正规化的幂零子群.

如果一个有限群的主合成列[†] 的商群列由循环群所组成, 则称它为**超可解的** (supersolvable). 有限群为超可解群的充分必要条件是:它的所有极大子群的指数均为素数 (B. Huppert, Math. Z. **60** (1954)). 如果 p 是超可解群的阶数的最大素因数, 那么其 p-Sylow 子群是正规子群.

【π 可解群】 用 π 表示某些素数所组成的集合,用 π' 表示不属于 π 的所有素数所组成的集合. 若 G 的阶数的所有素因数均含在 π 中, 则称 G 为 π 群, 而当 G 的任何合成列的商群皆为 π' 群或可解 π 群时, 就称 G 为 **π 可解的** (π-solvable). π 仅由一个素数 p 组成的情形是重要的,这时,就简称 π 可解群为 p 可解群. 若 $P_0=1\subset N_0\subsetneqq P_1\subsetneqq N_1\subsetneqq\cdots\subsetneqq P_l\subset N_l=G$, 且 P_i/N_{i-1} $(i=1,\cdots)$是 G/N_{i-1} 的极大正规 π 群, $N_i/P_i(i=0,\cdots)$ 是 G/P_i 的极大正规 π' 群,则具有这样性质的群列称为 **π 列**(π-series). 称 l 为群 G 的 **π 长** (π-length). 可解群对于由素数所成的任何集合 π 均为 π 可解群. π 可解群含有 π Hall 子群,对于它,推广的 Sylow 定理成立. 关于 p 可解群的 p 长与 p-Sylow 子群的不变量之间的关系, Hall 与 Higman 曾进行过研究 (Proc. London Math. Soc., **7** (1956)), 例如,如果 p-Sylow 子群是 Abel 群, 那么 p 长为 1.

【置换群】 n 个事物的所有置换所构成的群称为 n 次**对称群** (symmetric group). n 次对称群一般用 S_n 或 $\mathfrak{S}_n$ 表示. 其子群通常叫做**次数** (degree) n 的置换群. 通常用 $1,2,\cdots,n$ 表示 n 个事物,于是, n 次对称群的元 σ 可表为

$$\sigma=\begin{pmatrix}1,2,\cdots,n\\1',2',\cdots,n'\end{pmatrix},$$

例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&3&1&5&4&6\end{pmatrix},$$

此处 i' 是 i 在 σ 下的象,即 $i'=\sigma(i)$. σ 也可以写成 $(\cdots)(abc\cdots z)(\cdots)$, 它意味着 σ 循环地把 a 变成 b, 把 b 变成 c, $\cdots$, 把 z 变成 a. 例如,在上述的例中, $\sigma=(123)(45)(6)$. 这里(6)表示不动的文字,习惯上通常省略. 上面的 $(abc\cdots z)$ 表示这些文字 (设它们共有 l 个)作循环推移, 而其它文字都不动, 称它为长 l 的**循环** (cycle). 任一置换均可表示成若干不含共同文字的循环的乘积, 而且如果不计写成循环的积的次序, 则这样的表示方法还是唯一的. 长为 2 的循环也称作**对换** (transposition). 任意置换又都可表成对换的积, 但表成对换之积的方法不是唯一的, 然而其中对换的个数为奇数或为偶数则是不变的. 能表成偶数个对换之积的置换,称为**偶置换** (even permutation),否则称为**奇置换** (odd permutation). 对称群中奇置换与偶置换的个数是相同的,其中,所有偶置换形成指数为 2 的正规子群($n\geqslant 2$),称它为 n 次**交代群** (alternating group). 任一偶置换均可表为长为 3 的循环的乘积. n 次交代群用符号 A_n 或 $\mathfrak{A}_n$ 等来表示.

阶数为 n 的有限群必与 n 次对称群的某一子群同构. $n\neq 4$ 时, n 次交代群是单群, 而且, n 次对称群中只含有一个真正规子群. $n=4$ 时, 4 次交代群含有阶数为 4 的正规子群 ((2, 2) 型的 Abel 群), 故不是单群. 一般地,

把 (2, 2) 型的 Abel 群称作 **Klein 四元群**(德 Kleinsche Vierergruppe). $n \geqslant 5$ 时, n 次对称群不是可解群,这是著名的 Abel 定理,即当 $n \geqslant 5$ 时一般 n 次代数方程不能用根式求解的群论根据. 当 $n = 2, 3, 4$ 时, n 次对称群是可解群,它们的合成列的合成商群列分别为 2; 2, 3; 2, 3,2,2. 4 次交代群,5 次交代群以及 4 次对称群分别为阶数 12, 60, 24 的群,而且分别与三维空间中正四面体、正二十面体、正八面体的所有由自身到自身的运动所成的群一致. 由于这个缘故, 把它们称作**正 k 面体群**或 **k 面体群**($k = 4$ 时,称作**(正)四面体群** (tetrahedral group), $k = 20$ 时,称作**(正)二十面体群**(icosahedral group), $k=8$ 时,称作**(正)八面体群**(octahedral group)). 这些群自古以来就很有名, 而且也有几何上的兴趣. 另外, 正 n 边形的所有由自身到自身的运动所成的群称作 **(正) 二面体群** (dihedral group), 其阶数为 $2n$, 且具有指数为 2(从而阶数为 n) 的循环正规子群,它们总称为**正多面体群** (regular polyhedral group). 五次交代群是 Galois 已经知道的阶数最小的非可解群, 因而特别有名. 三维空间的运动群的有限子群或者是循环群, 或者是正多面体群之一. 正二面体群由阶数为 2 的两个元所生成;反之,由阶数为 2 的两个元生成的有限群是正二面体群. 这个简单的事实在偶数阶有限群论中有很多推论. 若 $n \neq 6$, 则 n 次对称群的自同构必为内自同构;若 $n = 6$, 则存在阶数为 2 的外自同构,且 S_6 的自同构群的阶数等于 S_6 的阶数的二倍. n 次对称群的真子群的指数,除交代群外,至少为 n. 指数 n 的子群与 $n-1$ 次对称群同构; 若 $n \neq 6$, 则这些子群是互相共轭的,而在 $n = 6$ 时,它们可分为两个共轭类,并且可由某个阶数为 2 的外自同构将一个共轭类变到另一个共轭类. 关于交代群→[有限单群].

【可迁群】 设 G 是给定的集合 Ω 上的一个置换群,如果对于 Ω 中的任意两个元 a, b, 均存在 G 的元,它使 a 变到 b, 则称 G 是**可迁(置换)群** (transitive permutation group), 否则 G 称为**非可迁(置换)群** (intransitive permutation group).

设 G 是集合 Ω 上的一个可迁置换群, a 是 Ω 的一个元. G 中使 a 不变的所有元形成 G 的一个子群,称为 a (在 G 内) 的**稳定化子** (stabilizer). 稳定化子的指数等于 Ω 的元的个数, 即 G 的次数. 这样, 可迁置换群 G 的次数整除 G 的阶数 (这是一条基本定理).

轨道的概念是重要的. 设 G 是集合 Ω 上的一个置换群, Ω 的子集 Γ 称为 G 的一个**轨道** (orbit), 如果它是 G 不变的且 G 可迁地作用于 Γ. 也即, Ω 的子集 Γ 是 G 的一个轨道, 如果下面两个条件满足: (i) 若 $a \in \Gamma$, $g \in G$, 则象 $g(a)$ 也位于 Γ 内; (ii) 若 a 和 b 是 Γ 的两个元,则存在 G 的元 x, 使得 $b = x(a)$. 这样, G 的每个元 x 诱导出 Γ 上的一个置换 $\varphi_\Gamma(x)$. 所有这些置换 $\varphi_\Gamma(x)$ $(x \in G)$ 所成的集合形成 Γ 上的一个置换群, 可把它记为 $\varphi_\Gamma(G)$. 于是 $\varphi_\Gamma(G)$ 在 Γ 上是可迁的,且 φ_Γ 是 G 到 $\varphi_\Gamma(G)$ 上的一个同态. 因而一个轨道中的元的个数是 G 的阶数的一个因子. 显见 G 作用于其上的集合 Ω 是 G 的互不相交的轨道 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_r$ 的并. 这蕴涵着 G 的次数是轨道 Γ_i 中元的个数之和. 由此得到的方程常常包含不平凡的关系. 如果把上面定义的同态 φ_{Γ_i} 记为 φ_i, 则 G 同构于群 $\varphi_i(G)$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ 的直积的一个子群.

一个可迁置换群称为**正则的** (regular), 如果任一文字的稳定化子都是单位元子群 $\{1\}$. 可迁置换群是正则的当且仅当它的阶数等于它的次数. 任何群均能用正则置换群来实现 (**Cayley 定理** (Cayley's theorem)). 如果一个可迁置换群是 Abel 群,则它必是正则的. 如果集合 Ω 上的置换群 G 中恒存在这样的元, 使得对于 Ω 中任意两个由 k 个相异元所成的组 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_k$, 它能将 a_i 变到 b_i, $i = 1, 2, \cdots, k$, 则称 G 是 **k 重可迁群** (k-ply transitive group), 在 $k \geqslant 2$ 时,总称为**多重可迁群** (multiply transitive group).

次数 n 的对称群是 n 重可迁的, 交代群是 $n-2$ 重可迁的 $(n \geqslant 3)$, 反之, $n-2$ 重可迁的 n 次置换群仅限于 n 次交代群或对称群. 找出所有多重可迁群的问题尚未解决. $k \geqslant 6$ 时,

还不知道是否有除交代群及对称群以外的 k 重可迁群的例子．如果关于有限单群的 Schreier 猜想(→[有限单群])是正确的话，那末，除了交代群和对称群以外，不存在 7 重可迁群 (Wielandt, Math. Z., **74** (1960); H. Nagao (永尾汎), Nagoya J. Math., **27** (1964))．除了交代群与对称群以外，5 重可迁群也仅知道两个．它们是次数为 12 和 24 的群 (E. L. Mathieu, 1864, 1871)，通常记作 M_{12}、M_{24}．M_{12}，M_{24} 中所有使一个文字固定的元分别构成 11 次，23 次的 4 重可迁群，分别记作 M_{11}，M_{23}．除开交代群与对称群以外的 4 重可迁群，至目前为止，仅知道 M_{11}，M_{12}，M_{23}，M_{24} 这四个，此外是否还有，尚不知道．M_{23} 中使一个文字固定的所有元所构成的子群，是 22 次 3 重可迁群，记作 M_{22}．M_{11}，M_{12}，M_{22}，M_{23}，M_{24} 这些群统称为 **Mathieu 群** (Mathieu group)，它们都是单群 (E. Witt, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **12** (1938))． 现在，这些群不论是作为 k 重可迁群，还是作为单群，它们都具有非常特殊的性质．在 k 重可迁群中，使 k 个不同的文字固定的元所成的子群的指数为 $n(n-1)\cdots(n-k+1)$，此处 n 是次数．当 $k\geqslant 4$ 时，假定使 k 个不同的文字固定的元仅有单位元，那末，这样的群仅限于对称群，交代群或者 M_{11}，M_{12} 之一 (C. Jordan)． 关于 $k=2, 3$ 的情形，可参看 H. Zassenhaus, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **12** (1936)．

一个多重可迁群 G，除了 G 的次数 n 是一个素数的幂且 G 包含阶数为 n 的**初等 Abel 群** (elementary Abelian group; 即 $(p, p, \cdots, p)$ 型 Abel 群)作为其正则正规子群的情形外，总包含非交换的单群 S 作为其正规子群，且 G 同构于 S 的自同构群 Aut S 的一个子群(W. Burnside)．此外，在上述的例外情形中，如果 n 是奇数，则 G 至多是二重可迁的；如果 n 是大于 4 的偶数，则 G 至多是三重可迁的．次数为 4 的对称群 S_4 是仅有的包含一个真可解正规子群的四重可迁群．

设 G 是集合 Ω 上的一个可迁群，Δ 是 Ω 的一个子集，如果对于所有的 $x\in G$，恒有 $\Delta\cap x(\Delta)=\Delta$ 或空集，则称 Δ 为一个块．具有以 Ω 的至少含有两个元的真子集作为块的群称为**非本原的** (imprimitive)，否则称为**本原的** (primitive)． 多重可迁群是本原的．本原群的 $\neq\{1\}$ 的正规子群是可迁的．可迁群是本原的充分必要条件为：凡使一个文字固定的所有元组成的子群是极大子群．

素数次的置换群与素数次的代数方程的解法有关，很早以来这就是令人感兴趣的一个问题，故有各种各样的研究．设 p 为一素数．p 次的可迁群，如果不是多重可迁群，则为可解群，它有一个正规子群为 p 阶循环群，并且，被此正规子群模所得的商群与阶数为 $p-1$ 的因数的某个循环群是同构的(Burnside)．注意到 M_{11}，M_{23} 的例外性，关于次数为素数 p (此处 $p-1=2q$ 而 q 为素数)的多重可迁群，除交代群，对称群以外是否还有的问题，是很早就开始研究的问题．随着计算机的发展，可以研究相当大的这样的素数，现在已经知道对于这些素数 p，$23<p\leqslant 4079$，不存在多重可迁群(参看 P. J. Nikolai-E. T. Parker, Math. Tables Aids Compt., **12** (1958)，以及伊藤昇，Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963))．

在 S_p 内取两个长为 p 的循环，分别用 P，Q 表示，若 Q 不是 P 的幂，则 P 与 Q 生成的群为次数 p 的多重可迁群，而且是单群．用这样的方法得出的单群虽然具有简单的定义，但对其结构几乎毫无所知．

在可迁群 G 中，如果使两个不同文字固定的元只能是单位元，则称 G 为 **Frobenius 群** (Frobenius group)．次数 n 的 Frobenius 群正好含有 $n-1$ 个使得任何文字都变动的元．这些元与单位元合在一起，形成 G 的一个正规子群 (Frobenius 定理)．这个正规子群是幂零群 (J. G. Thompson, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **45** (1959); [20], ch. 3)．

【有限单群】 到目前为止已知的单群可大致分为下面四类：1) 素数阶的循环群，2) 次数 $\geqslant 5$ 的交代群，3) Lie 型单群，4) 其他单

群.

第 1)类由阶数为素数 p 的循环群所组成，p 是任意的素数，而且 Abel 单群是属于第 1)类的. 属于第 2) 类的当然是 n 次($n \geq 5$)交代群 A_n. 第 4) 类则由五个 Mathieu 群 M_{24}, M_{23}, M_{22}, M_{12}, M_{11} 以及零星的单群所组成,而所有零星的单群都是近来发现的. 属于第 3) 类的某些单群具有二重可迁的表现.

属于第 3) 类的 Lie 型单群不好给出明确的定义. 复单 Lie 群可以完全分类(⇀Lie 群). 对于各个类型，在任意域上也可给出其"类似型"的定义(C. Chevalley, Tôhoku Math. J., (2) 7 (1955)). X 型的复单 Lie 群与复单 Lie 代数'对应,故可对其 Lie 代数作出在任意域上的类似型,对于各种 Lie 代数,类似于复数域上的指数映射',可以用典范的方式定义出它的自同构群的某个子群. 这个子群是定义在取作基础的域 F 上的 X 型代数群，而且它关于其中心的商群除了若干例外情形外都含有小指数的单正规子群，称它为 F 上的 X 型单群. 与复数域的情形一样, X 型单群与 Дынкин 图形' D 一一对应(⇀Lie 代数).当 X 型的图形具有自同构群 Δ 时(例如对于 A_n 型的情形,按照正中点的对称变换),若 Δ 与域 K 的自同构群的某个子群同构，则域 K 上定义的 X 型的代数群具有与 Δ 同构的自同构群 (的子群), 它的在各个自同构下不变的所有元构成定义于 K 的子域 F 上的代数群，这里的 F 是 K 的在 Δ 下不变的所有元作成的子域. 这个代数群关于其中心的商群含有指数极小的单群作为其正规子群(但有一个例外,即二元域上的 A_2 所产生的群). 由 Дынкин 图形的分类可知：具有阶数 >1 的自同构群 Δ 的图仅有 A_n, E_6 (左右对称), D_n, 而在 $n \geq 5$ 时 D_n 具有阶数为 2 的自同构群 Δ, 但 D_4 具有与三次对称群同构的自同构群. 由于有限域 K 的自同构群为循环群，所以 Δ 的阶数只可能是 2 和 3, 而令其阶数为 i 时,则上面所得的单群可用 ${}^iX$ 型来表示. Дынкин 图形是由带有权的点和线段所组成,如果不考虑权，则 B_2, G_2, F_4 是左右对称的.如果对基域 F 加上适当的条件,这个对称就可由群的自同构 π 诱导出来，关于 π 不变的所有元所构成的群,除了两三个例外,均为单群. π 存在的条件是: F 的特征为 p 时, F 具有使得 $(x^\sigma)^\sigma = x^p$ 的自同构 σ. 对应于 B_2, G_2, F_4 型的 $p = 2, 3, 2$. 这个群叫做 X' 型.

如果3)所属的 Lie 型单群的意义仅限于对应于 Дынкин 图形的群以及在对应于图形自同构的群自同构下不变的元的全体所成的群，那末 Lie 型单群只限于下面所列举出的. 先举出 Дынкин 图形的型，然后是普通的命名，Artin 符号,以及它的定义(其困难者引用原论文).设单群的阶数为 g, q 为素数 p 的幂. 对于 X' 型的 q 的值,在定义群时除特别标出的以外,一般 q 都表示任意素数的幂. 令 $GL(n, q)$ 表示有限域 $\boldsymbol{F}_q = GF(q)$ 上 n 维线性空间的所有正则线性变换所构成的群,而符号 $SL(n, q)$, $PGL(n, q)$, $PSL(n, q)$ 等等均表示习惯上常用的群(⇀典型群).

$A_n(n \geq 1)$. **一般线性(单)群**. $L_{n+1}(q) = PSL(n+1, q)$, $g = q^{n(n+1)/2}\prod_{i=2}^{n+1}(q^i - 1)/d$, $d = (n+1, q-1) = (SL(n+1, q)$ 的中心的阶数), 而记号 (a, b) 表示 a, b 的最大公因数.

${}^2A_n(n > 1)$. **酉(单)群**. $U_{n+1}(q) = PSU(n+1, q^2)$, 但 $GL(n+1, q^2)$ 的元中使非退化 Hermite 型 f 不变的全体记为 $U(n+1, q^2)$, 它与 f 的取法无关,也就是说所得的群均同构. $g = q^{n(n+1)/2}\prod_{i=2}^{n+1}(q^i - (-1)^i)/d$, 但 $d = (n+1, q+1) = (SU(n+1, q^2)$的中心的阶数).

$B_n(n > 1)$. (奇数维的) **正交 (单) 群**. $O_{2n+1}(q) = O(2n+1, q)$ $(q = 2^m)$; $= (SO(2n+1, q)$ 的换位子群$)(q \neq 2^m)$. 在后一种情形关于 $SO(2n+1, q)$ 的指数为 2. $g = q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i} - 1)/d$, $d = (2, q-1)$. 这里, $O(2n+1, q)$ 是 $GL(2n+1, q)$ 的元中使非退化二次型 f 不变的全体所作成的群，与 f 的取法

无关而均为同构.

B_2'. **鈴木群** (Suzuki's group). 鈴木通夫, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **46** (1960). $q = 2^{2m+1}$, $g = q^2(q^2+1)(q-1)$, 通常把它记为 $S_z(q)$.

$C_n(n>2)$. **辛(单)群.** $S_{2n}(q) = (A(2n, q)) = PSp(n, q)$. 这里设 $Sp(n, q)$为 $GL(2n, q)$ 的元中使非退化斜对称二次型 f 不变的全体. $g = q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}(q^{2i}-1)/d$, $d=(2, q-1)$ 是 $Sp(n, q)$ 的中心的阶数.

$D_n(n>3)$. (偶数维的) **第一正交(单)群.** $O_{2n}(+1, q) = \Omega/Z$, Ω是$SO(2n, q)$的换位子群, Z 是 Ω的中心. 但 $O(2n, q)$是 $GL(2n, q)$的元中使指数† n 的二次型 f 不变的元的全体. $g = q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d$, $d=(4, q^n-1)$.

${}^2D_n(n>3)$. (偶数维的) **第二正交(单)群.** $O_{2n}(-1, q) = \Omega/Z$, Ω 与 Z 的意义与上款 D_n 中的情形相同, 但 $O(2n, q)$ 是 $GL(2n, q)$ 的元中使指数 $n-1$ 的二次型 f 不变的元的全体. $g = q^{n(n-1)}(q^n+1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)/d$, $d=(4, q^n+1)$.

在上面的两种情形下都有 $[SO(2n, q):\Omega] = 2$, 若 q 为 2 的幂, 则 $Z=\{1\}$, 而在其它情形, Z 的阶数就等于 2, 且 $gd = (SO(2n, q)$ 的阶数).

${}^3D_4$. 第一正交单群 D_4 的第二斜型. D. Hertzig, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961); R. Steinberg, Pacific J. Math., **9** (1959); J. Tits, Publ. Math. Inst. HES, (1959). $g = q^{12}(q^8+q^4+1)(q^6-1)(q^2-1)$.

在 L. E. Dickson 的著作([5])中, 将 $L_n(q)$ 写成$LF(n, q)$, 称为**线性分式群**(linear fractional group), 将 $U_n(q)$ 写成 $HO(n, q^2)$, 称为**超正交群**(hyperorthogonal group), 将 $S_{2n}(q)$ 写成$A(2n, q)$, 称为**交换线性群** (Abelian linear group), 又将 $O_{2n+1}(q)$ 写为 $FO(2n+1, q)$, $O_{2n}(+1, 2^m)$ 写为 $FH(2n, 2^m)$, $O_{2n}(-1, 2^m)$ 写为 $SH(2n, 2^m)$, 在 $q \neq 2^m$ 时, 依照二次型 f 的判别式† D 为 F_q 的平方元或非平方元的情况, 将 $O_{2n}(\pm 1, q)$ 分别写为 $FO(2n, q)$ 或 $SO(2n, q)$ ([5]). $q\neq 2^m$ 时, $O_{2n}(\varepsilon, q)$ $(\varepsilon = \pm 1)$的符号在$(-1)^nD$ 为 F_q 的平方元时为$+1$, 非平方元时为 -1.

对于下面一些例外型的群, 就只列举出发现者的名字, 原论文, 阶数 g 和指数 d.

G_2. Dickson, Trans. Amer. Math. Soc., **2** (1901); Math. Ann., **60** (1905). $g = q^6(q^6-1)(q^2-1)$, $d=1$.

$G_2'(q=3^{2m+1})$. R. Ree, Amer. J. Math., **83** (1961). $g = q^3(q^3+1)(q-1)$, $d=1$.

F_4. Chevalley, Tôhoku Math. J., (2) **7** (1955). $g = q^{24}(q^{12}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$, $d=1$.

$F_4'(q=2^{2m+1})$. R. Ree, Amer. J. Math., **83** (1961). $g = q^{12}(q^6+1)(q^4-1)(q^3+1)(q-1)$, $d=1$.

E_6. Chevalley, Tôhoku Math. J., (2) **7** (1955). $g = q^{36}(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1)$, $d=(3, q-1)$.

${}^2E_6$. Hertzig, Amer. J. Math., **83** (1961); Steinberg, Pacific J. Math., **9** (1959); Tits, Séminaire Bourbaki, 1958. $g = q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$, $d=(3, q+1)$.

E_7. Chevalley, Tôhoku Math. J., (2) **7** (1955). $g = q^{63}(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^{10}-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^2-1)$, $d=(2, q-1)$.

E_8. Chevalley, Tôhoku Math. J., (2) **7** (1955). $g = q^{120}(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)(q^8-1)(q^2-1)$, $d=1$.

G_2', F_4' 称为 **Ree 群** (Ree's group), 例外型的群 G_2, F_4 还有 Artin 的表示法 $E_2(q)$, $E_4(q)$ 等等.

例外的情形. $L_2(2)$, $L_2(3)$, $U_3(2)$, $S_z(2)$ 分别为阶数等于6, 12, 72, 20 的可解群.

$O_5(2)$, $E_2(2)$, $G_2'(3)$, $F_4'(2)$ 分别含有指数为 2, 2, 3, 2 的正规子群，且除了最后一个外，都分别与 $A_6 \cong L_2(9)$, $U_3(3)$, $L_2(8)$ 同构，而 $F_4'(2)$ 中指数为 2 的正规子群是单群，具有极例外的性质(Tits, Ann. of Math., **80** (1964)).

Mathieu 群的阶数从小到大顺次为 $7920 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$; $95040 = 12 \times 7920$; $443520 = 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 48$; $10200960 = 23 \times 443520$; $244823040 = 24 \times 10200960$.

除以上单群外，还发现有 **Janko 群**(Janko's group) (J. Z. Janko, J. Algebra, **3** (1966)). 这是属于 4) 类的群，其阶数为 $175560 = 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19$.

属于 2), 3) 类的单群除了下述的一些例外场合都是不同的. 当 q 为 2 的幂时，$O_{2n+1}(q) \cong S_{2n}(q)$; $L_2(3) \cong A_4$; $L_2(4) \cong L_2(5) \cong A_5$; $L_2(7) \cong L_3(2)$; $L_2(9) \cong A_6$; $L_4(2) \cong A_8$; $U_4(2) \cong O_5(3)$. 当 q 是奇数时，$O_{2n+1}(q)$ 与 $S_{2n}(q)$ 的阶数相同，但不同构. 又 $L_3(4)$ 与 $L_4(2) \cong A_8$ 的阶数也相同但不同构. 只是阶数一致的也仅限于上面所列举的情形(E. Artin, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955)).

下面的群是 1967 年 8 月以后发现的，每一个群用一个符号 $(x)_i$ 表示，足码 i 表示在 $19x$ 年发现的第 i 个群，例如 Janko 群记为 $(64)_1$. 表中依次记载群的名字或发现者的名字、群的阶数以及简短的叙述.

$(67)_1$: M. Hall, $g = 604{,}800 = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, 次数为 100 的 $U_3(3)$ 的一个可迁扩张.

$(67)_2$: D. G. Higman 与 Sims, $g = 44{,}352{,}000 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$, 次数为 100 的 M_{22} 的一个可迁扩张. 它是具有 100 个顶点的某个图的自同构群的指数为 2 的正规子群.

$(67)_3$: 鈴木, $g = 448{,}354{,}497{,}600 = 2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, 由一个 1782 个顶点的图的自同构群确定的 $G_2(4)$ 的一个可迁扩张.

$(67)_4$: J. McLaughlin, $g = 898{,}128{,}000 = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$, 由一个 275 个顶点的图所确定的 $U_4(3)$ 的一个可迁扩张.

$(68)_1$: G. Higman 与 J. McKay, $g = 50{,}232{,}960 = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$, 由 $L_2(16)$ 添加基域的 2 阶自同构所得的群的一个可迁扩张. 其存在性已用计算机验证.

$(68)_2$, $(68)_3$, $(68)_4$: J. H. Conway, $g = 2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 = 4{,}157{,}776{,}806{,}543{,}360{,}000$, $g = 2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$, $g = 2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$.

其中最大的群由 24 维空间的一个格的自同构群得出，其余两个较小的是它的子群. 这个格是 J. Leech 联系到在 24 维空间中紧密地装满球的一个问题而确定出来的 (Canad. J. Math., **19**(1967)).

$(68)_5$: B. Fischer, $g = 2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 70{,}321{,}751{,}654{,}400$, 利用某个图引出的 $U_6(2)$ 的一个可迁扩张.

$(69)_1$: D. Held 等人, $g = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17 = 4{,}030{,}387{,}200$.

$(69)_2$: B. Fischer, $g = 2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 = 4{,}089{,}470{,}473{,}293{,}004{,}800$.

$(69)_3$: B. Fischer, $g = 2^{22} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29 = 2{,}510{,}411{,}418{,}381{,}323{,}442{,}585{,}600$.

$(71)_1$: R. N. Lyons 与 C. C. Sims, $g = 2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$. 群 $(69)_1$ 与 $(71)_1$ 的存在性已用计算机验证; $(69)_2$ 与 $(69)_3$ 是利用某个图引出的; 关于这些新发现的单群的详细叙述可参看 J. Tits, Séminaire Bourbaki (1970), No. 375 以及[参][22, 23, 24].

群 $(67)_1$ 与 $(68)_1$ 存在的可能性是 Janko (1967)宣布的; 与他所发现的群 $(64)_1$ 一样，这两个群由一个 2 阶元的中心化子的结构所刻划出来. Conway 群 $(68)_2$ 包含群 M_{24}, $(67)_2$ 以及 $(67)_4$. McLaughlin 群 $(67)_4$ 包含群 M_{22}. Hall-Janko 群 $(67)_1$ 是 $G_2(4)$ 的一个子群.

阶数小的单群 (除交换群, 交代群外) 可举出: 阶数 $168(L_2(7) \cong L_3(2))$, $504(L_2(2^3))$, $660(L_2(11))$, $1092(L_2(13))$, $2448(L_2(17))$, ... (Dickson [5], p. 309; Artin, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955)). 属于 4) 类的其它单群是否还有，迄今尚未可知.

属于 1)，2)，3) 类单群的自同构群均已获知. 在 Lie 型单群的适当的自同构 σ 下不变的元的全体,除了上面所列举出的一些群以外,是否还有可能出现其它的单群,尚未可知.

关于有限单群的著名结果有：有限单群的阶数均为偶数(W. Feit-Thompson，前引文章)，且其阶数至少被三个(互异的)素数除尽(Burnside). 任何单群都含有 $L_2(p)$, $L_2(2^n)$, $L_2(3^n)$, $L_3(3)$, $S_z(2^{2n+1})$ 中的某一个(Thompson),具有独立的 2-Sylow 子群(即相异的 2-Sylow 子群除单位元外再没有共同元) 的单群只有 $L_2(2^n)$, $U_3(2^n)$, $S_z(2^n)$ (鈴木), 等等.

Lie 型单群中可表为多重可迁的群，除了 $L_n(q)$, $U_3(q)$, $S_z(q)$, $G_2^1(q)$ 以外，是否还有别的，尚不知道. 又具有三重可迁表现的群仅知道有 $L_2(2^n)$ 与 $L_2(9)$，于是又有除此二者外再无其它的猜想.

关于有限单群，除上面所述者外还有各种各样的猜想. 单群的阶数皆为偶数就是所谓 Burnside 猜想,已由 Feit-Thompson 定理证实了这猜想的正确性. 除 $S_z(2^n)$ 以外的单群,其阶数均能被 12 除尽. 认为单群的外自同构群均为可解群，这是所谓 **Schreier 猜想** (Schreier conjecture). 除了某些近来所发现的单群外，Schreier 猜想大都已被证实了. 另一猜想是有限单群均可由两个元所生成,除 $F_4^1(2)$ 外，几乎所有已知的群都被证实了. 在许多情形，存在由两个元构成的生成元集合，其中一个元的阶数等于 2，这在已知的单群中也全被验证,迄今还未发现反例.

【补充】(1975 年 12 月)

(1) 零星单群. 自 1972 年 3 月以来,发现了下面的单群:

$(72)_1$ A. Rudvalis: $g = 2^{14}\cdot 3^3\cdot 5^3\cdot 7\cdot 13\cdot 29$,

$(73)_1$ M. O'Nan: $g = 2^9\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7^3\cdot 11\cdot 19\cdot 31$,

$(74)_1$ 原田耕一郎: $g = 2^{14}\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7\cdot 11\cdot 19$,

$(74)_2$ J. G. Thompson: $g = 2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 13\cdot 19\cdot 31$.

$(72)_1$ 是 Tits 单群的一个可迁扩张，即 $F_4^1(2)$ 中指数为 2 的一个正规子群. 关于这个群,可参看 J. H. Conway 与 D. B. Wales 的论文 (J. Algebra, **27** (1973)). 对于群 $(73)_1$, $(74)_1$ 和 $(74)_2$, 参看 Proc. internat. symp. on theory of finite groups, Sapporo. 1975, Japan Soc. for the Promotion of Sci., 1976. 还有三个可能性已被宣布. 它们的阶数为

(a) $g = 2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^9\cdot 7^6\cdot 11^3\cdot 13^3\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$,

(b) $g = 2^{41}\cdot 3^{13}\cdot 5^6\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 31\cdot 47$,

(c) $g = 2^{21}\cdot 3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 11^3\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 43$.

这几个群的存在性尚未被证明. 前两个群 (a) 与 (b) 的可能性是由 B. Fischer 提出的, $(74)_1$ 与 $(74)_2$ 的可能性也是 B. Fischer 提出的. Z. Janko 宣布了第三个群 (c) 的可能性.

(2) M. O'Nan 推广了 H. Wielandt 与永尾汎早先的结果(→[可迁群]),即是,若Schreier 猜想是真实的,则除了 S_n 与 A_n 以外,不存在 6 重可迁群.

(3) 我们叙述关于具有给定的 2-Sylow 子群的有限单群的分类问题的某些结果. 若一个单群 G 的一个 2-Sylow 子群是 Abel 群,则 $G = L_2(q)$ ($q \equiv 0, 3, 5 \mod 8$) 或者 G 具有一个对合 t，其中心化子同构于 $\langle t\rangle \times L_2(q)$ ($q \equiv 3$ 或 $5 \mod 8$, $q \geq 5$)(J. H. Walter, Ann.of Math., (2) **89** (1969). H. Bender, Math. Z., **111** (1970)). 后者称为 Janko-Ree 型的群(简记为 J-R 型). 阶数为 175,600 的 Janko 群和 Ree 群 $\mathrm{Re}(q) = G_2^1$ 是 J-R 型群的仅有的已知例子. 若单群 G 的每一个 2-Sylow 子群至多由 4 个元所生成,则 G 必同构于下列群之一: (i) 特征为奇数的 Lie 型群: $L_2(q)$, $L_3(q)$, $U_3(q)$, $G_2(q)$, $D_4^2(q)$, $L_4(q)(q\not\equiv 1 \mod 8)$ $U_4(q)(q\not\equiv 7 \mod 8)$ $L_5(q)$ ($q \equiv -1 \mod 4$), $U_5(q)(q \equiv 1 \mod 4)$; (ii) 特征为偶数的 Lie 型群: $L_2(8)$, $L_2(16)$, $L_3(4)$, $U_3(4)$ $S_z(8)$; (iii) 交

代群: A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}; (iv) 零星的群: Hall-Janko 群 $(67)_1$, McLaughlin 群 $(67)_4$, Higman-McKay 群 $(68)_1$, Lyons-Sims 群 $(71)_1$; (v) J-R 型 (D. Gorenstein 与 K. Harada, Mem. Amer. Math. Soc., no **147** (1974)).

最后, 我们来叙述 H. Bender (J. Algebra, **17** (1971)) 的一条定理, 它提供了关于有限单群分类的一个基本工具. 若有限群 G 有一个偶数阶的真子群 H, 它具有这样的性质: 对任意的 $g \in G - H$, $H^g \cap H$ 是奇数阶的, 则 H 称为 G 的一个强嵌入子群. Bender 定理断言: 若一个有限群 G 有一个强嵌入子群, 则下列事实必有一成立: (i) G 的 2-Sylow 子群是循环群或广义四元数群, (ii) G 具有一个正规列 $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset 1$, 使 G_0/G_1 与 G_2 为奇数阶的, 并且 $G_1/G_2 = L_2(2^n)$, $U_3(2^n)$ 或 $S_z(2^{2n-1})$ $(n \geqslant 2)$. 这定理是鈴木 (Ann. of Math. (2) **79** (1964)) 早先的一个结果的推广, 其证明大量地依赖于鈴木的结果.

【参】 [1] 正田建次郎-浅野啓三, 代数学 I, 岩波, 1952; [2] 秋月康夫-鈴木通夫, 高等代数学 I, II, 岩波全书, 1952, 1957; [3] 大島勝, 群論, 共立出版, 1954; [4] 浅野啓三-永尾汎, 群論, 岩波全書, 1965; [5] L. E. Dickson, Linear groups with an exposition of the Galois field theory, Teubner, 1901 (Dover 1958); [6] W. Burnside, Theory of groups of finite order, Cambridge Univ. Press, 第二版, 1911; [7] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, Teubner, 1937; [8] A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Springer, 第三版, 1937; [9] W. Specht, Gruppentheorie, Springer, 1956; [10] M. Suzuki (鈴木通夫), Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups, Erg. d. Math., Springer, 1956; [11] H. S. M. Coxeter-W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Erg. d. Math., Springer, 1957; [12] M. Hall, The theory of groups, Macmillan, 1959; [13] C. W. Curtis-I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962; [14] W. R. Scott, Group theory, Prentice-Hall, 1964; [15] M. Hall-J. K. Senior, The groups of order 2^n $(n \leqslant 6)$, Macmillan, 1964; [16] H. Wielandt, Finite permutation groups, Academic Press, 1964; [17] J. Dieudonné, Sur les groupes classiques, Actualités Sci. Ind., 1040, Hermann, 1948; [18] J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Erg. d. Math. Springer, 1955 (中译本: J. 狄多涅, 典型群的几何学, 科学出版社, 1960); [19] D. Gorenstein, Finite groups, Harper & Row, 1968; [20] D. Passman, Permutation groups, Benjamin, 1968; [21] B. Huppert, Endliche Gruppen, Springer, 1967; [22] R. Brauer-C. H. Sah (eds.), Theory of finite groups, a symposium, Benjamin, 1969; [23] M. B. Powell-G. Higman (eds.), Finite simple groups, Academic Press, 1971; [24] W. Feit, The current situation in the theory of finite simple groups, Actes Congr. Intern. Math., 1970, Nice, Gauthier-Villars, vol. 1., p. 55—93.

典型群 [英 classical groups 法 groupes classiques 德 klassische Gruppen 俄 классические группы 日 古典群] 下面阐述的一般线性群、酉群、正交群、辛群等, 统称为**典型群** (→Lie 群、Lie 代数、代数群、有限群).

【一般线性群】 设 V 是域 K 上的 n 维向量空间†, V 到 V 上的线性映射† (从而必为双射) 的全体用符号 $GL(V)$ 表示; $GL(V)$ 以映射合成为乘法构成一个群, 称它为 V 上的**一般线性群**, 或者称为 V 上的**一般线性变换群**或**全线性群** (general linear group, full linear group). 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 V 在 K 上的基, $GL(V)$ 的元 A 关于这个基的方阵为 (α_i^j): $Ae_i = \sum_j \alpha_i^j e_j$, 则对应 $A \to (\alpha_i^j)$ 是群 $GL(V)$ 到 K 上的所有 n 阶非奇异矩阵†所成的乘法群 $GL(n, K)$ 上的同构, 从而可把两者看作相同. 于是, 也把 $GL(n, K)$ 称为**域 K 上 n 次一般线性 (变换) 群** (general linear group of degree n over K). $GL(V)$ 到域 K 的乘法群 $K^* = K - \{0\}$ 上的同态 $A \to |A|$ ($|A|$ 表示 A 的行列式) 的核 $SL(V)$ 是 $GL(V)$ 的正规子群, 称为 V 上的**特殊线性群**或**特殊线性变换群**, 或**幺模群** (special linear group, unimodular group). $GL(n, K)$ 的子群 $SL(n, K) = \{A \mid A \in GL(n, K), |A| = 1\}$, 在上述同构对应 $GL(V) \cong GL(n, K)$ 下, 对应于 $SL(V)$. 因之, $SL(n, K)$ 称为**域 K 上 n 次特殊线性 (变换) 群** (special linear group of degree n over K). 除了 $n = 2$ 且 K 是有限域† $GF(2)$ $(= \boldsymbol{F}_2)$ 的情形以外, $SL(n, K)$ 都是 $GL(n, K)$ 的换位子群†. $GL(n, K)$ 的中心† $\mathfrak{z}$ 与所有纯量矩阵 αI $(\alpha \in K^*)$ 的集合是相同的. $SL(n, K)$ 的中心 $\mathfrak{z}_0$ 是由 $\mathfrak{z} \cap SL(n, K) = \{\alpha I \mid \alpha \in K, \alpha^n = 1\}$ 给出的有限群.

设 $P(V)$ 为从 n 维线性空间 V 所产生的 $n-1$ 维射影空间†, 即 $P(V)$ 是 V 的所有一维

子空间所成的集合. 这就存在从 $GL(V)$ 到 $P(V)$ 的所有射影变换所成的群内的自然同态 φ, 使 φ 的核' 就是 $GL(V)$ 的中心 $\mathfrak{z}$, 从而 $\varphi(GL(V)) \cong GL(V)/\mathfrak{z}$. 基于 φ 可把两者看作相同,并记作 $PGL(V)$, 称它为 $P(V)$ 的**射影一般线性(变换)群** (projective general linear group). 同样地, 称 $\boldsymbol{PGL}(n, K) = GL(n, K)/\mathfrak{z}$ 为**域 K 上射影一般线性(变换)群**. 另外, $SL(n, K)$ 以其中心 $\mathfrak{z}_0$ 为模所得的商群 $SL(n, K)/\mathfrak{z}_0$ 称为**射影特殊线性(变换)群** (projective special linear group), 记作 $\boldsymbol{PSL}(n, K)$, 或记为 $LF(n, K)$ (**线性分式群** (linear fractional group)).

有时也用 $GL_n(K)$, $SL_n(K)$ 代替上面的记号,特别当 K 是有限域 $\boldsymbol{F}q(=GF(q))$ 时,又可以使用记号 $GL(n, q)$, $SL(n, q)$, $PGL(n, q)$, $PSL(n, q)$, $LF(n, q)$.

$PSL(n, K)$的单性. 在 $n=2$, $K=\boldsymbol{F}_2$ 的情形, 有 $PSL(2, 2)\cong \mathfrak{S}_3$ (3 次对称群), 在 $n=2$, $K=\boldsymbol{F}_3$ 的情形,有 $PSL(2,3)\cong\mathfrak{A}_4$ (4 次交代群),除了这两种情形以外, $PSL(n, K)$ $(n\geqslant 2)$ 为非交换的单群' (→有限群[有限单群]).

在 K 是有限域 $\boldsymbol{F}_q$ 的情形, $GL(n, q)$, $SL(n, q)$, $PGL(n, q)$, $PSL(n, q)$ 的阶数如果分别用 $\alpha(n, q)$, $\beta(n, q)$, $\gamma(n, q)$, $\delta(n, q)$ 来表示,则有

$\alpha(n, q)=(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{n-1})$,

$\beta(n, q)=\gamma(n, q)=\alpha(n, q)/(q-1)$,

$\delta(n, q)=\gamma(n, q)/d$, $d=(n, q-1)$(最大公因子).

【作为 Lie 群的性质】 当基域 K 是实数域 $\boldsymbol{R}$(或复数域 $\boldsymbol{C}$) 时,上面所说的群都是Lie 群' (或复 Lie 群'). 特别是, $SL(n, \boldsymbol{C})$ 是 A_{n-1} 型单连通' 的单' 的并且是半单' 的复 Lie 群, $PSL(n, \boldsymbol{C})$ 是 A_{n-1} 型复单 Lie 代数的伴随群'.

【$GL(V)$ 的有理表示的决定】 下面出现的域 K 的特征均设为零. $GL(V)=GL(n, K)$ 到 $GL(m, K)$ 中的同态 ρ 称为 $GL(V)$ 的 m 次**有理表示** (rational representation) 或**多项式表示** (polynomial representation), 如果 ρ: $A=(\alpha_j^i)\to B=(\beta_q^p)$,其中各个 β_q^p 是系数属于 K 的 $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \cdots, \alpha_n^n)$ 的有理式(或多项式). 例如, 一次有理表示仅限于 $A\to|A|^e$ (e 是整数). 特别是, 在 K 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 的情形, $GL(n, \boldsymbol{C})$ 的每个解析表示都是有理表示. 因为 $GL(n, \boldsymbol{C})$ 是酉群' $U(n)$ 的复型', 所以 $GL(n, \boldsymbol{C})$ 的复解析表示与 $U(n)$ 的连续表示之间存在着一一对应, 这个对应保持等价性、不可约性、张量积与直和(→Lie 群). 从而, 决定 $GL(n, \boldsymbol{C})$ 的有理表示与决定 $U(n)$ 的连续表示是等价的. 一般情形, $GL(V)=GL(n, K)$ 的有理表示均为完全可约的. 再者, 对于 $GL(V)$ 的任意有理表示 ρ, 都存在适当的自然数 e, 使 $A\to|A|^e\rho(A)$ 是多项式表示. 因之, 为了决定 $GL(V)$ 的有理表示, 只要决定其不可约多项式表示即可, 而如下所述, 后者可由分解 V 上的所有 m 阶张量' 所构成的空间 $V^m=V\otimes\cdots\otimes V$ (m 个, $m=1, 2, \cdots$) 上的表示来得到. 对于 $A\in GL(V)$, 把 $D_m(A)\in GL(V^m)$ 定义为张量积'

$$D_m(A)=A\otimes\cdots\otimes A \ (m \text{ 个}),$$

即对于 $v_1, v_2, \cdots, v_m\in V$, 有

$$D_m(A)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)=Av_1\otimes\cdots\otimes Av_m.$$

对应 $GL(V)\ni A\to D_m(A)\in GL(V^m)$ 是 $GL(V)$ 的 n^m 次多项式表示. 设 V^m 到 V^m 中的所有线性映射所成的代数(全阵代数)为 $\mathfrak{L}(V^m)$, 并令 $\mathfrak{L}(V^m)$ 中由 $\{D_m(A)\mid A\in GL(V)\}$ 生成的子代数为 $\mathfrak{A}$.

其次, 对于 m 次对称群 $\mathfrak{S}_m$ 的元 σ, 如果定义 $GL(V^m)$ 的元 B_σ 为 $B_\sigma(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)=v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$, (此处 $v_1, v_2, \cdots, v_m\in V$), 那末, 对应 $\sigma\to B_\sigma$ 是 $\mathfrak{S}_m$ 在 V^m 上的表示, 这样就产生了 $\mathfrak{S}_m$ 在 K 上的群环' $K[\mathfrak{S}_m]$ 在 V^m 上的表示 $\tau: K[\mathfrak{S}_m]\to\mathfrak{L}(V^m)$. 命 $\tau(K[\mathfrak{S}_m])=\mathfrak{B}$, 则 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathfrak{B}$ 在 $\mathfrak{L}(V^m)$ 中互为交换子, 即 $\mathfrak{A}=\{X\in\mathfrak{L}(V^m)\mid XB=BX(\forall B\in\mathfrak{B})\}$, $\mathfrak{B}=\{X\in\mathfrak{L}(V^m)\mid AX=XA(\forall A\in\mathfrak{A})\}$.

现在, 对于 $\mathfrak{B}$ 的右理想 $\mathfrak{r}$, 把 V^m 中所有形如 $\sum Bx(B\in\mathfrak{r}, x\in V^m)$的有限和所构成的子空间记为 $\mathfrak{r}(V^m)$, 于是, 下面的事实成立.

1) $\mathfrak{r}(V^m)$ 在 $\mathfrak{A}$ 作用下不变，因之它是 V^m 的关于 $GL(V)$ 不变的子空间. 反之，设 U 是 V^m 的关于 $GL(V)$ 不变的任一子空间，则满足条件 $U=\mathfrak{r}(V^m)$ 的 $\mathfrak{B}$ 的右理想 $\mathfrak{r}$ 存在且唯一.

2) 设 $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ 为 $\mathfrak{B}$ 的两个右理想，令 $U_1=\mathfrak{r}_1(V^m)$, $U_2=\mathfrak{r}_2(V^m)$, 则 $\mathfrak{r}_1 \cong \mathfrak{r}_2$ (看作 $\mathfrak{S}_m$ 右模) $\Leftrightarrow U_1 \cong U_2$ (看作 $GL(V)$ 的表示空间).

3) 对应 $\mathfrak{r} \to \mathfrak{r}(V^m)$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一切右理想所成的格†到 V^m 的关于 $GL(V)$ 不变的一切子空间所成的格上的格同构. 从而，若 $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_1+\mathfrak{r}_2$ (直和)，则对应地有 $U=U_1+U_2$ (直和). 再者，$\mathfrak{r}(V^m)$ 给出 $GL(V)$ 的不可约表示的充分必要条件是 $\mathfrak{r}$ 为 $\mathfrak{B}$ 的极小右理想.

由于 $K[\mathfrak{S}_m]$ 是半单† 代数，故 $\mathfrak{B}$ 可看作 $K[\mathfrak{S}_m]$ 的双边理想. 从而，$\mathfrak{B}$ 的极小右理想 $\mathfrak{r}$ 也是 $K[\mathfrak{S}_m]$ 的极小右理想，且 $\mathfrak{r}$ 的生成幂等元† ε 是 $K[\mathfrak{S}_m]$ 的本原幂等元†. 按照对称群的理论(→表示论[对称群的线性表示]), $K[\mathfrak{S}_m]$ 的本原幂等元，(除同构外)均可由 Young 图形† $T(f_1, \cdots, f_k)$ ($f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_k > 0$, $m=f_1+\cdots+f_k$) 给出. 对此，有

4) 设 Young 图形 $T(f_1, \cdots, f_k)$ 决定的本原幂等元为 $\varepsilon=\varepsilon(f_1, \cdots, f_k)$, 则 $\varepsilon K[\mathfrak{S}_m] \subset \mathfrak{B} \Leftrightarrow k \leqslant n$. 这时，命 $\varepsilon K[\mathfrak{S}_m]=\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}(V^m)=\varepsilon(V^m)=V^m(T(f_1, \cdots, f_k))$, 把 $GL(V)$ 在 $V^m(T(f_1, \cdots, f_k))$ 上的不可约表示写成 $A \to D(A; f_1, \cdots, f_k)$. 称 $(f_1, \cdots, f_k)$ 为这个不可约表示的**符号差** (signature).

5) 表示 $D(A; f_1, \cdots, f_k)$ 是 $GL(V)$ 的不可约多项式表示. 并且，对于 $GL(V)$ 的任意不可约多项式表示 ρ, 存在唯一的一个与之等价的 $D(A; f_1, \cdots, f_k)$.

例: 若 $k=1$, 则 $f_1=m$, $\varepsilon=(m!)^{-1}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \sigma$, $V^m(T(m))$ 是 m 次对称张量†空间. 再者，若 $f_1=\cdots=f_k=1$, 则 $k=m$, $\varepsilon=(m!)^{-1}\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (\operatorname{sgn} \sigma)\sigma$, $V^m(T(1, \cdots, 1))$ 是 m 次的交错张量†空间.

6) 设不可约表示 $D(A; f_1, \cdots, f_k)$ 的特征标†为 $\chi(A; f_1, \cdots, f_k)$, 则

$$\chi(A; f_1, \cdots, f_k) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1} & \varepsilon_1^{l_2} & \cdots & \varepsilon_1^{l_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_n^{l_1} & \varepsilon_n^{l_2} & \cdots & \varepsilon_n^{l_n} \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_1^{n-2} & \cdots & \varepsilon_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varepsilon_n^{n-1} & \varepsilon_n^{n-2} & \cdots & \varepsilon_n & 1 \end{vmatrix},$$

其中 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 是 A 的特征值，$l_1=f_1+(n-1)$, $l_2=f_2+(n-2)$, $\cdots l_n=f_n$ (令 $f_{k+1}=\cdots=f_n=0$). 从而 $D(A; f_1, \cdots, f_k)$ 的次数 d 为

$$d=D(l_1, \cdots, l_n)/D(n-1, \cdots, 1, 0).$$

其中 $D(x_1, \cdots, x_n)$ 表示差积 $\prod_{i<j}(x_i-x_j)$.

7) 特别是，若以 $p_m=p_m(A)$ 表示 $D(A; m)$ 的特征标，则 $|I-zA|^{-1}=p_0+p_1 z+p_2 z^2+\cdots$, 并且

$$\chi(A; f_1, \cdots, f_k) = \begin{vmatrix} p_{f_1} & p_{f_1+1} & \cdots & p_{f_1+(n-1)} \\ p_{f_2-1} & p_{f_2} & \cdots & p_{f_2+(n-2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{f_n-(n-1)} & p_{f_n-(n-2)} & \cdots & p_{f_n} \end{vmatrix},$$

$$f_{k+1}=f_{k+2}=\cdots=f_n=0,$$

$$p_{-1}=p_{-2}=\cdots=0.$$

将上面的行列式简记为 $|p_{l-(n-1)}, \cdots, p_l|$, 并约定在各行中 $l_1=f_1+(n-1), \cdots, l_{n-1}=f_{n-1}+1$, $l_n=f_n$.

【$SL(V)$ 的有理表示的决定】 $SL(V)$ 的有理表示均为完全可约的. 若把 $GL(V)$ 的不可约表示 $D(A; f_1, \cdots, f_n)$ ($f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_n \geqslant 0$) 限制在 $SL(V)$ 上，就得出 $SL(V)$ 的不可约有理表示 $\widetilde{D}(A; f_1, \cdots, f_n)$. 并且，$SL(V)$ 的任意不可约有理表示都可由此得出. 这样，$\widetilde{D}(A; f_1, \cdots, f_n)$ 与 $\widetilde{D}(A; f_1', \cdots, f_n')$ 为 $SL(V)$ 的等价表示的充分必要条件是 $f_i-f_{i+1}=f_i'-f_{i+1}'$ ($i=1, 2, \cdots, n-1$).

【酉群】 元素为复数的 n 次酉矩阵† 的全体 $U(n)$ 关于矩阵的乘法作成群(→矩阵)，称为 n 次**酉群** (unitary group) 或**酉变换群** (unitary transformation group). 特别是，$U(n)$ 中行列式等于 1 的所有矩阵形成 $U(n)$ 的正规子群，称为**特殊酉(变换)群** (special unitary group), 记作

$SU(n)$.

$U(n)$, $SU(n)$ 分别是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的 $GL(n, \boldsymbol{C})$, $SL(n, \boldsymbol{C})$的子群,并且是将它们作酉限制' 所得出的子群. 因而, 它们均为紧连通 Lie 群, 特别 $SU(1)$ 等于单位群, 而且 $U(1)$ 就是绝对值等于 1 的所有复数所成的乘法群. $U(n)$ 的中心 $\mathfrak{z}$ 是对角矩阵 $\lambda I(\lambda \in \boldsymbol{C}, |\lambda| = 1)$ 的全体,且有

$$\mathfrak{z} \cong U(1), \quad \mathfrak{z} \cdot SU(n) = U(n),$$
$$U(n)/SU(n) \cong U(1).$$

再者, $n \geq 2$ 时, $SU(n)$ 均为单的并且是半单的单连通 Lie 群. 它们给出了四种单的紧 Lie 群的无限系列之一.

用 $\boldsymbol{PU}(n)$ 表示 $U(n)/\mathfrak{z}$, 称之为**射影酉(变换)群** (projective unitary group). $PU(n) \cong SU(n)/\mathfrak{z} \cap SU(n)$, $\mathfrak{z} \cap SU(n) \cong \mathbf{Z}_n$ ($\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$). 从而 $PU(n)$ 与 $SU(n)$ 局部同构.

【酉群的不可约表示】 设$D(A; f_1, \cdots, f_k)$ 为 $GL(n, \boldsymbol{C})$ 的不可约表示,特别是,若限定 A 为 $SU(n)$ 的矩阵,则得出 $SU(n)$ 的连续不可约表示,而且, $SU(n)$ 的连续不可约表示都可由这样的 $D(A; f_1, \cdots, f_k)$ 得出. 同样, $U(n)$ 的连续不可约表示都可由 $A \to |A|^e D(A; f_1, \cdots, f_k)$得出,此处 e 是任意有理整数. 因为 $U(n)$, $SU(n)$ 均为紧的, 故这些群的任意连续表示恒可分解为上述不可约表示的直和(→紧群).

$U(n)$, $SU(n)$ 的表示论,作为一般紧 Lie 群的表示论的最典型而且具体的例子, 是引人注目的 (→紧群, Lie 群, Lie 代数).

【一般域上的酉群】 酉矩阵从而酉群也可在复数域以外的一般域上定义,即设 $\boldsymbol{P}$ 是任意域, K是 $\boldsymbol{P}$ 的二次扩域, K的元 ξ 关于 $\boldsymbol{P}$的共轭' 元记为 $\bar{\xi}$, 于是, 元素在K中的使 Hermite 型' $\bar{\xi}_1\xi_1 + \bar{\xi}_2\xi_2 + \cdots + \bar{\xi}_n\xi_n$ 不变的 n 次矩阵称为K(关于 $\boldsymbol{P}$)的酉矩阵,酉矩阵的全体所成的乘法群记作 $U(n, K, \boldsymbol{P})$; 特别是, 行列式为 1 的酉矩阵所成的子群记作$SU(n,K,\boldsymbol{P})$. $SU(n, K, \mathbf{P})$ 以形如 $\lambda I(\lambda^n = 1, |\lambda| = 1)$ 的矩阵所成的子群为模所得的商群, 称为**射影特殊酉(变换)群** (projective special unitary group), 记作 $PSU(n, K, \boldsymbol{P})$. 特别是, 当 $K, \boldsymbol{P}$ 是有限域 $\boldsymbol{F}_{q^2}$, $\boldsymbol{F}_q$ ($q = p^m$) 时, $U(n, K, \boldsymbol{P})$, $SU(n, K, \boldsymbol{P})$, $PSU(n, K, \boldsymbol{P})$ 分别记作 $U(n, q)$, $SU(n,q)$, $PSU(n, q)$. 这时,除 $PSU(3, 2)$ 的情形以外,对于一切 $n \geq 3$, $PSU(n, q)$ 均为非交换的单群(→有限群[有限单群]).

【正交群】 元素为实数的 n 次正交矩阵' 的全体 $\boldsymbol{O}(n)$ 关于矩阵乘法所成的群称为 n 次**正交群** (orthogonal group) 或**正交变换群**(orthogonal transformation group). 特别是,行列式为 1 的正交矩阵的全体 $\boldsymbol{SO}(n)$ (或记作 O_n^+) 是 $O(n)$ 的指数为 2 的正规子群, 称为 n 次**旋转群**(rotation group)或**正常正交(变换)群** (proper orthogonal group). 用几何的语言来说, $O(n)$ 是 n 维 Euclid 空间内使一点固定的所有正交变换的集合,而 $SO(n)$ 是围绕这个固定点的所有旋转所成的集合.

$O(n)$, $SO(n)$ 均为紧 Lie 群, $SO(n)$ 与 $O(n)$ 的含有单位元的连通分支是相同的. 另外, $n = 3$ 或 $n \geq 5$ 时, $SO(n)$ 均为单的并且是半单 Lie 群. 按照 Lie 代数的理论,依 n 为偶数或奇数的情形, $SO(n)(n \geq 3$ 但 $n \neq 4)$ 给出四类单的且半单的紧 Lie 群的无限系列中的两类. (关于 $SO(4)$, 例如可→[1].)

$SO(n)$ $(n \geq 3)$是连通 Lie 群,但不是单连通的. 与$SO(n)$局部同构的单连通 Lie 群称作**旋子群**(spinor group), 记作 $\boldsymbol{Spin}(n)$. $SO(n)$ 与 $Spin(n)$模其阶数 2 的正规子群所得的商群同构. 设 $Spin(n)$ 的中心为 $\mathfrak{z}$, 则当 n 是奇数时, $\mathfrak{z} \cong \boldsymbol{Z}_2$; 当 $n \equiv 2 \pmod 4$ 时, $\mathfrak{z} \cong \boldsymbol{Z}_4$; 当 $n \equiv 0 \pmod 4$ 时, $\mathfrak{z} \cong \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_2$ (→Clifford 代数).

n 次复正交矩阵' 的全体 $O(n, \boldsymbol{C})$ 所成的群称为**复正交(变换)群** (complex orthogonal group), 其中行列式为 1 的全体 $SO(n, \boldsymbol{C})$, 称为**正常复正交(变换)群** (proper complex orthogonal group). $SO(n, \boldsymbol{C})$ $(n \geq 3, n \neq 4)$是单的并且是半单复 Lie 群.

【正交群的不可约表示】 $O(n)$ 的不可约

表示，与 $GL(n, K)$ 的表示相同，可由正交矩阵A的张量积 $D_m(A) = A\otimes\cdots\otimes A$ 关于对称群的分解得到．即是，一般地若把第一列与第二列的长度的和不超过 n 的 Young 图形 $T(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ $(f_1 + f_2 \leqslant n)$ 称为 $O(n)$ 图形，那末对应于任意 $O(n)$ 图形 $T = T(f_1, f_2, \cdots, f_k)$，可定出 $O(n)$ 的一个绝对不可约表示 $D^0(A; f_1, \cdots, f_k)$，而这些 $D^0(A; f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 是互不等价的．$D_m(A)$ 可分解为这些 $D^0(A; f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 的直和，其中 $f = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$ 取值 $m, m-2, m-4, \cdots$．而$O(n)$的任意连续不可约表示均与从某个 $O(n)$ 图形 $T = T(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 得到的表示 $D^0(A; f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 等价．

一般地，若两个 $O(n)$ 图形 T, T' 的第2列以下各列的长度均相等，而且它们第一列的长度的和等于 n，则称T与T'互为**相伴** (associated) 的图形．特别是，当 $T = T'$ 时，则称T与自身相伴．全部 $O(n)$ 图形可分成互为相伴的组 T, T' (以及自相伴的 $T = T'$)，T, T' 中有一个第一列的长不超过 $\frac{n}{2}$．现在，设 $T = T(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 的第一列长度为 k，并且 $k \leqslant \frac{n}{2}$，命对应于T的$D^0(A; f_1, f_2, \cdots, f_k)$的特征标为 $\chi_T(A)$，对应于T'的不可约表示的特征标为 $\chi_{T'}(A)$，则有

$$\chi_T(A) = |p_{l-(\nu-1)} - p_{l-(\nu+1)}, p_{l-(\nu-2)} - p_{l-(\nu+2)}, \cdots p_l - p_{l-2\nu}|,$$

$$\chi_{T'}(A) = |A|\chi_T(A), \ \nu = \left[\frac{n}{2}\right].$$

这里 p_i 以及 $|p_{l-(\nu-1)} - p_{l-(\nu+1)}, \cdots|$ 的意义与前面 $GL(n, K)$ 的特征标公式中介绍过的相同．

$SO(n)$ 的不可约表示可直接由 $O(n)$ 的不可约表示求出．即，若 $T = T(f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 与其自身不相伴，则 $D^0(A; f_1, \cdots, f_k)$ 作为 $SO(n)$ 的表示也是不可约的，而且$SO(n)$的从T所导出的表示与从相伴的T'所导出的表示是一致的．若T与其自身相伴，则 $D^0(A; f_1, f_2, \cdots, f_k)$ 在复数域内可分解为 $SO(n)$ 的两个相同次数的不可约表示．而且这样由不同的相伴图形组所得出的$SO(n)$的不可约表示是互不等价的，并且$SO(n)$的任意连续不可约表示都与这样得出的一个表示等价． 关于 $SO(3)$ (3次旋转群)的表示→ Racah 代数．

由于 $SO(n)$ 与 $Spin(n)$ 关于它的一个阶数为2的正规子群N的商群同构，故 $Spin(n)$ 的（在N上不是单位表示的）连续表示可看作 $SO(n)$ 的二值表示．这个表示称为**旋表示** (spin representation)，在应用上很重要．

正交群 $O(n)$ 是使二次型 $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$ 不变的所有 n 次实方阵所成的集合，使符号差† 为 $(r, n-r)$ 的二次型 $\xi_1^2 + \cdots + \xi_r^2 - \xi_{r+1}^2 - \cdots - \xi_n^2$ 不变的所有 n 次实方阵所成的群称为符号差为 $(r, n-r)$ 的 **Lorentz 群** (Lorentz group)．$n = 4$，$r = 3$ 的情形，被用于狭义相对论中(→相对论)．设 G_0 表示符号差为 (3,1) 的 Lorentz 群的单位元的连通分支，G_0 称为**正常 Lorentz 群** (proper Lorentz group)．设 $\sigma = (g_{ij}) \in G$，则有$|\sigma| = \pm 1$，并且 $g_{44} \geqslant 1$ 或 $g_{44} \leqslant -1$．我们还有 $G_0 = \{\sigma \mid |\sigma| = 1, g_{44} \geqslant 1\}$，$G/G_0 \cong \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_2$((2, 2) 型 4 阶 Abel 群)，$G_0 \cong SL(2, \boldsymbol{C})/\{\pm I\}$．

【一般域上的正交群】 正交群也可在实数域以外的一般域K上定义．给定K上的一个二次型† $Q(\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j (|\alpha_{ij}| \neq 0)$，$K$上的 $\xi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的线性变换称为关于Q的**正交变换** (orthogonal transformation)，如果这个线性变换使Q不变．关于Q的所有正交变换对于变换的乘法作成群，称为关于Q的**正交(变换)群**，记为 $O(n, K, Q)$ 或简记为 $O(Q)$．在 $O(Q)$ 中行列式为1的所有变换作成 $O(n, K, Q)$ 的正规子群，记为 $SO(n, K, Q)$ 或简记为 $SO(Q)$．$O(n)$，$SO(n)$ 分别是 $O(n, K, Q)$，$SO(n, K, Q)$ 中K为实数域，Q为单位二次型 $Q(\xi, \xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2$ 的特殊情形．

设 $\Omega(n, K, Q)$ 为 $O(n, K, Q)$ 的换位子群†，它与 $SO(n, K, Q)$ 的换位子群是相同的；

在K的特征$\neq 2$的情形,若$n \geqslant 5$, Q 的指数†$\nu \geqslant 1$, 则 $\Omega(n,K,Q)/Z$ (Z 是 $\Omega(n,K,Q)$ 的中心)是单群. 这里 $Z=\{I\}$ 或 $Z=\{\pm I\}$ (L. Dickson, J. Dieudonné). 在K是特征$\neq 2$的有限域 $\boldsymbol{F}_q$ 的情形, 当 $n=2m+1$ 时, 有 $\nu=m$; 当 $n=2m$ 时,有 $\nu=m$ 或者 $m-1$. 因此若 $n\geqslant 5$, 恒有 $\nu \geqslant 2$. 再者, 在 $\nu=0$ 的情形, 若 $K=\boldsymbol{R}$, 则 $\Omega(n,\boldsymbol{R},Q)=SO(n)$, 前面已经提到过, 当 $n\geqslant 5$ 时, $SO(n)/Z$ 是单群. 对于代数数域†的情形, 也有同样的结论 (M. Kneser, 1956). 在K的特征等于 2 的情形,$O(n,K,Q)=SO(n,K,Q)$, $Z=\{I\}$, 且在多数情况下, $\Omega(n,K,Q)$ 都是单群 (Dieudonné [7]). K是有限域的情形(Dickson), ⇀有限群[有限单群].

【辛群】 设有两组变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{2n}$; $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{2n}$. 若对这两组变量施行$K$上的同一个线性变换$A$时, ξ,η 的双线性型† $\sum_{i=1}^{n}(\xi_{2i-1}\eta_{2i}-\xi_{2i}\eta_{2i-1})$不变, 则称这个线性变换$A$(或者表示这个变换的矩阵)为$2n$次**辛变换** (symplectic transformation) (或辛矩阵). K上的所有 $2n$ 次辛变换 (或辛矩阵) 构成的群称为**辛变换群** (symplectic transformation group) 或**辛群** (symplectic group), 也叫**复群** (complex group) 或**交换线性群** (Abelian linear group) 记为 $\boldsymbol{Sp}(n,K)$.

属于 $Sp(n,K)$ 的矩阵的行列式恒等于 1. 而且 $Sp(n,K)$ 的中心 $\mathfrak{z}$ 由 I 及 $-I$ 所组成. $Sp(n,K)$ 关于 $\mathfrak{z}$ 的商群称为**射影辛(变换)群** (projective symplectic group),记作 $\boldsymbol{PSp}(n,K)$. 除了 $n=1$, $K=GF(2)$; $n=1$, $K=GF(3)$; 以及 $n=2$, $K=GF(2)$ 这三种情形外, $PSp(n,K)$ $(n\geqslant 1)$ 恒为单群.

作为 Lie 群的性质. 在K是复数域$\boldsymbol{C}$或实数域$\boldsymbol{R}$的情形, $Sp(n,K)$ 是 Lie 群. **复辛群** $Sp(n,\boldsymbol{C})$ 与酉群 $U(2n)$ 的交,即 $Sp(n,\boldsymbol{C})$的酉限制†, 记为 $\boldsymbol{Sp}(n)$, 称为**酉辛群** (unitary symplectic group) (或简称**辛群**). $Sp(n,\boldsymbol{C})$ 是单群并且是半单复 Lie 群, $Sp(n,\boldsymbol{R})$ 及 $Sp(n)$ 也是单的并且是半单 Lie 群, 而且 $Sp(n)$ 还是紧的且是单连通†的, 它是四种单且半单紧 Lie 群的无限系列中的一种 (⇀Lie 群).

在四元数体† $\boldsymbol{H}$ 上的 n 维线性空间$\boldsymbol{H}^n$中, 对任意两个元 $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$, 定义它们的内积为 $(x,y)=x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2+\cdots+x_n\bar{y}_n$ ($\bar{y}_i$ 是 y_i 的共轭四元数), 考虑使内积不变的所有线性变换所成的群. 这个群与 $Sp(n)$ 同构. 在这个意义下, $Sp(n)$ 可与 $O(n)$, $U(n)$ 相对比: 正交群 $O(n)$ 是实数域上线性空间的保持内积不变的所有线性变换所成的群,而酉群$U(n)$是复数域上线性空间的保持内积不变的所有线性变换所成的群 (C. Chevalley [4], 第一章).

【辛群的不可约表示】 与 $GL(n,K)$ 的情形相同, $Sp(n,\boldsymbol{C})$的表示 $D_m(A)=A\otimes\cdots\otimes A$ (m 个 A的张量积) 可分解成与对称群关连的不可约成份. 即对于行数 k 不超过 n 的任意 Young 图形 $T=T(f_1,\cdots,f_k)(k\leqslant n)$,确定出 $Sp(n,\boldsymbol{C})$ 的一个不可约表示 $D^t(A;f_1,f_2,\cdots,f_k)$, 而这些 $D^t(A;f_1,f_2,\cdots,f_k)$ 是互不等价的. $D_m(A)$ 可分解成使 $f=f_1+f_2+\cdots+f_k$ 之值取 $m, m-2, m-4, \cdots$ 的若干个 $D^t(A;f_1,f_2,\cdots,f_k)$ 的直和. $D^t(A;f_1,\cdots,f_k)$ 的特征标由下面的式子给出:

$$\chi_T(A)=|p_{l-n+1},\ p_{l-n+2}+p_{l-n},\cdots,\ p_l+p_{l-2n+2}|,$$

这里 p_i 以及 $|p_{l-n+1}, p_{l-n+2}+p_{l-n},\cdots|$ 与 $GL(n,K)$ 的不可约特征标公式中已介绍过的有同样意义.

若限定A为 $Sp(n)$的矩阵,则 $D^t(A;f_1,f_2,\cdots,f_k)$ 就给出 $Sp(n)$ 的连续不可约表示. 而 $Sp(n)$ 的任意连续不可约表示必与适当的图形 T 所对应的 $D^t(A;f_1,\cdots,f_k)$ 等价.

【各种典型群之间的关系】 上述各种典型群之间存在着某些同态(同构)关系. 关于一般域K ⇀[1],[7]. K是有限域的情形,⇀有限群[有限单群]. 再者, $K=\boldsymbol{R}$ 或者 $K=\boldsymbol{C}$ 的情形, 紧 Lie 群之间存在着下述同构关系: $SO(3)\cong SU(2)/\{\pm I\}$, $SU(2)\cong Sp(1)$, $SO(5)\cong$

$Sp(2)/\{\pm I\}$, $SO(6)\cong SU(4)/\{\pm I\}$ (→Lie 群, Lie 代数).

【非交换域上的典型群】 设V是非交换域K上n维右线性空间.这时,V到V上的线性变换的全体$GL(V)$以映射的合成为乘法构成一个群,称为V上的**一般线性(变换)群**,它与K上n次非奇异矩阵作成的乘法群$GL(n, K)$同构.

把$GL(V)$, $GL(n, K)$的换位子群[†]分别记为$SL(V)$, $SL(n, K)$, 分别称它们为V上的或K上的n次**特殊线性(变换)群**. 设$A\in GL(V)$,并假定在A作用之下,V的一个$n-1$维子空间U的每个元都不变. 这时,取$x\in V$,但x不属于U,命$Ax\equiv x\alpha \pmod U$), $\alpha\in K$不仅与A有关,而且还与x的取法有关. 但是,在K的乘法群K^*中,α的共轭类$\dot{\alpha}=\{\lambda\alpha\lambda^{-1}|\lambda\in K^*\}$仅由$A$唯一地确定. 特别当$\dot{\alpha}=\{1\}$及$A\neq I$时,$A$就称为**平延**(transvection). 命E_{ij}为矩阵单位[†],则当$\alpha\neq 0$及$i\neq j$时,$B_{ij}(\alpha)=I+\alpha E_{ij}$是一个平延. $SL(V)$与$GL(V)$中一切平延所生成的子群是相同的. 这个事实对于K为域的情形也成立.(但$n=2$, $K=\boldsymbol{F}_2$是个例外,这时所有平延生成的群就是$GL(2,2)$,而且$GL(2,2)$与三次对称群$\mathfrak{S}_3$同构,并与其换位子群不一致.) $GL(n, K)$的中心$\mathfrak{z}$就是由属于K的中心的非零元所成的纯量矩阵的全体. 设K的乘法群K^*的换位子群为C,若$n\geqslant 2$,则$GL(n, K)/SL(n, K)$与K^*/C同构. 这个同构可这样求得,即对于$GL(n, K)$的任意元A,可适当地定义K^*/C的一个元$\det A$,它称为A的行列式(→[8],[11]). $SL(n, K)$的中心$\mathfrak{z}_0$是$\{\alpha I|\alpha^n\in C\}$,商群$PSL(n,K)=SL(n,K)/\mathfrak{z}_0$称为$K$上的$n$次**射影特殊线性(变换)群**. K是非交换域时,$PSL(n,K)$ $(n\geqslant 2)$恒为单群(→[7],[8]).

以下设K是任意的域(非交换域的情形也可以),V是K上的n维右线性空间. 如果对于V上的关于K的对合[†]J的Hermite型$f(x, y)$(→线性空间),能决定K的中心的一个元ε,使$f(x,y)=\varepsilon f(y,x)$,则称$f(x,y)$是**$\varepsilon$-Hermite型**($\varepsilon$-Hermite form). 以下设$f$是$V$上的$\varepsilon$-Hermite型. 对于$V$的子空间$W$,如果对任意$x, y\in W$,均有$f(x, y)=0$,则称$W$为**全迷向子空间**(totally isotropic subspace).设V的一切全迷向子空间的维数的最大值为m,则称m为f的**指数**(index),恒有$2m\leqslant n$.若$A\in GL(V)$,且对任意x, $y\in V$, 恒有$f(Ax, Ay)=f(x, y)$,则称A为关于f的**酉变换**(unitary transformation). 关于f的所有酉变换$U(n,K,f)$构成$GL(V)$的子群,称它为关于f的**酉变换群**. 称$SU(n,K,f)=U(n,K,f)\cap SL(n,K)$为**特殊酉(变换)群**. 在$J=1$及$\varepsilon=1$时,酉变换(酉变换群)就改用**正交变换(正交(变换)群)**的名称,这时用记号$O(n, K, f)$代替$U(n, K,f)$. 又$J=1$, $\varepsilon=-1$时,酉变换(群)则改用**辛变换(辛(变换)群)**的名称,这时用记号$Sp(n, K)$代替$U(2n, K, f)$. 在这个情形,当n, K一定时,$U(2n, K, f)$与f的取法无关,是互为同构的. 设f是ε-Hermite型,如果对任意$x\in V$,均有α属于K,使$f(x, x)=\alpha+\varepsilon\alpha^J$,就称$f$为**$\varepsilon$迹形式**($\varepsilon$-trace form). 当$J=1$, $\varepsilon=-1$(从而K是可交换的)或者$\varepsilon=1$,且K的特征$\neq 2$的情形,任意的ε-Hermite型都是ε迹形式. 当f是ε迹形式时,设B是V的任意子空间W到V中的线性变换,如果对W的任意两个元x, y,有$f(Bx, By)=f(x, y)$,则B可扩张成f的酉群$U(n, K, f)$的元A(Witt定理). 特别是,$U(n, K, f)$可迁地作用在V的所有极大全迷向子空间上,这些极大全迷向子空间的维数均等于f的指数m. 现在,设P是**Pythagoras有序域**(Pythagorean ordered field)(即含有任意正元的平方根的有序域). 在K就是P且$J=1$的情形,或K是$P(\sqrt{-1})$的情形,或K是P上一般四元数体且J是K的共轭的情形,那末,对于两个Hermite型f, f',其酉群$U(n, K, f)$与$U(n', K, f')$同构的充分必要条件是: $n=n'$,且f的指数m等于f'的指数. 这时就用符号$U(n, m, K)$表示$U(n, K, f)$. 再者,若K是Pythagoras有序域P上的一般四元数体,且f为反Hermite型[†],

则存在V的正交基(e_i)，使$f(e_i,e_i)=j$（四元数的单位），$1\leqslant i\leqslant n$. 而且，此时反 Hermite 型f的酉群$U(n,K,f)$由n与K唯一确定.

现在，考虑一般非交换域K上ε迹形式的ε-Hermite 型f. 但是，要把$J=1$，$\varepsilon=1$即二次型的情形除外，并且假定f的指数$m\neq 0$. 这时酉群$U(n,K,f)$含有平延. 所有是平延的酉变换在$U(n,K,f)$中生成的子群记为$T(n,K,f)$. 若$m\geqslant 2$，则$T(n,K,f)$是$U(n,K,f)$的换位子群. $T(n,K,f)$的中心W_n等于$GL(n,K)$的中心$\mathfrak{z}$与$T(n,K,f)$的交. 当$n\geqslant 3$且K含有多于25个的元时，商群$T(n,K,f)/W_n$是单群(→[8]). 再者，当K可交换且$n\geqslant 2$，$m\geqslant 1$，$J\neq 1$时，$T(n,K,f)=SU(n,K,f)$，但是，$n=3$，$K=\boldsymbol{F}_4$的情形除外.

当K是实数域$\boldsymbol{R}$，或复数域$\boldsymbol{C}$，或通常的四元数体†$\boldsymbol{H}$时，以上的$GL(n,K)$，$SL(n,K)$，$U(n,K,f)$等都是 Lie 群. 特别是，除以下三种情形以外，$SL(n,K)$与$U(n,K,f)$都是单 Lie 群. 例外的情形是：1) $n=1$，$K=\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}$. 2) $n=2$，$K=\boldsymbol{R}$，$J=1$，$\varepsilon=1$. 3) $n=4$，$K=\boldsymbol{R}$或$\boldsymbol{C}$，$J=1$，$\varepsilon=1$，$m=2$. 1) 2) 的情形是交换群，3) 的情形，它们局部地是两个非交换单群的直积.

$K=\boldsymbol{H}$时，因$\boldsymbol{H}$含有$\boldsymbol{C}$作为其子域，故$\boldsymbol{H}$上的n维向量空间V具有$\boldsymbol{C}$上的$2n$维向量空间的结构. 于是，很自然地可以把$GL(n,\boldsymbol{H})$看作$GL(2n,\boldsymbol{C})$的子群.

复典型单群$G=SL(n,\boldsymbol{C})$，$SO(n,\boldsymbol{C})$，$Sp(n,\boldsymbol{C})$具有定义在$\boldsymbol{R}$上的代数群†的结构(→代数群). G的**实型**(real form)（即G的代数子群，它当系数域扩张到$\boldsymbol{C}$时就是G），在$K=\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{H}$的情形，可作为$SL(n,K)$，$U(n,K,f)$来实现. 就是说，复典型群G的实型与以下所述各种群之一在G内是共轭的. 1) $SL(n,\boldsymbol{C})$的实型：$SL(n,\boldsymbol{R})$（AI 型）；仅当$n=2k$时，$SL(k,\boldsymbol{H})$（AII 型）；对于指数m的 Hermite 型f的特殊酉群$SU(n,m,\boldsymbol{C})$，$0\leqslant m\leqslant[n/2]$（AIII 型）. 2) $SO(2n+1,\boldsymbol{C})$的实型：对于$2n+1$维空间的指数m的二次型的正常正交群$SO(2n+1,m,\boldsymbol{R})$，$0\leqslant m\leqslant n$（BI 型）. 3) $SO(2n,\boldsymbol{C})$的实型：$SO(2n,m,\boldsymbol{R})$，$0\leqslant m\leqslant n$（DI 型）；对于H上的反 Hermite 型f的$U(n,H,f)$（DIII 型）. 4) $Sp(n,\boldsymbol{C})$的实型：$Sp(n,\boldsymbol{R})$（CI 型），对于$\boldsymbol{H}$上指数m的 Hermite 型f的酉群$U(2n,m,\boldsymbol{H})$，$0\leqslant m\leqslant n$（CII 型）；以及对应于特殊情形$m=0$的$Sp(n)$. 这些实型以其中心为模所得的商群，每一个均可以用具有对合J的$K=\boldsymbol{R}$上半单代数的与J可交换的自同构所成的群来实现（Weil→[12]）.

【参】 [1] B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Erg. d. Math., Springer, 1935 (Chelsea, 1948); [2] H. Weyl, The classical groups, Princeton Univ. Press, 1939, 第二版 1946; [3] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Algèbre, Chap. 9, Actualités Sci. Ind., 1272a, Hermann, 1959; [4] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; [5] 弥永昌吉-杉浦光夫，応用数学者のための代数学，岩波，1960；[6] 山内恭彦，回転群とその表現，岩波，1957；[7] J. Dieudonné, Sur les groupes classiques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1948; [8] J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, Springer, 1955 (中译本：J. 狄多涅，典型群的几何学，科学出版社，1960); [9] C. Chevalley, The algebraic theory of spinors, Columbia Univ. Press, 1954; [10] M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Springer, 1952; [11] E. Artin, Geometric algebra, Interscience, 1957; [12] A. Weil, Algebras with involutions and the classical groups, J. Indian Math. Soc., **24** (1960), 589—623.

拓扑群 [英 topological group 法 groupe topologique 德 topologische Gruppe 俄 топологическая группа 日 位相群] 【定义】 若群G同时又是一个拓扑空间，并且直积拓扑空间$G\times G$到G中的映射$(x,y)\to xy$（积）以及G到G中的映射$x\to x^{-1}$（逆元）都是连续映射，就称G为**拓扑群**，并把不考虑拓扑的群G称为拓扑群G的**基础群**(underlying group)，拓扑空间G称为拓扑群G的**基础拓扑空间**(underlying topological space). 设G，G'是两个拓扑群，如果f是基础群G，G'间的一个同构†，并且f又是基础拓扑空间G，G'间的一个同胚†，那末，就说f是拓扑群G，G'间的一个**同构**(isomor-

phism)．存在同构的两个拓扑群 G, G' 称为**同构的** (isomorphic)．

【邻域系】 设 $\mathfrak{N}$ 为拓扑群 G 的单位元 e 的邻域系，即 $\mathfrak{N}$ 是由 G 中所有这样的子集所组成，每个子集包含一个含有 e 的开集．这时，$\mathfrak{N}$ 具有以下的性质 1)—6)：1) 若 $U\in\mathfrak{N}$ 且 $U\subset V$，则 $V\in\mathfrak{N}$；2) 若 $U, V\in\mathfrak{N}$，则 $U\cap V\in\mathfrak{N}$；3) 若 $U\in\mathfrak{N}$，则 $e\in U$；4) 对于任意的 $U\in\mathfrak{N}$，存在 $W\in\mathfrak{N}$，使得 $WW=\{xy|x, y\in W\}\subset U$；5) 若 $U\in\mathfrak{N}$，则 $U^{-1}\in\mathfrak{N}$；6) 若 $U\in\mathfrak{N}$, $a\in G$，则 $aUa^{-1}\in\mathfrak{N}$．反之，若群 G 的子集的一个非空族 $\mathfrak{N}$ 具有性质 1)—6)，则存在 G 的拓扑 $\mathfrak{D}$，使得 $\mathfrak{N}$ 成为 e 的邻域系，且 G 成为具有拓扑 $\mathfrak{D}$ 的拓扑群．这样的拓扑还是唯一的．因为在拓扑群 G 中，左平移†$x\to ax$ 与右平移† $x\to xa$ 都是 G 到 G 上的同胚，故若 $\mathfrak{N}$ 是单位元 e 的邻域系，则 $a\mathfrak{N}=\mathfrak{N}a$ 是元 a 的邻域系，此处 $a\mathfrak{N}=\{aU|U\in\mathfrak{N}\}$．

当拓扑群 G 的基础拓扑空间是 Hausdorff 空间†时，G 就称为 **T_2 拓扑群**，或 **Hausdorff 拓扑群** (Hausdorff topological group)，或**分离拓扑群**(英 separated topological group 法 groupe topologique séparé)．若拓扑群 G 的基础拓扑空间是 T_0 空间†，则易知 G 也是 T_1 空间†；若它是 T_1 空间，则因它的拓扑具有一致性，故为完全正则空间†，从而为 Hausdorff 空间．这就是说，基础拓扑空间为 T_0 空间的拓扑群是 T_2 拓扑群．

【直积拓扑群】 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是拓扑群的一个族，则基础群 G_α 的直积群 $G=\prod_{\alpha\in A}G_\alpha$ 连同基础拓扑空间 G_α 的直积拓扑†成为拓扑群．这个拓扑群 $G=\prod_{\alpha\in A}G_\alpha$ 称为拓扑群 $G_\alpha\ (\alpha\in A)$ 的**直积拓扑群**(direct product topological group)．

【子群】 拓扑群 G 的基础群的任意子群 H 连同它作为 G 的子空间†的拓扑(相对拓扑†)成为拓扑群，称 H 为拓扑群 G 的**子群** (subgroup)．我们把作为闭集的子群与作为开集的子群分别称为**闭子群** (closed subgroup) 与**开子群** (open subgroup)．开子群一定也是闭子群．再者，对于拓扑群 G 的任意子群 H，H 的闭包 $\bar{H}$ 也是子群．若 H 是正规子群，则 $\bar{H}$ 也是正规子群．若 H 是交换子群，则 $\bar{H}$ 也是交换子群．在 T_2 拓扑群 G 中，任意子集 M 的中心化子† $C(M)=\{x\in G|xm=mx(m\in M)\}$ 是 G 的闭子群．特别地，T_2 拓扑群 G 的中心 $C=C(G)$ 是 G 的闭正规子群．

【商空间】 设 H 是拓扑群 G 的子群，$G/H=\{aH|a\in G\}$ 是关于 H 的左陪集†的集合，p 是 G 到 G/H 上的标准满射：$p(a)=aH$，则在 G/H 中可引入商拓扑†，即使得 p 是连续映射的最强拓扑．这时，对于 G/H 的子集 A，因为当 $p^{-1}(A)$ 是开集时，A 也是开集，故 p 也是开映射†．引入这个拓扑的集合 G/H 称为关于拓扑群 G 的子群 H 的**左商空间** (left quotient space, left coset space)．同样可定义**右商空间** (right quotient space, right coset space) $H\backslash G=\{Ha|a\in G\}$．商空间 G/H 是离散的充分必要条件为：H 是 G 的开子群．商空间是 Hausdorff 空间的充分必要条件为：H 是闭子群．若 G/H 与 H 均为连通的，则 G 也是连通的．若 G/H 与 H 均为紧的，则 G 也是紧的．再者，若 H 是 G 的闭子群，并且 G/H 与 H 均为局部紧的，则 G 也是局部紧的．

若 H 是拓扑群 G 的正规子群，则商群 G/H 基于商空间的拓扑就成为拓扑群，称它为拓扑群 G 关于其正规子群 H 的**商群**(或**剩余(类)群**) (quotient group)．

【连通性】 拓扑群 G 中含有单位元 e 的连通分支† G_0 是 G 的闭正规子群．这时，对于任意的 $a\in G$，含有 a 的连通分支是陪集 $aG_0=G_0a$．G_0 称为 G 的**单位元分支** (identity component)．商群 G/G_0 是完全不连通†的(即所有连通分支均为一个点)．连通拓扑群 G 可由其单位元的任意邻域 U 所生成，这就是说，G 的任意元均可表为 U 中有限多个元的乘积．连通拓扑群 G 的完全不连通的(特别是离散的)正规子群包含在 G 的中心内．

【一致结构】 设 $\mathfrak{N}_0$ 为拓扑群 G 的单位元

的基本邻域系，对于 $U\in\mathfrak{N}_0$，命 $U_l=\{(x,y)\in G\times G\,|\,y\in xU\}$，把 $\{U_l\,|\,U\in\mathfrak{N}_0\}$ 作为一致性的基†，可在G中定义一致性，并称这个一致性为G的**左一致性**(left uniformity)．G的左乘变换 $x\to ax$ 关于左一致性是一致连续变换．同样，基于 $U_r=\{(x,y)\,|\,y\in Ux\}$ $(U\in\mathfrak{N}_0)$ 可定义**右一致性**(right uniformity)．这两个一致性不一定相同．映射 $x\to x^{-1}$ 是赋予左一致性的一致空间G到赋予右一致性的一致空间G的一致同胚†．这样，拓扑群G基于与其拓扑相容†的一致性成为一致空间，因而如果它的基础拓扑空间是 T_1 空间，则它是完全正则†空间．

【完备性】 若拓扑群G关于左一致性是完备†的，则它关于右一致性也是完备的，反之亦然．这时，拓扑群G就称为**完备的**(complete)．局部紧的 T_2 拓扑群是完备的．当 T_2 拓扑群G与完备的 T_2 拓扑群 $\hat{G}$ 的一个稠密子群同构时，就称 $\hat{G}$ 为G的**完备化**(completion)，而称G是**可完备化的**(completable)．任意一个 T_2 拓扑群G不一定是可完备化的，也就是说 $\hat{G}$ 未必存在．T_2拓扑群G可完备化的充分必要条件是，关于左一致性的一致空间G的任意 Cauchy 滤子†在映射 $x\to x^{-1}$ 之下仍是这个一致空间G的 Cauchy 滤子．这样一来，除同构外，这个 $\hat{G}$ 是唯一确定的．如果 T_2 拓扑群G是交换群，则G恒有完备化 $\hat{G}$，而且 $\hat{G}$ 也是交换群．再者，如果 T_2 拓扑群G的每个点都有全有界†的邻域，则G存在完备化 $\hat{G}$，且 $\hat{G}$ 是局部紧的．

【度量化】 对于 T_2 拓扑群G，如果其拓扑能够由引入度量而得到，则称G是**可度量化的**(metrizable)．T_2 拓扑群G可度量化的充分必要条件是，G满足第一可数公理†．这时度量可以特别取作左不变的，即度量在左平移下不变．同样也可取右不变度量．又如，满足第一可数公理的紧 T_2 拓扑群可由同时是左不变和右不变的度量来赋予拓扑([5])．

【同构定理】 对于两个拓扑群 G,G'，若基础群G到基础群G'内的同态f是基础空间G到G'内的连续映射，则称f是**连续同态**(continuous homomorphism)．如果同态f是连续的，而且还是开映射，就称f是**开连续同态**(strict morphism, open continuous homomorphism)．由仿紧的局部紧拓扑群到局部紧 T_2 拓扑群上的连续同态是开连续同态．

一般地，若存在开连续同态f，使G映到G'上，则称拓扑群G'与拓扑群G是**同态的**(homomorphic)．这时，命N为f的核 $f^{-1}(e)$，则商群 G/N 与 G' 作为拓扑群是同构的(**同态定理**(homomorphism theorem))．再设f是拓扑群G到拓扑群G'上的开连续同态，H'是G'的子群，则 $H=f^{-1}(H')$ 是G的子群，并且由 $\varphi(gH)=f(g)H'$ 所定义的映射φ是商空间 G/H 到商空间 G'/H' 上的同胚．特别是，若H'是正规子群，则H也是正规子群，并且φ是作为拓扑群的商群 G/H 到商群 G'/H' 上的同构(**第一同构定理**(first isomorphism theorem))．若拓扑群G的两个子群H与N满足条件 $HN=NH$，则商空间 $H/H\cap N$ 到 HN/N 的标准映射 $f:h(H\cap N)\to hN$ 是连续的双射，但不一定是开映射．特别是，若N是群HN的正规子群，则f是连续同态映射．再若f是开映射，则商群 $H/H\cap N$ 与 HN/N 作为拓扑群是同构的(**第二同构定理**(second isomorphism theorem))．例如，若 1) N是紧的；或 2) G是局部紧的，且HN与N都是G的闭子群，H是可数个紧集的并；等等，则f确是开映射．若拓扑群G的子群H与正规子群N满足条件 $H\supset N$，则商空间 $(G/N)/(H/N)$ 到 G/H 上的标准映射为同胚；特别当H也是正规子群时，则商群 $(G/N)/(H/N)$ 与 G/H 作为拓扑群也是同构的(**第三同构定理**(third isomorphism theorem))．

【射影极限】 设A是一个伪有向集†，$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是以A为指标集的拓扑群族，并且当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，存在连续同态 $f_{\alpha\beta}:G_\beta\to G_\alpha$，而且当 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$ 时，有 $f_{\alpha\gamma}=f_{\alpha\beta}\circ f_{\beta\gamma}$．这时拓扑群族 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 与映射族 $\{f_{\alpha\beta}\}$ 所成的组 $\{G_\alpha,f_{\alpha\beta}\}$ 称为**拓扑群的射影系**(projective system of topological groups)．这时再作拓扑群的直积 $\prod_{\alpha\in A}G_\alpha$，并在

$\prod_{\alpha\in G} G_\alpha$ 中取所有适合条件 $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$（当 $\alpha\leqslant\beta$ 时）的元 $x=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$，又设所有这样的 x 所成的集合为 G，则 G 是 ΠG_α 的子群. 这样得出的拓扑群 G 称为拓扑群的射影系 $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ 的**射影极限群** (projective limit group)，记为 $G=\varprojlim G_\alpha$. 若所有的 G_α 是 T_2 拓扑群（或为完备群），则 G 也是 T_2 拓扑群（或完备群）. 现在，设有同样指标集 A 的另一拓扑群的射影系 $\{G'_\alpha, f'_{\alpha\beta}\}$，并且存在连续同态 $u_\alpha: G_\alpha\to G'_\alpha$，使得当 $\alpha\leqslant\beta$ 时恒有 $u_\alpha\circ f_{\alpha\beta}=f'_{\alpha\beta}\circ u_\beta$，这时，必存在唯一的从 $G=\varprojlim G_\alpha$ 到 $G'=\varprojlim G'_\alpha$ 的连续同态 u，使得对任意的 $\alpha\in A$，有 $u_\alpha\circ f_\alpha = f'_\alpha\circ u$. 这里的 f_α（以及 f'_α）是 ΠG_α（以及 $\Pi G'_\alpha$）到 G_α（以及 G'_α）的射影在 G（以及 G'）上的限制. 这个 u 称为连续同态族 $\{u_\alpha\}$ 的**射影极限** (projective limit)，记作 $u=\varprojlim u_\alpha$. 设 G 是 T_2 拓扑群，$\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 G 的闭正规子群的递减序列（即当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，$H_\alpha\supset H_\beta$），作商群 $G_\alpha = G/H_\alpha$，并令当 $\alpha\leqslant\beta$ 时，$f_{\alpha\beta}$ 是 G_β 到 G_α 的标准映射 $gH_\beta\to gH_\alpha$，这时 $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ 是拓扑群的射影系. 命 f_α 为 G 到 G/H_α 的射影，又命 $f=\varprojlim f_\alpha$. 现在，假定 G 的单位元的任意邻域都包含某个 H_α，并假定某个 H_α 是完备的，则 $f=\varprojlim f_\alpha$ 是 G 到 $\varprojlim G/H_\alpha$（作为拓扑群）上的同构. 关于拓扑群的一般理论，→[1]，[4]，[5].

【局部紧群】 以下说到的拓扑群，凡是未加申明的，都表示 T_2 拓扑群. 局部紧群（局部紧 T_2 拓扑群）G 的单位元分支 G_0 是 G 的所有开子群的交. 特别是，全不连通的局部紧群的单位元的任意邻域均含有开子群. 全不连通紧群是具有离散拓扑的有限群的射影极限.

一个 T_1 拓扑空间 L 称为**局部 Lie 群** (local Lie group)，如果它满足下面六个条件：(i) 存在 $L\times L$ 的一个非空子集 M 以及一个连续映射 $\mu: M\to L$，称它为**乘法** (multiplication)（把 $\mu(a,b)$ 记为 ab）. (ii) 若 (a,b)，(ab,c)，(b,c)，(a,bc) 都在 M 中，则 $(ab)c=a(bc)$. (iii) L 含有一个元 e，称它为**单位元** (identity)，使得 $L\times\{e\}\subset M$，并且对于所有 $a\in L$，$ae=a$ 都成立. (iv) 存在 L 的一个非空开子集 N 以及一个连续映射 $\nu: N\to L$，使得对于所有 $a\in N$，$a\nu(a)=e$ 都成立. (v) 在 L 中存在 e 的一个邻域 U，并存在从 U 到 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的原点的一个邻域 V 内的同胚 f. (vi) 设 D 是 $V\times V$ 的开子集，此处 $D=\{(x,y)\in V\times V \mid (f^{-1}(x), f^{-1}(y))\in M,\ f^{-1}(x), f^{-1}(y)\in U\}$，则由 $F(x,y)=f\mu(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ 所定义的函数 $F: D\to V$ 属于 C^∞ 类.

对于任意连通局部紧群 G 的单位元 e 的任一邻域 U、存在紧正规子群 K 与子集 L（L 关于 G 的诱导拓扑以及关于 G 的群运算构成局部 Lie 群†），使得积 LK 是包含在 U 内的 e 的邻域，而且 LK 基于 $(l,k)\to lk$ 与积空间 $L\times K$ 同胚. 连通局部紧群 G 的任意紧子群均包含在一个极大紧子群内，而且 G 的所有极大紧子群均互为共轭†. 取定 G 的一个极大紧子群 K，则存在 G 的有限个子群 $H_1, H_2, \cdots, H_r$，每个 H_i 都与实数加法群 $\boldsymbol{R}$ 同构，且使得 $G=KH_1\cdots H_r$，而 $(k, h_1, \cdots, h_r)\to kh_1\cdots h_r$ 是直积空间 $K\times H_1\times\cdots\times H_r$ 到 G 上的同胚. 任意局部紧群上都存在左不变的正测度和右不变的正测度（Haar 测度†），它们除了一个常数倍数外都是唯一确定的. 由此，实数加法群 $\boldsymbol{R}$ 上的调和分析理论可以推广到 G 上（→不变测度，拓扑 Abel 群，调和分析，紧群，酉表示）.

【局部 Euclid 群】 如果拓扑群 G 的每个点都有一个与 Euclid 空间的某个开集同胚的邻域，就称 G 为**局部 Euclid 群** (locally Euclidean group). 若群 G 同时又是实解析流形†，且群运算 $(x,y)\to xy^{-1}$ 为实解析映射，则称 G 为 Lie 群†. Lie 群当然是局部 Euclid 群.

【Hilbert 第五问题】 反之，任意局部 Euclid 群是否为 Lie 群的问题，就是 **Hilbert 第五问题** (fifth problem of Hilbert)（→Hilbert）. 这个问题在 1952 年已得到肯定的解答，即证明了任意有限维†局部连通†的局部紧群是 Lie 群（D. Montgomery-L. Zippin [3]）. 与此相关，也研究了 Lie 群与一般的局部紧群之间的关系，而得

到了如下的结果：局部紧群G为 Lie 群的充分必要条件是：存在单位元e的一个邻域，使得它除包含$\{e\}$以外不包含任何其他子群(或正规子群)．再者，任意局部紧群都含有一个开子群，它是 Lie 群的射影极限．Hilbert 第五问题也可表述为：求有效地†作用于流形上的拓扑变换群†是 Lie 群的充分必要条件(→变换群)．

【覆盖群】 弧连通†且局部弧连通†的T_2拓扑群的全体用记号 $\mathfrak{G}$ 来表示．若 $G^* \in \mathfrak{G}$ 是 $G \in \mathfrak{G}$ 的覆盖空间†，并且覆盖映射† $f: G^* \to G$ 是群的开连续同态，则称 G^* (或(G^*, f)) 是G的**覆盖群** (covering group)．这时，f 的核 $f^{-1}(e)=D$ 是包含在 G^* 的中心内的离散子群，且 G^*/D 与G作为拓扑群是同构的．设$\Pi_1(G)$是G的基本群．由f导出的自然同态 $f^*: \Pi_1(G^*) \to \Pi_1(G)$ 是单同态，若基于 f^* 而看作 $\Pi_1(G^*) \subset \Pi_1(G)$，则有 $D \cong \Pi_1(G)/\Pi_1(G^*)$．反之，任取包含在 $G^*(G^* \in \mathfrak{G})$ 的中心内的离散子群D，则 G^* 是 $G = G^*/D$ 的覆盖群．再者，对于 $G\,(G \in \mathfrak{G})$ 的任意覆盖空间 (G^*, f)，在 G^* 中适当定义乘法，可使 G^* 成为属于 $\mathfrak{G}$ 的拓扑群，并且(G^*, f)是G的覆盖群．特别是，任意的 $G \in \mathfrak{G}$ 都具有单连通†的覆盖群$(\tilde{G}, \varphi)$．这时，设(G^*, f)是G的任一覆盖群，则存在同态 $f^*: \tilde{G} \to G^*$，使得 $(\tilde{G}, f^*)$ 是 G^* 的覆盖群，而且 $\varphi = f \circ f^*$．由此可知，$G \in \mathfrak{G}$ 的单连通覆盖群作为拓扑群都与 $\tilde{G}$ 同构．因之，称G的单连通覆盖群$(\tilde{G}, \varphi)$为G的**万有覆盖群** (universal covering group)．

一般地，设 G, G' 是两个拓扑群，e, e' 是它们的单位元，从e的某个邻域U到e'的某个邻域 U' 上的同胚f，若满足下面的条件 1) 与 2)，就称它为G到G'的**局部同构** (local isomorphism)：1) 当 a, b, ab 都含在U内时，有 $f(a)f(b) = f(ab)$；2) 设 $f^{-1} = g, a', b', a'b' \in U'$，则 $g(a'b') = g(a')g(b')$．当存在G到 G' 的局部同构时，就称G与G'是**局部同构的** (locally isomorphic)．若 G^* 是G的覆盖群，则 G^* 与G局部同构．属于 $\mathfrak{G}$ 的两个拓扑群局部同构的充分必要条件是：G与G'的万有覆盖群同构．又两个连通的 Lie 群 G, G' 局部同构的充分必要条件是它们的 Lie 代数†同构．

一般地，若拓扑群G的单位元的邻域U到群H的映射f满足条件：当 $a, b, ab \in U$ 时，有 $f(ab) = f(a)f(b)$，则称f为G到H的**局部同态** (local homomorphism)，U 称为它的定义域．单连通的群 $G(G \in \mathfrak{G})$ 到群H的局部同态，当定义域为连通时，可以扩张为G到H的同态([2],[4])．

【拓扑域】 若环R同时又是拓扑空间，并且和 $x+y$，积 xy 都是 $R \times R$ 到R的连续映射，则称R为**拓扑环** (topological ring)．若拓扑环K同时又是域(不假定交换性)，并且 $x \to x^{-1}$ 是 $K^* = K - \{0\}$ 到 K^* 的连续映射，则称K为**拓扑域** (topological field)．以下说到的K，均指本身是非离散的局部紧 Hausdorff 空间的拓扑域．若K是连通的，则K是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上有限秩的可除代数†，而且必与实数域 $\boldsymbol{R}$，复数域 $\boldsymbol{C}$，四元数体 $\boldsymbol{H}$ 之一同构．若K是不连通的，则它必为全不连通，并且与 p-adic 数域† $\boldsymbol{Q}_p$ 上的有限秩可除代数，或以有限域作为系数域的形式幂级数域†上的有限维可除代数同构([4])．

关于拓扑群的各种重要类型→紧群，拓扑 Abel 群，Lie 群，拓扑线性空间等．

[参] [1] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Topologie générale, 第三版，特别是第3章，Actualités Sci. Ind., 1143c, Hermann, 1960; [2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; [3] D. Montgomery-L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience, 1955; [4] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954 (中译本：Л. С. 邦德列雅金，连续群，科学出版社，1957, 1958); [5] 淡中忠郎，位相群論，岩波，1949.

拓扑 Abel 群 [英 topological Abelian group 法 groupe topologique abélien 德 topologische Abelsche Gruppe 俄 коммутативная топологическая группа 日 位相アーベル群] 交换的拓扑群称为**拓扑 Abel 群**．在本条中，除最后的线性拓扑一节外，只考察同时是局部紧 Hausdorff 空间的拓扑 Abel 群，并把它简称为群(→

拓扑群).

【特征标】 若绝对值等于1的复数值连续函数 $\chi(x)$ ($x \in G$) 满足 $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$，则称 $\chi(x)$ 为群G的**特征标** (character). 即χ是G的一维的从而是不可约的酉表示†. 反之，G的任一不可约酉表示是一维的. 即对拓扑 Abel 群来说，它的特征标与不可约酉表示是一致的. 如果由 $\chi\chi'(x) = \chi(x)\chi'(x)$ 来定义两个特征标 χ, χ' 的积，则特征标的全体构成**特征标群** (character group)$C(G)$. 在 $C(G)$ 内引入紧开拓扑†后，$C(G)$ 也成为一个局部紧拓扑 Abel 群.

【对偶定理】 固定G的元x后，$\chi(x)$($\chi \in C(G)$) 是 $C(G)$ 的一个特征标，即为 $CC(G)$ 的一个元，把它记为$x(\chi)$，并考虑对应 $G \ni x \to x(\chi) \in CC(G)$. 这个对应是一一的. 这是因为，任意的局部紧群$G$具有充分多†的不可约酉表示(→酉表示)，而当$G$为 Abel 群时，$G$的任何不可约酉表示都是$G$的特征标. 此外，$C(G)$的特征标只能是上述的 $x(\chi)$. 也就是说，由上面的对应可得到 $G \cong CC(G)$. 这就是 **Понтрягин 对偶定理** (Pontrjagin's duality theorem).

根据对偶定理，G与 $C(G)$ 中的每一个都与其中另一个的特征标群同构. 在这个意义下，也称G和 $C(G)$ 互相**对偶** (dual).

【子群的对应】 设 G, $G' = C(G)$是互相对偶的群. 给出了G的闭子群g后，对g的所有元x都满足 $\chi'(x)=1$ 的 χ' 的全体构成了 G' 的闭子群，通常把它写作(G',g). 如果同样地定义 (G, g')，则对应 $g \longleftrightarrow (G', g) = g'$ 建立了G的闭子群和 G' 的闭子群之间的一个一一对应. 又若 $g_1 \supset g_2$，则 g_1/g_2 与 $(G', g_2)/(G', g_1)$ 是互相对偶的. 在 G, G'的群运算用加法表示的情形，单位元记为 0，从而 $x(\chi') = 1$ 就变成了 $x(\chi') = 0$. 在这个意义下，称 (G',g) 为g的**零化子** (annihilator, annulator).

【结构定理】 命$\mathfrak{A}$表示群(即局部紧 Hausdorff 拓扑 Abel 群) 的全体. 若 G_1, $G_2 \in \mathfrak{A}$，则直积 $G_1 \times G_2 \in \mathfrak{A}$. 若 $G \in \mathfrak{A}$，而H是G的闭子群，则 $H \in \mathfrak{A}$ 而且 $G/H \in \mathfrak{A}$. 此外，若G为任意拓扑 Abel 群，H是G的闭子群，而且 $H \in \mathfrak{A}$, $G/H \in \mathfrak{A}$，则G本身也属于$\mathfrak{A}$. 这样，$\mathfrak{A}$对于求直积、取闭子群、取商群及扩张†来说，都是封闭的. 命C表示把群G映为其对偶群 $C(G)$ 的映射. C是把$\mathfrak{A}$映到$\mathfrak{A}$上的自反映射，而若 $G \supset H$，则H的零化子 $(C(G),H)$ 是 $C(G)$ 的闭子群. 此外，$C(G/H) \cong (C(G), H)$, $C(H) \cong C(G)/(C(G), H)$, $C(G_1 \times G_2) \cong C(G_1) \times C(G_2)$. 最后还有 $H = (G, (C(G), H))$，称它为零化子的**互反性** (reciprocity).

属于$\mathfrak{A}$的群的典型例子有：实数加法群 $\boldsymbol{R}$，有理整数加法群 $\boldsymbol{Z}$，一维环面群 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 以及有限 Abel 群 $\boldsymbol{F}$. $\boldsymbol{T}$ 同构于绝对值等于1的复数的乘法群 $U(1)$. n个 (n 是自然数) $\boldsymbol{R}$ 的直积 $\boldsymbol{R}^n$ 是n维**向量群** (vector group)，n个 $\boldsymbol{T}$ 的直积 $\boldsymbol{T}^n$ 是n维**环面** (torus)或**环面群** (torus group). $\boldsymbol{T}^n$ 和 $\boldsymbol{F}$ 是紧的，但 $\boldsymbol{R}^n$ 和 $\boldsymbol{Z}^n$ 都不是紧的. 而且 $C(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}$, $C(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Z}$, $C(\boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{T}$. 任意的有限 Abel 群 $\boldsymbol{F}$ 同构于它的特征标群 $C(\boldsymbol{F})$. 有限个$\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{Z}$与有限 Abel 群 $\boldsymbol{F}$ 的直积，即形如 $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{T}^m \times \boldsymbol{Z}^n \times \mathbf{F}$ 的群，称为**初等 Abel 群** (elementary Abelian group).

$\mathfrak{A}$中的任一群均同构于某个维数的向量群与某个紧群基于某离散群的扩张的直积 (**结构定理** (structure theorem)). 因此，如果运算C的效果已被充分了解，那末，搞清$\mathfrak{A}$中的群的结构的问题，就归结为仅与离散群有关的问题. 而关于$\mathfrak{A}$中的群的结构，有如下的定理. 如果 $G \in \mathfrak{A}$ 由单位元e的一个紧邻域所生成，则G同构于某个紧群K与形如 $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{Z}^m$($n$, m 为非负整数)的群的直积. 此时，G的任意紧子群都包含于K内. 也就是说，K是G的唯一的**极大紧子群** (maximal compact subgroup). 由e的紧邻域所生成的群 $G \in \mathfrak{A}$，是初等 Abel 群的射影极限†. Л. С. Понтрягин 在证明了这样的结构定理后，又用它来证明了对偶定理.

【紧元】 若群 $G \in \mathfrak{A}$ 的元a所生成的循环群† $\{a^n | n \in \boldsymbol{Z}\}$ 包含在G的一个紧子集之内，则称a为**紧元** (compact element). 群 $G \in \mathfrak{A}$

的紧元的全体 C_0 是 G 的一个闭子群，商群 G/C_0 不含有单位元以外的紧元. 尤其当 G 是由单位元的一个紧邻域所生成时，C_0 与 G 的极大紧子群 K 是相同的. 零化子 $(C(G), C_0)$ 是 G 的特征标群 $C(G)$ 的一个连通分支. 当 G 为离散群时，G 的紧元就是 G 的有限阶的元.

【紧群与离散群】 两个互相对偶的群 G, $X \in \mathfrak{A}$, 如果其中一个是紧群，则另一个必是离散群，而当一个是离散群时，则另一个就是紧群. 根据对偶定理，从原则上来说，紧 Abel 群 G 的性质可以用离散 Abel 群 $C(G)$ 的性质来表达. 我们来举出两三个例子. 当 G 是紧 Abel 群时，它的维数† 就等于离散 Abel 群 $C(G)$ 的秩†. 若 Y 是离散 Abel 群 X 的子群，且商群 X/Y 除了单位元以外不具有有限阶的元，则称 Y 为可**除子群** (divisible subgroup). 紧 Abel 群 G 为局部连通†的充分必要条件是：特征标群 $C(G)$ 的任意有限子集包含在 $C(G)$ 中的某个由有限个元生成的可除子群内. 因此可以导出以下的结果：具有由可数个开集组成的基的紧局部连通 Abel 群 G 的形式必为 $\boldsymbol{T}^a \times \boldsymbol{F}$, 这里的 $\boldsymbol{F}$ 是有限 Abel 群，$\boldsymbol{T}^a$ 为有限个或最多是可数无限个一维环面群 $\boldsymbol{T}$ 的直积.

【对偶直积分解】 设 G 是紧或离散 Abel 群，$\mathfrak{M} = \{H_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 G 的闭子群的一个族. 此时设 $\Delta(\mathfrak{M}) = \bigcap_{\alpha \in A} H_\alpha$, 并设 $\Sigma(\mathfrak{M})$ 是 G 的包含 $\bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha$ 的最小闭子群. 如果令 $\Omega = \{(C(G), H_\alpha) | \alpha \in A\}$, 则有 $\Delta(\Omega) = (C(G), \Sigma(\mathfrak{M}))$ 以及 $\Sigma(\Omega) = (C(G), \Delta(\mathfrak{M}))$. 现在设 $G = \prod_{\alpha \in A} H_\alpha$ 是直积分解，对于各个 $\alpha \in A$, 又置 $K_\alpha = \Sigma(\mathfrak{M} - \{H_\alpha\})$, $X_\alpha = (C(G), K_\alpha)$. 则此时 X_α 是 H_α 的特征标群，且 $C(G) = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是直积分解. $C(G)$ 的这个直积分解称为 G 的直积分解 $G = \prod_{\alpha \in A} H_\alpha$ 的**对偶直积分解** (dual direct product decomposition).

【正交群偶】 对于两个群 G, G', 如果存在从直积空间 $G \times G'$ 到绝对值为 1 的复数的全体 $U(1)$ 内的一个映射 $(x, x') \to xx'$, 满足：

$$(x_1x_2)x' = (x_1x')(x_2x'),$$
$$x(x_1'x_2') = (xx_1')(xx_2'),$$

则称 G, G' 构成**群偶** (group pair). 现在假设 G, G' 构成群偶. 把 xx' 看作以 x' 为变量的函数 $x(x')$, 如果仅当 $x_1 = x_2$ 时才能使得两个函数 $x_1(x')$ 与 $x_2(x')$ 相同，并且把 G 与 G' 交换后仍是如此，则称 G, G' 构成了**正交群偶** (orthogonal group pair). 若 G 为紧 Abel 群，G' 为离散 Abel 群，而且 G, G' 构成正交群偶，则 G, G' 是互为对偶的.

【交换 Lie 群】 初等 Abel 群 $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{T}^m \times \boldsymbol{Z}^n \times \boldsymbol{F}$ 是交换 Lie 群†, 反之，由单位元的一个紧邻域所生成的任意交换 Lie 群 G 同构于一个初等 Abel 群. 特别地，任意的连通交换 Lie 群 G 同构于某个 $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{T}^m$. n 维向量群 $\boldsymbol{R}^n$ 的闭子群 H 同构于 $\boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{Z}^q$ $(0 \leqslant p + q \leqslant n)$. 详细地说，存在向量群 $\boldsymbol{R}^n$ 的基 $a_1, \cdots, a_n$, 使 $H = \left\{\sum_{i=1}^{p} x_i a_i + \sum_{j=p+1}^{r} n_j a_j | x_i \in \boldsymbol{R}, n_j \in \boldsymbol{Z}\right\}$. 从而，如果 $\boldsymbol{R}^n$ 的商群是分离拓扑群†, 则它同构于形如 $\boldsymbol{R}^l \times \boldsymbol{T}^m$ $(0 \leqslant l + m \leqslant n)$ 的群. 又 n 维环面群 $\boldsymbol{T}^n$ 的闭子群都同构于形如 $\boldsymbol{T}^p \times \boldsymbol{F}$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ 的群，这里的 $\boldsymbol{F}$ 表示有限 Abel 群. 从而，如果 $\boldsymbol{T}^n$ 的商群是分离拓扑群，则它同构于 $\boldsymbol{T}^m$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$. 线性空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则线性变换†是向量群 $\boldsymbol{R}^n$ 的连续自同构†, 而实际上，$\boldsymbol{R}^n$ 的连续自同构都可由正则线性变换给出. 也就是说，$\boldsymbol{R}^n$ 的连续自同构群同构于 n 次一般线性群† $GL(n, \boldsymbol{R})$. n 维环面群 $\boldsymbol{T}^n = \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ 的连续自同构可以由满足 $\varphi(\boldsymbol{Z}^n) = \boldsymbol{Z}^n$ 的 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则线性变换 φ 给出. 因此，$\boldsymbol{T}^n$ 的连续自同构群同构于以有理整数作为元素的 n 阶方阵中所有行列式等于 ± 1 的方阵所构成的乘法群.

【Kronecker 逼近定理】 对于任意的 $G \in \mathfrak{A}$ 以及 G 中不一定为闭的子群 H, $(G, (C(G), H))$ 必与 H 的闭包 $\bar{H}$ 重合. 特别是，H 在 G 内稠密†的充分必要条件是：零化子 $(C(G), H)$ 仅由单位元构成. 现在设 $G = \boldsymbol{R}^n$, 令 H 是由

$\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in \boldsymbol{R}^n$ 以及 $\boldsymbol{R}^n$ 的自然基† $e_1=(1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,\cdots 0,1)$ 所生成的 $\boldsymbol{R}^n$ 的子群. 此时 H 在 $\boldsymbol{R}^n$ 内稠密的充分必要条件是: $(\boldsymbol{R}^n,H)=\{0\}$, 即 $\theta_1,\cdots,\theta_n,1$ 在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上线性无关. 这就是 **Kronecker 逼近定理** (Kronecker's approximation theorem). 根据此定理,可以推导出 n 维环面群 $\boldsymbol{T}^n$ 具有在 $\boldsymbol{T}^n$ 内稠密的循环子群与单参数子群.

【线性拓扑】 在域 Ω 中考虑离散拓扑. 如果在 Ω 模 G 里能引进一个拓扑, 使零元 0 有一个由 Ω 子模组成的基本邻域系, 且满足 Hausdorff 分离公理,而且使群 G 连同所引进的拓扑成为拓扑Abel 群, 则这个拓扑就称为**线性拓扑** (linear topology). 线性拓扑在 Ω 子模上的限制仍是线性拓扑. 若 G 的秩为有限, 则线性拓扑就是离散拓扑. G 上的离散拓扑总是线性拓扑. 将 Ω 子模 H 移动 $g\in G$ 而得到的集合 $V=g+H$ 称为 G 内的一个**线性簇** (linear variety). 若 V 是线性簇,则 $\bar V$ 也是线性簇. 如果 G,G' 都是赋予线性拓扑的 Ω 模,那末当提到 G 到 G' 内的同态时,总是认为它关于这个拓扑是开连续映射. 设 V 是 G 内的线性簇, 如果对任意的在 V 中为闭的线性簇所构成的具有有限交性质†的系 $\{V_\alpha\}$,必有 $\bigcap\limits_\alpha V_\alpha\neq\phi$,则称 V 是**线性紧的** (linearly compact). 此时 V 在 G 中是闭的. 又若可以选取线性紧 Ω 子模的一个集合,使得它可以作为 G 的零元的邻域基,则称 G 为**局部线性紧的** (locally linearly compact). 从赋予线性拓扑的 Ω 模 G 到 Ω 内的同态的全体 $C_\Omega(G)$ 仍是 Ω 模. 对于 G 的任意线性紧 Ω 子模 H, 置 $U(H)=\{\chi\mid\chi(g)=0,\ g\in H\}$,则用 $\{U(H)\}$ 作为基本邻域系可以在 $C_\Omega(G)$ 内引入线性拓扑. 如果 G 分别为离散的、线性紧的、局部线性紧的, 则 $C_\Omega(G)$ 相应地是线性紧的、离散的、局部线性紧的. 若 G, H 是分别赋予了线性拓扑的 Ω 模, $\varphi:G\ni g\to\varphi_g\in C_\Omega(H)$, $\phi:H\ni h\to\phi_h\in C_\Omega(G)$ 分别是满足 $\varphi_g(h)=\phi_h(g)$ 的同态,则当 φ,ϕ 之一为同构时,另一个也必如此. 这类似于 Понтрягин 对偶定理, 称为 **Ω 模的对偶定理** (duality theorem for Ω-modules). 特别地,线性紧 Ω 模是一维空间的直和空间 (S. Lefschetz [5]).

【参】 [1] Л.С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954 (中译本: Л. С. 邦德列雅金, 连续群, 科学出版社, 1957, 1958); [2] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience, 1962; [3] 淡中忠郎, 双对原理,岩波, 1951; [4] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1940; [5] S. Lefschetz, Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1942; [6] E. Hewitt-K. A. Ross, Abstract harmonic analysis, Springer, I, 1963; II, 1970.

紧群 【英 compact group 法 groupe compact 德 kompakte Gruppe 俄 компактная группа 日 コンパクト群】 【紧群】 拓扑群† G 的基础拓扑空间是紧 Hausdorff 空间时, 称 G 为**紧群**. 环面群 $\boldsymbol{T}^n=\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n\ (n=1,2,\cdots)$(交换群),正交群† $O(n)$, 酉群† $U(n)$,辛群† $Sp(n)$等都是紧群(→典型群)(关于其他紧 Lie 群 →Lie 群, Lie 代数). 设 $C(G)$ 为紧群 G 上的复值连续函数 $f,g,h,\cdots$ 的全体所构成的线性空间†,对 $C(G)$ 引入范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in G}|f(x)|$ 后,它就成为 Banach 空间†.

紧群当然是局部紧的, 故可引入右不变 Haar 测度†. 由于紧性,全测度是有限的,而且这个测度也是左不变的. 特别取全测度为 1 时,这样的测度是唯一的; 属于 $L_1(G)$ 的 f 关于这个测度的积分称为 f 的**平均值** (mean value).

若 $f,g\in C(G)$, 则 $f(xy^{-1})\,g(y)$ 关于两个变量 x,y 是连续的,因之卷积† $f\times g(x)=\int f(xy^{-1})\,g(y)dy$ 也属于 $C(G)$; $C(G)$ 以卷积作为乘法就成为一个环†. 当 G 是有限群时,可以认为这个环是群环†的扩张,称它为紧群 G 的**群环** (group ring). 我们用记号 f^* 表示函数 $x\to\overline{f(x^{-1})}$, 而用记号 (f,g) 表示 $L_2(G)$ 的内积.

【紧群的表示】 设 $G(E)$ 为 Banach 空间 E 的所有有界线性算子†所成的环的乘法群. 给定拓扑群 G 到 $G(E)$ 的同态 U, 如果对 E 的

任意元 a, G 到 E 的映射 $x\to U(x)a$ 关于 E 的强拓扑[†]或弱拓扑[†]是连续映射，则分别称 U 为 G 的**强连续表示**（strongly continuous representation）或**弱连续表示**（weakly continuous representation）。特别是，当 E 是 Hilbert 空间[†]，且所有的 $U(a)$ 都是酉算子[†]时，就称这样的强连续表示为酉表示[†]。对于紧群 G 在 Hilbert 空间 E 上的任意强连续表示 U，以 $\langle a,b\rangle$ 表示 E 的内积 $(U(x)a, U(x)b)$ 的平均值，于是 U 在新的内积 $\langle a,b\rangle$ 所定义的 Hilbert 空间 E 内为酉表示。

如果在 Banach 空间 E 中，对所有 $U(x)$ $(x\in G)$ 均不变的闭子空间仅有 $\{0\}$ 和 E 本身，则称表示 U 为**不可约的**(irreducible)。若紧群 G 在 Banach 空间 E 中的弱连续表示是不可约的，则 E 是有限维的。又紧群 G 在 Hilbert 空间 E 上的任意酉表示均可分解为不可约表示的离散直和[†]，即存在 E 的互相正交的不可约（从而有限维）不变子空间的族 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使得 $E=\sum_{\alpha\in A}E_\alpha$。特别是，紧群在有限维空间上的任意连续表示都是完全可约的。设 G 为局部紧群[†]，在关于 G 的 Haar 测度的 $L_2(G)$ 中，以 $(U(x)f)(y)=f(yx)$ $(x,y\in G,\ f\in L_2(G))$ 来定义的表示 U 是 G 的酉表示，称它为 G 的(右)**正则表示**(regular representation)。紧群 G 的正则表示 U 的不可约分解将由后面的 **Peter-Weyl 理论**(Peter-Weyl theory) 给出。

今后，作为表示，仅限于考虑有限阶矩阵(连续的)表示。设 $D_1(x)=(d_{ij}^{(1)}(x))$, $D_2(x)=(d_{kl}^{(2)}(x))$是不相似[†]的不可约酉表示，由 Schur 引理[†]，有正交关系 $(d_{ij}^{(1)}, d_{kl}^{(2)})=0$ 以及 $(\sqrt{n_1}\,d_{ij}^{(1)}, \sqrt{n_1}\,d_{mn}^{(1)})=\delta_{im}\delta_{jn}$（$n_1$ 表示 D_1 的次数）。从 G 的每一个不可约表示类 D_α 中选择一个酉代表 $D_\alpha(x)=(d_{ij}^\alpha(x))$，令其次数为 n_α，则上面这个事实就是$\sqrt{n_\alpha}\,d_{ij}^\alpha(x)$ 的全体成为 $L_2(G)$的一个正规正交系[†]。

再者，设 $h\in C(G)$，把从 $C(G)$ 到 $C(G)$ 的映射 $f\to h\times f$ 写作 H，则H是 $C(G)$ 中的紧算子[†]。根据等式 $(h\times f, g)=(f, h^*\times g)$，则由 $h=h^*$ 可得 $(Hf,g)=(f,Hg)$，即H是 Hermite 算子[†]。对于给定的 f，可取适当的 $h(=h^*)$，使 $h\times f$ 与 f 一致地任意接近。又由紧 Hermite 算子的理论得知，Hf 可用 H 的特征函数的线性组合来一致逼近。H的特征空间是有限维的，而 $U(a)$ 又使H的特征空间不变，故H的特征函数是有限个$\sqrt{n_\alpha}\,d_{ij}^\alpha(x)$ 的线性组合，因而 f 可用有限个$\sqrt{n_\alpha}\,d_{ij}^\alpha(x)$ 的线性组合来一致逼近。这个事实与 Fourier 级数[†] 等情形一样，称为**逼近定理**(approximation theorem)。由此可得出正交系 $\{\sqrt{n_\alpha}\,d_{ij}^\alpha(x)\}$ 的完备[†]性，即 $C(G)$ 中与这个系的所有函数都正交的元仅限于零元。

由于 $C(G)$ 在 $L_2(G)$ 中是稠密的，故$\{\sqrt{n_\alpha}\cdot d_{ij}^\alpha(x)\}$ 是 Hilbert 空间 $L_2(G)$ 的完备正规正交系。因而对于任意的 $f\in L_2(G)$，其 Fourier 级数$\sum_\alpha\sum_{i,j}c_{ij}^\alpha\sqrt{n_\alpha}\,d_{ij}^\alpha(x)$（此处 $c_{ij}^\alpha=(f,\sqrt{n_\alpha}\cdot d_{ij}^\alpha)$）平方平均收敛[†]于 f。特别当 G 是紧 Lie 群时，对于充分多次可微函数 f，上面的 Fourier 级数就一致收敛于 f。

由矩阵 $D_\alpha(x)$ 的第 i 行的各个元素 $d_{ij}^\alpha(x)$ $(1\leqslant j\leqslant n_\alpha)$所生成的 n_α 维空间 V_i^α 在右正则表示U下不变，V_i^α 上由 U 所产生的表示也只能是 D_α。这里$\{\sqrt{n_\alpha}\,d_{ij}^\alpha(x)\}$ 组成 $L_2(G)$ 的完备正交系这个事实，意味着紧群 G 的正则表示 U 可分解成有限维不可约表示的离散直和，而各个不可约表示 D_α 在 U 中所出现的回数恰等于其次数 n_α。

若 $\varphi(x)\in C(G)$ 对于任意 x,y 满足 $\varphi(y^{-1}\cdot xy)=\varphi(x)$，则称它为**类函数**(class function)。所有类函数所成的集合 $K(G)$ 与作为群环的 $C(G)$ 的中心[†]是相同的。由于G的不可约表示的特征标[†]是类函数，故所有特征标所成的集合 $\{\chi_\alpha(x)\}$ 起着正交系$\{\sqrt{n_\alpha}\,d_{ij}^\alpha(x)\}$ 在 $C(G)$ 中所起的同样的作用。即$\{\chi_\alpha(x)\}$在$K(G)$(的完备化)中构成完备正规正交系，任意类函数可用这些特征标中的有限个的线性组合来一致逼近。

以上是 Peter-Weyl 理论的简要叙述。如

果G是一维环面群† $\boldsymbol{T}^1=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$,即实数加法群 mod 1 所得的紧群,则上述理论就是关于直线上的周期函数的 Fourier 级数理论. 关于 $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ 的具体的不可约表示和特征标的公式 ⇀典型群. 关于紧 Lie 群的表示 ⇀Lie 群, Lie 代数. 紧群的理论是由 F. Peter- H. Weyl (Math. Ann., **97** (1927)) 所完成的, J. von Neumann (1934) 在"群上的概周期函数论"(⇀殆周期函数)中把紧群的理论与 H. Bohr 的殆周期函数理论统一了起来.

【紧群的结构】 设a是紧群G中异于e的元. 由于拓扑群的基础空间是完全正则空间†, 故可在 $C(G)$ 中选取一个适当的 $f(x)$, 使 $f(a)\neq f(e)$, 从而存在G的表示 $D(x)$, 使得 $D(a)$不是单位矩阵. 这意味着G可表为紧 Lie 群列的射影极限群†. von Neumann (1933) 基于这个事实,证明了局部 Euclid 紧群是 Lie 群(⇀拓扑群[Hilbert 第五问题]).

【表示的集合】 G的表示的集合 $G'=\{D\}$ 可有以下一些运算:1) $D_1\otimes D_2$ (张量积表示†), 2) $D_1+D_2=\begin{pmatrix}D_1 & 0\\ 0 & D_2\end{pmatrix}$ (直和表示), 3) $P^{-1}\cdot DP$ (相似表示), 4) $\overline{D}$ (复共轭表示). 如果G'的子集M满足下列条件: 当D属于M时, $\overline{D}$ 也属于 M, 当 D_1, D_2 属于M时, $D_1\otimes D_2$ 的不可约分支也属于 M,那末就把M称为G的表示的**模** (module). G的闭正规子群H与 G/H 的所有表示构成的模M之间存在一一对应.

所谓 G' 的表示,是指对每个 D,有一个阶数与D的阶数相同的矩阵 $A(D)$ 与之对应, 并且保持 G' 的运算: $A(D_1\otimes D_2)=A(D_1)\otimes A(D_2)$, $A(D_1+D_2)=A(D_1)+A(D_2)$, $A(P^{-1}\cdot DP)=P^{-1}A(D)P$, $A(\overline{D})=\overline{A(D)}$. 命 G' 的表示的全体为 G''. 对 $A_1,A_2\in G''$,由 $A_1A_2(D)=A_1(D)A_2(D)$ 定义它们的积, 并且, G'' 的拓扑定义为 D 的函数 $A(D)$ 的弱拓扑†, 即 A_0的邻域 $U(A_0;D_1,\cdots,D_s;\varepsilon)$定义为$U(A_0;D_1,\cdots,D_s;\varepsilon)=\{A\mid\|A(D_i)-A_0(D_i)\|<\varepsilon, i=1,\cdots,s\}$. 于是, G'' 关于上述运算及拓扑成为紧群. 这时, **淡中对偶定理** (Tannaka's duality theorem) $G''\cong G$ 成立(淡中忠郎, Tôhoku Math. J., **45**(1939)). 命 $R(G)$ 为 $\{d^a_{ij}(x)\}$ 的有限线性组合的全体,并命 Aut $R(G)$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的代数 $R(G)$ 的自同构群,则 Aut $R(G)$ 中一切与左平移 $L(x)$ $((L(x)f)y=f(xy))$ 可交换并适合 $\sigma(\bar{f})=\overline{\sigma(f)}$ 的元σ的全体 G^* 关于弱拓扑成为拓扑群. 这时, 淡中对偶定理就是下面的事实: 使 $x\in G$ 对应到右平移 $R(x)$ ($U(x)$ 在 $R(G)$ 上的限制) 的映射是作为拓扑群的G到 G^* 上的同构. 特别当G是紧 Lie 群时, C. Chevalley 把淡中对偶定理作为给出紧 Lie 群与复代数群之间的一个关系的定理重新加以叙述, 使它的意义更为明确 (⇀Lie 群[紧 Lie 群的复化]).

【参】 ⇀拓扑群的[参], 又关于紧 Lie 群⇀Lie 群的[参].

Lie 群 [英 Lie group 法 groupe de Lie 德 Liesche Gruppe 俄 группа Ли 日 リー群]

【定义】 当集合G满足以下条件 1)—3) 时就称它为 **Lie 群**: 1) G是一个群; 2) G是仿紧†实解析流形†(也可以不连通); 3) $G\times G$到G的映射 $(x,y)\to xy^{-1}$ 是实解析的† (⇀微分流形).

以下为了简单起见, 实解析的就写成 C^ω, 例如, C^ω 函数, C^ω 映射等等. 在上述定义中把 2), 3) 的实解析换成复解析†, 相应地用记号 2′), 3′) 表示,则称满足 1), 2′), 3′) 的G为**复 Lie 群** (complex Lie group). 但是, 下面仅就实解析的情形加以叙述,对复解析的情形,有平行的理论.

对于G的每一个元 σ, 都可以确定G到G的一个映射 $x\to\sigma x$ $(x\to x\sigma)$, 称为G的(由σ确定的) 左 (右) 平移, 用符号 L_σ (R_σ) 表示. L_σ, R_σ 是作为 C^ω 流形的G的自同构. 因此, 对于G上的向量场† X,微分形式† ω,或一般地, 对于G上的张量场† T, 我们可以作用 L_σ, R_σ 而产生新的张量场 $L_\sigma T$, $R_\sigma T$. 如果对G的每个元 σ, 均有 $L_\sigma T=T$ $(R_\sigma T=T)$, 则称张量场T为**左不变的**(left invariant)(**右不变的** (right

invariant))．左不变或右不变的张量场必是 C^∞ 的．

【Lie 群的 Lie 代数】 设G是一个 Lie 群，G上的 C^∞ 向量场的全体 $\mathfrak{X}(G)$ 作成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间，并且关于 $[X, Y]=XY-YX$ $(X, Y\in\mathfrak{X}(G))$作成$\boldsymbol{R}$上的 Lie 代数†．设G上的左不变向量场的全体为 $\mathfrak{g}$，则 $\mathfrak{g}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{X}(G)$ 的子代数†，因之，$\mathfrak{g}$ 也是 $\boldsymbol{R}$ 上的一个 Lie 代数，称这个实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为 **Lie 群G的 Lie 代数** (Lie algebra of the Lie group)．从 $\mathfrak{g}$ 到G在它的单位元 e 处的切空间† $T_e(G)$ 的映射 $X\to X_e$ 是线性映射，而且是双射，因而 $\dim\mathfrak{g}=\dim G$．基于这个映射，常常把 $\mathfrak{g}$ 与 $T_e(G)$看作相同．

【单连通覆盖 Lie 群】 对于实数域$\boldsymbol{R}$上的任意有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，以 $\mathfrak{g}$ 作为其 Lie 代数的连通 Lie 群G是存在的．这样的 Lie 群是互相局部同构†的；而其中单连通 Lie 群，就同构的意义来说是唯一的，称它为 **$\mathfrak{g}$ 的单连通覆盖 Lie 群** (simply connected covering Lie group)．

【Lie 子群】 当 Lie 群G的子群H满足以下条件时，就称它为G的 **Lie 子群** (Lie subgroup)：i)H具有 Lie 群的结构；而且 ii) H到G内的恒等映射 φ 是 C^∞ 映射，又 φ 的微分† $d\varphi$ 在H的每个点都是单射（即作为流形的H是G的子流形†）．当流形H连通时，H称为**连通 Lie 子群**．对于 Lie 群G的子群 H，使之成为连通 Lie 子群的 Lie 群结构至多只有一个(若不具有连通性，则这个关于唯一性的陈述一般不成立)．Lie 群G的子群H是G的连通 Lie 子群的充分必要条件是H为弧连通．(倉西正武-山辺英彦)．

设H是Lie群G的Lie子群，则切空间$T_e(H)$是$T_e(G)$的子空间．设在上面叙述过的同构 $T_e(G)\cong\mathfrak{g}$ 之下，对应于 $T_e(H)$ 的 $\mathfrak{g}$ 的子空间为 $\mathfrak{h}$，则 $\mathfrak{h}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数†，称它为**对应于子群 H 的子代数**．可以自然地把$\mathfrak{h}$看作等同于H的 Lie 代数．于是对应$H\to\mathfrak{h}$是G的所有连通 Lie 子群所成的集合到 $\mathfrak{g}$ 的所有子代数所成的集合上的双射．例如，对应于$\mathfrak{g}$的导出理想† $\mathfrak{g}'$ 的连通 Lie 子群 G' 是G的换位子群†．G的正规子群的 Lie 代数是 $\mathfrak{g}$ 的理想．反之，如果连通 Lie 群G 的连通 Lie 子群H的 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，则H是G的正规子群．

当连通 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是半单†、单†、可解†、幂零†、可交换†时，分别称G为**半单** (semi-simple) 群、**单** (simple) 群、**可解** (solvable) 群、**幂零** (nilpotent) 群、**交换** (commutative) 群．可解性、幂零性和交换性与群论中相应的定义是一致的．

【闭子群】 Lie 群G的 Lie 子群H的作为子流形的拓扑（称这个拓扑为 H 的**内蕴拓扑** (inner topology))与作为拓扑空间的子空间的相对拓扑†未必一致．H的内蕴拓扑与相对拓扑一致的充分必要条件是H是G的闭子群．反之、对于G的任意闭子群 H，均可赋予 H 以 Lie 子群结构，使H的内蕴拓扑与相对拓扑一致 (E. Cartan 定理)，并且这样的 Lie 子群结构是唯一的．以后，凡说到 Lie 群的闭子群，都看作是这个意义下的 Lie 子群．再有，Lie 群 $G, H, \cdots$ 的 Lie 代数，常用对应的德文小写字母 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}\cdots$ 来表示．

【齐性空间】 设 H 为 Lie 群G的闭子群，则能对拓扑群G以H为模所得的商拓扑空间 $M=G/H$ 赋予 C^∞ 流形的结构，使得标准映射 $\pi: G\to M$ 以及G在M上的作用：$G\times M\to M$ $((g, xH)\to gxH)$都是 C^∞ 映射．而且，这样得到的M上的 C^∞ 流形的结构是唯一的．这样得到的 C^∞ 流形M称为G 关于H的齐性空间 (→齐性空间)．命 $\pi(e)=p$，则微分映射 $d\pi$: $T_e(G)=\mathfrak{g}\to T_p(M)$ 的核为 $\mathfrak{h}$．于是，基于这个微分映射，可以把 $M=G/H$ 在点 p 处的切空间 $T_p(M)$ 看作等同于商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$．

【商 Lie 群】 设G的闭子群 H 是正规子群，则 G/H 具有商群的结构，且作为齐性空间又具有流形的结构；G/H关于这两个结构成为 Lie 群，称它为 G 关于H的**商 Lie 群** (quotient Lie group)．这时，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，并且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 与 Lie 群 G/H 的 Lie 代数同构．

【Lie 群的直积】 设 G_1, G_2是两个 Lie 群，由于 G_1，G_2 的直积群 $G_1\times G_2$ 自然地满足前

述 Lie 群的公理系 1), 2), 3),故 $G_1\times G_2$ 成为一个 Lie 群,称它为 **Lie 群 G_1, G_2 的直积**(direct product of Lie groups). $G_1\times G_2$ 的 Lie 代数可以看作与 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 的直和是等同的.

【Cartan 子群】 设H是群G的极大幂零子群,如果对于H的任意有限指数的子群 H_1, H_1 在G中的正规化子 $N(H_1)=\{\mathfrak{g}\in G\,|\,\mathfrak{g}H_1\mathfrak{g}^{-1}=H_1\}$中的指数也都是有限的 (即 $[N(H_1):H_1]<\infty$), 则称H是G的 **Cartan 子群** (Cartan subgroup). 特别当G是连通Lie群时,则G的Cartan子群是存在的,且是G的闭子群,从而还是 Lie 子群. H的Lie代数$\mathfrak{h}$是G的 Lie 代数$\mathfrak{g}$的Cartan子代数. 映射 $H\to\mathfrak{h}$ 是G的一切 Cartan 子群的集合到 $\mathfrak{g}$ 的一切 Cartan 子代数的集合的一个双射(→Lie 代数的[参][7] III).

【Borel 子群】 连通半单 Lie群G的极大可解连通 Lie 子群称为 G 的 **Borel 子群** (Borel subgroup). 又G的包含一个 Borel 子群的连通 Lie 子群称为**抛物子群**(parabolic subgroup). 当G是复半单 Lie 群时, Borel 子群就互相共轭.

【Lie 群的简单例子】 设V是实数域$\boldsymbol{R}$上的有限维线性空间, $\mathfrak{L}(V)$ 是 V 到 V 的所有线性映射所成的代数†. V 上的一般线性群 $GL(V)=\{x\in\mathfrak{L}(V)\,|\det x\neq 0\}$ 是 Lie 群. 把这个 Lie 群的 Lie 代数记为 $\mathfrak{gl}(V)$, 于是, 可把 $\mathfrak{gl}(V)$ 与 $\mathfrak{L}(V)$ 看作相同, 并且对于 X, $Y\in\mathfrak{gl}(V)$, $[X,Y]\in\mathfrak{gl}(V)$ 由 $[X,Y]=XY-YX$ 给出. 若 $\dim V=n$, 则 $GL(V)$ 可看作是所有 n 阶实正则矩阵 (非奇异矩阵) 所成的群 $GL(n,\boldsymbol{R})$. 这时, $\mathfrak{gl}(V)$可看作是所有 n 阶实矩阵所成的 Lie 代数 $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$.

此外,特殊线性群† $SL(n,\boldsymbol{R})$,其 Lie 代数 $=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})\,|\operatorname{tr}X=0\}$; 酉群† $U(n)$, 其 Lie 代数 $=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})\,|\,{}^tX+\bar{X}=0\}$; 正交群† $O(n)$, 其 Lie 代数 $=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tX+X=0\}$; 辛群† $Sp(n)$, 其 Lie 代数 $=\{X\in\mathfrak{gl}(2n,\boldsymbol{C})\,|\,JX+{}^tXJ=0,\ {}^tX+\bar{X}=0\}$ (其中 $J=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}$, I 是 n 次单位矩阵).

复Lie群的例: 复一般线性群† $GL(n,\boldsymbol{C})$, 其 Lie 代数 $=\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})$; 复正交群† $O(n,\boldsymbol{C})$, 其 Lie 代数 $=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{C})\,|\,{}^tX+X=0\}$;复辛群† $Sp(n,\boldsymbol{C})$, 其 Lie 代数 $=\{X\in\mathfrak{gl}(2n,\boldsymbol{C})\,|\,JX+{}^tXJ=0\}$.

【紧单 Lie 群】 对应于紧实 Lie 代数的连通 Lie 群是紧 Lie 群.特别是,对应于紧实单 Lie 代数的单连通紧 Lie 群是存在的, 其中心是有限 Abel 群. 对应于紧实单Lie代数 $A_l(l\geqslant 1)$, $B_l(l\geqslant 2)$, $C_l(l\geqslant 3)$, $D_l(l\geqslant 4)$ 的连通紧 Lie 群 $SU(l+1)$, $SO(2l+1)$, $Sp(l)$, $SO(2l)$ 称为**典型紧单 Lie 群**(classical compact simple Lie group). $Sp(n)(n\geqslant 2)$, $SU(n)$ $(n\geqslant 2)$ 是单连通的,但 $SO(n)(n=3, n\geqslant 5)$ 不是单连通的,而其基本群的阶数是 2, 它的万有单连通 Lie 群是 $Spin\,(n)$. 又对应于 $E_l(l=6,7,8)$, F_4, G_2 的连通紧 Lie 群称为**例外(型)紧单 Lie 群** (exceptional compact simple Lie group). 对应于 E_8, F_4, G_2 的连通 Lie 群是单连通的, 它们的中心是 $\{e\}$,而对应于 E_6, E_7 的连通万有覆盖 Lie 群的中心分别是阶数 3 和阶数 2 的循环群,但是,它们的伴随群不是单连通的.

【复单 Lie 群】 对于复 Lie 群 G, 和实 Lie 群的情形一样,可以定义复 Lie 代数 $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ 称为**复 Lie 群 G 的复 Lie 代数**(complex Lie algebra of the complex Lie group). 对应于典型复单 Lie 代数† A_l, B_l, C_l, D_l 的连通复 Lie 群 $SL(l+1,\boldsymbol{C})$, $SO(2l+1,\boldsymbol{C})$, $Sp(l,\boldsymbol{C})$, $SO(2l,\boldsymbol{C})$ 称为**典型复单 Lie 群** (classical complex simple Lie group), 对应于例外型的复单 Lie 代数† $E_l(l=6,7,8)$, F_4, G_2 的连通复Lie群称为**例外(型)复单 Lie 群** (exceptional complex simple Lie group).

【同态】 Lie 群 G_1 到 Lie 群 G_2 的映射 φ: $G_1\to G_2$ 如果适合条件 i) φ是群之间的同态, ii) φ是流形之间的 C^ω 映射,则称φ是 G_1 到 G_2 的 **解析同态** (analytic homomorphism) (C^ω 同态). 再若φ是双射, 且 φ^{-1} 也是 C^ω 映射, 则称 φ 是**解析同构** (analytic isomorphism) (C^ω 同构). 若存在 G_1 到 G_2 的 C^ω 同构, 则说 G_1 与 G_2 作为 Lie 群是**同构的**,写成 $G_1\cong G_2$. 设

$\varphi: G_1 \to G_2$ 是 C^ω 同态，这时，φ 的微分†$(d\varphi)_{e_1}$: $T_{e_1}(G_1) \to T_{e_2}(G)$ 可诱导出 $d\varphi: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$，这是 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的一个同态。这样，φ 的核的 Lie 代数就是 $d\varphi$ 的核。又若 G_1 是连通的，并且是单连通的，则对于任意的同态 $\psi: \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$，就存在唯一的 C^ω 同态 $\varphi: G_1 \to G_2$，使 $\psi = d\varphi$。C^ω 同态的条件 i)，ii) 中，ii)(在条件 i)之下) 可用以下较弱的条件 ii′) 来代替：ii′) φ 是连续映射。特别是，对于给定的拓扑群 G，若要使得群结构与拓扑结构都保持不变，则在 G 中引入 Lie 群结构的方法就至多只有一种。能在 G 中引入这样的 Lie 群结构的充分必要条件是：G 是局部 Euclid 拓扑群(→拓扑群 [Hilbert 第五问题])。

【表示】 设 G 是 Lie 群，V 是复数域 $\boldsymbol{C}$(或实数域 $\boldsymbol{R}$) 上的有限维线性空间。G 到 $GL(V)$ 的连续同态(因之，是 C^ω 同态) ρ 称为 G 的**复表示** (complex representation) (或**实表示** (real representation))，V 称为 ρ 的**表示空间**(representation space)，V 的维数称为 ρ 的**次数** (degree)。表示 ρ 也可记作 (ρ, V)。G 上的函数 $\operatorname{tr}\rho(g)$ 记作 $\chi_\rho(g)$，称为 ρ 的**特征标** (character) (→表示论)。G 的表示 (ρ, V) 可产生 $\mathfrak{g}$ 的表示 $(d\rho, V)$。当 G 是连通群时，对于 G 的表示 (ρ_i, V_i) $(i=1, 2)$，表示 ρ_1 与 ρ_2 等价† 的充分必要条件是表示 $d\rho_1$ 与 $d\rho_2$ 等价。又对于表示的直和†与转置表示，有 $d(\rho_1+\rho_2) = d\rho_1 + d\rho_2$，$d({}^t\rho^{-1}) = -{}^t(d\rho)$。对于表示的张量积†，有 $(d(\rho_1 \otimes \rho_2))(X) = (d\rho_1)(X) \otimes 1_{V_2} + 1_{V_1} \otimes (d\rho_2)(X)$。关于紧 Lie 群的表示，→Lie 代数 [表示论]。

【伴随表示】 对于 Lie 群 G 的元 σ，可确定 G 的解析自同构 $x \to \sigma x \sigma^{-1}$。它的微分† 映射 $\operatorname{Ad}(\sigma): \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的线性自同构：$\operatorname{Ad}(\sigma) \in GL(\mathfrak{g})$。$\sigma \to \operatorname{Ad}(\sigma)$ 是以 $\mathfrak{g}$ 为表示空间的 G 的一个表示，称它为 G 的**伴随表示** (adjoint representation)，G 的象 $\operatorname{Ad}(G)$ 称为 G 的**伴随群** (adjoint group)。$\operatorname{Ad}(G)$ 是 $GL(\mathfrak{g})$ 的 Lie 子群。G 的中心† Z 是 G 的闭子群，且 $G/Z \cong \operatorname{Ad}(G)$。Lie 群 G 到 $GL(\mathfrak{g})$ 的解析同态 $\sigma \to \operatorname{Ad}(\sigma)$ 诱导出 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的同态：$X \to \operatorname{ad}(X)$，且 $\operatorname{ad}(X)Y = [X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$。即 $\operatorname{ad}: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 与 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示†是相同的。当 G 是连通群时，对应于 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的 Lie 子代数 $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$($\mathfrak{g}$ 的伴随 Lie 代数†) 的 $GL(\mathfrak{g})$ 的连通 Lie 子群是 G 的伴随群，从而 G 的伴随群 $\operatorname{Ad}(G)$ 与 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群†($\mathfrak{g}$ 的伴随群†) $I(\mathfrak{g})$ 是一致的。

若 G 是连通半单的，则 $\mathfrak{g}$ 也是半单的，$\mathfrak{D}(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$，$G$ 的伴随群 $\operatorname{Ad}(G) = I(\mathfrak{g})$ 与 $\mathfrak{g}$ 的自同构群† $A(\mathfrak{g})$ 中含有单位元的连通分支是相同的。紧或半单 Lie 群的表示均为完全可约的。

【标准坐标系】 对于 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的任意元 X，存在 G 的**单参数子群**(one parameter subgroup)，即存在实数加法群 $\boldsymbol{R}$ 到 G 的连续同态 $t \to \varphi(t)$，使得对于 $\boldsymbol{R}$ 的 Lie 代数 $\boldsymbol{R} \cdot (d/dt)$ 的每个元 $\xi \cdot d/dt$，有 $d\varphi(\xi \cdot d/dt) = \xi X$。而且，这样的 φ 是唯一确定的。命 $\varphi(1) = \exp X$，这就定义了 $\mathfrak{g}$ 到 G 的**指数映射** (exponential mapping) $\exp: \mathfrak{g} \to G$，于是有 $\varphi(t) = \exp tX$ $(t \in \boldsymbol{R})$。特别是，当 $G = GL(n, \boldsymbol{C})$，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{C})$ 时，对于 $\mathfrak{g}$ 的每个元 X，均有 $\exp X = \Sigma X^m/m!$，它与矩阵的指数函数一致(→矩阵)。映射 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ 是 C^ω 映射，它在 $X=0$ 处的微分是 $T_0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ 到 $T_e(G)$ 的双射，因而，当取定 $\mathfrak{g}$ 的基 $X_1, \cdots, X_n$ 时，存在具有下述性质的正数 ε: $\{\exp(\Sigma x_i X_i) \mid |x_i| < \varepsilon (i=1, \cdots, n)\}$ 是 G' 的单位元 e 的一个开邻域，而在这个邻域内，$\sigma = \exp(\Sigma x_i X_i) \to (x_1, \cdots, x_n)$($|x_i| < \varepsilon$, $i = 1, \cdots, n$)是一个局部坐标系†。这个局部坐标系称为由基$\{X_i\}$确定的**第一种标准坐标系** (canonical coordinates of the first kind)。类似地，在 e 的一个邻域内，我们有局部坐标系 $\tau = (\exp x_1 X_1) \cdots (\exp x_n X_n) \to (x_1, \cdots, x_n)$，称它为由基$(X_i)$确定的**第二种标准坐标系**(canonical coordinates of the second kind)。

对于 Lie 群 G_1 到 Lie 群 G_2 的连续同态 φ，$\varphi(\exp X) = \exp(d\varphi(X))$ $(X \in \mathfrak{g}_1)$ 成立。G 的连通 Lie 子群 H 的 Lie 代数 $\mathfrak{h}$ 可用指数映射刻划为：$\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp tX \in H (\forall t \in \boldsymbol{R})\}$

【在第一种标准坐标系中的乘法函数】 取定 Lie 群 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的一个基 $X_1,\cdots,X_n$. 设 $(u_1,\cdots,u_n)$ 是 (X_i) 所定出的第一种标准坐标系. 关于这个坐标系命 $\sigma\longleftrightarrow(x_i)$, $\tau\longleftrightarrow(y_i)$, $\sigma\tau\longleftrightarrow(z_i)$, 则每一个 z_i 是 $(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$ 的解析函数, 它在 $x_1=\cdots=x_n=y_1=\cdots=y_n=0$ 处的 Taylor 展开[†]为

$$z_i=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,l!}(S^kT^lu_i)_0$$

$$=x_i+y_i+(STu_i)_0+(3\text{ 阶无穷小}),$$

此处 $S=\Sigma x_iX_i$, $T=\Sigma y_iX_i$. 又命 $\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma\longleftrightarrow(w_i)$, 则有 $w_i=([T,S]u_i)_0+(3\text{ 阶无穷小})$.

$\mathfrak{g}$ 上的所有线性型构成 $\mathfrak{g}$ 的对偶线性空间 $\mathfrak{g}^*$. $\mathfrak{g}^*$ 的元就是 G 上左不变的一次微分形式[†]. $\mathfrak{g}^*$ 的元称为 **Maurer-Cartan 微分形式**. 取 $\mathfrak{g}^*$ 的基为 $\omega_1,\cdots,\omega_n$, 则有 $\omega_i(X_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant n)$, ω_k 的外微分[†] $d\omega_k$ 是左不变的二次微分形式, 可以利用 $\mathfrak{g}$ 关于 (X_i) 的构造常数[†] c_{jk}^i(即 $[X_j,X_k]=\sum_i c_{jk}^iX_i$), 把它表为 $\omega_i\wedge\omega_j$ (符号 $\wedge$ 表示外积[†])的线性组合:

$$(1)\qquad d\omega_k=-\frac{1}{2}\sum_{i,j}c_{ij}^k\omega_i\wedge\omega_j.$$

命 $\omega_k=\omega_k(u,du)=\sum_j A_{kj}(u)du_j$, 矩阵 $\mathfrak{A}=(A_{kj}(u))$ 可由下式给出:

$$(2)\qquad \mathfrak{A}=I+\mathfrak{X}/2!+\mathfrak{X}^2/3!+\cdots,$$

这里 $\mathfrak{X}=(c_{ij}(u))(c_{ij}(u)=\sum_k c_{jk}^iu_k)$, 即 $-\mathfrak{X}$ 是 $\mathrm{ad}(\Sigma u_kX_k)$ 关于基 (X_i) 的矩阵(特别是, 当 G 是幂零群时, $\mathfrak{X}$ 是幂零矩阵[†]).

再者, 若这些 $A_{kj}(u)$ 是已知的, 则描述 G 的乘法函数 $z_i=f_i(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$ $(\sigma\longleftrightarrow(x_i),\ \tau\longleftrightarrow(y_i),\ \sigma\tau\longleftrightarrow(z_i))$ 可由下面的方法求出. 根据 ω_i 的左不变性, 下面的 **Maurer-Cartan 微分方程**成立:

$$(3)\qquad \omega_i(z,dz)=\omega_i(y,dy),\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

即把 $x_1,\cdots,x_n$ 看成参数, 命 $z_i=\varphi_i(y_1,\cdots,y_n)$, 则(3)等价于(3′):

$$(3')\qquad \sum_j A_{ij}(z)\frac{\partial\varphi_j}{\partial y_k}=A_{ik}(y),$$

$$1\leqslant i,k\leqslant n.$$

根据(1), 它们是完全可积[†]的. 在初始条件

$$(4)\qquad \varphi_j(0,\cdots,0)=x_j,\quad 1\leqslant j\leqslant n$$

之下解出微分方程(3′), 就能求得乘法函数 $z_i=f_i(x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n)$([1]).

【极大紧子群】 连通 Lie 群 G 的任意紧子群均包含在某个**极大紧子群** (maximal compact subgroup) 内, 而且 G 的任意两个极大紧子群在 G 中是互为共轭的. 设 K 是 G 的一个极大紧子群, 则 K 是连通的, 且 G 同胚于 K 与 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的直积 (**Cartan-Мальцев-岩沢定理**).

【岩沢分解】 设 G 是其中心为有限群的半单连通 Lie 群. 取 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的岩沢分解[†] (→Lie 代数) $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$, 命对应于 $\mathfrak{k},\mathfrak{a},\mathfrak{n}$ 的 G 的连通 Lie 子群分别为 K,A,N, 则它们都是闭子群, 且 K 是极大紧子群, A 是某个 $\boldsymbol{R}^s$ 的加法群, N 是单连通幂零子群. 这时, 由 $(k,a,n)\to kan$ 给出的 $K\times A\times N\to G$ 的映射是微分同构[†]. 这个分解称为 G 的**岩沢分解** (Iwasawa's decomposition). 岩沢分解就下面的意义来说是唯一的: 设 $G=K'A'N'$ 是另一岩沢分解, 则存在 G 的一个元 g, 使 $gKg^{-1}=K'$, $gAg^{-1}=A'$, $gNg^{-1}=N'$ ([10], [3]).

【紧 Lie 群的复化】 设 G 是紧 Lie 群, $C(G)$ 是定义在 G 上的复值连续函数的全体所成的环, 命 $\mathfrak{o}(G)=\{f\in C(G)\mid\dim\sum_{\sigma\in G}\boldsymbol{C}L_\sigma f<\infty\}$ (其中 $L_\sigma f=f\circ L_\sigma$), 则 $\mathfrak{o}(G)$ 是 $C(G)$ 的子环, 称为 G 的**表示环** (representative ring), 它的元称为**表示函数** (representative function). (这个命名的由来是, 对于 $f\in C(G)$, $f\in\mathfrak{o}(G)$ 当且仅当存在 G 的一个连续矩阵表示 $\sigma\to(d_{ij}(\sigma))$, 使得 f 是 d_{ij} 的 $\boldsymbol{C}$ 线性组合.) 对于 $\sigma\in G$, L_σ 与 R_σ 均使 $\mathfrak{o}(G)$ 不变, $\mathfrak{o}(G)$ 对于范数 $\|f\|_\infty=\max_{\sigma\in G}|f(\sigma)|$ 在 $C(G)$ 中处处稠密 (Peter-Weyl 理论[†]). 由此可知, 存在 G 的表示 $\rho:G\to GL(n,\boldsymbol{C})$, 使 ρ 是单射 (即 ρ 是一一表示). 于是 $\boldsymbol{C}$ 上的代数 $\mathfrak{o}(G)$ 是有限生成的. 因之, 取 G 的适当表示 $\sigma\to(d_{ij}(\sigma))$ 后, 有 $\mathfrak{o}(G)=\boldsymbol{C}(d_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n)$. 这样的表示称为 G 的**生成表示**

(generating representation).

设A为$\boldsymbol{C}$上的代数$\mathfrak{o}(G)$的一切自同构所构成的群,命$\widetilde{G}=\{\alpha\in A\mid\alpha\circ L_\sigma=L_\sigma\circ\alpha$ (对每一$\sigma\in G$)$\}$, 则$\widetilde{G}$是A的子群,且映射$\alpha\to\alpha':\alpha'(f)=\alpha(f)(e),(f\in\mathfrak{o}(G))$是$\widetilde{G}$到$\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{o}(G),\boldsymbol{C})$上的双射,这样利用$G$到$\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{o}(G),\boldsymbol{C})$上的双射$\alpha\to\alpha'$,对于$G$的任意生成表示$\rho:\sigma\to(d_{ij}(\sigma))_{1\le i,j\le n}$,可由$\tilde{\rho}(\alpha)=(\alpha'(d_{ij}))_{1\le i,j\le n}$定义$\widetilde{G}$的一个一一矩阵表示$\tilde{\rho}$.此外,象$\tilde{\rho}(\widetilde{G})$是$GL(n,\boldsymbol{C})$的一个由$\{\beta(d_{ij})_{1\le i,j\le n}\mid\beta\in\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{o}(G),\boldsymbol{C})\}$所给出的代数子群†.从而$\widetilde{G}$具有线性代数群†的结构,并且与生成表示$\rho$的取法无关(因而$\widetilde{G}$是复 Lie 群),$G\ni\sigma\to R_\sigma\in\widetilde{G}$是$G$到$\widetilde{G}$中的一一的连续同态,因而$G$可以看作$\widetilde{G}$的子群. 于是,对于$\alpha\in\widetilde{G}$,"$\alpha\in G$"⇔"对每一个$f\in\mathfrak{o}(G),\alpha(\bar{f})=\overline{\alpha(f)}$"(**淡中对偶定理** (Tannaka's duality theorem)) (→紧群). G是$\widetilde{G}$的极大紧子群,且$\widetilde{G}$的任一极大紧子群与G (在$\widetilde{G}$中)共轭. $\widetilde{G}$的复 Lie 代数$\tilde{\mathfrak{g}}$与G的 Lie 代数$\mathfrak{g}$的复化$\mathfrak{g}^C=\boldsymbol{C}\otimes_R\mathfrak{g}$同构. $\widetilde{G}$同胚于G和一个 Euclid 空间的直积. 对于$\widetilde{G}$上的复解析函数φ, $\varphi=0\Leftrightarrow\varphi\mid G=0$, 从而,特别地,$\widetilde{G}$是$G$关于 Zariski 拓扑†的闭包. 称$\widetilde{G}$为$G$的 **Chevalley 复化** (Chevalley's complexification), 以下用记号G^C表示. 设G_1, G_2是两个紧 Lie 群,φ是$G_1\to G_2$的连续同态,则φ可扩张为有理同态φ^C: $G_1^C\to G_2^C$, 并且这种扩张是唯一的. 特别是,G的任意复表示(ρ,V)可唯一地扩张为G^C的有理表示†(ρ^C,V). G^C的任意复解析表示$\tilde{\rho}$都是有理表示;命$\rho=\tilde{\rho}\mid G$, 则$\tilde{\rho}=\rho^C$, 从而$\tilde{\rho}$是完全可约的. 这样,决定G的不可约连续表示类与决定G^C的不可约复解析表示类是一致的. 对于G的闭子群H, H在G^C中关于 Zariski 拓扑的闭包与H的复化H^C是相同的.

对于G的生成表示(ρ,V), $G^C\cong\rho^C(G^C)\subset GL(V)$, 且$\rho^C(G^C)$是$V$上的完全可约代数群. 反之,若$GL(V)$的代数子群$F$在$V$上完全可约,则存在满足条件$F\cong G^C$(作为代数群)的紧群$G$. 若$GL(n,\boldsymbol{C})$的代数子群$F$满足条件${}^t\bar{F}=F$, 并取$F\cap U(n)$作为$G$, 则有$F\cong G^C$. 任意连通复半单 Lie 群$F$与其任一极大紧子群$G$的复化$G^C$同构,特别是,$F$具有忠实表示.

例: 对于$G\cong U(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, $Sp(n)$, 分别有$G^C\cong GL(n,\boldsymbol{C})$, $O(n,\boldsymbol{C})$, $SO(n,\boldsymbol{C})$, $Sp(n,\boldsymbol{C})$. [1].

【历史】 M. S. Lie 是在上一世纪后半时期开始讨论 Lie 群(当时称为连续群)的. 他的动机是用群论的观点来讨论当时的各种几何学(→埃尔兰根纲领), 还有研究微分方程与保持这些方程的解不变的变换群之间的关系. 最初是发现 Lie 群在局部上与 Lie 代数对应,根据这个对应, 群的各种性质在代数方面有强烈的反映.在这个草创时期,引入了可解和半单 Lie 代数的概念, 讨论了它们的基本性质. 线性常微分方程的 Galois 理论 (E. Vessiot 等)也进入了 Lie 的思考范围. 无限维 Lie 群是本世纪初由 E. Cartan 所研究的,而在他之后到五十年代倉西正武等人为止,中断了一个时期.以下仅限于有限维的情形. 1900—1930 年, Cartan, H. Weyl 开始研究半单 Lie 代数的完全分类和结构, 并确定了它们的表示与特征标, 并在 Lie 群流形的整体结构研究方面做了开创性的工作. 继续到五十年代,是 C. Chevalley, Harish-Chandra 等人对以上成果的整理时期. 在这个时期, 岩沢健吉([10])不但明确了 Cartan 的研究在拓扑方面以紧 Lie 群最为重要, 而且在以后的研究中给出了基本的半单群的岩沢分解, 同时把用拓扑群的性质来刻划 Lie 群的 Hilbert 第五问题的研究也推进了一步. 这个问题在 1952 年由 D. Montgomery, L. Zippin, 山辺英彦等人解决了. 五十年代以后, Lie 群的拓扑性质引起了很大的注意. Cartan (他预想了 G. de Rham 理论) 的方法,还有利用群的特性的 H. Hopf 等的方法, 都是由于系统地运用了代数拓扑的一般理论才取得成功的. 特别是把纤维丛†的拓扑理论应用到了齐性空间G/H上 (A. Borel 等),其结果完全决定了 Lie 群的同调群, 也在相当程度上决定了 Lie 群的同伦群. 现在对 Lie

群的研究则分散在下列各个领域：齐性空间（其上的结构与分析），代数群，（无限维）酉表示，有限群或不连续子群等等（→微分几何学，Lie 群和齐性空间的拓扑，酉表示，代数群）．

【参】［1］ C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; ［2］ Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954, 新版, 1957(中译本: Л. С. 邦德列雅金,连续群,科学出版社, 1957); ［3］ S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962; ［4］ É. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Paris, Nony, 1894 (Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, 1952, pt. I. vol. **1**, 137—287); ［5］H. Weyl, The structure and representations of continuous groups, Inst, Adv. Study, Princeton, Notes, 1935; ［6］ H. Weyl, The classical groups, Princeton Univ. Press, 1939, 修订版 1946; ［7］ S. Lie-F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Teubner, I, 1888; II, 1890; III, 1893 (Chelsea, 1970); ［8］ F. Peter-H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., **97** (1927), 737—755; ［9］ 淡中忠郎，双対原理，岩波，1951; [10] K. Iwasawa, (岩沢健吉)On some types of topological groups, Ann. of Math. **50** (1949), 507—558; [11] G.D. Mostow, A new proof of É. Cartan's theorem on the topology of semi-simple groups, Bull. Amer. Math., Soc., **55** (1949), 969—980; [12] C. Chevalley, On the topological structure of solvable groups, Ann.of Math., **42** (1941), 668—675; [13] D. Montgomery-L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience, 1955; [14] A. Borel, Topology of Lie groups and characteristic classes, Bull. Amer. Math. Soc., **61** (1955), 397—432; [15] 松島与三，多様体入門，裳華房，1965; [16] 岩掘長慶，リー群論，岩波講座現代応用数学 2, 9, 1957 (中译本：岩掘长庆，李群論，上海科学技术出版社，1962); [17] H. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, San Fransisco, 1965; [18] P. M. Cohn, Lie groups, Cambridge Univ. Press, 1957 (中译本: P. M. 康，李群，上海科学技术出版社，1963); [19] J.-P. Serre, Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965; [20] H. Freudenthal, Linear Lie groups, Academic Press, 1969.

Lie 代数［英 Lie algebra　法 algèbre de Lie　德 Liesche Algebra　俄 алгебра Ли　日 リー代数］

【基本概念】 设K是具有单位元的交换环．集合$\mathfrak{g}$称为K上的**Lie 代数**(或**Lie 环**(Lie ring))，如果它具有满足下面的条件 1)—4) 的结构：1) $\mathfrak{g}$ 是左K模†(并且假定K的单位元导出$\mathfrak{g}$的恒等算子)．2) 给出了 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 的一个映射 $(X, Y)\to[X, Y]$ (**括号积**(bracket product))，它是关于系数环 K 的双线性映射†：$[\sum\alpha_i X_i, \sum\beta_j Y_j]=\sum\alpha_i\beta_j[X_i, Y_j]$ $(\alpha_i,\beta_j\in K, X_i, Y_j\in\mathfrak{g})$．3) 对 $\mathfrak{g}$ 的每一元 X, $[X,X]=0$ (**复零法则**)．(从而对 $\mathfrak{g}$ 的任意元 X, Y, 有 $[X,Y]=-[Y,X]$.) 4) 对 $\mathfrak{g}$ 的任意元 X, Y, Z, 有 $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$ (**Jacobi 法则**)．特别当 $K=\boldsymbol{C}$ 时，$\mathfrak{g}$ 称为**复 Lie 代数** (complex Lie algebra)，当 $K=\boldsymbol{R}$ 时，$\mathfrak{g}$ 称为**实 Lie 代数** (real Lie algebra)．

例：对K上的代数† $\mathfrak{A}$，命 $[X,Y]=XY-YX(X, Y\in\mathfrak{A})$，则由 $\mathfrak{A}$ 得到K上的一个Lie代数，称为代数 $\mathfrak{A}$ 所确定的 Lie 代数．特别当 $\mathfrak{A}$ 是K上的所有 n 阶矩阵构成的代数 K_n 时，这样得到的 Lie 代数称为K上的 n 次**一般线性 Lie 代数** (general linear Lie algebra)，以 $\mathfrak{gl}(n, K)$ 表示．

以下设 $\mathfrak{g}$ 是K上的 Lie 代数，$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子K模†．所有形如$[A, B]$$(A\in\mathfrak{a}, B\in\mathfrak{b})$的元的有限和构成的 $\mathfrak{g}$ 的子 K 模以 $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ 表示．$\mathfrak{g}$ 的子K模 $\mathfrak{a}$ 满足 $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\subset\mathfrak{a}$ 时，称 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的**子代数** (subalgebra)．$\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{a}$ 满足 $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{a}$ (这与 $[\mathfrak{g},\mathfrak{a}]\subset\mathfrak{a}$ 等价) 时，称为 $\mathfrak{g}$ 的**理想** (ideal)． 对 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{a}$，若把 $\mathfrak{g}$ 的括号积限制在 $\mathfrak{a}$ 上，则 $\mathfrak{a}$ 成为K上的 Lie 代数．对于 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{a}$，由 $\mathfrak{g}$ 模 $\mathfrak{a}$ 所得的商K模† $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 关于括号积 $[X+\mathfrak{a}, Y+\mathfrak{a}]=[X, Y]+\mathfrak{a}$ 成为K上的 Lie 代数，称为**商 Lie 代数** (quotient Lie algebra)．

设 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 是K上的Lie代数，若映射 $f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ 满足 i) f 是K线性映射，ii) 对 $\mathfrak{g}_1$ 的任意元 X, Y, $f([X, Y])=[f(X), f(Y)]$ 成立，则称 f 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的**同态** (homomorphism)，满且单的同态称为**同构** (isomorphism)．当存在 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 上的一个同构时，称 $\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 是**同构的**(isomorphic)，记作 $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$．对于同态 $f:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$, $f(\mathfrak{g}_1)$ 是 $\mathfrak{g}_2$ 的子代数，f 的核 $\mathfrak{a}=f^{-1}(0)$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想． 因而 f 所诱导的映射 f : $\mathfrak{g}_1/\mathfrak{a}\to f(\mathfrak{g}_1)$ 是同构(同态定理)．

K上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 的**直和** (direct sum) $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ 也和代数的情形同样地定义，$\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_2$ 的理想．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的**自同构**(automorphism)的全体 $A(\mathfrak{g})$ 作成一般线性群 $GL(\mathfrak{g})$的子群. $A(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**自同构群** (automorphism group).

【表示】 设 $\mathfrak{g}$ 是K上的 Lie 代数, V 是 K 上的线性空间. 设V到V上的所有线性映射构成的K上的代数为 $\mathfrak{L}(V)$, $\mathfrak{L}(V)$ 所确定的 Lie 代数为 $\mathfrak{gl}(V)$(若$\dim V = m$,则$\mathfrak{gl}(V)\cong\mathfrak{gl}(m, K)$). 此时, $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{gl}(V)$ 上的同态 ρ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**表示**(representation)(详言之是**线性表示** (linear representation)), V 称为 ρ 的**表示空间** (representation space), $\dim V$ 称为 ρ 的**次数**(degree). 不仅可用 ρ 来记表示, 也可用 (ρ, V) 来记表示,以明显表现出表示的空间 V. 表示的等价性,不可约性,完全可约性的定义与代数的情形相同. 特别取 $\mathfrak{g}$ 作为 V, 取由 $\rho(X)\ Y = [X, Y](X, Y\in\mathfrak{g})$ 所定义的映射作为 ρ, 这样得到的 $\mathfrak{g}$ 的表示称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**(adjoint representation), 记作 $\rho = \mathrm{ad}(X)$. 又 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})=\{\mathrm{ad}(X)\mid X\in\mathfrak{g}\}$ 是 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的子 Lie 代数, $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随 Lie 代数** (adjoint Lie algebra).

对 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ, V), 伴之以一个 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to K$ 的对称双线性型† B_ρ, 它由 $B_\rho(X, Y) = \mathrm{tr}\rho(X)\rho(Y)$所定义.对每一 $Z\in\mathfrak{g}$, 它满足不变性条件 $B_\rho([X, Z], Y) = B_\rho(X, [Z, Y])$,特别当 $\rho = \mathrm{ad}$ 时, 把 B_ρ 记作 B, 称它为 $\mathfrak{g}$ 的 **Killing 型** (Killing form).

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 n 维 Lie 代数, ad: $\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示. 对每个元 $X\in\mathfrak{g}$, 令 $\det(tI - \mathrm{ad}(X)) = \sum_{j=0}^{n} t^j P_j(X)$, 则 $P_j(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的多项式函数, 且 $P_n = 1$. 设 l 是使得 $P_l \neq 0$ 的最小整数,则 l 等于 $\mathfrak{g}$ 的秩†. $\mathfrak{g}$ 的元 X 称为**正则的** (regular) (**奇异的** (singular)),如果 $P_l(X)\neq 0$ ($P_l(X) = 0$). $\mathfrak{g}$ 中由 $\mathfrak{g}$ 的所有正则元组成的子集 $\mathfrak{g}'$ 在 $\mathfrak{g}$ 内是开的且是稠密的. 由 $\mathfrak{g}$ 的所有奇异元组成的子集 $\mathfrak{g}-\mathfrak{g}'$ 关于 $\mathfrak{g}$ 的 Lebesgue 测度†是零测度集; 用 $\mathfrak{g}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上的任意的基, 这个测度可用 $\mathfrak{g}$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 上的线性同构得到;在不计正纯量乘法的意义下,它是唯一确定的.

现在设 $\mathfrak{g}$ 是可简约的 (→本条 [可简约的 Lie 代数]),则 $X\in\mathfrak{g}$ 是正则元当且仅当 X的中心化子 $\mathfrak{z}_X = \{Y\in\mathfrak{g}\mid \mathrm{ad}(X)Y = 0\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数(→本条 [Cartan 子代数]). 此外, 如果 $X\in\mathfrak{g}$ 是正则的, 则 $\mathrm{ad}(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的半单线性自同态.

【Lie 代数的结构】 若 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ 是K上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的理想,则 $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 特别是,若令 $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}'' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$, $\cdots$, $\mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}]$, $\cdots$, 则它们全是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且有 $\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}'\supset\mathfrak{g}''\supset\cdots$. 当 $\mathfrak{g}' = 0$ 时, $\mathfrak{g}$ 称为**交换的** (commutative). 当对某个自然数K有 $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ 时, $\mathfrak{g}$ 称为**可解的** (solvable). 序列 $\mathfrak{g}\supset\mathfrak{g}'\supset\mathfrak{g}''\supset\cdots$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**导出列** (derived series), $\mathfrak{g}'$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**导出理想** (derived ideal). 其次, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1]$, $\mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2]$, $\cdots$, $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^i]$, $\cdots$ 全都是 $\mathfrak{g}$ 的理想,且有 $\mathfrak{g}^1\supset\mathfrak{g}^2\supset\mathfrak{g}^3\supset\cdots$, 这个序列称为 $\mathfrak{g}$ 的**降中心列** (descending central series). 当对某个自然数 k 有 $\mathfrak{g}^k = 0$时, $\mathfrak{g}$ 称为**幂零的** (nilpotent). 若 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{a}$ 作为子代数是交换的、可解的或幂零的,则它分别称为交换理想、可解理想或幂零理想.

$\mathfrak{g}$中使 $[X, A] = 0$ 对 $\mathfrak{g}$ 的每个元 X 均成立的元A的全体 $\mathfrak{z}$, 是 $\mathfrak{g}$ 的交换理想,称它为 $\mathfrak{g}$ 的**中心** (centre). $\mathfrak{g}$ 的伴随表示的核是 $\mathfrak{g}$ 的中心. 令 $\mathfrak{g}$ 的中心是 $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_1$ 的中心是 $\mathfrak{z}_2/\mathfrak{z}_1$, $\cdots$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}_i$ 的中心是 $\mathfrak{z}_{i+1}/\mathfrak{z}_i$, $\cdots$, 于是得到 $\mathfrak{g}$ 的理想的一个序列 $0\subset\mathfrak{z}_1\subset\mathfrak{z}_2\subset\cdots$. 称它为 $\mathfrak{g}$ 的**升中心列** (ascending central series). $\mathfrak{g}$ 是幂零的当且仅当对于某个自然数 k, 有 $\mathfrak{z}_k = \mathfrak{g}$.

以下设K是特征为 0 的交换域, 且只考虑K上的有限维 Lie 代数. 令这样的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在K上的基是 $X_1, \cdots, X_n$, 由 $[X_i, X_j] = \sum c_{ij}^k X_k$ ($c_{ij}^k\in K$) 确定的K中的 n^3 个元 c_{ij}^k, 称为 $\mathfrak{g}$ 关于基 (X_i) 的**构造常数** (structure constant).

【根基与最大幂零理想】 $\mathfrak{g}$ 的全部可解理想的并 $\mathfrak{r}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想, $\mathfrak{r}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**根基** (radical). $\mathfrak{g}$的全部幂零理想的并 $\mathfrak{n}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的幂零理想. $\mathfrak{n}$ 称为$\mathfrak{g}$的**最大幂零理想**(largest nilpo-

tent ideal). 又 $\mathfrak{s}=[\mathfrak{r},\mathfrak{g}]$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**幂零根基**(nilpotent radical). $\mathfrak{s}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一切不可约表示的核的交,且有 $\mathfrak{g}\supset\mathfrak{r}\supset\mathfrak{n}\supset\mathfrak{s}$.

【半单性】 根基为 0 的 Lie 代数称为**半单的**(semisimple). 设 $\mathfrak{g}$ 是 K 上的半单 Lie 代数,而且它除 $\mathfrak{g}$ 与 0 以外不存在其他理想,则 $\mathfrak{g}$ 称为**单的** (simple). 若 Lie 代数的根基是 $\mathfrak{r}$, 则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的. 半单 Lie 代数是一些单 Lie 代数的直和.

例: 设 $\mathfrak{t}(n,K)=\{A=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}(n,K)\,|\,a_{ij}=0\,(对每一\ i<j)\}$, $\mathfrak{n}(n,K)=\{A\in\mathfrak{t}(n,K)\,|\,a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}=0\}$. ($\mathfrak{t}(n,K)$是下三角形矩阵的全体,$\mathfrak{n}(n,K)$是幂零下三角形矩阵的全体. $\mathfrak{t}(n,K)$ 是 $\mathfrak{gl}(n,K)$ 的可解子代数, $\mathfrak{n}(n,K)$ 是 $\mathfrak{gl}(n,K)$ 的幂零子代数.)令 $\mathfrak{sl}(n,K)=\{A\in\mathfrak{gl}(n,K)\,|\,\mathrm{tr}A=0\}$, 这是 $\mathfrak{gl}(n,K)$ 的理想. 若 $n\geqslant 2$, 则 $\mathfrak{sl}(n,K)$ 是半单的, 实际上是单的.

【一些定理】 以上是关于基本概念的叙述,现在列举一些基本定理.

1) **Engel 定理**(域K的特征为正也成立). 设V是K上的有限维线性空间, $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数. 假定 $\mathfrak{g}$ 的每个元(作为线性映射)都是幂零的,如果 $V\neq 0$, 则存在V的元 $v\neq 0$, 使得对于 $\mathfrak{g}$ 的所有元 X, 满足 $Xv=0$. 于是,若适当选取V的基, 使 $\mathfrak{gl}(V)$ 等同于 $\mathfrak{gl}(n,K)$, 则有 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{n}(n,K)$, $n=\dim V$.

2) **Lie 定理**. 对于可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的任意既约表示(ρ,V),$\rho(\mathfrak{g})$是交换的. 特别是,若K是代数闭域, 则有 $\dim V=1$. 从而对代数闭域K上可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的任意表示(ρ,V), 选取V的适当的基,就有 $\rho(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{t}(n,K)$.

3) **E. Cartan 定理** (可解性的判定条件). 对于 $\mathfrak{gl}(n,K)$ 的子代数 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ 可解$\Leftrightarrow$对于 $\mathfrak{g}$ 的每一元X与 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的每一元 Y, 有 $\mathrm{tr}\,XY=0$.

4) **E. Cartan 定理** (半单性的判定条件). $\mathfrak{g}$ 是半单的$\Leftrightarrow\mathfrak{g}$ 的 Killing 型B是非退化[†]的,即满足 $B(X,\mathfrak{g})=0$ 的 $X\in\mathfrak{g}$ 只能是 0.

5) **H. Weyl 定理**. 半单 Lie 代数的任意(有限次)表示是完全可约的.

6) **Levi 分解**. 若 $\mathfrak{g}$ 的根基是 $\mathfrak{r}$, 则存在 $\mathfrak{g}$ 的半单子代数 $\mathfrak{f}$, 满足 $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}+\mathfrak{f}$, $\mathfrak{r}\cap\mathfrak{f}=0$. 这样的 $\mathfrak{f}$ 不计 $\mathfrak{g}$ 的自同构是唯一的.

7) **Адо 定理** (岩沢健吉证明了特征为正的情形). 对K上有限维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 存在 $\mathfrak{g}$ 的有限次表示 (ρ,V), 使 $\mathfrak{g}\cong\rho(\mathfrak{g})$.

【可简约的 Lie 代数】 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的根基 $\mathfrak{r}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的中心 $\mathfrak{z}$ 相同时, $\mathfrak{g}$ 称为**可简约的**(reductive). 下面的 i)—iv) 是相互等价的条件. i) $\mathfrak{g}$ 是可简约的; ii) $\mathfrak{g}$ 的幂零根基 $\mathfrak{s}=0$; iii) $\mathfrak{g}$ 的伴随表示是完全可约的; iv) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是半单的,且 $\mathfrak{g}$ 为中心 $\mathfrak{z}$ 与 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 的直和. 因而 $\mathfrak{g}$ 的表示 (ρ,V) 是完全可约的, 当且仅当对 $\mathfrak{z}$ 的每一元 X, $\rho(X)$ 可化为对角型. 例: $\mathfrak{gl}(n,K)$.

【微分】 K上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}$ 中的线性映射 δ 对 $\mathfrak{g}$ 的任意的元 X, Y 满足 $\delta([X,Y])=[\delta(X),Y]+[X,\delta(Y)]$ 时, δ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**微分** (derivation). 微分的全体 $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ 形成 $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的子代数. $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**微分 Lie 代数** (Lie algebra of derivations). $\mathfrak{g}$ 的伴随 Lie 代数 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ 中的理想. $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 的元称为 $\mathfrak{g}$ 的**内微分**(inner derivation). 若 $\mathfrak{g}$ 是半单的,则 $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})=\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 成立.

在 $K=\boldsymbol{R}$ (或 $K=\boldsymbol{C}$) 的情形, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群 $A(\mathfrak{g})$ 成为(复) Lie 群, $A(\mathfrak{g})$ 的(复) Lie 代数与 $\mathfrak{D}(\mathfrak{g})$ 相同. 对 $\delta\in\mathfrak{D}(\mathfrak{g})\,(\subset\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}))$, $\exp\delta\,(\in GL(\mathfrak{g}))$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 特别是由 $\{\exp\delta\,|\,\delta\in\mathrm{ad}(\mathfrak{g})\}$ 生成的 $A(\mathfrak{g})$ 的连通不变子 Lie 群 $I(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**内自同构群** (group of inner automorphisms) 或 $\mathfrak{g}$ 的**伴随群** (adjoint group). 因而 $I(\mathfrak{g})$ 的(复) Lie 代数是 $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. $A(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**外自同构群**(group of outer automorphisms). 若 $\mathfrak{g}$ 是半单 Lie 代数,则 $I(\mathfrak{g})$ 与 $A(\mathfrak{g})$ 的含单位元的连通分支一致.

【Cartan 子代数】 若K上 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$: i) 是幂零的, ii) $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的**正规化子**(normalizer) $\mathfrak{n}$ (即 $\mathfrak{n}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,[X,\mathfrak{h}]\subset\mathfrak{h}\}$) 与 $\mathfrak{h}$ 相等, 则 $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Cartan 子代数** (Cartan subalgebra). 若K是代数闭域, 则对

于 $\mathfrak{g}$ 的任意两个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$，存在 $\mathfrak{g}$ 的自同构 σ，使 $\sigma(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$. 而且 σ 在下面的意义下是 $\mathfrak{g}$ 的内自同构：存在 $\mathfrak{g}$ 的元 $A_1, \cdots, A_r$，使得每个 $\mathrm{ad}(A_i)$ 都是幂零的，且 $\sigma = \exp(\mathrm{ad}(A_1)) \cdots \exp(\mathrm{ad}(A_r))$.

【万有包络代数】 对于域 K 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，把 $\mathfrak{g}$ 看作是 K 上的线性空间，构造 $\mathfrak{g}$ 上的张量代数 T. 设 T 中形如 $X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$ 的元的全体所生成的 T 的双边理想†为 J，则 K 上的代数 $U(\mathfrak{g}) = T/J$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**万有包络代数**(universal enveloping algebra). 映射 $\mathfrak{g} \to T \to U(\mathfrak{g})$ 的合成是 $\mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ 的单射，若基于这个单射而看作 $\mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})$，则在 $U(\mathfrak{g})$ 中，$[X, Y] = XY - YX$ 成立. $U(\mathfrak{g})$ 不含零因子†. 特别是，若 $\mathfrak{g}$ 是连通 Lie 群† G 的 Lie 代数，则 $U(\mathfrak{g})$ 与 G 上的所有左不变†微分算子所构成的代数是同构的. $\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ 的万有包络代数与由 1 和 $\mathfrak{h}$ 生成的 $U(\mathfrak{g})$ 的子代数(作为代数来说)是同构的. 又 K 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ 的直和 $\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ 的万有包络代数与张量积 $U(\mathfrak{g}_1) \otimes_K U(\mathfrak{g}_2)$ 同构. 对于 $\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{a}$，若设 $\mathfrak{a}$ 生成的 $U(\mathfrak{g})$ 的双边理想是 $\mathfrak{A}$，则有 $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{A} \cong U(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$ 成立. 设 $U_0 = K \cdot 1$，令 $U(\mathfrak{g})$ 中可写成 $\mathfrak{g}$ 的至多 i 个元的积的元所张成的子空间为 U_i，则有 $U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots$，$U_i U_j \subset U_{i+j}$，$\bigcup_i U_i = U(\mathfrak{g})$. 于是 $\{U_i\}$ 定义了 $U(\mathfrak{g})$ 的一个滤子†. 设这个滤子所属的分次环†是 $G = G^0 + G^1 + G^2 + \cdots$ $(G^0 = U_0, G^i = U_i/U_{i-1}$ $(i = 1, 2, \cdots))$，于是 $\mathfrak{g} = G^1 \subset G$. 设 G 的基是 $X_1, \cdots, X_n$，取多项式环† $K[Y_1, \cdots, Y_n] = S$，则存在唯一的代数的同态 $\omega: S \to G$ 使得 $\omega(1) = 1$，$\omega(Y_i) = X_i$，而且 ω 是双射，ω 把 S 的 i 次齐次部分 S^i 映到 G^i 上. 因而 $X_1, \cdots, X_n$ 的单项式的全体 $\{X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n} | i_1, \cdots, i_n \geq 0\}$ 成为 K 上的线性空间 $U(\mathfrak{g})$ 的基 (**Poincaré-Birkhoff-Witt 定理**). Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 K 上的任意表示 (ρ, V) 可唯一地扩张为万有包络代数 $U(\mathfrak{g})$ 的表示 (ρ', V). ρ 是不可约的(或完全可约的)当且仅当 ρ' 是不可约的(或完全可约的). 又 $\mathfrak{g}$ 的两个表示 ρ_1, ρ_2 等价当且仅当 ρ_1' 与 ρ_2' 等价. 当 $\mathfrak{g}$ 是半单时，取一组基 $(X_1, \cdots, X_n)$，对于 Killing 型 B，令 $g_{ij} = B(X_i, X_j)$，(g_{ij}) 的逆矩阵为 (g^{ij}). 令 $c = \sum_{i,j} g^{ij} X_i X_j \in U(\mathfrak{g})$，称 c 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 **Casimir 算子** (Casimir operator). c 不依赖于 $\mathfrak{g}$ 的基的取法，它作为 $U(\mathfrak{g})$ 的元是唯一确定的. c 属于 $U(\mathfrak{g})$ 的中心. 对于 $\mathfrak{g}$ 的任意绝对不可约表示 ρ，$\rho(c)$ 是纯量变换，$\mathrm{tr}\rho(c)$ 是正有理数.

【复半单 Lie 代数】 以下设 K 是复数域 $\boldsymbol{C}$. 对于特征为 0 的代数闭域†结果也是一样的.

半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 就是对每一 $H \in \mathfrak{h}$，$\mathrm{ad}(H)$ 可化为对角形的极大交换子代数. 以下设 $\mathfrak{h}$ 是一个固定的 Cartan 子代数. $\dim \mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**秩** (rank)，设 $\mathfrak{h}$ 上在 $\boldsymbol{C}$ 中取值的所有线性型构成的线性空间为 $\mathfrak{h}^*$. 对每一 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$，$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}(H)X = \alpha(H)X$ (对每一 $H \in \mathfrak{h}$)$\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的线性子空间，且 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. 令 $\Delta = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* | \alpha \neq 0, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$，则 Δ 是 $\mathfrak{h}^*$ 的有限子集. Δ 的元称为 $\mathfrak{g}$ 的关于 $\mathfrak{h}$ 的**根** (root)，Δ 称为 $\mathfrak{g}$ 的关于 $\mathfrak{h}$ 的**根系** (root system). 对每个根 α，$\mathfrak{g}_\alpha$ 是一维的. 因而 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ 是一个分解为线性子空间的直和分解. $\mathfrak{g}_\alpha$ 称为根 α 所属的**根子空间** (root subspace).

$\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B 限制在 $\mathfrak{h}$ 上的双线性型 $B_\mathfrak{h}$ 是非退化的. 因而由条件 $\lambda(H) = B(H_\lambda, H)$ (对每一 $H \in \mathfrak{h}$) 唯一确定从 $\mathfrak{h}^*$ 到 $\mathfrak{h}$ 上的线性双射 $\lambda \to H_\lambda$. 由此 $B_\mathfrak{h}$ 定义了 $\mathfrak{h}^*$ 上的一个对称双线性型 $(\lambda, \mu) = B(H_\lambda, H_\mu)$ $(\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*)$，将 Δ 在实数域 $\boldsymbol{R}$ 上张成的 $\mathfrak{h}^*$ 的 $\boldsymbol{R}$ 子空间记作 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$，则 $\mathfrak{h}^*$ 上的内积 (λ, μ) 在 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 上是正定的. 从而，若令 $l = \dim \mathfrak{h}$，则 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 关于上述内积就成为 l 维 Euclid 空间. 根系 Δ 是这个 Euclid 空间的向量组成的有限集.

【根系的性质】 i) 若 $\alpha \in \Delta$，则 $-\alpha \in \Delta$. 而且 α 的实数倍中属于 Δ 的只限于 $\pm\alpha$. ii) 若 $\alpha, \beta \in \Delta$，则 $2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ 是有理整数：$2(\alpha$.

$\beta)/(\alpha,\alpha)\in \boldsymbol{Z}$. iii) 对于$\alpha,\beta\in\Delta(\beta\neq\pm\alpha)$存在整数 $j\geqslant 0$、$i\geqslant 0$，满足 $\{\beta+\nu\alpha|\nu\in\boldsymbol{Z}\}\cap\Delta=\{\beta-j\alpha,\beta-(j-1)\alpha,\cdots,\beta-\alpha,\beta,\beta+\alpha,\cdots,\beta+i\alpha\}$，而且 $j-i=2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha)$，$i+j\leqslant 3$. $\{\beta+\boldsymbol{Z}\alpha\}\cap\Delta$ 称为β的 **α 系列**. 因而，如果把 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 关于 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 中以 α 为法向量的超平面 $P_\alpha=\{x\in\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*|(\alpha,x)=0\}$ 的反射记作 w_α，则对每一 $\beta\in\Delta$，$w_\alpha(\beta)=\beta-(\alpha^*,\beta)\alpha\in\Delta$(其中 $\alpha^*=2\alpha/(\alpha,\alpha)$)，即 $w_\alpha(\Delta)=\Delta$. iv) 若 $\alpha,\beta\in\Delta$，$\alpha\neq\pm\beta$，则α与β的夹角θ为 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150° 之一. 所以若 $0\leqslant\theta<90°$，$(\alpha,\alpha)\leqslant(\beta,\beta)$，则 $\theta=30°\Leftrightarrow 3(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$，$\theta=45°\Leftrightarrow 2(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$，$\theta=60°\Leftrightarrow(\alpha,\alpha)=(\beta,\beta)$. v) 若 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$，则 $[\mathfrak{g}_\alpha,\mathfrak{g}_\beta]=\mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. 反之，若一个有限维 Euclid 空间的有限子集Δ满足条件 i), ii) 及 iii) 或 iv) 时，则Δ与一个复半单 Lie 代数的根系相似.

【$\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的字典式序】 取 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 在 $\boldsymbol{R}$ 上任意的基 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$，对于 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的两个元 λ, $\mu(\lambda\neq\mu)$，定义 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 上的序关系 $\lambda>\mu$ 如下：设 $\lambda=\sum\xi_i\lambda_i$，$\mu=\sum\eta_i\lambda_i(\xi_i,\eta_i\in\boldsymbol{R})$，若存在 $s(1\leqslant s\leqslant l)$，使 $\xi_i=\eta_i\ (i=1,2,\cdots,s-1)$，$\xi_s>\eta_s$，则定义 $\lambda>\mu$. 序$>$是 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的全序，称为基 (λ_i) 所确定的 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的**字典式序** (lexicographic order). 此时 $\alpha>0$ (或 $\alpha<0$) 的根称为**正(或负)根** (positive (negative) root). 全体正(或负)根的集合记作Δ^+(或Δ^-). 反之，若Δ是两个子集 Δ^+, Δ^- 的直和分解 $\Delta=\Delta^+\cup\Delta^-$, $\Delta^+\cap\Delta^-=\varnothing$，且具有性质 $\alpha\in\Delta^+\Leftrightarrow-\alpha\in\Delta^-$，则 Δ^+ 与由 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的某个字典式序所产生的正根的全体相同. $\alpha\in\Delta^+$不能表示成Δ^+的两个元的和时，α 称为**单根**(simple root).

【基本根系】 由Δ中的 l 个根 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 所成的子集 Π 称为Δ的一个**基本根系** (fundamental root system)，如果 i) Δ 的每一元α可以唯一地表成 $\alpha=\sum m_i\alpha_i$ (m_i 全部是整数)；ii) $m_1,\cdots,m_l$ 总是全部$\geqslant 0$或全部$\leqslant 0$. 对于 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的任意字典式序的全体单根，构成一个基本根系. 并且任意的基本根系均可这样得到. 对于基本根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$, $\sum\mathfrak{g}_{\alpha_i}+\sum\mathfrak{g}_{-\alpha_i}$ 生成 $\mathfrak{g}$. 所以 $\mathfrak{g}$ 不是单的当且仅当 Π 允许"正交分解"，即Π可以分成两个非空子集Π_1, Π_2 的并，而且 Π_1 的元都与 Π_2 的元正交. l^2 个整数 $a_{ij}=-2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_i,\alpha_i)(1\leqslant i,j\leqslant l)$称为关于基本根系 Π 的 **Cartan 整数** (Cartan integer)，若 $i\neq j$，则 $a_{ij}\geqslant 0$, $a_{ii}=-2$.

【Borel 子代数与抛物子代数】 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 与关于全部正根 $\alpha\in\Delta^+$ 的 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的和 $\mathfrak{b}=\mathfrak{h}+\sum_{\alpha>0}\mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大可解子代数. $\mathfrak{g}$ 的极大可解子代数称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Borel 子代数** (Borel subalgebra). $\mathfrak{g}$ 的任意极大可解子代数是在 $I(\mathfrak{g})$ 的元素下互相共轭的. 包含$\mathfrak{g}$的一个 Borel 子代数的 $\mathfrak{g}$ 的任意子代数，称为 $\mathfrak{g}$ 的**抛物子代数** (parabolic subalgebra). 对基本根系 $\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 中的任意一个子集 Φ，考虑那些负根 $\alpha=\sum n_i\alpha_i$，这里只有 $\alpha_i\in\Phi$ 才有可能 $n_i\neq 0$，作这种α的 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的和加上 Borel 子代数 $\mathfrak{b}$，令为 $\mathfrak{p}$，于是 $\mathfrak{p}$ 是一个抛物子代数. 反之，$\mathfrak{g}$ 的任意抛物子代数皆经 $I(\mathfrak{g})$的元共轭于一个(固定 $\mathfrak{h}$, Π 而得的) $\mathfrak{p}$ 形的抛物子代数. 若 $\mathfrak{g}$ 的秩是 l，则互不共轭的抛物子代数的个数恰好是 2^l 个.

【Weyl 的标准基】 $\mathfrak{h}$ 的基 $H_1,\cdots,H_l$ 与每一 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的基 E_α 组成的 $\mathfrak{g}$ 的基 (H_α,E_α) 满足下面的条件 i), ii), iii) 时，就称为 **Weyl 标准基** (Weyl's canonical base): i) 对每一$\alpha\in\Delta$, $\alpha(H_j)\in\boldsymbol{R}(j=1,\cdots,L)$; ii) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型 B 对每一 $\alpha\in\Delta$ 满足 $B(E_\alpha,E_{-\alpha})=-1$; iii) 若对使得 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Delta$ 的 α,β，令$[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}(N_{\alpha,\beta}\in\boldsymbol{C})$，则 $N_{\alpha,\beta}$ 是实数，且 $N_{\alpha,\beta}=N_{-\alpha,-\beta}$. Weyl 标准基必存在. 此时，若令

$$\mathfrak{g}_u=\sum\boldsymbol{R}\sqrt{-1}H_j+\sum\boldsymbol{R}(E_\alpha+E_{-\alpha})+\sum\boldsymbol{R}\sqrt{-1}(E_\alpha-E_{-\alpha}),$$

则 $\mathfrak{g}_u$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的半单 Lie 代数，且它的 Killing 型是负定的. 而且以 $\mathfrak{g}_u$ 为其 Lie 代数的连通 Lie 群总是紧的. 且有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_u+\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_u$, $\mathfrak{g}_u\cap\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_u=0$. 即 $\mathfrak{g}$ 与将 $\mathfrak{g}_u$ 的基域 $\boldsymbol{R}$ 扩张到 $\boldsymbol{C}$ 而得到的 $\boldsymbol{C}$ 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_u^{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\otimes_{\boldsymbol{R}}\mathfrak{g}_u$ 同

构. $\mathfrak{g}_u$ 称为 $\mathfrak{g}$ 关于 Weyl 标准基 (H_i, E_α) 的**酉限制**(unitary restriction).

一般地，当 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ 满足 $\mathfrak{a}^C \cong \mathfrak{g}$ 时，可以看作 $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$，$\mathfrak{a}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**实型** (real form)，$\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的**复型** (complex form) 或**复化** (complexification). 若实 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ 的 Killing 型是负定的,则 $\mathfrak{a}$ 称为**紧实 Lie 代数** (compact real Lie algebra).

实 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ 是某个紧 Lie 群的 Lie 代数的充分必要条件是：$\mathfrak{a}$ 为紧实 Lie 代数. 紧实 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{a}$ 的中心与紧实半单 Lie 代数的直和,因而是可简约的.

复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的紧实型 $\mathfrak{g}_u$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的**紧型** (compact form). $\mathfrak{g}$ 的紧型对于 $\mathfrak{g}$ 的内自同构群 $I(\mathfrak{g})$ 是互相共轭的.

【Chevalley 标准基】 可以取 $\mathfrak{h}$ 的基 $H_1, \cdots, H_l$, 以及每个 $\mathfrak{g}_\alpha$ 的基 E_α, 使得下列条件成立: i)对每一 $\alpha \in \Delta$ 与 $i = 1, \cdots, l$, $\alpha(H_i)$ 是整数; ii) 对每一 $\alpha \in \Delta$, $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 2/(\alpha, \alpha)$; iii) 对 $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$, 设 $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta} (N_{\alpha,\beta} \in \boldsymbol{C})$, 则 $N_{\alpha,\beta}$ 是整数,且 $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$. 这样的基称为 **Chevalley 标准基** (Chevalley's canonical base). 这时, $\mathfrak{g}$ 关于基 (H_i, E_α) 的构造常数全部是整数. 因而 $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{Z}} = \sum \boldsymbol{Z} H_i + \sum \boldsymbol{Z} E_\alpha$ 成为 $\boldsymbol{Z}$ 上的 Lie 代数. $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{R}} = \sum \boldsymbol{R} H_i + \sum \boldsymbol{R} E_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$ 的实型, 而且具有下面的性质: 存在 $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{R}}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$, 对于每一 $H \in \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}$, $\mathrm{ad}(H)$ 在 $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{R}}$ 上的特征值全部是实数(实际上可取 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}} = \sum \boldsymbol{R} H_i$). 这样的实型称为 $\mathfrak{g}$ 的**正规实型** (normal real form). $\mathfrak{g}$ 的正规实型对于 $I(\mathfrak{g})$ 是互相共轭的.

【Weyl 群】 Euclid 空间 $\mathfrak{h}_R^*$ 的反射 $w_\alpha (\alpha \in \Delta)$ 生成的合同变换群 W 称为 $\mathfrak{g}$ 的关于 $\mathfrak{h}$ 的 **Weyl 群** (Weyl group). W能一一地表示为有限集Δ的一个置换群†,因而是有限群. 若 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 是基本根系,则W由 $w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_l}$ 生成. 因而根系 Δ 与 $\{w(\alpha) | w \in W, \alpha \in \Pi\}$ 相同. 若设全体基本根系作成的基是 $\mathfrak{F}$, 则 W 单可迁地作用在 $\mathfrak{F}$ 上. 若 $\mathfrak{g}$ 是单的, 则 $\alpha, \beta \in \Delta$ 对于W共轭当且仅当 $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta)$. 设由 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 中除去以 $\alpha \in \Delta$ 为法向量的超平面 P_α 的并所得的全集为 Γ, 则 Γ 是 $\mathfrak{h}_R^*$ 中W不变的开集. Γ 的连通分支称为 **Weyl 房** (Weyl chamber). W单可迁地作用在所有 Weyl 房的集合上. 对基本根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$, $\{x \in \mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^* | (x, \alpha_i) > 0\ (i = 1, \cdots, l)\}$ 是一个 Weyl 房, 称为属于 Π 的**正 Weyl 房**. 取 $\mathfrak{h}_R^*$ 的以 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 为单根系的任一字典式序, 对于 $w \in W$, 令 $\Delta_w^+ = \{\alpha \in \Delta^+ | w(\alpha) \in \Delta^-\}$, 并把 Δ_w^+ 中根的个数记为 $n(w)$, 则有 $n(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1$. 而且$w$能写成 $w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_l}$ 中 $n(w)$ 个元的积(允许重复),而不能写成 $w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_l}$ 中少于 $n(w)$ 个元的积. 关于生成系 $w_{\alpha_1}, \cdots, w_{\alpha_l}$, W 有下面的基本关系:

$$w_{\alpha_i}^2 = 1, 1 \leqslant i \leqslant l; \ (w_{\alpha_i} w_{\alpha_j})^{m_{ij}} = 1, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant l.$$

其中 m_{ij} 是 $w_{\alpha_j}, w_{\alpha_i}$ 的阶数, 若 α_i 与 α_j 的夹角是 θ_{ij}, 则 $m_{ij} = \pi/(\pi - \theta_{ij})$.

令 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的线性变换中使Δ不变的全体为T, 则T也是 $\mathfrak{h}_{\boldsymbol{R}}^*$ 的合同变换群,而且是有限群. W 是T的不变子群. 因而, 若固定基本根系 Π, 令 $P = \{\sigma \in T | \sigma(\Pi) = \Pi\}$, 则$P$是$T$的子群, $T = P \cdot W$ (半直积). P 的元称为关于Π的**特殊变换**(special transformation). $P \cong T/W$ 与 $\mathfrak{g}$ 的外自同构群 $A(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$ 同构.

【复单 Lie 代数的分类】 取半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$, 关于 $\mathfrak{h}$ 的基本根系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$,对于$\Pi$可构成如图 1 的图(一维复型†),称为 $\mathfrak{g}$ 的 **Дынкин 图形**(Dynkin diagram) (也称 **Schläfli 图形**或 **Coxeter 图形**). 首先, 一 α_i 分别对应一个小白圈,这 l 个白圈按下面的规则用线段连结: 设 α_i 与 α_j 的夹角是 θ_{ij}, i) 若 $\theta_{ij} = 150°$, 则用带箭头的三条线连结(图 1 之(1), 箭头表示 $(\alpha_i, \alpha_i) > (\alpha_j, \alpha_j)$); ii) 若 $\theta_{ij} = 135°$, 则用带箭头的两条线连结(图 1 之 (2)); iii) 若 $\theta_{ij} = 120°$, 则用一条线连结 (图 1 之 (3), 不带箭头); iv) 若 $\theta_{ij} = 90°$, 则不连结. 这样, $\mathfrak{g}$ 的 Дынкин 图形不依赖于 $\mathfrak{h}$, Π 的取法. 而且对 $\boldsymbol{C}$ 上的两个半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$, "$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2 \Leftrightarrow \mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 的 Дынкин

图形相同”成立. $\mathfrak{g}$ 是单的当且仅当 Дынкин 图形是连通的.

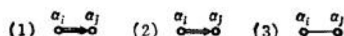


图 1 Дынкин 图形

半单的复单 Lie 代数的所有可能的 Дынкин图形有图 2 所示的七种(A_l的下标字母 l 表示$\mathfrak{g}$的秩). $A_l(l \geqslant 1), B_l(l \geqslant 2), C_l(l \geqslant 3), D_l(l \geqslant 4)$称为**典型(型)复单 Lie 代数** (classical complex simple Lie algebra). $E_l(l=6,7,8)$, F_4, G_2 称为**例外(型)复单 Lie 代数**(exceptional complex simple Lie algebra). 其中 $A_1 \cong B_1 \cong C_1$, $B_2 \cong C_2$, $A_3 \cong D_3$, 其他不存在同构关系. 又 $D_2 \cong A_1 + A_1$, A_l 是复 Lie 群 $SL(l+1, \boldsymbol{C})$ 的复 Lie 代数, B_l 是 $SO(2l+1, \boldsymbol{C})$的复 Lie 代数, C_l 是 $Sp(l, \boldsymbol{C})$ 的复 Lie 代数, D_l 是 $SO(2l, \boldsymbol{C})$ 的复 Lie 代数.

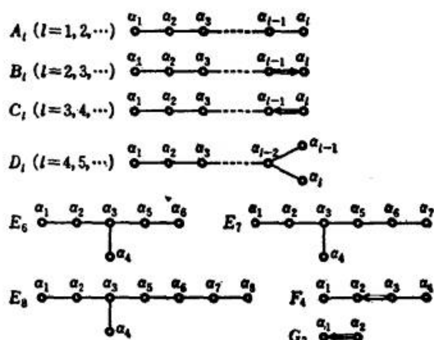


图 2 单 Lie 代数的 Дынкин 图形

dim $\mathfrak{g}$, A_l: l^2+2l, B_l: $2l^2+l$, C_l: $2l^2+l$, D_l: $2l^2-l$, E_6: 78, E_7: 133, E_8: 248, F_4: 52, G_2: 14

【紧实单 Lie 代数的分类】 关于一般域上的单 Lie 代数的分类→[4]及其书末的文献表. 特别是, 在实数域上的情形→公式 5 I, II. 它与不可约对称 Riemann 空间的分类有密切的关系(→对称 Riemann 空间).

特别地, 紧实半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 和它的复化复半单 Lie 代数 $\mathfrak{g}^C$ (除同构外)是一一对应的, 紧实单 Lie 代数的分类,可归结为复单Lie代数的分类,因而它们可用同一个Дынкин图形来表示. 这时, A_l, B_l, C_l, D_l 称为**典型(型)紧实单 Lie 代数** (classical compact real simple Lie algebra), $E_l(l=6,7,8)$, F_4, G_2 称为**例外(型)紧实单 Lie 代数** (exceptional compact real simple Lie algebra). A_l, B_l, C_l, D_l 分别是 $SU(l+1)$, $SO(2l+1)$, $Sp(l)$, $SO(2l)$ 的实 Lie 代数.

【实半单Lie代数的佐武图形】 设$\mathfrak{g}$是实数域上的半单 Lie 代数, 与 $\mathfrak{g}$ 的伴随群†中极大紧子群†相伴的子代数是$\mathfrak{k}$; 又设对于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型,$\mathfrak{k}$ 的正交补空间是 $\mathfrak{p}$,$\mathfrak{a}$是 $\mathfrak{p}$ 中的一个极大交换子代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 中包含 $\mathfrak{a}$ 的一个 Cartan 子代数,设$\mathfrak{g}$,$\mathfrak{h}$的复化分别是$\mathfrak{g}^C$, $\mathfrak{h}^C$, σ 是由 $\sigma(X+\sqrt{-1}\,Y) = X - \sqrt{-1}Y (X, Y \in \mathfrak{g})$ 确定的$\mathfrak{g}^C$的半线性†自同构†. $\mathfrak{h}^C$ 在σ作用下不变. σ 如下地作用于 $\mathfrak{g}^C$ 关于 $\mathfrak{h}^C$ 的根系Δ上: $(\sigma\alpha)(H) = \overline{\alpha(\sigma H)}$,从而$\sigma$作用于 $(\mathfrak{h}^C)^*_R$ 上. 在 $(\mathfrak{h}^C)^*_R$ 上有一个字典式序,使α是正根,且若 $\sigma\alpha \neq -\alpha$, 则 $\sigma\alpha$ 也是正根. 固定这样一个序, 设Π是对于这个序的单根系. 把σ分解为 Weyl 群的元w与对于Π 的特殊变换p的积 $\sigma = pw$ 时, p 导出使得 $\sigma\alpha \neq -\alpha$ 的单根 α 所成的集合上的阶为 2 的置换.在Π的 Дынкин 图形中,把对应于使得 $\sigma\alpha = -\alpha$ 的单根 α 的白圈变为黑点, 余下的白圈中可由特殊变换p而相互交换的用两端各有一个箭头的弧连结. 这样得到的图形,称为**佐武图形**(Satake diagram).佐武图形与$\mathfrak{k}$,$\mathfrak{a}$,$\mathfrak{h}$ 及$(\mathfrak{h}^C)^*_R$的序的取法无关,仅由$\mathfrak{g}$的同构类确定. 两个实半单 Lie 代数同构, 当且仅当它们的佐武图形相同. $\mathfrak{g}$ 是单的充分必要条件是它的佐武图形是连通的. 因而由佐武图形可以作出实单 Lie 代数的分类([16]).

【实半单 Lie 代数的岩沢分解】 设$\mathfrak{g}$是实数域上的半单 Lie 代数. 采用作出佐武图形时所取的$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{h}$ 和 $(\mathfrak{h}^C)^*_R$ 的序. 对于满足 $\sigma\alpha \neq -\alpha$ 的正根 α, $\mathfrak{g}^C$ 的根子空间的直和 $\sum(\mathfrak{g}^C)_\alpha$ 与 $\mathfrak{g}$ 的交 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数. 此时 $\mathfrak{g}$ 可分解为直和 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, 称它为 $\mathfrak{g}$ 的**岩沢分解** (Iwasawa's decomposition). 岩沢分解在下面的意义下是唯一的: 若 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' + \mathfrak{a}' + \mathfrak{n}'$ 也是一个岩沢分解,则存在$\mathfrak{g}$的适当的内自同构 A,

使 $A\mathfrak{k}=\mathfrak{k}'$, $A\mathfrak{a}=\mathfrak{a}'$, $A\mathfrak{n}=\mathfrak{n}'$.

关于 Lie 代数的上同调理论与特征 $p>0$ 的域上 Lie 代数的理论，特别是**限制 Lie 代数** (restricted Lie algebra) 的理论→[4]. 关于 Lie 代数与有限群理论之间的关系（例如，Chevalley 单群与 Burnside 问题等）→[8] 以及其中的文献.

【表示论】 设 $\mathfrak{g}$ 是复半单 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，以下固定 $\mathfrak{h}$ 与 $\mathfrak{h}_R^*$ 的一个字典式序. 设单根系是 $\Pi=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$. 因为 $\mathfrak{g}$ 的表示全都是完全可约的，所以决定不可约表示即可. 设 (ρ,V) 是 $\mathfrak{g}$ 的表示，λ 是 $\mathfrak{h}$ 上的线性型时，$V_\lambda=\{v\in V|\rho(H)v=\lambda(H)v$ (对一切 $H\in\mathfrak{h}$)$\}$ 是 V 的子空间. 使 $V_\lambda\neq 0$ 的 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$, 称为表示 ρ (关于 $\mathfrak{h}$) 的**权** (weight). V_λ 的维数称为 λ 的**重数** (multiplicity). ρ 的全体权构成 $\mathfrak{h}_R^*$ 的有限子集，设它为 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$, 则 $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$ 是 W 不变的，并有 $V=V_{\lambda_1}+\cdots+V_{\lambda_r}$ (直和). 对于上述的字典式序，$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_r\}$ 中的最大元称为 ρ 的**最高权** (highest weight).

对于不可约表示的决定，下面两条定理是基本的: 1) E. Cartan 定理. 若 $\mathfrak{g}$ 的两个不可约表示 ρ_1, ρ_2 的最高权分别是 Λ_1, Λ_2, 则 ρ_1 与 ρ_2 等价 $\Leftrightarrow \Lambda_1=\Lambda_2$. 2) E. Cartan-H. Weyl 定理. 当 $\lambda\in\mathfrak{h}_R^*$ 时，存在 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示，它以 λ 为其最高权的充分必要条件是: i) 对每一 $\alpha\in\Delta$, $2(\lambda,\alpha)/(\alpha,\alpha)\in \boldsymbol{Z}$ (这样的 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 称为**整型** (integral form)); 而且 ii) 对每一 $w\in W$, $w(\lambda)\leqslant\lambda$ (这样的 $\lambda\in\mathfrak{h}_R^*$ 称为**支配的** (dominant)).

从这些定理，可以导出不可约表示的基本系. 令 $\alpha_i^*=2\alpha_i/(\alpha_i,\alpha_i)$, 与 $\alpha_1^*,\cdots,\alpha_l^*$ 对偶的 $\mathfrak{h}_R^*$ 的基是 $\Lambda_1,\cdots,\Lambda_l$: $(\Lambda_i,\alpha_j^*)=\delta_{ij}$, 则自由 Abel 群† $\sum \boldsymbol{Z}\Lambda_i$ 与全体整型所成的模 P 相同. P 的元 $\sum m_i\Lambda_i$ (m_i 都是整数) 是支配的充分必要条件为一切 $m_i\geqslant 0$. 把 P 中的支配元所成的半群†记作 P^+. 设 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示 (ρ_j,V_j) 有最高权 $\Lambda_j(j=1,2,\cdots,l)$, 这些不可约表示称为**不可约表示的基本系** (fundamental system of irreducible representations). 这时，以 $\Lambda=\sum m_j\Lambda_j$ 为最高权的不可约表示可由下面的方法构成. 首先，令 $V_j^{m_j}=V_j\otimes\cdots\otimes V_j$ (m_j 个的张量积), $\tilde{V}=V_1^{m_1}\otimes\cdots\otimes V_l^{m_l}$, 于是 $\tilde{V}$ 按自然的方法成为 $\mathfrak{g}$ 的表示空间，设 $\tilde{V}$ 中包含 $\tilde{V}_\Lambda=(V_1)_{\Lambda_1}^{m_1}\otimes\cdots\otimes(V_l)_{\Lambda_l}^{m_l}$ 的最小的 $\mathfrak{g}$ 不变子空间是 V, 于是 V 给出了以 Λ 为最高权的 $\mathfrak{g}$ 的不可约表示. 这样，分解形如 $V_1^{m_1}\otimes\cdots\otimes V_l^{m_l}$ 的张量积，就得出全部不可约表示. 表示 $\rho_1,\cdots,\rho_l$ 称为不可约表示的基本系的理由就在于此.

【与紧 Lie 群的表示论的关系】 设 G 是紧、连通、半单 Lie 群. G 的实 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是交换的. $\dim\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 或 G 的**秩** (rank). 设对应于 $\mathfrak{h}$ 的 G 的连通 Lie 子群是 H, 则 H 是 G 的**极大环面子群** (maximal torus). G 的任意极大环面子群与 H 共轭. G 的任意元与 H 的某一元共轭. 设 $N=N(H)$ 是 H 在 G 中的正规化子†. 对于每一 $\sigma\in N$, G 的伴随表示 $\mathrm{Ad}(\sigma)$ 诱导出的 $\mathfrak{g}^C$ ($\mathfrak{g}$ 的复型) 的自同构也记作 $\mathrm{Ad}(\sigma)$ 时，由 $\mathrm{Ad}(\sigma)$ 限制在 $(\mathfrak{h}^C)_R$ 上导出 $\mathfrak{g}^C$ 关于 $\mathfrak{h}^C$ 的 Weyl 群的元 w_σ. 由映射 $\sigma\to w_\sigma$ 得出 $N/H\cong W$, 以下看作 $N/H=W$.

因为 $(\mathfrak{h}^C)_R=\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}$ 成立，所以用 $\mathfrak{h}$ 的一个基可以确定一个字典式序. 固定这样一个序. G 的线性表示 (ρ,V) (V 是复线性空间) 可导出 $\mathfrak{g}$ 的线性表示 $(d\rho,V)$ ($d\rho$ 是 ρ 的微分) (→Lie 群). 从而可导出 $\mathfrak{g}^C$ 的线性表示 $(d\rho,V)$. 以下，$\mathfrak{g}^C$ 的表示 $d\rho$ (关于 $\mathfrak{h}^C$) 的权 λ, 称为 G 的表示 ρ (关于 H) 的权. "G 的表示 ρ_1, ρ_2 等价 $\Leftrightarrow \mathfrak{g}^C$ 的表示 $d\rho_1$, $d\rho_2$ 等价" 成立，所以对于 G 的不可约表示 ρ_1, ρ_2, 若 $d\rho_1$, $d\rho_2$ (关于 $\mathfrak{h}^C$) 的最高权分别是 Λ_1, Λ_2, 则 "ρ_1 与 ρ_2 等价 $\Leftrightarrow \Lambda_1=\Lambda_2$" 成立.

$(\mathfrak{h}^C)_R^*$ 中的全体整型所成的模 P 是 $(\mathfrak{h}^C)_R^*$ 中成为 $\mathfrak{g}^C$ 的某一表示(对于 $\mathfrak{h}^C$)的权的元的全体，把 P 中成为 G 的某一表示 (对于 H) 的权的元的全体记作 P_G. P_G 是 P 的子模，而且有 $[P:P_G]<\infty$. 若 $P_G^+=P^+\cap P_G$, 则由对应: (表示 ρ) → (ρ 的最高权 Λ) 导出 G 的不可约表示的

等价类的全体到 P_G^+ 上的一个双射.

映射 $\exp:\mathfrak{h}\to H$ 是 $\mathfrak{h}$ 到 H 上的满同态. 令它的核是 Γ_G, 则 Γ_G 是 $\mathfrak{h}$ 中的秩为 $l(=\dim\mathfrak{h})$ 的格群†, Γ_G 的 $\boldsymbol{Z}$ 基 $H_1,\cdots,H_l$ 也是 $\mathfrak{h}$ 的 $\boldsymbol{R}$ 基, 由 $\lambda_i(H_j)=\delta_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant l)$ 确定 $\mathfrak{h}$ 上的线性型 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$, 于是就有 $P_G=2\pi\sqrt{-1}\sum\boldsymbol{Z}\lambda_i$ 成立. 即对于 $\lambda\in(\mathfrak{h}^C)^*_{\boldsymbol{R}}$, $\lambda\in P_G\Leftrightarrow$ 对每一 $H\in\Gamma_G$, $\lambda(H)\in 2\Pi\sqrt{-1}\boldsymbol{Z}$. 这刻划了 P_G, 也刻划了 $P_G^+=P_G\cap P^+$. 特别是, G 是单连通的 $\Leftrightarrow P=P_G\Leftrightarrow\Gamma_G=2\Pi\sqrt{-1}\sum\boldsymbol{Z}\alpha_i^*$(其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ 是单根系, $\alpha_i^*=2\alpha_i/(\alpha_i,\alpha_i)$ $(1\leqslant i\leqslant l)$); 还有 $G=I(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g}$ 的内自同构群) $\Leftrightarrow P_G=\sum\boldsymbol{Z}_{\alpha_i}\Leftrightarrow\Gamma_G=2\pi\sqrt{-1}\sum\boldsymbol{Z}_{\varepsilon_i}$ (其中 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_l$ 是由 $(\alpha_i,\varepsilon_j)=\delta_{ij}$ 确定的 $(\mathfrak{h}^C)^*_{\boldsymbol{R}}$ 的元). 在一般的情形, 有 $P\supset P_G\supset\sum\boldsymbol{Z}_{\alpha_i}$, $2\pi\sqrt{-1}\sum\boldsymbol{Z}\alpha_i^*\subset\Gamma_G\subset 2\pi\sqrt{-1}\boldsymbol{Z}_{\varepsilon_i}$. 而且, G 的基本群† $\pi_1(G)\cong\widetilde{G}/G\cong P/P_G\cong\Gamma_G/2\pi\sqrt{-1}\sum\boldsymbol{Z}\alpha_i^*$ ($\widetilde{G}$ 是 G 的单连通覆盖 Lie 群†). 又 $G/I(G)\cong P_G/\sum\boldsymbol{Z}_{\alpha_i}\cong(2\pi\sqrt{-1}\sum\boldsymbol{Z}_{\varepsilon_i})/\Gamma_G$.

【G 的不变测度】 对每一根 $\alpha\in\Delta$, 下面的 $\mathfrak{g}_\alpha^C$ 作成 H 的一维表示 $h\to\chi_\alpha(h)$ 的表示空间: 取 $\mathfrak{g}_\alpha^C$ 的基 E_α, 有 $\mathrm{Ad}(h)E_\alpha=\chi_\alpha(h)E_\alpha$. 且若 $h=\exp X$ $(X\in\mathfrak{h})$, 则 $\chi_\alpha(h)=e^{\alpha(X)}$: $\chi_\alpha\circ\exp=e^\alpha$. 以下记 χ_α 为 e^α: $\chi_\alpha(h)=e^\alpha(h)$ $(h\in H)$. dg,dh,dm 分别是 $G,H,M=G/H$ 上的不变测度† 且由 $\int_G dg=1,\int_H dh=1$, $\int_M dm=1$ 所正规化. 此时对于 G 上任意连续函数 f, 有下面的公式成立:

$$(1)\qquad \int_G f(g)\,dg=\frac{1}{w}\times\int_H\left(\int_M f(m,h)dm\right)\Omega(h)\,dh,$$

此处 w 是 Weyl 群 W 的阶, $f(m,h)=f(ghg^{-1})$ 是仅由 g 的陪集 $m=gH$ 与 h 所确定的函数, 因而是 $M\times H$ 上的函数. 对于 $h=\exp X(X\in\mathfrak{h})$, 由

$$\Omega(h)=\prod_{\alpha\in\Delta}(e^{\alpha(X)/2}-e^{-\alpha(X)/2})$$

定义的 $\Omega(h)$ 称为 H 上的"密度函数". 令在上式右端关于 $\alpha\in\Delta^+$ 取积所得的函数为 $D(h)$, 则有 $\Omega(h)=D(h)\overline{D(h)}=|D(h)|^2\geqslant 0$. 特别是, 若对 $x,y\in G$ 有 $f(xyx^{-1})=f(y)$, 即若 f 是 G 上的类函数†, 则有 $f(m,h)=f(h)$, 从而(1)可更简化如下(类函数的积分公式):

$$(2)\qquad \int_G f(g)\,dg=\frac{1}{w}\int_H f(h)\Omega(h)dh.$$

【特征标公式】 设 G 的不可约表示 (ρ,V) 的特征标为 χ_ρ: $\chi_\rho(g)=\mathrm{tr}\,\rho(g)$, Λ 是 ρ 的最高权. ρ 除去等价外, 由 Λ 也由 χ_ρ 确定, 所以 χ_ρ 应由 Λ 确定. 实际上下面的 **Weyl 特征标公式** (Weyl's character formula) 成立. 易知 χ_ρ 由它在 H 上的限制所确定(因为 $G=\bigcup gHg^{-1}$). 对于 $h\in H$,

$$(3)\qquad \chi_\rho(h)=\xi_{\Lambda+\delta}(h)/\xi_\delta(h),$$

其中 ξ_λ (对于 $\lambda\in P$) 是下面的"交错和":

$$(4)\qquad \xi_\lambda(h)=\sum_{w\in W}\det(w)\cdot e^{(w(\lambda))(X)},$$

$$h=\exp X.$$

又在(3)中, δ 是全部正根的和的一半:

$$\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha.$$

特别有 $\xi_\delta(h)=D(h)$ 成立. 对于 ρ 的权 λ, 若把它的重数 $\dim V_\lambda$ 记为 $m_\Lambda(\lambda)$, 则 $\chi_\rho(h)=\sum_\lambda m_\Lambda(\lambda)e^\lambda(h)$. $m_\Lambda(\Lambda)=1$, $m_\Lambda(\lambda)=m_\Lambda(w(\lambda))$ $(w\in W)$. 关于 $m_\Lambda(\lambda)$, 有下面的 **Kostant 公式**:

$$(5)\qquad m_\Lambda(\lambda)=\sum_{w\in W}\det(w)P(w(\Lambda+\delta)-(\lambda+\delta)),$$

此处对于 $\mu\in P$, 以 $P(\mu)$ 表示 μ 表为正根的和的方法的总数, 即 $P(\mu)$ 是 $\mu=\sum_{\alpha\in\Delta^+}k_\alpha\alpha$ 的非负整数解 $\{k_\alpha\}$ 的个数.

G 的不可约表示 (ρ_1,V_1), (ρ_2,V_2) 的张量积 $(\rho_1\otimes\rho_2,V_1\otimes V_2)$ 分解为不可约分量的直和: $\rho_1\otimes\rho_2=\sum m(\mu)\rho_\mu$ (ρ_μ 是以 μ 为最高权的 G 的不可约表示, $m(\mu)$ 是它的重数), 于是

关于重数 $m(\mu)$，有下面的 **Steinberg 公式**:

$$(6)\quad m(\mu)=\sum_{w\in W}\sum_{w'\in W}\det(ww')P(w(\Lambda_1+\delta))+w'((\Lambda_2+\delta)-(\lambda+2\delta))$$

此处 Λ_1, Λ_2 分别是 ρ_1, ρ_2 的最高权. 上面的划分函数 $P(\mu)$ 满足下面的递推公式(B. Kostant):

$$(7)\qquad P(\mu)=-\sum_{w\in W,w\neq 1}\det(w)\times P(\mu-(\delta-w(\delta))).$$

【参】 [1] Séminaire "Sophus Lie", École Norm. Sup., 1954—55; [2] 松島与三, リー環論, 共立出版, 1957; [3] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique* Groupe et algèbres de Lie, Actualités Sci. Ind., Hermann, ch. 1—3, 1960; ch. 4—6, 1968; [4] N. Jacobson, Lie algebras, Interscience, 1962 (中译本: N. 贾柯勃逊, 李代数, 上海科学技术出版社, 1964); [5] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962; [6] E. Cartan, Ceuvres complètes I, Gauthier-Villars, 1952; [7] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; Teórie des groupes de Lie, II, III, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1951, 1955; [8] I. Kaplansky, Lie algebras, 刊载于 T. L. Saaty 编, *Lectures on modern mathematics* John Wiley, 1963; vol. 1, P. 115—132; [9] H. Weyl, Theorie der Darstellung Kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch linearen Transformationen I, II, III, Math, Z., **23** (1925), 271—309, 24 (1926), 328—376, 377—395; [10] H. Weyl, The classical groups, Princeton Univ. Press, 1939; 修订版, 1946; [11] I. Ado (И. Адо), Über die Darstellung der endlichen kontinuierlichen Gruppen durch linearen Transformationen, Bull. Soc, Physico-Math., Kazan, **7** (1934—35), 3—43; [12] Е. Б. Дынкин, Структура полупростых алгебр, Успехи Мат. Наук **2**(1947), 59—127 (英译本: E. B. Dynkin, The structure of semisimple Lie algebras, Amer, Math. Soc. Translations, Ser, I. **9** (1950) 328—469); [13] R. Bott, Homogeneous vector bundles, Ann. of Math., **66** (1957), 203—248; [14] I. Satake (佐武一郎), On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math. **71** (1960), 77—110; [15] H. Freudenthal, Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktavengeometrie, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteitte (mimeographed note), Utrecht, 1951; [16] S. Araki (荒木捷朗), On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, J. Math. Osaka City Univ., **13** (1962), 1—34; [17] F. R. Gantmacher (Ф. Р. Гантмахер), On the classification of real simple Lie groups, Матем. сб., 5 (47) (1939), 217—250; [18] J.-P. Serre, Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965; [19] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.

代数群 [英 algebraic group 法 groupe algébrique 德 algebraische Gruppe 俄 алгебраическая группа 日 代数群] 【定义与一般理论】 设 k 是任意域, Ω 是包含 k 的万有域†, 若群 G 同时又是在某个仿射空间 Ω^N 中的定义于 k 上的(不一定是不可约的)仿射代数簇†(→代数簇), 又设群的运算 $G\times G\ni(x,y)\to x^{-1}y\in G$ 是定义于 k 上的处处正则的有理映射†, 这时, 就称 G 为(关于这些结构)定义于 k 上的**仿射代数群**(affine algebraic group). G 的所有 k 有理点所成的集合 G_k 形成一个(抽象的)群. 又含有 G 的单位元 e 的不可约分支†只有一个, 若用 G_0 表示这个分支, 则 G_0 是在 k 上定义的 G 的闭正规子群, 且 $(G:G_0)$ 有限, G 分解为(绝对)不可约分支的分解与按照 G_0 的陪集的分解是一致的. 当 $G=G_0$ 时, 称 G 为**连通的**(connected). 对于 k 上定义的群 G, 陪集 gG_0 不一定都在 k 上定义, 而且即使 gG_0 在 k 上定义时, gG_0 的代表元 g 也不一定能取成 k 有理点. 但在 k 是含有无限多个元的完全域†并且 G 是连通的情形下, G_k 在 G 中处处稠密([12]), 因而 G 由 G_k 完全确定(在这种情形, 有时称 G_k 为"k 代数群"). 当 k 是拓扑域时, 则 G_k 关于由 k 的拓扑所定义的自然拓扑成为拓扑群†, 这个拓扑一般比 Zariski 拓扑†强. 例如, $k=R$ 时, $(G_0)_R$ 一般是具有有限多个连通分支的 Lie 群†.

仿射代数群 G 的 Zariski 闭子群 H 具有在其上自然导出的代数群的结构. 一般地, 代数群的子群具有其自身代数群结构时, 称为**代数子群**(algebraic subgroup). 若 H 在 k 上定义, 则它为 k 闭. 一般地, 仿射代数簇 A 称为 **k 闭的**(k-closed), 如果 A 是以 k 的元为系数的若干个多项式的共同零点的集合. A 是 k 闭的充分必要条件是: A 的所有不可约分支均定义于 k 的代数闭包 $\bar{k}$ 中, 而且对于 $\bar{k}/k$ 的每个 Galois 自同构 σ 均有 $A^\sigma=A$. 又代数群的同态、同构等概念可用自然的方法来定义. 例如, 设 G, G' 是在 k 上定义的代数群, 若 G 到 G' 中的同态 φ 同时也是在 k 上定义的(处处正则的)有理映射, 就称 φ 是 G 到 G' 中的在 k 上定义的**有理同态**(rational homomorphism), 或简称为 **k 射** (k-

morphism)．这时，(集合论的)象 $\varphi(G)$ 是 G' 的在 k 上定义的闭子群，其核 $\varphi^{-1}(e')$ 是 G 的 k 闭子群，且有 $\dim\varphi(G)=\dim G-\dim\varphi^{-1}(e')$．特别当 $\dim G=\dim\varphi(G)=\dim G'$（即 $\varphi(G_0)=G'_0$，$\varphi^{-1}(e')$ 有限)时，称 φ 为**同种**(isogeny)（对于两个群 G，G'，当存在第三个群 G'' 到 G,G' 的同种 $G''\to G$，$G''\to G'$ 时，就称 G,G' 为**同种的**(isogeneous))．若 φ 是双射，且 φ^{-1} 也是定义在 k 上的（处处正则的）有理映射，则称 φ 为**双有理同构**（birational isomorphism）或简称 **k 同构**(k-isomorphism)．有理同态 φ 又是抽象群的同构时，未必一定是代数群的同构（例如 Frobenius 同态），这个事实与拓扑群的单连续同态的情形是类似的．

设 G 是连通仿射代数群，H 是其闭子群(都是在 k 上定义的)，则在商空间 G/H 上，存在唯一确定的代数簇的结构，使标准映射 $G\to G/H$ 是可分的†．这时，G/H 的函数域†可以看作是 G 的函数域中所有 H 不变的元所构成的子域．特别是，当 H 是闭正规子群时，可用自然的方法使 G/H 具有（k 上定义的）仿射代数群的结构([11],[17],[18])．

例：$GL(n)$(所有 n 阶正则矩阵(x_{ij})构成的群)看作 n^2+1 维仿射空间中方程 $\det(x_{ij})\cdot y=1$ 所定义的代数簇时，就成为素域† 上定义的连通的代数群．与 $GL(n)$ 的闭子群同构的代数群，一般地称为**线性代数群**（linear algebraic group)．仿射代数群恒为线性代数群([7])，故这二者是同义语(→[1],[7],[11])．

【定义的推广】 在上面仿射代数群的定义中，如果把仿射簇换成一般的抽象的代数簇†，就得到一般的**代数群**（或**群簇**（algebraic group variety))的定义．关于一般的代数群，以下事实是已知的．完备†的连通代数群是 Abel 簇（→Abel 簇)．一般地，对于（k 上定义的）连通代数群 G，总存在最大(k 闭)线性连通闭正规子群，设它为 L，则 G/L 是 Abel 簇．再者，对于 G 的闭正规子群 H，G/H 为完备的充分必要条件是 $H\supset L$（**Chevalley 定理** [11])．特别是，若连通代数群 G 是完备的同时又是线性的，则 G 是单位元群． 由于这些定理，一般代数群的研究，原则上可归结为 Abel 簇与线性代数群的研究．因之，在本条里，专门讨论线性代数群，为了简单起见，称之为代数群（作为一般代数群概念的应用，例如，有 M. Rosenlicht 的广义 Jacobi 簇等([14])→代数曲线)．最近，A. Grothendieck [27]更进一步把代数群的概念推广成群概型†这个的概念．

【Lie 代数】 由于 k 上定义的代数群 G 不具有奇点，所以特别有，在 G 的单位元 e 处的切向量空间 $\mathfrak{g}$ 是有定义的，而且与 G 有相同维数：$\dim\mathfrak{g}=\dim G$．$\mathfrak{g}$ 可以用自然的方法看作是 G_0 的函数域的所有左不变的微分†所构成的线性空间，从而具有 k 上定义的 Lie 代数的结构(→Lie 代数)．$\mathfrak{g}$（或 $\mathfrak{g}$ 中 k 有理点的全体所成的 k 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_k$）称为 G（或 k 代数群 G_k）的 **Lie 代数**（Lie algebra)．若 $G\subset GL(n)$，则 $\mathfrak{g}_k$ 是包含于 $\mathfrak{gl}(n,k)$ 中的 Lie 代数(积为 $[x,y]=xy-yx$)．这样对应于（线性）代数群的（线性）Lie 代数一般称之为**代数的 Lie 代数**(algebraic Lie algebra)．当 k 的特征为零时，线性 Lie 代数是代数的 Lie 代数的充分必要条件可用**仿样**（replica）的概念给出([4])．设 t 是 k 上的变量，$k((t))$ 是 k 上的形式幂级数域†($\subset\Omega$)，则对于 $x\in\mathfrak{gl}(n,k)$，$x\in\mathfrak{g}_k\Leftrightarrow\exp tx\in G$，其中 $\exp tx$ 理解为 t 的形式幂级数．由这个事实出发，与 Lie 群论的情形相同（→Lie 群)，可以证明 G 的 k 闭连通子群 H 与 $\mathfrak{g}_k$ 的代数的 Lie 子代数 $\mathfrak{h}_k$ 之间存在一一对应，从而建立起代数群与 Lie 代数两种理论的平行性([4],[5])．但是，在特征 $p>0$ 的情形，由于没有所希望的如此简单的关系出现，因而采取直接就代数群讨论的方针．另一方面，在特征 p 的域上，J. Dieudonné 引入了类似于"局部 Lie 群"概念的**形式群**（formal group)．

【环面群】 万有域的非零元所构成的乘法群 $\mathbf{G}_m=GL(1)$ 是在素域上定义的一维连通代数群．一般地，与直积 $(\mathbf{G}_m)^n$ 同构的代数群 G 称为(**代数的**)**环面群**((algebraic) torus)．当 k 上定义的环面群 G 与 $(\mathbf{G}_m)^n$ 在 $K(\supset k)$上同

构时，称G为**K平凡的**(K-trivial)，并称K为G的**分裂域**(splitting field)．对于k上定义的环面群，总有k上有限次可分的分裂域K存在．

一般地，代数群G到$\mathbf{G}_m$的有理同态χ称为G的**特征标**(character)．特征标的全体用记号$X(G)$表示．对于$\chi_1, \chi_2 \in X(G)$，其和$\chi_1+\chi_2$由$(\chi_1+\chi_2)(g)=\chi_1(g)\chi_2(g)$ $(g \in G)$来定义，于是，$X(G)$成为模，称为**特征标模**(character module)．

设G是在k上定义的环面群，$X=X(G)$是G的特征标模，设K作为G的一个分裂域，是k的有限次Galois扩张†，又设K同构$G \cong (\mathbf{G}_m)^n$由映射$G \ni g \to (\chi_1(g), \cdots, \chi_n(g))$所给出，则$\chi_i \in X$，而且$X$是由$\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$生成的秩为$n$的自由模†．又，设$K/k$的Galois群为$\Gamma$，则对于$\sigma \in \Gamma$，$\chi \in X$，$\chi^\sigma$仍是$G$的特征标，关于这个作用，$X$具有(右)$\Gamma$模的结构．

设G_1是G的(在k上定义的)闭子群，X_1是X的(Γ不变)子模，它使X/X_1不含p挠群†(此处p是k的特征)，于是零化子关系$X_1=G_1^\perp$，$G_1=X_1^\perp$建立了它们之间的一个一一对应，故G_1，G/G_1的特征标模分别可与X/X_1，X_1视为同一．又设G，G'为(k上定义的，在K上分裂的)两个环面群，X, X'为其特征标模，对于(k)同态$\varphi: G \to G'$，可根据${}^t\varphi(\chi')=\chi' \circ \varphi$ $(\chi' \in X')$来定义(Γ)同态${}^t\varphi: X' \to X$；称${}^t\varphi$为φ的对偶映射．反之，X'到X的(Γ)同态均可唯一地表成这种形状．特别是，φ为(k)同构的充分必要条件是${}^t\varphi$为(Γ)同构．再者，由于已经证明了，对于任意有限秩的自由(Γ)模，存在(k上定义的，在K上分裂的)环面群G，使得$X \cong X(G)$，故所有(k上定义的，在K上分裂的)环面群构成的范畴†与所有有限阶的自由(Γ)模构成的范畴是互相对偶的(→[9])．

【半单元与幂单元】 当方阵a可对角化时，即a的最小多项式†仅有单根时，a称为半单元．又$a-1$是幂零元时，即a的特征值仅有1时，a称为幂单元(当特征为0时，$GL(n, k)$的幂单元与$\mathfrak{gl}(n, k)$的幂零元x，由对应$u=\exp x$成一一对应)．任意正则矩阵a可唯一地分解为互相可交换的正则半单矩阵a'与幂单矩阵a''的积：$a=a'a''$(乘法的Jordan分解†)．a'，a''分别称为a的半单部分和幂单部分，分别用记号a_s，a_u表示．a_s可写成a的(系数为纯量的)多项式．对于代数群G的元a，半单的性质以及幂单的性质与G的矩阵群的表示无关；并且这个性质在代数群的同态对应下保持不变，又$a \in G$时，$a_s, a_u \in G$．

设G为代数群，G中所有半单元与幂单元所成的集合(未必是子群)分别用记号G_s，G_u表示．环面群G可刻划为满足$G=G_s$的连通代数群．另一方面，$G=G_u$时，称代数群G为**幂单群**(unipotent group)．例如，万有域的加法群$\mathbf{G}_a \cong \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \Omega \right\}$是一维连通幂单代数群．

【可解群与幂零群】 对于代数群G的两个(k上定义的)闭正规子群H_1, H_2，(作为抽象群的)换位子群†$[H_1, H_2]$仍是(k上定义的)闭正规子群．于是，当代数群G(作为抽象群)是可解†或幂零†时，分别称它为**可解代数群**(solvable algebraic group)，**幂零代数群**(nilpotent algebraic group)．例：n次正则矩阵中一切形如$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix}$的(称为"上三角形矩阵")的矩阵构成的群$T(n)$是连通可解代数群．幂单群总是幂零代数群．

对于连通可解代数群$G \subset GL(n)$，可取适当的$a \in GL(n)$，使$a^{-1}Ga \subset T(n)$(**Lie-Kolchin定理**[1])．(k上定义的)连通可解代数群G有合成列$G=G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_r=\{e\}$，使得每个$G_i$都是连通($k$)闭正规子群，$G_{i-1}/G_i$与$\mathbf{G}_m$或$\mathbf{G}_a$同构．又$G_u$是$G$的连通($k$)闭正规子群，取包含于$G$中的任意极大环面群$T$，则有$G=T \cdot G_u$这样的(作为代数群的)半直积†分解(即自然映射$T \times G_u \to G$是双有理的)．($G$的极大环面群中存在在$k$上定义的，并且它们关于$G_k$的元互为共轭)．$G$是幂零群的充分必要条件是，$G$只含有一个极大环面群，此时$T=G_s$，且$T$包含于$G$的中心†内．对于$k$上定义的连通可解群$G$，可取$a \in GL(n,k)$，使

$a^{-1}Ga \subset T(n)$（参看 Lie-Kolchin 定理）的充分必要条件是：所有 $\chi \in X(G)$ 都在 k 上定义．此时，G 称为 **k 可解的**（k-solvable）．这时 G_u 也在 k 上定义，且 G/G_u 是 k 平凡的环面群．

特征为 0 时，（k 上定义的）可换幂单群都与直积 $(\mathbf{G}_a)^n(k)$ 同构．k 是特征 $p>0$ 的代数闭域时，k 上定义的连通交换幂单群与几个（长为 m 的）Witt 向量群 W_m 的直积 k 同种（Chevalley-Chow（周炜良）定理，[14]）．又完全域 k 上定义的一维连通幂单群 G 与 $\mathbf{G}_a$ 是 k 同构的（→[1]，[7]，[12]）．

【Borel 理论】 设 G 是代数群，V 是抽象的代数簇（都是在 k 上定义的），如果存在（k 上定义的）处处正则的有理映射 $G\times V \ni (g, v) \to g\cdot v \in V$，适合条件 $g_1(g_2v)=(g_1g_2)v$，$ev=v$（$g_1, g_2 \in G$，$v\in V$），那末，就称 V 是（k 上定义的）G 的**变换空间**（transformation space），或者简单地称为"G 作用于 V 上"．特别当 G 可迁地†作用于 V 上时，称 V 为齐性空间†．设 H 是连通代数群 G 的闭子群（都在 k 上定义），则 G 关于 H 的商空间 G/H 可按自然的方式具有（k 上定义的）G 的齐性空间的结构．A. Borel 证明了以下各条定理（[1]）．

1）设 G 是连通可解代数群，V 是 G 的完备的变换空间，则 G 在 V 中至少有一个不动点．更精确地说，完全域 k 上定义的连通代数群 G 是 k 可解的充分必要条件是，对于 k 上定义的 G 的任一完备且使得 $V_k \neq \varnothing$ 的变换空间 V，G 在 V 中至少有一个 k 有理的不动点（[12]）．

2）设 G 是连通的代数群．G 的极大连通可解闭子群称为 G 的 **Borel 子群**（Borel subgroup）．这时，i）G 的极大环面群 T 与含有 T 的 Borel 子群 B 所组成的对 (T, B) 关于 G 的内自同构互为共轭．ii）对于 G 的闭子群 H，G/H 为完备的充分必要条件是 H 含有某个 Borel 子群．这时 G/H 实际上是射影代数簇†．iii）B，T 的共轭分别覆盖整个群 G，G_s．例：$G=GL(n)$，$B=T(n)$ 时，G/B 是旗簇†．G 的包含 Borel 子群 B 的闭子群一般称为 G 的**抛物子群**（parabolic subgroup）．抛物子群 H 与它的正规化子† $N(H)$ 是相同的；特别是，H 总是连通的．抛物子群的概念在自守函数论中起着重要作用．

当 G 是在完全域 k 上定义的连通代数群时，i）可以精密化，即 G 的极大 k 平凡环面群 A 与包含 A 的极大连通 k 可解闭子群（为简单起见，称它为"k Borel 子群"）H 所组成的对 (A, H) 关于由 G_k 的元所定义的内自同构是互为共轭的．又 k Borel 子群 H 的正规化子† $N(H)$ 是 G 的极小 k 闭抛物子群．G 的 k Borel 子群为单位元群时，G 称为 **k 紧的**（k-compact，k-anisotropic）．例如，n 个变量的二次型 f 的正交群 $G=SO(n, f)$ 是 k 紧的充分必要条件是：二次型 f 是非迷向的，即齐次方程 $f=0$ 在 k 中除 0 以外没有其他解．同样的命题对于其他典型群也成立．又当 k 是局部域†时，G 为 k 紧的充分必要条件是：G_k 作为拓扑群是紧群．一般地，k 紧群是可简约的†．

【Weyl 群】 设 G 是连通代数群，Q 是包含于 G 内的任意环面群，则 Q 的中心化子† $Z(Q)$ 是连通的，且与正规化子 $N(Q)$ 的连通分支相同．从而 $W=N(Q)/Z(Q)$ 是有限群，并且可以把它看作等同于 Q 的（以及 Q 的特征标模 $X(Q)$ 的）自同构群的一个子群．W 称为关于 Q 的 G 的 **Weyl 群**（Weyl group）．特别是，当 $Q=T$（极大环面群）时，W 的阶数等于包含 T 的 Borel 子群的个数．又对于极大环面群 T，$C=Z(T)$ 称为 G 的 **Cartan 子群**（Cartan subgroup）．它可由下述性质来刻划：C 是 G 的（极大）连通幂零闭子群，并且 C 与它的正规化子 $N(C)$ 的连通分支相同．Borel 子群，Cartan 子群，极大环面群等概念在 G 的有理同态下保持不变．

【半单群与可简约群】 对于代数群 G，存在最大的连通可解闭正规子群，称为 G 的**根基**（radical）．以下用 R 来表示根基．当 $R=\{e\}$ 时，G 称为**半单的**（semi-simple）；而当 R 是环面群时，G 称为**可简约的**（reductive）．这两个性质关于形成直积以及在同种映射下是保持的．对于可简约的连通代数群 G，其换位子群† $D(G)$

是半单的，且 $G=D(G)\cdot R$，$D(G)\cap R$ 是有限群，即G与连通半单代数群与环面群的直积 $D(G)\times R$ 同种．一般地，设连通代数群G的根基为 R，其幂单部分为 R_u，则 G/R，G/R_u 分别是半单的，可简约的．当基域的特征为零时，存在G的可简约闭子群H，使G有半直积分解 $G=H\cdot R_u$（**Chevalley 分解**(Chevalley decomposition)，[5]）．（G在k上定义时，R,R_u是k闭的，且H可在k上定义，它们关于 G_k 的元所定义的内自同构互为共轭）．当特征为0时，可简约代数群可以由它的有理表示均为完全可约这个性质来刻划．然而，当特征 $p>0$ 时，连通代数群具有这个性质的充分必要条件是它为环面群（永田雅宜．关于特征 $p>0$ 的半单群的表示理论属于 T. A. Springer)．

【根系】 设G是连通的半单代数群，T是其极大环面群，$X=X(T)$ 是其特征标模．对于 $\alpha\in X$，当存在适合下面条件的 $\mathbf{G}_a$ 到G中的同构 x_α 时，就称 α 为G的（关于T的）**根**(root)：

$$t^{-1}x_\alpha(\xi)t=x_\alpha(\alpha(t)\xi),\ \xi\in\mathbf{G}_a,\ t\in T.$$

对于根 α，这样的同构 x_α 在 $\mathbf{G}_a$ 中除纯量乘法外是唯一确定的．以下命 $P_\alpha=x_\alpha(\mathbf{G}_a)$．

设全体根的集合为 $\mathfrak{r}$，则 $\mathfrak{r}$ 满足以下条件（其中 $E=X\otimes\mathbf{Q}$，其对偶空间†为 E^*，双线性型用$\langle\ \rangle$表示)：

i) 对于 $\alpha\in\mathfrak{r}$，存在某个 $\alpha^*\in E^*$，使 $\langle\alpha^*,\alpha\rangle=2$，且对所有 $\beta\in\mathfrak{r}$，$\langle\alpha^*,\beta\rangle\in\mathbf{Z}$．

ii) 设 w_α 是如下定义的E的线性变换：

$$w_\alpha x=x-\langle\alpha^*,x\rangle\alpha,\ x\in E,$$

则对于所有 $\beta\in\mathfrak{r}$，有 $w_\alpha\beta\in\mathfrak{r}$（特别是，$w_\alpha\alpha=-\alpha\in\mathfrak{r}$)．

iii) 设 $\alpha,\beta\in\mathfrak{r}$，且为线性相关，则 $\beta=\pm\alpha$．

iv) 设 $\dim E=r$，则 $\mathfrak{r}$ 含有 r 个线性无关的元．

一般来讲，若Q上有限维线性空间E的有限子集 $\mathfrak{r}$ 具有条件 i)—iv)，则 $\mathfrak{r}$ 称为E的**根系**(root system)．这时，i)，ii) 中的 α^* 是唯一确定的，$\mathfrak{r}^*=\langle\alpha^*\rangle$ 还是 E^* 的根系($\alpha^*\in\mathfrak{r}^*$ 称为**对偶根**(co-root))．又 w_α（或 w_α^*)($\alpha\in\mathfrak{r}$)生成的 E（或 E^*）的线性变换群W是有限群，称为**根系 $\mathfrak{r}$ 的 Weyl 群**(Weyl group of a root system)．用任一W不变的E的内积把E与 E^* 等同起来，就有 $\alpha^*=(2/\langle\alpha,\alpha\rangle)\alpha$．当 $\mathfrak{r}$ 是半单代数群的根系时，有

(1) $\quad\langle\alpha^*,\chi\rangle\in\mathbf{Z},\ \alpha\in\mathfrak{r},\ \chi\in X.$

因之X是W不变的，而且根系 $\mathfrak{r}$ 的 Weyl 群可以与以前定义过的 Weyl 群 $N(T)/Z(T)$ 等同起来(一般地，连通可简约代数群的极大环面群 T与其中心化子 $Z(T)$ 相同．因之，W 可以与 $N(T)/T$ 视为同一)．

当在E中引入(与加法相容的)全序†时，把所有正根的集合记为 $\mathfrak{r}_+$．若 $\alpha\in\mathfrak{r}_+$ 不能分解为 $\alpha'+\alpha''(\alpha',\alpha''\in\mathfrak{r}_+)$ 时，则称 α 是**单根**(simple root)．若全部单根的集合记为 $\Delta=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$，则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，并且任意根 α 均可唯一地表为 $\alpha=\pm\sum_{i=1}^{r}m_i\alpha_i\ (m_i\in\mathbf{Z},m_i\geqslant 0)$ 的形状．一般地，$\mathfrak{r}$ 的具有这个性质的子集 Δ称为 $\mathfrak{r}$ 的**基础系**(fundamental system)（基础系总可由E上的一个适当的全序用上述方式得到)．对于基础系 Δ，由关系式 $\langle\alpha_i,x\rangle>0$ $(1\leqslant i\leqslant r)$所定义的 E^* 的角域 Λ_Δ 称为 **Weyl 房**(Weyl chamber)．对于 $\alpha\in\mathfrak{r}$，如果把由 $\langle\alpha,x\rangle=0$ 定义的超平面记为 L_α，则 $E^*-\bigcup_{\alpha\in\mathfrak{r}}L_\alpha=\bigcup_{\Delta}\Lambda_\Delta$ 成立．W可迁地†作用于所有 Weyl 房的集合$\{\Lambda_\Delta\}$上，并且W由反射 $w_{\alpha_i}(1\leqslant i\leqslant r)$所生成．

半单代数群G的包含T的 Borel 子群B与基础系 Δ（或 $\mathfrak{r}_+$）由关系 $B_u=\prod_{\alpha\in\mathfrak{r}_+}P_\alpha$，(其中 $P_\alpha=x_\alpha(\mathbf{G}_a)$）而成一一对应（更精确地说，$B_u$ 的元可表为 P_α 的元的积，且表法唯一，此处 P_α 的积的顺序可以是任意的)(→[1])

【Bruhat 分解】 若设 $w\in W$ 在 $N(T)$ 中的代表元为 s_w，则 $G=\bigcup_{w\in W}Bs_wB$（直和)．又对于 $w\in W$，令 $N_w=\prod_{\alpha\in\mathfrak{r}_+\cap w\mathfrak{r}_-}P_\alpha$，特别令

$N_e = B_u$，设 $w_0 \in W$ 为使得 $w_0\Delta = -\Delta$ 的唯一的元，则 $Bs_w B$ 的元可唯一地表为 N_{ww_0}，$s_w T$，N的元的积．因之，

$$G = \bigcup_{w \in W} N_{ww_0} \cdot s_w T \cdot N,$$

称为G的 **Bruhat 分解**(Bruhat decomposition)．特别是，命 $N' = s_{w_0}^{-1} N s_{w_0}$ (对应于 $-\Delta$的 B_u)，则 $N' \cdot T \cdot N$ 是G的 Zariski 开集，且自然映射 $N' \times T \times N \to G$ 是双有理的，从而G的函数域为有理函数域．

【半单群的结构】 根系 $\mathfrak{r}$ 的子集$\mathfrak{r}_1$适合条件 $\mathfrak{r}_1\mathbf{Z} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1$ 时(此处 $\mathfrak{r}_1\mathbf{Z}$ 是 $\mathfrak{r}_1$ 生成的模)，称它为 $\mathfrak{r}$ 的**闭子系** (closed subsystem)，它仍然满足根系的条件 i), ii), iii)．对于半单代数群G的(关于T的)根系 $\mathfrak{r}$ 的闭子系 $\mathfrak{r}_1$，若把 $P_\alpha(\alpha \in \mathfrak{r}_1)$ 生成的G的子群记为 $G(\mathfrak{r}_1)$，则 $G(\mathfrak{r}_1)$ 是以 $T_1 = (G(\mathfrak{r}_1) \cap T)$ 为其极大环面群的半单闭子群，它的 (关于 T_1 的) 根系是把 $\mathfrak{r}_1$ 限制于 T_1 上而得到的，又对偶根系可等同于 $\mathfrak{r}_1^* = \{\alpha^* | \alpha \in \mathfrak{r}_1\}$．$G(\mathfrak{r}_1)$ 为正规子群的充分必要条件是 $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1$ 是闭子系．这时，$G = G(\mathfrak{r}_1) \cdot G(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)$，$G(\mathfrak{r}_1) \cap G(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1) =$ 有限．又G的任意连通闭正规子群均可由这种方法得出．G (作为代数群)是**(绝对)单的**((absolutely) simple; 有时也称为 almost simple)，即不含真的连通闭正规子群)的充分必要条件是：$\mathfrak{r}$ 为**不可约的** (irreducible)，即不能分解为两个真的闭子系的直和．一般地，根系 $\mathfrak{r}$ 可以唯一分解为 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{r}_s$ (直和) ($\mathfrak{r}_i$ 是不可约闭子系，$\mathfrak{r}_1 \cup \cdots \cup \mathfrak{r}_i$ 是闭子系)．与之对应，G与(绝对)单代数群 $G_i = G(\mathfrak{r}_i)$ 的直积 $G_1 \times \cdots \times G_s$ 同种 (G 是单连通或伴随群的情况，实际上就是直积)．$\{G_i\}$由G唯一确定．

【k 形式】 设K是k的扩域，G_1是在K上定义的代数群．k上定义的代数群G与G到G_1上的K同构f所成的组 (G, f) 称作 G_1 的 **k 形式** (k-form)．特别当 K/k 是可分的代数扩域时，对于(Ω的) k上的自同构 σ，若命 $\varphi_\sigma = f^\sigma \circ f^{-1}$，则 φ_σ 是仅由 $\sigma|K$ 决定的 G_1 到 G_1^σ 上的同构，且关系式 $\varphi_\sigma^\tau \circ \varphi_\tau = \varphi_{\sigma\tau}$ 成立．反之，若给定适合这个条件的同构的集合 $\{\varphi_\sigma\}$，则对于它，k 形式(G, f)(除k同构以外)是唯一存在的(A. Weil)，特别当 K/k 是有限次 Galois 扩域时，设其 Galois 群为 Γ，则$\{\varphi_\sigma\}$ 在Γ的 $\mathrm{Aut}_K(G_1)$ (G_1 的所有K自同构所成的群) 中是 1 维上闭链†，k 形式(G, f)的 k 同构类与$\{\varphi_\sigma\}$的 1 维上同调类† ($\in H^1(\Gamma, \mathrm{Aut}_K(G_1))$) 之间存在一一对应．

设K/k是 d 次可分扩域，G_1是 K 上定义的 n 维代数群，于是我们可伴之以在 k 上定义的一个 nd 维代数群 $\mathfrak{R}_{K/k}(G_1)$，它是由 G_1 基于限制基域而得到的([20])．正确的定义如下所述．取k上的自同构 $\{\sigma_1 = 1, \sigma_2, \cdots, \sigma_d\}$，使得 $\sigma_i|K$ 互异．于是能取 $\tilde{G}_1 = \prod_{i=1}^{d} G_1^{\sigma_i}$ 的 k 形式 $(\tilde{G}, \tilde{f})$，使得 $\tilde{\varphi}_\sigma = \tilde{f}^\sigma \circ \tilde{f}^{-1}$ 由 $\tilde{\varphi}_\sigma((x_i)) = (x_{i^\sigma})$ 所给出，这里 i^σ 由关系 $(\sigma_i\sigma)|K = \sigma_{i^\sigma}|K$ 所定义．设 $\tilde{G}_1$ 到 $\tilde{G}_1$ 的第一个因子的射影为 p_1，命 $p = p_1 \circ \tilde{f}$，则 $(\tilde{G}, p)$ 可以由下述万有性质(除k同构外)唯一地刻划：设 $\tilde{G}'$ 是k上定义的任意代数群，φ 为 $\tilde{G}'$ 到 G_1 的K同态，则能唯一确定 $\tilde{G}'$ 到 $\tilde{G}$ 的 k 同态 $\tilde{\varphi}$，使得 $\varphi = p \circ \tilde{\varphi}$，从而写成 $\tilde{G} = \mathfrak{R}_{K/k}(G_1)$．关于有理点，有 $\tilde{G}_k = (G_1)_K$ 成立．当 G_1 有代数群以外的结构(线性空间，代数等)时，对 $\mathfrak{R}_{K/k}(G_1)$ 也可以按照自然的方法定义这种结构．

【Chevalley 的基本定理】 设 G，G' 为连通的半单群，T，T'；X，X'；$\mathfrak{r}$，$\mathfrak{r}'$；$\cdots$ 为它的极大环面群等等．若G到 G' 的同种映射φ把T映于 T'，$\varphi(T) = T'$，则 $\mathfrak{r}$ 与 $\mathfrak{r}'$ 之间存在自然的一一对应 $\alpha \leftrightarrow \alpha'$，使得如果将 $\varphi|T$ 的对偶映射记为 ψ，则 $\psi(\alpha') = q_\alpha \alpha$ (此处当域的特征为 0 时，$q_\alpha = 1$，特征 $p > 0$ 时，q_α 为 p 的幂)．反之，满足这个条件的一一同态 $\psi: X' \to X$，均可从同种 $\varphi: G \to G'$ 由 $\psi = {}^t(\varphi|T)$ 得到．特别是，φ是同构的充分必要条件是：ψ 是同构，并且对于一切 α，均有 $q_\alpha = 1$([7])．由于这条定理，G的同构类由$(X, \mathfrak{r})$完全决定，故可写成 $G = G(X, \mathfrak{r})$．更精确地说，当k上定义的(半单)代数群G具有k平凡极大环面群

时,称 G 属于 **Chevalley 型** (of Chevalley type), 若 k 是完全域, T, T' 是 k 平凡的, 则把上面定理的后半段中的"同构"换成"k 同构", 所述定理仍然正确. 从而完全域 k 上定义的 Chevalley 型半单代数群 G 的 k 同构类可由 $(X, \mathfrak{r})$ 完全决定. C. Chevalley 还证明了, 对于适合 (1) 的任意根系 $\mathfrak{r} \subset X$, 在任意素域上均存在 Chevalley 型的群 $G(X, \mathfrak{r})$([16]). 从而 Chevalley 型半单群的分类本质上可归结为根系 $(X, \mathfrak{r})$ 的分类,并且知道在任意完全域 k 上,存在同样多的 Chevalley 型单代数群与连通的复单 Lie 群(→Lie 群,公式 5 I).

对于根系 $\mathfrak{r}$, 命 $X_0 = \mathfrak{r}_{\boldsymbol{Z}}$ (由 $\mathfrak{r}$ 生成的模), $X^0 = \{x \in E \mid \langle \alpha^*, x \rangle \in \boldsymbol{Z}, \alpha \in \mathfrak{r}\}$, 则存在($q_\alpha = 1$ 的)同种 $G(X^0, \mathfrak{r}) \to G(X, \mathfrak{r}) \to G(X_0, \mathfrak{r})$. $G(X^0, \mathfrak{r})$ 称为**单连通的** (simply connected), $G(X_0, \mathfrak{r})$ 也称为**伴随群** (adjoint group). 当特征为 0 时,只存在这样的同种(这种同种在 Lie 群论中是熟知的). 而当特征 $p > 0$ 时,还存在 Frobenius 对应($q_\alpha = p$)以及下述奇异 ($q_\alpha = 1$ 或 p, 依赖于 α) 同种: $B_n \rightleftarrows C_n$, $F_4 \to F_2 (p=2)$, $G_2 \to G_2 (p = 3)$. 特别在有限域上的代数群中, 取这些同种映射的不动点, 可以得出鈴木通夫, R, Ree 等的有限单群 [15] (→有限群).

【分类论】 k 上定义的连通代数群 G 不包含 k 上定义的真的连通闭正规子群时, G 就称为 ***k* 单的** ((almost) k-simple). (如果 G 不是紧的,除了少数例外情形,可从 G_k 中去掉适当的交换部分,得到抽象的单群 [16].) 当 k 是完全域时非交换 k 单代数群 G 是半单的,又设 G_1 为 G 的任一绝对单分支,又设 G_1 的(包含 k 的)最小定义域为 k_1, 则 k_1/k 是有限次的,且 G 与 $\mathfrak{R}_{k_1/k}(G_1)$ 同种. 从而 k 单群 (k 上) 的分类问题(除同种映射外),归结为求 Chevalley 型单群的所有 k_1 形式的问题. 原则上紧 k_1 形式的分类可归结为某种图形 (在 Дынкин 图形†上加上 Galois 群的作用)的分类 ([13], [15])(→公式 5I). *例如*, k 是有限域时 (或更一般地, 维数 ≤1的域时[28]),由于紧的 k 单群不存在,故从图形的简单分类可知, k 上定义的绝对单群 G_1 只能是 Chevalley 型或 R. Steinberg 引入的 A_n, D_n, 特别是 D_4, E_6 (一般地, G_1 含有 k 上定义的 Borel 子群时,也得到同样的结果). 又特征 $\neq 2$ 时, 典型单群的分类 (除 D_4 外) 归结为具有对合†的半单代数的分类([19]). 同样的关系在某些例外型单群与 Jordan 代数†之间也成立(土方弘明, Springer).

下面是绝对单典型群的表.

I) $SL(n)(n \geqslant 2)$ 的 k 形式.

I1) $G_1 = SL(m, \mathfrak{K}) = \{g \in M_m(\mathfrak{K}) \mid N(g) = 1\}$; 其中 $\mathfrak{K}$ 是 k 上的正规† 可除代数, $(\mathfrak{K} : k) = r^2$, $n = mT$, N 表示 $M_m(\mathfrak{K})$ 的缩减范数†.

I2) $G_1 = SU(m, \mathfrak{K}, f) = \{g \in SL(m, \mathfrak{K}) \mid f(gx, gy) = f(x, y), (x, y \in \mathfrak{K}^m)\}$ 其中 k' 是 k 的二次扩域, $\mathfrak{K}$ 是 k' 上具有第二种对合 ι 的正规可除代数,$(\mathfrak{K} = k') = r^2$, $n = mr$ (这里, ι 是 k' 上第二种对合, 指的是 $k = \{\xi \mid \xi \in k', \xi^\iota = \xi\}$); f 是关于 $\mathfrak{K}$ 上的对合 ι 的 m 个变量的 Hermite 型†.

II) $SO(n)(n \geqslant 3, n \neq 4)$, $Sp(n)$ (n 为偶数, $n \geqslant 2$) 的 k 形式. $G_1 = SU(m, \mathfrak{K}, f)$; 但 $\mathfrak{K}$ 是 k 上的具有第一种对合 ι 的正规可除代数, $(\mathfrak{K}:k) = r^2$, $n = mr$ (这里, ι 是 k 上第一种对合, 指的是 $k = \{\xi \mid \xi \in k, \xi^\iota = \xi\}$); f 是关于 $\mathfrak{K}$ 上的对合 ι 的 m 个变量的ε-Hermite 型†. 若 $\dim\{\xi \in \mathfrak{K} \mid \xi^\iota = \xi\} = r(r + \varepsilon_0)/2$ ($\varepsilon_0 = \pm 1$), 则按照 $\varepsilon_0 \varepsilon = 1$ 或 -1, G_1 为 SO 或 Sp 的 k 形式.($SO(8)$ 除此以外,还有其他 k 形式.)

k 是代数域或局部域时, 具有 k 上的第一种对合的真正规可除代数仅限于四元数体†(若取 ι 为标准的,则 $\varepsilon_0 = -1$).

【代数数域上的代数群】 设 k 是(有限次)代数数域, G 是 k 上定义的连通代数群. $\{v\}$ 是 k 的所有素除子†(赋值的等价类)的集合,作为局部紧拓扑群的族 $\{G_{k_v}\}$ 的限制直积†得到的局部紧拓扑群 G_A 称为 G 的**阿代尔群**(adèle group) ([20])(→阿代尔与伊代尔). 当 $G = \boldsymbol{G}_m$ 时,

$I=(\mathbf{G}_m)_A$ 在类域论中就是 Chevalley 的**伊代尔群**(idèle group). 把 $x\in G_k$ 等同于所有分量均为 x 的伊代尔,那末 G_k 就成为 G_A 的离散子群.

关于 G_A/G_k 的有限性,最近证明了如下的一般的结果([2],[8]). 由 $\chi\in X_k(G)$ (k 上定义的特征标模)可用自然的方法定义 $\chi_A: G_A\to I=(\mathbf{G}_m)_A$. 命 $G_A^0=\{g\in G_A \mid |\chi_A(g)|=1, \chi\in X_k(G)\}$, 则 G_A^0 是**幺模的**†(unimodular),且 G_A^0/G_k 的不变测度是有限的. 又 G_A^0/G_k (G_A/G_k) 为紧的充分必要条件是 G 的半单部分 G/R (可简约部分 G/R_u) 为 k 紧的. 并且在这里定出标准的测度,从而决定 G_A^0/G_k 的测度 $\tau(G)$ (由于是玉河恒夫开始引入的,故称它为**玉河数**(Tamagawa number)) 是重要的 (小野孝 [10], Weil [20]). 例如, 关于二次型的单位群的基本域的体积的 Siegel 诸公式,可以作为关于正交群的玉河数的定理 ($\tau(SO(f))=2$)来叙述.

设 $\mathfrak{o}$ 表示 k 的主整环, L 是在 G 作用的线性空间中的一个格群. $g\in G_A$ 以自然的方式作用于 $\mathfrak{o}$ 格群的集合上; 这时, G_AL, G_kL 分别称为 L 的**种**(genus), **类**(class). 使 L 不变的 G_A 的子群 $G_{A,L}$ 是 G_Δ 的开子群,且 $G_{A,L}\backslash G_A/G_k$ 是有限的(类数的有限性). 又设 $\{v_1,\cdots,v_r\}$ 为 k 的无限素除子†,令 $G_\infty=\prod_{i=1}^{r}G_{k_{v_i}}$, 则 G_∞ 是 Lie 群, $G_{A,L}\subset G_k$ 到 G_∞ 的射影 G_L 是 G_∞ 的离散子群 (**算术子群** (arithmetic subgroups)). 对于 $\chi\in X_k(G)$, 可用自然的方法定义 $\chi_\infty: G_\infty\to(\boldsymbol{R}^*)^r$, 命 $G_\infty^0=\{g\in G_\infty \mid |\chi_\infty(g)|=1\}$, 则 G_∞^0/G_L 是测度有限的, 又 G_∞^0/G_L (G_∞/G_L) 是紧的当且仅当 G_A^0/G_k(G_A/G_k)是紧的.

此外,逼近定理†, Hasse 定理†等也可以推广到多数(典型)代数群的情形(M. Eichler, M. Kneser, 志村五郎,土方弘明, Springer).

【参】 [1] A. Borel, Groupes linéaires algébriques, Ann. of Math., **64** (1956), 20—82; [2] A. Borel-Harish- Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Ann. of Math., **75** (1962), 485—535; [3] A. Borel-J. Tits, Groupes réductifs, Publ Math. Inst. HES, no. 27 (1965), 55—152; [4] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie II, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1951; [5] C. Chevalley, Théorie des groupes de Lie III, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1954; [6] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. J., **7** (1955), 14—66; [7] C. Chevalley, Classifications des groupes de Lie algébriques, Séminaire C. Chevalley, Secrétariat Mathématique, 1956～1958; [8] G. D. Mostow-T. Tamagawa (玉河恒夫), On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces, Ann. of Math., **76** (1962), 446—463; [9] T. Ono (小野孝), Arithmetic of algebric tori, Ann. of Math., **74** (1961), 101—139; [10] T. Ono (小野孝), On the Tamagawa number of algebraic tori, Ann. of Math., **78** (1963),47—73; [11] M. Rosenlicht, Some basic theorems on algebraic groups, Amer. J. Math., **78** (1956), 401—443; [12] M. Rosenlicht, Some rationality questions on algebraic groups, Ann. Mat. Pura Appl., **43** (1957), 25—50; [13] I. Satake (佐武一郎), On the theory of reductive algebraic groups over a perfect field, J. Math. Soc. Japan, **15** (1963), 210—235; [14] J.-P. Serre, Groupes algébreques et corps de classes, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1959; [15] J. Tits, Groupes simples et géométries associées, Proc. Internat. Congr. Math., Stockholm, 1962, p. 197—221; [16] J. Tits, Algebraic and abstract simple groups, Ann. of Math., **80** (1964) 313—329; [17] A. Weil, On algebraic groups of transformations, Amer. J. Math., **77** (1955), 355—391; [18] A. Weil, On algebraic groups and homogeneous spaces, Amer. J. Math., **77** (1955), 493—512; [19] A. Weil, Algebras with involutions and the classical groups, J. Indian Math. Soc., **24** (1960), 589—623; [20] A. Weil, Adèles and algebraic groups, Lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1960; [21] Colloque sur la théorie des groupes algébriques, C. B. R. M., Brussels, 1962; [22] 岩堀長慶, Lie 環論と Chevalley 群, 上, 下, 東大セミナリーノート, 1956; [23] J. Dieudonné, Groups de Lie et hyperalgébres de Lie sur un corps de caractéristique p>0, Comment. Math. Helv., 28 (1954), 87—118; [24] Ю. И. Манин, Теория коммутативных формальных групп над полями конечной характеристики, Успехи Мат. Наук, **18**, no. 6 (1963), 3—90; [25] Proceedings of Symposia in Pure Mathematics IX, Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc., 1956; [26] M. Kneser, Galois-Kohomologie halbeinfacher algebraischer Gruppen über 𝔭-adischen Körpern I, II, Math. Z., **88** (1965) 40—47, **89** (1965), 270—272; [27] M. Demazure-A. Grothendieck, Schémas en groupes, Séminaire de géometrie algébrique, 1963—1964, Publ. Math. Inst, HES, 1964.(Lecture notes in math. 153, Springer, 1970); [28] J. -P. Serre, Cohomologie galoisienne, Lecture notes in math. 5, Springer, 1964; [29] G. B. Seligman, Modular Lie algebras, Springer 1967; [30] A. Borel, Linear algebraic groups, Benjamin 1969; [31] F. Bruhat-J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local I. Données radicielles valuées no. 41, Publ. Math. Inst. HES, 1972, p. 5—252.

变换群 [英 transformation group 法 groupe de transformations 德 Transformationsgruppe

依 группа преобразований 日 变换群] 设G是一个群,M是一个集合,f是由 $G\times M$ 到M的映射,命 $f(g,x)=g(x)(g\in G,x\in M)$. 如果以下条件成立,则称$G$是集合$M$的一个**变换群**: 1) 对于$G$的单位元$e$, $e(x)=x(x\in M)$; 2) 对于G的任意元g,h, $(gh)(x)=g(h(x))$ $(x\in M)$. 这时变换 $x\to g(x)$ 是M到它自身上的一一映射. 如果M具有结构S(例如,拓扑空间,微分流形,复流形, Riemann 流形等结构),并且对于G的每一元 g, 对应的M的变换保持结构S, 即 $x\to g(x)$ 是(M,S)的自同构,则称G是**(M,S)变换群**.

【拓扑变换群】 设G是拓扑群,M是拓扑空间,如果 $(g,x)\to g(x)$ 是 $G\times M$ 到M的连续映射,则称G是M的**拓扑变换群**(topological transformation group). 这时, $x\to g(x)$ 是M到自身上的同胚.

对于M中的点x,称$G(x)=\{g(x)\mid g\in G\}$为G的通过x的**轨道**(orbit).对于M中两个点x, y,当它们具有相同轨道时,定义x与y等价,这样就给出了M中的一个等价关系. 按照这个等价关系得出的M的商拓扑空间,记作 M/G, 称为G的**轨道空间**(orbit space).

对于M的点x, $B_x=\{g\in G\mid g(x)=x\}$是$G$的闭子群,称为$G$在$x$点的**迷向群**(group of isotropy)或**稳定群**(group of stability).

如果对于M的任意两点x,y,均存在G的元g,使 $g(x)=y$, 则称G**可迁地**(transitively)作用在M上. 对于M的所有元x均有$g(x)=x$的G的元g的全体N是G的闭正规子群.

当N仅含有单位元时,就称G**有效地**(effectively)作用在M上. 当N是G的离散子群时,就称G**殆有效地**(almost effectively)作用在M上. 当 $N\neq\{e\}$ 时,商拓扑群 G/N 可以自然的方式看成有效地作用在M上.

【Lie 变换群】 设G是微分流形M的变换群,G具有 Lie 群†的结构,并且$(g,x)\to g(x)$是 $G\times M$ 到M的微分映射†,这时,就称G是M的一个**Lie 变换群**(Lie transformation group). 设 $g_t(t\in R)$ 是 G 的单参数子群†,由于 $x\to g_t(x)$ 是M的单参数变换群,故可用 $X_xf=\lim_{t\to 0}(f(g_t(x))-f(x))/t$ 来定义M上的一个向量场† X(→微分流形). 由G的一个单参数子群这样地定义的M上的向量场† X, 称为 Lie 变换群G的**无穷小变换**(infinitesimal transformation).

G的无穷小变换的全体 $\mathfrak{g}$ 关于向量场的加法以及括号积†形成有限维 Lie 代数†. 当G有效地作用在M上时,则 $\mathfrak{g}$ 与G的 Lie 代数同构. 反之,取 $\mathfrak{g}$ 为M上的向量场所组成的有限维 Lie 代数,则未必有 Lie 变换群 G, 以 $\mathfrak{g}$ 为其无穷小变换所构成的 Lie 代数. 然而,下述局部定理成立,即取对应于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的单连通Lie群$\widetilde{G}$,则对于M的任意点x,存在$\widetilde{G}$的单位元的邻域$\widetilde{U}$, x的邻域V, $W(V\subset W)$, 以及 $\widetilde{U}\times V$到W的微分映射f(命 $f(g,x)=g(x)$ $(g\in\widetilde{U}, x\in V)$),满足下面三个条件: 1) 对于所有 $x\in V$, $e(x)=x$; 2) 设 $g,h\in\widetilde{U}$, $x\in V$, 若 $gh\in\widetilde{U}$, $h(x)\in V$, 则恒有$(gh)(x)=g(h(x))$; 3) 取 g_t 为 $\widetilde{G}$ 的任意的单参数子群,若取 $\varepsilon>0$ 充分小,则当 $|t|<\varepsilon$ 时,有 $g_t\in\widetilde{U}$, 从而 $g_t(y)$ $(|t|<\varepsilon, y\in V)$ 有定义. 于是由 $X_yf=\lim_{t\to 0}(f(g_t(y))-f(y))/t$ 定义 V 上的一个向量场 X. 这样得到的V上的向量场的全体与属于$\mathfrak{g}$的M上的向量场在V上的限制的全体是一致的.

1), 2), 3) 所述事实常表达为 $\mathfrak{g}$ 生成**局部 Lie 局部变换群**(local Lie group of local transformations), 通常称它为关于局部 Lie 局部变换群的 **Lie 基本定理**(Lie's fundamental theorem).

对于一个变换群,它是否为拓扑变换群或 Lie 变换群? 解决这个问题在应用上非常重要. 关于这个问题,下面三条定理是非常有用的.

I) 对于局部紧 Hausdorff 空间M的变换群G引入紧开拓扑†,满足 1) M是局部连通的,或者 2) M是一致拓扑空间†而G等度连续地作用于M上,则G是M的拓扑变换群.

II) 设M是 C^1 流形†, G是M的拓扑变换群,且有效地作用在M上. 再设G是局部紧的,并且对于G的每个元g, M的变换 $x\to g(x)$ 是 C^1 映射,则G是M的 Lie 变换群.

III) 设G是微分流形M的变换群，且有效地作用在M上，又设作为G的子群包含在G中的M的单参数变换群在M上定义的向量场的全体 $\mathfrak{g}$ 是有限维 Lie 代数，则在G中可定义 Lie群的结构，使G成为M的 Lie 变换群，并且 $\mathfrak{g}$ 与G的无穷小变换作成的 Lie 代数是一致的。

关于这些定理及其应用，⇀[3]，[4]，[5]。

应用 I)，II)，III)，可以证明下面的变换群是 Lie 变换群。1) Riemann 流形的所有等距变换†所成的群；2) 具有线性联络†的微分流形上的所有仿射变换所成的群，更一般地，使微分流形上的 Cartan 联络†不变的所有变换所成的群；3) 紧复流形的所有解析变换所成的群（这个群实际上是复 Lie 群）；4) $\boldsymbol{C}^n$ 中的有界域的所有解析变换所成的群。

关于轨道空间的拓扑研究⇀[1]，[3]。关于**不连续变换群** (discontinuous transformation group)（⇀不连续群）的一般理论详见 [6]。

【参】 [1] A. Borel, Seminar on transformation groups, Ann. of Math. Studies, no. 46, Princeton Univ. Press, 1960; [2] S. Lie–F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Teubner, I 1888, II 1890, III 1893; [3] D. Montgomery–L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience, 1955; [4] R. S. Palais, A global formulation of the Lie theory of transformation groups, Mem. Amer. Math. Soc., no. 22, 1957; [5] S. Kobayashi (小林昭七)–K. Nomizu (野水克己), Foundations of differential geometry, Interscience, I 1963, II 1969; [6] W. Fenchel, Bemerkungen zur allgemeine Theorie der diskontinuierlichen Transformationsgruppen, Treizième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, 1957 (Mercators Tryckeri, 1958, p. 77—85).

齐性空间 [英 homogeneous space 法 espace homogène 德 homogener Raum 俄 однородное пространство 日 等質空間] 设M是微分流形†，Lie 群†G是M的一个 Lie 变换群†，且G可迁地†作用于M上，则M称为以G为变换群的**齐性空间**（⇀变换群）。设在M的点x处的迷向群†为H_x，则H_x是G的闭子群。通过使G/H_x的元$sH_x(s\in G)$与M的点$s(x)$对应，给出G/H_x与M之间以G为左作用域的一一对应。若G的连通分支的集合至多是可数的，则M与商流形G/H_x成（包含G的作用的）微分同胚†。因此，在这种情形，齐性空间M与由 Lie 群G的闭子群H得到的商流形 G/H 可视为同一（⇀ Lie 群）。但是，H不是由M唯一确定的，也可取$H_{s(x)}=sH_xs^{-1}(s\in G)$。对于点$x$的迷向群$H_x$中的各个元$h$，可以诱导出$M$在点$x$的切空间†$V_x$的线性变换$\tilde{h}$。$\tilde{h}$的全体$\tilde{H}_x$称为点$x$处的**线性迷向群** (linear isotropy group)。

把齐性空间M表示为G/H时，G到M上的映射 $\pi:s\to sH$ 称为**射影** (projection)。设 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 群G的 Lie 代数†，$\mathfrak{h}$ 为闭子群H所对应的子 Lie 代数。当把 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{h}$ 看作G的单位元e处的切空间及其子空间时，射影π诱导了 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 与M在点 $x=\pi(e)$ 处的切空间 V_x 之间的作为线性空间的同构。H的元h的伴随表示† Ad(h)，作为线性空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的线性变换，定义了H的一个表示。通过 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 与切空间 V_x 之间由射影π定义的线性同构 Ad(h) 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上诱导出的变换，与切空间 V_x 上由h定义的线性变换$\tilde{h}$，给出了H的一个等价表示。

在齐性空间 G/H 中，如果存在着满足 $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m}\subset\mathfrak{m}$ 的 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{m}$、使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m}$（线性空间的直和），则 G/H 称为**可简约的** (reductive)。如果H在 $\mathfrak{g}$ 中的表示 $\mathrm{Ad}(H)$ 为完全可约的†，则称 H 在 $\mathfrak{g}$ 中是**可简约的**。

若齐性空间 $M=G/H$ 上的张量场†P为G不变的（即在G的每个元所确定的变换下不变），则P在点 $x=\pi(e)$ 处的值是在x处的切空间V_x上的张量†，而x在线性迷向群$\tilde{H}$作用下是不变的。反之，V_x上一个这样的张量，可以唯一地扩张成M上的一个G不变张量场。若G/H 为可简约的，则 G/H 上的G不变张量场与$\mathfrak{m}$上的$\tilde{H}$不变张量一一对应。例如，若H为紧的，则H在 $\mathfrak{g}$ 中是可简约的，$\mathfrak{m}$上$\tilde{H}$不变的正定二次型，定义了 G/H 上的一个G不变 Riemann 度量†。

当在齐性空间 $M=G/H$ 上给出G不变 Riemann 度量（或线性联络†，复结构†、Hermite 度量†，Kähler 度量†等）时，就称M为 **Riemann（或具有线性联络的，复的，Hermite 的，Kähler 的）齐性空间**。关于这些齐性空间的

结构与几何性质，有着各种详细结果（[1]—[5]，→对称 Riemann 空间，Lie 群和齐性空间的拓扑）.

【齐性空间的例子】 1) **Stiefel流形**(Stiefel manifold). 在实 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，由 k 个线性无关的向量所成的有序集，称为 **k 标架**（k-frame）($n \geqslant k \geqslant 1$). 如果把 n 维实线性群† $GL(n, \boldsymbol{R})$ 看作 $\boldsymbol{R}^n$ 的正则线性变换群，则 $GL(n, \boldsymbol{R})$ 可迁地作用在 $\boldsymbol{R}^n$ 的所有 k 标架所成的集合 $V'_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 上. 设 $GL(n, \boldsymbol{R})$ 中使得 k 标架 v_0^k 固定的元所成的子群为 H，则 $V'_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 与商空间 $GL(n, \boldsymbol{R})/H$ 可视为同一. 由此 $GL(n,\boldsymbol{R})/H$ 上的流形结构可转移到 $V'_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 上（这个结构是唯一确定的，与 v_0^k 的选法无关），这样 $V'_{n,k}(\boldsymbol{R})=GL(n,\boldsymbol{R})/I_k\times GL(n-k, \boldsymbol{R})$ 成为齐性空间. 这个 $V'_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 称为 $\boldsymbol{R}^n$ 内的 **k 标架(实) Stiefel 流形**(real Stiefel manifold of k-frames).

如果属于一个 k 标架的向量的长度均为 1，且这些向量相互正交，则这个标架称为**正交 k 标架** (orthogonal k-frame). 所有正交 k 标架的集合 $V_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 构成 $V'_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 的子流形. 正交群† $O(n)$ 可迁地作用于其上，$V_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 成为 $O(n)$ 的齐性空间，表示为 $V_{n,k}(\boldsymbol{R}) = O(n)/I_k \times O(n-k)$. $V_{n,1}(\boldsymbol{R})$ 就是 $n-1$ 维球面. $V_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 称为**正交 k 标架（实）Stiefel 流形**，或简称为 **Stiefel 流形**. 同样地可定义**复 Stiefel 流形** (complex Stiefel manifold) $V_{n,k}(\boldsymbol{C}) = U(n)/I_k \times U(n-k)$.

2) **Grassmann 流形**(Grassmann manifold). 设 $\boldsymbol{R}^n$ 的所有 k 维线性子空间 ($n \geqslant k \geqslant 1$) 所成的集合为 $M_{n,k}(\boldsymbol{R})$. $O(n)$ 可迁地作用于 $M_{n,k}$ 上，故可表示为 $M_{n,k}(\boldsymbol{R})=O(n)/O(k)\times O(n-k)$. 这里把 $O(k)$ 看作等同于 $O(n)$ 中使一个固定的 $n-k$ 维子空间的所有点全部不动的元所构成的子群，把 $O(n-k)$ 看作等同于 $O(n)$ 中使上述子空间的正交补空间的所有点全部不动的元所构成的子群. 这样 $M_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 成为齐性空间，称为**（实）Grassmann 流形** (real Grassmann manifold). 行列式为 1 的正常正交群† $SO(n)$ 可迁地作用于 $M_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 上. $M_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 也可以表示成以 $SO(n)$ 为变换群的齐性空间，因此，$M_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 是连通的. 此外，齐性空间 $\widetilde{M}_{n,k}(\boldsymbol{R}) = SO(n)/SO(k) \times SO(n-k)$ 称为由**定向子空间所构成的 Grassmann 流形**. $M_{n,1}(\boldsymbol{R})$ 可看作等同于 $n-1$ 维实射影空间，$\widetilde{M}_{n,1}(\boldsymbol{R})$ 可看作等同于 $n-1$ 维球面.

在以上的步骤中，将 $\boldsymbol{R}^n$ 代之以复 Euclid 空间 $\boldsymbol{C}^n$ 时，$\boldsymbol{C}^n$ 中的所有 k 维线性子空间所成的集合 $M_{n,k}(\boldsymbol{C})$，构成了以 n 维酉群† $U(n)$ 为变换群的齐性空间，表示为 $U(n)/U(k) \times U(n-k)$，称为**复 Grassmann 流形** (complex Grassmann manifold). $M_{n,k}(\boldsymbol{C})$ 是单连通的复流形. $M_{n,k}(\boldsymbol{C})$ 可以分解成以 Schubert 簇† 为胞腔的 CW 复形（→示性类[示性类的各种定义]）. 另外，$M_{n,k}(\boldsymbol{C})$ 也可看成是 $n-1$ 维复射影空间中的所有 $k-1$ 维线性子空间所成的集合. 这时，应用这个空间的 Plücker 坐标†，$M_{n,k}(\boldsymbol{C})$ 可实现为 $\binom{n}{k}-1$ 维射影空间中一个没有奇点的代数簇†（→坐标[标架与坐标] 4). Plücker 坐标）. 也有把 $M_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 写成 $G_{n,k}(\boldsymbol{R})$ 或 $G(n, k)$ 的. 同样地，可表示为 $Sp(n)/Sp(k) \times Sp(n-k)$ 的齐性空间，称为**四元数 Grassmann 流形** (quaternion Grassmann manifold)，用 $M_{n,k}(\boldsymbol{H})$ 表示.

3) **旗流形** (flag manifold). 当指定满足 $n > k_1 > \cdots > k_r > 0$ 的整数序列 $k_1, \cdots, k_r$ 时，设 $\boldsymbol{R}^n$ 中 k_i 维线性子空间 $V_i (i=1, \cdots, r)$ 的单调序列 $V_1 \supset \cdots \supset V_r$ 的集合为 $F(k_1, \cdots, k_r)$. 对于属于 $F(k_1, \cdots, k_r)$ 的两个序列 $V_1 \supset \cdots \supset V_r$, $V'_1 \supset \cdots \supset V'_r$，因为存在 $GL(n,\boldsymbol{R})$ 的元 s，使得 $s(V_i)=V'_i (i=1,\cdots,r)$，所以 $F(k_1,\cdots,k_r)$ 构成以 $GL(n,\boldsymbol{R})$ 为变换群的齐性空间，称它为**正常旗流形**(proper flag manifold). 由于 n 维酉群 $U(n)$ 可迁地作用于其上，所以 $F(k_1, \cdots, k_r)$ 也可看成是以 $U(n)$ 为变换群的齐性空间. 这时，若 $F(k_1, \cdots, k_r)=U(n)/H$，则 H 与直积 $U(k_1-k_2) \times U(k_2-k_3) \times \cdots \times U(k_r)$ 同构. 特别是在 $r=n-1$, $k_i=$

$n-i$ 的情形,这个齐性空间可看成是紧 Lie 群 $U(n)$ 对极大环面群[†] T 的商空间. 这时一般考虑紧连通 Lie 群G对极大环面群T的商空间 G/T, 它称为**旗流形**. 如果G有效地作用于 G/T 上,则G是半单紧 Lie 群. 旗流形 G/T 是单连通的 Kähler 齐性空间, 以G为极大紧子群的复 Lie 群 G^C, 是由双正则变换构成的 Lie 变换群, 它可迁地作用于 G/T 上. G/T 也可表示成 G^C/B, 其中B是 G^C 的极大可解[†] 子 Lie 群.

【参】 [1] A. Borel-R. Remmert, Über kompakte homogene Kählersche Mannigfaltigkeiten, Math. Ann., **145** (1962), 429—439; [2] Y. Matsushima (松島与三), Espaces homogènes de Stein des groupes de Lie complexes, Nagoya Math. J., **16** (1960), 205—218; [3] K. Nomizu (野水克己), Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math., **76** (1954), 33—65; [4] H. C. Wang (王宪钟), Closed manifolds with homogeneous complex structure, Amer. J. Math., **76**(1954), 1—32; [5] 数学振興会夏期セミナーI, 微分幾何の基礎と応用, 1956.

对称 Riemann 空间 [英 Riemannian symmetric space 法 espace symétrique riemannien 德 Riemannscher symmetrische Raum 俄 симметрическое риманово пространство 日 対称リーマン空間] 对称 Riemann 空间M是在每点p都存在以p为中心的点对称的 Riemann 空间. 它是由 E. Cartan 开始进行研究的(1926). 从局部微分几何来说, 它可用曲率的协变微分为零来刻划. 由于等距变换群 $I(M)$可迁地作用于M上,且一般 $I(M)$ 是 Lie 群,所以M是 Lie 群 $G=I(M)$ 的齐性空间. 对M作 de Rham 分解[†],M的各个不可约分支(除去平坦分支外)都成为半单 Lie 群G对于紧子群K的齐性空间, 通过群论的刻划, 由于不可约的对称 Riemann 空间与实单 Lie 群一一对应,因此对称 Riemann 空间与 Lie 群有密切的关系. 作为对称 Riemann 空间的例子,可举出 Euclid 空间,各种椭圆型空间 (具有一定 Riemann 度量的射影空间), Grassmann 流形等许多例子. 此外, 对称 Riemann 空间的分类也已完成, 而且进行了详细的研究. 我们知道流形上的种种结构大体上在什么样的对称空间来实现, 就可以很方便地运用与流形有关的种种理论. 由这点出发, 从数论到概率论的各个分支都有一部分人对它表示关心.

【对称 Riemann 空间】 在 Riemann 空间[†] M的每一点p的适当的邻域 U_p, 可以定义U_p到 U_p 自身的映射 σ_p, 使得通过 p 的测地线[†] $x_t(|t|<\varepsilon, x_0=p)$上的点,有 $\sigma_p(x_t)=x_{-t}$ 成立. 如果对于M的每一点 p, 都能选取p的充分小邻域 U_p, 使得 σ_p 是 U_p 的等距变换[†], 则把M称为**局部对称 Riemann 空间** (Riemannian locally symmetric space). Riemann 空间 M 为局部对称的充分必要条件是M的曲率张量[†](对于 Riemann 联络)的共变微分[†]等于零. 局部对称 Riemann 空间是实解析 Riemann 流形. 如果 Riemann 空间M是连通的,且对于其上各点 p, 存在从M到M上的等距映射σ_p, 它以p为孤立不动点 (即在p的适当邻域内没有p以外的不动点),且 σ_p^2 是恒等变换,就把M称为**整体对称 Riemann 空间** (Riemannian globally symmetric space) 或简称为**对称 Riemann 空间**, 把 σ_p 称为关于p的**对称变换** (symmetry at p). (整体)对称 Riemann 空间是局部对称且完备[†]的 Riemann 空间,反之单连通的[†]完备的局部对称 Riemann 空间是(整体)对称 Riemann 空间.

【对称 Riemann 齐性空间】 连通 Lie 群[†] G的齐性空间[†] G/K 称为 (关于θ的) **对称齐性空间** (symmetric homogeneous space), 如果存在G的**对合自同构** (involutive automorphism (即二阶自同构))θ,满足下列条件: 设在θ作用下G的所有不变元构成的闭子群为 K_θ,其单位元的连通分支为 K_θ^0, 则 $K_\theta^0\subset K\subset K_\theta$ 成立. 在此情形下, 映射 $aK\to\theta(a)K\,(a\in G)$ 是 G/K 的一个变换,以K为孤立不动点, 更一般地, 映射 $aK\to a_0\theta(a_0)^{-1}\theta(a)K$ 定义了 G/K 的一个变换 θ_{a_0}, 以任意给定点 a_0K 为孤立不动点. 若对称齐性空间 G/K 上存在G不变 Riemann 度量, 且 G/K 通过 $\{\theta_{a_0}|a_0\in G\}$ 而成为对称 Riemann 空间,则 G/K 就称为**对称 Riemann 齐性空间** (symmetric Riemannian homogeneous

space). 对称齐性空间 G/K 是对称 Riemann 齐性空间的充分条件是 K 是紧子群. 反之, 对于任意的对称 Riemann 空间 M, 设其等距变换全体所成的 Lie 群的单位元的连通分支是 G, 则 M 可表为对称 Riemann 齐性空间 $M = G/K$, K 是 G 的紧闭子群. 因此, 对称 Riemann 空间就是可用对称 Riemann 齐性空间来实现的 Riemann 空间.

对称 Riemann 齐性空间 G/K 的 Riemann 联络†(不依赖于 G 不变 Riemann 度量的选取)是唯一确定的. 关于这个联络通过 G/K 的一点 a_0K 的测地线 $x_t(|t| < \infty, x_0 = a_0K)$ 可由 $x_t = (\exp tX)a_0K$ 给出, 式中 X 是 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 中满足 $\theta(X) = -X$ 的元素, θ 也表示由 G 的自同构 θ 所诱导出的 $\mathfrak{g}$ 的自同构, $\exp tX$ 表示由 X 决定的 G 上的单参数子群†. G/K 上任何 G 不变张量场的协变微分为零, G/K 上任何 G 不变微分形式†是闭微分形式.

【对称 Riemann 空间的分类】 对称 Riemann 空间的单连通覆盖 Riemann 空间也是对称 Riemann 空间. 因此, 对称 Riemann 空间的分类归结为单连通对称 Riemann 空间 M (以及 M 的等距变换所成的不连续群)的分类. 通过 de Rham 分解† 把这种 M 表为实 Euclid 空间和几个单连通不可约† Riemann 对称空间的直积时, 每个直积因子也是对称 Riemann 空间. 如果对称 Riemann 空间作为 Riemann 空间是不可约的, 它就称作**不可约对称 Riemann 空间** (irreducible symmetric Riemannian space).

单连通不可约对称 Riemann 空间与下列四种类型的对称 Riemann 齐性空间之一 (作为 Riemann 空间) 同构(此处 Lie 群总假定是连通的).

1) 直积 $G \times G$ 的对称 Riemann 齐性空间 $(G \times G)/\{(a, a) | a \in G\}$. 其中 G 是单连通的紧单† Lie 群, $G \times G$ 的对合自同构由 $(a, b) \to (b, a)$ $((a, b) \in G \times G)$ 给出. 这个空间 (作为 Riemann 空间) 同构于赋予群 G 以双边不变的 Riemann 度量的 Riemann 空间 G, 这个同构由映射 $G \times G \ni (a, b) \to ab^{-1} \in G$ 诱导出来.

2) 对称齐性空间 G/K_θ, 它是由单连通的紧单 Lie 群 G 的对合自同构 θ 来定义的. 这时 $K_\theta = \{a \in G | \theta(a) = a\}$ 成为连通闭子群. 且我们可以从 G 的自同构群的所有 2 阶元所成的共轭类†中, 每类选出一个代表组成 θ.

3) 齐性空间 G^C/G. 其中 G^C 是复单 Lie 群, 其中心†只由单位元构成, G 为 G^C 中任意选定的一个极大紧子群.

4) 齐性空间 G_0/K. 其中 G_0 是非紧单 Lie 群, 其中心只由单位元构成, 且 G_0 不具有复 Lie 群结构, K 为 G_0 的一个极大紧子群.

3), 4) 均成为对称齐性空间, 这点参看下节. 这四类对称 Riemann 齐性空间都是不可约 Riemann 空间, 其上的 Riemann 度量除了一个正数倍数外是唯一决定的. 且在 1), 2), 3), 4) 中, 1), 2) 是紧空间, 在拓扑方面, 3), 4) 与 Euclid 空间同胚, 因此是非紧空间. 单连通不可约对称 Riemann 空间的分类, 对于 1), 3) 两种类型的空间来说, 分别归结为紧实单 Lie 代数和复单 Lie 代数的分类, 而 2), 4) 两种类型的空间的分类则归结为非紧实单 Lie 代数的分类 (参看下节). (这些类型的分类结果→公式 5.) 另外, 任何 (不一定是单连通的) 不可约对称 Riemann 空间, 均对应 1), 2), 3), 4) 中某一类的一个单连通覆盖空间, 而与 3), 4) 对应的空间必定也是单连通的.

【半单 Lie 群的对称 Riemann 齐性空间】 如上所述, 不可约对称 Riemann 空间都可以表为半单 Lie 群 (→Lie 群) G 可殆有效地作用于其上的对称 Riemann 齐性空间 G/K. 在对称 Riemann 空间中, 这种空间 $M = G/K$ 可以这样来刻划, 即不存在对于 Riemann 联络平行的非零的向量场. 另外, 如果 G 有效地作用于 M 上, 则 G 与 M 的等距变换全体所构成的 Lie 群的单位元的连通分支 $I(M)^0$ 相等. 下面我们设 $M = G/K$ 是半单 Lie 群 G 殆有效地作用于其上的对称 Riemann 齐性空间. 这时 G 是与 $I(M)^0$ 局部同构†的 Lie 群, 因此 G 的 Lie 代数由 Riemann 空间 M 决定. 设 G 的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$, 对应于 K 的子 Lie 代数为 $\mathfrak{k}$. 定义 G/K

的G的对合自同构为θ，由θ定义的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构也记作θ，则 $\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}|\theta(X)=X\}$. 令 $\mathfrak{m}=\{X\in\mathfrak{g}|\theta(X)=-X\}$，我们就有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{k}$（作为线性空间的直和），$\mathfrak{m}$ 可自然地等同于 G/K 中点K处的切空间. K的元素k在 $\mathfrak{g}$ 中的伴随表示† $\mathrm{Ad}(k)$ 诱导出 $\mathfrak{m}$ 的线性表示 $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{m}}(k)$，$\{\mathrm{Ad}_{\mathfrak{m}}(k)|k\in K\}$ 就与 Riemann 空间 G/K 的点K处的限制线性完整群†相等. 另一方面，设 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型†为φ，则$\mathfrak{k}$与$\mathfrak{m}$关于φ互相正交，若设φ在 $\mathfrak{k}$ 与$\mathfrak{m}$上的限制分别为 $\varphi_{\mathfrak{k}}$，$\varphi_{\mathfrak{m}}$，则 $\varphi_{\mathfrak{k}}$ 是 $\mathfrak{k}$ 上的负定二次型. 如果 $\varphi_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathfrak{m}$ 上的负定二次型，则 $\mathfrak{g}$ 是紧实半单 Lie 代数†，G/K 是紧对称 Riemann 空间. 在这种情形下 G/K 就称为**紧型**（compact type）. 反之，如果 $\varphi_{\mathfrak{m}}$ 是 $\mathfrak{m}$ 上的正定二次型，G/K 就称为**非紧型**（non-compact type）. 这时K是G的极大紧子群，G/K 作为拓扑空间，同胚于 Euclid 空间. 且 G/K 的等距变换群 $I(G/K)$ 与G的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构群通过自然的对应同构. 当 G/K 是紧型(非紧型)时，在 G/K 上存在唯一的G不变 Riemann 度量，它在点K处的切空间 $\mathfrak{m}$ 上诱导出正定内积 $-\varphi_{\mathfrak{m}}(\varphi_{\mathfrak{m}})$.

用单连通紧半单 Lie 群及其对合自同构θ所得的紧型对称 Riemann 齐性空间 G/K_θ 是单连通的. 设G的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 通过θ的分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{k}_\theta$，$\mathfrak{g}$ 的复型†为 $\mathfrak{g}^{C}$，则 $\mathfrak{g}^{C}$ 的实子空间 $\mathfrak{g}_\theta=\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}+\mathfrak{k}_\theta$ 是实半单 Lie 代数，也是 $\mathfrak{g}^{C}$ 的实型†. 这时设 G_θ 为对应于中心只由单位元构成的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_\theta$ 的 Lie 群，K为G_θ的对应于 $\mathfrak{k}_\theta$ 的子群，则得到(单连通)非紧型对称 Riemann 齐性空间 G_θ/K. 如果我们不从紧型对称 Riemann 空间 G/K_θ而从非紧型对称 Riemann 空间 G/K 出发，应用同样的造法，选单连通 Lie 群 G_θ 为对应于 $\mathfrak{g}_\theta$ 的Lie 群，就可以得到单连通紧型对称 Riemann 齐性空间. 而且，这两个造法是互逆的，借此我们得到单连通紧型对称 Riemann 齐性空间与单连通非紧型对称 Riemann 齐性空间之间的一个一一对应关系. 通过这种关系相互对应的对称 Riemann 空间彼此都称为对方的**对偶**（dual）. 这种关系的存在称作对称 Riemann 空间的**对偶性**（duality）.

彼此对偶的对称 Riemann 空间，如果一方是不可约的则另一方也是不可约的，上节所举的 1）型与 3）型的空间之间，2）型与 4）型的空间之间，都有对偶关系成立. 这是根据 Lie 代数理论中的下述定理：如把同构的 Lie 代数看成相同，则 1）复单 Lie 代数 $\mathfrak{g}^{C}$ 与紧实单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$（使 $\mathfrak{g}^{C}$ 成为 $\mathfrak{g}$ 的复型）一一对应；2）紧实单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 及其对合自同构 θ，θ 可选为 $\mathfrak{g}$ 的自同构群的共轭类的代表元，用如上作法可造出 Lie 代数 $\mathfrak{g}_\theta$. 这样从组 $(\mathfrak{g},\theta)$ 可以得出非紧实单 Lie 代数 $\mathfrak{g}_\theta$，且由这种造法可以逐个得到所有非紧实单 Lie 代数.

对于由半单 Lie 群G的对称 Riemann 齐性空间 $M=G/K$ 给出的 Riemann 空间，设其截面曲率†为 K，则M为紧型时K的值 $\geqslant 0$，M 为非紧型时 $K\leqslant 0$. 又M的**秩**（rank）是指(在如上的分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{k}$ 中)包含于 $\mathfrak{m}$ 内的 $\mathfrak{g}$ 的极大交换 Lie 子代数的维数(其值一定). 关于M的等距变换群与M上测地线的分布等结果→[3]—[5].

【对称 Hermite 空间】 定义了 Hermite 度量†的连通复流形† M，如果对于每点 p，存在M到M自身的等距且双正则的变换，使它以 p 为孤立不动点，则M就称为**对称 Hermite 空间**（Hermitian symmetric space）. 作为实流形，这种空间M是偶数维对称 Riemann 空间，且M的 Hermite 度量成为 Kähler 度量†. 设M的等距变换全体所成的（不一定连通的）Lie 群为 $I(M)$，其中正则变换所成的子群为 $A(M)$，则 $A(M)$ 是 $I(M)$ 的闭 Lie 子群. 如果设 $A(M)$ 的单位元的连通分支 $A(M)^0$ 为 G，则G可迁地作用在M上，M可表为对称齐性空间 G/K. 特别M是对称 Riemann 齐性空间.

单连通对称 Hermite 空间(作为 Riemann 空间)的 de Rham 分解† 的直积因子也都是对称 Hermite 空间. 作为 Riemann 空间与实 Euclid 空间同构的因子是与复 Euclid 空间同构的对称 Hermite 空间. 定义一个不可约对称 Riemann 空间的对称 Hermite 空间称为**不可约对称**

Hermite 空间 (irreducible Hermitian symmetric space). 这样,对称 Hermite 空间的分类问题就归结为求不可约对称 Hermite 空间的问题. 一般来说,当把对称 Hermite 空间M所定义的对称 Riemann 空间表为半单 Lie 群 G 有效作用于其上的对称 Riemann 齐性空间 G/K 时,则M是单连通的,G与上面的群 $A(M)^0$ 相等,且K的中心不是离散†集. 特别是,不可约对称 Hermite 空间总是单连通的. 并且,不可约对称 Riemann 齐性空间 G/K 能通过不可约对称 Hermite 空间M 来定义的充分必要条件为K的中心不是离散集. 在这种情形下, 如果G有效地作用于M上,则G是中心只含单位元的单 Lie 群, 且K的中心的维数是 1. 对于满足这些条件的 G/K,存在两种能给出 G/K 的 Riemann 结构的对称 Hermite 空间结构.

按照不可约对称 Riemann 空间的分类结果,不可约对称 Hermite 空间定义下列对称 Riemann 齐性空间之一,反之这些齐性空间中的每一个均对应两个不可约对称 Hermite空间. I) 对称齐性空间 G/K. G为紧单 Lie群,其中心只有单位元, G/K 由 G 的对合自同构θ 定义, K的中心不是离散集. θ 可选取为在G的自同构群中对合自同构的共轭类的代表元; II) 齐性空间 G_0/K. G_0是非紧单 Lie 群,K 为其极大子群, G_0的中心只有单位元, K的中心不是离散集. I) 型不可约对称 Hermite 空间是紧的且同构于一个有理代数簇†. II) 型不可约对称 Hermite 空间同胚于 Euclid 空间且 (作为复流形)同构于 C^n 中的有界域(参看下节).

根据与不可约对称 Riemann 空间同样的原理,不可约对称 Hermite 空间之间也存在着对偶关系, 使 I) 型空间和 II) 型空间之间有一一对应. 对于 I) 型的不可约对称 Hermite空间 $M_a=G/K$,其对偶的II)型的不可约对称Hermite空间 M_b 可以实现为 M_a 的开子复流形. 令 G^C 为 M_a 的全体正则变换所构成的 Lie 群的单位元的连通分支,则G^C是以G为极大紧子群的复单 Lie 群. G^C 的复 Lie 代数 $\mathfrak{g}^C$ 包含G的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 为其实型. 定义对称齐性空间 G/K 的 G 的对合自同构 θ 把 $\mathfrak{g}$ 分解为 $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}+\mathfrak{k}$, 造 $\mathfrak{g}^C$ 的实型 $\mathfrak{g}_0=\sqrt{-1}\,\mathfrak{m}+\mathfrak{k}$,设与它对应的$G^C$的实子群为 G_0. 这个 G_0是G^C的闭子群,其中心只含单位元,且 G_0 还包含K为其极大紧子群,这样我们就定义 $M_b=G_0/K_0$. 群 G_0 作为 G^C 的子群作用于 M_a 上、G_0 的包含$K\in M_a$的轨道是 M_a 的开复子流形,它(作为复流形)与 M_b 同构. 且 M_a作为复流形可表为复单 Lie 群 G^C 的齐性空间 G^C/U.

【对称有界域】 令D表示复n维 Enclid空间 C^n中的有界区域. 对于D的每一点,如果存在D到D本身的阶数为 2 的双全纯变换, 使得此点为孤立不动点,则称D为**对称有界域** (symmetric bounded domain). 又D的所有双全纯变换构成 Lie 群, 如果它可迁地作用在D上, 则D称为**齐性有界域** (homogeneous bounded domain). 对称有界域是齐性有界域. 还有下述更强的定理成立. 利用有界域D上的 Bergman 核函数†,可以引进在D的任意双全纯变换下不变的Kähler度量†,当D是对称有界域时,D在这个度量下成为对称 Hermite 空间, 且它所定义的 Riemann 空间可表为非紧型对称 Riemann 齐性空间 G/K, 且G是半单 Lie 群. 反之, 任意非紧型对称 Hermite 空间(作为复流形)与某个对称有界域同构. 与不可约对称 Hermite 空间同构的D称为**不可约对称有界域** (irreducible symmetric bounded domain). 对称有界域可表为单连通的不可约对称有界域的直积空间.

对称有界域D的所有双全纯变换所构成的群的单位元的连通分支是在D上可迁地作用的半单 Lie 群. 反之,齐次有界域D上如果允许连通半单 Lie 群或更弱一些具有双边不变 Haar 测度†的连通 Lie 群可迁地作用,D就成为对称有界域. C^n 中的齐性有界域当 $n\leqslant 3$ 时是对称有界域,而当 $n\geqslant 4$ 时就不一定是对称有界域.

【不可约对称 Riemann 空间的例子】 这里关于不可约对称 Riemann 空间的分类, 我们采用 E. Cartan 分类记号,列举 2) 和 4) 型中可表为典型齐性空间的空间. 2) 型的单连通不

可约对称 Riemann 空间可表为 $M_u = G/K$，其中G是殆有效作用于 M_u 上的群，K是由G的对合自同构θ由 $K = K_\theta^0$ 所给出的子群．与 M_u 对偶的 4) 型的空间表为 $M_\theta = G_\theta/K$，显然有 $\dim M_u = \dim M_\theta$．(关于 M_u 的维数和秩以及可表为单连通紧例外单 Lie 群†的齐性空间的 2) 型不可约对称 Riemann 空间 M_u → 公式 5 III．) 在本节 (及公式 5 III) 中，$O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ 分别表示 n 次正交群†、n 次酉群†，$2n$ 次辛群†，$SL(n, \boldsymbol{R})$, $SL(n, \boldsymbol{C})$表示实及复特殊线性群†．$SO(n) = SL(n, \boldsymbol{R}) \cap O(n)$, $SU(n) = SL(n, \boldsymbol{C}) \cap U(n)$．且令

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_q \end{pmatrix},$$

其中 I_p 是 $p \times p$ 单位矩阵．

A I 型．$M_u = SU(n)/SO(n)$ $(n>1)$，这里 $\theta(s) = \bar{s}$ ($\bar{s}$ 是 s 的复共轭矩阵)．$M_\theta = SL(n, \boldsymbol{R})/SO(n)$．

A II 型．$M_u = SU(2n)/Sp(n)$ $(n > 1)$，这里 $\theta(s) = J_n s J_n^{-1}$．$M_\theta = SU^*(2n)/Sp(n)$，其中 $SU^*(2n)$ 是与 $\boldsymbol{C}^n$ 的变换 $(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}, \cdots, z_{2n}) \to (\bar{z}_{n+1}, \cdots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, \cdots, -\bar{z}_n)$ 可交换的 $SL(2n, \boldsymbol{C})$ 的元所构成的矩阵群，称为**四元数幺模群**(quaternion unimodular group)，它与四元数体 $\boldsymbol{H}$ 上的 n 维线性空间的所有正则线性变换构成的群的换位子群同构．

A III 型．$M_u = SU(p+q)/S(U_p \times U_q)$ $(p \geqslant q \geqslant 1)$，其中 $S(U_p \times U_q) = SU(p+q) \cap (U(p) \times U(q))$，这里把 $U(p) \times U(q)$ 自然地看成 $U(p+q)$ 的子群．$\theta(s) = I_{p,q} s I_{p,q}$．$M_u$ 是复 Grassmann 流形†．$M_\theta = SU(p,q)/S(U_p \times U_q)$，这里 $SU(p,q)$ 是使 Hermite 型 $z_1\bar{z}_1 + \cdots + z_p\bar{z}_p - z_{p+1}\bar{z}_{p+1} - \cdots - z_{p+q}\bar{z}_{p+q}$ 不变的 $SL(p+q, \boldsymbol{C})$ 的元所构成的矩阵群．

A IV 型．这是 A III 型中 $q = 1$ 的情形．M_u 是 $n-1$ 维复射影空间，M_θ 是所谓 **Hermite 双曲空间** (Hermitian hyperbolic space)．

BD I 型．$M_u = SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$ $(p \geqslant q \geqslant 1, p > 1, p+q \neq 4)$，此处 $\theta(s) = I_{p,q} s I_{p,q}$．$M_u$ 是 $\boldsymbol{R}^{p+q}$ 中可定向子空间所构成的实 Grassmann 流形†．$M_\theta = SO_0(p,q)/SO(p) \times SO(q)$，$SO(p,q)$ 是使二次型 $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$ 不变的$SL(n, \boldsymbol{R})$ 的元所构成的子群，$SO_0(p,q)$ 是其单位元的连通分支．

BD II 型．这是 BD I 型中 $q = 1$ 的情形．M_u 是 $n-1$ 维球面，M_θ 是所谓**实双曲空间** (real hyperbolic space)．

D III 型．$M_u = SO(2n)/U(n)$ $(n>2)$，其中把 $U(n)$ 通过矩阵 $s \in U(n)$ 对应到$\begin{pmatrix} \Re_s & \Im_s \\ -\Im_s & \Re_s \end{pmatrix} \in SO(2n)$ 的对应关系看成 $SO(2n)$ 的子群．$\theta(s) = J_n s J_n^{-1}$．$M_\theta = SO^*(2n)/U(n)$、其中 $SO^*(2n)$ 是使斜 Hermite 型 $z_1\bar{z}_{n+1} - z_{n+1}\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_{n+2} - z_{n+2}\bar{z}_2 + \cdots + z_n\bar{z}_{2n} - z_{2n}\bar{z}_n$ 不变的行列式为 1 的复正交矩阵所构成的群，它与使四元数体 $\boldsymbol{H}$ 上 n 维线性空间上的正则斜 Hermite 型不变的线性变换全体所构成的群同构．

C I 型．$M_u = Sp(n)/U(n)$ $(n \geqslant 1)$，其中 $U(n)$ 如上所述看成 $SO(2n)$ 的子群．因而成为 $Sp(n)$ 的子群．$\theta(s) = \bar{s}(= J_n s J_n^{-1})$．$M_\theta = Sp(n, \boldsymbol{R})/U(n)$，$Sp(n, \boldsymbol{R})$ 是实 $2n$ 次辛群†．

C II 型．$M_u = Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$ $(p \geqslant q \geqslant 1)$，其中$Sp(p) \times Sp(q)$通过如下对应

$$\left(\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

看成 $Sp(p+q)$ 的子群．$\theta(s) = K_{p,q} s K_{p,q}$．$M_\theta = Sp(p,q)/Sp(p) \times Sp(q)$，其中 $Sp(p,q)$ 是使 Hermite 型 $(z_1, \cdots, z_{p+q}) K_{p,q} {}^t(\bar{z}_1, \cdots, \bar{z}_{p+q})$ 不变的复 $2(p+q)$ 次辛矩阵所构成的群，它同构于四元数体 $\boldsymbol{H}$ 上的 $p+q$ 维线

性空间上使指数为 p 的正则 Hermite 型不变的线性变换全体构成的群. $q=1$ 时, M_u 是四元射影空间, M_θ 称为**四元数双曲空间**(quaternion hyperbolic space).

在上述各型空间中,当 p, q, n 较小时,有些不同型的空间(作为 Riemann 空间)彼此相同(→公式 5 IV).

【空间型】 常曲率† Riemann 空间称为**空间型**(space form). 按照常曲率K为正、零或负,其空间型就分别称为**球型** (spherical)、**Euclid 型**(Euclidean)或**双曲型**(hyperbolic). 空间型均为局部对称 Riemann 空间. 单连通完备的空间型,当 $K>0$ 时是球面, $K=0$ 时是实 Euclid 空间, $K<0$ 时是上节所述的 BD II 型实双曲空间(赋予适当的 Riemann 度量). 一般地,完备的球型空间型,当维数为偶数时,只限于球面及射影空间, 而当维数为奇数时就成为可定向流形. 完备的二维 Euclid 空间型有 Euclid 平面、圆柱面、环面、开 Möbius 带及 Klein 瓶等五种, 除了这些和二维球面以外, 其他所有闭曲面†都是二维紧双曲空间型.

【不可约对称有界域的例子】 在前节所举的不可约对称 Riemann 空间中,对应于不可约对称 Hermite 空间的有 AIII, DIII, BDI ($q=2$), CI 等四型. 这里我们列举与其所对应的不可约对称 Hermite 空间同构的不可约对称有界域. 矩阵正定用 $\gg 0$ 表示.

$\mathrm{I}_{m,m'}$ **型** ($m' \geqslant m \geqslant 1$). 所有适合 $I_{m'}-{}^t\bar{Z}Z \gg 0$ 的 $m\times m'$ 复矩阵 Z 所成的集合是 $\boldsymbol{C}^{mm'}$ 中的对称有界域,它(作为复流形)同构于 A III 型($p=m, q=m'$) 的 M_θ 所定义的不可约对称 Hermite 空间.

II_m **型** ($m \geqslant 2$). 所有适合 $I_m-{}^t\bar{Z}Z \gg 0$ 的 $m\times m$ 的复斜对称矩阵所成的集合是 $\boldsymbol{C}^{m(m-1)/2}$ 中的对称有界域, 它对应于 D III 型 ($n=m$).

III_m **型** ($m \geqslant 1$). 所有适合 $I_m-{}^t\bar{Z}Z \gg 0$ 的 $m\times m$ 的复对称矩阵所成的集合是 $\boldsymbol{C}^{m(m+1)/2}$ 中的对称有界域,它对应于 CI 型($n=m$). 这个有界域与m次 Siegel 上半空间†复解析同构.

IV_m **型** ($m \geqslant 1, m \neq 2$). 这是 $\boldsymbol{C}^m$ 中满足 $|z_1|^2+\cdots+|z_m|^2<(1+|z_1^2+\cdots+z_m^2|)/2<1$ 的元 $(z_1,\cdots,z_m)$ 所构成的有界域,它对应于 BD I 型 ($p=m, q=2$).

以上四型的有界域中间, 有下列复解析同构关系成立: $\mathrm{I}_{1,1}\cong\mathrm{II}_2\cong\mathrm{III}_1\cong\mathrm{IV}_1$, $\mathrm{II}_3\cong\mathrm{I}_{1,3}$, $\mathrm{IV}_3\cong\mathrm{III}_2$, $\mathrm{IV}_4\cong\mathrm{I}_{2,2}$, $\mathrm{IV}_6\cong\mathrm{II}_4$. 关于这些对称有界域,详见[2]. 还存在另外两种不可约对称有界域,它们可表为例外 Lie 群的齐性空间.

【弱对称 Riemann 空间】 作为对称 Riemann 空间概念的一种推广, A. Selberg 引入了弱对称 Riemann 空间. Riemann 空间M称为**弱对称 Riemann 空间** (weakly symmetric Riemannian space), 如果M的等距变换† 群 $I(M)$ 的一个 Lie 子群G可迁地作用于M上, 且存在一个等距变换 $\mu\in I(M)$, 满足下列条件: 1) $\mu G\mu^{-1}=G$; 2) $\mu^2\in G$; 3) 对于M上任意两点 x, y, 存在G的元 m, 使得 $\mu x=my$, $\mu y=mx$. 对称 Riemann 空间M成为弱对称 Riemann 空间,如果令 $G=I(M)$, $\mu=$ 恒等映射. 这时条件 3) 中的m可选取为关于连结 x, y 两点的测地线弧的中点 p 的对称变换σ_p. 但是存在弱对称 Riemann 空间,它不具有对称 Riemann 空间的结构. 例如 $M=G=SL(2,\boldsymbol{R})$, 对G赋予适当的G不变 Riemann 度量, μ 为由 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ 定义的内自同构† (Selberg [6]). 弱对称 Riemann 空间上 G 不变微分积分算子所构成的环是交换的, 因此在其上可以开展球函数理论的研究(→西表示).

【参】 [1] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962; [2] C. L. Siegel, Analytic functions of several complex variables, Princeton Univ. Press, 1949 (中译本: C. L. 齐格尔, 多复变数解析函数, 科学出版社, 1960); [3] J.-L. Koszul, Exposés sur les espaces homogènes symétriques, São Paulo. 1959; [4] 伊勢幹夫, 対称空間の理論, 数学, I, 11 (1959), 76—93, II, 13 (1961—62), 88—107; [5] 数学振興会夏期セミナー I, 微分幾何の基礎と応用, 1956; [6] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with application to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., 20 (1956), 47—87; [7] E. Cartan, Sur certaines formes

riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **44** (1927), 345—467; (Oeuvres complètes. Gauthier-Villars, 1952, pt. I, vol. 2, p. 867—989); [8] E. Cartan, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n-variables complexes, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11** (1936), 116—162 (Oeuvres complètes, Gauthier-Villars, 1952. pt. I, vol. 2, p. 1259—1305); [9] C. Ehresmann, Sur la topologie de certains espaces homogènes, Ann. of Math., **35** (1934), 396—443; [10] F. Gantmacher(Ф. Гантмахер), On the classification of real simple Lie groups, Mat. Sb., **5** (1939), 217—250; [11] R. Bott-H. Samelson, Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math., **80** (1958), 964—1029; [12] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, Ann. of Math., **70** (1959), 313—337; [13] Harish-Chandra, Representations of semi-simple Lie groups IV, Amer. J. Math., **78** (1956), 564—628; [14] A. Borel-F. Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, Amer. J. Math., **80** (1958), 458—538; [15] I. Satake(佐武一郎), On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces, Ann. of Math., **71** (1960), 77—110; [16] S. Araki (荒木捷朗), On root systems and an infinitesimal classification of irreducible symmetric spaces, Math. Osaka City Univ., **13** (1962), 1—34; [17] B. Kostant, Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, Ann. of Math., **74**(1961), 329—387; [18] J. A. Wolf, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill 1967; [19] S. Kobayashi (小林昭七) -K. Nomizu (野水克己), Foundations of differential geometry II, Interscience, 1969; [20] O. Loos, Symmetric spaces, I. General theory, II. Compact spaces and classification, Benjamin, 1969.

不连续群 【英 discontinuous group 法 groupe discontinu 德 diskontinuierliche Gruppe 俄 разрывная группа 日 不連続群】【定义】 设群 Γ(连续地)作用在Hausdorff空间† X 上. 也就是说,对于 $\gamma\in\Gamma$, $x\in X$, 可以确定 $\gamma x\in X$, 使得映射 $x\to\gamma x$ 成为X的自同胚, 并且满足 $\gamma_1(\gamma_2 x)=(\gamma_1\gamma_2)x$, $1x=x$ (1是Γ的单位元). 如果X的两点 x, y 能借助Γ的元而互相移动, 即存在 $\gamma\in\Gamma$, 使得 $y=\gamma x$ 成立, 则称 x, y 关于Γ是**等价的** (equivalent). (对X的子集也可作同样的定义.)

关于Γ的"不连续性"可以考虑下列条件: i) 对于任意的 $x\in X$ 以及由Γ内不同的元组成的无限序列 $\{\gamma_i\}$, 点列 $\{\gamma_i x\}$ 没有聚点; ii) 对于任意的 $x\in X$, 存在某个邻域 U_x, 使得 $\gamma U_x\cap U_x\neq\varnothing$ 的 $\gamma\in\Gamma$ 只有有限多个; ii′) 若 $x, y\in X$ 关于Γ不等价,则存在 x, y 的邻域 U_x, U_y, 使得对于所有的 $\gamma\in\Gamma$ 都有 $\gamma U_x\cap U_y=\varnothing$; iii) 对于$X$的任意紧子集 M, 使 $\gamma M\cap M\neq\varnothing$ 的 $\gamma\in\Gamma$ 只有有限多个.

不难看出, ii)⇒i), ii) + ii′) ⇒ iii). 如果X是局部紧†的,则反过来 iii) ⇒ ii), ii′) 也成立. 当 i) 成立时, Γ (作为X的变换群) 称为**不连续的** (discontinuous); 当 ii) 或 iii) 成立时, 就称为**纯不连续的** (properly discontinuous). 特别把X和局部紧群G由它的某个紧子群K得到的齐性空间† G/K 视为同一时, 对于G的子群Γ, 上述的条件 i), ii), iii) 都是等价的, 它们还等价于Γ(作为G的子群)是离散的†.

给定一个不连续群Γ, 对于 $x\in X$, x的迷向群† $\Gamma_x=\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma x=x\}$ 总是有限群. 特别是,若对于所有的x有 $\Gamma_x=\{1\}$, 则称Γ**自由地** (freely) 作用在X上. 又令 $\Gamma_X=\bigcap_{x\in X}\Gamma_x$, 当 $\Gamma_X=\{1\}$ 时,称Γ为有效的†. 满足 $\Gamma_x\neq\Gamma_X$ 的x称为Γ的**不动点** (fixed point). 以下为简单起见, 在不作特别说明时, 总假定Γ是有效的.

因为X的点关于Γ的等价关系显然满足等价定律†,所以可利用它将X分成Γ等价类, 或称为Γ轨道. 所有轨道组成的空间 (X关于Γ的商空间)记为 $\Gamma\backslash X$. 当Γ满足 ii) 与 ii′) 时, $\Gamma\backslash X$ 关于商空间的拓扑成为 Hausdorff 空间. 又当Γ是自由地作用时, X成为 $\Gamma\backslash X$ 的(非分歧)覆盖空间†, Γ可看作它的覆盖群†. (反之, 覆盖群总是自由的纯不连续群.) 一般地说, 把X看作 $\Gamma\backslash X$ 的有分歧点的覆盖空间, 它的分歧点就是Γ的不动点. (关于这一节 → [13], [9], [2], [17].)

【基本域】 $\Gamma\backslash X$ 在X内的完全代表系 F (即X的子集 F, 它使得 $\Gamma F=X$, $\gamma F\cap F=\varnothing$ ($\gamma\neq 1$)), 通常称为Γ在X内的**基本域**(英 fundamental region 德 Diskontinuitätsbereich). 实际上往往再附加适当的拓扑或几何条件. 这里假定F的闭包 $\bar F$ 是F的内部 F^i (内点的集合)的闭包(这时,有时代替F而把 $\bar F$ 或 F^i 称为

基本域）．如果 Γ 是纯不连续（ii)，ii')）的，且它的不动点集是疏集†．则 Γ 的这样的基本域是存在的（R. Baer-F. W. Levi, 1931）．如果集合 $\{\gamma F\}(\gamma\in\Gamma)$ 为局部有限（即对任一 $x\in X$，存在一个邻域 U_x，使得满足 $\gamma F\cap U_x\neq\varnothing$ 的 $\gamma\in\Gamma$ 只有有限个），则称 F 为**正规的**(normal)．如果 X 是连通的，F 是正规的，则 Γ 由把 F 移往"邻接"的等价集合内的变换，即由 $\{\gamma\in\Gamma|\gamma\bar F\cap\bar F\neq\varnothing\}$ 所生成．因此，知道了基本域的形状，对于了解 Γ 的生成元以及它们的基本关系†是有用的．假定 X 有一个 Γ 不变 Borel 测度† μ，且 Γ 是可数的，则 $\mu(F)$ 与 F 的取法无关($=\mu(\Gamma\backslash X)$)．如果 Γ 具有正规基本域 F，使得 $\{\gamma|\gamma\bar F\cap\bar F\neq\varnothing\}$ 为有限，且 $\mu(F)<\infty$，则 Γ 称为**第一类**(of the first kind)**不连续群**（C. L. Siegel[9]）．例如，若 X 为局部紧，$\bar F$ 为紧（$\Leftrightarrow$ $\Gamma\backslash X$ 紧），则 Γ 是第一类不连续群．

为了看出 Γ 的定性性质，考察**基本（开）集**(fundamental (open) set) Ω（即 $\Gamma\Omega=X$，$\{\gamma\in\Gamma|\gamma\Omega\cap\Omega\neq\varnothing\}$ 为有限的（开）集）要比考察基本域更方便一些（→[3]，[14]，[1]，[19]）．

【Riemann 面的情形】 设 Γ 是 Riemann 面† X 的解析变换的不连续群．根据单值化†理论，从理论上说，只考察 X 为单连通†的情形即已足够．

1) $X=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$（Riemann 球面†）的情形．$\Gamma$ 是有限群．因为它被看作球面运动群，所以是循环群、二面体群†、或多面体群†中的一个（[5]）．

2) $X=\boldsymbol{C}$（复数平面）的情形．Γ 包含于平面运动群中．属于 Γ 的所有平移构成秩为 $\nu(\leq 2)$ 的子群（且是自由 Abel 群†）．若 $\nu=0$，则 Γ 是有限循环群；若 $\nu>0$，则 Γ 由下列形状的变换组成：

$$\nu=1\text{ 时},\quad z\to\varepsilon^k z+m\omega,\quad k,m\in\boldsymbol{Z},$$
$$\nu=2\text{ 时},\quad z\to\varepsilon^k z+m_1\omega_1+m_2\omega_2,\quad k,m_i\in\boldsymbol{Z};$$

其中 ω,ω_1,ω_2 为非零复数，且 $\Im(\omega_2/\omega_1)>0$，通常 $\varepsilon=\pm1$，除非 $\nu=2$，且 $\omega_2/\omega_1=\zeta_4$，$\zeta_3$ 或 ζ_6（$\zeta_l=\exp 2\pi i/l\ (i=\sqrt{-1})$），这时 ε 可分别取值 ζ_4，ζ_3 或 ζ_6．这些情形的基本域可参看图 1．在 $\nu=1,2$ 的情形，关于 Γ 的自守函数本质上由指数函数、椭圆函数所给出（→椭圆函数）．

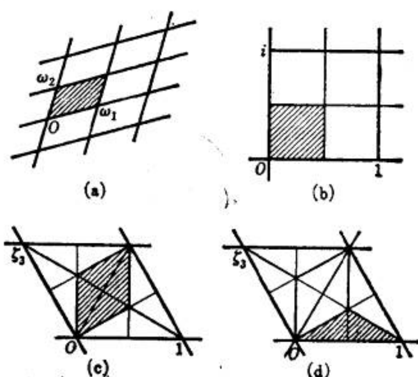


图 1 (a) $\nu=2$，$\varepsilon=1$，
(b) $\omega_1=1$，$\omega_2=i$，$\varepsilon=i$，
(c) $\omega_1=1$，$\omega_2=\zeta_3$，$\varepsilon=\zeta_3$，
(d) $\omega_1=1$，$\omega_2=\zeta_3$，$\varepsilon=\zeta_6$

3) $X=\{|z|<1\}$（单位圆）的情形（→[8]，[5]，[2]，[17]）．借助 Cayley 变换†，把它变换到上半平面 $\mathfrak{H}=\{z=x+iy|y>0\}$．因为 $\mathfrak{H}$ 的解析自同构必由实线性分式变换†（Möbius 变换）$z\to(az+b)(cz+d)^{-1}$ $(a,b,c,d\in\boldsymbol{R},\ ad-bc=1)$ 所给出，且它的全体所成的群可迁地作用在 $\mathfrak{H}$ 上，所以 $\mathfrak{H}$ 可以等同于齐性空间 G/K，其中 $G=SL(2,\boldsymbol{R})$，$K=SO(2)$（$\sqrt{-1}$ 的迷向群）．从而 $\mathfrak{H}$ 的不连续群 Γ 可作为 G 的离散子群而求得．$\gamma\in\Gamma$ 可被延拓成 Riemann 球面 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ 的解析变换，对于某个 $z\in\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ 以及由 Γ 的不同的元构成的无限序列 $\{\gamma_i\}$，把点列 $\{\gamma_i z\}$ 在 $\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$ 内的聚点（它必定位于实轴 $\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$ 内）称为 Γ 的**极限点**(limit point)．当只有一个或两个极限点时，通过简单的变换可把 Γ 归结为 2）的情形．在其它情形，极限点有无限多个，设它的全体为 $\mathscr{L}$，则 $\mathscr{L}=\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$，或者 $\mathscr{L}$ 是完全疏集†．此时称 Γ 为**主圆群**（德 Hauptkreisgruppe）．因为 $\mathfrak{H}$ 具有 G 不变的 Riemann 度量† $ds^2=y^{-2}(dx^2+dy^2)$（称为 Poincaré 度量†），且可看作关于这个度量的负曲率非 Euclid 平面†，使

用这个度量，就能构成由测地线即与实轴正交的圆弧所围成的正规多边形基本域 F. 由它的等价边的对应关系，可以得到 Γ 的生成元和它们之间的基本关系.（反之,从满足适当条件的正规多边形出发、可以构成以它为基本域的主圆群.）特别是，当且仅当 F 的边数有限时，Γ 才具有有限个生成元，这时 Γ 称为 **Fuchs 群** (Fuchsian group)（不是这样的主圆群称为**拟 Fuchs群** (Fuchsoid group).又,通常把使得复数平面的某个区域不变的线性分式变换的（有限生成)不连续群称为 **Klein 群** (Kleinian group)). Γ 成为**第一类 Fuchs 群**的充分必要条件是 $\mu(\Gamma\backslash\mathfrak{H}) < \infty$ ([10]). Fuchs 群成为第一类 Fuchs 群当且仅当 $\mathscr{L} = \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$（不是这样的 Fuchs 群称为**第二类** (of the second kind) **Fuchs 群**). 对于 $x\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$，也把它的迷向群记为 Γ_x. 当 Γ_x 是由某个抛物†变换($\neq\pm 1$) 生成的无限循环群时，x 称为**(抛物)尖点** ((parabolic) cusp). Γ 的尖点由基本多边形 F 在实轴上的顶点所代表. 另一方面，因为 Γ 在 $\mathfrak{H}$ 内的不动点 z 的迷向群 Γ_z 是由椭圆†变换生成的有限循环群，所以也把 z 称为**椭圆（不动)点** (elliptic point). 设第一类 Fuchs 群 Γ 的椭圆点的（关于 Γ 的）等价类的代表系为 $\{z_1, \cdots, z_s\}$，各 Γ_{z_i} 的阶为 e_i，抛物尖点的等价类个数为 t. 在商空间 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 里添加与尖点相对应的 t 个“无穷远点”，再适当地定义一个解析结构，就可得到紧 Riemann 面 $\mathfrak{R}_\Gamma$. 如果设它的亏格†为 g，而关于上述 Poincaré 度量的面积为 $\mu(\mathfrak{R}_\Gamma)$，则下述关系式 (Gauss-Bonnet 公式†) 成立:

$$\mu(\mathfrak{R}_\Gamma) = \int_F \frac{dxdy}{y^2}$$

$$= 2\pi\left(2g - 2 + \sum_{i=1}^{s}\left(1 - \frac{1}{e_i}\right) + t\right).$$

这里 $\mu(\mathfrak{R}_\Gamma)$ 具有一个下界 $\pi/21$ ([10]). 关于 Fuchs 群 Γ 的自守函数 (Fuchs 函数)，它与 $\mathfrak{R}_\Gamma$ 上的代数函数论有关，从 H. Poincaré (1882) 以来，已作了详细的研究(→自守函数).

【模群】 $\Gamma = SL(2, \boldsymbol{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}, ad - bc = 1\right\}$（或与它对应的线性分式变换群）称为**(椭圆) 模群** (elliptic) modular group). Γ 是作用在 $\mathfrak{H}$ 上的第一类 Fuchs 群，它的基本域以及它的等价边的对应如图 2 所示.（图 3 表明了把主圆作为单位圆的情形下基本三角形的等价集的情况.）从图 2 可以得到 $\Gamma \pmod{\{\pm I_2\}}$（其中 $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$）的如下的生成元及其基本关系:

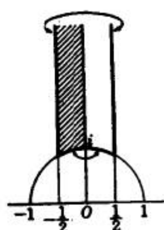
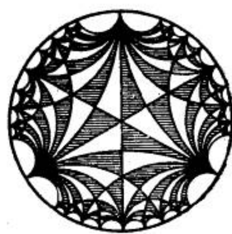


图 2


图 3

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2^2 = (\sigma_2\sigma_1)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Γ 的椭圆点由 $\zeta_4 = i$，ζ_3 所代表的两个等价类构成，$[\Gamma_i : \{\pm I_2\}] = 2$，$[\Gamma_{\zeta_3} : \{\pm I_2\}] = 3$. 又，$\Gamma$ 的尖点集合只由一个等价类构成，且与 $\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\}$ 重合. $\mathfrak{R}_\Gamma$ 成为 Riemann 球面.

对任意的自然数 N，由条件 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod N$ 所定义的 Γ 的正规子群 $\Gamma(N)$ 称为**级**（英 level 德 Stufe）为 N 的**主同余子群** (principal congruence subgroup)（图 4). 一般说来，对于某个 N，使得 $\Gamma\supset\Gamma'\supset\Gamma(N)$ 的 Γ' 称为(级 N 的)**同余子群** (congruence subgroup)（存在 Γ' 满足 $[\Gamma:\Gamma'] < \infty$，但它不是同余子群). 若 $N\geqslant 3$，则由于 $-I_2 \notin \Gamma(N)$，所以 $\Gamma(N)$ 是有效的.（$N = 1, 2$ 时，$\Gamma(N)_\mathfrak{H} = \{\pm I_2\}$.）又当 $N\geqslant 2$ 时，$\Gamma(N)$ 没有椭圆不动点. $\Gamma(N)$ 的尖点的等价类个数 $t(N)$ 以及对应的 Riemann 面 $\mathfrak{R}_{\Gamma(N)}$ 的亏

格 $g(N)$ 由下式给出:

$$t(1)=1,\quad t(2)=3,$$
$$t(N)=(1/2N)[\Gamma:\Gamma(N)],\quad N\geqslant 3,$$
$$g(1)=0,\quad g(2)=0,$$
$$g(N)=1+((N-6)/24N)[\Gamma:\Gamma(N)],\quad N\geqslant 3,$$

其中 $[\Gamma:\Gamma(N)]=N^3\prod_{p|N}(1-1/p^2)$. 关于 $\Gamma(N)$ 的自守函数称为级 N 的模函数†. (关于这一节→[5], [6], [17].)

图 4 $\Gamma(2)$ 的基本域. $\Gamma(1)$ 的基本域由 6 个组成

【多变量的情形】 到目前为止, 对不连续群 Γ 及与之相关的自守函数的研究, 只有下述这些情形: 2′) $X=\boldsymbol{C}^n$, $\Gamma\cong\boldsymbol{Z}^{2n}$ (由平移构成的秩为 $2n$ 的自由 Abel 群) ([12], →Abel 簇); 3′) X 是 $\boldsymbol{C}^n$ 内的有界域, Γ 是由 X 的解析变换构成的不连续群(此时条件 i), ii), iii) 是等价的). 在 3′) 的情形, X 的所有 (复) 解析变换所成的群 $\mathscr{A}(X)$ 关于自然拓扑 (紧开拓扑) 成为 Lie 群†, Γ 可作为它的离散子群来得到. 若 $\Gamma\backslash X$ 是紧的, 则根据自守形式的理论 (或小平定理), 可知它是射影代数簇† (而且是极小模型†)([12], [2]). 特别当 X 是对称有界域†时, 即 X 关于它的 Bergman 度量† 成为对称 Riemann 空间† 时, $\mathscr{A}(X)$ 的单位元的连通分支(它与 X 的等距变换†群 $I(X)$ 的单位元的连通分支重合) 成为非紧型的 (即没有紧单因子的)半单 Lie 群†, X 可与 G 对于它的一个极大紧子群 K 的齐性空间视为同一. 关于这种情形, 以 Siegel 的研究($\mathfrak{H}_n=Sp(n,\boldsymbol{R})/K$: Siegel 上半空间†; $\Gamma=Sp(n,\boldsymbol{Z})$: Siegel 模群†)以及 O. Blumenthal, H. Braun, 华罗庚等人的研究作为开端, 后来德国学派诸如 M. Koecher, H. Maass 以及其他人继续进行了这方面的研究, 近年来在代数群理论的影响下, 这一理论得到了重要的发展([11], [12], [3], [19], →自守函数).

另一方面, 一般说来负曲率的对称 Riemann 空间†的等距变换全体所成的群 $I(X)$, 是具有有限个连通分支且中心为有限的非紧型半单 Lie 群, X 可与 G 对于一个极大紧子群的齐性空间视为同一. 从而由 X 的等距变换构成的不连续群的研究可归结为对这样的 Lie 群 G 的离散子群的研究. 作为一个例子, 行列式为 1 的 n 阶正定实对称矩阵†全体的空间 X 可与 $SL(n,\boldsymbol{R})/SO(n)$ 视为同一 ($A\in SL(n,\boldsymbol{R})$ 通过 $X\ni S\to {}^tASA$ 作用于 X 上). 此时 $\Gamma=SL(n,\boldsymbol{Z})$ 是 X 的第一类不连续群. 构造它的基本域的方法就是所谓 **Minkowski 的约化理论** (Minkowski's reduction theory) ([7], [14]).

【半单 Lie 群的离散子群】 对于群 G 的两个子群 Γ,Γ', 如果指数 $[\Gamma:\Gamma\cap\Gamma']$, $[\Gamma':\Gamma\cap\Gamma']$ 都有限, 则称它们为**可公度的** (commensurable). 同模群或 $SL(n,\boldsymbol{Z})$, $Sp(n,\boldsymbol{Z})$ 一样, 对于在 $\boldsymbol{Q}$ 上定义的某个实线性代数群† $G\subset GL(n,\boldsymbol{R})$, 与 $G_{\boldsymbol{Z}}=G\cap GL(n,\boldsymbol{Z})$ 可公度的子群 Γ 通常称为 G 的**算术子群** (arithmetic subgroup). 算术子群总是离散的. 特别是, 若 G 为半单的, 则关于不变测度† 有 $\mu(\Gamma\backslash G)<\infty$; 并且 $\Gamma\backslash G$ 为紧的充分必要条件是 G 为 $\boldsymbol{Q}$ 紧† (即 $G_{\boldsymbol{Q}}$ 或 $G_{\boldsymbol{Z}}$ 仅由半单† 元构成) (B. H. C. M. T. 定理([14], [1]); 更一般地, 若 G 关于 Zariski 拓扑† 是连通的, 且没有定义在 $\boldsymbol{Q}$ 上的特征标†, 则同样的结果仍然成立). 在证明这些事实以及构成 $\Gamma\backslash X$ 的紧化时, 有效地使用了由 H. Minkowski-Siegel 的想法([7], [11], [3], [19])发展起来的基本开集理论.

假定 G 是连通非紧半单 Lie 群, Γ 是它的离散子群, 且使 $\mu(\Gamma\backslash G)<\infty$, 则下述的"稠密性定理" 成立 (A. Borel, Ann. of Math., **72**

(1960))：i) 对于所有的线性表示 ρ，$\rho(\Gamma)$ 的线性闭包与 $\rho(G)$ 的线性闭包相同；ii) 若 G 是代数的，则 Γ 关于 Zariski 拓扑是稠密的．另设 G 的中心为有限，且 G 是单群 G_i 的直积．如果 Γ 到 $\{G_i\}$ 的(真)部分积的射影总是非离散的，则称 Γ 为**不可约的** (irreducible)．例如，若 G 是 Q 单†代数群，则 $\Gamma = G_{\boldsymbol{Z}}$ 是不可约的．一般地，存在指标集{i}的一个划分，使 Γ 与对应这个划分的部分积的不可约离散子群的直积是可公度的，且这些不可约分支(不计可公度性)是唯一确定的．

作为高维半单 Lie 群 G 的离散子群的构造方法，要推广像单位圆情形($G = SL(2, \boldsymbol{R})$)那样的几何方法是困难的，到目前为止只知道上述的数论方法．(与之相反，对于幂零† 或者可解† Lie 群，已经知道构造离散子群的统一方法 (例如见斋藤正彦，Amer. J. Math., **83** (1961)).) 实际上，已经得到一些结果暗示，在半单Lie群 G 内，离散子群并不太多．第一，$SL(n, \boldsymbol{Z})$ $(n \geqslant 3)$，$Sp(n, \boldsymbol{Z})$ $(n \geqslant 2)$ 等有限指数的子群都是同余子群(H. H. Bass-M. Lazard-J.-P. Serre; 这个结果已由 C. C. Moore 和松本英也推广到代数数域上的任一 Chevalley 群†的情形)；$G_{\boldsymbol{Z}} = SL(n, \boldsymbol{Z})$，$Sp(n, \boldsymbol{Z})$ 等，在 G 中是极大的．又若中心为有限的非紧半单 Lie 群 G 不含有与 $SL(2, \boldsymbol{R})$ 局部同构的单因子，则 G 的使 $\Gamma\backslash G$ 为紧的离散子群 Γ，除了(由 G 的内自同构得到的)平凡变形† (deformation) 以外，没有非平凡变形(A. Selberg, E. Calabi-E. Vesentini, A. Weil [15]；这一事实本质上与 $H^1(\Gamma, X, ad) = 0$ 等价)．又由于发展了这一证明中所使用的方法，$\Gamma\backslash X$ 的 Betti 数†，以及与 G 的表示 ρ 有关而定义的上同调群 $H^p(\Gamma, X, \rho)$ (它们与关于 Γ 的自守形式有关) 等，都被松島与三，志村五郎，村上信吾，K. G. Raguanathan 等作了研究([16]，[18])．

【几何的不连续群】 古典的研究是对于 X 为 Euclid 空间，射影空间等，而 Γ 包含于所指定的变换群里的情形进行讨论，在低维的情形里把所有的都列举了出来．例如，三维 Euclid 运动†的不连续群中，没有不变子空间的运动有 230 种，它可分成 32 个结晶类(A. Schoenflies-E. C. Федоров, 1891—92，→结晶体群)．又，在 Euclid 空间内由反射† 生成的不连续群也已全部求出来了 (H. S. M. Coxeter, 1934)．(关于这一节，→[4]，[13].)

【Klein 群】 近十年来，对于(有限生成的) Klein 群作了相当多的研究．这些研究是与拟保角映射和 Riemann 面的模密切相关的．

应用 Eichler 上同调理论和位势，L. V. Ahlfors 建立了他的有限性定理，L. Bers 建立了他的面积定理．Bers 和 B. Maskit 研究了 Teichmüller 空间†的边界，发现具有下述性质的 Klein 群：极限点集 $\mathscr{L}$ 的补集是连通并且单连通的．

后来，有许多数学家讨论了集 $\mathscr{L}$ 的分类、变形和稳定性的性质，具有结点和没有结点的 Riemann 面的单值化和变形，以及其他的几何性质．拟保角映射理论在他们的讨论中起了重要的作用．对三维双曲空间的运动离散群也作了研究．

【参】 [1] A. Borel-Harish-Chandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Ann. of Math., **75** (1962), 485—535; [2] Séminaire H. Cartan 6, Fonctions automorphes et espaces analytiques, Ecole Norm. Sup., 1953—54; [3] Séminaire H. Cartan 10, Fonctions automorphes, Ecole Norm. Sup., 1957—58; [4] H. S. M. Coxeter-W. O. J. Moser, Generators and relations for discrete groups, Erg. d. Math., Springer, 1957; [5] R. Fricke-F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I, Teubner, 1897, 第二版 1926; [6] F. Klein-R. Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen I, Teubner, 1890; [7] H. Minkowski, Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, J. Reine Angew. Math., **129** (1905), 220—274 (Gesammelte Abhandlungen, Teubner, 1911, vol. 2, p. 53—100; Chelsea, 1967); [8] H. Poincaré, Théorie des groupes fuchsiens, Acta Math., **1** (1882), 1—62 (Oeuvres, Gauthier-Villars, 1916, vol. 2, p. 108—168); [9] C. L. Siegel, Discontinuous groups, Ann. of Math., **44** (1943), 674—689 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 2, p. 390—405); [10] C. L. Siegel, Some remarks on discontinuous groups, Ann. of Math., **46** (1945), 708—718 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 3, p. 67—77); [11] C. L. Siegel, Symplectic geometry, Amer. J. Math., **65** (1943), 1—86, Academic Press, 1964 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 2, p. 274—359); [12] C. L. Siegel, Analytic functions of several complex variables, Lecture notes, Institute for Advan-

ced Study, Princeton, 1948—49; [13] B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Erg. d. Math., Springer, 1935 (Chelsea, 1948); [14] A. Weil, Discontinuous subgroups of classical groups, Lecture notes, Univ. of Chicago, 1958; [15] A. Weil, On discrete subgroups of Lie groups, Ann. of Math., **72** (1960), 369—384, II, Ann. of Math., **75** (1962), 578—602; [16] Y. Matsushima (松島与三)-S. Murakami (村上信吾), On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds, Ann. of Math., **78** (1963), 365—416; [17] 河田敬義, 1 変数保型函数の理論 I, セミナリー・ノート, 東大数学教室, 1963; [18] J. Lehner, Discontinuous groups and automorphic functions, Amer. Math. Soc. Math. Surveys; 1964; [19] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Groupes et algèbres de Lie, ch. 4, 5, 6, Actualités Sci. Ind., 1377, Hermann, 1968; [20] Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math., 1966, vol. 9; [21] L. Bers-I. Kra, A crash course on Kleinian groups, Lecture notes in math. 400, Springer, 1974.

结晶体群 [英 crystallographic group 法 groupe cristallographique 德 Kristallographische Gruppe 俄 кристаллографическая группа 日 結晶群] 若 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的运动群† $\mathfrak{B}$ 的离散† 子群 $\mathfrak{G}$ 含有 n 个独立的平移 $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$，则称 $\mathfrak{G}$ 为 n 维**结晶体群**. $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ 所生成的 $\mathfrak{G}$ 的子群 $\mathfrak{A}$ 是 $\mathfrak{G}$ 的交换正规子群†，称作 $\mathfrak{G}$ 的**格群** (lattice group). 对 $\boldsymbol{R}^n$ 的一个点，施行属于 $\mathfrak{A}$ 中的所有平移所得到的格点† 的全体，称为 $\mathfrak{G}$ 的 (或 $\mathfrak{A}$ 的) 一个**格** (lattice). 商群† $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ 的阶数确定 n 并为有界，可与 n 次正交群† $O(n)$ 的一个子群看作相同. 这个群称作 $\mathfrak{G}$ 的**结晶类** (crystal. class) 或**点群** (point group). 对于给定的 n，n 维结晶体群的矩阵群的等价类(→表示论)的个数只有有限多个 (L. Bieberbach). 从而，n 维结晶类的这样的个数也是有限的. 设 $\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n$ 与 $\mathfrak{a}'_1, \cdots, \mathfrak{a}'_n$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的两组无关向量，如果以 $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n\}$ 为其格群的结晶体群与以 $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{a}'_1, \cdots, \mathfrak{a}'_n\}$ 为其格群的结晶体群作为矩阵群是等价的，这时，就称 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{A}'$ (或其格) 是**等价的**，记为 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$. n 维格群按等价关系来分类，等价类的个数也是有限的.

对于 $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_n\}$，命内积 $(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j) = a_{ij}$，则 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 是对称矩阵†，且 $(A\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ 是正定二次型†. 对于 $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{a}'_1, \cdots, \mathfrak{a}'_n\}$ 同样作出矩阵 $A' = (a'_{ij})$ $(a'_{ij} = (\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{a}'_j))$，若有 $A' = \lambda A (\lambda > 0)$，则 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$. a_{ij} 称作 $\mathfrak{A}$ 的**格常数** (lattice constants).

【三维空间的结晶体群】 实际结晶学中用到的只是 $n = 3$ 的情形. 这时，称结晶体群为**空间群** (space group)，称它们的格为**空间格** (space lattice) 或 **Bravais 格** (Bravais lattice). 格群的基 $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ 通常写为 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$，而把格常数 a_{ij} 换成下面所述的三个正数 a, b, c 以及三个角 α, β, γ: $a = |\mathfrak{a}| = \sqrt{a_{11}}$, $b = |\mathfrak{b}| = \sqrt{a_{22}}$, $c = |\mathfrak{c}| = \sqrt{a_{33}}$, $\alpha = \angle(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \arccos(a_{23}/\sqrt{a_{22}a_{33}})$, $\beta = \angle(\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = \arccos(a_{31}/\sqrt{a_{33}a_{11}})$, $\gamma = \angle(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \arccos(a_{12}/\sqrt{a_{11}a_{22}})$. 在三维的情形，这些 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ 普通也称为 $\mathfrak{A}$ 的**格常数**. 设 $\mathfrak{A}'$ 的格常数为 $a', b', c', \alpha', \beta', \gamma'$，若 $a:b:c = a':b':c'$, $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ 则 $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}'$.

按照这些格常数，空间格可分成七个**结晶系** (crystal system) (C. Weiss). **立方晶系** (cubic system)，$a:b:c = 1:1:1$，$\alpha = \beta = \gamma = 90°$；**四方晶系** (tetragonal system)，$a:b:c = 1:1:x$ $(x \neq 1)$，$\alpha = \beta = \gamma = 90°$；**正交晶系** (rhombic system)，$a:b:c = 1:x:y$ $(x \neq 1, y \neq 1, x \neq y)$，$\alpha = \beta = \gamma = 90°$；**单斜晶系** (monoclinic system)，$a:b:c = 1:x:y$ $(x \neq 1, y \neq 1, x \neq y)$，$\alpha = \gamma = 90°$；$\beta \neq 90°$；**六角晶系** (hexagonal system)，$a:b:c = 1:1:x$，$\alpha = \beta = 90°$，$\gamma = 120°$；**菱形晶系** (rhombohedral system)，$a: b: c = 1:1:1$，$\alpha = \beta = \gamma \neq 90°$；**三斜晶系** (triclinic system)，上述以外的情形. 按照这个分类，属于不同结晶系的空间格不等价.

对于格群 $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ 的格，$\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})/2\}$，$\{(\mathfrak{c} + \mathfrak{a})/2, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$，$\{\mathfrak{a}, (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/2, \mathfrak{c}\}$，$\{(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})/2, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}\}$ 的格分别称为由 $\mathfrak{A}$ 确定的 **A 格**、**B 格**、**C 格**、**I 格**. A, B, C 格统称**底心格** (base-centred lattice). I 格称作**体心格** (body-centred lattice). 又 A, B, C, I 格全部统称为 $\mathfrak{A}$ 所确定的**二重格**或**双格** (double lattice).

再者，$\{(c+a)/2, (a+b)/2, (b+c)/2\}$ 的格称为 $\mathfrak{A}$ 所确定的 **F 格**，或**面心格**(face-centred lattice)，或**四重格**(quadruple lattice)．与这些格相对的，原来 $\mathfrak{A}$ 的格本身称作**单格**（simple lattice）或 **P 格**（图 1）．

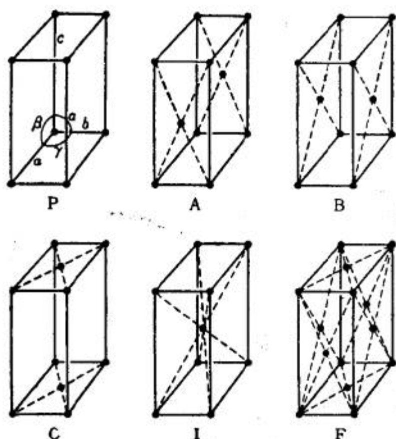


图 1

由上面七种结晶系每一个所属的空间格出发，作它们的各种格，可得下述十四种空间格(A. Bravais)：三斜 P；单斜 P，C（或 I）；正交 P、A（或 B，C)，I，F；四方 P，I；立方 P，I，F；六角 P；菱形 P．属于这十四种空间格中不同种类的空间格必不等价、而属于相同种类的也有不等价的．

P. Niggli 利用 G. Eisenstein 关于三元二次型的结果（[2]），把空间格分类为四十二种（[5]）．按照 Eisenstein 的结果，以下事实成立．即若再次使用作为格常数的 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$，则在与给定格等价的格中满足下述条件 1）或 2）的格是唯一存在的． 1）a_{23}，a_{31}，a_{12} 均 $\geqslant 0$（即 α, β, γ 均 $\leqslant 90°$）． 主条件：$a_{11}\leqslant a_{22}\leqslant a_{33}$，$2a_{23}\leqslant a_{22}$，$2a_{31}\leqslant a_{11}$，$2a_{12}\leqslant a_{11}$．副条件：$a_{11}=a_{22}$ 时，$a_{23}\leqslant a_{31}$；$a_{22}=a_{33}$ 时，$a_{31}\leqslant a_{12}$；$2a_{23}=a_{22}$ 时，$a_{12}\leqslant 2a_{31}$；$2a_{31}=a_{11}$ 时，$a_{12}\leqslant 2a_{23}$；$2a_{12}=a_{11}$ 时，$a_{31}\leqslant 2a_{23}$． 2）a_{23}，a_{31}，a_{12} 均 <0（即 α，β，γ 均 $>90°$）．主条件：与 1）相同并加上 $2(a_{23}+a_{31}+a_{12})\leqslant a_{11}+a_{22}$．副条件：$a_{11}=a_{22}$ 时，$a_{23}\leqslant a_{31}$；$a_{22}=a_{33}$ 时 $a_{31}\leqslant a_{12}$；$2a_{23}=a_{22}$ 时，$a_{12}=0$；$2a_{31}=a_{11}$ 时，$a_{12}=0$；$2a_{12}=a_{11}$ 时，$a_{31}=0$．再有 $2(a_{23}+a_{31}+a_{12})=a_{11}+a_{22}$ 时，$a_{11}\leqslant 2a_{31}+a_{12}$．这个条件称作 **Eisenstein 约化条件**(condition of reduction)．满足这些条件的格称作**约化格**（reduced lattice）．给定一个格，求与其等价的约化格的步骤称为**约化**(reduce)．例如，在立方晶系的 P 格、I 格、F 格的各类中，各有一个约化格给出如下(图 2：图中的粗线表示约化格的 a、b、c)． P：$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a^2$，$a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$；I：$a_{11}=a_{22}=a_{33}=3a^2/4$，$a_{23}=a_{31}=a_{12}=-a^4/4$；F：$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a^2/2$，$a_{23}=a_{31}=a_{12}=a^4/4$．

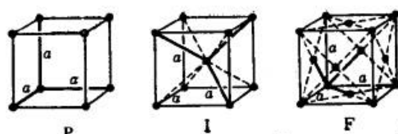


图 2

将给定的空间格进行约化，我们有时利用几何学的直观方法，由于上述约化条件很复杂，所以这一方法未必简单． P. Bachmann（[4]）给出了一个代数方法，但它也非常复杂．为了弥补这个缺点，E. Selling 给出了一个比较简单的约化法（[3]）．Б. Делоне 使之图式化（[6]）．但是，Selling 的条件虽然比较简单，然而满足这些条件的各格类不能唯一确定． B. W. Jones 将这个方法精密化，成功地使每一格类唯一确定（[7]）．

Selling-Делоне 的方法如下所述． 即对于格群 $\mathfrak{A}$ 的格常数 a_{ij} $(i, j=1, 2, 3)$，命 $a_{14}=-a_{11}-a_{12}-a_{13}$，$a_{24}=-a_{21}-a_{22}-a_{23}$，$a_{34}=-a_{31}-a_{32}-a_{33}$，于是，当 a_{23}，a_{31}，a_{12}，a_{14}，a_{24}，a_{34} 均 $\leqslant 0$ 时，我们说 $\mathfrak{A}$ 是约化的．当 $\mathfrak{A}$ 不是约化时，譬如说，若 $a_{23}>0$，则命 $a'_{23}=-a_{23}$，$a'_{13}=a_{13}+a_{23}$，$a_{12}=a_{24}+a_{23}$，$a'_{14}=a_{14}-a_{23}$，$a'_{24}=a_{12}+a_{23}$，$a'_{34}=a_{34}+a_{23}$，于是，当 a'_{23}，a'_{13}，a'_{12}，a'_{14}，a'_{24}，a'_{34} 均 $\leqslant 0$ 时，以 $a'_{11}=-a'_{12}-a'_{13}-a'_{14}$，$a'_{22}=-a'_{21}-a'_{23}-a'_{24}$，$a'_{33}=-a'_{31}-a'_{32}-a'_{34}$，$a'_{23}$，$a'_{13}$，$a'_{12}$ 为常数的格群 $\mathfrak{A}'$ 与 $\mathfrak{A}$ 等价，并且是约化的．又若 a'_{23}，a'_{13}，

a'_{12}, a'_{14}, a'_{24}, a'_{34} 中有 >0 的数,则用由 $\mathfrak{A}$ 到 $\mathfrak{A}'$ 的同样方法处理,有限次以后即可把 $\mathfrak{A}$ 约化. 这个方法,由 Делоне 图式给出如图 3 所示的图式法:

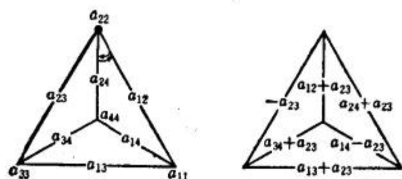


图 3

图 3 左边所示四面体的顶点及其边上标记出$\mathfrak{A}$的格常数以及 a_{14}, a_{24}, a_{34}; 当 $a_{23}>0$ 时,表示这个常数的边用粗线,并且其一端(图中的 a_{22}) 用一个黑点表示,将这个图形向右图变换,将粗线上的数改变符号,将这个数(现在是 a_{23}) 加到其他各边的数上, 但对于粗线对边上的数则减去这个数. 又对于以黑点为顶点而又不是粗线的边上的两个数, 则交换位置. 这样就得出a'_{23}, a'_{13}, a'_{12}, a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}. 例如, 对立方晶系的 P, I, F 各格利用这个约化方法,就得出图 4. Делоне 按照这个方法,把空间格分类为二十四种.

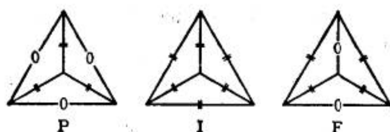


图 4

三维结晶类共有三十二个, 每一个都由三次正交群 O(3) 的至多三个元所生成. 1831 年 J. F. C. Hessel 最初证明了它们的存在, Bravais (1848), A. Gadolin (1871), P. Curie (1884) 等建立起理论体系, A. Schoenflies (1891) 将它用群论来叙述.

表示这些结晶类的记号, 有 Schoenflies 记号以及国际记号两种. **Schoenflies 记号** (Schoenflies' notation) 是用 C, D, S, T, O, V 这几个字母并添加一至二个下标而作成的. 下标用 $n(=1, 2, 3, 4, 6)$ 以及 i, s, h, v, d 等. 设 (x, y, z) 为 $\boldsymbol{R}^3$ 的直角坐标系, x 轴取 a 的方向, b 位于 (x, y) 面上,这时,绕 z 轴旋转 $2\pi/n$ 用 $R_n(z)$ 表示,关于 (x, y) 面的面对称(即变换 $(x, y, z)\to(x, y, -z)$) 用 $S(z)$ 表示,关于原点的点对称 (变换$(x, y, z)\to(-x, -y, -z)$)用 I 表示.这样一来,这些记号的意义可说明如下. C 表示循环群†, C_n 表示 $R_n(z)$ 生成的阶数 n 的循环群. D 表示正二面体群†,D_n 表示 $R_n(z)$ 与 $R_2(x)$ 所生成的群. $V=D_2$ 是"四元群"(即 (2, 2) 型的 Abel 群†). T 表示正四面体群†,是由 D_2 与绕直线 $x=y=z$ 旋转 $2\pi/3$ 所生成. O 是正八面体群†, 是由 $R_4(z)$ 与绕直线 $x=y=z$ 旋转 $2\pi/3$ 所生成.字母 S 只在 S_4 时使用了一次, S_4是 $S(z)R_4(z)=IR_4(z)$ 所生成的阶数 4 的循环群. 下标 i 表示点对称 (或反演) (inversion), 它用于 C_i 以及 C_{3i}, 分别表示 I 以及 $IR_3(z)$ 所生成的群. s 只用了一回,即在 C_s 的情形, s 表示反射(德 Spiegelung), C_s 是 $S(z)$ 生成的群. h 表示水平面 (horizontal), 例如, C_{2h} 是 C_2 与"水平面"即关于 (x, y) 面的面对称 $S(z)$ 所生成的群. v 表示垂直面 (vertical),例如 C_{2v} 是 C_2 与垂直面即关于 (y, z) 面 (或 (x, z) 面) 的面对称 $S(x)$ (或 $S(y)$) 所生成的群. d 表示对角面 (diagonal), D_{3d}, D_{2d}, T_d 中利用了这个下标, D_{nd} 是 D_n 与关于平面 $y/x=\tan\pi/n$ 的面对称所生成的群, T_d 是 T 与关于平面 $y=x$ 的面对称所生成的群.

在**国际记号** (international notation) 中,一个结晶类用其生成元表示出来. 为了表示生成元, 采用数字 $n\,(=1, 2, 3, 4, 6)$, n 上加以上线 $\bar{n}$,字母 m 以及 n/m 的符号. 其意义如下:数字 n 表示旋转 $2\pi/n$, 其旋转轴规定如下: 当 n 出现在第一个记号的位置上时,指 z 轴,而当它出现在第二或第三个记号的位置上时, 根据结晶系以及后面所述的规则来决定. $\bar{n}$ 的意义为 IR, 此处 R 代表用 n 表示的旋转. m 是 mirror 的字头, 表示面对称, 当作为第一个记号时为 $S(z)$,作为第二、第三个记号时是对于垂直于后面的规定所指出的轴的面的面对称. 又 n/m 表示SR,此处设 R 为用 n 表示的旋转(其角为 $2\pi/$

n，其轴由 n 的位置来确定)，而 S 为关于垂直于 R 的轴的平面的面对称. 关于第二个、第三个记号的规定如下：三斜晶系以及单斜晶系时，第二、第三个记号不出现. 对于正交晶系，第二个轴为 x 轴，第三个轴为 y 轴. 四方、菱形以及六角晶系时，第二个轴为 x 轴，第三个轴是直线 $x=y$，$z=0$. 对于这三个晶系，第一、第二、第三个轴，分别称为主轴、侧轴、间轴. 对于立方晶系，第二个轴为直线 $x=y=z$，第三个轴为直线 $x=y$，$z=0$.

在以上约定下，**三十二个结晶类**如表 1 所示:

表 1 三十二个结晶类

	Schoenflies 记号	国际记号
三斜晶系	C_1	1
	C_i	$\bar{1}$
单斜晶系	C_s	m
	C_2	2
	C_{2h}	2/m
正交晶系	C_{2v}	2 m m
	D_2	2 2 2
	D_{2h}	2/m 2/m 2/m
六角晶系	C_{3h}	$\bar{6}$
	C_6	6
	C_{6h}	6/m
	D_{3h}	$\bar{6}$ 2 m
	C_{6v}	6 m m
	D_6	6 2 2
	D_{6h}	6/m 2/m 2/m
四方晶系	S_4	4
	C_4	4
	C_{4h}	4/m
	D_{2d}	4 2 m
	C_{4v}	4 m m
	D_4	4 2 2
	D_{4h}	4/m 2/m 2/m
菱形晶系	C_3	3
	C_{3i}	3
	C_{3v}	3 m
	D_3	3 2
	D_{3d}	3 2/m
立方晶系	T	2 3
	T_h	2/m 3
	T_d	4 3 m
	O	4 3 2
	O_h	4/m 3 2/m

观察用格群 $\mathfrak{A}=\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}$，结晶类 $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ 以及 $\mathfrak{G}/\mathfrak{A}$ 的各个生成元对 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$，$\mathfrak{c}$ 各作变换，将会得出 $\mathfrak{A}$ 的哪些元，即可确定空间群 $\mathfrak{G}$ (→群[群的扩张]). 其种类共有 230，在[13]，[15]，[16]，[17]中，有这 230 种的表. 将它们全部列举出来，是在 Curie 的影响下，由 E. Федоров (1885)、Schoenflies (1891)，W. Barlow (1894) 等人分别独立完成的. 在[13]，[17]中记载有国际记号，在举出结晶系以后，用例如 P_m，C_m，P_2，P_{2_1} 那样的记号把空间群表示出来. 此处 P 表示结晶系的单格，C 表示底心格，添加的下标 m，2 的意义与结晶类相同，即分别表示面对称以及旋转 π. 例如，四方晶系情形的 P_2 表示由 $\mathfrak{A}=\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}$ 与 $R_2(z)$ 生成的空间群. 同样，四方晶系的 P_{2_1} 表示 $\mathfrak{c}/2$ 的平行移动与 $R_2(z)$ 的合成运动(这就是下标 2_1 的意义. 在四方晶系的情形，一般地，当 P_{n_k} 出现时，下标 n_k 表示 $k\mathfrak{c}/n$ 的平行移动与 $R_n^k(z)$ 的合成运动(所谓步距 k/n 的 n 次旋转))与 $\mathfrak{A}=\{\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}\}$ 所生成的空间群，其他记号的意义同此.

上面三十二个结晶类的群的特征标†等也已计算出来.

[参] [1] A. Bravais, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder Raum verteilten Punkten, Ostwald's Klassiker d. exak. Wissenschaften, no. 90, Engelmann, 1897; [2] G. Eisenstein, Tabelle der reduzierten positiven ternären quadratischen Formen, nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen, in besonderer Rücksicht auf ihre tabellarische Berechnung, J. Reine Angew. Math., **41** (1851), 141—190; [3] E. Selling, Des formes quadratiques binaires et ternaires, J. Math. Pures Appl., (3) **3** (1877), 21—69, 153—206; [4] P. G. H. Bachmann, Die Arithmetik der quadratischen Formen, Teubner, 1923, 1925; [5] P. Niggli, Kristallographische und strukturtheoretische Grundbegriffe, Handb. d. exp. Physik VII 1, Akademische Verlag., 1928; [6] B. Delaunay (Б. Делоне), Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie 1, Z. Kristallogr., **84** (1932), 109—149, [7] B. W. Jones, A table of Eisenstein reduced positive ternary quadratic forms of determinant≤200, Bull. Nat. Res. Council, **97** (1935), 1—51; [8] B. W. Jones, On Selling's method of reduction for positive ternary quadratic forms, Amer. J. Math., **54** (1932) 14—34; [9] 伊藤貞市，整数論と結晶学，岩波講座数学，1935; [10] 伊藤貞市，X-ray study on polymorphism, Tokyo, 1950; [11] A. M. Schoenflies, Kristallsysteme und Kristallstruktur, Teubner, 1891; [12] H. Hilton, Mathematical crystallography and the

theory of groups of movements, Clarendon, 1903; [13] Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen I, 1935; [14] J. J. Burckhardt, Die Bewegungsgruppen der Kristallographie, Basel, 1947; [15] R. W. G. Wyckoff, The analytical expression of the results of the theory of space groups, Carnegie Institute of Washington, 第二版, 1930; [16] P. Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums, Gebrüder Borntraeger, 1919; [17] International tables for X-ray crystallography I, Birmingham, 1952; [18] A. Speiser, Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Springer, 1923, 第三版 1937; [19] D. Hilbert -S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer, 1932 (中译本: D. 希尔伯特, S. 康福森, 直观几何, 人民教育出版社, 上册 1959, 下册 1964); [20] G. Frobenius, Gruppentheoretische Ableitung der 32 Kristallklassen, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1911, 681—691 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1968, vol. 3, p. 519—529); [21] F. D. Murnaghan, The theory of group representation, The Johns Hopkins Press, 1938; [22] Е. Н. Белова-Н. В. Белов-А. В. Шубников, О числе и составе абстрактных, отвечающих 32 кристаллографическим классам, Докл. Акад. Наук СССР, 63 (1948), 669—672.

自守函数 [英 automorphic function 法 fonction automorphe 德 automorphe Funktion 俄 автоморфная функция 日 保形関数] 设X是(复)解析流形†, Γ是X的解析(自同构)变换所成的一个不连续群†. X上的亚纯函数† $f(z)$称为(**积性**)**自守函数**, 如果对于所有的 $\gamma\in\Gamma$, 存在X上的(没有零点)的全纯函数† $j_\gamma(z)$, 使得 $f(\gamma(z))=f(z)j_\gamma(z)(z\in X)$ 成立. $\{j_\gamma\}$ $(\gamma\in\Gamma)$ 称为自守函数f的**自守因子** (factor of automorphy), 它满足关系式 $j_{\gamma\gamma'}(z)=j_\gamma(\gamma'(z))j_{\gamma'}(z)$. 特别当 $j_\gamma=1$, 即 $f(z)$ 是Γ不变函数时, f就简称为**自守函数**. 当所有 j_γ 是常数 (因而 $\gamma\to j_\gamma$ 是Γ的拟特征标)时, f称为**积性函数** (multiplicative function). 如果变换γ的函数行列式为 $J_\gamma(z)$, 则以 $j_\lambda(z)=J_\gamma(z)^{-m}$ 为自守因子的自守函数 $f(2)$ 称为**权** (weight) m的**自守形式** (automorphic form). (在这种情形下, 往往假定f是全纯的, 在一般情形下, 相应于不同情况, 要对f在"无穷远点"的性态加一些适当的条件.)

【单变量的情形】 (本节→[17],[7],[2],[11],[12].) 除去Γ是有限群或秩 $\leqslant 2$ 的自由 Abel 群(的经有限群的扩张)的情形(→椭圆函数)外, 只需考虑X是上半平面 $\mathfrak{H}=\{\Im z>0\}$ 的情形就够了. 在这个情形下, Γ可以看作是 $G=SL(2,\boldsymbol{R})$ 的离散†子群. 下面我们只讨论Γ是第一种 Fuchs 群†(即 $\mu(\Gamma\backslash\mathfrak{H})<\infty$)的情形(→不连续群). $\mathfrak{H}$上的亚纯函数f满足下列条件 i), ii) 时称为关于Γ的**自守函数**或 **Fuchs 函数** (Fuchsian function): i) f关于Γ不变, 即对所有的 $\sigma\in\Gamma$, $f(\sigma z)=f(z)$. ii) f在任意的尖点† x_0 的邻域也是亚纯函数, 即如果 φ_0 是把 x_0 映到∞的实线性分式变换(例如 $\varphi_0(z)=-1/(z-x_0)$), $\varphi_0\Gamma_{x_0}\varphi_0^{-1}$($\Gamma_{x_0}$ 是 x_0 的迷向群)的生成元为变换 $z\to z+h(h>0)$, 则 $f(\varphi_0^{-1}(z))$ 在∞点的某个邻域 $\Im z>y_0$ 内可展成 $q_h=\exp((2\pi i/h)z)$ 的 Laurent 级数†(只有有限个负指数项). 在 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上添加与Γ的尖点(的等价类)相对应的t个"无穷远点"后得到的闭 Riemann 面†设为 $\mathfrak{R}_\Gamma$, 则上述条件 i), ii) 无非是说f可以看成是 $\mathfrak{R}_\Gamma$ 上的亚纯函数. 从而所有关于Γ的自守函数所构成的域 $\mathfrak{K}_\Gamma$ 就可以看成等同于属于 $\mathfrak{R}_\Gamma$ 的代数函数域†(→代数函数). (关于第一种Fuchs群Γ的(非常值)自守函数f以实轴为自然边界†, 而关于第二种 Fuchs 群Γ的自守函数f总可以通过实轴上任何"寻常点"的一个邻域解析开拓到下半平面.)

如果$\mathfrak{H}$上的全纯函数f满足下面的条件 i), ii), 就称它为关于Γ的**权** (weight) 为 $k/2$, 或**维** (dimension) 为 $-k$ 的 (全纯) **自守形式** (automorphic form) 或 **Fuchs 形式** (Fuchsian form). i) 对于 $\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma$, $f(\sigma z)=f(z)\cdot(cz+d)^k$, 即自守因子是 $J_\sigma(z)^{-k/2}=(d\sigma(z)/dz)^{-k/2}=(cz+d)^k$. ii) f在任意的尖点 x_0 的邻域内全纯, 即用上面的记号, $f(\varphi_0^{-1}(z))(d\varphi_0^{-1}(z)/dz)^{k/2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu q_h^\nu$ 展开成正则的"Fourier 级数"(q_h 的幂级数). 特别是, 在 ii) 中如果f在所有的尖点处为0, 即上面展开式中的 $a_0=0$, 则f称为**尖点形式**(英 cusp form 德 Spitzenform). 特别是, f是 -2 维尖点形式当且仅当微分形式† $f(z)dz$ 是 Riemann 面 $\mathfrak{R}_\Gamma$

上的第一种微分†. (为简单起见,上述条件 ii) 是对 k 为偶数时说的. 当 k 为奇数时要作如下的改变: 若 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in\Gamma$, 则由 i) $f=0$. 若 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\notin\Gamma$, 且对于尖点 x_0, $\begin{pmatrix}-1 & h\\ 0 & -1\end{pmatrix}\in\varphi_0\Gamma_{x_0}\varphi_0^{-1}$, 则 ii) 中的"$q_h$ 的幂级数"要换成"$q_h^{1/2}\times$ (q_h 的幂级数)".)

设关于 Γ 的所有一k维自守形式构成的线性空间为 $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$, 而所有尖点形式构成其子空间 $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$. 由于 $\mathfrak{M}_k\mathfrak{M}_{k'}\subset\mathfrak{M}_{k+k'}$, $\mathfrak{M}_k\mathfrak{S}_{k'}\subset\mathfrak{S}_{k+k'}$, 故 $\mathfrak{M}(\Gamma)=\sum_k\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ 成为分次环†, $\mathfrak{S}(\Gamma)=\sum_k\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ 成为它的理想. $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$是有限维空间, 通过 Riemann-Roch 定理†可以求出 $\dim\mathfrak{M}_k(\Gamma)=d_k$, $\dim\mathfrak{S}_k(\Gamma)=d_k^0$:

$$d_k=0,\quad k<0;$$

$$d_0=1\quad d_0^0=\begin{cases}1, & t=0,\\ 0, & t>0;\end{cases}$$

$$d_2=\begin{cases}g, & t=0,\\ g+t-1, & t>0,\end{cases}\quad d_2^0=g;$$

$$d_k=(k-1)(g-1)+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{e_i}\right)\right)+\frac{k}{2}t,$$

$$d_k^0=d_k-t,\quad k\text{ 为偶数},\quad k\geqslant 4,$$

其中 s 为椭圆型不动点†的(等价类的)个数, e_i 为这些椭圆型不动点的迷向群的阶数, t 为抛物型尖点的(等价类的)个数, g 为 Riemann 面 $\mathfrak{R}_\Gamma$ 的亏格†. (当 k 为奇数且 $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\notin\Gamma$ 时,对 $k\geqslant 3$ 可得类似公式. 但 d_1, d_1^0 不能由 Riemann-Roch 定理求出.)

具体构造自守形式的方法可通过 Poincaré 级数给出. 设 σ_0 是把单位圆映到上半平面 $\mathfrak{H}$ 的线性分式变换†(例如 Cayley 变换†), 令 $\Gamma'=\sigma_0^{-1}\Gamma\sigma_0$, φ 为闭单位圆上的全纯函数(例如多项式),则

$$P_\varphi(z)=\sum_{\sigma'\in\Gamma'}\varphi(\sigma'(z))(d\sigma'(z)/dz)^{k/2}$$

对于 $k\geqslant 4$ 在单位圆内广义一致绝对收敛 (即在单位圆内的每个紧集上一致绝对收敛). 且 $P_\varphi\in\mathfrak{S}_k(\Gamma)$; 反之 $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ 中的任意元均可表为这种形式. 这个级数就称为 Poincaré 的 **θ Fuchs 级数** (theta Fuchsian series), 简称为 **Poincaré 级数** (Poincaré series).

在 $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ ($k\geqslant 3$) 上可定义如下的内积:

$$(f,g)=\int_F f(z)\overline{g(z)}y^{k-2}dxdy$$

($z=x+iy$, F 为 Γ 的基本域†). 这个内积称为 **Petersson 度量** (Petersson metric). 因为当 $f,g\in\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ 之中有一个 $\in\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ 时, 这个积分收敛, 所以可以定义 $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ 在 $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ 中的正交补空间 $\mathfrak{E}_k(\Gamma)$. $\mathfrak{E}_k(\Gamma)$ 可由 Eisenstein 级数(见后)生成.

关于 Γ 的任一自守函数 f, 对于充分大的 k, 可表为两个自守形式 $f_1,f_2\in\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ 的商: $f=f_1/f_2$. 且 $w=f(z)$的反函数可以表为线性微分方程 $d^2z/dw^2=\Phi(w)w$ 的两个线性无关的解的商,其中 $\Phi(w)$ 是 w 的属于 Riemann 面 $\mathfrak{R}_\Gamma$ 的代数函数†.

【模函数及模形式】 (本节→[13], [8], [12].) (椭圆) 模群† $\Gamma(1)=SL(2,\boldsymbol{Z})=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in\boldsymbol{Z},\ ad-bc=1\right\}$ 是作用于上半平面的第一种 Fuchs 群, 通过把对应于尖点∞的一个无穷远点添加到 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}$ 上, 就得到亏格为 0 的闭Riemann面 $\mathfrak{R}_\Gamma=\Gamma\backslash\mathfrak{H}\cup\{\infty\}$. 关于模群 Γ 的自守函数、自守形式就分别称为 **(椭圆)模函数** ((elliptic) modular function), **模形式**(modular form)(在定义时,无穷远点的"局部参数"为 $q=e^{2\pi iz}$). $d_k=\dim\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ (k 为 $\geqslant 2$ 的偶数)由下式给出:

$$d_k=\begin{cases}[k/12], & k\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12),\\ [k/12]+1, & k\not\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 12).\end{cases}$$

关于更一般的级为 N 的主同余子群† $\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}N)\right\}$ 的自守函数、自守形式, 分别称为**级** (英 level 德 Stufe)为N的模函数、模形式. ($\Gamma(N)$ 的尖点的个数, $\mathfrak{R}_\Gamma(N)$ 的亏格等等→不连续群. 在这种

情形下，ii) 的局部参数为 $q_N = \exp((2\pi i/N)z)$.) 当 $N, k \geqslant 3$ 时，d_k, d_k^0 (对于奇数 k 也一样) 由上节的一般公式给出. 且 $\mathfrak{C}_k(\Gamma(N))$ ($k \geqslant 3$) 的基可取为(广义) **Eisenstein 级数** (Eisenstein series):

$$G_k(z;c_1,c_2,N) = \sum_{m_i \equiv c_i (\mathrm{mod} N)}' \frac{1}{(m_1+m_2z)^k}$$

(式中 $\sum'$ 表示除掉 $(m_1, m_2) = (0, 0)$ 的求和),其中 c_1, c_2 为满足 $(c_1, c_2, N) = 1$ 的整数, $G_k(z; c_1, c_2, N)$ 只依赖于 c_1, $c_2 (\mathrm{mod}\, N)$ (但 $(c_1, c_2)(-c_1, -c_2)$ 之中我们只取一个). 因此 $d_k - d_k^0 = \dim \mathfrak{C}_k = t(N)(k \geqslant 3)(k = 1, 2$ 时的细节参看 E. Hecke, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **5** (1927)).

Eisenstein 级数的 Fourier 系数 a_n 很容易算出来,当 $k = 2$ 时, $a_n = O(n^{k-1+\varepsilon})$ (ε 为任意正数). 另一方面,对于尖点形式, Hecke (上述论文)得到 $a_n = O(n^{k/2})$. H. D. Kloosterman 为了改进这个估计,引入了所谓 **Kloosterman 和** (Kloosterman sum)

$$K(u,v,q) = \sum_{x(\mathrm{mod}\, q),(x,q)=1} \exp\left(\frac{2\pi i}{q}\left(ux + \frac{v}{x}\right)\right)$$

$(u, v, q \in \boldsymbol{Z})$, 其估计还与二次型的算术有关. 用 A. Weil 的估计: $|K(u, v, p)| \leqslant 2\sqrt{p}$ (p 为奇素数, $(u, p) = (v, p) = 1$) 可得 $a_n = O(n^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}+\varepsilon})$. (如广义 Ramanujan 猜想†正确的话,可得 $a_n = O(n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon})$.)

$N = 1$ 的情形,可得通常的 Eisenstein 级数 $G_k(z) = G_k(z; 0, 0, 1)$ (k 为 $\geqslant 4$ 的偶数),特别有 $g_2(z) = 60\, G_4(z)$, $g_3(z) = 140\, G_6(z)$, $\Delta(z) = g_2^3 - 27\, g_3^2$. 令 $\mathscr{P} = \mathscr{P}(u; 1, z)$ 为基本周期为 $(1, z)$ 的 Weierstrass $\mathscr{P}$ 函数†, 则有关系式 $\mathscr{P}'^2 = 4\mathscr{P}^3 - g_2\mathscr{P} - g_3$ 成立, $\Delta(z)$ 是右端的三次多项式的判别式†. 所有的模形式都能唯一表为 g_2, g_3 的同权的项的多项式, 即 $\mathfrak{M}(\Gamma(1)) \cong \boldsymbol{C}[g_2, g_3]$. 且 $\Delta(z)$ 是权最小的尖点形式, $\mathfrak{S}(\Gamma(1)) = \mathfrak{M}(\Gamma(1))\Delta$ (主理想). 当设 $q = q_1 = e^{2\pi i z}$ 时, $G_k(z)$ 的 Fourier 展开由下式给出:

$$G_k(z) = (2\pi)^k \frac{1}{k!} \times \left(B_k + (-1)^{\frac{k}{2}} 2k \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{k-1} \frac{q^\nu}{1-q^\nu}\right)$$

(B_k 为 Bernoulli 数†),且 Δ 可展成无穷乘积:

$$\Delta(z) = (2\pi)^{12} q \prod_{\nu=1}^{\infty} (1-q^\nu)^{24}.$$

令 $J(z) = g_2^3/\Delta$, J 就是把 $\mathfrak{R}_{\Gamma(1)} = \Gamma(1)\backslash\mathfrak{H} \cup \{$一个点$\}$ 一一解析映射到 Riemann 球 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 上的模函数 (J 分别把 ζ_3, ζ_4, ∞ 映到 0, 1, ∞), 从而模函数域 $\mathfrak{K}_{\Gamma(1)}$ 与由 J 生成的有理函数域 $\boldsymbol{C}(J)$ 相同. 以 (ω_1, ω_2) 为基本周期的复一维环面群†(椭圆曲线†) $E_{(\omega_1,\omega_2)} = \boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z}\omega_1 + \boldsymbol{Z}\omega_2)$ 的解析同构类由其**模数** (modulus) $\tau = \omega_2/\omega_1$ 从而由 $J(\tau)$ 唯一决定. 这就是模函数名称的历史来源 ([11],[13]).

级为 2 的模函数的例子有 **λ 函数** (lambda function):

$$\lambda(z) = \frac{\mathscr{P}((1+z)/2) - \mathscr{P}(z/2)}{\mathscr{P}(1/2) - \mathscr{P}(z/2)}.$$

λ 把 $\mathfrak{R}_{\Gamma(2)} = \Gamma(2)\backslash\mathfrak{H} \cup \{$三个点$\}$ 一一解析映射到 $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ (分别把 0, 1, ∞ 映成 1, ∞, 0) (这个性质被用来证明 Picard 定理†). 因此 $\mathfrak{K}_{\Gamma(2)} = \boldsymbol{C}(\lambda)$. J 与 λ 之间有如下关系:

$$J(z) = \frac{4}{27} \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}.$$

一般级为 N 的模函数也可用 $(g_2/g_3)\mathscr{P}((a_1 + a_2 z)/N; 1, z)$ $(a_1, a_2 \in \boldsymbol{Z})$ 的有理函数来表示.

【Hecke 环及其表示】 (本节→[9],[10],[5],[14].)一般设 $\tilde{\Gamma}$ 为群, Γ 为其子群,假定对所有的 $\sigma \in \tilde{\Gamma}$, $\sigma\Gamma\sigma^{-1}$ 与 Γ 是可公度的†(即 $\Gamma\sigma\Gamma$ 由有限个左或右陪集构成). 这时,在由重陪集 $\Gamma\sigma\Gamma (\sigma \in \tilde{\Gamma})$ 所生成的自由模内,可按下式定义乘积:

$$\Gamma\sigma\Gamma \cdot \Gamma\tau\Gamma = \sum_{\Gamma\rho\Gamma} m(\sigma, \tau; \rho)\Gamma\rho\Gamma,$$

其中 $m(\sigma, \tau; \rho)$ 表示有 $\Gamma\sigma\Gamma = \bigcup_i \Gamma\sigma_i$, $\Gamma\tau\Gamma = \bigcup_j \Gamma\tau_j$ 这样的分解时, 满足 $\Gamma\sigma_i\tau_j = \Gamma\rho$ 的组 (i, j) 的个数. 这样得到的(满足结合律的)环

称为 **Hecke 环** (Hecke ring)，以下记为 $\mathscr{H}(\tilde{\Gamma},\Gamma)$.（当 $\tilde{\Gamma}$ 为拓扑群，Γ 为 $\tilde{\Gamma}$ 的紧开子群时，$\mathscr{H}(\tilde{\Gamma},\Gamma)$ 就等同于定义在 $\tilde{\Gamma}$ 上且具有紧支集的、对 Γ 两侧不变的、在 $\boldsymbol{Z}$ 上取值的连续函数全体关于卷积 (convolution) 作成的环.）

设 $\tilde{\Gamma}=GL^{+}(2,\boldsymbol{Q})$，$\Gamma=SL(2,\boldsymbol{Z})$，因为它们满足上述条件，所以可以研究其 Hecke 环 $\mathscr{H}(\tilde{\Gamma},\Gamma)$. 根据初等因子†理论，$\Gamma\backslash\tilde{\Gamma}/\Gamma$ 的代表的完全集可取作 $\left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\middle| a_1,\ a_2\in\boldsymbol{Q},\ a_1,\ a_2>0,\ a_1|a_2\right\}$. 令 $\Gamma\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}\Gamma=T(a_1,\ a_2)$，由于 $T(a_1a_2,\ a_1a_2)\ T(a_1^{-1},\ a_2^{-1})=T(a_1,\ a_2)$，故 $\mathscr{H}(\tilde{\Gamma},\Gamma)$ 是可交换的. 特别对自然数 n，令

$$T_n=T(n)=\sum_{a_1a_2\in\boldsymbol{Z},\ a_1a_2=n}T(a_1,\ a_2),$$

则下面的乘法公式成立：

$$T(n)\cdot T(m)=\sum_{d|n,m}dT(d,\ d)\cdot T(nm/d^2).$$

得到 $\mathscr{H}(\tilde{\Gamma},\Gamma)$ 在 $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ 中的表示如下：对于 $\mathscr{H}(\tilde{\Gamma},\Gamma)\ni T=\bigcup\Gamma\sigma_i\left(\sigma_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i\\ c_i & d_i\end{pmatrix}\right)$，设 f 为（级为 1 的）$-k$ 维模形式，令

$$(f|T)(z)=\sum_i f(\sigma_i(z))(c_iz+d_i)^{-k}\det(\sigma_i)^l$$

（l 为任意整数），即得到该表示. $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$ 关于这个表示是不变子空间. 特别 T_n 的表示（按照 Hecke，设 $l=k-1$）称为 **Hecke 算子** (Hecke operator) (Hecke, Math. Ann., **114** (1937)). Hecke 算子关于 Petersson 度量成为 Hermite 算子†，因此 $\mathfrak{E}_k(\Gamma)$ 也是它的不变子空间.

令每个模形式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nq^n(q=e^{2\pi iz})$ 对应一个 Dirichlet 级数† $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nn^{-s}$. 因为 $f\in\mathfrak{M}_k(k\geqslant 2)$ 时，$a_n=O(n^{k-1+\varepsilon})$，故 $\varphi(s)$ 在 $\Re s>k$ 内绝对收敛. 相应于 f 是 $-k$ 维模形式，φ 满足下列条件：$(s-k)\varphi(s)$ 是有限亏格†（实际上等于 1）的整函数†，且 $R(s)=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s)$ 满足函数方程 $R(k-s)=(-1)^{k/2}R(s)$. 这个 f 与 φ 的对应是一一对应 $(a_0=(-1)^{k/2}\operatorname{Res}_{s=k}R(s))$. $g(x)=f(ix)-a_0(x>0)$ 与 $R(s)$ 通过 Mellin 变换† 彼此联系：

$$R(s)=\int_0^{\infty}g(x)x^{s-1}dx,$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Re s=\sigma_0}R(s)x^{-s}\,ds.$$

通过同样的对应，一般满足某种函数方程的 Dirichlet 级数与某种自守形式也一一对应 (Hecke, Math. Ann., **112** (1936)). A. Weil 在 1967 年有更一般的结果.

假如 $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ 的子空间 $\mathfrak{M}$ 对于所有的 T_n $(n=1,2\cdots)$ 均不变，设关于 $\mathfrak{M}$ 的基 $(f_1,\cdots,f_\kappa)$ $(\kappa=\dim\mathfrak{M})$，$T_n$ 的表示矩阵为 $\lambda(n)$，则存在 κ 个 $\kappa\times\kappa$ 常数矩阵 $B^{(i)}=(\beta_{jk}^{i})(1\leqslant i\leqslant\kappa)$ 以及 $\lambda(0)$，使得

$$F(z)=\sum_{i=1}^{\kappa}f_i(z)B^{(i)}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\lambda(n)$$

成立. 设对这个函数矩阵的每个元进行上述变换所得到的函数矩阵为 $\Phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\lambda(n)$，则根据 $\lambda(n)$ 的乘法性质，得出如下的矩阵的 Euler 积†分解：

$$\Phi(s)=\prod_p(I_\kappa-\lambda(p)p^{-s}+p^{k-1-2s}I_\kappa)^{-1}$$

（I_κ 为 κ 次单位矩阵）. 特别在 $\dim\mathfrak{M}=1$ 的情形，即存在某个 $f\in\mathfrak{M}$，它是所有 Hecke 算子 T_n 的特征函数的情形，这时 f 所对应的 Dirichlet 级数 $\varphi(s)$ 可分解成如下的 Euler 积：

$$\varphi(s)=\prod_p(1-\lambda_pp^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1}.$$

例如，对应 Eisenstein 级数 G_k 的 Dirichlet 级数是 $(2(2\pi i)^k/(k-1)!)\,\zeta(s)\,\zeta(s-k+1)$（$\zeta$ 为 Riemann ζ 函数†），它具有众所周知的 Euler 积分解. 当 $k=12$ 时，因为 $\mathfrak{S}_{12}=\{\Delta\}$，所以对应 $\Delta(z)$ 的 Dirichlet 级数也具有 Euler 积 (**Ramanujan 猜想**；S. Ramanujan 还猜测，这个 Euler 积中的二次多项式 $1-\lambda_pX+p^{11}X^2$

具有虚根,即 $|\lambda_p| < 2p^{\frac{11}{2}}$,这一猜想已为 P. Deligne 证明 (1973)).M. Eichler-志村五郎阐明了模函数域 ($\mathfrak{K}_{\Gamma(N)}$)的 Hasse ζ 函数†与上述 Euler 乘积的关系,结果证明了 $k=2$ 的情形的广义 Ramanujan 猜想: T_p 在 $\mathfrak{S}_k$ 中的表示的特征值的绝对值均 $\leqslant 2p^{(k-1)/2}$. (这一猜想一般情形也为 P. Deligne 所证,其发展可参看 M. Kuga (久賀道郎)-G. Shimura (志村五郎), Ann. of Math. **82** (1965).)

【多变量的情形】 (本节→[2],[3],[21].) 设 X 为 $\boldsymbol{C}^N$ 中的有界域, Γ 为 X 的 (复) 解析自同构的不连续群†, 则权 $m \geqslant 2$ 的 Poincaré 级数广义一致绝对收敛,表示权 m 的自守形式. 且如 $\Gamma\backslash X$ 是紧的,设权 m 的 Poincaré 级数的空间的基为 $(f_1, \cdots, f_s)$, 则对充分大的 m (但设它总是所有 Γ_z 的阶的倍数), 映射 $X \ni z \to (f_1(z), \cdots, f_s(z))$ 定义了商空间 $\Gamma\backslash X$ 到复射影空间 $\boldsymbol{P}^{s-1}$ 中的一个一一解析嵌入,其象是正规†代数簇. 因此, 关于 Γ 的自守函数域成为 N 维代数函域†, 且所有自守函数均可表为两个 Poincaré 级数的商.

$\Gamma\backslash X$ 非紧的情形有下面的例子.

【Siegel 模函数】 (本节→[20],[15],[3].) 所有虚部 $Y>0$ (正定)的 n 阶复对称矩阵 $Z=X+iY$ 所构成的空间 $\mathfrak{H}_n$ 称为 ***n* 次 Siegel 上半空间** (Siegel upper half space of degree n) 或 ***n* 次 Siegel 空间**. $\mathfrak{H}_n$ 的 (复) 解析自同构群是 $2n$ 次实 (射影) 辛群† $Sp(n, \boldsymbol{R})/(\pm I_{2n})$, $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \boldsymbol{R})$ 通过 $\sigma(Z) = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ 作用于 $\mathfrak{H}_n$. $Sp(n, \boldsymbol{R})$ 中矩阵的元限制为整数时可得子群 $\Gamma_n = Sp(n, \boldsymbol{Z})$, 对应于它的分式线性变换群称为 ***n* 次 Siegel 模群**(Siegel modular group of degree n). Γ_n 是作用于 $\mathfrak{H}_n$ 上的第一种†不连续群.

$\mathfrak{H}_n$ 上的全纯函数 $f(Z)$ 称为 $-k$ 维 (或权 k) 的 **Siegel 模形式** (Siegel modular form), 如果 $f(Z)$ 满足下列条件: i) 对于 $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$, $f(\sigma(Z)) = f(Z)\det(CZ+D)^k$, ii) 具有正则的 Fourier 展开: $f(Z) = \sum_{T \geqslant 0} a_T e^{2\pi i \operatorname{tr} TZ}$ (T 取遍所有 n 阶半整半正定对称矩阵†). 在 $n \geqslant 2$ 时,条件 ii) 可由另一条件推出 (M. Köcher, Math. Z., **59** (1954)). $-k$ 维的 Siegel 模形式全体所构成的空间记作 $\mathfrak{M}_k^{(n)} = \mathfrak{M}_k(\Gamma_n)$.

把 $Z \in \mathfrak{H}_n$ 分解成 $Z = \begin{pmatrix} Z_1^{(n-1)} & \mathfrak{z} \\ {}^t\mathfrak{z} & z \end{pmatrix}$, 令 $\mathfrak{M}_k^{(n)} \ni f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(Z_1, \mathfrak{z}) e^{2\pi i n z}$, 则 $a_0(Z_1, \mathfrak{z})$ 只是 Z_1 的函数, 写作 $f_1(Z_1)$, 于是 $f_1 \in \mathfrak{M}_k^{(n-1)}$. 这样定义的映射 $\Phi: f \to f_1$ 把 $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ 映到 $\mathfrak{M}_k^{(n-1)}$中, 当 k 为偶数且 $>2n$ 时, Φ 是满射 (H. Maass, Math. Ann., **123** (1951)). 把 Φ 的核表为 $\mathfrak{S}_k^{(n)}$, 称 $f \in \mathfrak{S}_k^{(n)}$ 为**尖点形式** (cusp form) (把 $\mathfrak{H}_{n-1}$ 看成是 $\mathfrak{H}_n$ 的尖点). 对于 $f \in \mathfrak{M}_k^{(n)}$, 下面三条件等价: a) $f \in \mathfrak{S}_k^{(n)}$; b) $f(Z) = \sum_{T>0} a_T e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)}$; c) $|f(Z)\det(Y)^{k/2}|$ 有界. $k<0$ 或 k 及 n 均为奇数时, $\mathfrak{M}_k^{(n)} = 0$, $\mathfrak{M}_0^{(n)} = \{$常数$\}$. 一般 $\dim \mathfrak{M}_k^{(n)}$ 有限,且 $= O(k^{n(n+1)/2})$ $(k \to \infty)$. 特别在 $n=2$ 的情形,分次环 $\mathfrak{M}(\Gamma_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}_k^{(2)}$ 的结构 (其偶数部分与四变量多项式环同构), $\dim \mathfrak{M}_k^{(2)}$ 以及 $\Gamma_2\backslash\mathfrak{H}_2$ 的奇点等都已完全确定 (井草準一, Amer. J. Math., **84** (1962), **86** (1964); U. Christian).

作为 Siegel 模形式的具体例子,我们有如下定义的 **Eisenstein-Poincaré 级数**(Eisenstein-Poincaré series):

$$E_{S,k}(Z) = \sum_{\sigma \in \Gamma(S)\backslash\Gamma} e^{2\pi i \operatorname{tr}(S\sigma(Z))} \det(CZ+D)^{-k},$$

其中 S 是 $\geqslant 0$ 的 n 阶有理对称矩阵, $\Gamma(S) = \left\{ \begin{pmatrix} U & T\,{}^tU^{-1} \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma \,\middle|\, {}^tUSU = S,\ e^{2\pi i \operatorname{tr}(ST)} = \det(U)^k \right\}$.

这个级数当 $k > n + \operatorname{rank} S + 1$ (如果 $S>0$, 则当 $k>2n$) 时收敛, 其全体张成 $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ (特别 $E_{S,k}(S>0)$ 张成 $\mathfrak{S}_k^{(n)}$) (Maass, 上引论文). 且由整系数二次型定义的 ϑ 级数† 也是 (某阶) Siegel 模形式 (C. L. Siegel, Ann. of Math., **36** (1935)).

商空间 $\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n$ 可以作如下的紧化（佐武一郎，W. Baily [3]）. 存在一个正整数 k_0 使得 $k_0|k$ 时，由 $\mathfrak{M}_k^{(n)}$ 的基所定义的射影嵌入 ι_k 是一一全纯的，其象的闭包 $\overline{\iota_k(\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n)}$ 是正规代数簇，它（作为代数簇）的结构与 k 无关. 如果把它简单地表为 $\overline{\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n}$，则有 $\overline{\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n}=\bigcup_{r=0}^{n}\Gamma_r\backslash\mathfrak{H}_r$. 当 $n\geqslant 2$ 时，应该添加到 $\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n$ 的"无穷远点"的维数 $\leqslant \dim\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n-2$，因此（由于 Hartogs 的开拓定理†），在定义模函数及模形式时，在"无穷远点"的条件就不必要了. 实际上，如把 **n 次 Siegel 模函数**（Siegel modular function of degree n）定义为关于 Γ_n 不变的、$\mathfrak{H}_n$ 上的亚纯函数，那么它可以开拓成 $\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n$ 上的亚纯函数，从而可表为等权的模形式的商. 且 n 次 Siegel 模函数的全体构成 $n(n+1)/2$ 维代数函数域.（这些结果也可以不用紧化方法，而从 $\Gamma_n\backslash\mathfrak{H}_n$ 的伪凹†性（pseudo-concavity）推出（A. Andreotti-H. Grauert）.）特别当 $n=2$ 时，Siegel 模函数域就是有理函数域.

【Hilbert 模函数】 根据 D. Hilbert 的建议，O. Blumenthal 研究了模群的下述推广. 设 K 为全实有限次代数数域†（即 K 的共轭均属于实数域），K 的共轭为 $K^{(1)},\cdots,K^{(n)}$，$n=[K:\boldsymbol{Q}]$，$\alpha\in K$ 的共轭表为 $\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(n)}$（因此 $\alpha^{(i)}$ 均为实数）. 命 $\mathfrak{O}$ 为 K 的主整环，考虑群 $\Gamma_{\mathfrak{O}}=SL(2,\mathfrak{O})=\left\{\sigma=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\middle|\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathfrak{O},\alpha\delta-\beta\gamma=1\right\}$. 若定义 $\Gamma_{\mathfrak{O}}$ 在 n 个上半平面 $\mathfrak{H}$ 的直积 $\mathfrak{H}^n=\{z=(z_1,\cdots,z_n)|z_i\in\mathfrak{H}\}$ 上的作用为 $\sigma(z)=\left(\dfrac{\alpha^{(1)}z_1+\beta^{(1)}}{\gamma^{(1)}z_1+\delta^{(1)}},\cdots,\dfrac{\alpha^{(n)}z_n+\beta^{(n)}}{\gamma^{(n)}z_n+\delta^{(n)}}\right)$，则 $\Gamma_{\mathfrak{O}}$ 成为第一种不连续群（$\Gamma_{\mathfrak{O}}$ 是 $SL(2,\boldsymbol{R})^n$ 的不可约† 离散子群）. $\Gamma_{\mathfrak{O}}$ 就称为（狭义）**Hilbert 模群**（Hilbert modular group）. 也有的定义把条件 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ 放宽，只假定 $\alpha\delta-\beta\gamma=$（全正的单位†）. 设 K 的类数†为 h，则 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}^n$ 可通过添加 h 个无穷远点而紧化. 因此当 $n\geqslant 2$ 时，能够定义 **Hilbert 模函数**（Hilbert modular function）为 $\mathfrak{H}^n$ 上关于 $\Gamma_{\mathfrak{O}}$ 不变的亚纯函数. 并且，同样可把一 k 维 **Hilbert 模形式**（Hilbert modular form）定义为具有下列性质的 $\mathfrak{H}^n$ 上的全纯函数，即对于 $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in\Gamma_{\mathfrak{O}}$，$(f|\sigma)(z)=f(\sigma(z))\prod_{i=1}^{n}(\gamma^{(i)}z_i+\delta^{(i)})^{-k}=f(z)$ 成立.（这时，对于任意的 $\sigma\in SL(2,K)$，$f|\sigma$ 具有正则的 Fourier 展开，即 f 在尖点 $\sigma^{-1}(\infty)$ 处是全纯的.）关于 Hilbert 模函数与 Hilbert 模形式，也得到了类似于 $n=1$ 的情形及 Siegel 模函数、模形式的情形的结果（Kloosterman，Maass，K. B. Gundlach，H. Klingen）.

【其他推广】 模函数的其他推广还有 Hilbert-Siegel 模函数（И. И. Пятецкий-Шапиро，Baily，Christian [4]；[4] 中有开列 150 篇文献的文献表），Hermite 模函数（H. Braun，H. Klingen）等等，最近 Пятецкий-Шапиро（[18]，[23]），A. Borel-Baily（[1]）已对最一般的情形，即作用在有界对称域†上的算术不连续群†的情形建立起自守函数的统一理论.

另外，正如椭圆模函数是一维复环面群的不变量，可以把广义模函数考虑成为某种（极化）Abel 簇†的族的解析不变量. 正是从这种观点出发，志村把（由 Hecke 及 M. Eichler 开始的）自守函数的数论的和代数几何学的研究大大地推进了一步（Ann. of Math., **70**（1959），**76**（1962）等；又→[5]，[14]）.

从解析的观点来看，自守函数论密切联系于 G 在 $L_2(\Gamma\backslash G)$ 中的酉表示（或对称空间上的球函数）. 在这方面，A. Selberg（[19]）引进重要的迹公式†，它推广了古典的 Poisson 求和公式†，可用来计算自守函数空间的维数以及 Hecke 算子的迹等等（R. P. Langlands）. 当 $X=G/K$ 是对称域的情形，对于 G 的极大紧子群 K 的任意表示 ρ，可定义典范（矩阵值）自守因子，研究关于它的不连续群 Γ 的（向量值）自守形式，在某种条件（例如 Γ 自由，$\Gamma\backslash X$ 紧，ρ 的最高权†充分大）之下，我们可以得到一个公式，使这种自守形式空间的维数表示为

$\Gamma\backslash X$ 的算术亏格† 和X的"对偶" $X_u = G_u/K$ 的(与ρ有关的)某种不变量的积([3],[16],[22]).

【参】[1] W. Baily-A. Borel, Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains, Ann. of Math., **84** (1966), 442—528; [2] Séminaire H. Cartan, 6, Théorie des fonctions de plusieurs variables, Fonctions automorphes et espaces analytiques, Ecole Norm. Sup., 1953—1954; [3] Séminaire H. Cartan, 10, Fonctions automorphes, Ecole Norm. Sup., 1957—1958; [4] U. Christian, Zur Theorie der Hilbert-Siegelschen Modulfunktionen, Math. Ann., **152** (1963), 275—341; [5] M. Eichler, Quadratische Formen und Modulfunktionen, Acta Arith., **4** (1958), 217—239; [6] M. Eichler, Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen, Birkhäuser, Basel, 1963; [7] R. Fricke-F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Teubner, I 1897, II 1901, 第二版 1926; [8] R. C. Gunning, Lectures on modular forms, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1962; [9] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959; [10] E. Hecke, Dirichlet series, modular forms and quadratic forms, Lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1938; [11] 岩沢健吉,代数関数論,岩波, 1952; [12] 河田敬義, 1 変数保型函数の理論 I, II, セミナリー・ノート, 東大数学教室, 1963—64; [13] F. Klein-R. Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen; Teubner, I 1890, II 1892; [14] M. Kuga(久賀道郎), Fiber varieties over a symmetric space whose fibers are Abelian varieties, Lecture notes, Univ. of Chicago, 1963—64; [15] H. Maass, Lectures on Siegel's modular functions, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1954—55; [16] Y. Matsushima (松島与三)-S. Murakami (村上信吾), On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds, Ann. of Math., **78** (1963), 365—416; [17] H. Poincaré, Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, Acta Math., **1** (1882) 193—294 (Oeuvres de H. Poincaré II; Gauthier-Villars, 1916, vol. 2, p. 167—257); [18] И. И. Пятецкий-Шапиро, Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Физматгиз, 1961; [19] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., **20** (1956), 47—87; [20] C. L. Siegel, Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades, Math. Ann., **116** (1939), 617—657 (Gesammete Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 2, p. 97—137); [21] C. L. Siegel, Analytic functions of several complex variables, Lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1953—54 (中译本: C. L. 齐格尔, 多复变数解析函数, 科学出版社, 1960); [22] Y. Matsushima (松島与三)-S. Murakami (村上信吾), On certain cohomology groups attached to Hermitian symmetric spaces, Osaka J. Math., **2** (1965), 1—35; [23] И. И. Пятецкий-Шапиро, Арифметические группы в комплексных областях, Успехи Мат. Наук, **19** (1964), 93—121; [24] Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. in Pure Math., IX (1966); [25] И. М. Гельфанд-М. И. Граев-И. И. Пятецкий-Шапиро, Обобщенные функции, 6, Теория представлений и автоморфные функции, Наука, 1966; [26] Harish-Chandra, Automorphic forms on semisimple Lie groups, Lecture notes in math. 62, Springer, 1968; [27] G. Shimura(志村五郎), Automorphic functions and number theory, Lecture notes in math. 54, Springer, 1968; [28] G. Shimura (志村五郎), Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Publ. Math. Soc. Japan, Iwanami Shoten and Princeton, 1971; [29] H. Jacquet-R. P. Langlands, Automorphic forms on *GL* (2), Lecture notes in math. 114, Springer, 1970; [30] J. Lehner, Discontinuous groups and automorphic functions, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1964.

表示论 [英 representation theory 法 théorie des représentations 德 Darstellungstheorie 俄 теория представления 日 表現論] 对于一个数学体系A,从A到同类的(一般是"更具体的")一个数学体系的保持结构的映射,称为A的一个**表示**(representation). 在本条中只讨论群和结合代数的表示. 其他代数体系的表示,可看 Boole 代数、Jordan 代数、Lie 代数各条. 关于拓扑群、Lie 群、代数群的表示,可看相应各条以及拓扑 Abel 群、紧群、酉表示等条. 关于某些特殊的群,可看典型群和 Clifford 代数等条.

【群的置换表示】 集合M的全体置换组成的群(→群[群的例子])记做 S_M. 群G在M内的**置换表示**(permutation representation)是指一个同态 $G\to S_M$. 设与 $a\in G$ 对应的M的置换是 a_M,而且使用记号 $a_M(x)=ax$ $(x\in M)$,则有条件 $(ab)x=a(bx)$, $1x=x$ $(a,b\in G$, 1 是G的单位元, $x\in M)$. 一般地,如果 $a\in G$ 和 $x\in M$ 的积 $ax\in M$ 有意义而且满足以上条件,则称G **从左方作用于 M** (operates on M to the left),而且称M是一个**左G集**(left G-set). 给定G在M内的一个置换表示等价于对M给定一个左G集结构. G在M内的**反置换表示**(reciprocal permutation representation)是指一个反同态† $G\to S_M$,当在S_M中按右乘记号 $x(fg)=(xf)g$ 规定乘法时它成为一个同态. 如果 $a\in G$ 和 $x\in M$ 的积 $xa\in M$ 有意义而且满足条件

$x(ab)=(xa)b$ 和 $x1=x$，则与前相仿，称 G **从右方作用于 M** (operates on M to the right)，而且说 M 是**右 G 集** (right G-set)．给定 G 在 M 内的一个反置换表示等价于对 M 给定一个右 G 集结构．

如果一个置换(或反置换)表示是单射，则它称为**一一的** (faithful)；对应的 G 集也称为一一的．特别是，可以取 G 本身作为 M 而把左(右)乘定义为左(右)作用，由此得到的一一的置换(反置换)表示，称为 G 的**左(右)正则表示** (left (right) regular representation)．对于 $a\in G$ 所导出的置换 $a_G: x\to ax$ (或 xa) 称为由 a 产生的**左(右)平移** (left (right) translation)．

以下把左 G 集简单叫做 G 集．如果 G 集 M 的子集 N 满足条件：$a\in G$，$x\in N$ 蕴涵 $ax\in N$，那么 N 也是一个 G 集，称它为 M 的**子 G 集** (sub-G-set)．如果 G 集 M 没有真子 G 集(即不是 M 和空子集的子 G 集)，则对于任何两个元 x，$y\in M$，存在元 $a\in G$，使得 $ax=y$．在这种情形下，G 对 M 的作用称为**可迁的** (transitive)，对应的置换表示也称为可迁的．如果 G 集 M 中的一个等价关系 R 是与 G 的作用相容的 (即 R 满足条件：$a\in G, R(x,y)$ 蕴涵 $R(ax,ay)$)，则商集 M/R 自然地成为一个 G 集，它称为 M 对 R 的**商 G 集** (quotient G-set)．如果 G 集 M 没有非平凡的商 G 集，即如果与 G 的作用相容的只有这样两种等价关系 R:"$R(x,x')$ 对于任何 $x,x'\in M$ 都成立"或"$R(x,x')$ 当且仅当 $x=x'$"，则 G 对 M 的作用和对应的置换表示都称为**本原的** (primitive)．

如果 G 集之间的映射 $f: M\to M'$ 满足条件 $f(ax)=af(x)$ $(a\in G, x\in M)$，则 f 就称为 **G 映射** (G-mapping)．自然地可以定义 G 单射，G 满射，G 双射．G 双射的逆映射也是 G 双射．两个置换表示称为**相似的** (similar)，如果在对应的 G 集之间存在一个 G 双射．

设 M 是可迁的 G 集，取定任意元 $x\in M$．如果把 G 看做 G 集，则由 $f(a)=ax$ 确定的映射 $f: G\to M$ 是 G 满射，而且导出 G 双射 $\bar{f}: G/R\to M$．此处等价关系 R 的等价类，是指对 x 的**迷向子群** (fixed subgroup) $H_x=\{a\in G\mid ax=x\}$ 的左陪集．因此我们有一个 G 双射 $G/H_x\to M$．反之，对于 G 的任何子群 H，G/H 是可迁的左 G 集．可迁的 G 集也叫做 G 的**齐性空间** (homogeneous space)．

对于一族 G 集 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，直积集 $\prod_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda$ 及直和集 $\sum_{\lambda\in\Lambda}M_\lambda$ 以自然的方式成为 G 集；它们分别称为**直积 G 集** (direct product G-set) 及**直和 G 集** (direct sum G-set)．每一个 G 集 M 都是一族可迁子 G 集 $\{M_\lambda\}$ 的直和，这时每个 M_λ 都称为**轨道** (orbit) 或**可迁类** (system of transitivity)．对于 G 集 M，直积 G 集 $M^k=M\times\cdots\times M$ (k 个)包含子 G 集 $M^{(k)}=\{(x_1,\cdots,x_k)\mid i\neq j$ 蕴涵 $x_i\neq x_j\}$．如果 $M^{(k)}$ 是可迁的，则 M 称为 **k 重可迁的** (k-ply transitive)．如果 M 是可迁的，而且 M 的每个元的迷向子群都只含有单位元，则 M 称为**单可迁的** (simply transitive)．

当 M 有 n 个元时，群 G 在 M 内的置换表示叫做 **n 次** (degree) 的．当 G 是 M 的一个置换群时，典范单射 $G\to S_M$ 是一一的置换表示．这种情形已有详细的探讨(→有限群[置换群])．

【群和结合代数的线性表示】 设 K 是具有单位元 1 的交换环†，M 是 K 模†．虽然我们主要讨论 K 是域且 M 是 K 上的有限维线性空间†的情形，但 K 是整环且 M 是 K 上有限秩的自由模†的情形同样是重要的．因为 K 是交换的，所以可以写 $\lambda x=x\lambda$ $(\lambda\in K, x\in M)$．设 $\mathscr{E}_K(M)$ 是由 M 的全体 K 自同态(即 M 到 M 的线性映射)组成的 K 上的结合代数†，再设 $GL(M)$ 是 $\mathscr{E}_K(M)$ 中全体可逆元†组成的群，这里假定 $M\neq\{0\}$．设 A 是 K 上的结合代数．代数 A 在 M 内的**线性表示** (linear representation) 是指代数同态 $A\to\mathscr{E}_K(M)$．以下总假定 A 有单位元而且其同态是酉同态．为了方便起见，也可以讨论平凡空间 $M=\{0\}$ 内的线性表示，它称为**零表示** (zero representation)．**反线性表示** (reciprocal linear representation) 是指反同态 $A\to\mathscr{E}_K(M)$．群 G 在 M 内的线性表示是指群同态 $G\to$

$GL(M)$. 这可以唯一地扩张成群环† $K[G]$ 在 M 内的线性表示；反之，把 $K[G]$ 在 M 内的线性表示限制于 G 时就是 G 的线性表示；同样可以讨论反线性表示. 因而群 G 在 M 内的(反)线性表示的研究可以归之于群环 $K[G]$ 在 M 内的(反)线性表示的研究. 现在来讨论结合代数(以下简称"代数")的线性表示. (注意群环有个典范基——即这群本身——因而可作详细的讨论(→[有限群的线性表示], [有限群的模表示]).

给定具有单位元的交换环 K 和 K 代数 A 在 K 模 M 内的线性表示 ρ, 规定 $ax = \rho(a)x$ ($a \in A$, $x \in M$) 可以导出左 A 模到 M 的一个结构; M 内由典范同态 $K \to A$ 得到的 K 模结构与原先的 K 模结构相同. 这个 A 模称为 ρ 的**表示模** (representation module of ρ). 反之,对于任何左 A 模 M, 用 $\rho(a)x = ax$ 可以定义 A 在 M 内的线性表示 ρ (把 M 看做由 $K \to A$ 得到的 K 模); ρ 的表示模与原先的表示模相同. 这个表示 ρ 称为**与 M 相伴的线性表示** (linear representation associated with M). A 的反线性表示对应于右 A 模. 因而研究 A 的(反)线性表示等价于研究左(右) A 模. 例如,如果群 G 对 M 的作用是平凡的: $\sigma x = x$ ($\sigma \in G$, $x \in M$), 则 G 在 M 内的对应的表示使每个 $a \in G$ 都对应于恒等映射 1_M. 此外, 如果 $M = K$, 则这种表示称为 G (在 K 上)的**单位表示** (unit representation).

设 ρ, ρ' 分别是 A 在 K 模 M, M' 内的线性表示. 那么一个 A 同态 $M \to M'$ 明显地是满足条件 $f \circ \rho(a) = \rho'(a) \circ f$ ($a \in A$) 的一个 K 同态 $f: M \to M'$; 这有时叫做从 ρ 到 ρ' 的同态. 特别地, 一个 A 同构是满足条件 $f \circ \rho(a) \circ f^{-1} = \rho'(a)$ ($a \in A$) 的一个 K 同构 $f: M \to M'$; 在这种情形我们说 ρ 和 ρ' 是**相似的** (similar)或**同构的** (isomorphic), 记作 $\rho \cong \rho'$.

设 M 是代数 A 的线性表示 ρ 的表示模. 如果 ρ 是单射,则说 ρ 和对应的 M 是**一一的**(faithful). 举例说, 与左 A 模 A 相伴的线性表示是一一的, 称它为 A 的 **(左) 正则表示**((left) regular representation). 如果 M 作为 A 模是单的†, 则 ρ 称为**不可约的** (irreducible)或**单的**(simple). 从不可约表示 ρ 到 ρ 的同态必是同构或零同态 (**Schur 引理** (Schur's lemma)). 特别地,如果 K 是代数闭域,而且 M 是有限维的,则这种同态是纯量乘法. 如果一个线性表示不是不可约的,则它就称为**可约的** (reducible). 如果 M 作为 A 模是半单的†,则 ρ 称为**完全可约的**(completely reducible)或**半单的** (semisimple). 如果 A 是半单环, 则 A 的任何线性表示都是完全可约的. 逆定理也成立(→环[半单环]).

与 M 的作为 A 模的子模或商模相伴的线性表示分别叫做**子表示** (subrepresentation) 或**商表示**(quotient representation). 与线性表示 $\rho_1, \cdots, \rho_r$ 的表示模 $M_1, \cdots, M_r$ 的直和 $M_1 + \cdots + M_r$ 相伴的线性表示记做 $\rho_1 + \cdots + \rho_r$, 而且称为这些表示的**直和表示**(direct sum representation). 如果 ρ 不相似于两个非零表示的直和, 则 ρ 称为**不可分解的** (indecomposable); 这也就是说 M 作为 A 模是不可分解的†.

对于群 G 在 M, M' 内的线性表示 ρ, ρ', 在 $M \otimes M'$ 内可以由 $(\rho \otimes \rho')(g) = \rho(g) \otimes \rho'(g)$ ($g \in G$) 来定义线性表示 $\rho \otimes \rho'$; 这称为表示 ρ 和 ρ' 的**张量积表示**(tensor product representation).

【矩阵表示】 设 K^n 是以交换环 K 的元为元的全体 n 元组(ξ_i)构成的 K 模. $\mathscr{E}_K(K^n)$ 等同于 K 上的全体 n 阶矩阵 (λ_{ij}) 的 K 代数 $M_n(K)$: $(\lambda_{ij})(\xi_j) = \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\xi_j\right)$. 于是 A 在 K^n 内的线性表示,即同态 $A \to M_n(K)$, 称为 A 在 K 上的**矩阵表示** (matricial representation), n 称为它的**次数** (degree). 群 G 在 K 上的 n 次矩阵表示是一个同态 $G \to GL(n, K)$, 这里 $GL(n, K)$ 是全体 n 阶可逆矩阵的群. 如果 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 K 模 M 的基†, 则根据由对应 $(\xi_i) \to \sum_{i=1}^{n} e_i\xi_i$ 所给出的 K 同构 $K^n \to M$, 我们得到在 A 的 n 次矩阵表示和 A 在 M 内的线性表示之间的一一对应, 而且对应的表示是相似的. 具体地说, 线性表示 ρ 对应于矩阵表示 $a \to (\lambda_{ij}(a))$

的对应关系是

$$\rho(a)e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i \lambda_{ij}(a), \quad a \in A.$$

因此给定域K上有限维线性表示就等价于给定K上的矩阵表示. 设T, T'是次数分别为n, n'的矩阵表示, 则从T到T'的同态就是使$PT(a) = T'(a)P\ (a \in A)$的$(n', n)$矩阵$P$. 因此, T和T'相似当且仅当$n = n'$并且存在n阶可逆矩阵P, 使得$PT(a)P^{-1} = T'(a)\ (a \in A)$. 对于群$G$的表示而言, 只要上述方程被所有$a \in G$所满足就够了.

以下总假定K是域. 于是K模就是K上的线性空间. K代数A在K上的线性表示ρ为n**次**(degree)的, 是指它在K上的表示模M是n维的. 假如给定M的子A模的序列$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$. 取$M$在$K$上的基$(e_1, \cdots, e_n)$, 使得$(e_1, \cdots, e_{m_i})$是$M_i$在$K$上的基$(1 \leqslant i \leqslant r)$. 那么对应于$\rho$的矩阵表示相对于基$(e_1, \cdots, e_n)$具有形状

$$a \to T(a) = \begin{pmatrix} T_{11}(a) & T_{12}(a) & \cdots & T_{1r}(a) \\ & T_{22}(a) & \cdots & T_{2r}(a) \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & T_{rr}(a) \end{pmatrix}$$

这里如果令$n_i = \dim M_i/M_{i-1} = m_i - m_{i-1}$, 则$T_{ij}(a)$是$(n_i, n_j)$矩阵, 而且当$i > j$时, $T_{ij}(a) = 0$. $e_{m_{i-1}+1}, \cdots, e_{m_i}$的剩余类组成$K$上的商空间$M_i/M_{i-1}$的基, 而且对应于与$M_i/M_{i-1}$相伴的线性表示$\rho_i$的矩阵表示, 相对于这个基由$T_{ii}$给出. 序列$\{M_i\}$是合成列[†]当且仅当每个$\rho_i$(因而$T_{ii}$)都是不可约的. 在这种情形下, $\rho_1, \cdots, \rho_r$除先后顺序并可相差一个相似关系外, 由ρ唯一决定 (Jordan-Hölder定理[†]). 与某个ρ_i相似的不可约表示ρ'称为ρ的**不可约分支** (irreducible component). 相似于ρ'的ρ_i的个数$p > 0$称为ρ的不可约分支ρ'的**重数**(multiplicity). 也可以说ρ包含ρ' p次或ρ'在ρ中作为不可约分支出现p次. 一个表示ρ完全可约当且仅当它相似于它的不可约分支(允许重复)的直和. 这时ρ相似于矩阵表示

$$a \to \begin{pmatrix} T_{11}(a) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_{rr}(a) \end{pmatrix}.$$

【线性表示的系数与特征标】 现在来讨论域K上的代数A的线性表示. 右(左)A模M可以看作K上的线性空间. 在它的对偶空间M^*内, 可以利用内积$\langle , \rangle$如下地引入左(右)A模结构: $\langle x, ax^* \rangle = \langle xa, x^* \rangle$ (或$\langle x, x^*a \rangle = \langle ax, x^* \rangle$), 这里$a \in A$, $x \in M$, $x^* \in M^*$. 如果ρ是与M相伴的表示, 则与M^*相伴的表示称为ρ的**转置表示** (transposed representation) 或**对偶表示** (dual representation) 或**伴随表示** (adjoint representation), 记作${}^t\rho$. 线性映射${}^t\rho(a)$是$\rho(a)$的转置映射[†]. 如果M在K上是有限维的, 则作为A模我们有$(M^*)^* = M$. 对于群G的线性表示ρ, 映射$g \to {}^t\rho(g)^{-1}\ (g \in G)$称为$\rho$的**逆步表示** (contragredient representation). 与右A模A相伴的反线性表示称为A的**右正则表示** (right regular representation), 而它的转置表示(即与左A模A^*相伴的线性表示)则称为**上正则表示**(coregular representation). 对于任何有限维的半单代数和有限群的群环, 正则表示和上正则表示是相似的(→代数 [Frobenius 代数]).

设ρ是A在K上的线性表示而且M是它的表示模. 对于任意的$x \in M$, $x^* \in M^*$, 定义A上的一个线性型[†] $\rho_{x,x^*} \in A^*$为: $\rho_{x,x^*}(a) = \langle ax, x^* \rangle\ (a \in A)$. 这称为$\rho$相对于$x$, x^*的**系数** (coefficient), 而且由它在A(作为线性空间)的生成元上的值决定. 特别地, 群G的线性表示ρ的系数可以看作G上的在K内取值的函数. 对于固定的$x^* \in M^*$, 对应$x \to \rho_{x,x^*}$给出A同态$M \to A^*$, 这里A^*看作左A模. 因此, 不可约表示ρ的任意非零系数ρ_{x,x^*}生成A^*的一个同构于M的子A模. 换句话说, A的任意不可约表示相似于A的上正则表示的某个子表示. 特别地, 一个有限维半单代数或一个有限群的任意不可约表示是正则表示的一个不可约分支. 设A_ρ^*是A^*的子空间, 它由给定的线性表示ρ的全体系数$\rho_{x,x^*}\ (x \in M, x^* \in M^*)$生成. 于是$\rho \cong \rho'$蕴涵$A_\rho^* = A_{\rho'}^*$. 如果$\rho_1, \cdots, \rho_r$是$A$的互不相似的不可约表示,

则和 $A^*_{\rho_1}+\cdots+A^*_{\rho_r}$ 在 A^* 内是直和. 特别地，对于半单代数 A，设 $\rho_i\ (l\leqslant i\leqslant r)$ 是不可约表示，它与 A 的单分支† A_i 的极小左理想相伴，则任意不可约表示恰好与 $\rho_1,\cdots,\rho_r$ 中的一个相似，而且 A^* 可以分解成 $A^*_{\rho_1},\cdots,A^*_{\rho_r}$ 的直和. 此外，每个 $A^*_{\rho_i}$ 与 A_i^* 是典范等同的.

以下专门处理有限维表示. 设 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 ρ 在 K 上的表示模 M 的基，对应于 ρ 的相对于这个基的矩阵表示是 $a\to T(a)=(\lambda_{ij}(a))$，则 $\lambda_{ij}=\rho_{e_j,e_i^*}\ (1\leqslant i,j\leqslant n)$，这里 $(e_1^*,\cdots,e_n^*)$ 是对偶基. 如果 K 是代数封闭的，而且 ρ 是不可约的，或更一般地是绝对不可约的†，则 $\{\lambda_{ij}\}$ 是线性无关的；因此有 $\dim A^*_\rho=n^2$ (G. Frobenius-I. Schur). 设 ρ 是任意的有限维线性表示，取对应于 ρ 的矩阵表示 T 而且令 $T(a)$ 的迹† 为 $\chi_\rho(a)=\mathrm{tr}\,T(a)=(a\in A)$，则 χ_ρ 是 A 上的函数，它由 ρ 唯一决定而且属于 A^*_ρ；χ_ρ 称为 ρ 的**特征标** (character). 对于群 G 的线性表示 ρ 而言，ρ 的特征标可以看做 G 上的函数. 再有，它还可以看作 G 的全体共轭类† 的集合上的函数. ρ 的特征标等于 ρ 的不可约分支（各按其重数）的特征标之和. 不可约表示的特征标称为**不可约特征标** (irreducible character) 或**单特征标** (simple character). 如果 K 的特征为 0，则 $\rho\cong\rho'$ 等价于 $\chi_\rho=\chi_{\rho'}$，而且不同的不可约特征标是线性无关的. 绝对不可约表示（见后）的特征标称为**绝对不可约特征标** (absolutely irreducible character). 如果只讨论绝对不可约特征标，则上面论断的成立与 K 的特征无关.

A 的全体绝对不可约特征标的和称为 A 的**简化特征标**(reduced character)或**缩减迹**(reduced trace). A 的全体绝对不可约表示的直和表示称为 A 的**简化表示** (reduced representation)，而且它的特征标就等于简化特征标. 简化表示的行列式称为 A 的**简化范数**或**缩减范数** (reduced norm).

【线性表示的纯量扩张】 设 K, L 是具有单位元的交换环，固定一个同态 $\sigma:K\to L$. 用 M^σ 表示 K 模 M 相对于 σ 的纯量扩张 $\sigma^*(M)=M\otimes_K L: x\lambda\otimes\mu=x\otimes\lambda^\sigma\mu(x\in M;\lambda\in K,\mu\in L)$ (→模[系数环的扩张和限制]). 对于 K 上的代数 A，K 模 A 的纯量扩张 A^σ 具有 L 上的代数的自然结构：$(a\otimes\lambda)(b\otimes\mu)=ab\otimes\lambda\mu(a,b\in A;\lambda,\mu\in L)$. 对于群 G、可以认为 $(K[G])^\sigma=L[G]:g\otimes\lambda=g^\lambda(g\in G,\lambda\in L)$. 如果 M 是左 A 模，则 M^σ 具有左 A^σ 模的自然结构：$(a\otimes\lambda)(x\otimes\mu)=ax\otimes\lambda\mu\ (a\in A,\ x\in M;\ \lambda,\mu\in L)$. 对于与 M 相伴的线性表示 ρ 而言，与 M^σ 相伴的 L 上的线性表示 ρ^σ 称为 ρ 相对于 σ 的**纯量扩张** (scalar extension)：$\rho^\sigma(a\otimes 1)=\rho(a)\otimes 1_L$. 设 $(e_1,\cdots,e_n)$ 是 M 在 K 上的基. 如果相对于这个基的对应于 M 的矩阵表示是 $a\to(\lambda_{ij}(a))$，则相对于 L 上的基 $(e_1\otimes 1,\cdots,e_n\otimes 1)$ 的对应于 M^σ 的矩阵表示由 $a\otimes 1\to(\lambda_{ij}(a)^\sigma)$ 给定. 如果 L 上的一个线性表示与 K 上的某个线性表示 ρ 的纯量扩张 ρ^σ 相似，则它称为**可实现的** (realizable).

特别地，如果 $\sigma:K\to L$ 是同构，则 ρ^σ 称为 ρ 相对于 σ 的**共轭表示**(conjugate representation). 当 K 是复数域时，相对于自同构 $\sigma:\lambda\to\bar\lambda$（共轭复数）的共轭表示称为**复共轭表示**. 如果 $\mathfrak{m}$ 是 K 的一个理想而且 $\sigma:K\to K/\mathfrak{m}$（剩余类环†）是典范同态，则从 ρ 作出 ρ^σ 称为**模 $\mathfrak{m}$ 的简化** (reduction modulo $\mathfrak{m}$)（→[有限群的模表示]）. 如果 $\mathfrak{p}$ 是 K 的素理想而且 $\sigma: K\to K_\mathfrak{p}$（局部环†）是典范同态，则从 ρ 作出 ρ^σ 称为相对于 $\mathfrak{p}$ 的**局部化** (localization). 如果 K 是整环而且 $\mathfrak{p}=K-\{0\}$，则 $K_\mathfrak{p}$ 是 K 的商域†. 我们也可以讨论相对于 $\mathfrak{p}$ 的"表示的完备化".

设 K 是域，L 是 K 的扩张域，而且 $\sigma:K\to L$ 是典范单射. 这时对于 A 的线性表示 ρ 和它的表示模 M，纯量扩张 ρ^σ, M^σ 分别记做 ρ^L, M^L. 基于自然单射认为 $M\subset M^L$, $A\subset A^L$, $\mathscr{E}_K(M)\subset\mathscr{E}_L(M^L)$，可以把 ρ^L 看作映射 ρ 的扩张. 以下专门讨论有限维表示. 对于 K 上的线性表示 ρ_1,ρ_2, $\rho_1\cong\rho_2$ 等价于 $\rho_1^L\cong\rho_2^L$. 如果 K 上的不可约表示 ρ 对任何扩张域 L 的纯量扩张 ρ^L 是不可约的，则 ρ 称为**绝对不可约的** (absolutely irreducible)；与之等价的条件是：对 K 的代数闭包† $\bar K$ 的纯量扩张 $\rho^{\bar K}$ 是不可约的.

另一个等价条件是：ρ 的表示模M的每一个自同态必定是由K的元所作的纯量乘法．如果A在K上的每一个不可约表示都是绝对不可约的，则K称为A的**分裂域**（splitting field）．对于群G，如果域K对于群环$K[G]$是分裂域，则K称为G的分裂域．设A在K上是有限维的．如果K是A的分裂域，则对于K的任何扩张域L，A^L的任何不可约表示都是在K内可实现的．对于任何域K（不一定是分裂域），不可约表示ρ对K的可分†代数扩张域L的纯量扩张ρ^L是完全可约的．为简单起见，假定K是完全域而且$L=\bar{K}$，那么ρ^L的全体不可约分量的重数是相同的，这个重数称为ρ的 **Schur 指数**（Schur's index）．

设K上的每个代数类都由某个有限群G的群代数$K[G]$的一个(中心)单分支来表示，那么这些代数类的集合$S(K)$是K的 Brauer 群† $B(K)$的子群，它称为$B(K)$的 **Schur 子群**（Schur's subgroup）．最近的研究已极大地辨明了这个群的结构(→[24])．

【有限群的线性表示】 设G是阶为g的有限群．G在K上的线性表示等价于群环$K[G]$的线性表示，关于后者已经介绍过一般的事实．如果K是有理整数环 $\mathbf{Z}$，则K上的线性表示有时称为**整数表示**（integral representation）．以下假定K是域．如果K的特征是0，或更一般地不是g的约数，则G在K上的每个线性表示都是完全可约的（H. Maschke）．这种表示称为**通常表示**（ordinary representation）．如果g被K的特征整除，得到的就是**模表示**（modular representation）(→[有限群的模表示])．

对于每一个$a\in G$都满足$a^n=1$的最小正整数n称为G的**指数**（exponent）．含有1的全部n次根的域是G的分裂域（R. Brauer, 1945）．因此，对于这样的域K而言，K上的不可约表示的任何纯量扩张是不可约的，而且在K的任何扩张域上的不可约表示在K内是可实现的．下面固定G的一个分裂域K，而且假定K的特征为0，例如可以假定$K=\mathbf{C}$．

G的互不相似的不可约表示的个数等于G内共轭类的个数．作为正则表示内的不可约分量而出现的每个不可约表示的重数等于次数．再有，每个次数都是G的阶g的约数．设ρ是G的子群H的线性表示，且M是它的表示模，则与$K[G]$模$K[G]\otimes_{K[H]}M$相伴的G的线性表示称为**诱导表示**（induced representation），记作ρ^G．如果矩阵表示T对应于ρ，则利用G的陪集分解$G=a_1H\cup\cdots\cup a_rH$，对应于$\rho^G$的矩阵表示可写为

$$a\to\begin{pmatrix}T(a_1^{-1}aa_1) & \cdots & T(a_1^{-1}aa_r)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ T(a_r^{-1}aa_1) & \cdots & T(a_r^{-1}aa_r)\end{pmatrix},$$

这里设$T(b)=0\ (b\notin H)$．从子群的1次表示得到的诱导表示称为**单项表示**（monomial representation）．对应于这种表示的矩阵表示T是这样的：对于每一个$a\in G$，$T(a)$的每一行和每一列恰好只有一个非零元．对于平凡子群$H=\{e\}$，就得到G的正则表示．一般地说，对于G的不可约表示σ和子群H的不可约表示ρ，σ在ρ^G中的重数与ρ在σ_H中的重数相同，这里σ_H是σ在H上的限制（**Frobenius 定理**）．

对于G的不可约特征标χ和ϕ，有下列**正交关系**（orthogonality relation）成立：

$$\sum_{a\in G}\chi(a)\phi(a^{-1})=\begin{cases}g, & \chi=\phi,\\ 0, & \chi\neq\phi,\end{cases}$$

$$\sum_{\chi}\chi(a)\chi(b^{-1})=\begin{cases}g/g_a, & C(a)=C(b),\\ 0, & C(a)\neq C(b).\end{cases}$$

在第二个公式中，χ取遍G的全体不可约特征标，$C(a)$表示G的含有a的共轭类，g_a是$C(a)$中元的个数．

【对称群的线性表示】 对称群† $\mathfrak{S}_n$在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的不可约表示是绝对不可约的．因此，$\mathfrak{S}_n$在特征为0的域上的表示理论归结为它在 $\mathbf{Q}$ 上的表示理论．因为群代数$A=\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_n]$是半单的，为了得出$\mathfrak{S}_n$的不可约表示，只需找出$A$的本原幂等元（即不是两个正交的非零幂等元之和的幂等元）．这种幂等元可以用以下的方法得出．

图1(左)画的是由n个方块组成的图形T，它的各行的长度递减，各行的左端在同一列

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14		
15	16	17	18	19	20		
21	22	23	24				
25	26						

图 1 Young 图形

$n=26$; $f_1=8$, $f_2=6$, $f_3=6$, $f_4=4$, $f_5=2$

上排齐，这样的图形 T 叫做**Young图形**(Young's diagram). 如果有 k 行，各行的长度是 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ 的 Young 图形，$f_1, f_2, \cdots, f_k$ 满足

$$f_1 \geqslant f_2 \geqslant \cdots \geqslant f_k > 0,$$

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = n,$$

则记 $T = T(f_1, \cdots, f_n)$. 把从 1 到 n 各个数码按任意顺序填入 $T = T(f_1, \cdots, f_k)$ 的方块中，象图 1 (右) 所画的那样. 然后用 σ 表示 $\mathfrak{S}_n$ 中保持每一行的数码不变的任意置换，而且作 A 的元 $s = \Sigma\sigma$. 同样地，用 τ 表示 $\mathfrak{S}_n$ 中保持每一列不变的置换而且令 $t = \Sigma(\operatorname{sgn}\tau)\tau$. 然后令

$$u = t \cdot s = \Sigma \pm \tau \cdot \sigma,$$

那么 u 的适当有理数倍就是 A 的本原幂等元. 由此可知 u 产生 $\mathfrak{S}_n$ 的一个不可约表示. A 的元 u 称为与 T 相伴的 **Young 对称子** (Young's symmetrizer).

如果把数码 1 到 n 换一个顺序填到 T 中，就得到与 T 相伴的另一个对称子 u'. 但是与 u 和 u' 相伴的两个不可约表示是相似的. 因此，与 T 对应的是 $\mathfrak{S}_n$ 的一个固定的不可约表示类，即 $\mathfrak{S}_n$ 的一个固定的不可约特征标. 再有，任何两个不同的 Young 图形产生不同的不可约的特征标，而且任何不可约特征标都可以从适当的 Young 图形得出. 因而在 Young 图形和 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约特征标之间存在一一对应.

决定与一个已知图形相伴的特征标的方法是由 Schur 和 H. Weyl 发现的 (→典型群).

【有限群的模表示】 设 G 是阶为 g 的有限群，而且 K 是 G 的特征为 $p \neq 0$ 的分裂域. 如果 p 是 g 的约数，这就是与通常表示颇有不同的模表示的情形. 有限群的模表示的理论是在 1935 年以后主要由 Brauer 发展起来的，他得到了这方面的许多重要结果.

若 G 的一个元的阶与 p 互素，则这个元称为 **p 正则的**(p-regular). 设 k 是 G 的 p 正则类的个数，即 G 中含有 p 正则元的共轭类的个数，则恰好存在 k 个不相似的绝对不可约模表示 $F_1, F_2, \cdots, F_k$. G 的正则表示 R 的不相似的不可分解的分量的个数也等于 k，我们把这些表示记作 $U_1, U_2, \cdots, U_k$. 我们可以这样地编号，使 F_κ 在 U_κ 内同时作为首末两个分量而出现. 如果 F_κ 的次数是 f_κ，U_κ 的次数是 u_κ，则 U_κ 在 R 内出现 f_κ 次，而且 F_κ 在 R 内出现 u_κ 次. F_λ 在 U_κ 内出现的重数 $c_{\kappa\lambda}$ 称为 G 的 **Cartan 不变量** (Cartan invariants).

设代数数域 Ω 是 G 的分裂域. 设 $\mathfrak{p}$ 是 Ω 中整除 p 的一个素理想，再设 $\mathfrak{o}$ 是 Ω 中全体 $\mathfrak{p}$ 整数组成的整环，则剩余类域 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 是特征为 p 的有限域†而且是 G 的分裂域. 因此可以假设 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p} = K$，这里 K 是在本节开始时考虑的域. 设 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 是 G 在 Ω 内的不相似的不可约表示. 可以假设 Z_i 的所有系数都属于 $\mathfrak{o}$. 在 Z_i 中把每一个系数都换成它 $\operatorname{mod} \mathfrak{p}$ 的剩余类，就得到模表示 $\bar{Z}_i$. 这样得到的模表示 $\bar{Z}_1, \cdots, \bar{Z}_n$ 可以是可约的. F_κ 在 $\bar{Z}_i$ 中的重数 $d_{i\kappa}$ 称为 G 的**分解数**(decomposition numbers). 它们与 Cartan 不变量之间有下列关系式:

$$c_{\kappa\lambda} = \sum_{i=1}^{n} d_{i\kappa} d_{i\lambda}.$$

又 k 阶行列式 $|c_{\kappa\lambda}|$ 是 p 的一个幂. 设 $g = p^e g'$，$(p, g') = 1$，则可假定 Ω 含有 1 的 g' 次元根 $\delta(\in \mathfrak{o})$. 因为 $(p, g') = 1$，所以 $\delta \operatorname{mod} \mathfrak{p}$ 的剩余类 $\delta(\in K)$ 是 1 的 g' 次元根. 设 M 是 G 的模表示，则对于 p 正则元 a，$M(a)$ 的特征根是 δ 的幂 δ^ν. 若把每个 δ^ν 换成 δ^ν 而作这些 δ^ν 的和，就得到 Ω 的元 $\xi(a)$. 这样一来，我们在 G 的 p 正则元的集合上定义了一个复值函数 ξ. 我们把 ξ 称为 M 的**模特征标** (modular character) 或 **Brauer 特征标**(Brauer character). 两个模表示有相同的不可约分量的充分必要条件是它们的模特征标相同. 把 F_κ 的模特征标记做 φ_κ 而且把 U_κ 的模特征标记作 η_κ，下列关于模特征标的正交关系成立:

$$\sum_{a} \varphi_\kappa(a)\eta_\lambda(a^{-1}) = \begin{cases} g, & \kappa = \lambda, \\ 0, & \kappa \neq \lambda. \end{cases}$$

$$\sum_{\kappa} \varphi_\kappa(a)\eta_\kappa(b^{-1}) = \begin{cases} g/g_a, & C(a) = C(b), \\ 0, & C(a) \neq C(b). \end{cases}$$

在第一个和式内，a 取遍 G 的全部 p 正则元.

我们说 F_κ 和 F_λ 属于同一**块** (block)，如果存在指标序列 $\kappa, \alpha, \beta, \cdots, \gamma, \lambda$，使 $c_{\kappa\alpha} \neq 0$，$c_{\alpha\beta} \neq 0$，$\cdots$，$c_{\gamma\lambda} \neq 0$. 这显然是一个等价关系，而且 $F_1, F_2, \cdots, F_k$ 被分成有限个 (s 个)块 $B_1, B_2, \cdots, B_s$. 如果 F_κ 属于块 B_τ，为简短起见也说对应的 U_κ 属于块 B_τ. 因为当 $d_{i\kappa} \neq 0$ 和 $d_{i\lambda} \neq 0$ 时有 $c_{\kappa\lambda} \neq 0$，所以 $\bar{Z}_i$ 的全部不可约分量属于同一个块. 如果 $\bar{Z}_i$ 的不可约分量属于 B_τ，则也说 Z_i 属于 B_τ. 设 x_τ 是属于 B_τ 的 Z_i 的个数，y_τ 是属于 B_τ 的 F_κ 的个数，则 $x_\tau \geqslant y_\tau$. 如果 χ_i 是 Z_i 的通常特征标，则 χ_i 可以看作 $\bar{Z}_i$ 的模特征标. 如果把 Z_i 的次数记作 z_i，则对于 $a \in G$，$g_a\chi_i(a)/z_i$ 是代数整数，因而属于 $\mathfrak{o}$. 于是 Z_i 和 Z_j 属于同一块的充分必要条件是 $g_a\chi_i(a)/z_i \equiv g_a\chi_j(a)/z_j \pmod{\mathfrak{p}}$ 对于 G 的所有 p 正则元 a 都成立.

如果 p^α 是能整除属于 B_τ 的所有 Z_i 的次数 z_i 的 p 的最高幂，则它也是整除属于 B_τ 的所有 F_κ 的次数 f_κ 的 p 的最高幂. $d = e - \alpha$ 称为 B_τ 的**亏值** (defect)；显见 $0 \leqslant d \leqslant e$. 如果 Z_i 属于亏值为 d 的块，则整除 z_i 的 p 的幂是 $p^{e-d+h_i} (h_i \geqslant 0)$. 亏值为 0 的块恰好包含一个通常的表示 Z_i，因此也恰好只有一个模表示 $F_\kappa (x_\tau = y_\tau = 1)$. 我们还有 $\bar{Z}_i = F_\kappa = U_\kappa$. 由此推出属于亏值为 1 的块的所有 Z_i 的次数 z_i 恰好能被 p^{e-1} 整除；反之亦然. Z_i 属于亏值为 0 的块的充分必要条件是：对于 G 中其阶能被 p 整除的任何元 a，都有 $\chi_i(a) = 0$.

设 D 是 G 的元 a 的中心化子[†] $C_G(a)$ 的任意 p-Sylow 子群，且 $(D:1) = p^d$，则 d 称为共轭类 $C(a)$ 的**亏值**，D 称为 $C(a)$ 的**亏群** (defect group). 亏值为 e 的块的个数等于亏值为 e 的 p 正则类的个数. 设 B_τ 是亏值为 d 的块，则存在亏值为 d 的 p 正则类，它含有元素 a，使得 $g_a\chi_i(a)/z_i \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ 对于 B_τ 中的任何 Z_i 都成立. $C(a)$ 的亏群 D 称为 B_τ 的**亏群**，而且 D 在 G 内除相差共轭关系外是唯一决定的. G 中具有亏群 D 的块的个数等于正规化子[†] $N_G(a)$ 中具有亏群 D 的块的个数.

G 的任意元 x 可以唯一地写成乘积 $x = sr = rs$，这里 s 称为 x 的 **p 因子** (p-factor)，它是阶为 p 的幂的元素，r 是 p 正则元. 我们称 G 的两个元属于同一**截口** (section)，如果它们的 p 因子在 G 内共轭. 这是一个等价关系. 显然每一截口是 G 的共轭类的并. 如果 x 的 p 因子不共轭于 B_τ 的亏群 D 的任何元，则对于 B_τ 内所有的 Z_i 都有 $\chi_i(x) = 0$. 设 $\varphi_1^s, \varphi_2^s, \cdots, \varphi_{k(s)}^s$ 是 $C_G(s)$ 的绝对不可约的模特征标，x_l^s 是 $C_G(s)$ 的绝对不可约的通常特征标. 那么因为

$$\chi_l^s(sr) = \varepsilon_l \chi_l^s(r) = \varepsilon_l \sum_{\sigma} d_{l\sigma}^s \varphi_\sigma^s(r),$$

$$r \in C_G(s),$$

所以有

$$\chi_i(sr) = \sum_{l} r_{il}\chi_l^s(sr) = \sum_{\sigma} d_{i\sigma}^s \varphi_\sigma^s(r).$$

$d_{i\sigma}^s$ 称为 G 的**广义分解数** (generalized decomposition number). 如果 s 的阶是 p^t，则 $d_{i\sigma}^s$ 是 1 的 p^t 次根的域中的代数整数. 设 s 共轭于 D 的一个元，则对应于 B_τ 的有 $C_G(s)$ 的一些块的并 $\widetilde{B}_\tau$，而且如果 $\tau \neq \rho$，则 $\widetilde{B}_\tau$ 和 $\widetilde{B}_\rho$ 不包含共同的不可约的模表示. 这时下述重要结果成立：对于 B_τ 内的任意 Z_i 有 $d_{i\sigma}^s = 0$ (即 $\varphi_\sigma^s \notin \widetilde{B}_\tau$). Brauer 关于这个结果的原始证明相当复杂；比较简捷的证明是由飯塚健三和永尾汎独立给出的. 从这些关系式可以得出群特征标的正交关系的下列精密化. 如果 Z_i 和 Z_j 属于 G 的不同的块，则

$$\sum_{a \in S} \chi_i(a)\chi_j(a^{-1}) = 0,$$

这里 a 取遍属于 G 的固定截口 S 的所有元. 如果 a 和 b 是属于 G 的不同截口的元，则

$$\sum_{\chi_i} \chi_i(a)\chi_i(b^{-1}) = 0,$$

这里 χ_i 取遍 G 的属于固定块 B_τ 的所有特征

标.

【有限群的射影表示】 设V是域K上的有限维线性空间，再设$P(V)$是与V相伴的射影空间†(→射影几何学). $P(V)$的所有射影变换†组成一个群$PGL(V)$，它可以与商群$GL(V)/K^*1_V$等同起来. 这里$K^*=K-\{0\}$，而K^*1_V是V的恒等变换1_V的全体纯量乘法的集合，因而是$GL(V)$的中心. 同态$G\to PGL(V)$称为G在V内的**射影表示**(projective representation)或简称G在K上的射影表示. G的两个射影表示(ρ,V)和(ρ',V')称为**相似的**(similar)，如果存在由适当的同构$V\to V'$诱导出的同构$\varphi:\rho GL(V)\to PGL(V')$，使得$\varphi\circ\rho(a)\circ\varphi^{-1}=\rho'(a)\ (a\in G)$. 设$V_1\neq\{0\}$是$V$的子空间，我们可以假定$P(V_1)\subset P(V)$. 如果$(\rho,V)$是$G$的射影表示，使得每个$\rho(a)\ (a\in G)$都保持$P(V_1)$不变，则只要把$\rho(a)$限制在$P(V_1)$上就得出一个射影表示$(\rho_1,V_1)$，它称为$\rho$的**子表示**(subrepresentation). 如果射影表示ρ没有真子表示，则它称为**不可约的**(irreducible).

映射$\sigma:G\to GL(V)$称为(ρ,V)的截口，如果对于每个$a\in G$都有$\pi(\sigma(a))=\rho(a)$，这里π是从$GL(V)$到$PGL(V)$上的自然射影. 任何截口σ决定一个映射$f:G\times G\to K^*$，满足$\sigma(a)\sigma(b)=f(a,b)\sigma(ab)(a,b\in G)$. 集合$\{f(a,b)\}_{a,b\in G}$称为$\rho$相对于$\sigma$的**因子组**(factor set). 映射$f$是$G$的具有$K^*$内的值的2维上闭链†. f的2维上同调类$c_\rho\in H^2(G,K^*)$由ρ决定而与截口σ的选取无关. 射影表示ρ具有这样一个截口σ，使得σ是G在V内的线性表示，其充分必要条件是$c_\rho=1$. 如果G是有限群，则对于任意的$c\in H^2(G,K^*)$，存在G在K上的不可约射影表示ρ，它属于c，即$c_\rho=c$. 如果ρ和ρ'是相似的，则$\rho=\rho'$. 两个射影表示ρ和ρ'的张量积$\rho\otimes\rho'$可以与线性表示的情形同样地定义，而且有$c_{\rho\otimes\rho'}=c_\rho\cdot c_{\rho'}$. 如果$K$是代数闭域，则$H^2(G,K^*)$由$K$的特征决定. 当$K$是复数域$\mathbf{C}$时，群$H^2(G,\mathbf{C}^*)=\mathfrak{M}(G)$称为$G$的**乘子群**(multiplier). 如果$\mathfrak{M}(G)=1$，则$G$称为**闭群**(closed group)，这时G的任何射影表示都可以由G的线性表示诱导出来. 一般地说，如果ρ是G在$\mathbf{C}$上的射影表示，则c_ρ的阶是ρ的次数(V的维数)的约数. 如果ρ是不可约的，则ρ的次数和c_ρ的阶的平方都是G的阶的约数. 山崎圭次郎和其他一些人对有限群的射影表示作了详细研究.

【整数表示】 G的每个复数矩阵表示等价于它在代数整数环内的一个矩阵表示. 如果取定一个代数数域K，则每一个$K[G]$模V包含G不变的R格†(简称G格)，这里R是由K中的整数组成的环. 一个G格L可以刻划为一个$R[G]$模，它是有限生成的，而且作为R模是无挠的†(因而是射影的†). 它提供G的一个**整数表示**(integral representation)作为R射影模L的一个自同构群.

即使$K[G]$模$K\otimes L$和$K\otimes M$同构，$R[G]$模L和M也不一定同构. 在一个固定的$K[G]$模V里的G格的集合分成有限个$R[G]$同构类(**Jordan-Zassenhaus 定理**). 设$\mathfrak{p}$是R的一个素理想，而$R_\mathfrak{p}$是R在$\mathfrak{p}$处的局部化. $R_\mathfrak{p}$表示的研究直接与模表示理论有关. 对于任何$R[G]$模L，存在与它相伴的一族$R_\mathfrak{p}[G]$模$L_\mathfrak{p}=R_\mathfrak{p}\otimes L$，这里$\mathfrak{p}$取遍$R$的全体素理想. $K[G]$模V里的G格L和M称为在同一个**亏格**(genus)内，如果对于每一个$\mathfrak{p}$都有$L_\mathfrak{p}\cong M_\mathfrak{p}$. V内的G格的亏格数等于$\prod_{\mathfrak{p}|g}h_\mathfrak{p}$ ($g=G$的阶)，这里$h_\mathfrak{p}$表示V内$R_\mathfrak{p}[G]$格的$R_\mathfrak{p}[G]$等价类的个数. 如果V是绝对不可约的，则在一个亏格内的$R[G]$等价类的个数等于K的(理想)类†数(J. M. Maranda-S. Takahashi(高橋秀一)).

如果R是完全离散赋值环，或如果R是离散赋值环而K是G的分裂域，则断言分解成不可分解的$R[G]$模的直和的唯一性的 Krull-Schmidt 定理†成立. 不同构的不可分解的G格个数有限的条件是已知的. 特别是，对于$R=\mathbf{Z}$，由此得出下列要求：G的 Sylow p子群对于每个$p\backslash g$都是p阶或p^2阶的循环群. 关于射影$\mathbf{Z}[G]$模，→同调代数.

同构问题 (isomorphism problem)，即什么情况下整群代数的同构 $Z[G]\cong Z[H]$ 蕴涵群的同构 $G\cong H$ 的问题，对于某些特殊的情形，例如亚 Abel 群† 等，已有肯定的回答.

$R[G]$ 在 $K[G]$ 内是一个 R 序†. 在这方面，整表示理论的一个值得注意的部分已被推广到可分代数中的更一般的序 (→[19]，[20]，[21]).

【参】 [1] 大島勝，群論，共立全書，1954；[2] 中山正-東屋五郎，代数学 II，岩波，1954；[3] 秋月康夫-鈴木通夫，高等代数学 II，岩波全書，1957；[4] 弥永昌吉-杉浦光夫，代数学，岩波，1960；[5] 浅野啓三-永尾汎，群論，岩波全書，1965；[6] B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Springer, 1935；[7] B. L. van der Waerden, Algebra II, Springer, 第四版，1960 (中译本：B. L. 范德瓦尔登，代数学 II，科学出版社，1976)；[8] H. Boerner, Darstellungen von Gruppen, Springer, 1955；[9] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Algèbre, chap 8, Actualités Sci. Ind., 1261a, Hermann, 1959；[10] C. W. Curtis-I. Reiner, Representation theory of finite groups and associative algebras, Interscience, 1962；[11] R. Brauer-C. J. Nesbitt, On the modular characters of groups, Ann. of Math., **42** (1941), 556—590；[12] R. Brauer, Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung I, II, Math. Z., **63** (1956), 406—444, **72** (1959), 25—46；[13] M. Osima (大島勝). Notes of blocks of group characters, Math. J. Okayama Univ., **4** (1955), 175—188；[14] I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math., **127** (1904), 20—50；[15] I. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math., **132** (1907), 85—137；[16] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math., **139** (1911), 155—250；[17] R. Brauer, Representations of finite groups (T. L. Saaty (ed.), Lectures on modern mathematics, vol. 1, John Wiley, 1963, p. 133—175)；[18] W. Feit, Characters of finite groups, Benjamin, 1967；[19] I. Reiner, A survey of integral representation theory, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 159—227；[20] R. Swan, K-theory of finite groups and orders, Lecture notes in math. 149, Springer, 1970；[21] K. W. Roggenkamp (with V. Huber-Dyson), Lattices over orders I, II, Lecture notes in math. 115, 142, Springer, 1970；[22] L. Dornhoff, Group representation theory, Marcel Dekker, A, 1971；B, 1972；[23] J.-P. Serre, Représentations linéaires des groupes finis, 第二版，Hermann, 1972；[24] T. Yamada (山田俊彦), The Schur subgroup of the Brauer group, Lecture notes in Math. 397, Springer, 1974.

酉表示 [英 unitary representation 法 représentation unitaire 德 unitär Darstellung 俄 унитарное представление 日 ユニタリ表現] 【各种定义】 拓扑群† G 到 Hilbert 空间† $\mathfrak{H}(\neq\{0\})$ 上的酉算子† 群的强连续同态 $U:g\to U_g\,(g\in G)$，称为 G 的**酉表示**. 所谓 U 为强连续，是指对于任意的 $x\in\mathfrak{H}$，映射 $g\to U_gx$ 是 G 到 $\mathfrak{H}$ 内的连续映射. $\mathfrak{H}$ 称为 U 的**表示空间** (representation space)，记为 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(U)$. 对于 G 的两个酉表示 U，U'，如果存在 $\mathfrak{H}(U)$ 到 $\mathfrak{H}(U')$ 上的一个等距算子 T，使得对于所有 $g\in G$，$T\circ U_g=U'_g\circ T$ 成立，则称它们是**等价的** (equivalent)，记为 $U\cong U'$. 如果对于所有的 $g\in G$，对 U_g 不变的 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(U)$ 的闭子空间仅限于 $\mathfrak{H}$ 与 $\{0\}$，则 U 称为**不可约的** (irreducible). 对于 G 的酉表示 U 的表示空间的元 x，当 $\{U_gx\mid g\in G\}$ 的有限线性组合的全体在 $\mathfrak{H}(U)$ 中稠密时，x 就称为**循环向量** (cyclic vector)，而具有循环向量的表示称为**循环表示** (cyclic representation). 若 U 是不可约的，则 $\mathfrak{H}(U)$ 中的任意非零元都是循环向量.

例：设群 G 是从右边作用在局部紧 Hausdorff 空间 X 上的拓扑变换群†，若 μ 是对群 G 不变的 Radon 测度†，则由公式 $(R^\mu_g f)(x)=f(xg)\ (f\in\mathfrak{H})$ 可定义 G 的一个酉表示 R^μ，它以 $\mathfrak{H}=L_2(X,\mu)$ 为表示空间. R^μ 称为 G 在 (X,μ) 上的**正则表示** (regular representation). 当 G 从左边作用于 X 上时，可根据 $(L^\mu_g f)(x)=f(g^{-1}x)$ 定义正则表示 L^μ. 特别地，当 X 是局部紧群 G 对它的闭子群 H 的商空间† $H\backslash G$ 时，由于 X 上的两个 G 不变测度 μ，μ' (如果它们存在)至多相差常数倍，所以 (X,μ) 上的正则表示 R^μ 与 (X,μ') 上的正则表示 $R^{\mu'}$ 是等价的. 这时 R^μ 或 $R^{\mu'}$ 就简单地称为 X 上的正则表示. 特别在 $H=\{e\}$ 的情形，由于在局部紧群 G 上存在在右(左)平移 $h\to hg\ (h\to gh)$ 下不变的测度，即右(左)不变 Haar 测度†，所以 G 具有在 G 上的正则表示 $R(L)$. 这称为 G 的右(左)**正则表示**.

【正定函数与表示的存在】 拓扑群 G 上的复值连续函数 $\varphi(g)$ 称为 G 上的**正定函数** (po-

sitive definite function),如果对于G的任意有限个元$g_1, g_2, \cdots, g_n$,以$\varphi(g_i^{-1}g_j)$为(i,j)元素的矩阵是半正定 Hermite 矩阵†. 如果U是G的酉表示,则对于任意的$x\in\mathfrak{H}(U)$,函数$\varphi(g)=(U_gx,x)$是G上的正定函数. 反之,局部紧群G上的任一正定函数φ,可以通过G的某个酉表示U和$x\in\mathfrak{H}(U)$表示成$\varphi(g)=(U_gx,x)$. 根据这个事实以及 Крейн-Мильман 定理†,可以证明任意的局部紧群G具有**充分多的**(sufficiently many)不可约酉表示. 即对于G中每一个与单位元e不同的元g,存在G的不可约酉表示U(与g有关),使得$U_g\neq 1$. 特别是,具有充分多的有限维不可约酉表示的群G是极大殆周期群†. 若G是连通局部紧极大殆周期群,则G是一个紧群与$\boldsymbol{R}^m$的直积. 另一方面,非紧的任意连通单 Lie 群没有单位表示†以外的有限维酉表示(→殆周期函数).

【子表示】 对于拓扑群G的酉表示U,$\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(U)$中对任意的$U_g\ (g\in G)$不变的闭子空间$\mathfrak{N}$,称为$U$不变的. 这时,如果$\mathfrak{N}\neq\{0\}$,$U_g$在$\mathfrak{N}$上的限制为$V_g$,则$V$是以$\mathfrak{N}$为表示空间的$G$的酉表示,称为$U$的**子表示**(subrepresentation).

对于G的两个酉表示L, M,当L的任何子表示都不等价于M的子表示时,就称这两个表示是**不相交的**(disjoint). 如果L的任何子表示都与M不相交,而M的任何子表示都与L不相交,则称L与M是**拟等价的**(quasi-equivalent).

【不可约表示】 对于G的酉表示U,设$\{U_g|g\in G\}$所生成的 von Neumann 代数†为$\boldsymbol{M}$,而$\boldsymbol{M}$的换位子环为$\boldsymbol{M}'$. 于是$\mathfrak{H}(U)$的闭子空间$\mathfrak{N}$为U不变的充分必要条件是,到$\mathfrak{N}$上的射影算子P属于$\boldsymbol{M}'$. 因此,U为不可约的充分必要条件是$\boldsymbol{M}'=\{\alpha 1|\alpha\in\boldsymbol{C}\}$ (**Schur 引理**). 可分†的拓扑群的循环酉表示或不可约酉表示的表示空间是可分的.

【因子表示】 如果 von Neumann 代数$\boldsymbol{M}=\{U_g|g\in G\}$是因子†,即$\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{M}'=\{\alpha 1|\alpha\in\boldsymbol{C}\}$,则酉表示$U$称为**因子表示**(factor representation). 如果G的两个因子表示不是不相交的,则它们必是拟等价的. 对应于$\boldsymbol{M}$是 I, II, III型因子,U分别称为 I, II, III 型的因子表示(→von Neumann 代数). 如果G的每一因子表示都是 I 型的,则G称为 **I 型群** (group of type I). I 型群的例子有:紧群,局部紧 Abel 群,连通幂零 Lie 群,连通半单 Lie 群,$GL(n,\boldsymbol{R})$或$GL(n,\boldsymbol{C})$的代数子群等.连通可解 Lie 群,当其 Lie 代数的元在伴随表示†中没有纯虚数特征值时,就是 I 型的,但一般它不一定是 I 型的. 可数离散群成为 I 型群的充分必要条件是,G由有限群通过交换群扩张†而成.

【直积群的表示】 设拓扑群G是两个拓扑群G_1, G_2的直积†$(G=G_1\times G_2)$,$U_i(i=1,2)$为G_i的不可约酉表示,则张量积†表示$U_1\otimes U_2:(g_1,g_2)\to U_{g_1}\otimes U_{g_2}$是$G$的不可约酉表示. 反之,如果$G_1$或$G_2$中至少有一个为 I 型群,则$G$的任意不可约酉表示$U$都等价于$G_i$的某个不可约酉表示$U_i$的张量积$U_1\otimes U_2$.

【直和】 设G的酉表示U的表示空间$\mathfrak{H}$成为在U下不变的闭子空间族$\{\mathfrak{H}(\alpha)\}_{\alpha\in I}$,作为 Hilbert 空间的直和$\mathfrak{H}=\sum_{\alpha\in I}\mathfrak{H}(\alpha)$. 如果$U_g$在$\mathfrak{H}(\alpha)$上的限制为$U_g(\alpha)$,则$U(\alpha):g\to U_g(\alpha)$是以$\mathfrak{H}(\alpha)$为表示空间的$G$的酉表示. 这时$U$称为酉表示族$\{U(\alpha)\}_{\alpha\in I}$的**直和**(direct sum),记为$U=\oplus U(\alpha)$. G的任意酉表示都是循环酉表示的直和. 此外,如果G的酉表示U的直和分解$U=U_1\oplus U_2$蕴涵U_1与U_2互不相交,则称U为**无重数的** (without multiplicity) **表示**. 如果U可作直和分解$U=\oplus U(\alpha)$,并且对于所有$\alpha\in I$,$U(\alpha)$皆为不可约,则U称为可分解为不可约表示的直和. 如果U可分解为不可约表示的直和,则这种分解本质上是唯一的. 即设$U=\bigoplus_{\alpha\in I}U(\alpha)=\bigoplus_{\beta\in J}V(\beta)$是$U$的两个不可约表示的直和分解,则存在$I$到$J$的双射†$\varphi$,使得对于任意的$\alpha\in I$,$U(\alpha)$与$V(\varphi(\alpha))$等价. I 型的因子表示$U$可分解为不可约表示$U(\alpha)$的直和$U=\bigoplus_{\alpha\in I}U(\alpha)$. 而且此时所有

$U(\alpha)$ 都彼此等价. 但是,任意的可约酉表示并不一定可以分解成不可约表示的直和. 为了进行不可约分解,必须有更一般的直积分的概念.

【直积分】 设 U 为 G 的酉表示. 如果对于测度空间 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 的每个 $x \in X$, 都存在 G 的酉表示 $U(x)$, 且 $\mathfrak{H}(U)$ 是 $\mathfrak{H}(U(x))$ 的直积分† (→von Neumann 代数) (记作 $\mathfrak{H}(U) = \int_X \mathfrak{H}(U(x))d\mu(x)$),而且对于每个 $g \in G$, U_g是关于这个直积分的可分解算子, 且可以写成 $U_g = \int_X U_g(x)d\mu(x)$, 则酉表示 U 称为酉表示族 $\{U(x)\}_{x\in X}$ 的**直积分** (direct integral), 记作 $U = \int_X U(x)d\mu(x)$. 在 X 的各点测度为 1 的特殊情况下, 直积分的概念归结为上述的直和概念.

【因子分解】 以下设 G 为满足第一可数公理的局部紧群, Hilbert 空间只考虑可分 Hilbert 空间. 对于 G 的任意酉表示 U, 若 $\mathfrak{H}(U)$ 可分解为直积分, 使得 von Neumann 代数 $M = \{U_g | g \in G\}''$ 的中心 A 由所有可对角化算子所构成, 则表示 U 可分解成直积分 $U = \int_X U(x)d\mu(x)$, 而且对于几乎所有 x, $U(x)$ 为因子表示. U 的这种分解本质上是唯一的. 而且这时存在 X 的子集 N 满足 $\mu(N) = 0$, 且使得当 $x, x' \in X-N$ 时, $U(x)$ 与 $U(x')$ 就成为不相交的因子表示. 因此这时 X 可以看成在 G 的因子表示的拟等价类集合 $\hat{G}$ 上赋予适当的测度空间的结构后所得的测度空间. 这个 $\hat{G}$ 称为 G 的**拟对偶** (quasidual). 这时除去等价†测度外, $\hat{G}$ 上的测度 μ 是由 U 确定的.

【对偶】 在局部紧群 G 的不可约酉表示的所有等价类组成的集合 G^* 上, 如下地引入拓扑. 命 $H_n = l^2(n)$ 为 n 维 Hilbert 空间, 并设 G 在 H_n 上的所有不可约酉表示组成的集合为 I_n. 对于以某个有向集的元 λ 为指标的 $U^\lambda \in I_n$, 如果对于任意的 $x, y \in H_n$, $(U_g^\lambda x, y)$ 在 G 的任意紧集上一致收敛于 $(U_g x, y)$, 则定义 $U^\lambda \to U$, 这样就能在 I_n 上引入一个拓扑. 这时, I_n 中的表示之间的等价关系是一个开的关系. 设 G 的 n 维不可约酉表示的等价类集合为 G_n^*, 在 G_n^* 上引入作为 I_n 的商空间的拓扑, 在 $G^* = \bigcup_n G_n^*$ 上引入 G_n^* 的直和拓扑. 赋予这种拓扑的 G^* 称为 G 的**对偶** (dual). G^* 是局部紧的 Baire 空间†, 但一般不满足 Hausdorff 公理. 若 G 是紧 Hausdorff 拓扑群, 则 G^* 就是离散的. 若 G 是离散的, 则 G^* 是紧的. 而且, 当 G 是局部紧 Abel 群时, G^* 与 G 的特征标群†相同. 当 G 满足第二可数公理时, G^* 也满足第二可数公理. 若 G 为 I 型群, 则 G^* 中存在稠密的开集, 它构成局部紧 Hausdorff 空间.

一般地, 设 G^* 的闭集的全体所生成的完全加法族为 $\mathfrak{B}$, 在以下, 所谓 G^* 上的测度, 通常是指在 $\mathfrak{B}$ 上定义的正测度.

【不可约分解】 设 G 为满足第二可数公理的 I 型局部紧群. 当 $x \in G^*$ 是 n 维表示类时, 设 $H(x) = l^2(n)$. 对于每个 $x \in G^*$, 适当地取 $U(x) \in x$. 这时 G 的无重数的任意酉表示 U, 等价于由 G^* 上的某个测度 μ 所得的酉表示 $U^\mu = \int_{G^*} U(x)d\mu(x)$. 反之, 对于 G^* 上的任意测度 μ, $\int_{G^*} U(x)d\mu(x) = U^\mu$ 是 G 的无重数酉表示. 因而, $U^\mu \cong U^\nu$ 的充分必要条件是测度 μ 与 ν 等价. 有重数的场合可如下地得出. 对于 G 在可分 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上的任意酉表示 U, 在 G^* 上存在测度 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\infty$, 其支集互不相交, 且使 U 分解成直和:

$$U \cong \int_{G^*} U(x)d\mu_1(x) \oplus 2\int_{G^*} U(x)d\mu_2(x) \oplus \cdots \oplus \infty \int_{G^*} U(x)d\mu_\infty(x).$$

这时, 除去等价测度外, 各个 μ_i 是由 U 唯一确定的.

对于满足第二可数公理的非 I 型的任意局部紧群 G, 它在可分 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上的酉表示 U, 可以分解成不可约表示的直积分. 这只要取 $M' = \{U_g | g \in G\}'$ 的一个极大交换 von Neumann 代数 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}$ 是可对角化的算子

的全体,则 $\mathfrak{H}$ 就可以分解成直积分.然而,这时由 $\boldsymbol{A}$ 的取法不同,一般给出完全不同的分解,从而不可约分解的唯一性不再成立. 因此,对 I 型群来说,与紧群的情形相同,不可约表示构成表示的基本要素,然而对非 I 型群,较自然地是用因子表示代替不可约表示,用拟等价代替等价,用拟对偶代替对偶. 因此,I 型群与非 I 型群,酉表示理论的内容就十分不同. 但是,非 I 型群的表示理论,还没有较详细的研究.

【Plancherel 定理】 设幺模[†]局部紧群 G 的右(左)正则表示为 $R(L)$. 当 g 在 G 中变动时,由 $\{R_g\}$, $\{L_g\}$, $\{R_g, L_g\}$ 生成的 von Neumann 代数,分别记为 $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$. 于是 $\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N}'=\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{P}'=\boldsymbol{M}\cap\boldsymbol{N}$. 如果把 $\mathfrak{H}$ 分解为直积分,使得 P' 是所有可对角化算子所构成的代数,则对于几乎所有 x, $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ 是因子. 即这个分解是两侧正则表示 $\{R_g, L_g\}$ 的不可约分解,是正则表示 $R(L)$ 的因子分解. 因而,这个分解可以作为 G 的拟对偶 $\hat{G}$ 上的直积分来实现. 对于(关于这时的测度的)几乎所有 x, 因子 $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ 是 I 型或 II 型的,且因子 $\boldsymbol{M}(x)$ 存在迹[†] t. 因此对于任意的 f, $g\in(L_1\cap L_2)(G)$, **Plancherel 定理**成立:

$$(1)\quad \int_G f(s)\overline{g(s)}ds=\int_{\hat{G}} t(U_g^*(x)U_f(x))d\mu(x).$$

其中

$$U_f(x)=\int_G f(s)U_s(x)ds.$$

由此,对于形如 $h=f^* * g$ ($f, g\in L_1\cap L_2$, f^* 由 $f^*(s)=\overline{f(s^{-1})}$ 所定义)的函数,下述**反演公式** (inversion formula) 成立:

$$(2)\qquad h(s)=\int_{\hat{G}} t(U_h(x)U_s^*(x))d\mu(x).$$

在(1)或(2)中,因为一般在 II_∞ 型因子中,迹 t 不可能正规化,所以测度 μ 不能唯一地确定. 特别是,在 G 为 I 型群的情形,(1),(2)可重写为类似的公式,而其中的表示 $U(x)$ 是不可约表示,t 是通常的迹,积分范围是 G 的对偶 G^*. 这时,当 G 的 Haar 测度 ds 固定时,它唯一地确定 G^* 上的测度 μ. 这个 μ 称为 G 的 **Plancherel 测度** (Plancherel measure).

【平方可积表示】 对于具有双侧不变Haar测度(即幺模[†])的局部紧群 G 的不可约酉表示 U, 如果取某一 $x\in H(U)$ $(x\neq 0)$, $\varphi(g)=(U_gx, x)$ 关于 G 的 Haar 测度就成为平方可积函数(即平方为可积的函数),则 U 称为**平方可积表示** (square integrable representation). 若 U 为 G 的平方可积表示,则对于任意的 x, $y\in H(U)$, $\varphi_{x,y}(g)=(U_gx, y)$ 属于 $L_2(G)$. 对于 G 的两个平方可积表示 U, U', 与紧群的情形相同的**正交关系** (orthogonal relation) 成立:

$$\int_G (U_gx, y)(\overline{U'_gu, v})dg$$

$$=\begin{cases}0, & \text{当 } U \text{ 与 } U' \text{ 不等价时},\\ d_U^{-1}(x, u)(v, y), & \text{当 } U\cong U' \text{ 时}.\end{cases}$$

其中 d_U 是只由 U 与 Haar 测度的选取所决定的常数,称为 U 的**形式次数** (formal degree). 今固定一个 $y\in H(U)$ $(\|y\|=1)$, 设 $V=\{\varphi_{x,y}\mid x\in H(U)\}$, 则 $T: x\to\sqrt{d_U}\,\varphi_{x,y}$ 是从 $H(U)$ 到 V 上的等距算子. 通过 T 可以证明,平方可积表示 U 等价于 G 的右正则表示 R 的子表示. 反之,R 的任意不可约子表示是平方可积表示,对于左正则表示 $L(\cong R)$ 同样事实也成立.即 G 的平方可积表示,无非就是 G 的正则表示的不可约子表示. 因而在 G 的 Plancherel 公式中,关于平方可积表示的部分,成为离散的和,它在一点 U 的测度为正. 在这一点 U 的测度,就是形式次数 d_U. 也存在非紧群具有平方可积表示的情形,$SL(2, \boldsymbol{R})$ 就是一个例子. →[实半单 Lie 群].

【$L_1(G)$ 的表示】 设 G 是局部紧群, $L_1(G)$ 是关于 G 的左不变 Haar 测度的复值可积函数的全体. $L_1(G)$ 通过卷积[†] $(f*g)(s)=\int_G f(st^{-1})g(t)dt$ 构成一个代数.假设 Δ 是 G 的模[†], 则 $f(s)\to f^*(s)=\Delta(s^{-1})\overline{f(s^{-1})}$ 是代数 $L_1(G)$ 的一个对合[†]. 对于 G 的任意酉表示 U, 设 $U'(f)=\int_G U(s)f(s)ds$, 则 $f\to U'(f)$ 是具有对合的代数 $L_1(G)$ 的一个**非退化** (non-degenerate) (即有 $\{U'(f)\mid f\in L_1(G)\}^\perp=\{0\}$) 表示. 由对应 $U\to U'$, 得出 G 的酉表示的等价

类的集合与具有对合的代数 $L_1(G)$ 在 Hilbert 空间上的非退化表示的等价类的集合上的一个一一对应. 所以,U是不可约表示、因子表示等性质,等价于 U' 具有对应的性质. 因此,G的酉表示的研究,可以归结为 $L_1(G)$ 上的表示的研究. 如果对于任意的 $f\in L_1(G)$, $U'(f)$ 是紧算子†, 则U可分解成不可约表示的离散直和,且每个不可约分量U的重数是有限的.

关于以上各节→[3].

【诱导表示】 构造群G的酉表示U的一个基本方法是,从G的子群H的表示出发,来构造G的表示. 设G为满足第二可数公理† 的局部紧群,L为G的闭子群H在可分 Hilbert 空间上的酉表示. m, n; Δ, δ 分别为 G, H 的右不变 Haar 测度† 及模†. 在G上恒取正值的连续函数ρ中,取满足 $\rho(hg)=\delta(h)\,\Delta(h)^{-1}\,\rho(g)$ $(h\in H, g\in G)$ 的一个函数,作商空间 $H\backslash G$ 上的拟不变测度† $\mu=(\rho m)/n$ (→不变测度). 设 $\mathfrak{H}$ 为G到L的表示空间 $\mathfrak{H}(L)$ 的弱可测†映射 f 中满足下述条件 I), II) 的 f 的全体: I) 对于任意 $h\in H$, $g\in G$,

$$f(hg)=L_hf(g).$$

由于 $\|f(g)\|^2$ 是G上的H左不变函数,所以满足 I) 的 f 可看成商空间 $H\backslash G$ 上的函数. II) $\|f\|^2=\int_{H\backslash G}\|f(g)\|^2d\mu(\dot{g})<+\infty$,其中 $\dot{g}=Hg$. 这时 $\mathfrak{H}$ 是以 $\|f\|$ 为范数的 Hilbert 空间. 以$\mathfrak{H}$为表示空间的G的酉表示U,可由 $(U_sf)(g)=\sqrt{\rho(gs)/\rho(g)}\,f(gs)$ 来定义. U称为由H的表示L**诱导的** (induced) 酉表示,记为 $U=U^L$.

诱导表示 (induced representation) 具有下列性质: i) 关于直和, $U^{L_1\oplus L_2}$ 与 $U^{L_1}\oplus U^{L_2}$ 等价. 更一般地有$U^{\int L(x)d\mu(x)}$与$\int U^{L(x)}d\mu(x)$等价. 因此特别有,若 U^L 是不可约的,则L也是不可约的(一般说来逆命题不成立). ii) 当H, K是G的两个子群而 $H\subset K$ 时,设M是由H的表示L诱导出的K的表示. 则由M诱导的G的表示U^M、等价于由L在G上直接诱导的表示U^L.诱导表示是与主纤维丛† $(G, H\backslash G, H)$ 相伴†的,以 $\mathfrak{H}(L)$ 为纤维的向量丛†的截面†所作成的空间上自然地产生的一种表示(→F. Bruhat [2]).

【Lie 群与其它特殊群的酉表示】 以下叙述特别有兴趣的几种群的酉表示.

【紧群】 紧群G的不可约酉表示总是有限维的,G的任意酉表示皆可分解成不可约表示的(离散)直和(→紧群). 连通紧 Lie 群的不可约酉表示可以完全分类,其特征标也已算出(→Lie 群).

【交换群】 交换群G的不可约酉表示全都是一维的, 故不外乎是 G 的特征标. 关于酉算子的单参数群 $\{U_t\}$ 的 Stone 定理† $U_t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\,dE_\lambda$, 给出了实数加法群$\boldsymbol{R}$的酉表示$U$的不可约分解. 而且, 关于 $\boldsymbol{R}$ 上的正定函数†的 Bochner 定理, 就是用正定函数来表述的 Stone 定理. 因此,很容易从其中的一条定理得到另一条定理. 此外, $\boldsymbol{R}$ 上的 Fourier 变换理论,尤其是 Plancherel 定理,给出了$\boldsymbol{R}$的正则表示的不可约分解. 以上 Stone, Bochner, Plancherel 等定理,全部可以原封不动地推广到任意的局部紧 Abel 群的情形(→调和分析).

【Lie 群与Lie代数的表示】 当给出Lie群G的酉表示U时,对$x\in\mathfrak{H}(U)$,如果映射 $g\to U_gx$ 是在G上定义,在 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(U)$ 中取值的实解析函数 (→线性算子 [向量值函数的微分积分]), 则称 x 是关于 U 的**解析向量** (analytic vector). 关于U的解析向量的全体 $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(U)$ 是 $\mathfrak{H}$ 中的稠密子空间. 设G的 Lie 代数† 为 $\mathfrak{g}$, 对于任意的 $X\in\mathfrak{g}$, $x\in\mathfrak{A}$, 令实变量 t 的实解析函数 $U_{\exp tX}x$ 在 $t=0$ 的导数为 $V(X)x$, 则 $V(X)$ 是 $\mathfrak{A}$ 上的线性变换,且映射 $V: X\to V(X)$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{A}$ 上的表示. V称为**U的微分表示** (differential representation of U). V 可以唯一地扩张到 $\mathfrak{g}$ 的包络代数† $\mathfrak{B}$ 的表示. 连通 Lie 群G的两个酉表示 $U^{(i)}(i=1,2)$ 等价的充分必要条件是,存在 $\mathfrak{H}(U^{(1)})$到 $\mathfrak{H}(U^{(2)})$ 上的一个一一(有界)线性映射 T, 它把 $\mathfrak{A}(U^{(1)})$ 映到 $\mathfrak{A}(U^{(2)})$ 上,并且对于所有的 $X\in\mathfrak{g}$ 满足 $T\circ V^{(1)}(X)=V^{(2)}(X)\circ T$. 设$U$是$G$的酉表示,

$X_1, \cdots, X_n$ 是G的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的基．这时，对于 $\mathfrak{g}$ 的包络代数的元 $\Delta = X_1^2 + \cdots + X_n^2$，$V(\Delta)$实质上是自伴†算子．反之，假设对于 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的每个元 X，对应着 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上(不一定有界)的斜 Hermite 算子 $\rho(X)$，满足如下条件 i)，ii)，iii)：i) 在 $\mathfrak{H}$ 中存在稠密的子空间 $\mathfrak{D}$，使对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$，$\mathfrak{D}$ 包含在 $\rho(X)\rho(Y)$ 的定义域中；ii) 对于任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$，$x \in \mathfrak{D}$，$a, b \in \boldsymbol{R}$，有 $\rho(aX + bY)x = a\rho(X)x + b\rho(Y)x$，$\rho([X, Y])x = (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))x$；iii) 对于 $\mathfrak{g}$ 的基 $X_1, \cdots, X_n$，$\rho(X_1)^2 + \cdots + \rho(X_n)^2$ 到 $\mathfrak{D}$ 的限制A实质上是自伴的．这时，存在唯一的以 $\mathfrak{g}$ 为 Lie 代数的单连通 Lie 群G在 $\mathfrak{H}$ 上的酉表示 U，其微分表示 V 对于任意的 $X \in \mathfrak{g}$ 皆满足 $\overline{V(X)} = \overline{\rho(X)}$．其中算子$B$的闭包†记为 $\bar{B}$ (E. Nelson [15])．

【幂零 Lie 群】 连通幂零† Lie 群G的任意不可约酉表示均可从某个子群H的一维酉表示L诱导出来．现在特别设G为单连通的，设G的 Lie 代数为 $\mathfrak{g}$，G的伴随表示的逆步表示†为 ρ．ρ 的表示空间是 $\mathfrak{g}$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*$．$\mathfrak{g}$ 的子代数 $\mathfrak{h}$ **从属于** (subordinate) $f \in \mathfrak{g}^*$ 是指，对于任意的 $X, Y \in \mathfrak{h}$，有 $(f, [X, Y]) = 0$．$\mathfrak{h}$ 从属于 f 时，通过 $L_{\exp X} = e^{i(f,X)} (X \in \mathfrak{h})$，可定义出对应于 $\mathfrak{h}$ 的 G的连通 Lie 子群H的一维酉表示 L．反之，G的连通 Lie 子群H的一维酉表示，全部可以这样地由从属于H的线性型 f 以上述形式得出．从L诱导出来的G的酉表示，记为 $U^{(f,\mathfrak{h})}$．这时 $U^{(f,\mathfrak{h})}$ 为不可约的充分必要条件是，$\mathfrak{h}$ 是从属于 f 的子代数中维数最大的一个．两个不可约表示 $U^{(f,\mathfrak{h})}$ 与 $U^{(f',\mathfrak{h}')}$ 等价的充分必要条件是，f 与 f' 对于群 $\rho(G)$是共轭的．根据这些，单连通幂零 Lie 群的不可约酉表示的等价类，与 $\mathfrak{g}^*$ 上的 $\rho(G)$ 的轨道一一对应 (A. A. Кириллов [11])．

【半单 Lie 群】 连通半单 Lie 群G的因子表示恒是 I 型的，即G是 I 型群．对于G的任意不可约酉表示U，其特征标 $\chi = \chi_U$ 如下地定义．在G上具有紧支集的 C^∞ 函数的全体记为 $C_0^\infty(G)$．对于任意的 $f \in C_0^\infty(G)$，$U_f = \int_G U_g f(g) dg$属于迹族†，线性泛函 $\chi: f \to Tr(U_f)$ 是 Schwartz 意义下的广义函数†．这个χ称为不可约酉表示 U 的**特征标** (character)．χ在G的内自同构下是不变的，是G上的所有两侧不变线性微分算子所形成的代数 $\mathfrak{Z}$ 的公共特征广义函数．G的两个不可约酉表示等价的充分必要条件是这些特征标相等．广义函数χ实际上是G上的局部可积†函数．而且在G的所有正则元†所形成的开子流形 G' 的各个连通分支上，特征标χ成为一个实解析函数．χ在整个G上不一定是实解析的 (Harish-Chandra [7] I, III, [9])．

【复半单 Lie 群】 连通复半单 Lie 群G的不可约酉表示可以分为以下四种类型． 1) **主系列** (principal series)．它由 G 的 Borel 子群† B的一维酉表示L诱导出来的表示所组成．L由包含在B中的G的 Cartan 子群† A的特征标 $\nu \in \mathrm{Hom}(A, U(1))$ 所唯一确定．因而主系列的表示是以(作为拓扑 Abel 群的) A的特征标群† A^* 的元作为参变量的．当记成 $U^L = U^\nu$ $(\nu \in A^*)$ 时，U^ν 与 $U^{\nu'}$ 等价的充分必要条件是，对于G关于A的 Weyl 群† W，ν 与 ν' 互相共轭．2) **退化系列** (degenerate series)．它由真包含 Borel 子群 B 的 G 的连通 Lie 子群 P (即G的抛物子群†) 的一维酉表示诱导出来的G的表示所组成．3) **补系列** (complementary series)．它由 Borel 子群 B 的非酉一维表示 L 诱导出来的G的不可约酉表示U^L所组成．这时，在上述诱导表示的定义中，需要改变一下定义内积的条件 II)．即当L为非酉表示时，U_g^L 关于通常的 L_2 内积 II) 不构成酉算子．但是在L满足适当的条件时，U_g^L关于其它适当的内积构成酉算子．这就是补系列的表示．4) **退化补系列** (complementary degenerate series)．它由G的抛物子群P的非酉一维表示诱导出来的G的不可约酉表示所组成．

属于不同系列的G的两个表示绝不等价．原先猜测，连通复半单 Lie 群的任意不可约酉

表示，与属于以上四个系列中某一个的表示等价．然而，E. M. Stein [28] 最近构造出不同于由 И. М. Гельфанд 及 М. А. Наймарк [5] 得到的上列形式的不可约酉表示．

以上各种不可约表示的特征标也可以具体的形式求得．例如关于主系列的表示 U^ν 可如下来计算：对于 Cartan 子群 A 的特征标 ν，取 A 的 Lie 代数 $\mathfrak{a}$ 上的线性型 λ，使得对于任意 $H\in\mathfrak{a}$，有 $\nu(\exp H)=e^{\lambda(H)}$ 成立．并考虑形如

$$D(\exp H)=\prod_{\alpha}|e^{\alpha(H)/2}-e^{-\alpha(H)/2}|^2$$ 的函数．这里 α 取遍所有正根†．这时主系列表示 U^ν 的特征标 χ_ν 在 A 上的值由下式给出：

$$\chi_\nu(\exp H)=D(\exp H)^{-1}\sum_{s\in W}e^{s\lambda(H)}.$$

此外，在 G 的正则表示的不可约分解中，只出现主系列的表示．因而 Plancherel 定理的右端变成在 A 的特征标群 A^* 上进行积分．于是，当(在 G 与 A^* 的 Haar 测度的适当正规化下) 采用 A^* 的 Haar 测度 $d\nu$ 时，Plancherel 的测度 μ 可表示成：

$$d\mu(\nu)=w^{-1}\prod_{\alpha}|(\lambda,\alpha)/(\rho,\alpha)|^2d\nu.$$

其中 w 是 Weyl 群的阶，α 取遍所有正根．另外，ρ 是正根之和的 1/2 (И. М. Гельфанд-М. А. Наймарк [5])．

【实半单 Lie 群】 对于连通实半单 Lie 群 G，也存在着对应于复群情形的四种系列的不可约酉表示．然而，如果 G 没有 Borel 子群以外的抛物子群，则退化系列、退化补系列的表示也不存在．这样的群的例子有 $SL(2,\boldsymbol{R})$ 和高维 Lorentz 群．一般来说，实半单群的不可约表示的分类远比复群情形复杂得多．出现在 G 的正则表示的不可约分解中的表示，仍然称为**主系列**的表示．G 的主系列的表示可分成与 G 的 Cartan子群的共轭类一一对应的有限个子系列．

特别是，与向量子群 A_+ 的最大 Cartan 子群 A 对应的子系列，称为**连续系列** (continuous series)．属于它的表示，可如下构成．设 $G=NA_+K$ 为 G 的岩沢分解，M，$\hat{M}$ 为 A_+ 在 G 中的中心化子†及正规化子†．这时 $W_0=\hat{M}/M$ 是有限群，称为 A_+ 或 $K\backslash G$ 的 Weyl 群†．这时由子群 MA_+N 的任意有限维不可约酉表示 L 诱导出来的 G 的酉表示 U^L，是连续系列的表示．复半单 Lie 群的主系列表示，在这个意义下，全都属于连续系列．U^L 是至多 w_0 个不可约表示的直和．其中 w_0 是 W_0 的阶．更详细地说，对于 W_0 的单位元以外的任意元 s、当 L^s 与 L 不等价时，U^L 就是不可约的．在复群的情形，U^L 总是不可约的，然而在实群的情形，实际上出现非不可约的情况．假定 L，L' 为 MA_+N 的两个不可约酉表示，则 U^L 与 $U^{L'}$ 等价的充分必要条件是存在某个 $s\in W_0$，当 L，L' 作为 MA_+ 的表示时，L^s 与 L' 等价 (Bruhat[2])．U^L 的特征标，是以 $\bigcup_{x\in G}xAx^{-1}$ 为支集的函数，其具体形式也可算出．

连通半单 Lie 群 G 具有平方可积表示的充分必要条件是，G 具有紧 Cartan 子群．以下假定 G 具有紧 Cartan 子群 H．这时，G 的平方可积表示的全体，称为 G 的不可约酉表示的**离散系列** (discrete series)．这是 G 的主系列表示中与紧 Cartan 子群对应的子系列．离散系列的表示的分类，是由 Harish-Chandra 作出的．设 H 的 Lie 代数为 $\mathfrak{h}$，关于一个线性序的正根†的全体为 P．然后考察 $\mathfrak{h}$ 的元的多项式 $\pi=\prod_{\alpha\in P}H_\alpha$．假定 $\mathscr{F}$ 是 $\sqrt{-1}\,\mathfrak{h}$ 上的实线性型的集合．再设 L 为满足下述条件的 $\lambda\in\mathscr{F}$ 的集合：由公式 $\xi_\lambda(\exp X)=e^{\lambda(X)}$ 能定义群 H 上的单值特征标 ξ_λ，令使 $\pi(\lambda)\neq0$ 的 $\lambda\in L$ 的全体为 L'．于是对于每个 $\lambda\in L'$，存在 G 的离散系列表示 $\omega(\lambda)$；反之，离散系列中的每个表示等价于对于某个 $\lambda\in L'$ 的 $\omega(\lambda)$．两个表示 $\omega(\lambda_1)$ 和 $\omega(\lambda_2)$ $(\lambda_1,\lambda_2\in L')$ 等价的充分必要条件是存在某个 $s\in W_G$，使得 $\lambda_2=s\lambda_1$．其中 $W_G=N(H)/H$，$N(H)$ 为 H 在 G 中的正规化子 (W_G 可以自然的方式看成作用在 $\mathscr{F}$ 上的线性变换群)．而且，离散系列表示 $\omega(\lambda)$ $(\lambda\in L')$ 的特征标 χ_λ 以如下形式具体给出．对于

$\lambda \in L'$，取 $\pi(\lambda)=\prod_{\alpha\in P}\lambda(H_\alpha)$ 的符号差为 $\varepsilon(\lambda)$，置 $q=(1/2)\dim G/K$. 此外，考虑形如 $\Delta(\exp H)=\prod_{\alpha\in P}(e^{\alpha(H)/2}-e^{-\alpha(H)/2})$ 的函数，对于H的正则元 h，$\omega(\lambda)$ 的特征标 χ_λ 由下式给出：

$$(-1)^q\varepsilon(\lambda)\chi_\lambda(h)=\Delta(h)^{-1}\sum_{s\in W_G}\det s\xi_{s\lambda}(h)$$

且 $\omega(\lambda)$ 的形式次数 $d(\omega(\lambda))$ 由下式给出：

$$d(\omega(\lambda))=C^{-1}[W_G]|\pi(\lambda)|.$$

其中C是一个正数(与 λ 无关)，$[W_G]$表示有限群 W_G 的阶(以上→Harish-Chandra [21]). 具体构成离散系列表示的问题，尚未完全解决. 但是关于某些群，已构成了离散系列的全部或一部分. →[1], [7] IV, V, VI, [26], [28].

连续系列与离散系列之外的主系列表示，想来可以通过组合子群的离散系列表示与诱导表示而得到，但在目前阶段，只构造出少数几个群的所有主系列表示（例如 $SL(n,\boldsymbol{R})$ ([1], [29])或 **de Sitter 群**(即 $\boldsymbol{R}^5$ 中使得二次型 $X_1^2-X_2^2-X_3^2-X_4^2-X_5^2$ 不变的线性变换群([26])等二、三个特殊的群).

【球函数】 设G是幺模†局部紧群，K是G的紧子群. 在 G 上的复值连续函数的全体 $C(G)$ 中，把所有左K不变（两侧K不变）的函数构成的子集记为 $C(K\backslash G)$ $(C(G,K))$. 在 $C(G,K)$ 中，具有紧支集的元的全体，记为 $\boldsymbol{L}=L(G,K)$. 对于任意的 $f\in\boldsymbol{L}$，以 $K_f(g,h)=f(gh^{-1})$ 作为核†，对应 $K\backslash G$ 上的G不变积分算子† K_f. 所有 $K_f(f\in L)$ 的共同特征函数，称为齐性空间 $K\backslash G$ 上的**球函数** (spherical function). 即L以卷积为乘法构成$\boldsymbol{C}$上的代数.设 λ 为L到复数域 $\boldsymbol{C}$ 的一个代数同态，$F(\lambda)=\{\varphi\in C(K\backslash G)\,|\,f*\varphi=\lambda(f)\varphi(f\in\boldsymbol{L})\}$，则$F(\lambda)$的元称为属于 λ 的 $K\backslash G$ 上的球函数. 当 $F(\lambda)\neq\{0\}$ 时，在 $F(\lambda)$ 中存在唯一的 ω，它是两侧K不变的且满足 $\omega(e)=1$. ω 称为属于 λ 的**球带函数** (zonal spherical function). 这时，由于 $\lambda(f)=\int_G f(g)\omega(g^{-1})dg$，$F(\lambda)$ 由球带函数 ω 唯一确定. 反之，若 $f\to\int f(g)\omega(g^{-1})dg$ 是从 $\boldsymbol{L}$ 到 $\boldsymbol{C}$ 的同态，则 $\omega\in C(G,K)$ 是球带函数. 此外，球带函数 ω 又可刻划为 $C(G,K)$ 中满足函数等式$\int_K\omega(gkh)dk=\omega(g)\omega(h)$ 的非零元. 特别是，当G为 Lie 群时，球函数是C^∞函数 (A. Selberg [16], S. Helgason [10]).

【用球函数展开】 以下假定$\boldsymbol{L}$是交换的. 在这种场合，存在充分多的球函数，且$K\backslash G$上的充分光滑函数可以用球函数展开. 如果G的不可约酉表示U的表示空间 $\mathfrak{H}(U)$ 含有在 $\{U_k\,|\,k\in K\}$ 下不变的非零向量 x，则称U是关于K的**球表示** (spherical representation)，或称为第一类的. 这时，由于 $\boldsymbol{L}$ 的交换性，在K下不变的向量 x，除了纯量倍外，是唯一确定的. 当K不变向量 x 满足 $\|x\|=1$ 时，$\omega(g)=(U_gx,x)$ 是 $K\backslash G$ 上的球带函数. 而且这时对于任意的 $y\in\mathfrak{H}(U)$，$\varphi_y(g)=(U_gx,y)$ 是属于 ω 的球函数. 此外，这种球带函数 ω 是G上的正定函数. 反之，若球带函数 ω 是G上的正定函数，则存在G关于K的球表示 U，使 ω 可用 $\mathfrak{H}(U)$ 的某个K不变向量 x 表示成 $\omega(g)=(U_gx,x)$. 成为G上的正定函数的 $K\backslash G$ 上所有球带函数所成的集合 Ω，由紧收敛的拓扑成为局部紧空间. 对于任意的 $f\in L_1(K\backslash G)$，其 Fourier 变换 $\hat f$ 定义为 $\hat f(\omega)=\int_G f(g)\omega(g^{-1})dg$. 这时，存在$\Omega$上的 Radon 测度† μ，使得对于任意的 $f\in\boldsymbol{L}$，有 $\hat f\in L_2(\Omega,\mu)$. 而且，这时在$K\backslash G$上 Plancherel 定理

$$\int_G f(s)\overline{g(s)}ds=\int_\Omega\hat f(\omega)\overline{\hat g(\omega)}d\mu(\omega)\tag{3}$$

及展开定理 $f(s)=\int_\Omega\hat f(\omega)\omega(s)d\mu(\omega)$成立.将$K$两侧不变的函数换成$K$左不变的函数，可以推广 Plancherel 定理，得到形如(1)的定理. 这无非就是从G的 Plancherel 定理中去掉K不变的部分而已. 即如果把球函数与相对应的球表示视为同一，则在 $\Omega\subset G^*$ 上，$K\backslash G$ 上的 Plancherel 测度就是 G 上的 Plancherel 测度在Ω上的限制.

当$\boldsymbol{L}$为交换时，若G为 Lie 群，则 $K\backslash G$ 上的球函数可刻划为 $K\backslash G$ 上G不变线性微分算

子的全体 $\boldsymbol{D}$ 的共同特征函数. 特别地，球函数是实解析函数.

【对称空间的球函数】 $\boldsymbol{L}$ 为交换的最重要的例子就是 $G\backslash K$ 为弱对称 Riemann 空间†,特别是对称 Riemann 空间†的情形. 当 $K\backslash G$ 为紧对称 Riemann 空间时，$K\backslash G$ 上的球表示就是 G 在 $K\backslash G$ 上的正则表示的不可约分支. 而球函数不外乎是构成这个不可约分支的表示空间的 $K\backslash G$ 上的函数. 特别地，当 G 是紧半单 Lie 群时，可根据 $K\backslash G$ 的**佐武图形**，从 G 的不可约表示中得到球表示. 所谓 $K\backslash G$ 的佐武图形,就是与 $K\backslash G$ 对偶的†非紧对称 Riemann 空间或其运动群的 Lie 代数的佐武图形†. 特别地,当这个对称空间是紧 Lie 群 G 的群流形时，则 G 可表示成 $G=K\backslash(G\times G)$(K 是 $G\times G$ 的对角子群). 这时，$G\times G$ 在 G 上的球带函数，无非就是 G 的不可约酉表示（有限维）U 的正规化特征标 $\omega(g)=(\deg U)^{-1}Tr(U_g)$, 其具体形式由 Weyl 的特征标公式†给出（→Lie 群).

与此相对的,非紧型†对称 Riemann 空间的球带函数，可如下地得到：设 G 是中心为有限且不含紧单因子的连通半单 Lie 群，K 是 G 的一个极大紧子群，并设 $G=NA_+K$ 为 G 的岩沢分解. 这时，对于任意的 $g\in G$，在 A_+ 的 Lie 代数 $\mathfrak{a}_+$ 中存在唯一的元 $H(g)$，使得 $g\in N\exp H(g)K$. 今在关于 $\mathfrak{a}_+$ 的**限制根**(restricted root)（即关于 $\mathfrak{a}$ 的根在 $\mathfrak{a}_+$ 上的限制）中,将关于一种序为正的根（包括重数在内)的总和的 1/2 记为 ρ. 这时,对于 $\mathfrak{a}_+$ 上的任意复值线性型 ν，

$$\omega_\nu(g)=\int_K e^{(i\nu+\rho)(H(kg))}\,dk$$

是对称 Riemann 空间 $K\backslash G$ 上的球带函数,而且 $K\backslash G$ 上的球带函数都可以这样得到. 此外，$\omega_\nu=\omega_{\nu'}$ 的充分必要条件是 ν 与 ν' 作为 $K\backslash G$ 的 Weyl 群 $W_0=\hat{M}/M$ 的元是共轭的(Harish-Chandra [21], Helgason [10]). 当 ν 仅取实数值时，ω_ν 是正定函数. 它可由 G 的连续主系列的不可约酉表示中的球表示得到. 设这种 ω_ν 的全体为 Ω_0，则 $K\backslash G$ 上的 Plancherel 测度 μ 的支集包含在 Ω_0 中. 这里通过把 ν 取为参变量, $K\backslash G$ 上 Plancherel 定理的右端成为 $\mathfrak{a}$ 的对偶空间 $\mathscr{F}$ 上的积分. 从而当采用 $\mathscr{F}$ 上的 Lebesgue 测度 $d\nu$ 时，μ 变成 $d\mu(\omega_\nu)=w_0^{-1}|c(\nu)|^{-2}d\nu$ 的形式. 其中已设 $K\backslash G$ 的不变测度及 $d\nu$ 已加以适当的正规化. $c(\nu)$ 的计算可归结为秩†为 1 的对称 Riemann 空间的情形,并可求得其具体的形式.今取限制根 α 的重数为 p_α，作出关于所有正的限制根的乘积

$$I(\nu)=\prod_\alpha B(2^{-1}p_\alpha,4^{-1}p_\alpha+(\alpha,\alpha)^{-1}(\nu,\alpha)),$$

其中 B 表示 B 函数†. 这时函数 $c(\nu)$ 由 $c(\nu)=I(i\nu)/I(\rho)$ 给出 (С. Г. Гиндикин-Ф. И. Карпелевич [20]).

【与特殊函数的关系】 某些重要的特殊函数可以作为对称 Riemann 空间 $M=K\backslash G$ (G 是 M 的运动群）上的球带函数而得到. 特别当 M 的秩为 1 时，球带函数实际上变成为单变量函数. 例如，n 维 Euclid 空间的球带函数可以用 Bessel 函数†表示成 $\omega_\nu(r)=2^m\Gamma(m+1)(\nu r)^{-m}J_m(\nu r)$，其中 $2m=n-2$. 此外，$n-1$ 维球面 $S^{n-1}=SO(n-1)\backslash SO(n)$ 的球带函数为 $\omega_\nu(\theta)=\Gamma(\nu+1)\Gamma(n-2)\Gamma(\nu+n-2)^{-1}C_\nu^m(\cos\theta)$ ($\nu=0,1,2,\cdots$)，其中 $C_\nu^m(z)$ 是 Gegenbauer 多项式†. 另外，$n-1$ 维 Лобачевский 空间的球带函数可以用广义连带的 Legendre 函数† P_ν^m 表示为 $\omega_\nu(t)=2^{m-1/2}\Gamma(m+1/2)\,\mathrm{sh}^{-m+1/2}t\cdot P_{-1/2-m+\nu}^{1/2-m}(\mathrm{ch}t)$. 这些特殊函数的各种性质，可以从表示论的观点由群论得出. 例如，加法公式就是用矩阵元表示的同态性质 $U_{gh}=U_gU_h$，这些特殊函数所满足的微分方程可以从 ω 是 G 不变的微分算子的特征函数这一事实得到. 而且积分表示式就是在函数空间中具体地构造球表示 U，用积分来具体地表示球函数 $\omega(g)=(U_gx,x)$ 右端的内积 (Н. Я. Виленкин [24]).

【球函数的推广】 上述球函数理论，可以在许多方向上作推广. 首先，以上场合的球带

函数是在K下两侧不变的. 对此，我们可考虑用K的任意不可约表示代替K的单位表示. 这种意义的球带函数理论，在G的表示论中是有用的. 例如，对于 $SL(2,\boldsymbol{R})$ 的 Plancherel 公式，就可以用这样的球函数得到. 其次，可以考虑去掉子群K为紧的条件. 这时，首先考察$K\backslash G$ 构成 Lie 群G的对称齐性空间†的情形. 例如，这时如果 $K\backslash G$ 具有G不变体积元†，则由于 $K\backslash G$ 上的G不变线性微分算子代数是交换的，故可以定义球函数为其共同特征函数. 半单 Lie 群的特征标在这个意义下是球带函数. 此外，如 Hilbert 空间的所有酉算子所构成的群那样，非局部紧群的球函数的研究与概率论及物理有关.

【与离散子群的联系】 当G是连通半单 Lie 群，Γ是G的离散子群时，G在$\Gamma\backslash G$上的正则表示由 $(T_g f)(x)=f(xg)$ $(f\in L^2(\Gamma\backslash G))$ 来定义. 将G在 $\Gamma\backslash G$ 上的正则表示T分解成不可约表示的问题，在与自守形式理论及数论的关系方面是重要的.

首先假定 $\Gamma\backslash G$ 为紧的. 这时，对于任意的 $f\in L_1(G)$，$T(f)$是紧算子，把T分解成不可约酉表示 $T^{(k)}$ 的直和 $T=\sum_{k=1}^{\infty}T^{(k)}$，等价的不可约分量的数目（重数）是有限的. 其次，考虑G的不可约酉表示U与Γ的自守形式的关系. 在U的表示空间 $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}(U)$ 中取一个元 $x\neq 0$. $\mathfrak{H}$ 由半范数†族 $\{p_C(y)=\max_{g\in C}|(U_g x,y)|\}$（这里$C$取遍$G$的紧集）构成局部凸†的拓扑线性空间 $\mathfrak{H}_x$. 只要x满足 $\dim\{T_K x\,|\,k\in K\}<\infty$，$\mathfrak{H}_x$ 的拓扑就不依赖于x的选取. 其中K是G的一个极大紧子群. 设 $\mathfrak{H}_x$ 关于这个拓扑的完备化为 $\mathfrak{H}^*$，$\mathfrak{H}^*$ 包含 $\mathfrak{H}$. 这时G的表示 U 可扩张到 $\mathfrak{H}^*$ 上的表示 U^*. 这时，使得 $U^*_\gamma f=f$ 对于任意的 $\gamma\in\Gamma$ 均成立的 $f\in\mathfrak{H}^*$，称为关于Γ的型U的**自守形式**（automorphic form）. 这时，在 $\Gamma\backslash G$ 上的正则表示T中，不可约酉表示U的重数，等于型U的所有自守形式构成的线性空间的维数. 这称为 Гельфанд-Пятецкий-Шапиро 的**互反律**（reciprocity law）.

今设正则表示T的不可约分解为 $T=\sum_{k=1}^{\infty}T^{(k)}$（直和），不可约酉表示 $T^{(k)}$ 的特征标（看成G上的函数）为 χ_K. 这时，对于满足适当条件的G上的任意函数f，根据用两种方式计算以 $k_f(x,y)=\sum_{\gamma\in\Gamma}f(x^{-1}\gamma y)$ 为核的 $\mathfrak{H}(T)=L_2(\Gamma\backslash G)$ 上的积分算子的迹†，就得到如下的**迹公式**（trace formula）：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_G f(g)\chi_K(g)dg=\sum_{\{\gamma\}}\int_{\mathfrak{D}_\gamma}f(x^{-1}\gamma y)dx,$$

其中$\{\gamma\}$是γ在Γ中的共轭类，$\mathfrak{D}_\gamma$ 表示γ在G中的中心化子 G_γ 对γ在Γ中的中心化子 Γ_γ 的商空间. 在具体给出群G及Γ的若干场合，迹公式右边可更具体地进行计算，由此得出若干有用的结论. 除正则表示T之外，对于由Γ的有限维酉表示L诱导出来的G的酉表示U^L，类似的迹公式也成立.

当 $\Gamma\backslash G$ 非紧时，$\Gamma\backslash G$ 上的正则表示T的不可约分解，除了离散直和部分之外，一般还出现直积分的部分（连续谱）. 然而 Selberg 就若干具体情形证明了，这时关于离散直和部分，迹公式仍然成立. 此外，连续谱（直积分）部分，可用广义 Eisenstein 级数† 来描述. 关于广义 Eisenstein 级数的解析性质及函数方程，也已作了研究（A. Selberg [16]，Гельфанд-И. И. Пятецкий-Шапиро [6]，Гельфанд-М. И. Граев-Пятецкий-Шапиро [19]）.

【非酉表示】 如补系列表示及非正定的球函数的存在所暗示的那样，当一般地研究拓扑群G在G上的各种函数空间或G的齐性空间上的各种函数空间上的表示时，单单考察酉表示是不够的. 这种一般表示，虽可抽象地看成满足适当条件的拓扑线性空间（是否可以是核型空间†尚不清楚）上的连续算子的表示，但对这种表示几乎还没有一般性的研究.

作为处理非酉表示的成功例子，有 Гельфанд 等的研究([4]). 他们在 $G=SL(2,\boldsymbol{C})$，$SL(2,\boldsymbol{R})$ 的情形，取 $\mathscr{D}_\chi$ 为 $\boldsymbol{C}^2-\{0\}$ 上具有由χ确定的齐次性的无限次可微函数f所构成的完备拓扑线性空间，这里χ是由G的所有

对角矩阵构成的 Cartan 子群的一个复特征标. 在 $\mathscr{D}_\chi$ 上通过 $(T^\chi_g f)(z)=f(zg)$ 定义G的表示 T^χ. 由此决定 $\mathscr{D}_\chi\times\mathscr{D}_{\chi'}$ 上的G不变双线性型,据此决定 T^χ、$T^{\chi'}$ 的等价性, 进而讨论 T^χ 的不可约性. 且当 T^χ 可约时, 不变子空间或其商空间中, 存在有限维的. 他们还由此确定了 $\mathscr{D}_\chi$ 或者其不变子空间或商空间具有G不变内积的情形, 此时由该内积作所给空间的完备化, 而得到 G 的所有不可约酉表示. 从这样一般的观点来看酉表示,是很有希望的. G上的函数 f 的 Fourier 变换, 定义为以 $\mathscr{D}_\chi$ 上的算子为值的 $\mathrm{Hom}(H,\boldsymbol{C}^*)$ 上的函数 $U(\chi)=\int_G f(g)T_g\chi dg$. 这时, G上的急减函数, 可以由其 Fourier 变换的解析性质来刻划(Гельфанд 等[4]). 再者,类似的结果亦由 F. I. Mautner-L. Ehrenpreis ([14]), Д. П. Желобенко([18]) 得到. 即在 $G=SL(2,\boldsymbol{R}),SL(2,\boldsymbol{C})$ 的情形可以得到与 $G=\boldsymbol{R}$ 情形的 Payley-Wiener 定理† 相仿的定理. 也已讨论了这种情形下具有紧支集的 C^∞ 函数环的结构.

【研究的历史】 早在二十世纪初,Frobenius 和 Schur 就研究了有限群的有限维酉表示. 1925 年, Weyl 研究了紧 Lie 群的有限维酉表示. 除了紧群及交换群情形以外, 由于物理的需要, 1939 年 E. P. Wigner 在他的关于非齐次 Lorentz 群的工作中, 最早研究了无限维酉表示. 其后, 1943 年, Гельфанд-Д. А. Райков 证明了,对于局部紧群,存在充分多的不可约酉表示. 然而酉表示论的真正出发点, 可以说是 1947 年 V. Bargmann ([1]) 与 Гельфанд-Наймарк 分别对 $SL(2,\boldsymbol{R})$ 与 $SL(2,\boldsymbol{C})$ 的不可约酉表示所作的系统研究. 此后, Гельфанд-Наймарк 建立了复半单 Lie 群的酉表示论,其结果汇集在[5]中. Harish-Chandra 证明了关于半单 Lie 群的许多一般定理. 特别是他们证明了半单 Lie 群G是 I 型群 ([7] I), 且详细讨论了特征标的一般性质([7] III, [9]). 此外, Harish-Chandra 也研究了G的 Plancherel 定理([8]),确定离散系列表示的存在及其特征标的具体形式([7] IV, V, VI, [9]). 关于不可约表示的构造, G. W. Mackey ([13]) Bruhat ([2]) 分别发展了局部紧群和 Lie 群的诱导表示的理论. B. Kostant 讨论了 Lie 群的齐性辛流形与酉表示的关系, 给出了获得 Lie 群的不可约酉表示的一个标准方法([12]). 最近联系到代数数域上定义的代数群的数论, 开始研究其阿代尔群† 及 p-adic 域† 上代数群的酉表示理论([19]). 此外, 对于不可约表示的分解, 最初[3]用某种算子代数的方法,研究了对于局部紧群的一般理论, 并注意到了 I 型群的重要性及非 I 型群的表示的"病态"现象. 对此, Гельфанд 等在半单 Lie 群的酉表示的不可约分解中,引入积分几何学中极限球面† 的方法, 在若干场合取得了成功 (→积分几何学). 另外, 由于 Selberg 研究([16]),酉表示论与自守形式理论及数论的联系,引起了人们的注意,关于这方面已有了若干研究.

关于酉表示的综合报告, 有 [13], [17], [25], [87]等.

【最近进展】 酉表示理论近来有了很大的进展. 首先 Harish-Chandra 得到了关于可简约 Lie 群的 Plancherel 明显公式 [42]. 正如在实半单 Lie 群那节中所推测的, 可以把可约子群的离散系列和诱导表示结合起来构造主系列. 因此,构造离散系列中的表示是重要的,近来已经得到完全的解决. R. P. Langlands 在 [52] 中猜想,推广 Borel-Weil-Bott 定理,可能得到离散系列. 在 Hermite 对称空间的运动群的情形, M. S. Narasimhan 和岡本清鄉[54]以这种方式构造了大部分离散系列. W. Schmid [60] 对于任意半单 Lie 群得到了同样的结果. 佐武一郎[58]把这结果推广到某种群的扩张, 并把它应用到 θ 函数. 堀田良之[45] 和 R. Parthasarathy [55] 分别得到,半单 Lie 群的大部分离散系列实现在 Casimir 算子的特征函数的空间上和 Dirac 算子的核的空间上. 另一方面, 容易证明, 由 Blattner 猜想可得到 Langlands 猜想,而前者已由堀田和 Parthasarathy [46] 部分地解决. 然而, H. Hecht 和 Schmid [88] 已

经证实了在一般情况下的 Blattner 猜想，因此完全证明了 Langlands 猜想. 特别是，这意味着离散系列的上述各种实现是等价的，并穷尽了所有的离散系列表示. 应用 Verma 模的结构 [68]，T. J. Enright 和 V. S. Varadarajan [40]得到了离散系列的一个无穷小的刻划. 基于他们的结果，N. R. Wallach 终于在 Casimir 算子的特征函数的某个空间上实现了所有的离散系列表示，这还提供了 Langlands 猜想的另一个证明. 在 $SL(2, \boldsymbol{R})$ 的不可约酉表示中，有一种类型，Bargmann 把它归入离散类. 但事实上并不是离散类. 这些表示通称离散系列的极限. A. W. Knapp 和岡本 [47] 把离散系列的这样的极限的 Bargmann 构造推广到 Hermite 对称空间的运动群，并把这些推广应用到可约主系列的分解上. 三鳥川寿一[53]把这个结果推广到秩为 1 的实半单 Lie 群的情形. 平井武[44]计算了主系列的特征标，特别是，给出了计算离散系列的特征标的明显公式的方法. 应用 Borel-Weil-Bott 定理（对于非紧型的）和 Parthasarathy 定理到旗流形的纤维，J. A. Wolf [72]得到了主系列的几何实现. 这个结果也许可以认为是构造一个"任意" Lie 群的不可约酉表示的 Kostant 方法 [49] 的一个例子. 应用 L. Auslander 和 C. C. Moore [32] 的一个结果，Auslander 和 Kostant [31] 证明了 Kostant 定理给出 I 型的可解 Lie 群的所有不可约酉表示. 另一方面，竹之内脩[64]证明了指数群是 I 型的. 对于指数群，P. Bernat [33] 仅用了"实"极化，得到了所有不可约酉表示. L. Pukánszky[56]确定了对于这样的群的所有"可能"的极化. 对于一个任意可解群，即使是 I 型的，为了得到所有不可约表示，我们一般必须用"复"极化，振子群就是这个情形（→R. F. Streater [62]）. 因此，考虑由 R. J. Blattner [35]，J. Dixmier [37] 等研究过的"部分全纯"诱导表示是重要的. 在 Kostant 理论中，关键是极化的存在. 然而，对于单 Lie 群，脇本実[69]证明了，极化存在当且仅当群为型（AI—AIII），$SO(n, 1)$ 或（EIV）. 他又证明大部分连续主系列可由 Kostant 方法来构造.

Paley-Wiener 型定理在酉表示应用于不变微分方程方面是重要的. Helgason [43]证明了对于球 Fourier 变换的 Paley-Wiener 定理，但未验证某个逐项积分是合法的，而此点又由 R. Gangolli [41] 证明也是正确的. Helgason 应用这个结果得到了关于对称空间的 Paley-Wiener 定理，江口正晃，橋爪道彦和岡本[39]把它推广到广义函数上去. 清水義之[61]证明了一个关于广义 Lorentz 群的某个齐性空间的类似的定理. 杉浦光夫[63]，Д. П. Желобенко [73]，熊原啓作和岡本 [50]，安藤韶一[29]分别得到了关于紧 Lie 群、复半单 Lie 群、Euclid 运动群和二维仿射变换群的 Paley-Wiener 定理. J. G. Arthur [30] 和江口[38] 分别证明了对于实秩 1 的半单 Lie 群上的 Harish-Chandra 快速下降函数和对于只有一个 Cartan 子群的共轭类的半单 Lie 群的 Paley-Wiener 型定理. P. C. Trombi 和 Varadarajan [66] 对于对称空间上的 L^p 快速下降球带函数得到了一条类似的定理. P. J. Sally 和 G. Warner [57] 研究了不变广义函数的 Fourier 变换. 缠结算子在 Paley-Wiener 型理论中非常重要，R. A. Kunze 和 Stein [51]，Knapp 和 Stein [48]，G. Schiffmann [59]，土川真夫[67]等对这种算子作了研究.

p-adic 域 K_p 上的线性代数群的酉表示最初是由 F. I. Mautner 进行研究的，他计算了 $PGL(2, K_p)$ 的球函数和 Plancherel 测度[80]. 佐武 [82] 系统地发展了约化 p-adic 群上的球函数理论. 这些结果类似于实的情形，但比它更简单. Macdonald [78] 求出了球函数和 Plancherel 测度的明显的形式. Bruhat [74] 研究了可约 p-adic 群由它们的抛物子群的表示所诱导的表示，证明了与实的经典理论相平行的结果. Гельфанд 和 Граев [75] 给出任意局部紧非离散交换域 k 上的 $SL(2, k)$ 的酉表示的统一理论. 他们证明了由 $SL(2, k)$ 上紧环面的特征标作为参数化的平方可积表示的某个系列存在. 他们还发现了 p-adic SL_2 的"特殊表示"，讨论了 Plancherel 公式和特征标关系. J.

A. Shalika [83] 和田中俊一[27]应用 Weil 的结果 [86] 简化了 [75] 中的离散系列的构造方法. 另一方面, Mautner [80] 注意到, 当 k 是一个 $\mathfrak{p}$-adic 域, 则 $SL(2, k)$ 有由一个最大紧子群的表示所诱导的平方可积表示. 这在[83]和 [85] 中得到进一步的发展. Harish-Chandra [76] 证明了 $\mathfrak{p}$-adic 可约群的不可约表示的特征标也是局部可积函数. Shalika [84] 和松本英也[79]研究了 $\mathfrak{p}$-adic 可约群的"特殊表示". 关于这些方面的最近发展, 参考 [87] 中有关的文献. $\mathfrak{p}$-adic 线性群的酉表示理论与自守形式的群论方法有密切的关系(→[77], [82], [86]).

【参】 [1] V. Bargmann, Irreducible unitary representations of the Lorentz group, Ann. of Math., (2) **48** (1947), 568—640; [2] F. Bruhat, Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France, **84** (1956), 97—205; [3] J. Dixmier, Les C*-algébres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1964; [4] И. М. Гельфанд-М. И. Граев-Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории предс, тавлений, Физматгиз, 1962; [5] I. M. Gel'fand (И. М. Гельфанд)- M. A. Neumark (М. А. Наймарк), Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen, Akademische Verlag., 1957; [6] И. М. Гельфанд-И. И. Пятецкий-Шапиро, Теория представлений и теория автоморфных функций, Успехи Мат. Наук, **14** (1959), 171—194; [7] Harish-Chandra, Representations of a semisimple Lie group on a Banach space I-VI, Trans. Amer. Math. Soc., **75** (1953), 185—243; **76** (1954), 26—65; **76** (1954), 234—253; Amer. J. Math., **77** (1955), 743—777; **78** (1956), 1—41; **78** (1956), 564—628; [8] Harish-Chandra, A formula for semisimple Lie groups, Amer. J. Math., **79** (1957), 733—760; [9] Harish-Chandra, Invariant eigendistributions on a semisimple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., **119** (1965), 457—508; [10] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic press, 1962; [11] А. А. Кириллов, Унитарные представления нилпотентных групп Ли, Успехи Мат. Наук, **17**, no. 4 (1962), 57—110; [12] B. Kostant, Orbits, symplectic structures and representation theory, Proc. U. S.-Japan Sem. on Diff. Geometry, Kyoto, 1965, Nippon Hyoronsha, 1966, p. 71; [13] G. W. Mackey, Infinite-dimensional group representations, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 628—686; [14] L. Ehrenpreis-F. I. Mautner, Some properties of the Fourier transform on semisimple Lie groups I—III, Ann. of Math., (2) **61** (1955), 406—439; Trans. Amer. Math. Soc., **84** (1957), 1—55; **90** (1959), 431—484; [15] E. Nelson, Analytic vectors, Ann. of Math., (2) **70** (1959), 572—615; [16] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., **20** (1956), 47—87; [17] 吉沢尚明, 群の表現と球函数, 数学, **12** (1960), 21—37; [18] Д. П. Желобенко, О гармоническом анализе функций на полупростых группах Ли I, Изв. Акад. Наук СССР **27** (1963), 1343—1394; [19] И. М. Гельфанд-М. И. Граев-И. И. Пятецкий-Шапиро, Теория представлений и автоморфные фуикции, Наука, 1966; [20] С. Г. Гиндикин-Ф. И. Карпелевич, Об одном интеграле, связанном с Римановыми симметрическими пространствами неположительной кривизны, Изв. Акад. Наук СССР, **30** (1966), 1147—1156; [21] Harish-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, II, Amer. J. Math., **80** (1958), 241—310, 553—613; [22] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups I, II, Acta Math., **113** (1965), 241—318; **116** (1966), 1—111; [23] Harish-Chandra, Two theorems on semi-simple Lie groups, Ann. of Math., (2) **83** (1966), 74—128; [24] Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, Наука, 1965; [25] ユニタリ表現特集号, 数学, **19** (1967) 第3号; [26] R. Takahashi (高橋礼司), Sur les représentations unitaires des groups de Lorentz généralisés, Bull. Soc. Math. France, **91** (1963), 289—433; [27] S. Tanaka (田中俊一), On irreducible unitary representations of some special linear groups of the second order, I, II, Osaka J. Math., **3** (1966), 217—227, 229—242; [28] E. M. Stein, Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(N, C)$, Ann. of Math., (2) **86** (1967), 461—490; [29] S. Ando (安藤韶一), An analogue of the Paley-Wiener theorem for the group of linear transformations on the straight line, J. Math. Kyoto Univ., **14** (1974), 195—213; [30] J. G. Arthur, Harmonic analysis of tempered distributions on semisimple Lie groups of real rank one, Ph. D. Thesis, Yale University, 1970; [31] L. Auslander-B. Kostant, Quantization and representations of solvable Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 692—695, L. Auslander-B. Kostant, Polarization and unitary representations of solvable Lie Groups, Inventiones Math., **14** (1971), 255—354; [32] L. Auslander-C. C. Moore, Unitary representations of solvable Lie groups, Mem. Amer. Math. Soc., no. 62, 1966; [33] P. Bernat, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **82** (1965), 37—99; [34] P. Bernat-N. Conze-M. Duflo-M. Lévy-Nahas-M. Rais-P. Renouard-M. Vergne, Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, 1972; [35] R. J. Blattner, On induced representations, Amer. J. Math., **83** (1961), 79—98, 499—512, [36] J. Brezin, Unitary representation theory for solvable Lie groups, Mem. Amer. Math. Soc. no. 79, 1968; [37] J. Dixmier, Representations induites holomorphes des groups résolubles algébriques, Bull. Soc. Math. France, **94** (1966), 181—206; [38] M. Eguchi (江口正晃), The Fourier transform of the Schwartz space on a semisimple Lie group, Hiroshima Math. J., **4** (1973), 133—210; [39] M. Eguchi (江口正晃)-M. Hashizume (橋爪道彦)-K. Okamoto (岡本清郷), The Paley-Wiener Theorem for Distributions on Symmetric Spaces, Hiroshima Math. J., **3** (1973), 109—120; [40] T. J. Enright-V. S. Varadarajan, On an infinitesimal characterization, Ann. of Math., (2) **102** (1975), 1—15;

[41] R. Gangolli, On the Plancherel formula and the Paley-Wiener theorem for spherical functions on a semisimple Lie group, Ann. of Math., (2) **93** (1971), 150—165; [42] Harish-Chandra, Harmonic analysis on semisimple Lie groups, Bull. Amer. Soc., **76** (1970), 529—551, Harish-Chandra, On the theory of the Eisenstein integral, Lecture notes in math. 266, Springer, 1972, p. 123—149; [43] S. Helgason, An analogue of the Paley-Wiener theorem for the Fourier transform on certain symmetric spaces, Math. Ann., **165** (1966), 297—308; S. Helgason, A duality for symmetric spaces with applications to group representations, Advances in Math., **5** (1970), 1—154; S. Helgason, Paley-Wiener theorems and surjectivity of invariant differential operators on symmetric spaces and Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., **79** (1973), 129—132; [44] T. Hirai (平井武), The characters of some induced representations of semisimple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., **8** (1968), 313—363; T. Hirai (平井武), Explicit form of the characters of discrete series representations of semisimple Lie groups, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math., vol. 26, p. 281—287; T. Hirai (平井武), Invariant eigendistributions of Laplace operators on semisimple Lie groups I. Case of $SU(p,q)$, Japan J. of Math., **40** (1970), 1—68; [45] R. Hotta (堀田良之), Elliptic complexes on some homogeneous spaces, Osaka J. Math., **7** (1970), 117—160; R. Hotta(堀田良之), On the realization of the discrete series for semisimple Lie groups, J. Math. Soc. Japan, **23** (1971), 384—407; [46] R. Hotta(堀田良之)-R. Parthasarathy, Multiplicity formulae for discrete series, Inventiones Math., **26** (1967), 133—178; [47] A. W. Knapp-K. Okamoto (岡本清郷), Limits of holomorphic discrete series, J. Functional Analysis, **9** (1972), 375—409; [48] A. W. Knapp-E. M. Stein, Intertwining operators for semisimple groups, Ann. of Math., **93** (1971), 489—578; [49] B. Kostant, Quantization and unitary representations, Lecture notes in math. 170, Springer, 1970, p. 87—207; [50] K. Kumahara(熊原啓作)-K. Okamoto (岡本清郷), An analogue of the Paley-Wiener theorem for the Euclidean motion group, Osaka J. Math., **10** (1973), 77—92; [51] R. A. Kunze-E. M. Stein, Uniformly bounded representations III. Intertwining operators for the principal series on semisimple groups, Amer. J. Math., **89** (1967), 385—442; [52] R. P. Langlands, Dimension of spaces of automorphic forms, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math., vol. 9, 1966, p. 253—257; [53] H. Midorikawa (三鳥川寿一), On certain irreducible representations for the real rank one classical groups. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **21** (1974), 435—459; [54] M. S. Narasimhan-K. Okamoto (岡本清郷), An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for Hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann. of Math., (2) **91** (1970), 486—511; [55] R. Parthasarathy, Dirac operator and discrete series, Ann. of Math., (2) **96** (1972), 1—30; [56] L. Pukánszky, On the unitary representations of exponential groups, J. Functional Analysis, **2** (1968), 73—113; [57] P. J. Sally-G. Warner, The Fourier transform of invariant distributions, Lecture notes in math. 266, Springer, 1971, p. 297—320; [58] I. Satake (佐武一郎), Unitary representations of a semi-direct product of Lie groups on cohomology spaces, Math. Ann., **190** (1971), 177—202; [59] G. Schiffmann, Intégrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker, Bull. Soc. Math. France, **99** (1971), 3—72; [60] W. Schmid, On a conjecture of Langlands, Ann. of Math., (2) **93** (1971), 1—42; W. Schmid, On the realization of the discrete series of a semisimple Lie group, Rice University Studies, **56** (1970), 99—108; [61] Y. Shimizu (清水義之), An analogue of the Paley-Wiener theorem for certain function spaces on the generalized Lorentz group, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **16** (1969), 13—51; [62] R. F. Streater, The representations of the oscentific group, Comm. Math. and Phys. **4** (1967), 217—236; [63] M. Sugiura (杉浦光夫), Fourier series of smooth functions on compact Lie group, Osaka J. Math. **8** (1971), 33—47; [64] O. Takenouchi (竹之内脩), Sur une classe de fonctions continus de type positif sur un groupe localement compact, Math. J. Okayama Univ., **4** (1955), 143—173; [65] M. Takesaki (竹崎正道)- N. Tatsuuma (辰馬伸彦), Duality and subgroups, Ann. of Math., (2) **93** (1971), 344—364; [66] P. C. Trombi-V. S. Varadarajan, Spherical transforms on semisimple Lie groups, Ann. of Math., (2) **94** (1971), 246—303; [67] M. Tsuchikawa (土川真夫), On the representations of $SL(3,C)$ I, II, III, Proc. Japan Acad., **43** (1967), 852—855; **44** (1968), 127—129, 130—132; [68] D. N. Verma, Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras, Bull. Amer. Math. Soc., **74** (1968), 160—166; [69] M. Wakimoto, (脇本実), Polarizations of certain homogeneous spaces and most continuous principal series, Hiroshima Math. J., **2** (1972), 483—533; [70] N. Wallach, Induced representations of Lie algebras and a theorem of Borel-Weil, Trans. Amer. Math. Soc., **136** (1969), 181—187; [71] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, II, Springer, 1972; [72] J. A. Wolf, Partially harmonic spinors and representations of reductive Lie groups, J. Functional Analysis, **15** (1974), 117—154; J. A. Wolf, Unitary representations on partially holomorphic cohomology spaces, Mem. Amer. Math. Soc., no. 138, 1974; [73] D. P. Zelobenko (Д. П. Желобенко), Complex harmonic analysis on semesimple Lie groups, Proc. Intern. Congress Math. 1974, Vancouver, vol. 2, p. 129—134 (英译本: Amer. Math. Soc. Transl., (2) (1974)). 对于 p-adic 情形, [74] F. Bruhat, Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes p-adiques, Bull. Soc. Math. France, **89** (1961), 43—75; [75] И. М. Гельфанд-М. И. Граев, Representations of the group of second order matrices with elements in a locally compact field and special functions on locally compact fields, Успехи. Мат. Наук, **18** (1963), 29—99; [76] Harish-Chandra (note by van Dijk), Harmonic analysis on reductive p-adic groups, Lecture notes in math. 162, Springer, 1970; [77] H. M. Jacquet-R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture notes in math. **114**, Springer, 1970; [78] I. G. Macdonald, Spherical functions on a group of p-adic type, Ramanujan Institute Publication, 1971; [79] H. Matsumoto (松本英也), Fonc

tions sphériques sur un groupe semisimple 𝔭-adique, C. R. Acad. Sci. Paris, **269** (1969), 829—832; [80] F. I. Mautner, Spherical functions on 𝔭-adic fields I, II, Amer. J. Math., **80** (1958), 441—457; **86** (1964), 171—200; [81] I. Satake (佐武一郎), Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over 𝔭-adic fields, Publ. Math. Inst. HES, **18** (1963), 5—70; [82] I. Satake (佐武一郎), Spherical fuctions and the Ramanujan conjecture, Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math, vol. 9, 1966, p. 258—264; [83] J. A. Shalika, Representations of the two by two unimodular group over local fields, Lecture note, Institute for Advanced Study, 1966; [84] J. A. Shalika, On the space of cusp forms of a 𝔭-adic Chevalley group Ann. of Math., (2) **92** (1970), 262—278; [85] T. Shintani (新谷卓郎), On certain square integrable irreducible unitary representations for some 𝔭-adic linear groups, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 522—565; [86] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires, Acta Math., **111** (1964), 143—211; [87] Harmonic analysis on homogeneous spaces, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math., vol. 268, 1973; [88] H. Hecht-W. Schmid, A proof of Blattner's conjecture, Inventiones Math., **31** (1975), 129—154.

不变测度 [英 invariant measure 法 mesure invariante 德 invariantes Mass 俄 инвариантная мера 日 不変測度] 【定义】 设在X的子集所构成的完全加法族†$\mathfrak{B}$上定义了一个测度†μ，而G是左(或右)作用于X的变换群†，且当$A\in\mathfrak{B}$，$s\in G$时，有$sA\in\mathfrak{B}$(或$As\in\mathfrak{B}$)。这时，对于$s\in G$，由$(\gamma(s)\mu)(sA)=\mu(A)$(或由$(\delta(s)\mu)(As)=\mu(A)$)定义$\mathfrak{B}$上的一个测度$\gamma(s)\mu$(或$\delta(s)\mu$)。若对所有的$s\in G$有$\gamma(s)\mu=\mu$，则称$\mu$是关于变换群$G$的**左不变测度**(left invariant measure)或左G不变测度。同样地，若对所有的$s\in G$有$\delta(s)\mu=\mu$，则称μ为右G不变测度。

以下考虑G是拓扑群，X是局部紧 Hausdorff 空间，而G是X的拓扑变换群†的情形。又设$\mathfrak{B}$是包含X的紧子集的全体$\mathfrak{C}$的最小σ加法族†，而测度μ对于任意的$K\in\mathfrak{C}$都有$\mu(K)<\infty$(→测度)。把定义在X上且具有紧支集†的实值连续函数的全体记为$C_0(X)$。例如，设X是定向† Riemann 流形†，ω是与X上的 Riemann 度量相关的体积元素†，则在X上存在唯一的测度μ，使得对于任意的$f(x)\in C_0(X)$，有

$$\int_X f(x)d\mu(x)=\int_X f\omega. \qquad (1)$$

这个测度μ对于X的等距变换†群G是不变的。在X为非定向的情形，也能从 Riemann 度量作出G不变测度。

下面考虑局部紧 Hausdorff 拓扑群†(以下把它简称为局部紧群)G的齐性空间†X上的G不变测度。

【Haar 测度】 最基本的情形是：G为局部紧群，$X=G$，sx(或xs)就是群G内的乘法。这时把G上的非零G不变测度称为G的**左不变(或右不变)Haar 测度**(left (right) invariant Haar measure)。在任意的局部紧群上，若不计正的常数因子，则左不变(右不变) Haar 测度是唯一存在的(Haar 定理)。

例：实数加法群$\boldsymbol{R}$以及加法群$\boldsymbol{R}^n$的 Haar 测度就是通常的 Lebesgue 测度†。正实数的乘法群R_+^*的 Haar 测度μ由

$$\int_0^\infty f(x)d\mu(x)=\int_0^\infty f(x)dx/x$$

所定义。当G是n维 Lie 群†时，G的左不变 Haar 测度μ是利用G上的左不变n次微分形式†ω由(1)式来定义的。

局部紧群G的 Haar 测度μ在下述意义下是正则†的。即设G的开集的全体为$\mathfrak{D}$，则对任意的$A\in\mathfrak{B}$，有

$$\mu(A)=\sup\{\mu(K)\mid K\in\mathfrak{C},K\subset A\}$$
$$=\inf\{\mu(U)\mid U\in\mathfrak{B}\cap\mathfrak{D},A\subset U\}.$$

对于$U\in\mathfrak{B}\cap\mathfrak{D}(U\neq\phi)$，有$\mu(U)>0$；对于紧的$A$，有$\mu(A)<\infty$(→Lebesgue 积分[Radon 测度])。一点s的测度$\mu(s)>0$的充分必要条件是G为离散空间†。又G的外测度$\mu^*(G)<\infty$的充分必要条件是G为紧的。

【模】 设μ是局部紧群G的左不变 Haar 测度。因为$\delta(s)\mu$也是G的一个左不变 Haar 测度，所以根据 Haar 测度的唯一性，存在正实数$\Delta(s)$，使$\delta(s)\mu=\Delta(s)\mu$。$G$上的函数$\Delta=\Delta_G$称为$G$的**模**(module)。对于$G$上关于$\mu$为可积的任意函数$f(x)$，以下等式成立：

$$\int_G f(xs)d\mu(x) = \Delta(s)^{-1}\int_G f(x)d\mu(x),$$

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x)^{-1}d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x).$$

设 ν 是 G 上的右不变 Haar 测度，则下式成立：

$$\int_G f(sx)d\nu(x) = \Delta(s)\int_G f(x)d\nu(x),$$

$$\int_G f(x^{-1})\Delta(x)d\nu(x) = \int_G f(x)d\nu(x).$$

又，$\Delta^{-1}\mu$ 是一个右不变 Haar 测度，$\Delta\nu$ 是一个左不变 Haar 测度.

G 的模 Δ 是 G 到正实数的乘法群 R_+^* 内的一个连续同态. 如果 G 的模 Δ 在 G 上恒等于1，即 G 的左不变 Haar 测度也是右不变的，则称 G 是**幺模的**(unimodular). 如果 G 是紧的，交换的，或者离散的，则 G 是幺模的. 当 G 为 Lie 群[†]时，若把 G 的伴随表示[†]记为 $s\to \mathrm{Ad}(s)$，则 $\Delta(s) = |\det \mathrm{Ad}(s)^{-1}|$. 特别是，如果 G 是半单[†] Lie 群，连通幂零[†] Lie 群，或 Ad G 是紧 Lie 群，则 G 是幺模的. 但 n 阶上三角形矩阵全体构成的群 $T(n;\boldsymbol{R})$ $(n>1)$ 不是幺模的.

【直积】 设 $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族局部紧群，对于每个 $\alpha\in A$，G_α 的左不变 Haar 测度为 μ_α. 假定存在 A 的有限子集 B，使得对于任意的 $\alpha\in A-B$，G_α 为紧且 $\mu_\alpha(G_\alpha)=1$. 这时，直积测度[†] $\mu=\prod_{\alpha\in A}\mu_\alpha$ 是局部紧直积群[†] $G=\prod_{\alpha\in A}G_\alpha$ 的左不变 Haar 测度. 又若设 G 的模为 Δ_G，则 $\Delta_G(x)=\prod_{\alpha\in A}\Delta_{G_\alpha}(x_\alpha)(x=(x_\alpha)_{\alpha\in A})$.

【乘积公式】 设 H, L 为局部紧群 G 的两个闭子群，并设 $\Omega=HL$ 包含 G 的单位元 e 的一个邻域. 也就是说，Ω 是 G 的开集. 令 $D=\{(s,s)|s\in H\cap L\}$，则 $H\times L$ 到 Ω 内的映射 $(s,t)\to st^{-1}$，诱导商空间 $H\times L/D$ 到 Ω 上的一个一一连续映射 φ. 假定 φ 是一个同胚. 例如当 G 为仿紧时，这个假定就被满足. 再假定 $H\cap L$ 是紧的，μ, μ_H, μ_L 分别是 G, H, L 上的左不变 Haar 测度，则以下的积分公式成立：

$$\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega)$$

$$= a\iint_{H\times L} f(hl)\Delta_G(l)\Delta_L(l)^{-1}\,d\mu_H(h)d\mu_L(l),$$

其中 $a>0$ 是与 f 无关的常数. 这个公式称为**乘积公式**(product formula).

【Weil 测度】 假定 A 是关于左不变 Haar 测度 μ 的可测集，且 $\mu(A)>0$，则 $A^{-1}A=\{s^{-1}t|s,t\in A\}$ 是 G 的单位元 e 的一个邻域，且这样的子集形成单位元的邻域系的一个基. 这就证明，局部紧群的拓扑由它的 Haar 测度所确定. 反过来，我们将考虑从抽象群 G 的测度 μ 出发，在 G 上引入拓扑结构.

设 μ 是定义在 G 的 σ 可加族 $\mathfrak{B}$ 上的 σ 有限测度，$\mathfrak{B}$ 还满足：当 $A\in\mathfrak{B}$ 时，对任意的 $s\in G$，有 $sA\in\mathfrak{B}$. 当 μ 满足下述条件 W1)，W2) 时，称 μ 为 G 上的左不变 **Weil 测度**(Weil measure). W1) $\mu(sA)=\mu(A)$; W2) 若 $f(x)$ 为 $\mathfrak{B}$ 可测，则 $f(xy^{-1})$ 为 $\mathfrak{B}\times\mathfrak{B}$ 可测.

当群 G 内存在 Weil 测度 $\mu\neq 0$ 时，如果引入以 $\{A^{-1}A|\mu(A)>0\}$ 为单位元的邻域基的拓扑，则 G 就成为局部全有界[†]的拓扑群. 此时，如果对于每个 $s\in G$，存在 $A\in\mathfrak{B}$，使得 $\mu(A\cap sA)<\mu(A)<\infty$，$\mu(A)>0$，则 G 成为 Hausdorff 空间. 这时，若作出 G 的完备化[†] $\bar{G}$，则 $\bar{G}$ 是局部紧群. 如果取 $\bar{G}$ 的适当的左不变 Haar 测度 $\bar{\mu}$，则对任意的 $\bar{A}\in\bar{\mathfrak{B}}$ ($\bar{G}$ 的完全加法族)，有 $A=\bar{A}\cap G\in\mathfrak{B}$，$\mu(A)=\bar{\mu}(\bar{A})$.

【相对不变测度】 当群 G 是左作用于集合 X 的变换群时，设 μ 是 X 上的测度，如果对于任意的 $s\in G$，$\gamma(s)\mu$ 都与 μ 成比例，即 $\gamma(s)\mu=\chi(s)\cdot\mu$ ($\chi(s)\in\boldsymbol{R}_+^*$)，则称 μ 为关于 G 的**相对不变测度**(relative invariant measure). 若 $\mu\neq 0$，则 $\chi(s)$ 由 s 唯一确定，$s\to\chi(s)$ 是 G 到正实数的乘法群 $\boldsymbol{R}_+^*$ 内的一个连续同态. χ 称为相对不变测度 μ 的**乘子**(multiplicator).

以下考虑局部紧群 G 对闭子群 H 的商空间[†] G/H 上的关于 G 的相对不变测度. 设 μ，β 分别是 G，H 的左不变 Haar 测度，从 G 到

G/H 上的典范映射为 $x \to x^*$. 对于 G/H 上的任意测度 λ, 群 G 上存在唯一的满足以下条件的测度 $\lambda^\#$: 对于G上具有紧支集的任意的连续函数f,

$$\int_{G/H}\left(\int_H f(xh)d\beta(h)\right)d\lambda(x^*)=\int_G f(x)d\lambda^\#(x)$$

成立. 这时 $\lambda^\#$ 满足: 对于任意的 $h\in H$, 有 $\delta(h)\lambda^\# = \Delta_H(h)\lambda^\#$. 反之,如果$G$上的测度$\nu$满足: 对于任意的 $h\in H$, 有 $\delta(h)\nu=\Delta_H(h)\nu$, 则在 G/H 上存在唯一的测度 λ, 使得 $\lambda^\# = \nu$. 这个测度 λ 称为 ν 对 β 的**商测度**(quotient measure), 记为 $\lambda = \nu/\beta$. 现在设χ为G到正实数的乘法群 $\boldsymbol{R}_+^*$ 内的连续同态, 则 G/H 上存在以χ为乘子的非零的G相对不变测度的充分必要条件是: 对于任意的 $h\in H$, $\chi(h) = \Delta_H(h)/\Delta_G(h)$ 成立. 如果这个条件满足,当不计常倍数时, G/H上的以χ为乘子的G相对不变测度ν是唯一存在的.这个ν由$\chi\mu$对β的商测度所给出: $\nu=(\chi\mu)/\beta$. 特别是,G/H上的G不变测度存在的充分必要条件是模 Δ_G 与 Δ_H 在H上重合. 因此, 如果 G, H 是幺模的, 则在 G/H 上存在一个不变测度.

【Weyl 积分公式】 设G是紧连通半单†Lie群,H是它的一个 Cartan 子群† (极大环面子群†). 此时G的 Haar 测度μ可由H的Haar测度β以及 G/H 上的G不变测度λ表出. 也就是说, 如果 μ, β, λ 都是全测度为 1 的正规化测度,则对于G上任意的连续函数f, 以下的积分公式成立:

$$\int_G f(g)d\mu(g)$$
$$=\frac{1}{w}\int_H\int_{G/H} f(ghg^{-1})J(h)\,d\lambda(g^*)d\beta(h).$$

这称为 **Weyl 积分公式** (Weyl's integral formula). 其中w是G的 Weyl 群†的阶, $J(h)$ 如下给出: 设G关于H的正根†α的全体为 P, X是H的 Lie 代数†的任意元,则

$$J(\exp X) = \left|\prod_{\alpha\in P}\left(e^{\alpha(X)/2}-e^{-\alpha(X)/2}\right)\right|^2.$$

这时,虽然把H的元 h 写成 $h=\exp X$ 时, X不是唯一确定的, 但 J 是H上的单值函数. 对于对称 Riemann 空间,类似的公式也成立. 又对于非紧的半单 Lie 群, 也能推广上述积分公式. 不过这时必须作一些修正, 即把上式右端改成关于互不共轭的 Cartan 子群的代表系的和.

【拟不变测度】 当群G是左作用于集合X的变换时,如果对任意的 $s\in G$, $\gamma(s)\mu$ 与μ等价,则称μ是关于 G 的**拟不变测度** (quasi-invariant measure). 这里定义在 $\mathfrak{B}$ 上的两个测度 λ, μ **等价** (equivalent) 是指: 存在适当的可测函数 $g(x)$, $g(x)$ 满足 i) 关于μ几乎处处>0, ii) 在任意的 $A\in\mathfrak{B}$ ($\mu(A)<\infty$) 上为μ可积; 而且有 $\lambda = g\mu$. 以下考虑局部紧群G对闭子群H的商空间 G/H 上的G拟不变测度. 此时在 G/H 上总存在关于G的拟不变测度, 并且 G/H 上的G拟不变测度都是互相等价的.G/H上的G拟不变测度可按下述方式作出. 存在总是取正值的G上的连续函数 ρ, 对于任意的 $g\in G$ 与 $h\in H$, 满足 $\rho(gh)=\Delta_H(h)\Delta_G(g)^{-1}\rho(g)$. 对于这样的 ρ, 作商测度 $\lambda=(\rho\mu)/\beta$, 则λ就是 G/H 上的非零 G 拟不变测度. 其中 μ, β 是 G, H 的 Haar 测度. 特别当G为 Lie 群时, 可把上述的函数ρ取为 C^∞ 类函数†. 又若 $\boldsymbol{R}$ 上的局部凸拓扑向量空间X为无限维,则在X上的σ有限 Borel 测度中, 不存在关于由X的元所作的平移(translation)为拟不变的测度 (→[8]).

【参】 [1] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Intégration, chap. 7, 8, Actualités Sci. Ind., 1306, Hermann, 1963; [2] P. R. Halmos, Measure theory, van Nostrand, 1950; [3] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962; [4] 功力金二郎, 実函数論および積分論, 共立出版, 1957, [5] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940; [6] 河田敬義, 積分論, 共立出版, 1959, [7] L. H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, van Nostrand, 1953; [8] Y. Umemura (梅村泰郎), Measures on infinite dimensional vector spaces, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 1 (1965), 1—47; [9] A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math., **34** (1933), 147—169; [10] J. von Neumann, The uniqueness of Haar's measure, Mat. Сборник. **1** (1936), 721—734; [11] H. Cartan, Sur la mesure de Haar, C. R. Acad. Sci. Paris, **211** (1940), 759—762.

不变式和共变式 [英 invariant and covariant 法 invariant et covariant 德 Invariant und Kovariant 俄 инвариант и ковариант 日 不変式と共変式] 【一般情形】 设R是环，G是群．如果G的每个元σ确定R的一个自同构† $f\to\sigma f$ ($f,\sigma f\in R$)，并且对于任何$\sigma,\tau\in G$，都有$\sigma(\tau f)=(\sigma\tau)f$，则称群$G$**作用**(act)于环$R$．在这种情形下，如果$\sigma f=f(\forall\sigma\in G)$，则称环$R$的元$f$是**G不变元**($G$-invariant)或简称**不变元**(invariant)．如果对于每个$\sigma\in G$，都有$\sigma f=a(\sigma)f(a(\sigma)\in R)$，这里$a(\sigma)$是不变元，则称$f$是($G$)**半不变元**(semi-invariant)或**相对不变元**(relative invariant)．与此相对应，不变元也称作**绝对不变元**(absolute invariant)．对应$\sigma\to a(\sigma)$ mod$(0:f)((0:f)=\{x\in R|xf=0\})$是$G$的次数为1的表示†，$a(\sigma)$称为半不变元的**乘子**(multiplier)或由f决定的**特征标**(character)．

【矩阵群的不变元】 设K是具有单位元†的交换环†，G是K上的**矩阵群**(matrix group)，即由K上全体n阶可逆矩阵组成的一般线性群† $GL(n,K)$的子群．设R是在K上由有限个元$x_1,\cdots,x_n$生成的环，$\sigma=(\sigma_{ij})\in G$在$R$上的作用由下式定义：${}^t(\sigma x_1,\cdots,\sigma x_n)=\sigma^t(x_1,\cdots,x_n)$ (^{t}表示矩阵的转置†)．在这种情形下，就说G作为矩阵群而作用于R．如果K是域，则$GL(n,K)$内包含G的最小代数群† $\bar G$作为矩阵群作用于R，并且R的元f是$\bar G$不变元当且仅当f是G不变元．对于半不变元也是这样．这些结论可以推广到K不是域的情形．

从矩阵群G ($\subset GL(n,K)$)到$GL(m,K)$的同态† ρ称为G的**有理表示**(rational representation)，如果存在n^2个变量x_{ij} ($1\leqslant i,j\leqslant n$)的、系数取在$K$内的有理函数$\varphi_{kl}$ ($1\leqslant k,l\leqslant m$)，使得对于所有$(\sigma_{ij})\in G$，都有$\rho((\sigma_{ij}))=(\varphi_{kl}(\sigma_{ij}))$．假定$\rho$是矩阵群$G$的一个有理表示，而且$\rho(G)$作为矩阵群作用于环$R$，于是就有由$\sigma f=(\rho\sigma)f$ ($\sigma\in G,f\in R$)所定义的G在R上的一个作用，称为由ρ决定的**有理作用**(rational action)．如果还满足以下的条件，则这种作用称为**半可简约的**(semi-reductive)：若$N=f_1K+\cdots+f_rK$ ($f_i\in R$)是G容许模†，而且f_0 mod N ($f_0\in R$)是G不变元，则存在$f_0,\cdots,f_r$的系数在K内的(次数为正的)齐次式† h，使f_0的最高次系数为1(monic)，而且是G不变元．如果在这个条件下，h总能选成一次式，则这种作用称为**可简约的**(reductive)．

1) 在下列三种情形，矩阵群G的有理作用都是可简约的．i) K是实数域或复数域，且G是一个Lie群† ($\subset GL(n,K)$)的稠密子集，而这Lie群是半单的†或紧的†．ii) K是特征†为0的域，而且包含G的最小代数群的根基(=最大连通可解正规子群)是环面群(=与有限个K的乘法群的直积同构的群)．iii) K是特征为p的域，而且包含G的最小代数群包含一个指数†为有限数n的环面群，这n是与p互素的．

2) 有限群的任何作用都是半可简约的．如果在上面ii)的情形中去掉K的特征为0的条件，则G的有理作用是半可简约的．这是最近由W. J. Haboush证明了的所谓Mumford猜想．

3) 假定φ是环R到环R'上的G容许的同态†．我们把R和R'内的G不变元的集合分别记作$I_G(R)$和$I_G(R')$．a) 若G的作用是可简约的，则有：i) $\varphi(I_G(R))=I_G(R')$；ii) 如果$h_i\in I_G(R)$，则$\left(\sum_i h_iR\right)\cap I_G(R)=\sum_i h_iI_G(R)$；iii) 如果$K$是Noether环，则$I_G(R)$在$K$上是有限生成的．b) 若$G$的作用是半可简约的，则有：i) 对于$I_G(R')$的每个元$a$，存在自然数$t$，使$a^t\in\varphi(I_G(R))$，因而$I_G(R')$在$\varphi(I_G(R))$上是整的†；ii) 如果$h_i\in I_G(R)$，而且$f\in\left(\sum_i h_iR\right)\cap I_G(R)$，则$f$有一个方幂$f^t$属于$\sum_i h_iI_G(R)$；iii) 如果$K$是伪几何环†(当然包括$K$是域的情形)，则$I_G(R)$在$K$上是有限生成的(→[3])．

当$I_G[R]$在K上由$f_1,\cdots,f_s$生成时，$f_1,\cdots,f_s$称为**基本不变元**(basic invariants)．

【多项式环的情形】 设$\rho_1,\cdots,\rho_u$是群G在交换环K上的次数分别为$n_1,\cdots,n_u$的矩阵

表示. 设 $x_j^{(i)}$ $(1\leqslant i\leqslant u, 1\leqslant j\leqslant n_i)$ 是K上 Σn_i 个代数无关†的元. 由 ${}^t(\sigma x_1^{(i)},\cdots,\sigma x_{n_i}^{(i)})=\rho_i(\sigma){}^t(x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)})$ 定义 G 在多项式环† $K[x_1^{(1)},\cdots,x_{n_u}^{(u)}]$ 上的一个作用. 在这情形下,不变元、相对不变元、基本不变元等等称为**不变式**、**相对不变式** (relative invariant)、**基本不变式** (fundamental invariant). 一个(相对)不变式是一些对各组 $x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}$ 都是齐次†的(相对)不变式之和. (由于这个原因, 在某些文献里,(相对)不变式就是指对各组 $x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}$ 都是齐次的(相对)不变式.)关于基本不变式的存在,除半可简约作用的情形外,有以下的定理:假定K是特征为 0 的域, G在某个线性代数群 $\bar{G}$ 内在 Zariski 拓扑†下是稠密的,使得 $\bar{G}$ 的根基的幂单†元的全体最多是一维的代数群(当G是一维 Lie 群时这些条件成立), 而且所有 ρ_i 都是有理表示;在上述这些条件下,基本不变式存在 (R. Weitzenböck).

此外,如果G是矩阵群,而且每个 ρ_i 或是恒等映射†,或是逆步映射 $A\to{}^tA^{-1}$,则这种情形下的不变式称为**向量不变式**(vector invariant).

如果K是特征为 0 的域, 则在某些情形下可以具体求出基本不变式和由基本不变式的代数关系式所成的理想†的一个基†(→[1], [2]).

【古典的术语】 不变式的古典理论讨论下列对象. 设K是特征为 0 的域 (例如实数域或复数域), 而且 G 是 $GL(n,K)$. 讨论 n 个元 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的、系数取在K中的 d 次齐次式 $F=\Sigma c_{i_1\cdots i_n}m_{i_1\cdots i_n}$ $(\Sigma i_\alpha=d,\ m_{i_1\cdots i_n}=(d!/\Pi i_\alpha!)\xi_1^{i_1}\cdots\xi_n^{i_n})$. 对于每个 $\sigma\in G$, 由 $(\sigma\xi_1,\cdots,\sigma\xi_n)=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\,\sigma^{-1}$ 来定义 $\sigma\xi_i$, 然后由 $F=\Sigma(\sigma c)_{i_1\cdots i_n}(\sigma m_{i_1\cdots i_n})$ 来定义$(\sigma c)_{i_1\cdots i_n}$.于是变换

$$[\sigma]_d:(c_{d0\cdots0},\cdots,c_{i_1\cdots i_n},\cdots,c_{0\cdots0d})$$
$$\to((\sigma c)_{d0\cdots0},\cdots,(\sigma c)_{i_1\cdots i_n},\cdots,(\sigma c)_{0\cdots0d})$$

是 ${}_{d+n-1}C_{n-1}$ 维仿射空间†的线性变换†. 这个变换的矩阵仍用 $[\sigma]_d$ 表示,就有

${}^t(\cdots,(\sigma c)_{i_1\cdots i_n},\cdots)=[\sigma]_d{}^t(\cdots,c_{i_1\cdots i_n},\cdots)$. 于是 $\varphi_d:\sigma\to[\sigma]_d$ 就是G的有理表示.

现在取定一个F而把系数 $c_{i_1\cdots i_n}$ 看作独立变量, 来讨论由有理表示 φ_d 定义的, G在 ${}_{d+n-1}C_{n-1}$ 个变量的多项式环 $R=K[c_{d0\cdots0},\cdots,c_{i_1\cdots i_n},\cdots,c_{0\cdots0d}]$ 上的作用. 如果 g 是相对不变式, 则使得 $\sigma g=a(\sigma)g$ 的 $a(\sigma)$ 给出 G 的一个有理表示. 因此存在整数 w, 使 $a(\sigma)=(\det\sigma)^w$. 于是 g 称为**权** (weight)为 w 的不变式(注意 g 是 $SL(n,K)$ 的不变式). g 是**绝对不变式** (absolute invariant) 的充分必要条件是 $w=0$. 群G自然地作用于环 $R[\xi_1,\cdots,\xi_n]$. 在这种情形下的相对不变式称为**共变式**. 共变式的**权**和**绝对共变式** (absolute covariant) 也象不变式情形一样地定义. 在需要强调 n 和 d 时,还把不变式(共变式)称作 ***n* 元 *d* 次型的不变式 (共变式)** (invariant (covariant) of n-ary form of degree d): $n=2$时称为二元的(binary); $n=3$ 时称为三元的 (ternary); $d=1$ 时称为线性型 (linear form); $d=2$ 时称为二次型 (quadratic form)等等.

例 1) 在 $n=2$, $d=2$ 时,判别式† $D=c_{02}c_{20}-c_{11}^2$ 是权为 2 的不变式. *例* 2) 在 n 为任意, $d=2$ 时, 把 F 中 $\xi_i\xi_j$ 的系数记做 u_{ij}, 即 $u_{ij}=u_{ji}=c_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$, 这里当 $i=j$ 时, $\alpha_i=2$, 其他 $\alpha_k=0$; 当 $i\neq j$ 时, $\alpha_i=\alpha_j=1$, 其他 $\alpha_k=0$. 在这情形下, $D=\det(u_{ij})$ 是权为 2 的不变式. *例* 3) 在 $n=2$, $d=4$ 时, $g_2=c_{40}c_{04}-4c_{13}c_{31}+3c_{22}^2$, $g_3=c_{04}c_{22}c_{40}-c_{04}c_{31}^2-c_{40}c_{13}^2+2c_{13}c_{22}c_{31}-c_{22}^3$ 分别是权为 4 和 6 的不变式. 判别式可以表示成 $2^3(g_2^3-27g_3^2)$ 而且是权为 12 的不变式. *例* 4) 在 n 为任意, $d=1$ 时, 如果把F内 ξ_i 的系数记作 c_i, 则 $\sum_i c_i\xi_i$ 是绝对共变式. 它也是向量不变式的例子. *例* 5) 在 n 和 d 都任意时, $\det(\partial^2F/\partial\xi_i\partial\xi_j)$ 是权为 2 的共变式, 称它为 **Hesse 形式** (Hessian).

我们把一个F换成有限个 $F_1,\cdots,F_r$ 来考虑(F_i 是 d_i 次齐次式 $\Sigma c_{\alpha_1\cdots\alpha_n}^{(i)}m_{\alpha_1\cdots\alpha_n}$, 它的所有系数 $c_{\alpha_1\cdots\alpha_n}^{(i)}$ 是代数无关的). 对于其所有系数及所有 ξ_j 所构成的K上的多项式环 $K[\cdots,c_{\alpha_1\cdots\alpha_n},\cdots,\xi_1,\cdots,\xi_n]$, $\varphi_{d_i}:\sigma\to[\sigma]_{d_i}$ 对 F_i 的系数的作用和 $\sigma\to{}^t\sigma^{-1}$ 对 ξ_j 的作

用确定 $GL(n, K)$ 对多项式环 $K[\cdots, c_{\alpha_1\cdots\alpha_n}, \cdots, \xi_1, \cdots, \xi_n]$ 的一个作用. 在这种情形下的不变式称为**共变式**, 而把不包含 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 的共变式称为**不变式**. 权, 绝对共变式和绝对不变式的定义是类似的. 涉及 $F_1, \cdots, F_r$ 的共变式、不变式等称为具有**基本形式** (ground form) $F_1, \cdots, F_r$ 的共变式、不变式等.

例 6) 在 $r=n$ 时, Jacobi 行列式† $\det(\partial F_i/\partial\xi_j)$ 是权为 1 的共变式.

【多重共变式】 按照多项式环一节的记号,设K是特征为 0 的域, $G = GL(n, K)$, 而且每个 ρ_i 或是 φ_d (d 是任意的) 或是逆步映射 κ. 这种情形下的不变式称为**多重共变式** (multiple covariant), 同样地可以定义**权**和**绝对多重共变式** (absolute multiple covariant). 设 s 是 ρ_i 中等于 κ 的个数, 则上节中的不变式和共变式分别相当于 $s = 0$ 和 $s = 1$ 的情形. 现在假定在 $i = 1, \cdots, s$ 时有 $\rho_i = \kappa$, 则就有以下的 **Gram 定理**: 对于每个 $\alpha = 1, \cdots, s$, 设 H_α 是 $x_j^{(i)}$ $(i > s)$ 的多项式, 而对于每个 i, 它对 $x_1^{(i)}, \cdots, x_{n_i}^{(i)}$ 都是齐次的, 再设 $H_1, \cdots, H_s$ $\left(在 \sum_{i>s} n_i 维仿射空间中\right)$ 的公共零点的集合V对于G的变换是封闭的, 则存在有限个绝对多重共变式 $c_1, \cdots, c_t$, 使得V是满足下列条件的 $(\cdots, a_j^{(i)}, \cdots)$ $(i > s)$的集合:对于 $\alpha \leqslant s$ 的任何 $a_m^{(\alpha)}$,$(\cdots, a_m^{(\alpha)}, \cdots, a_j^{(i)}, \cdots)$ 是 $c_1, \cdots, c_t$ 的零点.

因为 $GL(n, K)$的每一个有理作用是可简约的, 所以 (在K上的一个固定的多项式环内的) 绝对多重共变式的集合 I 是K上的一个有限生成环. 其次, 具有已知权的多重不变式的集合是有限生成的 I 模. 如果去掉K的特征为 0 的假设, 就难于定义 φ_d; 考虑 $F = \Sigma a_{i_1\cdots i_n}\xi_1^{i_1}\cdots\xi_n^{i_n}$ 的系数 $a_{i_1\cdots i_n}$ 的变换, 就可以避免这个困难. 在这种情形虽然可以作类似的定义, 但是由于会出现例如 $GL(n, K)$ 的有理作用不是可简约的情况, 有关的理论不好作同样的处理.

【Lie 群的不变式】 设G是 Lie 群 (因此K必须是实数域或复数域), 而且 ρ 是 G 的微分表示, $\rho(G) \subset GL(n, K)$, 再假定由 ρ 定义了G在 $K[x_1, \cdots, x_n]$ 上的一个作用. 于是用对应于G的一个无穷小变换† X_a, 一个不变元 (或半不变元) 就刻划为满足下述条件的元 f: $X_a f = 0$ $(\forall X_a)$ (或 $X_a f = \alpha_a f$ $(a_a \in K, \forall X_a)$). 例如在 $G = GL(2, K)$ 时, 只需对分别对应于$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$的无穷小变换, f 满足 $X_a f = 0$, 它就是不变元. 同样地,对于每个 Lie 群 G, 存在有限个 X_a, 使得只要 $X_a f = 0$ 对这些 X_a 成立,就决定 f 是一个不变元.

【不变式的历史】 在与几何学的联系方面,不变式的理论,特别是关于二次型的不变式理论,最先是 A. Cayley 所研究的(J. Reine Angew. Math., **30** (1846)). 这个理论由 J. J. Sylvester, R. F. A. Clebsch, P. Gordan 及其他一些人加以发展. 因为这理论是从齐次半不变元占重要地位的射影空间的应用开始的, 因此在古典理论里半不变元就被叫做不变式. 另一方面,在二元二次型的理论中,不连续群的不变式是从数论的观点来研究的. 直到 D. Hilbert 才明确地引入一般群的不变式的概念. 他利用 Hilbert 基定理† 证明了在古典情形中的基本不变式的存在性. Hilbert 第十四问题(→Hilbert) 是与这结果有关的,但问题的答复是否定的,也就是说, 即使在实数域或复数域上的多项式环的情形,也存在作用于这个环的群,它没有基本不变式(永田雅宜). 虽然不变式理论的研究有很长时间的停顿, 但是近来由于它在代数几何中的重要性, 所以这方面的研究又重新活跃起来.

【参】 [1] R. Weitzenböck, Invariantentheorie, Noordhoff, 1923; [2] H. Weyl, Classical groups, Princeton Univ. Press, 修订版, 1946; [3] M. Nagata (永田雅宜)-T. Miyata (宫田武彦), Remarks on matric groups, J. Math. Kyoto Univ., **4** (1965), 381—384; [4] D. Mumford, Geometric invariant theory, Springer, 1965; [5] I. Schur-H. Grunsky, Vorlesungen über Invariantentheorie, Springer, 1968; [6] J. Fogarty, Invariant theory, Benjamin, 1969; [7] J. A. Dieudonné-J. B. Carrell, Invariant theory, old and new, Advances in Math., **4**

(1970), 1—80.

积分几何学 [英 integral geometry 法 géométrie intégrale 德 Integralgeometrie 俄 интегральная геометрия 日 積分幾何学] 在较广泛的意义下，**积分几何学**是研究流形上的积分的一个几何学分支，然而通常所说的积分几何学，只考虑某些限定的问题. 如果 Lie 群† G 作为一个 Lie 变换群†作用在微分流形†M上，那么 G 也作用在M的种种"图形"上. 但这里所说的M上的图形是指 M 的子流形†，M 的切 r 标架†从等几何对象. 设$\mathscr{F}$是在G作用下不变的M上这样的图形的一个集合（即如果 $g\in G$，$F\in\mathscr{F}$，则 $gF\in\mathscr{F}$）. 考虑下列问题: 1) $\mathscr{F}$ 上是否存在G不变测度† μ，如果存在如何确定μ? 2) 对于$\mathscr{F}$上的函数 φ，求它关于μ的积分 $\int\varphi(F)d\mu(F)$. W. Blaschke 就是在考虑 2) 的特殊情形，即 $\varphi(F)$ 是表示F的几何性质的函数，用涉及 $\mathscr{F}$ 的几何不变量来表示积分值的问题时，开始引入积分几何学这个术语的([1]). 像 G. L. L. von Buffon 的针的问题等许多所谓**几何概率** (geometric probability) 的问题也属于这个思想范畴. 上面提到的测度μ称为 $\mathscr{F}$ 的**位置测度**(kinetic measure)或**位置密度**(kinetic density)，$d\mu(F)$ 也记作 dF. 如果$\mathscr{F}$ 具有n维定向†微分流形的结构，测度μ可由 $\mathscr{F}$ 上的体积元素†（正的 n 次微分形式†）ω 给出时，我们也把ω记作 dF. 如果G可迁地†作用于$\mathscr{F}$，则 $\mathscr{F}$ 可表为 G/H（这里H是G的迷向子群），问题 1) 是简单的. 在这种情形下，$\mathscr{F}$具有微分流形结构，如果存在G不变 (Radon) 测度，则除了一个常数倍数外，它是唯一的. G不变测度μ存在的条件以及存在的情形下μ的形式，都能用G和H的 Haar 测度来表示(→不变测度). 下面举例说明.

【Crofton 公式】 令 $G(p,\theta)$ 为关于 Euclid 平面上的直角坐标系用方程 $x_1\cos\theta+x_2\sin\theta=p$ 表示的直线，设 $G(p,\theta)$ 与长度为 L的曲线的交点数为 $n(p,\theta)$，则有积分公式

$$(1)\qquad \int n(p,\theta)dp\,d\theta=2L$$

成立 (**Crofton 公式**). 其中 $dpd\theta$ 是一次微分形式 dp，$d\theta$ 的外积†、积分取遍所有的 $p\in(-\infty,\infty)$ 及 $\theta\in[0,2\pi]$.

【Poincaré 公式与积分几何学的主要公式】 在 Euclid 平面上，与一个固定的图形（具有相同定向）相合的图形F 的位置密度 dF 定义如下: 在 F 上固定一个正交标架 R，设对于平面上的基本正交标架 R_0，R 的原点坐标为 (x_1,x_2)，且R的第一条轴与 R_0 的第一条轴之间的夹角为 θ，于是可以定义 $dF=dx_1dx_2d\theta$（外积）. dF 具有下述不变性: 1) F产生位移时，dF 不变. 2)把固定在F上的正交标架R换成另外的正交标架 R' 时，dF 也不变.

设平面上长度为 L_1, L_2 的两条曲线弧 C_1, C_2 之中，固定 C_1，移动 C_2，并设 C_2 在任意位置与 C_1 的交点数均为有限个，设为 n，则把n对于与 C_1 相交的 C_2 的所有位置进行积分，就得到

$$(2)\qquad \int n\,dC_2=4L_1L_2$$

(**Poincaré 公式**). L. A. Santaló 用这个公式得到等周问题† 的一个解答 (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **10** (1935)).

设 C_1,C_2 为两条平面 Jordan 曲线†，长度分别为 L_1, L_2, S_1, S_2 为它们所包围的面积. 假设 C_1 固定，C_2 移动，设χ为 C_1, C_2 所包围区域的交集的连通†分支数，则把χ对所有可能的 C_2(与 C_1 相交)的位置进行积分，就得到

$$(3)\qquad \int\chi\,dC_2=L_1L_2+2\pi(S_1+S_2)$$

(Blaschke [1]). 这称为**积分几何的主要公式** (principal formula of integral geometry). 许多公式可以作为它的特殊情形或极限情形而推出来.

【推广到n维】 Blaschke 更进一步给出n维 Euclid 空间及球空间中k维平面的位置密度; 但把主要公式 (3) 推广到n维 Euclid 空间的是陈省身，他应用的是 E. Cartan 的方法.

设$(e_1,\cdots,e_n)$为以A为顶点的正向标准正交标架，其无穷小相对位移由公式

$$dA=\sum_{i=1}^{n}\omega_i e_i,\quad de_i=\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}e_j$$

给出．这里$\omega_i=(dA,e_i)$，$\omega_{ij}=(de_i,e_j)=-\omega_{ji}$是$A$的正交坐标及确定$e_1,\cdots,e_n$的$n(n-1)/2$个变量的一次微分形式．对于一个图形的种种位置，考虑固定在这图形上的正交标架$(A,e_1,\cdots,e_n)$，作所有$\omega_i,\omega_{ij}(i<j)$的外积†

$$dK=\bigwedge_i\omega_i\bigwedge_{i<j}\omega_{ij},$$

它具有上节所述的不变性1）和2)．这就作为n维Euclid空间的图形的位置密度．设在k维平面E上取正交标架的顶点A及$e_1,\cdots,e_k$，则E的位置密度dE是所有ω_α，$\omega_{\alpha\lambda}$ $(\alpha=1,\cdots,k,\lambda=k+1,\cdots,n)$的外积，即

$$dE=\wedge\omega_\alpha\wedge\omega_{\alpha\lambda}.$$

设Σ为n维Euclid空间内紧可定向C^2超曲面，$k_\alpha(\alpha=1,\cdots,n-1)$为$\Sigma$上一点的主曲率，$S_i(i=1,\cdots,n)$为$k_\alpha$的$i$次基本对称型，令$S_0=1$．作$\Sigma$上的积分

$$M_i=\int_\Sigma S_i\,dS\Big/\binom{n-1}{i},\qquad(4)$$

$$i=0,1,\cdots,n-1,$$

其中dS为Σ的面元．设两个紧可定向C^2超曲面Σ_1,Σ_2所围的区域D_1,D_2分别有体积V_1，V_2，$M_i^{(1)}$，$M_i^{(2)}$分别是对Σ_1,Σ_2由(4)所定义的积分M_i．固定Σ_1，移动Σ_2，若对于Σ_2的每一位置，Σ_1,Σ_2包围的区域的交$D_1\cap D_2$的Euler-Poincaré示性数†χ是有限的，且设Σ_2的位置密度为$d\Sigma_2$，则陈省身把(3)推广为

$$\int\chi\,d\Sigma_2=I_1\cdots I_{n-1}\Big(M_{n-1}^{(1)}V_2+M_{n-1}^{(2)}V_1+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}M_k^{(1)}M_{n-2-k}^{(2)}\Big)\qquad(5)$$

（陈氏公式)．式中积分取遍与Σ_1相交的Σ_2的所有位置，$I_k(k=1,\cdots,n-1)$是$(k+1)$维空间的单位球的表面积．

设与紧可定向C^2超曲面Σ相交的k维平面E的位置密度为dE，设Σ包围的区域与这个k维平面的交的Euler-Poincaré示性数为χ，则对于与Σ相交的所有k维平面的积分$\int\chi dE$与超曲面Σ的M_k成正比．这就是(1)式的推广．

以上结果⇀栗田稔[5]．

【其他的推广】 Santaló把Euclid平面的各种结果推广到二维常曲率空间†，导出了类似的公式(1942—1943)，并借此解决该空间的等周问题．1952年他还仿照陈省身的方法进一步推出n维常曲率空间的相当于(5)的公式．他还进一步研究了仿射空间、射影空间及Hermite空间的积分几何学．

陈省身等人应用E. Cartan的活动标架法考察以上各种结果，并且试图从Klein意义下的几何学观点(⇀埃尔兰根纲领)以Lie群†为变换群来研究积分几何学．

【Radon变换】 设$\mathscr{F}$为n维Euclid空间$\boldsymbol{R}^n$中所有超平面$\xi(\omega,p)=\{x\in\boldsymbol{R}^n|(x,\omega)=p\}$的集合，其中$\omega=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$是单位向量，$(x,\omega)=\Sigma x_i\lambda_i$，$p$为实数．对于$\boldsymbol{R}^n$上的函数$f$，定义$\mathscr{F}$上的函数$\hat{f}(\xi)=\hat{f}(\omega,p)$为

$$\hat{f}(\xi)=\int_\xi f(x)d_\xi x.\qquad(6)$$

$\hat{f}$称作f的**Radon变换**(Radon transform)，式中$d_\xi x$是超平面ξ上的体积元素†，满足$d_\xi x\wedge d\omega=dx$，$d\omega,dx$分别是单位球面及$\boldsymbol{R}^n$的体积元素．例如当f是有界区域V的定义函数†时，f的Radon变换$\hat{f}$在$\xi\in\mathscr{F}$所取的值$\hat{f}(\xi)$就表示ξ在V上的截面的体积．且$\boldsymbol{R}^n$的运动群†(等距变换群†的单位元分支†)G可迁地作用于超平面的集合$\mathscr{F}$上．对于$x\in\boldsymbol{R}^n$，G关于x的迷向子群†G_x可迁地作用于$\check{x}=\{\xi\in\mathscr{F}|x\in\xi\}$上．因为$G_x$是紧子群，故在$\check{x}$上存在唯一的正规化的$G_x$不变测度$\mu$，使$\mu(\check{x})=1$．对于$\mathscr{F}$上的函数$g$，其**共轭Radon变换**(conjugate Radon transform) $\check{g}$可定义为$\boldsymbol{R}^n$上的函数

$$\check{g}(x)=\int_{x\in\xi}g(\xi)d\mu(\xi).\qquad(7)$$

求 $\check{g}$ 的问题属于前面所举的积分几何学问题 2) 的范围. 特别当 $g=\hat{f}$ 时求 $\check{g}=(\hat{f})^\vee$ 以及求出 $(\hat{f})^\vee$ 与 f 的关系都是重要的问题. 这些问题在 $n=2,3$ 时已由 Radon 解决, 一般的 n 的情形由 F. John 解决. 他们所得结果如下.

n 是奇数的情形: 以 $\mathscr{S}$ 表示速降 C^∞ 类函数†的集合(→函数空间). 对于任意的自然数 k 及任意的 ω, 把所有满足 $\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega,p)\ p^k\ dp=0$ 的 $g(\omega,p)\in\mathscr{S}(\mathscr{F})$ 的全体记作 $\mathscr{S}^*(\mathscr{F})$, 则对于任意的 $f\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$ 及任意的 $g\in\mathscr{S}^*(\mathscr{F})$, 有

$$f=c\Delta^{(n-1)/2}((\hat{f})^\vee),$$

$$g=cL^{(n-1)/2}((\check{g})^\wedge),$$

其中 Δ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Laplace 算子†, $L_g(\omega,p)=\dfrac{d^2g(\omega,p)}{dp^2}$, $c=\Gamma(n/2)^{-1}(2\pi i)^{1-n}\pi^{\frac{n}{2}}$.

n 是偶数的情形: 对于任意的 $f\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n)$, $g\in\mathscr{S}^*(\mathscr{F})$, 有

$$f=c_1J_1((\hat{f})^\vee),\quad g=c_2J_2((\check{g})^\wedge),$$

其中 $J_1(f)(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(y)|x-y|^{1-2n}dy$,

$$J_2(g)(\omega,p)=\int_{\boldsymbol{R}}g(\omega,p)|p-q|^{-n}dq.$$

但这些积分一般是发散的, 所以必须把它们解释为对于 $|x-y|$ 或 $|p-q|$ 的幂的解析开拓所定义的正则化† (S. Helgason[6]).

对于 Radon 变换, 相当于 Fourier 变换中的 Plancherel 定理† 的一个公式成立 (И. М. Гельфанд 等[7]).

【极限球面】 上述 Radon 变换的理论对于非紧型对称 Riemann 空间† M 也是重要的. M 的等距变换群的单位元分支 G 与伴随群† AdG 同构, 所以可以看作为线性群. G 的极大幂单†子群彼此都互相共轭. 设其中一个为 N, 对于任意的 $g\in G$, gNg^{-1} 在 M 上的轨道†称为 M 上的**极限球面** (horosphere). 它相当于 $\boldsymbol{R}^n$ 中的超平面. 如果 M 是引入非 Euclid 双曲度量†的上半复半面, 极限球面无非就是与实轴相切的圆周和平行于实轴的直线.

G 可迁地作用于 M 上所有极限球面的集合 $\mathscr{F}$, 我们有 $\mathscr{F}=G/M_0N$, 这里 $G=KAN$ 是 G 的一个岩泽分解†, M_0 是 A 在 K 中的中心化子. 在这种情形下, 对于极限球面 $\xi\in\mathscr{F}$, 由 M 的 Riemann 度量†诱导出 ξ 的 Riemann 度量, 把关于这个度量 ξ 的体积元素记作 $d_\xi x$, 那么对于 M 上的函数 f 也可以按照 (6) 定义 f 的 Radon 变换 $\hat{f}$ 为极限球面集 $\mathscr{F}$ 上的函数. 对 $x\in M$, 在 $\check{x}=\{\xi\in\mathscr{F}\mid x\in\xi\}$ 上存在唯一的 G_x 不变测度 $\mu\ (\mu(\check{x})=1)$, 其中 G_x 是 G 对于 x 的迷向子群, 它是紧子群. 利用这个 μ, 可以通过上面(7)式定义 $\mathscr{F}$ 上的函数 g 的共轭 Radon 变换 $\check{g}$. 于是存在 $\mathscr{F}$ 上某个积分微分算子 Λ, 如设 Λ 的伴随算子为 Λ^*, 就有反演公式 $f=(\Lambda\Lambda^*\hat{f})^\vee$ 以及 **Plancherel 定理**

$$\int_M|f(x)|^2\,dx=\int_{\mathscr{F}}|\Lambda\hat{f}(\xi)|^2d\xi$$

成立, 此处 dx, $d\xi$ 分别表示 M, $\mathscr{F}$ 上的 G 不变测度, f 是任意的具有紧支集的 C^∞ 函数. 如果 G 的 Cartan 子群†全都互相共轭, 则 Λ 就成为微分算子, 且反演公式也可以用 M 上的微分算子 L 写成 $f=L((\hat{f})^\vee)$ 的形式 (Helgason [6]).

极限球面及 Radon 变换不仅对于对称 Riemann 空间 G/K, 而且对于非紧半单 Lie 群 G 的各种齐性空间† G/H 也能定义. 后一情形下, Radon 变换 $f\to\hat{f}$ 是把 G/H 上的函数 f 映到 G/H 上的极限球面的空间上的函数 $\hat{f}$. 特别当 G 的酉表示† U 在 G/H 上的函数空间中实现时, 通过 Radon 变换 $f\to\hat{f}$ 映到 $\mathscr{F}$ 上函数空间有助于阐明 U 的性质. И. М. Гельфанд 等人在一些例子中表明, 通过这种方过可把 U 用显式分解为不可约表示的直积分† (Гельфанд-М. И. Граев [8], Гельфанд 等[7]).

【其他推广】 积分几何学也能在不容许位移的空间中进行研究. 设 $F(x_1,x_2,y_1,y_2)$ 对于 y_1, y_2 是正的线性齐次函数, 考虑积分 $\int F\left(x_1,x_2,\dfrac{dx_1}{dt},\dfrac{dx_2}{dt}\right)dt$ 的平稳曲线†, 设沿着

平稳曲线 $p_i=\partial F/\partial y_i\left(y_i=\frac{dx_i}{dt}\right)$. H. Poincaré 发现对于两参数的平稳曲线集，$dx_1dp_1+dx_2dp_2$ 对于线素 (x_i, p_i) 沿着平稳曲线的任何位移均不改变。于是 Blaschke 就采用 $dx_1dp_1+dx_2dp_2$ 作为平稳曲线的位置密度，并对此证明了一个公式，公式 (1) 为其特殊情形. Santaló 还在二维曲面上引入位置密度，证明了公式 (2) 的推广.

【参】 [1] W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie I, II, Teubner, 1936, 1937; [2] S. S. Chern (陈省身), On integral geometry in Klein spaces, Ann. of Math., **43** (1942), 178—189; [3] S. S. Chern (陈省身), On the kinematic tormula in the Euclidean space of *N* dimension, Amer. J. Math., **74** (1952), 227—236; [4] L. A. Santaló, Introduction to integral geometry, Hermann, 1953; [5] 栗田稔，積分幾何学，共立出版，1956; [6] S. Helgason, A duality in integral geometry; some generalizations of the Radon transform, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 435—446; [7] И. М. Гельфанд-М. И. Граев-Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 5, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, Физматгиз, 1962; [8] И. М. Гельфанд-М. И. Граев, Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. I, Труды Москов. Мат. Общ., **8** (1959), 321—390; [9] R. Deltheil, Probabilités géométriques, Gauthier-Villars, 1926; [10] K. Yano (矢野健太郎), Integral tormulas in Riemannian geometry, Marcel Dekker, 1970.

五、数　论

数论　[英 theory of numbers　法 théorie des nombres　德 Zahlentheorie　俄 теория чисел　日 整数論]　整数之间的一些简单而奇妙的关系，早在古代就被发现了，并使人们感到惊异．对于直角三角形的关系式 $3^2+4^2=5^2$，就是一个著名的例子．寻求具有同样关系的其他数的问题，成为 Pythagoras 学派的研究对象．完全数†(即等于其因数之和的数，例如 $28=1+2+4+7+14$) 等，也是 Pythagoras 学派所感兴趣的．在希腊数学中已出现属于现代数论的"有无限多个素数存在"的证明，求最大公约数的 Euclid 算法(二者见 Euclid 的《原本》)，以及求素数的 Eratosthenes 筛法†等．Euclid 之后五百年，即三世纪时，亚历山大城的 Diophantus 发现了一次及二次不定方程†的解法，这就是所谓 Diophantus 分析的萌芽．特殊的一次不定方程的解法在古代的中国也已发现．算术在印度早就发展起来了，它与希腊数学的关系至今还不清楚．十二世纪中叶，Bhâskara 已经知道如何用本质上与 J. L. Lagrange 方法很相似的方法去解所谓 Pell 方程†(→不定方程)．

到十七世纪，关于整数的研究在欧洲重新兴起．Bachet de Méziriac (1581—1638) 再次发现了一次不定方程的解法，并载入他的关于数学游戏的名著 "Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres"．同完全数密切相关的形如 2^p-1 的素数称为 Mersenne 数†，也是很有趣的．被称为数论创始人的 Pierre de Fermat 提出了许多未证明的定理．其中最有名的是所谓 "Fermat 大定理" (→Fermat 问题)．还有多角数†定理："所有的整数都可以表示为不超过 n 个 n 角数之和"，也是很有名的．这个定理后来由 C. F. Gauss ($n=3$)，C. G. J. Jacobi ($n=4$) 及 A. L. Cauchy (一般情形) 所证明．到十八世纪，L. Euler 与 Lagrange 使数论得到了显著发展．Euler 的著作 "Algebra" 第二卷中汇集了关于二次不定方程的丰富多采的内容．Lagrange 发展了连分数†的理论，并将它应用于不定方程论．到十八世纪末，A. M. Legendre 出版了他的巨著 "Essai sur la théorie des nombres"，试图集数论成果之大成．**数论**这个名称就是从这本书的书名而来的．

和 Legendre 的 "Essai" 几乎同时问世的 Gauss 的 "Disquisitiones arithmeticae" (1801) 一书，将数论提高到一个新的水平．该书第四篇二次剩余†，第五篇二次型†，第七篇分圆方程，都是划时代的理论成果．"Disquisitiones" 远远超越了当时的水平，以致当时的学术界对它与其说是理解，毋宁说是抱着敬畏的态度．P. G. L. Dirichlet 毕生致力于 "Disquisitiones" 的简化工作，而且还应用解析方法计算二次型的类数†，这是 Gauss 工作之外的别开生面的新方法，是解析数论的开端．关于把 Gauss 的二次型理论扩展到多变数情形的问题，F. G. M. Eisenstein, H. Minkowski, C. L. Siegel 等都有重要的贡献．代数数论也起源于 Gauss 关于四次剩余的研究(→初等数论，二次域的数论，代数数域的数论，类域论，复数乘法论，数的几何，不定方程)．

【解析数论】　在数论中有许多只有应用解析方法才能解决的问题．在首项和公差互素的算术级数中存在有无穷个素数，这是 Legendre 首先提出的猜想．后来由 Dirichlet 通过引进所谓 Dirichlet L 函数†，而给出了证明 (1837)．虽然最近已经可以不用 L 函数而加以证明，但是完全用算术方法还是不行的．当然，有些问题的提出也不能缺少解析方法．例如，设不超过实数 x 的素数的个数为 $\pi(x)$，当 x 无限增大时，$\pi(x)$ 也无限增大，这在 Euclid 的《原本》中已有证明．但是，为了描述当 $x\to\infty$ 时 $\pi(x)$ 的

性状，就需要解析的概念．对此，有 Gauss 猜想

$$\lim_{x\to\infty} \pi(x) \Big/ \frac{x}{\log x} = 1.$$

这一猜想直到十九世纪末叶(1896)，随着函数论的发展才被证明，称为素数定理†．虽然最近有了初等证明，但是这类问题没有解析学而能得到解决是不可想象的．

这样，数论中有一些问题不用解析方法就不能解决，另有一些问题用解析方法才能够简明地解决．数论研究的这个分支称为解析数论．解某种问题要使用何种深度的解析方法，这也是一个很有兴趣的问题．

在二十世纪，随着数学诸学科的飞跃进展，解析数论也有了迅速的发展，它所包含的内容日益广泛，例如：素数分布问题推广到代数数域的理想和素理想的分布问题，研究 Waring 问题†、Goldbach 问题†及其他一些问题的堆垒数论†已经发展成一个新的分支，研究格点问题†的几何数论也已经出现（→素数的分布，数论函数，ζ函数，数的几何，格点问题，整数分拆，堆垒数论）．

【参】[1] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Teubner, 1908; [2] L. E. Dickson, History of the theory of numbers I—III, Carnegie Institution of Washington, 1919—23; [3] P. G. L. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind, Braunschweig, 第四版, 1894; [4] H. Bohr-H. Cramér. Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, Enzykl. der Math., IIC (8), 1922; [5] E. G. H. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II, Teubner, 1909; [6] E. G. H. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I, II, III, Hirzel, Leipzig, 1929; [7] 高木貞治，初等整数論講義，共立出版，1931; [8] З. И. Боревич-И. Р. Шафаревич, Теория чисел, Москва, 1964. [9] C. G. Bachet de Méziriac, Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres, Lyon, 1612; [10] L. Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra, Petersburg, 1770; [11] A. M. Legendre, Essai sur la théorie des nombres, Paris, 1798; [12] K. F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Leipzig, 1801 (英译本：Yale Univ. Press, 1966).

初等数论 [英 elementary theory of numbers 法 théorie élémentaire des nombres 德 elementare Zahlentheorie 俄 элементарная теория чисел 日 初等整数論] 关于有理整数的整除性、不定方程†、同余式等的初等理论，称为**初等数论**．将自然数 1, 2, 3, ··· 的全体以 $\boldsymbol{N}$ 表示，有理整数 0, ±1, ±2···的全体以 $\boldsymbol{Z}$ 表示，$\boldsymbol{Z}$ 在通常的加法、乘法下构成有序交换环†或整环†．在本条中，只要不特别说明，所有字母都表示有理整数．

【Euclid 算法】 对于任意的整数 a, b ($b>0$)，满足 $a=qb+r$ ($0\leqslant r<b$) 的整数 q 和 r 存在且唯一(**除法定理** (division algorithm))．q 称为以 b 除 a 的**商** (quotient)，r 称为其**剩余**(residue)．这里，当 $r=0$，或者说，对于 a, b ($b\neq 0$)，存在整数 q，使得 $a=bq$ 成立时，则称 a 为 b 的**倍数** (multiple)，b 为 a 的**因数** (divisor)，a 能被 b **整除** (divisible)，并用记号 $b|a$ 表示．由两个正整数开始相继进行这样的除法：设 $a=q_1b+r_1$, $b=q_2r_1+r_2$, $r_1=q_3r_2+r_3\cdots(b>r_1>r_2>r_3\cdots>0)$，这一演算进行有限次之后结束，得到 $r_k=q_{k+2}r_{k+1}$．这个 $r_{k+1}=r$ 称为 a, b 的**最大公因数** (greatest common divisor，略写为 G. C. D.)，即最大的正的公共因数，可以表示为 $r=ax+by$ (x, y 为整数)．上述求 G. C. D. 的算法称为 **Euclid 算法** (Euclidean algorithm)；a 和 b 的最大公因数以 (a, b) 表示．当 $(a, b)=1$ 时，称 a, b 为**互素** (relatively prime)，在这种情形下，$ax+by=1$ 有整数解 x, y 存在．若干个整数的公共的因数称为它们的**公因数** (common divisor, common measure)，公共的倍数称为它们的**公倍数** (common multiple)．最小的正的公倍数称为**最小公倍数** (least common multiple，略写为 L. C. M.)．G. C. D. 是所有公因数的倍数，L. C. M. 是所有公倍数的因数．设 a, b ($\neq 0$) 的 G. C. D. 为 d，而 L. C. M. 为 l，则 $ab=dl$．

【素数】 在大于 1 的整数里，除了 1 和自身以外没有其他正因数的数称为**素数** (prime number)，其他的数称为**合数** (composite number)．从整数数列 2, 3, 4, ··· 中选出素数的方法，有从希腊时代就知道的 **Eratosthenes 筛法** (Eratosthenes' sieve)，即从这个整数列中

依次将合数筛去的方法．首先，2是素数，大于2的2的倍数都是合数，所以将这些数去掉．这时，在2后边剩下的第一个数3是素数．然后将大于3的3的倍数去掉，在3后边剩下的第一个数5是素数．然后将大于5的5的倍数去掉．这样继续进行下去，逐步地将合数筛去，余下的就只有素数了．有无限多个素数存在(Euclid)（→素数的分布）．

【素因数分解】 正整数a能够唯一地分解成素数的积，即$a=p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}\cdots$，其中互不相同的有限个素数$\{p, q, r, \cdots\}$及其相应的幂指数$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$(正整数)是由$a$唯一决定的．这个定理称为**初等数论基本定理**（fundamental theorem of elementary theory of numbers）．

【完全数】 将自然数n的正因数（包括1及n)的和用$\sigma(n)$表示时，根据$\sigma(n)$大于$2n$，等于$2n$，或小于$2n$，分别将n称为**丰数**（abundant number），**完全数**（perfect number），或**亏数**(deficient number)．偶数n为完全数，当且仅当$n=2^{e-1}(2^e-1)$，且2^e-1是素数（L. Euler, Comm. Arith., **2**, 514)．关于奇完全数还一个也不知道．已经知道形如$4k+3$的数不是完全数（A. Stern, Mathesis, **6**(1886), 248)，对于形如$4k+1$的完全数，只是给出了种种必要条件，并且一再改进（Euler, Comm. Arith., 2; Stern, Mathesis, **6** (1886); Cl. Servais-E. Cesàro-J. J. Sylvester, Mathesis, **7** (1887), 228, 245, **8** (1888), 92, 135, 571)．众所周知，若n是奇完全数，则n必须具有下述形式：$n=p_0^{a_0}p_1^{a_1}\cdots p_t^{a_t}$，其中$p_0\equiv a_0\equiv 1 \pmod 4$，且$a_i$ $(i>0)$是偶数．最近已经证明t必须$\geqslant 8$ (P. Hagis, Jr., Math. Comp., **35** (1980))．还证明了不存在小于10^{50}的奇完全数（P. Hagis, Jr., Math. Comp., **27** (1973))．

使得$\sigma(n)-n=m$和$\sigma(m)-m=n$同时成立的两个数m和n（例如220和284)，称为**亲和数**（amicable number)．Euler列出了61对这样的亲和数组（Comm. Arith., **1**, 102)．下面两个数m, n各有152位，是当前知道的一对最大的亲和数：

$$m=3^4\cdot 5\cdot 11\cdot 5281^{19}\cdot 29\cdot 89(2\cdot 1291\cdot 5281^{19}-1),$$

$$n=3^4\cdot 5\cdot 11\cdot 5281^{19}(2^3\cdot 3^3\cdot 5^2\cdot 1291\cdot 5281^{19}-1)$$

(H. J. J. te Riele, Math. Comp., **28** (1974))．另外E. Lionnet将因数之积等于该数本身平方的数（例如p^3或pp'，其中p和p'是不同的素数)，称为**第二类完全数**（perfect number of the second kind)．还知道使得$\sigma(n)/n$为整数的自然数n是存在的(1946)，例如对于数$2^5\cdot 3\cdot 7$, $2^{15}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 31\cdot 43\cdot 257$，其$\sigma(n)/n$分别为3, 6．

【Mersenne 数】 形如$p=2^e-1$（其中e是素数）的数称为**Mersenne 数**（Mersenne number)．为了使数2^e-1是素数，e为素数是必要条件，但不是充分条件．如果Mersenne数是素数，则称为**Mersenne 素数**（Mersenne prime)．是否有无限多个Mersenne素数存在，还是一个未解决的问题；然而，已经证明，对于$e<50000$，使得2^e-1是Mersenne素数的e，有下列27个：$e=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209$和44497．其中31以前的数是在十八世纪以前直接验证的；以后由于Lucas判定法的发现，验证达到了127；再后面的那些数是应用电子计算机验证的．$2^{44497}-1$有19325位(D. Slowinski, J. Recreational Math., **11** (1978—79), 258—267)．

【Fermat 数】与Mersenne数相似，有形如2^e+1的素数问题．这种数为素数的必要条件是e为2的幂．形如$p=2^{2^\nu}+1$的数称为**Fermat数**(Fermat number)．P. Fermat猜想形如$2^{2^\nu}+1$的数都是素数．实际上，当$\nu=0, 1, 2, 3, 4$时，对应的$p=3, 5, 17, 257, 65537$都是素数．但是对于$\nu=5$，很容易验证$2^{2^5}+1$能够被641整除．除上列五个素数外，至今还不知道是否存在其他的Fermat数为素数．另一方面，已经知道在$5\leqslant\nu\leqslant 1945$中，至少有46个$\nu$所对应的$p$为合数．Fermat数与正$n$边

形的几何作图问题有密切关系（→几何作图问题）.

【同余式】 如果整数 a, b 的差能够被正整数 m 整除,则称 a, b 对**模** (modulus) m **同余** (congruent), 用记号 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ 表示,或记为 $a\equiv b(m)$.表示这种同余关系的式子称为**同余式**(congruence). 模 m 的同余关系是一个等价关系,根据这个等价关系可将整环† $\boldsymbol{Z}$ 分为 m 个类（称为**剩余类**),由此产生剩余类环† $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$. 对于素数 p, $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 为剩余类域,它与特征†为 p 的素域† $\boldsymbol{F}_p$ 同构.

商集 $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$ 的一个完全代表系称为**模 m 的完全剩余系** (complete residue system modulo m). 另外, 由满足条件 $n_i\not\equiv n_j(m)$ $(i\neq j)$ 及 $(n_i,m)=1$ 的 $\varphi(m)$ 个数 n_i 所组成的集合称为**模 m 的不可约剩余系** (reduced residue system modulo m) (φ 为 Euler 函数†), 以这样的 n_i 为代表的剩余类称为**模 m 的不可约剩余类** (reduced residue class modulo m). 模 m 的不可约剩余类全体构成 $\varphi(m)$ 阶乘法 Abel 群, 用 $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$ 表示. 因而, 如果 $(a,m)=1$, 则 $a^{\varphi(m)}\equiv1(\mathrm{mod}\ m)$.特别是对于素数 p,有 $\varphi(p)=p-1$, 所以, 如果 $(a,p)=1$, 则 $a^{p-1}\equiv1$ $(\mathrm{mod}\ p)$ 成立 (**Fermat 定理** (Fermat's theorem)). 当 m 为 2, 4, p^k 或 $2p^k$ (p 为不等于 2 的素数, $k=1,2,\cdots$)时, $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$ 为循环群†. 其生成元† g 称为模 m 的**原根**(primitive root) (→数表 1). 对于任何与 m 互素的 a, 以及 $(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*$ 的生成元 g, 存在唯一的数 $\mu(1\leqslant\mu\leqslant\varphi(m))$, 使得 $a\equiv g^{\mu}(\mathrm{mod}\ m)$, 称 μ 为 a 的以 g 为底的**指数** (index), 记为 $\mu=\mathrm{Ind}_g a$ (→数表 2). 群 $(\boldsymbol{Z}/2^k\boldsymbol{Z})^*$ $(k\geqslant3)$ 是 $(2,2^{k-2})$ 型的 Abel 群,它的基是以 -1, 5 为代表的剩余类. 由此可得, $(p-1)!\equiv-1(\mathrm{mod}\ p)$ (**Wilson 定理**(Wilson's theorem)). 一般地,若 $m=\prod_{i=1}^{r}m_i$, $(m_i,m_j)=1$, $i\neq j$,则有 $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}\cong\boldsymbol{Z}/m_1\boldsymbol{Z}+\cdots+\boldsymbol{Z}/m_r\boldsymbol{Z}$(直和)及$(\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z})^*\cong(\boldsymbol{Z}/m_1\boldsymbol{Z})^*\times\cdots\times(\boldsymbol{Z}/m_r\boldsymbol{Z})^*$ (直积).

对于整系数多项式 $f(x)$, 求满足同余式 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\ m)$ 的整数 x, 称为解同余式. 一次同余式 $ax\equiv b$ $(\mathrm{mod}\ m)$, $(a,m)=d$, 当且仅当 $d|b$ 时才有解, 且解对于模 m/d 是唯一的. 联立一次同余式 $x\equiv a_i(\mathrm{mod}\ m_i)$ $(i=1,2,\cdots,k)$, 当且仅当 $a_i\equiv a_j(\mathrm{mod}(m_i,m_j))$ $(i,j=1,\cdots,k)$时才有解,且解对于模 M(即 $m_1,\cdots,m_k$ 的最小公倍数)是唯一的. 特别是, 当 $(m_i,m_j)=1(i\neq j)$ 时,其解对于模 $M=m_1m_2\cdots m_k$ 是唯一的(**孙子剩余定理** (Chinese remainder theorem)). 若 $m=p_1^{e_1}\cdots p_k^{e_k}$ 为 m 的素因数分解式,则解一般的高次同余式 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\ m)$可化为解 $f(x)\equiv0(\mathrm{mod}\ p^{e_i})$, $(i=1,\cdots,k)$ (→局部域的数论). 此外,解二次同余式可归结为解一次同余式及 $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$.

【二次剩余】 设 $(a,m)=1$. 当同余式 $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$ 具有整数解时, a 称为模 m 的**二次剩余** (quadratic residue), 否则, a 称为模 m 的**二次非剩余** (quadratic non-residue). a 是模 m 的二次剩余的充分和必要条件为: i) a 是以 m 的每一个素因数 $p(\neq2)$ 为模的二次剩余; ii) 当 $4|m$ 或 $8|m$ 时,相应地有 $a\equiv1(\mathrm{mod}\ 4)$ 或 $a\equiv1(\mathrm{mod}\ 8)$.

给定奇素数 p,对于$(a,p)=1$, **Legendre 符号** (Legendre symbol) $\left(\frac{a}{p}\right)$ 定义如下: 如果 a 是模 p 的二次剩余则取值 $+1$, 如果是二次非剩余则取值 -1. 这个符号的值是由 $a(\mathrm{mod}\ p)$ 决定的, 且满足 $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$. 因此, Legendre 符号确定了 $(\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z})^*$ 的一个二阶特征标†. 此外还有 $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{(p-1)/2}(\mathrm{mod}\ p)$ (**Euler 判别法** (Euler's criterion)).

【互反律】 对于奇素数 p, $q(p\neq q)$,公式

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{((p-1)/2)((q-1)/2)},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{(p-1)/2},\ \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{(p^2-1)/8}$$

分别称为关于二次剩余的 **Legendre 符号的互反律** (law of reciprocity), **第一补余律** (first

complementary law)，**第二补余律** (second complementary law)．这些法则是 Euler 提出的猜想，C. F. Gauss 最先给出了七种不同的证明，到现在至少有五十种以上的证明．在 S. Bachmann 的著作 Niedere Zahlentheorie I(1902) 中，分类叙述了当时知道的四十七种证明方法．Gauss 的第一种证明方法用了数学归纳法，是初等的 (Disquisitiones arithmeticae, art. 135—145, Werke 1)，第二种方法应用了二次型理论 (Disquisitiones arithmeticae, art. 262)．后者演变为现在的用二次数域理论的证明（例如高木貞治[1], p. 432, H. Hasse[5], p. 417)．第四种方法用了 Gauss 和† (Gauss, Werke 2, p. 9)，第六种方法用了整系数多项式的同余关系 (Gauss, Werke 2, p. 55)．第七种方法是在他的遗稿中发现的，利用了高次同余式 (Gauss, Werke 2, p.234)．第四、第六、第七种方法与分圆域理论有关（关于使用 Gauss 和的证明，见高木 [1], p. 468, Hasse [5], p. 108; 关于应用分圆域理论的方法，见 Hasse [5], p. 414)．第三、第五种方法是最初等最简单的 (Gauss, Werke 2, p. 3, 51)．这两种证明方法都是基于如下的 Gauss 引理：在用奇素数 p 除 $1a, 2a, \cdots, (p-1)a/2$ 所得的剩余中，如果有 n 个大于 $p/2$，则 $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^n$．第三种方法的简化证明(例如，高木的证明[1](1904)．同样的简化还曾由 G. Frobenius (1914) 再次发现)，在很多书中被引用．

对于奇数

$$m=\pm\prod_i p_i^{e_i},$$

当 $(m,n)=1$ 时，

$$\left(\frac{n}{m}\right)=\prod_i\left(\frac{n}{p_i}\right)^{e_i}$$

称为 **Jacobi 符号**(Jacobi's symbol)．当 m 不含平方因数时，它是 $(Z/mZ)^*$ 的特征标．若按照 $m>0$ 或 $m<0$，令 $\operatorname{sgn} m=+1$ 或 -1，则有如下的 **Jacobi 符号的互反律**及**补余律**：

如果 m 和 n 是互素的奇数，则有

$$\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{n}{m}\right)$$
$$=(-1)^{((m-1)/2)((n-1)/2)+((\operatorname{sgn} m-1)/2)((\operatorname{sgn} n-1)/2)},$$

$$\left(\frac{-1}{n}\right)=(-1)^{(n-1)/2+(\operatorname{sgn} n-1)/2},$$

$$\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{(n^{*}-1)/4},$$

其中 $n^*=(-1)^{(n-1)/2}n$．

此外，作为 Legendre 符号另一种推广的 Kronecker 符号†，与二次域的数论有密切关系而被应用 (→ 二次域的数论)．

【参】 [1] 高木貞治，初等整数論講義，共立出版，1931; [2] C. F. Gauss, Werke 2, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1863; [3] E. Netto, Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadratische Reste von Carl Friedrich Gauss, Ostwald's Klassiker Nr. 122, Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1901; [4] L. E. Dickson, History of the theory of numbers I, Carnegie Institution of Washington, 1919 (Chelsea, 1952); [5] H. Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950; [6] E. G. H. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I, Hirzel, Leipzig, 1927; [7] W. J. Leveque, Topics in number theory, Addison-Wesley, 1956; [8] P. G. L. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind, F. Vieweg and Sohn, 第四版, 1894 (Chelsea, 1969).

连分数 [英 continued fraction 法 fraction continue 德 Kettenbruch 俄 цепная дробь, непрерывная дробь 日 連分数] 设 $\{b_n\}(n=0,\cdots,m)$，$\{c_n\}(n=1,\cdots,m)$ 为由某域† F 中的元素所组成的有限序列，形如

$$b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cdots\cfrac{\cdots}{\cdots+\cfrac{c_{m-1}}{b_{m-1}+\cfrac{c_m}{b_m}}}}}$$

的分数称为**有限连分数**(finite continued fraction)．只要在简化时不出现等于零的除数，它就表示域 F 中的一个元素．为了写法上的方便，也可记为

$$b_0+\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}}+\frac{c_m}{b_m},$$

$$b_0+\frac{c_1|}{|b_1}+\frac{c_2|}{|b_2}+\cdots+\frac{c_{m-1}|}{|b_{m-1}}+\frac{c_m|}{|b_m},$$

$$b_0\dotplus\frac{c_1}{b_1}\dotplus\frac{c_2}{b_2}\dotplus\cdots\dotplus\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}}\dotplus\frac{c_m}{b_m},$$

$$\left[b_0,\frac{c_1}{b_1},\frac{c_2}{b_2},\cdots,\frac{c_{m-1}}{b_{m-1}},\frac{c_m}{b_m}\right]$$

等形式,或更简单地记为

$$b_0+\left[\frac{c_n}{b_n}\right]_{n=1}^{m}.$$

其次,设 $\{b_n\}(n=0,1,\cdots)$, $\{c_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为两个无限序列,则表示式

$$b_0+\cfrac{c_1}{b_1+\cfrac{c_2}{b_2+\cdots\cdots+\cfrac{c_n}{b_n+\cdots}}}$$

称为**无限连分数** (infinite continued fraction).它也有与有限连分数相类似的记法,例如记为

$$b_0+\frac{c_1}{b_1}+\frac{c_2}{b_2}+\cdots+\frac{c_n}{b_n}+\cdots,$$

$$b_0+\left[\frac{c_n}{b_n}\right]_{n=1}^{\infty}.$$

在无限连分数中

$$k_n=b_0+\frac{c_1}{b_1}+\cdots+\frac{c_n}{b_n},\quad k_0=b_0$$

称为**第 n 个渐近分数** (n-th convergent), b_0 称为**初项** (initial term), b_n, c_n $(n\geqslant 1)$ 分别称为**部分分母** (partial denominator), **部分分子** (partial numerator). 当域 F 为拓扑域*(例如 F 为实数域或复数域),及其元素的序列 $\{k_n\}$ 收敛时,无限连分数称为收敛的,其极限值称为无限连分数的值.

特别是,当 c_n $(n\geqslant 1)$ 全都等于 **1**, b_0 为有理整数, $b_n(n\geqslant 1)$ 全都为正有理整数时,这样的有限或无限连分数就称为**正则连分数** (regular continued fraction). 下面只限于讨论正则连分数,并用 $[b_0,b_1,\cdots]$ 记之.

对于给定的任意实数 ω, 应用 Gauss 记号 $[x]$(不超过 x 的最大整数), 令

$$\omega=b_0+\frac{1}{\omega_1},\qquad b_0=[\omega];$$

$$\omega_n=b_n+\frac{1}{\omega_{n+1}},\qquad b_n=[\omega_n],\quad n=1,2,\cdots,$$

则得到 ω 的正则连分数展开

$$\omega=b_0+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_n}+\cdots.$$

如果 ω 是无理数, 则其正则连分数展开是唯一确定的. 如果 ω 是有理数,则上述过程将在有限步后 $(\omega_m=b_m)$ 结束而得到

$$\omega=b_0+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_m}.$$

有理数的另一种正则连分数表示, 是将上式右边的 b_m 代之以 $(b_m-1)+1/1$. 无限正则连分数的例子有

$$\frac{e^{2/p}+1}{e^{2/p}-1}=p+\frac{1}{3p}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)p}+\cdots,$$

其中 p 为自然数 (J. H. Lambert),

$$e=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{1}+\cdots$$

(L. Euler).

【渐近分数】 通常把正则连分数的第 n 个渐近分数表示为不可约分数的形式:

$$\frac{P_n}{Q_n}=b_0+\frac{1}{b_1}+\cdots+\frac{1}{b_n},\quad n\geqslant 0,$$

且为了方便, 令 $P_{-2}=0$, $P_{-1}=1$, $Q_{-2}=1$, $Q_{-1}=0$, 这样有递推关系式:

$$P_n=b_nP_{n-1}+P_{n-2},$$
$$Q_n=b_nQ_{n-1}+Q_{n-2},\ n\geqslant 0.$$

由此推出

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=(-1)^{n+1},\ n\geqslant -1.$$

任意正则连分数总表示一个实数 ω，应用上面的记号，有如下关系式：

$$\omega = (\omega_{n+1}P_n + P_{n-1})/(\omega_{n+1}Q_n + Q_{n-1}).$$

在无理数 ω 的两个渐近分数 P_{n-2}/Q_{n-2} 和 $P_n/Q_n = (P_{n-2} + b_nP_{n-1})/(Q_{n-2} + b_nQ_{n-1})$ 中间插入的分数

$$\frac{P_n^{(k)}}{Q_n^{(k)}} = \frac{P_{n-2} + kP_{n-1}}{Q_{n-2} + kQ_{n-1}},$$

$$k = 1, 2, \cdots, \quad b_n - 1,$$

称为**中间渐近分数** (intermediate convergent). 而原来的渐近分数称为**主渐近分数** (principal convergent).

如果逼近无理数 ω 的分数 P/Q 满足条件：对于任何其他的分数 p/q，$q \leqslant Q$，必有 $|\omega - P/Q| < |\omega - p/q|$，则称 P/Q 给出了 ω 的**最佳逼近** (best approximation). 给出 ω 的最佳逼近的分数，只能是它的主渐近分数或中间渐近分数 $P_n^{(k)}/Q_n^{(k)}$，且 $k > b_n/2$ 或 $k = b_n/2$，$Q_n > Q_{n-1}\omega_n$.

渐近分数满足关系式 $P_n/Q_n - P_{n-1}/Q_{n-1} = (-1)^{n-1}/Q_nQ_{n-1}$，因而数列 $\{P_{2n}/Q_{2n}\}$，$\{P_{2n+1}/Q_{2n+1}\}$ 分别是单调递增的和单调递减的. 关于渐近分数的逼近有下列关系式：

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| \leqslant \frac{1}{Q_{n+1}Q_n} < \frac{1}{Q_n^2},$$

$$\left|\omega - \frac{P_n}{Q_n}\right| < \left|\omega - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right|,$$

$$\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{Q_{n+1}Q_n}.$$

关于渐近逼近的程度，还有如下的结果：对于任意的 ω，使得 $|\omega - P_n/Q_n| < 1/(\sqrt{5}\,Q_n^2)$ 成立的 n 有无限多个，然而，如果 $\lambda > \sqrt{5}$，则存在 ω，使得 $|\omega - P_n/Q_n| < 1/(\lambda Q_n^2)$ 只对有限个 n 成立 (A. Hurwitz)；相邻的两个渐近分数至少有一个满足不等式 $|\omega - P_n/Q_n| < 1/(2Q_n^2)$(K. T. Vahlen)；相邻的三个渐近分数至少有一个满足不等式 $|\omega - P_n/Q_n| < 1/(\sqrt{5}\,Q_n^2)$ (É. Borel). 此外还有 G. Humbert，藤原松三郎，柴田宽，L. R. Ford 等人的研究结果(藤原 [2]).

【二次无理数】 如果无限正则连分数 $[b_0, b_1, \cdots]$ 满足 $b_{m+k+\nu} = b_{m+\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$，则称为**循环连分数** (recurring continued fraction)，记为 $[b_0, b_1, \cdots, \overset{*}{b}_m, \cdots, \overset{*}{b}_{m+k-1}]$. 当 $m = 0$ 时，称为**纯** (pure) 循环连分数，当 $m \geqslant 1$ 时，称为**混** (mixed) 循环连分数. 将 $[b_m, b_{m+1}, \cdots, b_{m+k-1}]$ 称为**循环节**或**周期** (period). 无理数 ω 的连分数为循环连分数的充分必要条件是：ω 是二次无理数，即 ω 是 $ax^2 + bx + c = 0$ 的根 (a, b, c 为有理数，$b^2 - 4ac$ 不是平方数) (J. L. Lagrange). ω 可用纯循环连分数表示的充分必要条件是：ω 为不可约的二次无理数(即满足 $\omega > 1$ 及 $0 > \omega' > -1$，其中 ω' 为 ω 的共轭根) (E. Galois).

ω 为非平方数的有理数的平方根的充分必要条件是：ω 的连分数具有 $[b_0, \overset{*}{b}_1, \cdots, b_{k-1}, 2\overset{*}{b}_0]$ $(b_{k-\nu} = b_\nu)$ 的形式 (A. M. Legendre).

【Diophantus 方程和 Diophantus 逼近】 关于一次 Diophantus 方程† $ax - by = 1$ ($(a, b) = 1$)，设 $a/b = [b_0, b_1, \cdots, b_m] = P_m/Q_m$，则由 $P_mQ_{m-1} - P_{m-1}Q_m = (-1)^{m-1}$ 可知，$x_0 = (-1)^{m-1}Q_m$，$y_0 = (-1)^{m-1}P_{m-1}$ 给出了它的一组解. 而通解具有 $x_0 + bt$，$y_0 + at$ 的形式. 这个解法与应用 Euclid 算法† 的解法在本质上是相同的.

Lagrange 利用连分数解出了 Pell 方程† $x^2 - Dy^2 = 1$ (D 为非平方自然数). 设 $\sqrt{D}$ 的连分数的周期长为 k，其渐近分数以 P_n/Q_n 表示，则 Pell 方程的全部正解为 $x = P_{2\nu k-1}$，$y = Q_{2\nu k-1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. 如果 k 为奇数，则 $x = P_{(2\nu-1)k-1}$，$y = Q_{(2\nu-1)k-1}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ 是 $x^2 - Dy^2 = -1$ 的正解. 此外，若设 $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ 的最小正解为 x_1，y_1，则它除了由 $(x_1 + \sqrt{D}\,y_1)^\nu = x_\nu + \sqrt{D}\,y_\nu$ 所给出的 x_ν，y_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ 外，不存在其他的正解. 例如，$x^2 - 211y^2 = 1$ 的最小正解为 $x = 278354373650$，$y = 19162705353$.

Lagrange 还利用连分数求出了代数方程的根的近似值. 这种方法对相邻根的精确计算特

别有用.

还可利用格的概念(→数的几何)以几何方法来研究连分数 (F. Klein, Humbert). 例如, 在 Diophantus 逼近中, P_n/Q_n 对于 ω 的逼近程度, 可以由格点 (P_n, Q_n) 对平面上的直线 $y = \omega x$ 的接近程度来表示.

【函数项的连分式】 关于函数项的连分式只有很少的结果. 由 $\tan z$ 的连分式展开 (Lambert)

$$\tan z = \frac{z}{1} + \frac{-z^2}{3} + \frac{-z^2}{5} + \frac{-z^2}{7} + \cdots,$$

可以推出, 当 z 是有理数时, $\tan z$ 及 π 都是无理数等著名结果 (A. Pringsheim).

在函数项的连分式中, 形式为

$$[a_0, a_n z]_1^\infty = \frac{a_0}{1} + \frac{a_1 z}{1} + \cdots + \frac{a_n z}{1} + \cdots$$

的连分式称为**正规连分式** (normal continued fraction). 其渐近分式以 $P_n(z)/Q_n(z)$ 表示. 为了简单起见, 令 $P_{-1}(z) = 0$, $Q_{-1}(z) = 1$, 则有递推公式

$$P_n(z) = P_{n-1}(z) + a_n z P_{n-2}(z),$$
$$Q_n(z) = Q_{n-1}(z) + a_n z Q_{n-2}(z),$$
$$n \geqslant 1.$$

进而有下列关系式:

$$P_n(z)Q_{n-1}(z) - P_{n-1}(z)Q_n(z) = (-1)^n z^n \prod_{\nu=0}^{n} a_\nu,$$

$$[a_0, a_n z]_1^\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{Q_{n-1}(z)Q_n(z)} \prod_{\nu=0}^{n} a_\nu.$$

这里, 后者是形式上的关系式. 设 $[a_0, a_n z]_1^\infty$ 的第 n 个渐近分式的幂级数展开为

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} z^\nu (n \geqslant 0),$$

则 $b_{m\nu} = b_{n\nu} (0 \leqslant \nu \leqslant m \leqslant n)$. 如果 $[a_0, a_n z]_1^\infty$ 在原点附近能展开为幂级数, 则有

$$[a_0, a_n z]_1^\infty = \sum_{n=0}^{\infty} b_{nn} z^n.$$

此外, 若 $\{|a_n|\}_1^\infty$ 的上确界 g 是有限的, 则 $[a_0, a_n z]_1^\infty$ 在 $|z| \leqslant (1/4)g$ 上一致收敛, 因而它表示一个在 $|z| < (1/4)g$ 内全纯的解析函数.

【参】 [1] 柴田寛, 連分数論, 岩波講座数学, 1933; [2] 藤原松三郎, 代数学 I, 内田老鶴圃, 1928; [3] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版, 1931; [4] 小松勇作, 函数と極限, 東海書房, 1949; [5] A. Pringsheim, Vorlesungen über Funktionenlehre, Teubner, 1932, P. 926—959; [6] O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner, 第三版, 1954, 特别是关于由连分数定义的函数及其在矩量问题中的应用; [7] H. S. Wall, Analytic theory of continued fractions, 第二版, Chelsea, 1967; [8] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, Гостехиздат, 1949; [9] А. Н. Хованский, Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа, Гостехиздат, 1956.

数论函数 [英 arithmetic function 法 fonction arithmétique 德 zahlentheoretische Funktion 俄 арифметическая функция 日 数論的関数]

【递归数列】以非负整数集合(或自然数集合 $\boldsymbol{N}$)为定义域的(复值)函数称为**数论函数** (arithmetic function). 因此, 可以把它看成一个数列. 首先, 我们考虑递归数列. 设 $f(x_0, x_1, \cdots, x_{r-1})$ 是 r 个变量的复值函数. 取 $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$, $\cdots$, $u_{r-1} = a_{r-1}$, 并且相继地定义 $u_{i+r} = f(u_i, u_{i+1}, \cdots, u_{i+r-1}) (i = 0, 1, 2, \cdots)$. 这样定义的数列 $\{u_n\}$ 称为由初值 $a_0, a_1, \cdots, a_{r-1}$ 及函数 f 所定义的 r 阶**递归数列** (recurrent sequence). 特别是, 当定义函数 f 为 $\sum_{i=0}^{r-1} b_i x_i$ 时, $\{u_n\}$ 称为**线性递归数列** (linear recurrent sequence). **Fibonacci 数列** (Fibonacci sequence) 是一种特殊的线性递归数列, 它的初值是 a_0, a_1, 而定义函数是 $x_0 + x_1$. 设 $1 + x = x^2$ 的两个根为 $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$, 再由 $c_1 + c_2 = a_0$, $c_1\alpha + c_2\beta = a_1$ 确定 c_1 及 c_2. 这时, 初值为 a_0, a_1 的 Fibonacci 数列由 $u_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 给出. 若取 $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, 则得到 **Binet 公式** (Binet's formula)

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right).$$

【积性函数】 定义域为$\boldsymbol{N}$的数论函数f,若$f(1)=1$,且当$(m,n)=1$时,有$f(mn)=f(m)f(n)$,则称为**积性的**(multiplicative);若$f(1)=1$,且对于任意的$m,n(\in\boldsymbol{N})$,有$f(mn)=f(m)f(n)$,则称为**完全积性的**(completely multiplicative).类似地,若$f(1)=0$,且当$(m,n)=1$时,有$f(mn)=f(m)+f(n)$,则f称为**加性的**(additive);若$f(1)=0$,且对于任意的$m,n(\in\boldsymbol{N})$,有$f(mn)=f(m)+f(n)$,则称为**完全加性的**(completely additive).若f为积性的,且$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$绝对收敛,则对于任何素数p,$\sum_{\nu=0}^{\infty}f(p^{\nu})$绝对收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_{p}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}f(p^{\nu})\right),$$

其右端的无穷乘积也绝对收敛.特别是,当$f(n)$为完全积性函数时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_{p}(1-f(p))^{-1}.$$

例如,以$s=\sigma+it$表示复变数,令$f(n)=n^{-s}$(这是完全积性函数),就得出了关于 Riemann ζ函数[†]的 Euler 公式:

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\prod_{p}(1-p^{-s})^{-1},\quad \sigma>1.$$

【卷积】 如果f及g都是积性的,则**卷积**(convolution) $f*g$ 定义为

$$(f*g)(n)=\sum_{d|n}f(d)g(n/d),$$

这里$\sum_{d|n}$是指对于n的全部正因数d求和.函数$f*g$仍是积性函数.如果h也是积性的,则有$(f*g)*h=f*(g*h)$.

Möbius 函数(Möbius' function) $\mu(n)$定义如下:$\mu(1)=1$;当n能被素数的平方整除时,$\mu(n)=0$;当n能表为相异的r个素数之积时,$\mu(n)=(-1)^r$.μ是积性函数.容易证明:$\sum_{d|n}\mu(d)=1$,当$n=1$时;$\sum_{d|n}\mu(d)=0$,当$n>1$时.如果定义函数e:$e(n)=1$,当$n=1$时;$e(n)=0$,当$n>1$时,则e就成为运算$*$的单位元.如果再定义函数ρ:对于所有的n,$\rho(n)=1$,则$\mu*\rho=\rho*\mu=e$成立.由此推出,$f*\rho=g$及$f=g*\mu$,即$g(n)=\sum_{d|n}f(d)$与$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g(n/d)$等价.这称为 **Möbius 反演公式**(Möbius' inversion formula).与它类似的有$g(x)=\sum_{n\leqslant x}f(x/n)$与$f(x)=\sum_{n\leqslant x}\mu(n)g(x/n)$等价.

设$\varphi(n)$表示满足$1\leqslant m\leqslant n$及$(m,n)=1$的整数m的个数,函数$\varphi(n)$称为 **Euler 函数**(Euler's function).$\varphi(n)$是积性函数,如果p为素数,则有$\varphi(p^n)=p^n-p^{n-1}$,因而,有$\varphi(n)=n\prod_{p|n}(1-1/p)=n\sum_{d|n}\mu(d)/d$.如果定义函数$\nu$:对于每一个$n$,有$\nu(n)=n$,则这个等式可写作$\mu*\nu=\varphi$,因而得出$\nu=\rho*\varphi$,即$\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.

把自然数n表示为k个因数之积(顺序也考虑在内)的表示法的个数,记作$d_k(n)$,称为**广义除数函数**(generalized divisor function).即$d_k(n)=\sum_{n_1n_2\cdots n_k=n}1=\sum_{m|n}d_{k-1}(m)$,所以,$d_k=\rho*\rho*\cdots*\rho$($k$个卷积),并且是积性函数.特别是,当$k=2$时,记$d_2(n)=d(n)$,称为**除数函数**(divisor function).$d(n)$表示n的因数的个数,例如,$d(12)=6$.将自然数n的因数的α次幂之和(α也可为复数)记为$\sigma_\alpha(n)$,特别是,将$\sigma_1(n)$记为$\sigma(n)$.如果$n=\prod_{p|n}p^l$,则$\sigma_\alpha(n)=\sum_{d|n}d^\alpha=\prod_{p|n}(p^{\alpha(l+1)}-1)(p^\alpha-1)^{-1}$,并且$\sigma_\alpha(n)$也是积性的.满足$\sigma(n)=2n$的数$n$称为完全数[†].设$n=\prod_{p|n}p^l$,$\omega(n)=\sum_{p|n}1$($n$的相异的素因数的个数)及$\Omega(n)=\sum_{p|n}l$($n$的素因数的个数)都是经常使用的函数,$\omega(n)$是加性的,$\Omega(n)$是完全加性的.

【剩余特征标及 Gauss 和】设k为正整数,函数χ是以全体整数为定义域的不恒等于零的完全积性函数,若满足条件:当$(n,k)>1$时,

$\chi(n)=0$，当 $n_1\equiv n_2 \pmod k$ 时，$\chi(n_1)=\chi(n_2)$，则 χ 称为**模 k 的 Dirichlet 特征标或剩余特征标** (residue character) (或称为 **Dirichlet 特征**，简称为**特征**)．有 $\varphi(k)$ 个相异的以 k 为模的特征标存在．对于每一个满足 $(n, k)=1$ 的 n，均有 $\chi(n)=1$ 的特征标称为**主特征标** (principal character)，以 χ_0 表示．这时，有如下的关系式：

$$\sum_{n=0}^{k-1}\chi(n)=\begin{cases}\varphi(k), & \chi=\chi_0,\\ 0, & \chi\neq\chi_0;\end{cases}$$

$$\sum_{\chi}\chi(n)=\begin{cases}\varphi(k), & n\equiv 1 \pmod k,\\ 0, & n\not\equiv 1 \pmod k.\end{cases}$$

如果 k 能分解为 $k=k_1k_2\cdots k_r((k_i, k_j)=1, i\neq j)$，则有 r 个模 k_i 的剩余特征标 χ_i 存在，使得

$$\chi=\chi_1\chi_2\cdots\chi_r,$$

且这样的分解式是唯一的．

设 $\rho=\exp 2\pi i/k$，则 $G(a, \chi)=\sum_{n \pmod k}\chi(n)\rho^{an}$ 称为 **Gauss 和** (Gaussian sum)．这里 $\sum_{n \pmod k}$ 是对 n 通过模 k 的一个完全剩余系求和，即对剩余类环 $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}$ ($\boldsymbol{Z}$ 是有理整数所组成的加法群)的一个完全代表系求和．如果 $a\equiv b \pmod k$，则 $G(a, \chi)=G(b, \chi)$．设 $k=k_1k_2\cdots k_r((k_i, k_j)=1, i\neq j)$，且 $a_i\equiv a \pmod{k_i}$，则有

$$G(a, \chi)=\varepsilon G(a_1, \chi_1)G(a_2, \chi_2)\cdots G(a_r, \chi_r),$$

$$\varepsilon=\chi_1(k/k_1)\chi_2(k/k_2)\cdots\chi_r(k/k_r),$$

这里，$\chi=\chi_1\chi_2\cdots\chi_r$ 是上面所说的 χ 的分解．

设 k_0 为 k 的因数，如果当 $(n, k)=1$，$n\equiv 1 \pmod{k_0}$ 时，总有 $\chi(n)=1$，则 χ 可以看成是在模 k_0 上定义的．在这样的模 k_0 中的正的最小的模 $f=f(\chi)$，称为 χ 的**前导子** (conductor)．如果 k 本身就是 χ 的前导子，则 χ 称为**模 k 的原特征标** (primitive character)．根据上述的 χ 的分解，前导子亦可分解为

$$f(\chi)=f(\chi_1)f(\chi_2)\cdots f(\chi_r).$$

设 D 为不含平方因数的整数，则二次域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ ($\boldsymbol{Q}$ 为有理数域)的判别式 d 是 $D(D\equiv 1 \pmod 4)$ 或 $4D(D\equiv 2, 3 \pmod 4)$．这样表示的整数 d 称为**基本判别式** (fundamental discriminant)．仅对于这样的 d 可定义 Kronecker 符号† $\left(\frac{d}{n}\right)$ (→ 二次域的数论)．末綱恕一，A. Z. Walfisz (1936) 证明了：如果 $\chi(n)$ 是取实数值的模 k 的原特征标，则下列三种情形之一成立：1) $k=p_1p_2\cdots p_r$，2) $k=4p_1p_2\cdots p_r$，3) $k=8p_1p_2\cdots p_r$ (p_i 是互异的奇素数)，在情形 1)，根据 $k\equiv 1, -1 \pmod 4$，有 $\chi(n)=\left(\frac{k}{n}\right), \left(\frac{-k}{n}\right)$；在情形 2)，根据 $\frac{k}{4}\equiv 1, -1 \pmod 4$，有 $\chi(n)=\left(\frac{-k}{n}\right), \left(\frac{k}{n}\right)$；而在情况 3)，$\chi(n)$ 不是 $\left(\frac{k}{n}\right)$ 就是 $\left(\frac{-k}{n}\right)$．如果 χ 是模 k 的原特征标，则

$$G(a, \chi)=\bar{\chi}(a)G(1, \chi),$$

$$G(1, \chi)\bar{G}(1, \chi)=k.$$

特别是，当 χ 为实原特征标时，有

$$G(1, \chi)=\sqrt{k},\ \chi(-1)=1 \text{ 时},$$

$$=i\sqrt{k},\ \chi(-1)=-1 \text{ 时}.$$

还有，设 $\rho=\exp(2\pi i/k)$，则 $S(a, k)=\sum_{n \pmod k}\rho^{an^2}$ 亦称为 Gauss 和．当 $(a, k)=1$ 时，可以像下面这样来计算 $S(a, k)$．如果 $(k_1, k_2)=1$，则 $S(a, k_1k_2)=S(ak_2, k_1)S(ak_1, k_2)$．如果 a 和 2 互素，则

$$S(a, 2^r)=0, \qquad r=1,$$

$$=(1+i^a)2^{r/2}, \qquad r \text{ 为偶数},$$

$$=2^{\pi ia/4}2^{(r+1)/2}, \qquad r \text{ 为} >1 \text{ 的奇数},$$

如果 a 和素数 p 互素，则

$$S(a, p^r)=p^{r/2}, \qquad r \text{ 为偶数},$$

$$=p^{(r-1)/2}S(a, p), \qquad r \text{ 为} >1 \text{ 的奇数},$$

$$S(a, p)=\left(\frac{a}{p}\right)S(1, p),$$

这里 $\left(\frac{a}{p}\right)$ 是 Legendre 符号†．另外，还有 C. F. Gauss 给出的公式：

$$S(1, p)=\sqrt{p}, \quad p\equiv 1 \pmod 4,$$

$$=i\sqrt{p}, \quad p\equiv 3 \pmod 4.$$

很多作者对这个公式给出了各种证明 (E. Landau [5]).

$G(a, \chi_0) = \sum'_{h(\mathrm{mod}\,k)} \exp 2\pi i ah/k$ 称为 **Ramanujan 和** (Ramanujan's sum), 以 $c_k(a)$ 表示, 其中 $\sum'_{h(\mathrm{mod}\,k)}$ 是对 h 通过模 k 的一个不可约剩余系求和,即对剩余类环 $\boldsymbol{Z}/k\boldsymbol{Z}$ 的一个不可约代表系求和, $c_k(1) = \mu(k)$, 一般有 $c_k(a) = \sum_{d|(k,a)} \mu(k/d)d$.

【解析方法】 对于数论函数 $f(n)$, 作和 $\sum_{n\leqslant x} f(n)$, 估计这一和式的阶及求其级数展开的问题, 是解析数论中的一个主题. 设 $f(x)$, $g(x)$ 为在 $x \geqslant 1$ 上定义的函数, $g(x)$ 为 C^1 类函数,如果令 $F(x) = \sum_{n\leqslant x} f(n)$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} f(n)g(n) &= F(x)g(x) - \int_1^x F(t)g'(t)\,dt \\ &= F(1)g(1) + \int_1^x g(t)\,dF(t).\end{aligned}$$

例如, 设 $f(x) = 1$, $g(x) = \log x$ 或 $1/x$, 则得到 $\sum_{n\leqslant x} \log n = x\log x - x + O(\log x)$ 或 $\sum_{n\leqslant x} n^{-1} = \log x + C + O(x^{-1})$ (C 为 Euler 常数†).

由数论函数 $f(n)$ 所构成的 Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ 或幂级数 $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n$, 称为 $f(n)$ 的**母函数**或**生成函数** (generating function). 这是为了利用函数论方法来处理本节中的问题而想出的办法, 在某些情况下还要用更复杂的办法.

下面主要考虑 Dirichlet 级数的情形. 前面所引进的数论函数 ρ, μ, d, χ 的母函数,分别是: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s}$, $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-s}$, $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s}$, 它们的收敛横坐标均为 1. $L(s, \chi)$ 称为 Dirichlet L 函数†(→ζ 函数,素数的分布), 当 $k = 1$, $\chi = \chi_0$ 时, $L(s, \chi)$ 就是 Riemann ζ 函数† $\zeta(s)$. 设 f, g 为积性函数, $f*g = h$, 如果 f, g 的母函数 $F(s)$, $G(s)$ 当 $\sigma \geqslant \sigma_0$ 时绝对收敛, 则 h 的母函数 $H(s)$ 当 $\sigma \geqslant \sigma_0$ 时也绝对收敛,且有 $F(s)G(s) = H(s)$. 所以, 当 $\sigma > 1$ 时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)n^{-s} = \zeta(s)^{-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\chi(n)n^{-s} = L(s, \chi)^{-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_k(n)n^{-s} = \zeta(s)^k$, $\sum_{n=1}^{\infty} d^2(n)n^{-s} = \zeta^4(s)/\zeta(2s)$. 最后的这个关系式是 S. Ramanujan 给出的. 更一般地, 有公式 $\sum_{n=1}^{\infty} d^r(n)n^{-s} = \zeta^{2^r}(s)\varphi(s)$, 其中 $\varphi(s)$ 当 $\sigma > 1/2$ 时是解析函数. 由此, 应用函数论方法就可推出 $\sum_{n\leqslant x} d^r(n) \sim x(c_1(\log x)^{2^r-1} + \cdots + c_{2^r})$ (B. M. Wilson, 1923) (→素数的分布,格点问题).

所谓的 **Euler 求和公式** (Euler summation formula) 有各种各样的形式, 下面是最简便的一种 (E. Landau, L. J. Mordell, H. Davenport): 令 $f_0(x) = x - [x] - 1/2$, 我们相继地构造周期为 1 的连续函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, 使得 $\int_0^1 f_r(x)dx = 0$, 且当 x 不为整数时有 $f_r'(x) = f_{r-1}(x)$ $(r \geqslant 1)$. 如果 $F^{(r)}(x)$ $(0 \leqslant r \leqslant h)$ 在 $[a, b]$ 上是连续的,则应用这些辅助函数可得

$$\begin{aligned}\sum_{a<m\leqslant b} F(m) = \int_a^b F(x)dx &+ \sum_{r=0}^{h-1}(-1)^r(f_r(a)F^{(r)}(a) \\ &- f_r(b)F^{(r)}(b)) \\ &+ (-1)^{h-1}\int_a^b f_{h-1}(x)F^{(h)}(x)dx.\end{aligned}$$

例如, 设 $h = 1$, $a = 1$, $b = N$, $F(x) = x^{-s}$, 并在所得到的表达式中令 $N \to \infty$,则有

$$\begin{aligned}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} &= \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \\ &- s\int_1^{\infty} \frac{f_0(x)}{x^{s+1}}\,dx \quad (\sigma > 1).\end{aligned}$$

上式右端的积分是 s 的解析函数 $(\sigma > 0)$, 利用下面的分部积分, 可把它解析开拓到整个平

面，

$$\int_1^\infty \frac{f_0(x)}{x^{s+1}}dx = -f_1(1)+(s+1)\int_1^\infty \frac{f_1(x)}{x^{s+2}}dx,\cdots.$$

因为 $f_0(x)$ 的 Fourier 展开式为 $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$（有界收敛），所以有 $f_r(x)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\exp 2\pi inx}{(2\pi in)^{r+1}}$，这里 $\sum'$ 表示除去 $n=0$ 这一项，且在求和时把第 n 项与第 $(-n)$ 项一起相加，即这个和实际上等于 $-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\exp(2\pi inx)}{(2\pi in)^{r+1}}+\frac{\exp(-2\pi inx)}{(-2\pi in)^{r+1}}\right)$. 因此，当 $h=1$ 时，得到

$$\sum_{a<n\leqslant b}F(n)=\int_a^b F(x)dx+f_0(a)F(a)-f_0(b)F(b)-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_a^b F'(x)\sin(2\pi nx)dx.$$

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，Lebesgue 可积，且 $F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n+x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收敛．再设 $a(n)=\int_{-\infty}^{\infty}(\exp 2\pi int)f(t)dt$. 如果 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a(n)|$ 是收敛的，则有 Poisson 求和公式†

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\exp 2\pi int)f(t)dt.$$

例如，若取 $f(t)=\exp(-\pi t^2x)(x>0)$，则得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\pi n^2x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\exp(2\pi int-\pi t^2x))dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\exp\left(-\frac{\pi n^2}{x}\right).$$

这个求和公式还可推广到多变量的情况．

除了应用这样的实变函数论方法以外，还可应用概率论的方法．设 $f(n)$ 为 $\omega(n)$ 或 $\Omega(n)$，则有 $\sum_{n\leqslant x}f(n)=x\log\log x+cx+o(x)$，所以 $\omega(n)$ 或 $\Omega(n)$ 的平均阶为 $\log\log n$．关于这个问题，若用 $A(x;\alpha,\beta)$ 表示不超过 x 且满足 $\log\log n+\alpha\sqrt{\log\log n}<f(n)<\log\log n+\beta\sqrt{\log\log n}$ 的 n 的个数，则可证明

$$\lim_{x\to\infty}\frac{A(x;\alpha,\beta)}{x}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-u^2/2}du.$$

在 $f(n)=\omega(n)$ 的情况，这个结果是由 P. Erdös-M. Kac (1940) 应用中心极限定理†和 Brun 筛法†得到的，后来由田中穰 (1955) 进一步推广．

下面介绍一些常用的估计式．设 ε 为任意正数，n 为任意的自然数，则 $d(n)=O(n^\varepsilon)$ (Landau 符号†)，这里 O 与 ε 有关．还已知有 $\limsup_{n\to\infty}(\log d(n))(\log\log n)/\log n=\log 2$ (S. Wigert, 1907)，$\liminf_{n\to\infty}\varphi(n)(\log\log n)/n=e^{-C}$，以及公式 $\omega(n)=O(\log n/\log\log n)$．设 χ 是模 k 的原特征标，$S_m=\sum_{n=1}^{m}\chi(n)$，则有与 m 无关的估计 $|S_m|<\sqrt{k}\log k$ (I. Schur, 1918)，及 $S_m=\Omega(\sqrt{k}\log\log k)$ (R. Paley, 1932)．这意味着存在无限多个 k，对于适当选择的 m 及 χ，有 $|S_m|>c\sqrt{k}\log\log k$ (c 为绝对常数)．当 χ 不是模 k 的原特征标时，如果设 χ^0 为 χ 所对应的原特征标，则 $L(s,\chi)=L(s,\chi^0)\cdot\prod_{p|k}(1-\chi^0(p)p^{-s})$．若设 χ^0 的前导子为 f，则得到公式

$$\sum_{m=1}^{n}\chi(m)=\sum_{d;d|k,d\nmid f}\mu(d)\chi^0(d)\sum_{m\leqslant n/d}\chi^0(m).$$

关于这些内容，А. Г. Постников (1956) 有新的研究．设 p 为充分大的素数，则模 p 的最小正二次非剩余不超过 $p^{1/2\sqrt{e}}(\log p)^2$ (И. М. Виноградов, 1926)．另外，模 p 的最小正原根不超过 $2^{m+1}\sqrt{p}$，其中 p 为素数，$m=\omega(p-1)$ (华罗庚, 1942)．在这方面，D. A. Burgess (1962) 也有新的研究．如果 w 是给定的无平方因子的整数，则存在无限多个素数 p，使得 w

是模 p 的原根（Artin 猜想）.

【参】 [1] R. G. Ayoub, An introduction to the analytic theory of numbers, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1963; [2] G. H. Hardy-E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 第四版, 1965; [3] H. Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950; [4] 池原止戈夫, 初等解析的整数論, 河出, 1949; [5] E. G. H. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I, Hirzel, Leipzig, 1927 (Chelsea, 1946); [6] W. J. Leveque, Topics in number theory, Addison-Wesley, 1956; [7] 末綱恕一, 解析的整数論, 岩波, 1950; [8] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版, 1931; [9] J. Kubilius, Probabilistic methods in the theory of numbers, Amer. Math. Soc. Translation, 1964; [10] А. О. Гельфонд-Ю. В. Линник, Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962.

堆垒数论 [英 additive number theory 法 théorie de nombre additive 德 additive Zahlentheorie 俄 аддитивная теория чисел 日 加法的整数論] 将全体自然数的集合用 $\boldsymbol{N}$ 表示，其子集用 $A, B, \cdots$ 表示. $A+B=C$ 意味着和集 C 是由所有这样的自然数 c 组成: $c \in A$ 或 $c \in B$ 或 $c=a+b(a \in A, b \in B)$. 在这个意义下,可考虑 $A, B, \cdots$ 的有限和. 当 $\boldsymbol{N}$ 为 r 个 A 的和时,将 A 称为是 $\boldsymbol{N}$ 的最高为 $\boldsymbol{r}$ **位的基**(basis of order r). 在属于 A 的数中,将不超过正数 x 的数的个数用 $A(x)$ 表示,则 $\inf A(x)/x$ 称为 A 的**密率** (density). 对于所有的 $n \in \boldsymbol{N}$, 如果 $A(n) \geqslant \alpha n$, $B(n) \geqslant \beta n\ (0<\alpha, \beta<1)$, 则有 $(A+B)(n) \geqslant(\min(1, \alpha+\beta))$ 成立. 这个结果是 E. Landau (1937) 提出的, 但没有证明. 在此之前, A. Я.Хинчин (1932) 已经证明了 $\alpha=\beta$ 的情形, 然而其证明却是意外的困难. 后来, H. B. Mann (1942)及 E. Artin-P. Scherk (1943) 才对一般情况证明了这一结果. 设 A 的密率为 α, B 的密率为 0, 如果 B 是 $\boldsymbol{N}$ 的有限位的基,则 $A+B$ 的密率比 α 大 (A. Я. Хинчин-P. Erdös, 1936). 设 P 为全体素数所组成的集合,其密率虽为 0, 但是 $P+P$ 的密率是正的 (Л. Г. Шнирельман, 1930). 因此, P 是 $\boldsymbol{N}$ 的有限位的基,换句话说,存在自然数 r 使任意的自然数能够表为不超过 r 个素数之和. 设 Q 为所有自然数的 k 次幂所组成的集合,虽然其密率为 0, 但可以证明若干个 Q 之和的密率为正. 根据 Ю. В. Линник 的思想, 华罗庚 (1956) 给出了一个简化证明. 和前面一样,由这一结果推出,存在一个常数 $s=s(k)$, 使得任意的自然数能够表为不超过 $s=s(k)$ 个正整数的 k 次幂之和. 这个结果首先是 D. Hilbert (1909) 用另外的方法证明的.

寻找素数的古典方法,是所谓 Eratostheness 筛法†(→ 初等数论), V. Brun (1920) 改进了这个方法, 他提出了一个将整数表为素因子的个数尽可能少的两个整数之和的新的**筛法**. Brun 的方法,后来由 H. A. Rademacher(1924), E. Landau (1931), A. Бухштаб (1937 以来) 等作了改进. 更进一步, A. Selberg (1952) 提出了有高度技巧的方法, 这一方法的各种形式发表在 “Acta Arithmetica” 的一些文章中.

【Farey 数列】 设 τ 是一个正数,所谓 τ 阶的 **Farey 数列** (Farey series) 就是: 由所有的分母小于 τ 的非负不可约分数, 按其大小顺序所排列的数列. 例如, $\tau=5$ 时, 五阶 Farey 数列为:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

设 n 为正整数, 在 n 阶 Farey 数列中取出二个分数 a/b, c/d, 如果

$$b+d \geqslant n+1, \quad bc-ad=1,$$

则这两个分数就是这个 Farey 数列中的相邻项,而且反过来也成立. 由相邻的二个分数 a/b, c/d 构成的分数 $(a+c)/(b+d)$ 称为**中项** (mediant). 在 n 阶 Farey 数列中插入那些分母为 $n+1$ 的中项,就得到 $n+1$ 阶 Farey 数列.

设 a/q 是 τ 阶 Farey 数列的一个分数, $\frac{a'}{q'}$ 及 $\frac{a''}{q''}$ 是和它相邻的二个分数, $\frac{a'}{q'}<\frac{a}{q}<\frac{a''}{q''}$. 区间 $\left[\frac{a'+a}{q'+q}, \frac{a+a''}{q+q''}\right]$ 称为 a/q 的 **Farey 弧** (Farey arc). 设 $n=[\tau]+1$([ ]为 Gauss 符号†), 0/1 的 Farey 弧取为 $[-1/n, 1/n]$, 对 1/1 不作 Farey 弧. 这样一来, 长度为 1 的区

间 $[-1/n, 1-1/n]$ 就被分解为这些 Farey 弧之和. 如 α 属于 a/q 的 Farey 弧, 则 $|\alpha - a/q| < 1/q\tau$. 因此, 设 $\tau \geqslant 1$ 及 α 为任意实数,则使得

$$(|a|, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant \tau,$$
$$|\alpha - a/q| < 1/q\tau$$

成立的有理数 a/q 的存在性就得到了证明. 为了估计周期为 1 的函数在 $[0, 1]$ 区间上的积分,有时有必要将这个区间分为上述那些 Farey 弧之和. 这个方法称为**圆法** (circle method), 这种分割法称为 **Farey 分割** (Farey dissection). 而且,这个方法根据不同的具体问题,还可作适当的改变. 此外,设 c 为一给定的正数,当 $q \leqslant c$ 时, a/q 的 Farey 弧称为**优弧**或**基本区间** (major arc 或 basic interval),而其他的 Farey 弧称为**劣弧**或**余区间** (minor arc 或 supplementary interval). 通常是, 在优弧上的积分是整个积分的主要部分,而在劣弧上的积分是其次要部分.

【Goldbach 问题】 所谓 **Goldbach 问题**, 是指 C. Goldbach 在其和 L. Euler 的通信(1742)中所提出的把正整数表为素数之和的猜想. 更正确地说,他猜想: 6 以上的偶数能表为二个奇素数的和, 9 以上的奇数能表为三个奇素数的和.

И. М. Виноградов (1937) 首先证明了充分大的奇数可以表为三个素数的和. 设 N 为足够大的奇数.若令

$$A(q, N) = \frac{\mu(q)}{\varphi^3(q)} \sum_{1 \leqslant a \leqslant q, (a,q)=1} \exp\left(-2\pi i \frac{a}{q} N\right),$$

则 $S(N) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q, N)$ 绝对收敛, 且等于 $\prod_p \left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right) \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2 - 3p + 3}\right)$.

熟知, 对所有的 N 有 $S(N) > 6/\pi^2$. 如果设 $N = p_1 + p_2 + p_3$ 解的个数为 $r(N)$, 则 $r(N) \sim (N^2/2\log^3 N) S(N)$. 其证明是应用圆法, 优弧上的计算应用算术级数的素数定理(→素数的分布), 劣弧上的计算, 运用了他所创造的估计 $\sum_{p \leqslant N} \exp 2\pi i \alpha p$ 的巧妙方法. 类似这种形式的指数函数的有限或无限和称为**三角和** (trigonometrical sum), 更一般的, 可讨论多变数的三角和. 关于三角和 Виноградов 在其著作 ([7]) 中有详细的论述. 关于偶数的情形, 至今还没有解决. 但是, J. G. van der Corput, T. Estermann, Н. Г. Чудаков 及华罗庚等同时证明了至多除去密率为 0 的偶数之外其他偶数都可以表为两个素数之和(1938). 对于这些问题, Линник (1946), Чудаков (1947) 通过引进 L 函数的零点密度的概念,给出了函数论的证明方法. 在承认 Riemann 猜想的前题下, G. H. Hardy-J. E. Littlewood 在 1919 年前后就已经指出了这些方法的方向.

【多角数】 设 m 为大于 3 的整数, 由 $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = (m-2)n + 1$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 确定数列 $\{a_n\}$. 属于这个数列的整数称为 **m 阶多角数** (polygonal number of order m). 它的通项为: $n + (m-2)(n^2 - n)/2$ $(n = 1, 2, \cdots)$. 当 $m = 3$ 时, 称为**三角数** (triangular number), 当 $m = 4$ 时,称为平方数, 当 $m = 5$ 时,称为**五角数** (pentagonal number).

P. Fermat (1636) 提出: 每一个自然数可以用 m 个 m 阶多角数之和来表示. A. M. Legendre (1798) 证明了 $m = 3$ 的情形; J. L. Lagrange (1772) 证明了 $m = 4$ 的情形; 一般的情形, 是 A. L. Cauchy (1813) 证明的. 关于 Lagrange 的结果, Legendre 指出了正整数 n 不能表为三个平方数之和的充分必要条件是 n 不是 $4^a(8m+7)$ 型的正整数.

对给定的正整数 n,方程 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_s^2 = n$ 的整数解的个数用 $r_s(n)$ 表示. 例如, $s = 2, n = 5$ 时,考察其正负解组的全部情况,得出 $r_2(5) = 8$. $r_2(n)$ 的母函数 $\sum_{n=1}^{\infty} r_2(n) n^{-s}$ 可以表成 $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} (m^2 + n^2)^{-s}$ ($m = n = 0$ 除外). 这函数是 Gauss 数域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$ 上的 Dedekind ζ 函数† 的 4 倍. 后者可分解为 $4\zeta(s) L(s, \chi)$, 其中, $\chi(n) = \left(\frac{-4}{n}\right)$. 因此

$$r_2(n) = 4 \sum_{m|n}' (-1)^{(m-1)/2},$$

式中 $\sum'$ 表示对 n 的所有奇数因数 m 求和. 这个结果是 C. G. J. Jacobi (1829) 给出的，他还进一步以其独特的构思得到了下列公式.

$$r_4(n) = 8 \sum_{m|n,\ 4\nmid m}' m,$$

式中 $\sum'$ 表示对 n 的所有不是4的倍数的因数 m 求和 (Hardy-E. M. J. Wright, C. L. Siegel 1964). 设 $q = \exp(2\pi i\tau)(\mathrm{Im}\tau > 0)$, $f(q) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_s(n)q^n = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^s$. 对于 $q = a\exp 2\pi ih/k(0 \leqslant a < 1)$, Hardy(1920) 考察当 $a \to 1$ 时 $f(q)$ 的变化,得出了

$$f(q) \sim \pi^{s/2}(S_{h,k}/n)^s \log(1/a)^{-s/2},$$

$$\left(S_{h,k} = \sum_{j=1}^{k} \exp 2\pi i \frac{h}{k} j^2\right).$$

进而他构造**奇异级数** (singular series)

$$\rho_s(n) = \frac{\pi^{s/2}n^{s/2-1}}{\Gamma(s/2)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k,\ A_1 = 1,$$

$$A_k = k^{-s} \sum_{1\leqslant h\leqslant k,\ (h,k)=1} (S_{h,k})^s \exp\left(-2\pi i \frac{h}{k} n\right),$$

并对于 $s = 5, 6, 7, 8$, 证明了 $r_s(n) = \rho_s(n)$. 后来, P. T. Batemann (1951) 证明这结果对 $s = 3, 4$ 亦成立. 另外,当 $s \geqslant 5$ 时有, $r_s(n) = \rho_s(n) + O(n^{s/4})$ (Hardy, Littlewood, S. Ramanujan, 1919 前后). 后来, A. Z. Walfisz (1952), Rademacher ([6]) 又对这个结果作了详细的解释. H. D. Kloosterman (1926), Estermann (1962) 研究了方程

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2 = n$$

的解法,从而开拓了一个与所谓 Kloosterman 和相关连的新的研究领域. 例如,

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i(cx+d/x)/p}\right| \leqslant 2\sqrt{p}$$

这种类型的估计，是应用系数在有限域中的单变数代数函数域上的 ζ 函数的性质推导出来的 (A. Weil, 1948) (→ζ 函数).

【Waring 问题】 所谓的 **Waring 问题**, 最早出现在 E. Waring 的著作 "Meditationes algebraicae" (1770) 中. 他讨论了这样的问题: 任意正整数能够用不超过9个的3次方的和来表示或能够用不超过19个的4次方的和表示.

设 k 为给定的正整数, 一定存在一个正整数 $s(k)$, 使得当 $s \geqslant s(k)$ 时,方程

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = N$$

对任意的正整数 N 具有非负整数解. 这个问题是由 Hilbert 最先解决的. $s(k)$ 的最小值记为 $g(k)$. 若把上面的结果改为对于充分大的 N 成立, 那末这样的 $s(k)$ 的最小值就记为 $G(k)$. 关于 $g(k)$ 和 $G(k)$ 的研究, Hardy-Littlewood 使用圆法作了首次的突破, 后来, 在 H. Weyl 和 Виноградов 的工作中, 这个方法得到了重大的发展. 设上述不定方程的解的个数为 $r_s(N)$, 则它能够用下列的积分表示:

$$r_s(N) = \int_0^1 \left(\sum_{x\leqslant N^{1/k}} \exp 2\pi i\alpha x^k\right)^s \times \exp(-2\pi iN\alpha)d\alpha.$$

如将积分区间稍加平移后作 Farey 分割, 则从在优弧上的积分推导出 $r_s(N)$ 的主项, 从在劣弧上的积分推导出 $r_s(N)$ 的余项. 华罗庚 (1959) 证明了, 当 $s \geqslant 2k^2(2\log k + \log\log k + c)$ 时,

$$r_s(N) \sim S(N)\frac{\Gamma(1+1/k)^s}{\Gamma(s/k)} N^{s/k-1}.$$

对于素数 p, 设同余不定方程

$$x_1^k + x_2^k + \cdots x_s^k \equiv N(\mathrm{mod}\ p^l)$$

的解的个数为 $M(N, p^l)$, 则当 $s \geqslant 4k$ 时, $\lim_{l\to\infty} M(N,p^l)/p^{l(s-1)} = \chi_p(N)$ 存在且不为0, 以及无限乘积 $\prod_p \chi_p(N)$ 收敛于 $S(N)$, 其中 $S(N)$ 大于某一与 N 无关的正常数. 另外, 令 $S(a,q) = \sum_{x=0}^{q-1} \exp 2\pi i \frac{a}{q} x^n$, $A(q,N) = q^{-s} \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} S(a,q)^s \exp\left(-2\pi i \frac{a}{q} N\right)$, 则 $\sum_{q=1}^{\infty} A(q, N)$ 绝对收敛, 且其和等于 $S(N)$. 其次, 设 s 维 Euclid 空间中的闭区域 $N \leqslant x_1^k + x_2^k + \cdots x_s^k \leqslant N + \delta$ 的体积为 $V(N, \delta)$, 则 $\lim_{\delta\to 0} V(N, \delta)/\delta = \chi_\infty(N)$

存在并等于 $(\Gamma(1+1/k)^s/\Gamma(s/k))N^{s/k-1}$. 所以，$r_s(N)$ 的主部等于无限乘积 $\prod_p \chi_p(N)$，其中 p 过 $\mathbf{Q}$ 中所有的有限及无限素点，这是 Hardy 所研究的奇异级数的推广. 关于 $g(k)$，有 L. E. Dickson (1936) 等人的研究. 易见 $g(k) \geqslant 2^k + [(3/2)^k] - 2$，$G(k) \geqslant k+1$. 此外，还证明了 $G(3) \leqslant 7$ (Линник, 1947)，$G(4) = 16$ (H. Davenport, 1939) 等结果，一般有

$$G(k) \leqslant 2k\log k + 4k\log\log k + 2k\log\log\log k + ck,$$

这是现在最好的结果 (Виноградов, 1959). 为了得出这个深刻的结果，Виноградов 引入了与素数定理[†]密切相关的积分：

$$I(P) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \sum_{x \leqslant P} \exp 2\pi i(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_k x^k) \right|^{2s} d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_k.$$

华罗庚 (1949) 证明，当 $s \geqslant (1/4)k(k+1) + lk$ 时，

$$I(P) \leqslant (5s)^{5sl}(\log P)^{2l} P^{2s-k(k+1)/2+\delta},$$

其中 $\delta = (1/2)k(k+1)(1-1/k)^{l-1}$，此外，关于 $I(P)$ 还有 A. A. Карацуба 及 H. M. Коробов (1963) 的出色的研究. 进一步的研究得到，如果 $s \geqslant ck^2 \log k$，则有

$$I(P) = c_1 c_2 P^{2s-k(k+1)/2} + o(P^{2s-k(k+1)/2})$$

(Виноградов, 华罗庚, 1959). 上述结果称为 **Виноградов 中值定理** (Vinogradov's mean value theorem).

上述问题有各种变形与推广. $N = p_1^k + \cdots + p_s^k$ (p_i 为素数) 型的表示问题是由 Виноградов, 华罗庚研究提出的 (1944). 此外，设 $f(x)$ 是一给定的多项式，$N = f(x_1) + \cdots + f(x_s)$ 型的表示问题，是华罗庚 (1937) 及其他人所考虑的. 设

$$C(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ijk} x_i x_j x_k$$

为整系数三次齐次多项式，Davenport (1957) 证明了如果 $n \geqslant 32$，则 $C(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 至少有一组非显然的整数解存在，这结果后来被进一步改进. 关于用多变数的型表示整数的问题为 B. A. Тартаковский, H. Davenport, B. J. Birch, D. J. Lewis 等人所进一步发展.

C. L. Siegel 最早 (1922) 考虑将 Hardy 的平方和问题推广到代数数域中去. 以后，他 (1945) 又研究了在有限次代数数域 K 中的广义 Waring 问题. 设 K 的主整环为 I，由 K 中的整数的 k 次幂所生成的 I 的子环为 J_k，则作为加法群来看，指数 $(I:J_k)$ 是有限的，然而不一定有 $I = J_k$. 因此，关于 $s(k)$，我们只能在 J_k 的整数范围内来考虑. 在这里还出现了怎样把 Farey 分割进行推广的问题. Siegel 成功地解决了这些困难，特别是对于相应的劣弧部分，Siegel 有很出色的工作，这一工作相当于 Hardy-Littlewood 的研究，更深刻的相当于 Виноградов 的研究的工作是三井孝美 (1960) 完成的.

Goldbach 问题在代数数域的推广有三井孝美 (1960)，O. Körner (1961) 的研究. 这里所考虑的是应用量特征标[†]的 Hecke L 函数来研究角域内的素数分布等问题.

作为 Виноградов 三素数定理的另外一种推广，三井孝美 (1971) 证明了下述定理：命 K 为 n 次代数数域，C 为由 K 中的全正数 (totally positive number) 生成的主理想类，P 为 C 中包含的一次素理想集. 命 N 为正整数，$I_s(N)$ 为把 N 表为 P 中的 s 个素理想的范数之和的表法数目，

$$I_s(N) = \sum_{N = N_{\mathfrak{p}_1} + \cdots + N_{\mathfrak{p}_s}} 1$$

$$\mathfrak{p}_i \in P \ (1 \leqslant i \leqslant s).$$

如 N 充分大且 $s \geqslant 3$，我们有渐近公式

$$I_s(N) = A_s S(N) \frac{N^{s-1}}{(\log N)^s} + O\left(N^{s-1} \frac{\log\log N}{(\log N)^{s+1}}\right),$$

式中 A_s 是依赖于 s 与 K 但不依赖于 N 的正常数，$S(N)$ 表示奇异级数. 如果 $s \equiv N \pmod{2D}$，其中 D 是 K 的判别式，则 $S(N) \geqslant c > 0$，这里 c 是常数.

【参】 [1] R. G. Ayoub, An introduction to the analytic theory of numbers, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1963; [2] G. H. Hardy-E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 第四版, 1965; [3] 华罗庚, 堆垒素数论, 科学出版社, 1957; [4] L. K. Hua (华罗庚), Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Enzykl. Math., Bd. I, 2, Heft 13, Teil I, 1959; [5] E. G. H. Landau, Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie, Cambridge Univ. Press, 1937; [6] H. A. Rademacher, Lectures on analytic number theory, Lecture note, Tata Inst. 1954—1955; [7] И. М. Виноградов, Избранные Труды, Изд. АН СССР, 1952; [8] И. М. Виноградов, К вопросу о верхней границе для G(n), Изв. Акад. Наук СССР, **23** (1959), 637—642; [9] T. Mitsui (三井孝美), On the Goldbach problem in an algebraic number field I, II, J. Math. Soc. Japan, **12** (1960), 290—324, 325—372; [10] H. H. Ostmann, Additive Zahlentheorie I, II, Erg. Math., Springer, 1956.

素数的分布 [英 distribution of prime numbers 法 distribution des nombres premiers 德 Verteilung der Primzahlen 俄 распределение простых чисел 日 素数の分布] 将不超过实数 x 的素数的个数用 $\pi(x)$ 表示. 对于 $\pi(x)$, A. M. Legendre (1808) 给出了经验公式 $x/(\log x - B)$ (B 为某常数), C. F. Gauss (1849) 假定素数分布的平均密度为 $1/\log x$, 给出了近似公式 $\int_2^x \frac{du}{\log u}$. П. Л. Чебышев (1848) 引进了函数 $\theta(x) = \sum_{p\leqslant x} \log p$, $\psi(x) = \sum_{p^m\leqslant x} \log p = \theta(x) + \theta(\sqrt{x}) + \theta(\sqrt[3]{x}) + \cdots$, 证明 $\log([x]!) = \psi(x) + \psi(x/2) + \psi(x/3) + \cdots$, 以及 $Ax + O(\sqrt{x}) < \theta(x) < \psi(x) < (6/5)Ax + O(\sqrt{x})$, 其中 $A = \log 2^{1/2}3^{1/3}5^{1/5}30^{-1/30}$, 并解决了 Bertrand 猜想, 即在 x 和 $2x$ 之间有素数存在. 设 $s = \sigma + it$ 为复变量, B. Riemann (1858) 考虑了当 $\sigma > 1$ 时收敛的 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ 所表示的函数 $\zeta(s)$, 并且发现了 $\zeta(s)$ (→ζ 函数)的零点与 $\pi(x)$ 之间的某些关系. F. Mertens 得出了如下的常用公式:

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

$$\sum_{p\leqslant x} \frac{1}{p} = \log\log x + B + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

$$\prod_{p\leqslant x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-c}}{\log x}\left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

【素数定理】 J. Hadamard 和 Ch. de la Vallée-Poussin, 几乎同时 (1896) 证明了**素数定理** (prime number theorem)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

或

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

E. Landau (1908) 不用整函数理论而证明了:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\,x + O(xe^{-c\sqrt{\log x}}),$$

这里 c 为适当的正数, $\mathrm{Li}\,x = \lim_{\delta\to+0}\left(\int_0^{1-\delta} + \int_{1+\delta}^{x}\right) \times \frac{du}{\log u}$ 是对数积分†. 利用分部积分, 可以证明对于任意的自然数 k 有

$$\mathrm{Li}\,x = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(k-1)!\,x}{\log^k x} + O\left(\frac{x}{\log^{k+1} x}\right).$$

例如, 取 $x = 10^7$, 则 $\pi(x)$, $\mathrm{Li}\,x$, $x/\log x$ 的值分别为 664579, 664918, 620417.

对于一般的 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, 如果有 $\sum_{n\leqslant x} a_n \sim cx$, 则其收敛横坐标为 1, 且 $\lim_{s\to1+0}(s-1)f(s) = c$ 成立. 它的逆问题称为 Tauber 型定理. 如果 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ $(a_n \geqslant 0)$ 当 $\sigma > 1$ 时绝对收敛, 且 $F(s) - c/(s-1)$ 当 $\sigma \geqslant 1$ 时是解析的, 则有 $\sum_{n\leqslant x} a_n \sim cx$(**Wiener-池原-Landau 定理**, 1932). 这里如果令 $-\zeta'(s)/\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}$, 则满足定理的条件, 因此 $\sum_{n\leqslant x} \Lambda(n) = \psi(x) \sim x$ 成立. 易见 $\psi(x) \sim x$ 或 $\theta(x) \sim x$ 和素数定理是等价的. 由上面的等式所定义的 $\Lambda(n)$ (**Mangoldt 函数**)满足 $\sum_{d\mid n} \Lambda(d) = \log n$. 从 Möbius 反演公式(→数论函数)得到 $\Lambda(n) = \sum_{d\mid n} \mu(d)\log n/d$. 因此,

当 n 为素数幂 p^m 时，$\Lambda(n)$ 为 $\log p$，其他情形为 0. 因此，我们得到 $\psi(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)=O(x)$. 当 $f(x)$ 为 $\theta(x)$ 或 $\psi(x)$ 时，则容易证明 $\int_2^x \frac{f(t)}{t^2}dt=\log x+O(1)$ 以及 $\liminf_{x\to\infty} f(x)/x\leqslant 1\leqslant \limsup_{x\to\infty} f(x)/x$. 但是，$f(x)\sim x$ 的证明是困难的. 为此，引进由 $\sum_{d\mid n}M(d)=\log^2 n$ 所定义的函数 $M(n)$. 像前面那样，我们有 $M(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\log^2 n/d$. 因此，$M(n)=(2l-1)\log^2 p(n=p^l,\ l\geqslant 1)$；$=2\log p\log q(n=p^l q^m,\ l\geqslant 1,\ m\geqslant 1)$；$=0$（其他的 n）. 这样就得到 $\sum_{n\leqslant x}M(n)=2x\log x+O(x)$. 由此导出 Selberg 公式 (1949)： $\theta(x)\log x+\sum_{p\leqslant x}\theta(x/p)\log p=2x\log x+O(x)$. A. Selberg 巧妙地运用部分求和法，由这个公式导出 $\theta(x)\sim x$，首次成功地不用函数论方法而证明了素数定理. 此外，Landau 指出：H. von Mangoldt (1897) 所给出的 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}=0,\sum_{n\leqslant x}\mu(n)=o(x)$ 这样简明的结果在实质上是与素数定理同等深刻的. 设 $\pi_\nu(x)$ 表示不超过 x 的可表为相异的 ν 个素因数之积的自然数的个数，那末，作为素数定理的推广有

$$\pi_\nu(x)\sim\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{\log x}$$

(Landau, 1911).

令 $\vartheta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi x n^2}$，Riemann 证明了

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s)=\frac{1}{s(s-1)}+\int_1^{\infty}\vartheta(x)(x^{s/2-1}+x^{-1/2-s/2})dx,$$

由此得出了著名的 ζ 函数的函数方程†（→ ζ 函数）$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)=\pi^{-1/2+s/2}\Gamma(1/2-s/2)\cdot\zeta(1-s)$，这个公式把 $\zeta(s)$ 延拓为全平面上的亚纯函数. 利用这开拓后的 $\zeta(s)$ 和下述关于 Dirichlet 级数的 **Perron 公式**及其变形，我们就能来估计 $\psi(x)$. 设 $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)n^{-s}$ 的收敛横坐标为 $\sigma_0(\neq\infty)$，$a>0,\ a>\sigma_0$，如果

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}F(s)\frac{x^s}{s}ds,\ x>0$$

存在，则它等于 $\sum_{n\leqslant x}{}' f(n)$，这里 Σ' 表示：如果 x 为整数则求和时将最后一项 $f(x)$ 用 $f(x)/2$ 来代替. 在许多情形，$F(s)$ 以 $s=1$ 为极点，并由其留数可得出这个和的主项，而余项由某个围道积分给出. 在 $\psi(x)$ 的情形，由于把 $F(s)$ 取为 $-\zeta'(s)/\zeta(s)$，所以问题就转化为确定 $\zeta(x)$ 的零点. 如果 Riemann 猜想†（→ ζ 函数）——$\zeta(s)$ 在带状区域 $0\leqslant\sigma\leqslant 1$ 中的零点全部在直线 $\sigma=1/2$ 上——成立，则有 $\pi(x)=\operatorname{Li}x+O(\sqrt{x}\log x)$. 现在离 Riemann 猜想的解决还相当远，И. М. Виноградов (1958) 的如下结果是领先的：

$$\pi(x)=\operatorname{Li}x+O(x\exp(-c\log^{3/5}x/\log\log^{1/5}x)).$$

还有，不论 Riemann 猜想正确与否，已证明

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)-\operatorname{Li}x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}>0,$$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)-\operatorname{Li}x}{(\sqrt{x}/\log x)\log\log\log x}<0$$

成立 (J. E. Littlewood, 1914). 设 $\zeta(s)$ 在区域 $0<\sigma<1,\ 0<t<T$ 内的零点个数为 $N(T)$，则有

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log 2\pi}{2\pi}T+O(\log T),$$

设在线段 $\sigma=1/2,\ 0<t<T$ 内的零点个数为 $N_0(t)$，则有

$$N_0(t)>cT\log T$$

(Selberg, 1942).

E. C. Titchmarsh (1936) 计算出，在 $0<t<1468$ 范围内，$\zeta(s)$ 的零点有 1041 个，且全部在直线 $\sigma=1/2$ 上. 最近应用电子计算机，使 Riemann 猜想在更广范围内得到肯定 (D. H.

Lehmer (1959), R. P. Brent (1979)). N. Levinson (1974) 用另外的方法证明了 Riemann ζ 函数的零点至少有 1/3 在直线 $\sigma = 1/2$ 上. 此外, 还计算出了在 $\sigma = 1/2, t > 0$ 上, 最小零点为 $t = 14.13\cdots$.

【孪生素数】 把素数按大小顺序排列, 第 n 个素数记为 p_n, 根据素数定理可知, $p_n \sim n\log n$ 成立. 更精确些, 有 $p_n = n\log n + n\log\log n + O(n)$. 当 $p_{n+1} - p_n = 2$ 时, 将这对素数称为**孪生素数** (twin prime numbers), 但是这样的孪生素数是否有无限多对, 现在还不清楚. 对于无限多个 n, 有 $p_{n+1} - p_n < c\log p_n$ 成立 (P. Erdös, 1940). 假设 $\zeta(1/2 + it) = O(|t|^c)$, 则对于所有的 n, 有

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\Theta},$$
$$\Theta = (1 + 4c)/(2 + 4c) + \varepsilon,$$

(A. E. Ingham, 1937). 证明这个不等式要用到下面的命题: 设 $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 在区域 $\alpha \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ 内的零点个数为 $N(\alpha, T)$, 则

$$N(\alpha,T) = O(T^{2(1+c)(1-\alpha)}\log^5 T)$$

成立. 所谓 **Lindelöf 猜想** (Lindelöf's conjecture) 就是"上面的 c 可以为任意小". 如果 Riemann 猜想是正确的, 则 Lindelöf 猜想也成立. 容易证明 c 可取为 $1/6 + \varepsilon(\varepsilon > 0)$, W. Haneke (1963) 又得到了 $6/37 + \varepsilon$ 的结果. 反之, 存在无限多个 n 使得 $p_{n+1} - p_n > c\log p_n \log\log p_n \log\log\log\log p_n (\log\log\log p_n)^{-2}$ 成立 (R. A. Rankin, 1935). 若以 $\pi_2(x)$ 表示这样的素数 p 的个数: $p \leqslant x, p + 2$ 亦为素数, 则有如下的猜想:

$$\pi_2(x) \sim C\int_2^x \frac{du}{\log^2 u}, \quad x \to \infty,$$

其中

$$C = 2\prod_{p>2}\left\{1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right\} = 1.32032\cdots$$

由计算 $\pi_2(10^9) = 3424506$ (R. P. Brent, Math. Comp., **28** (1974)) 所提供的数据倾向于表明这个猜想是正确的. 目前所知道的最大的孪生素数对是 $297 \cdot 2^{546} \pm 1$ (R. Baillie, Math. Comp., **33** (1979)).

【算术级数的素数定理】 设 k 为正整数, 由模 k 的剩余特征标 $\chi(n)$ (→ 数论函数) 定义 Dirichlet L 函数† $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)n^{-s} (\sigma > 1)$. 和 Riemann ζ 函数同样, 作解析延拓可得, 当 χ 为主特征标时, $L(s, \chi)$ 除了在 $s = 1$ 具有一阶极点外, 在全平面是解析的, 当 χ 不是主特征标时, $L(s, \chi)$ 为整函数. P. G. L. Dirichlet (1837) 证明了: 首项 l 和公差 k 互素的算术级数 $l, l + k, l + 2k, \cdots$ 中有无限多个素数存在. 他是利用 L 函数并结合二次型类数的计算来证明的. 这个定理称为 **Dirichlet 定理(算术级数的素数定理)**.

当 $\mathfrak{a}$ 过判别式 d 的二次域 K 的所有的整理想时, 用 $\sum(N\mathfrak{a})^{-s} (\sigma > 1)$ 定义 K 上的 Dedekind ζ 函数† $\zeta_K(s)$ (→ ζ 函数). 根据二次域的素理想分解法则 (→ 二次域的数论 [素理想]), 有 $\zeta_K(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$, 其中 $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ 为 Kronecker 符号. 以 $h(d)$ 表示 K 的类数, 如果 $d > 0$, 则 $h(d) = (\sqrt{d}/2\log\varepsilon)L(1,\chi)$, 其中 ε 为 K 的基本单元; 如果 $d < 0$, 则 $h(d) = (w\sqrt{-d}/2\pi)L(1,\chi)$, 其中 w 为 K 中所包含的单位根的个数. 由此推出, $L(1,\chi) \geqslant 2(\log(1+\sqrt{5})/2)/\sqrt{|d|}$. 设 χ 为模 k 的剩余特征标, χ^0 是对应于 χ 的原特征, 则 $L(s,\chi) = L(s,\chi^0)\prod_{p|k}(1 - \chi^0(p)p^{-s})$ 成立. 可以证明, 如果 χ 为实特征标, 则有 $L(1,\chi) \neq 0$. 在 χ 不是实特征标的情形, 证明 $L(1,\chi) \neq 0$ 是简单的. 由此可以推出 Dirichlet 定理. 关于这个定理, 还有 H. N. Shapiro (1951) 的简化证明. 当 χ 为实特征标时, 对于 $L(1,\chi) \neq 0$ 除了 Landau (1908) 的三个证明外, 还有 T. Estermann (1952), Selberg (1949) 等人的有趣的证明. 对于模 k 的非主特征标 χ, 总有 $L(1,\chi) = O(\log k)$. 一般地有 $L(1,\chi)^{-1} = O(\log k)$, 然而当 χ 为实特征标时可能出现例外, 但这时亦有 $L(1,\chi)^{-1} = O(k^{\varepsilon})$ ($\varepsilon > 0$ 是任意的, O 与 ε 有关). 这个结果是 C. L. Siegel (1934) 从虚二次域的类数的研究中得到的, Estermann (1948), S. D. Chowla (1950) 给出了简化证明.

算术级数的素数定理，当它在 Goldbach 问题中得到应用后，对它的重要性才开始有所认识。在这里模 k 对于余项有什么程度的影响的问题成为主要研究对象，便于应用的形式是下面的 A. Page-Siegel-A. Z. Walfisz 定理(1936)：在不超过 x 的素数中，将具有形式 $ky+l$ ($(k,l)=1$) 的数的个数用 $\pi(x;k,l)$ 表示，当 $x \geqslant \exp k^{\varepsilon}$($\varepsilon$ 为任意正数)时，有

$$\pi(x;k,l)=(1/\varphi(k))\mathrm{Li}\,x + O((1/\varphi(k))xe^{-c(\varepsilon)\sqrt{\log x}}).$$

特别是在考察 x 取小值的情形时，对 $L(s,\chi)$ 的零点分布进行深入地研究是很必要的。当 χ 为非主实特征标时，$L(s,\chi)$ 在 1 的附近最多可能有一个实零点 β_1，这是当前的困难问题，因为这样就不能得出素数在各剩余类中一致分布的有效公式。然而，有如下的深刻结果 (E. Fogels, 1962)：对于任意的正数 ε，存在常数 $c_0(\varepsilon)$ 及 $c(\varepsilon)$，使得当 $x \geqslant k^{c_0(\varepsilon)}$ 时有

$$\pi(x;k,l)>c(\varepsilon)x/\varphi(k)k^{\varepsilon}\log x.$$

另外，Titchmarsh (1930) 应用 Brun 筛法[†] 证明了当 $x \geqslant k^{c_0}$ 时 $\pi(x;k,l)=O(x/\varphi(k)\log x)$。上述的 Fogels 定理的基础是作为 Page 定理(1935)的推广的 Ю. В. Линник (1947)和 K. Prachar (1957) 所得到的定理：[在上述例外的实零点 β_1 存在时，设 $\delta=1-\beta_1$，β_1 不存在时，设 $\delta=c_1/\log k(|t|+2)$，则当 $\delta\log k(|t|+2) \leqslant c_1$ 时，有

$$\beta \leqslant 1-\frac{c_1}{\log k(|t|+2)}\log\frac{c_1 e}{\delta\log k(|t|+2)},$$

这里，β 和 t 分别为 $L(s,\chi)$的任意零点($\neq\beta_1$)的实部和虚部，c_1 为适当小的正的常数。

设 s 为正整数，b_j, z_j($1\leqslant j\leqslant s$) 为复数，$\max|z_j|\geqslant 1$, l, m 为任意的实数，$l\geqslant s$, $m\geqslant 0$。这时，有

$$\max_{m\leqslant r\leqslant l+m}|b_1z_1^r+\cdots+b_sz_s^r| \geqslant\left(\frac{l}{8e(l+m)}\right)^l\min_{1\leqslant j\leqslant s}|b_1+\cdots+b_j|.$$

这就是 Turán 定理 (1953)，它在 ζ 函数的零点分布的研究中很有用。基于这一新方法，P. Turán (1961)、S. Knapowski (1962)，Fogels (1965) 给出了上面一些定理的新证明。

此外，还有由 Selberg 筛法发展起来的，W. B. Jurkat, H.-E. Richert (1965) 等人的关于素数分布的新研究。

【筛法】 设 A 为一整数集合，P 为一素数集合。对每个 $p\in P$，设 Ω_p 为由模 p 的剩余类所组成的集合，$\omega(p)$ 为属于 Ω_p 的剩余类数。筛法是估计属于集合 $S(A,P,\Omega_p)=\{n\mid n\in A, n \bmod p\notin\Omega_p, p\in P\}$的整数 n 的数目（的上界和下界)的一种方法。Brun, Бухштаб, Rosser, Richert 及 Iwaniec 的筛法中的组合方法有趣而有效，但是非常复杂。这里，我们简单叙述一下 **Selberg 筛法** (Selberg sieve)。作为例子，我们考虑下面问题：用 $S(x;q,l)$ 表示满足 $n\equiv l \bmod q$, $n\leqslant x$, $(n,D)=1$ 的 n 的数目，其中 q 为一不超过 x 的素数，$z\leqslant x$, $D=\prod_{p\leqslant z}p$，且 $(l,q)=1$；则

$$S(x;q,l)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l \bmod q}}\sum_{d|(n,D)}\mu(d) \leqslant\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l \bmod q}}\left(\sum_{d|(n,D)}\lambda_d\right)^2,$$

式中 $\lambda_1=1$，当 $d>1$ 时实数 λ_d 可任意选取。因此，问题就归结为 λ_d 的最优选择。基于这种思想，C. Hooley (1967)及本橋洋一 (1975) 用分析方法得到了某些与 Brun-Titchmarsh 定理有关的深刻结果。

设 $n_1, n_2, \cdots n_Z$ 为 Z 个不超过 N 的自然数，$Z(p,a)$ 为满足 $n_j\equiv a \bmod p$ 的 n_j 的数目。A. Rényi (1950) 证明了

$$\sum_{p\leqslant\sqrt[3]{N/12}}p\sum_{a=0}^{p-1}\left\{Z(p,a)-\frac{Z}{p}\right\}^2\leqslant 2NZ$$

当 $n=n_j$ 时令 $a_n=1$，否则令 $a_n=0$，并设 $S(\alpha)=\sum_{n\leqslant N}a_n\exp(2\pi in\alpha)$，则有

$$p\sum_{a=1}^{p-1}\left\{Z(p,a)-\frac{Z}{p}\right\}^2 =\sum_{a=1}^{p-1}\left|S\left(\frac{a}{p}\right)\right|^2.$$

从这个简单的事实出发，E. Bombieri (1965)

及 P. X. Gallagher (1968) 把这问题推广并且证明,一般地有

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q}\left|\sum_{M<n\leqslant M+N}a_n\exp\left(2\pi i\frac{a}{q}n\right)\right|^2$$

$$\leqslant(N+2Q^2)\sum_{M<n\leqslant M+N}|a_n|^2.$$

对于特征和 $\sum_{M<n\leqslant M+N}a_n\chi(n)$ 也可得到类似的结果. 与此相关, H. L. Montgomery 证明了

$$S(\{n;M<n\leqslant M+N\};P,\Omega_p)$$

$$\leqslant(N+2Q^2)\left\{\sum_{\substack{q\leqslant Q\\q|P(z)}}\prod_{p|q}\frac{\omega(p)}{p-\omega(p)}\right\}^{-1}$$

其中 $P(z)=\prod_{\substack{p\in P\\p\leqslant z}}p$. Bombieri 应用这些方法得到了下面的估计:

$$\sum_{q\leqslant x^{\frac{1}{2}}(\log x)^{-B}}\max_{y\leqslant x}\max_{(q,l)=1}\left|\pi(y,q,l)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\varphi(q)}\int_2^y\frac{du}{\log u}\right|\ll x(\log x)^{-A},$$

其中 A 是任意常数, B 是 A 的某个函数 (R. C. Vaughan). 这些方法总起来称为**大筛法** (large sieve) (大筛法最早是 Ю. В. Линник (1941) 为研究最小正二次非剩余而创造的),引进这些方法主要是为了证明 **Rényi 定理** (Rényi theorem),即每个充分大的偶数可表为一个素数和一个殆素数的和(潘承洞, M. Б. Барбан). 后来陈景润 (1973) 把 Richert 筛法同这种大筛法结合起来, 证明了 Rényi 定理中的殆素数为最多有两个素因子的整数. P. D. T. A. Elliot 及 H. Halberstam (1966) 还应用 Bombieri 定理证明了许多结果: 例如;把 n 表为 $p+x^2+y^2$ 的表法数目的估计 (Hooley, Ю. В. Линник) 以及 $\sum_{p\leqslant n}d(n-p)$ 的估计 (Линник, Б. М. Бредихин).

设 $N(\alpha,T,\chi)$ 表示 $L(s,\chi)$ 在矩形 $\alpha\leqslant\sigma\leqslant1$, $|t|\leqslant T$ 中的零点数目. Gallagher (1970) 通过把大筛法,新的 Fourier 积分技巧,及 Turán 的幂和法结合起来, 证明存在一个正的常数 c, 使得

$$\sum_{\chi\bmod Q}N(\alpha,T,\chi)$$

或

$$\sum_{q\leqslant Q}\sum_{\chi\bmod q}N(\alpha,T,\chi)\ll(QT)^{c(1-\alpha)}.$$

G. Halasz 及 H. L. Montgomery (1969) 用另外的方法也得到了类似结果, M. Jutilla 及 M. H. Huxley (1972) 和其他人进一步发掘这种方法的潜力,特别是 Huxley (1972) 得出: 若 $y\geqslant x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}$, 则 $\pi(x+y)-\pi(x)\sim y(\log x)^{-1}$. 把上述零点密度定理同 Deuring-Heilbronn 现象结合起来,不仅可以建立起 Линник 关于算术级数中的最小素数的理论, 而且得到了属于 K. A. Родоский, 龍沢周雄以及 И. М. Виноградов 的下列结果: 若 $x\geqslant\exp(a\log q\log\log q)$, 则

$$\pi(x;q,l)=\frac{1}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{du}{\log u}$$

$$-E\frac{\chi_1(l)}{\varphi(q)}\int_2^x\frac{u^{\beta-1}}{\log u}du$$

$$+O\left(\frac{1}{\varphi(q)}x^{1-\frac{c}{\Delta}}\right),$$

其中 $E=1$ 或 0, 按照 Siegel 零点 β 存在或不存在而定, $\Delta=\mathrm{Max}(\log q,(\log x)^{\frac{3}{5}}(\log\log x)^{\frac{1}{5}})$.

在所有这些研究中下面这些类型的估计是非常重要的:

$$\sum_{\chi\bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^4$$

$$\ll\varphi(q)(|t|+2)\log^c\{q(|t|+2)\}$$

及

$$\sum_{\chi\bmod q}\int_{-T}^{T}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^4dt$$

$$\ll\varphi(q)(T+2)\log^c q(T+2),$$

它们曾经被 A. Ф. Лаврик (1968), Линник (1961), Huxley (1972) 及 K. Ramachandra (1975) 等人研究过.

【代数数域的素理想定理】 在代数数域的情形,素数定理为**素理想定理** (prime ideal theorem) 所取代,得出了基本上一样的结果 (三井

孝美，1956；Fogels，1962），但这是以 Hecke L 函数（E. Hecke 1917；Landau，1918）（→ ζ 函数）的研究作基础的. 设 K/k 为相对 Galois 域，k 的素理想 $\mathfrak{P}$ 在 K 中不分歧，则 $\mathfrak{P}$ 在 K 中的素因子的 Frobenius 置换†决定了 K/k 的 Galois 群的一个共轭类 C. 与类 C 相关的 k 中的范数不超过 x 的素理想的个数用 $\pi(x, C)$ 表示，则

$$\pi(x,C)=\frac{h(C)}{(K:k)}\operatorname{Li}x+O(x\exp(-c\sqrt{\log x})),$$

其中 $h(C)$ 为 C 中的元素个数，c 为与 K/k 有关的正的常数（E. Artin，1923）. 这是 Чеботарев 定理的推广（证明见[11]）.

【参】 [1] R. G. Ayoub, An introduction to the analytic theory of numbers, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1963; [2] E. Fogels, On the existence of primes in short arithmetical progressions, Acta Arith., 6 (1961), 295—311; [3] G. H. Hardy, Divergent series, Oxford, 1949; [4] E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1923 (Chelsea, 1970); [5] A. E. Ingham, The distribution of prime numbers, Cambridge Univ. Press, 1932; [6] E. G. H. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II, Teubner, 1909 (Chelsea, 1969); [7] E. G. H. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I, II, Hirzel, 1927; [8] D. N. Lehmer, List of prime numbers from 1 to 10006721, Carnegie Institution of Washington, 1914; [9] K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer, 1957; [10] A. Selberg, An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progressions, Canad. J. Math., 2 (1950), 66—78; [11] 末綱恕一，解析的整数論，岩波，1950; [12] P. Turán, Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen, Akodémiai Kiadó, Budapest, 1953; [13] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford, 1951; [14] И. М. Виноградов, Новая оценка функции ζ(1 + it), Изв. Акад. Наук СССР, 22 (1958), 161—164; [15] H. Bohr-H. Cramér, Die neuere Entwicklung der analytischen Zahlentheorie, Enzykl. Math., II C (8), 1922; [16] E. Bombieri, Le grand crible dans la théorie analytique des nombres, Société mathématique de France, 1974; [17] K. Chandrasekharan, Introduction to analytic number theory, Springer, 1968; [18] P. Erdös, Some recent advances and current problems in number theory, Lectures on modern mathematics III, edited by T. L. Saaty, John Wiley, 1965, p. 196—244; [19] H. M. Edwards, Riemann's zeta function, Academic Press, 1974; [20] H. Halberstam-H. E. Richert, Sieve methods, Academic Press, 1974; [21] M. N. Huxley, The distribution of prime numbers, Oxford Univ Press, 1972; [22] N. Levinson, More than one third of zeros of Riemann's zeta-function on σ = 1/2, Advances in Math., 13 (1974), 383—486; [23] H. L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory, Lecture notes in math., 227, Springer, 1971.

格点问题 [英 lattice-point problem 法 problème des points de réseau 德 Gitterpunktproblem 俄 проблема узлов решётки 日 格子点の問題] 在方格纸上面画出有长度的 Jordan 闭曲线（长度为 L，内部的面积为 F），在曲线上及其内部的格点的个数设为 A，则 $A=F+O(L)$ 成立. 研究这个问题是非常自然的，而且是很必要的. 特别地，如果我们取以原点为中心、半径为 $\sqrt{x}$ 的圆，那么 $A(x)=\pi x+O(\sqrt{x})$（Gauss，1863）. 还有，如将在 $uv\leqslant x$，$u\geqslant 1$，$v\geqslant 1$ 所围成的闭区域上的格点个数设为 $D(x)$，则 $D(x)=x\log x+(2C-1)x+O(\sqrt{x})$，其中 C 为 Euler 常数†（Dirichlet，1849）. 在上述二个特殊情形，若把级数

$$\sum_{\substack{m,\,n=-\infty\\(m,\,n)\neq(0,0)}}^{\infty}(m^2+n^2)^{-s},\ \left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}\right)^2$$

表为 $\sum_{n=1}^{\infty}F(n)n^{-s}$，则问题也可看成是研究 $H(x)=\sum_{n\leqslant x}F(n)$ 的问题. 前者称为 **Gauss 圆问题**（德 Kreisproblem），$F(n)$ 为 $u^2+v^2=n$ 的整数解 (u, v) 的个数，用 $r(n)$ 表示. 后者称为 **Dirichlet 除数问题**（德 Teilerproblem），$F(n)$ 为 $uv=n$ 的正整数解 (u, v) 的个数，因而也就是 n 的正除数的个数 $d(n)$.

令 $P(x)=A(x)-\pi x$，$\Delta(x)=D(x)-(x\log x+(2C-1)x)$. W. Sierpinski（1906）和 Г. Вороной（1903）分别改进了 C. F. Gauss 和 P. G. L. Dirichlet 的结果，得到 $P(x)=O(x^{1/3})$ 和 $\Delta(x)=O(x^{1/3}\log x)$. 对于 $P(x)$ 和 $\Delta(x)$ 的估计有进一步的研究. J. G. van der Corput 以及 E. C. Titchmarsh 提出了估计较为一般的三角和†的出色的方法. 例如，设 $f(x)$ 是 k 次可微（$k\geqslant 3$）的实值函数，如果在 $a\leqslant x\leqslant b(b-a\geqslant 1)$ 上，$0<\lambda\leqslant f^{(k)}(x)\leqslant h\lambda$（或者 $0<\lambda\leqslant -f^{(k)}(x)\leqslant h\lambda$），则

$$\sum_{a\leqslant n\leqslant b}\exp 2\pi i f(n) = O(h^{2^{2-k}}(b-a)\lambda^{(2^k-2)^{-1}} + (b-a)^{1-2^{2-k}}\lambda^{-(2^k-2)^{-1}}).$$

现在,关于 $P(x)$, $\Delta(x)$ 都得到了比 $O(x^{\frac{13}{40}+\varepsilon})$ 稍好的结果(华罗庚(1942),陈景润(1963),尹文霖(1959),Г. А. Колесник (1973)),并且还猜想有 $O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon})$ 成立(ε 为任意正数). 关于这个问题还有 G. H. Hardy (1916), A. E. Ingham (1941) 等人的结果:

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x^{1/4}} = \infty,\ \liminf_{x\to\infty}\frac{P(x)}{x^{1/4}\log^{1/4}x} < 0$$

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\Delta(x)}{x^{1/4}\log^{1/4}x} > 0,$$

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\Delta(x)}{x^{1/4}} = -\infty,$$

以及 H. Cramér (1926) 的结果:

$$\frac{1}{x}\int_1^x |P(y)|dy = O(x^{1/4}),$$

$$\frac{1}{x}\int_0^x |\Delta(y)|dy = O(x^{1/4}).$$

另外,对于 $x>0$,还有展开式

$$\sum_{n\leqslant x}{}' r(n) = \pi x + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{\sqrt{n}}J_1(2\pi\sqrt{nx}),$$

$$\sum_{n\leqslant x}{}' d(n) = x\log x + (2C-1)x + \frac{1}{4} + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{\sqrt{n}}F(2\pi\sqrt{nx})$$

成立 (Вороной, 1904), 其中 $\sum'$ 表示当 x 为整数 m 时,和式中的第 m 项取其一半相加, $J_1(x)$ 是(第一种) Bessel 函数†, 以及 $F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos xu \sin\frac{x}{u}du$. 对于前者, E. Landau (1920) 的证明有几何学的兴趣;对于后者, W. Rogosinski (1922) 的证明有实函数论的味道. 这些问题由 A. Oppenheim (1926) 作了推广.

【各种推广】 设 $Q(u_1,\cdots,u_n) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}u_\mu u_\nu$ ($a_{\mu\nu}$ 为有理数, $a_{\mu\nu}=a_{\nu\mu}$) 是行列式为 D 的定正二次型. 作为 Gauss 圆问题的推广, 考虑求满足 $Q(m_1,\cdots,m_n)\leqslant x$ 的格点 $(m_1,\cdots,m_n)$ 的个数的问题. 这个问题受 Epstein 的 ζ 函数†的影响,发展成计算

$$F(x) = \sum_{Q(m_1,\cdots,m_n)\leqslant x}\exp 2\pi i(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n)$$

的问题,即对每一格点加权 $\exp 2\pi i(\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n)$ 来求和. Landau 的结果(1915)是:

$$F(x) = \delta\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{D}\Gamma(n/2+1)}x^{n/2} + O(x^{n(n-1)/2(n+1)}),$$

其中当 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 全都是整数时, $\delta=1$, 其他情形 $\delta=0$. 当然,在求格点的个数时, $\delta=1$. 对于特殊情形 $n=3$, 有

$$\sum_{u^2+v^2+w^2\leqslant x} 1 = (4/3)\pi x^{3/2} + O(x^{19/28+\varepsilon})$$

这样深刻的结果 (И. М. Виноградов, 1960, 1963 年, И. М. Виноградов 及陈景润分别;把 19/28 改进为 2/3).

Gauss 数域 $Q(\sqrt{-1})$ 上的 Dedekind ζ 函数的四倍,正好等于 $\sum_{n=1}^{\infty} r(n)n^{-s}$. 这样一来, Gauss 圆问题又发展成为关于 Dedekind ζ 函数的 $H(x)$ 的估计问题. 包括 Gauss 圆问题和 Dirichlet 除数问题在内的一般除数问题是 1912 年以后, Landau 的主要研究题目. 我们来考虑 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F(n)n^{-s}$ 是有限个 Dedekind ζ 函数的积的情形. 稍作改变,下面的结果对于 Hecke L 函数†的积亦成立. 设 $k_j(1\leqslant j\leqslant \tau)$ 为有理数域上的 n_j 次代数数域, $\zeta_j(s)$ 为 k_j 上的 Dedekind ζ 函数, ρ_j 为 $\zeta_j(s)$ 在极点 $s=1$ 的残数,且令

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_\tau = N,$$

$$\zeta_1(s)\zeta_2(s)\cdots\zeta_\tau(s) = \sum_{n=1}^{\infty}F(n)n^{-s},$$

$$H(x) = \sum_{n\leqslant x}F(n),$$

则

$$H(x) = x(a_1 \log^{\tau-1} x + \cdots + a_{\tau-1} \log x + a_\tau) + O(x^{(N-1)/(N+1)} \log^{\tau-1} x),$$

$$a_1 = \rho_1\rho_2\cdots\rho_\tau/(\tau-1)!,$$

且右端的余项不能由 $O(x^\theta)(\theta < 1/2-1/2N)$ 来代替. 关于 $H(x)$ 的估计,有一些代数的结果(末綱恕一, 1929; H. Hasse-末綱, 1931). 此外, 如果上列的 $\zeta_j(s)$ 全部为 Riemann ζ 函数,并设 τ 为 k, 则有 $\zeta(s)^k = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n)n^{-s}$, 其中 $d_k(n)$ 是把 n 表为 k 个因数之积的表法的个数. 这时,余项可改进为$O(x^{c+\varepsilon})(c=\max(1/2, (k-1)/(k+2))(k \geqslant 3))$ (Hardy-J. E. Littlewood, 1922). Artin L 函数的一个恰当的应用是由末綱 (1925) 提出来的. 他把 Landau (1912) 所得到的一个结果——不超过 x 的可表为两个平方数之和的自然数的个数近似等于 $ax/\sqrt{\log x}$, a 为正的常数——推广到了有限次代数数域上.

【参】 [1] G. H. Hardy-J. E. Littlewood, The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with application to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz, Proc, London Math. Soc., (2) **21** (1923), 39—74; [2] L. K. Hua (华罗庚), Die Abschätzung von Exponentialsummen und ihre Anwendung in der Zahlentheorie, Enzykl. Math., Bd. I, 2, Heft 13, Teil I, 1959; [3] E. G. H. Landau, Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen, S.-B. Preuss. Akad. Wiss., 1915, 458—476; [4] E. G. H. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale, Teubner, 1918, 第二版 1927; [5] E. G. H. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie II, Hirzel, 1927 (Chelsea, 1969); [6] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Clarendon Press, 1951; [7] 末綱恕一,解析的整数論,岩波, 1950; [8] E. G. H. Landau, Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre (edited by A. Walfisz), Deutscher Verlag der Wiss., 1962.

整数分拆 [英 number of partitions 法 nombre des partitions 德 Zerfällungsanzahl 俄 число разбиений 日 分割数] 将正整数 n 以几个正整数之和的形式来表示, 称为 n 的一种**分拆** (partition). 以 $p(n)$ 表示 n 的所有不同的分拆的个数,这里不计被加项的顺序,并允许重复出现. $p(n)$ 称为 n 的**分拆数** (number of partitions). 例如, 由于 $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$,所以 $p(5) = 7$. $p(n)$ 等于 n 阶对称群的共轭类的个数, 并与该群的表示理论密切相关,因而非常有趣.

$p(n)$ 的母函数†

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n)x^n = \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)\right)^{-1}$$

当 $|x| < 1$ 时为全纯的, 并以单位圆 $|x| = 1$ 为其自然边界. 设 τ 表示在上半平面内取值的复变数, 如果把 **Dedekind η 函数** (Dedekind eta function) 定义为 $\eta(\tau) = (\exp \pi i\tau/12) \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \exp 2\pi in\tau)$, 则应用 Euler (1748) 的恒等式(因为 $(1/2)n(3n-1)$ 是五角数, 所以称为五角数定理):

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x^{(1/2)n(3n-1)} + x^{(1/2)n(3n+1)}),$$

就得到 $\eta(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \exp 3\pi i\tau(n-1/6)^2$. 容易得到 $\eta(\tau+1) = (\exp \pi i/12)\eta(\tau)$, 又根据 ϑ 函数† 的变换公式可得: $\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i}\,\eta(\tau)$. 因此, 如果 a, b, c, d 为整数且 $ad - bc = 1$, $c > 0$,则有

$$\eta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \varepsilon\sqrt{\frac{c\tau+d}{i}}\,\eta(\tau),$$

其中 ε 为 1 的一个 24 次单位根.

$p(n)$ 随 n 急速增加; 譬如 $p(10) = 42$, $p(100) = 190569292$, $\cdots$. G. H. Hardy-S. Ramanujan (1918) 应用一个了不起的恒等式证明了可选择适当的正数 A, B, 使得 $(A/n)e^{2\sqrt{n}} < p(n) < (B/n)e^{2\sqrt{2}\sqrt{n}}$ $(n \geqslant 1)$ 成立,并求出:

$$p(n) \sim (1/4\sqrt{3}\,n)\exp \pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}.$$

后来,利用初等的函数论方法,P. Erdős (1942), D. J. Newman (1951) 及 A. Г. Постников

([10])证明了

$$p(n)=\frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4\sqrt{3}\,n}\left(1+O\left(\frac{\log n}{n^{1/4}}\right)\right).$$

现在很容易证明 $\log p(n)\sim\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}$. 在 Euler 恒等式的两端乘以 $p(n)$ 的母函数，并比较系数,可得

$$\sum_{0\leqslant\omega_k\leqslant n}(-1)^{k-1}p(n-\omega_k)=0$$

其中 $\omega_k=(1/2)k(3k-1)(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 为五角数†.由此公式可以逐次求出 $p(n)$ 的值. 实际上, M. P. A. MacMahon 已经用这种方法算出了到 $n=200$ 的 $p(n)$ 的值.

Hardy 和 Ramanujan 给出了 $p(n)$ 的母函数 $f(x)$ 的**变换公式** (transformation formula):

$$f\left(\exp\left(\frac{2\pi ih}{k}-\frac{2\pi z}{k}\right)\right)$$

$$=W_{h,k}\sqrt{z}\exp\left(\frac{\pi}{12kz}-\frac{\pi z}{12k}\right)$$

$$\times f\left(\exp\left(\frac{2\pi h'}{k}-\frac{2\pi}{kz}\right)\right),$$

$$(h,k)=1,\ hh'\equiv-1(\operatorname{mod}k),$$

这里的 $W_{h,k}$(按照 H. Rademacher) 定义为

$$W_{h,k}=\exp\pi is(h,k),$$

$$s(h,k)=\sum_{m=1}^{k-1}\frac{m}{k}\left(\frac{hm}{k}\right),$$

其中 $\sum$ 内的符号 (t) 表示: 当 t 是非整数时, 为 $t-[t]-1/2$ ($[t]$ 为 Gauss 符号), t 是整数时, 为 0. 关于 **Dedekind 和** (Dedekind sum) $s(h,k)$, 有所谓的 **Dedekind 和的互反律** (reciprocity law for Dedekind sums):

$$s(h,k)+s(k,h)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\times\left(\frac{h}{k}+\frac{k}{h}+\frac{1}{hk}\right).$$

若在 Hardy-Ramanujan 的变换公式中, 令 $a=h'$, $b=(hh'+1)/k$, $c=k$ 及 $d=-h$, 则可推出: 在 $\eta(\tau)$ 的变换公式中的 ε 等于 $\exp\ (-\pi is(c,d)+\pi i(a+d)/12c)$. 并且,应用互反律, 可以很容易地证明, ε 总是 1 的 24 次根. 关于变换公式和互反律, 有伊関兼四郎(1952)的直接证明.

根据 Cauchy 定理, $p(n)$ 可以表示为积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(x)}{x^{n+1}}dx$, 这里的积分周线 Γ 取在单位圆的内部并围绕原点. 虽然, 母函数 $f(x)$ 的变化是很急剧的, 即在 $f(x)$ 的变换公式中, 设 $x=r\exp2\pi ip/q$, 将整数 p,q 固定并令 $r\to1-0$, 可得 $f(x)\sim\exp\pi^2/6q^2(1-x)$. 但是, 可以用所谓的 Farey 分割(→堆垒数论)来处理这一积分. 由 Hardy-Ramanujan 所建立的这一划时代的方法,给整个近代堆垒数论带来了曙光,得到了很高的评价. 结果得到

$$p(n)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\frac{d}{dn}\left(\frac{\exp C\lambda_n}{\lambda_n}\right)$$

$$+O(\exp D\sqrt{n}),$$

$$\lambda_n=\sqrt{n-1/24},\ C=\pi\sqrt{2/3},$$

$$D>C/2.$$

后来, Rademacher (1937, 1943) 作了改进,给出了级数展开式

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)k^{1/2}$$

$$\times\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh C\lambda_n/k}{\lambda_n}\right),$$

$$A_k(n)=\sum_{h(\operatorname{mod}k),(h,k)=1}W_{h,k}\exp(-2\pi ihn/k).$$

他进一步应用整函数

$$L_\nu(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)},$$

得到

$$p(n)=2\pi\left(\frac{\pi}{12}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)k^{-5/2}L_{3/2}$$

$$\times\left(\left(\frac{\pi}{12k}\right)^2(24n-1)\right)$$

(1954). Rademacher 用所谓的 Ford 圆当作积分周线,给出了极巧妙的证明.

关于 $p(n)$ 的同余性质, Ramanujan 给出

了：$p(5m+4)\equiv 0 \pmod 5$，$p(7m+5)\equiv 0 \pmod 7$，$p(11m+6)\equiv 0 \pmod{11}$ 这样引人注目的结果．Rademacher（1942）和 Newman 等人应用 $\eta(\tau)$ 的性质研究了这些问题．

设 $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ 是 n 的一种分拆，可以通过对于 n_i 附加条件而提出各种问题．例如，可以要求 n_i 满足某些同余关系；n_i 为正整数幂（E. M. J. Wright, 1934, L. Schoenfeld, 1944）；n_i 为正素数幂(三井孝美，1957）等等．此外，分拆问题亦被推广到了有限次代数数域的情形．例如将有限次代数数域中的代数整数分拆为这个域中的整数之和，以及将正有理整数用有限次代数数域中的理想的范数之和来表示等问题，也有人作了研究（Rademacher，三井）．

【参】[1] R. G. Ayoub, An introduction to the analytic theory of numbers, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1963; [2] G. H. Hardy-S. Ramanujan, Asymptotic formulae in combinatory analysis, Proc. London Math. Soc., (2) **17** (1918), 75—115; [3] G. H. Hardy-E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Clarendon Press, 1965; [4] 池原止戈夫，初等解析的整数論，河出，1949; [5] K. Iseki(伊関兼四郎), A proof of a transformation formula in the theory of partitions, J. Math. Soc. Japan, **4** (1952), 14—26; [6] H. A. Rademacher, Lectures on analytic number theory, Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1954—55; [7] S. Ramanujan, Collected papers of Srinivasa Ramanujan, Cambridge Univ. Press, 1927 (Chelsea, 1962); [8] H. Petersson, Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme, Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, 1954, no. 2; [9] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1975; [10] А. Г. Постников, Введение в аналитическую теории чисел, Москва, 1971.

不定方程 ［英 indeterminate equation 法 équation indéterminée 德 unbestimmte Gleichung 俄 неопределённое уравнение 日 不定方程式］系数取在有理整数环 $\boldsymbol{Z}$ 中的有限个代数方程在 $\boldsymbol{Z}$ 中的求解问题，称为解**不定方程**，或求解 **Diophantus 方程**（Diophantine equation）．后一名称来源于公元三世纪的亚历山大城的数学家 Diophantus，他提出了许多这样的问题．但对这种方程的研究有极悠久的历史，可以追溯到古埃及、巴比伦、古代的中国以及希腊．例如，据说早在纪元前六世纪，Pythagoras 已经部分地求出方程 $x^2+y^2=z^2$ 的有理整数解为：$x=2n+1$，$y=2n^2+2n$，$z=y+1$，而在公元 600 年左右 Brahmagupta 提出了 **Pythagoras 数**（Pythagorean number），即这个方程的所有的有理整数解为：$x=m^2-n^2$，$y=2mn$，$z=m^2+n^2$（m，n 为任意整数）．此外，著名的 Fermat 问题† 亦是一个不定方程†．在最近，由于 Diophantus 逼近†（→数的几何）的发展，使这一理论不仅对于有理整数环 $\boldsymbol{Z}$ 上的，而且对于在 $\boldsymbol{Z}$ 上有限生成的整域上的不定方程问题都已能进行处理．下面将不定方程的主要结果加以叙述，并也涉及到了代数簇†的有理点问题．

关于有理整数环 $\boldsymbol{Z}$ 上的不定方程，对于一次不定方程 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a(a_i,\ a\in\boldsymbol{Z})$ 及二元二次不定方程 $ax^2+bxy+cy^2=k(a,\ b,\ c,\ k\in\boldsymbol{Z})$ 已有系统的研究．后者是 C. F. Gauss 的《算术研究》（Disquisitiones arithmeticae）一书的主要论题，可以说 Gauss 的这一研究是现代代数数论的开端．特殊的二元二次不定方程 $t^2-Du^2=\pm 4(D\in\boldsymbol{Z})$ 称为 **Pell 方程**(Pell's equation)．在 $D<0$ 时，Pell 方程只有有限个解；在 $D>0$ 时，如果 t_1，u_1 是方程的解，且使 $(t_1+u_1\sqrt{D})/2>1$ 为最小，则其所有的解 t_n，u_n 由 $\pm((t_1+u_1\sqrt{D})/2)^n=(t_n+u_n\sqrt{D})/2$ 给出．t_1，u_1 可应用连分数展开来计算(→连分数)．关于一般的二元二次不定方程 $ax^2+bxy+cy^2=k$，可以应用 Pell 方程的解将其所有的解求出来．其解法在本质上可以说是二次域理论的一个应用(→二次域的数论，[1])．对于多元二次不定方程，C. L. Siegel 有深入的研究(→二次型)．

虽然关于高次不定方程我们知道得很少，基本上没有一般的处理方法，但是有以下的一些著名结果．

【不定方程的有理整数解】 1) **Thue 定理**（1908）．"如果 $f(x)=\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu (a_\nu\in\boldsymbol{Z},\ n>2)$ 有二个相异的根，则 $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu y^{n-\nu}=a(\boldsymbol{Z}\ni a\neq 0)$ 只具有有限个有理整数解"．这是 Diophantus

逼近中的 Thue 定理的一个直接推论，该定理断言：'设 α 为 n 次实代数数 ($n>2$)，则使 $|\alpha - p/q| < 1/q^{(n/2)+1}$ 成立的有理数 $p/q(p, q\in \boldsymbol{Z}, q>0)$ 只有有限个'([3]，p. 122) K. F. Roth 证明了上式中的 $(n/2)+1$ 可换成 $2+\varepsilon$(ε 为与 n 无关的任意正数)，(Mathematika, **2**(1955)，1—20)．这个 Roth 定理†可以推广到某些代数数域及函数域的情形 (⇀ 数的几何)，并被有效地应用于近代的不定方程理论中 ([2]，[3])．

2) **Siegel定理** (1929)．"设 $f_i(X_1, \cdots, X_n)=0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 在 n 维仿射空间†中确定了亏格†大于 0 的代数曲线，则 $f_i(X_1\cdots, X_n)=0$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ 的有理整数解的个数为有限"．这个定理由 S. Lang 作了如下的推广([2])．"设 K 为有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上的有限生成域，I 为 $\boldsymbol{Z}$ 上有限生成的 K 的子环，再设 C 为定义在 K 上的亏格†大于 0 的非奇射影代数曲线，φ 为 K 上定义的 C 上的有理函数，则使 $\varphi(P)\in I$ 成立的 C 上的点 P 只有有限个"．这个定理的证明基于 Roth 定理在上述意义下的一个推广及下面的弱 Mordell-Weil 定理([2])．A. Robinson 及 P. Roquette 从非标准算术的观点给出了 Siegel 定理的另一证明 (J. Number Theory **7** (1975))．

3) 已经知道另一些特殊类型的不定方程亦只具有有限个有理整数解．有关这个问题⇀ [4]，[3]．此外，有理整系数的不定方程 $f(X, Y)=0$ 在 $\boldsymbol{Z}$ 上具有无限多个解的一个必要条件是由 C. Runge (J. Reine Angew. Math., **100** (1887)) 给出的 ([4])．还有关于 Fermat 问题⇀ Fermat 问题．

如上所述，关于不定方程定性的定理很多，而只是对二次型有一些定量的研究 (⇀ 二次型)．

【有理解】 设 V 为域 k 上定义的抽象代数簇†，及 P 为 V 的点．再设 V_α 是 V 中的一个仿射开集†，如果 P 在 V_α 内的代表† P_α 的坐标是在域 k 中，则 P 称为 V 在 k 上的**有理点** (rational point)，当然这个定义和 P 的代表 P_α 的选取是无关的．特别地，若 V 是射影代数簇†，P 的齐次坐标†设为 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$，则当且仅当 $x_i/x_p\in k(0\leqslant i\leqslant n, x_p\neq 0)$ 时，P 才为 k 上的有理点．当 k 取为有限次代数数域†、p-adic 数域†、有限域†时，关于代数簇特别是 Abel 簇†的有理点的主要结果叙述如下．

1) **Mordell-Weil 定理**．"设 A 为在有限次代数数域 k 上定义的 n 维 Abel 簇，则 A 上的 k 有理点全体构成的群 A_k 是有限生成的"．$n=1$ 的情形是 L. J. Mordell 证明的(1922)，一般的情形是 A. Weil 证明的 (1928 ([2]))．还有定理"设 m 为有理整数，则商群 A_k/mA_k 为有限群"，称为**弱 Mordell-Weil 定理** (weak theorem of Mordell-Weil)，它是 Mordell-Weil 定理证明的基础之一，并亦被用于 Siegel 定理的证明中．Mordell-Weil 定理也被推广到 k 为在素域上有限生成的 (特征为任意的) 域的情形 ([2])．

若 A 是定义在有限次代数数域 k 上，Birch, Swinnerton-Dyer 及 Tate 关于 A_k 的秩有以下的猜想．设 $\mathfrak{p}$ 是 k 的素理想，A 在其上有一个好约化，并以 $A_\mathfrak{p}$ 表示约化簇．设 $\pi_\mathfrak{p}^{(1)}, \cdots, \pi_\mathfrak{p}^{(2n)}$ 是 $A_\mathfrak{p}$ 关于 L-adic 表示的自同态的 $N(\mathfrak{p})$ 次幂的特征值 (⇀Abel 簇)，并令 $L_\mathfrak{p}(s, A)=\prod_{i=1}^{2n}(1-\pi_\mathfrak{p}^{(i)}N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$．由 $L(s, A)=\Pi' L_\mathfrak{p}(s, A)$(这里的乘积遍及全体好素数)所定义的 A 的 L 函数是 A 的 ζ 函数的主部 (⇀ ζ 函数)．Birch 和 Swinnerton-Dyer 猜测：若 $k=\boldsymbol{Q}$ 及 A 是一维的，则存在常数 $C\neq 0$ 使得 $L(s, A)\sim C(s-1)^g, s\to 1$．Tate 把这一猜想推广到任意的 A 和 k．此外，常数 C (按照因子是相应于坏素数及无限多个素数而作适当的改变) 被认为可由 A 的某一算术不变量来表示 [10]．这些猜想由计算机计算及某些理论结果所支持．

2) **Lutz-Mattuck 定理**．'在p-adic 数域† k 上定义的 n 维 Abel 簇 A 的有理点构成的群 A_k 包含一个指数有限的子群与 n 个 k 中的 p-adic 整数环 $\mathfrak{o}$ 的直和同构' (E. Lutz, J. Reine Angew. Math., **177** (1937)，A. Mattuck, Ann. of Math., **62** (1955))．

3) ‘在有理数域 Q 上定义的代数曲线 C 的有理点，当 C 的亏格†大于 1 时，只有有限个’. 这称作 **Mordell 猜想**，还没有被证明([2]). 而当 C 为定义在代数函数域上时，这一猜想已由 Ю. И. Манин (1963), H. Grauert (1965), 三輪恵 (1966) 作出了肯定的解决.

4) V 为在有限域† k 上定义的代数簇†，关于 V 的有理点的个数，有以下 B. Dwork (Amer. J. Math., **82** (1960)) 的著名的结果：设 k_m 为 k 的 m 次扩张，V 在 k_m 上的有理点的个数为 N_m，则由

$$\frac{d}{dt}\log Z(t)=\sum_{m=1}^{\infty}N_m t^{m-1}$$

定义的函数 $Z(t)$ 为 t 的有理函数. $Z(t)$ 称为 k 上的代数簇 V 的同余 ζ 函数†. 关于 $Z(t)$ 的详细性质 → ζ 函数.

【C_i 域】 设 F 是域，及 $i\geqslant 0$，$d\geqslant 1$ 是整数. 设 f 为系数在 F 中的 n 个变数的 d 次齐次多项式. 如果对任意的 f，$n>d^i$，方程 $f=0$ 在 F 中必有解 $(x_1,\cdots,x_n)\neq(0,\cdots,0)$，则 F 称为 $C_i(d)$ 域. 如果对任意的 $d\geqslant 1$，F 是 $C_i(d)$ 域，则 F 称为 **C_i 域** (C_i-field). F 为 C_0 域的充分必要条件是：F 为代数闭域†. C_1 域又称为**拟代数闭域** (quasi-algebraically closed field). 在 C_1 域 F 上不存在有限次非交换可除代数. 有限域是 C_1 域 (C. Chevalley). 如果 F_0 是代数闭域，则 $F=F_0(X)$ (单变数有理函数域)是 C_1 域(**曾(炯之)定理**). 以域 F 的元素为系数的 $n=d^i$ 个变数的 d 次齐次多项式 f，如果 $f=0$ 不具有 $(0,\cdots,0)$ 以外的解，就称为 **F 的阶为 i 的范式** (normic form). 如果 C_i 域 F_0 至少有一个阶为 i 的范式，则 1) $F_0(X_1,\cdots,X_k)$ 为 C_{i+k} 域；2) F_0 的有限次代数扩张是 C_i 域. 关于指数赋值†是完备域的 F，当它的剩余域 F_0 为代数闭域时，是 C_1 域. 有限域 F_0 上的单变数幂级数域 F 是 C_2 域(→ Lang [6]). Artin 猜想 p-adic 数域 Q_p 是 C_2 域. H. Hasse (1923) 证明了 Q_p 是 $C_2(2)$ 域及 D. Lewis (1952) 证明了 Q_p 是 $C_2(3)$ 域. 然而，G. Terjanian (1966) 举出反例而否定 Artin 猜想，即他给出了一个系数在 Q_2 中的 18 个变数的四次型，这个四次型在 Q_2 中仅有零解. J. Ax 及 S. Kochen (1965) 证明了对任意的整数 $d\geqslant 1$，存在整数 $p_0(d)$，使当 $p>p_0(d)$ 时，Q_p 是 $C_2(d)$ 域 (→ 模型论).

【参】 [1]高木貞治，初等整数論講義，共立出版，1931；[2] S. Lang, Diophantine geometry, Interscience, 1962; [3] W. J. LeVeque, Topics in number theory II, Addison Wesley, 1956; [4] T. Skolem, Diophantische Gleichungen, Erg. Math., Springer, 1938 (Chelsea, 1950); [5] J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Erg. Math., Springer, 1936 (Chelsea, 1950); [6] S. Lang, On quasi algebraic closure, Ann. of Math., (2) **55** (1952), 373—390; [7] L. J. Mordell, Diophantine equations, Academic Press, 1969; [8] J. W. S. Cassels, Diophantine equations with special reference to elliptic curves, J. London Math. Soc., **41** (1966), 193—291; [9] J. Ax-S. Kochen, Diophantine problems over local fields I, II, Amer. J. Math., **87** (1965), 605—648; III, Ann. of Math., (2), **83** (1966), 437—456; [10] P. Swinnerton-Dyer, The conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, and of Tate, Proc. conference on local fields, Driebergen, 1966 (Springer, 1967); [11] M. J. Greenberg, Lectures on forms in many variables, Benjamin, 1969.

数的几何 [英 geometry of numbers 法 géométrie des nombres 德 Geometrie der Zahlen 俄 геометрия чисел 日 数の幾何] 为了把 P. G. L. Dirichlet 和 C. Hermite 所建立的 Diophantus 逼近的解析理论进行简化，H. Minkowski 将格和凸集等几何概念引进了数论. 他把由这个简单而有效的方法得出的理论称为："Geometrie der Zahlen"，现在称为**数的几何**. 其后，这个理论和数论等各数学分支有关而发展起来，到最近取得了各种新的结果. → 连分数.

【格、格点】 在 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 内，取 n 个点 $X_1,\cdots,X_n$，如果 X_i 所对应的位置向量 $\mathfrak{x}_i={}^t(x_i,\cdots x_{in})(i=1,\cdots,n)$(^{t} 表示转置矩阵†)是线性无关的，则将点集 $\Lambda=\{X\,|\,X\leftrightarrow\mathfrak{x}=\sum_{i=1}^{n}u_i\mathfrak{x}_i$ (u_i 为有理整数)$\}$ 称为 n 维**齐次** (homogeneous) **格** (英 lattice 德 Gitter)，属于这些格的点称为**格点** (lattice point)，将 $X_1,\cdots,X_n$ 称为 **Λ 的基** (base) (在本条里，$X_1,\cdots,X_n$ 称为线性无关的点). 另外，将 $X\in\Lambda$ 所对应的位置向量 $\mathfrak{x}$ 的全体 Λ^* 称为**格群** (lattice group).

但通常所谓的格点，多指坐标为有理整数的点．Λ^* 为具有 n 个线性无关生成元 $\xi_1, \cdots, \xi_n$的自由 Abel 群．如果 Λ^* 的另一组基为 $\eta_1, \cdots, \eta_n$，则记 $\eta_i = A\xi_i(A \in SL(n, \boldsymbol{Z})$，即 A 是以有理整数为元素的矩阵，且 $|\det A| = 1$)．因此，$|\det(\xi_1, \cdots, \xi_n)|$ 只与 Λ 有关，而与基的选择无关，将它用 $d(\Lambda)$ 表示，称为**格 Λ 的行列式** (determinant of lattice)．另外，Λ 的点之间距离的最小值用 $\delta(\Lambda)$ 表示．

设 Λ 为齐次格，X_0 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的任意点，则称 $L = \{X | X \leftrightarrow \xi = \xi_0 + \xi', \xi' \in \Lambda^*\}$ 为**非齐次格** (inhomogeneous lattice)，它是由齐次格平行移动得出的．本条只讨论齐次格，并将齐次格简称为格．

设 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一串格列，$X_1^{(\nu)}, \cdots, X_n^{(\nu)}$ 为 Λ_ν 的基．若 $\lim\limits_{\nu\to\infty} X_k^{(\nu)} = X_k(k = 1, \cdots, n)$ 存在，且 $X_1, \cdots, X_n$ 构成格 Λ 的基，则称 Λ_ν **收敛** (converge) 于 Λ，或称 Λ 是 Λ_ν 的**极限** (limit)．此时，有 $d(\Lambda_\nu) \to d(\Lambda)$，$\delta(\Lambda_\nu) \to \delta(\Lambda)$．根据这个收敛性，可在 $\boldsymbol{R}^n$ 中所有的格所组成的集合 M_0 中引入拓扑†．另外，对于格列 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots$，如果有两个正常数 c，c' 存在，使得 $d(\Lambda_\nu) \leqslant c$，$\delta(\Lambda_\nu) \geqslant c'(\nu = 1, 2, \cdots)$，则称这个格列为**有界的** (bounded)．在有界的无限格列中可以取出收敛子格列．

设 S 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的点集．如果 Λ 的点除坐标原点外，其余的均不是 S 的内点，则称 **Λ 容许** (admit) S，或者称格 Λ 是 **S 容许的** (S-admissible)．现设 M 为 M_0 的闭子集合，如果 M 中的每一个格都不是 S 容许的，则令 $\Delta(S \backslash M) = \infty$，如果不是这样，则令 $\Delta(S \backslash M) = \inf d(\Lambda)$．这个 inf 是对所有的 S 容许格 $\Lambda \in M$ 来取的．格 $\Lambda \in M$ 如果满足：1) Λ 为 S 容许的；2) $d(\Lambda) = \Delta(S \backslash M)$ 两条件，则称 Λ 为 M 中的 **S 临界格** (critical lattice)．当 $0 < \Delta(S \backslash M) < \infty$ 时，则在 M 中具有 S 临界格的充分必要条件是：在 M 中存在有界的 S 容许的格列 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots$，使得 $d(\Lambda_\nu) \to \Delta(S \backslash M)$．另外，特别是当 $M = M_0$ 时，将 $\Delta(S \backslash M_0)$ 简写为 $\Delta(S)$，并把它称为**临界行列式** (critical determinant)．

【逐次最小及 Minkowski 定理】 $F(X)$ 是在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义的连续函数，当它满足：1) $F(0) = 0$；2) 如果 $X \neq 0$，则 $F(X) > 0$；3) 对于任意的实数 t 及任意的点 X，有 $F(tX) = |t| F(X)$ 等条件时，将集合 $K = \{X | F(X) \leqslant 1\}$ 称为关于原点对称的有界**星形体** (star body)．对于这样的 K 及格 Λ，一定存在 Λ 中的 n 个线性无关的点 $P_1, \cdots, P_n$ 以及 n 个正数 $p_1, \cdots, p_n$，具有如下的性质：1) $F(P_i) = p_i$，$(i = 1, \cdots, n)$；2) $p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_n$；3) $1 \leqslant m \leqslant n$，如果 Λ 的点 $P \neq 0$ 对于 $P_1, \cdots, P_{m-1}$ 是线性无关的，则有 $F(P) \geqslant p_m$，且 $p_1, \cdots, p_n$ 仅和 K 及 Λ 有关并由它们唯一确定．这些数 p_i 称为 K 在 Λ 中的**逐次最小** (successive minima)，将 $P_1, \cdots, P_n$ 称为**逐次最小点** (successive minimum points)．

这样，**Minkowski 定理**如下所述："1) 设 S 为有界点集，如果 S 的体积 $V(S) > d(\Lambda)$，则 S 中存在两个相异点 X_1, X_2，使得它们所对应的位置向量之差属于 Λ．特别是对于有界凸体† K，如果 $V(K) > 2^n d(\Lambda)$ 成立，则 K 必包含一个异于原点的 $X \in \Lambda$，因而有 $2^n \Delta(K) \geqslant V(K)$．2) 当 K 为有界凸体时，如果 $p_1, \cdots, p_n$ 为 K 在 Λ 中的逐次最小，则 $p_1 \cdots p_n V(K) \leqslant 2^n d(\Lambda)$"．2) 包括了 1)，但 1) 更为基本．

【Minkowski-Hlawka 定理】 Minkowski 定理给出了 $\Delta(K)/V(K)$ 的下界，至于上界，有如下的 **Minkowski-Hlawka 定理**：1) 对于 $n \geqslant 2$ 维空间的任意开集 E，有 $\Delta(E)/V(E) \leqslant 1$；2) 如果 E 关于原点对称，则 $\Delta(E)/V(E) \leqslant 1/2$；3) 如果 K 为星形体，则 $\Delta(K)/V(K) \leqslant 1/\zeta(n)$；4) 如果 K 是关于原点对称的星形体，则 $\Delta(K)/V(K) \leqslant 1/2\ \zeta(n)$ ($\zeta(n)$ 是 Riemann ζ 函数†)．后半部分是 Minkowski 提出的猜想，是由 E. Hlawka (1943) 证明的．C. L. Siegel (1945) 又给出了下面的另一证明，C. A. Rogers (1947) 将 Hlawka 的证明作了简化．另外，因为这些结果并不都是最佳的，所以在各种条件下，设法改进其估计，也有许多结果．

【Siegel 中值定理】 Minkowski 在叙述他

的猜想时提到:"证明这个定理需要用所有的线性变换所构成的群的算术理论". Siegel 从这个观点出发,考虑与线性变换群的关系,证明了下面的定理.

设特殊线性群 $SL(n, \boldsymbol{R})$ 的不变测度为 ω, F 是 $SL(n, \boldsymbol{R})$ 中关于其离散子群 $SL(n, \boldsymbol{Z})$ 的基本区域. 根据二次型理论(→二次型)可知, F 的体积是有限的. 假如选取不变测度 ω, 使得 $\int_F d\omega = 1$, 则有如下的 **Siegel 中值定理** (mean value theorem of Siegel): 设 $\mathfrak{g}$ 通过除零向量以外的 $\boldsymbol{R}^n$ 的全部整向量,对于任意有界、有紧支集†的 Riemann 可积函数 f, 有

$$\int_F \sum_{\mathfrak{g}\neq 0} f(A\mathfrak{g})d\omega = \int_{\boldsymbol{R}^n} f(X)dX$$

(式中右边表示 $\boldsymbol{R}^n$ 上通常的 Riemann 积分). 由此式很容易推出 Hlawka 的结果. A. Weil 把这个定理在一般的情形作了推广 (Summa Brasil. Math., **1** (1946)).

【Diophantus 逼近】 **Diophantus 逼近** (Diophantine approximation) 一词是 Minkowski 引进的, 他的原意是指当变量取有理整数值或者某个代数数域的整数值时, 所给函数的绝对值满足的上、下界不等式. 例如,当变量范围只限于整数值时,所考虑的方程就被称为 Diophantus 方程或不定方程†. 现在,这个词用于含义更广的情形, 成为研究自变量取整数值时函数值的界限或分布状态的一个数学分支名称. 其中应用到的有效方法是上述的 Minkowski 的格的几何学. 此外,后面介绍的用有理数逼近无理数的问题也是 Diophantus 逼近中最典型的问题, 这里连分数†理论成为有效的方法. 关于 C. H. H. Weyl 所研究的一致分布问题(后述), 解析方法特别是三角级数是有效的手段. 还有 Dirichlet 的抽屉原理†(如果多于 n 个人住 n 间房, 则至少有一间房住的人超过一个) 作为 Diophantus 逼近的第一原理, 经常得到有效的应用. 近来, Diophantus 逼近在超越数†及代数曲线†理论中也得到了有效的应用.

【用有理数逼近无理数的问题】 用有理数逼近无理数的问题: 对于给定的无理数 θ,选择有理整数 $x(>0)$, y, 使得 $|\theta - y/x|$ 的界比起分母 x 来尽可能小. 应用 Dirichlet 的抽屉原理可知,对于任意的整数 $N > 0$, 使得 $|\theta - y/x| < 1/(xN)$ 成立的 $x(\leqslant N)$, y 总是存在的. 因此, 设使 $|\theta - y/x| < 1/Mx^2$ 具有无限多对有理整数解 x, y 的正数 M 的上确界为 $M(\theta)$, 那么,由此得出: 对于任意的无理数 θ, 有 $1 \leqslant M(\theta)\ (\leqslant \infty)$.

如果 θ 为实的二次无理数, 则 $M(\theta)$ 是确定的. 即设 $a\theta^2 + b\theta + c = 0$($a, b, c$ 为有理整数),对于不全为零的有理整数值 x, y, 设 $ax^2 + bxy + cy^2$ 的绝对值的最小值为 k, 则 $M(\theta) = k^{-1}\sqrt{b^2 - 4ac}$. 而且 $M(\theta) \geqslant \sqrt{5}$, 而等号在 θ 与 $\theta_1 = (1+\sqrt{5})/2$ 等价时成立. 如果 θ 与 $(1+\sqrt{5})/2$ 不等价,则 $M(\theta) \geqslant \sqrt{8}$, 等号在 θ 与 $\theta_2 = 1 + \sqrt{2}$ 等价时成立. (θ 与 θ' 等价 (equivalent) 是指存在有理整数 a, b, c, d ($ad - bc = \pm 1$), 使得 $\theta' = (a\theta + b)/(c\theta + d)$.) 这样继续下去, 就得到二次无理数的序列 $\theta_3, \theta_4, \cdots$,且有 $M(\theta_n) \to 3\ (n \to \infty)$. 如果 $M(\theta) < 3$, 则 θ 与 $\theta_1, \theta_2, \cdots$ 中的某一个等价. 另外, 使得 $M(\theta) = 3$ 成立的 θ 的集合具有不可数的势 (A. A. Марков[16]).

θ 为一般代数数的情形, 关于 $M(\theta)$ 还完全不了解. 因此, 将这个问题从另外的观点加以研究. 设 μ 为实数, 且使得 $|\theta - y/x| < 1/x^{\mu}$ 具有无限多对有理整数解 x, y, 将这样的 μ 的上确界记为 $\mu(\theta)$. 设 κ 为大于 2 的正数, 可以容易地证明满足 $\mu(\theta) \geqslant \kappa$ 的实数 θ 的集合的 Lebesgue 测度†等于 0. 当 θ 为 n 次实代数数时, J. Liouville 证明了 $\mu(\theta) \leqslant n$. 以后, A. Thue, Siegel, A. O. Гельфонд, F. J. Dyson 等又逐步加以改进,最近 K. F. Roth 证明了 $\mu(\theta) = 2$, 而将这个问题彻底解决 (**Roth 定理**) ([15]). 换句话说, Roth 定理证明当 $\kappa > 2$ 时, $|\theta - y/x| < 1/x^{\kappa}$ 的有理整数解只有有限对. 上述结果还可推广到有限次代数数域及单变量代数函数域的情形(见 S. Lang [12]).

在 1970 年, W. M. Schmidt ([23]) 将

Roth 定理推广至联立逼近的情况，即如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为实代数数且1, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 在有理数域上线性无关，则对于任何 $\varepsilon > 0$，皆仅有有限多个正整数 q，使得

$$\|q\alpha_1\| \cdots \|q\alpha_n\| q^{1+\varepsilon} < 1,$$

此处 $\|\xi\|$ 表示实数 ξ 至与它最近的整数的距离；特别是，由此得出：

$$|\alpha_i - p_i/q| < q^{-(n+1)/n-\varepsilon},$$
$$i = 1, \cdots, n.$$

仅有有限多组有理解 $p_1/q, \cdots, p_n/q$. 这一结果的对偶结果是：设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \varepsilon$ 如上所述，则仅有有限多组非零整数 $q_1, \cdots, q_n$，使得

$$\|q_1\alpha_1 + \cdots + q_n\alpha_n\| \cdot |q_1 \cdots q_n|^{1+\varepsilon} < 1.$$

最后这个定理可以用来证明，如果 α 为代数数，k 为正整数，且 $\varepsilon > 0$，则仅有有限多个次数不超过 k 的代数数 ω，使得 $|\alpha - \omega| < H(\omega)^{-k-1-\varepsilon}$，此处 $H(\omega)$ 表示 ω 的高(见 [19]).

Thue, Siegel 与 Roth 工作的根本限制在于它是非有效的. A. Baker (1968) 成功地证明了，对于任何次数 $n \geqslant 3$ 的代数数以及任何 $\kappa > n$，皆存在可以计算的常数 $c = c(\theta, \kappa) > 0$，使得 $|\theta - y/x| > cx^{-n}\exp(\log x)^{1/\kappa}$ 对于所有整数 $x, y (x > 0)$ 成立 ([18]). 这个结果是下面关于二元 Diophantus 方程的一个经典定理 (Thue 1909) 的有效表述的直接推论：设 $f = f(x, y)$ 为次数 $n \geqslant 3$ 的不可约二元型，具有整系数，并假定 $\kappa > n$，则对于任何正整数 m，方程 $f(x, y) = m$ 所有的整数解 x, y 皆满足 $\max(|x|, |y|) < c\exp(\log m)^{\kappa}$，此处 $c > 0$ 是一个依赖于 n, κ 与 f 的系数的可以计算的常数. Baker 先证明了一些定理，这些定理给出了以代数数为系数的代数数的对数的线性型的模的有效估计，利用这些定理，他证明了上述结果. 一个这种类型的典型的结果如下：设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为非零代数数，而 $\log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_n$ 在有理数域上线性无关，且设 $\beta_0, \cdots, \beta_n$ 为不全为零的代数数，它们的次数与高分别不超过 d 与 H，则对于任何 $\kappa > n + 1$，皆有 $|\beta_0 + \beta_1\log\alpha_1 + \cdots + \beta_n\log\alpha_n| > c\exp(-\log(H)^{\kappa})$，此处 $c > 0$ 为仅依赖于 $n, \kappa, \log\alpha_1, \cdots, \log\alpha_n$ 与 d 的可计算的常数 ([17, 22]).

这种类型的结果在数论中有很多重要应用. 例如我们可以得到 Гельфонд-Schneider 关于超越数定理的推广. 此外，基于 Baker 的结果，类数为 1 的虚二次域可以完全确定. 这是 Baker (1966) 与 H. M. Stark (1966) 独立解决的 (→ 二次域的数论).

Thue 关于二元 Diophantus 方程的解的有限性定理的改进和推广，是由 Baker 及其合作者得到的(见 [19], [20]). 关于 Baker 结果的 p-adic 与 $\mathfrak{p}$-adic 类似也已得出 ([21]).

【一致分布问题】 设 θ 为无理数，将不超过 θx 的最大整数以 $[\theta x]$ 表示，设 $\theta x - [\theta x]$ 为 $\theta x \pmod 1$，那么，$0 \leqslant \theta x < 1 \pmod 1$. 当 $x = 1, 2, 3, \cdots$ 时，$\theta x \pmod 1$ 在单位区间 (0, 1) 上为稠密分布 (C.G.J. Jacobi). 不仅如此，而且 $\theta, 2\theta, 3\theta, \cdots \pmod 1$ 在单位区间上为一致分布 (Weyl). 在这里，**一致分布** (uniform distribution) 的定义如下：设 $f(x)$ 是在 $x = 1, 2, 3, \cdots$ 上定义的实值函数，α, β 为任意实数，$0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. 设在 $x = 1, 2, \cdots, N$ 中，使得 $\alpha \leqslant f(x) < \beta \pmod 1$ 成立的 x 的个数为 $T(N)$. 如果 $\lim_{N\to\infty} T(N)/N = \beta - \alpha$ 总成立，则 $f(x) \pmod 1$ 称为在单位区间上一致分布. 对于任意整数 $h \neq 0$，$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i h f(x)} = 0$ 成立，乃是 $f(1), f(2), \cdots \pmod 1$ 为一致分布的充分必要条件，这称为 **Weyl 原理** (Weyl's principle) (1914). 根据这个原理可以得出上述的 θx 是一致分布的.

在一致分布问题中，还常常使用下面的定理. 如果对于任意的自然数 h，函数 $g(x) = f(x+h) - f(x)$ 为一致分布 (mod 1)，则 $f(x)$ (mod1) 也是一致分布 (J. G. van der Corput, 1931). 例如，根据这个定理由 θx 是一致分布，可得知 x 的多项式(它的系数至少有一个是无理数)也是一致分布的.

以上的 Diophantus 逼近问题，是对一维情形论述的. 但是，这些问题也被推广到 n 维情形.

【参】[1] 高木貞治，初等整数論講義，共立出版，1931；[2] 高木貞治，格子の幾何学，数学雑談，共立出版，1933；[3]藤原松三郎，代数学 I, II，内田老鶴圃，1928，1929；[4] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen, Teubner, 1910 (Chelsea, 1953); [5] H. Minkowski, Diophantische Approximationen, Teubner, 第二版, 1927 (Chelsea, 1957); [6] H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen I, II, Teubner, 1911 (Chelsea, 1967); [7] J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Erg. Math., Springer, 1936 (Chelsea, 1950); [8] H. Weyl-C.L. Siegel-K. Mahler, Geometry of numbers, Mimeographed notes, Princeton, 1950; [9] J. W. S. Cassels, An introduction to Diophantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957; [10] J. W. S. Cassels, An introduction to the geometry of numbers, Springer, 1959; [11] T. Schneider, Einführung in die transzendentalen Zahlen, Springer, 1957; [12] S. Lang, Diophantine geometry, Interscience, 1962; [13] C. L. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. Preuss, Akad. Wiss., no. **1** (1929), (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 1, p. 209—266); [14] C. L. Siegel, A mean value theorem in geometry of numbers, Ann. Math., (2) **46** (1945), 340—347, (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 3, p. 39—46); [15] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika, **2** (1955), 1—20; [16] A. A. Markoff (A. A. Markov), Sur les formes quadratiques binaires indéfinies, Math. Ann., **15** (1879), 381—407; [17] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV, Mathematika, **13** (1966), 204—216; **14** (1967), 102—107; **14** (1967), 220—228; **15** (1968), 204—216; [18] A. Baker, Contributions to the theory of Diophantine equations I, II, Philos, Trans. Roy. Soc. London, A **263** (1967—1968), 173—191, 193—208; [19] A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, 1975; [20] A. Baker-J. Coates, Integer points on curves of genus 1, Proc. Cambridge Philos. Soc., **67** (1970), 595—602; [21] A. Brumer, On the units of algebraic number fields, Mathematika, **14** (1967), 121—124; [22] Н. И. Фельдман, О линейной форме от логарифмов алгебраических чисел, Докл. Акад. Наук СССР, **182** (1968), 1278—1279; [23] W. M. Schmidt, Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals, Acta Math., **125** (1970), 189—201; [24] L. Kuipers-H. Niederreiter, Uniform distribution of sequences, Interscience, 1974.

超越数 [英 transcendental number 法 nombre transcendent 德 transzendente Zahl 俄 трансцендентное число 日 超越数] 一个复数如果它不是有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上的代数数†，就称为**超越数**．全体代数数 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 构成域．设 α 为 n 次代数数，α 满足的具有有理整系数 $a_i\in\boldsymbol{Z}$ 的不可约多项式写为 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n((a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)=1)$，系数 a_i 的绝对值的最大值称为 α 的**高** (height)，记作 $H(\alpha)$．更普遍的，对于复系数的多项式 $P(X_1,\cdots,X_m)$，其系数绝对值的最大值称为 P 的高，记作 $H(P)$．

【历史】 1873 年，C. Hermite 证明了自然对数的底 e 是超越数．以后，1882 年 C. L. F. Lindemann 使用同样的方法，得出了证明圆周率 π 的超越性的著名古典结果． 在 1900 年 D. Hilbert 所提出的二十三个问题 (→Hilbert) 中，第七个问题就是求证某几个数 (例如 $2^{\sqrt{2}}$) 的超越性，这引起了 A. O. Гельфонд, T. Schneider, C. L. Siegel 等人的富有成果的研究．但是，超越数理论的研究还远没有完成．现在，确定给出的数是不是超越数，还没有一个统一的方法．例如，关于 Euler 常数 $C=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/2+\cdots+1/n-\log n)$，它是不是无理数还不知道．

【超越数的构成】 对于实数 $\xi(\notin\boldsymbol{Q})$，如果存在与自然数 n 无关的正数 c，满足 $\inf\{H(\alpha)^n|\xi-\alpha|\,|\,\alpha\in\boldsymbol{Q}\}>c$，那么，根据 Liouville 定理 (1844) 可知，ξ 为超越数． 这样的 ξ 称为 **Liouville 数** (Liouville number)． 例 1) $\xi=\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}g^{-\nu!}(g>2)$． 例 2) 假定给出一个自然数列 $\{n_k\}$，$n_k\to\infty(k\to\infty)$． 若无限正则连分数† $\xi=b_0+\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots$ 满足 $b_{n_k+1}\geqslant B_{n_k}^{n_k-2}$ ($k\geqslant1$, B_l 为第 l 个渐近分数的分母)，则 ξ 为 Liouville 数． 设 $f(x)$ 是当 x 为自然数时亦取自然数值且不为常数的任意多项式，那末，在小数点以后形式地把 $f(1)$, $f(2)\cdots$ 排起来所构成的数(例如当 $f(x)=x$ 时，就是

$$0.123456789101112\cdots),$$

根据 Roth 定理(1955)(→数的几何[Diophantus 逼近])，可以证明它是非 Liouville 数的超越数 (K. Mahler[8], [9])． 这些都是应用 Diophantus 逼近论来构成超越数．

通过 Schneider ([10], [11], [12]), Siegel ([3]) 等人的研究，得出了由某些函数的特殊值所构成的超越数，例如 $\exp\alpha$ ($\alpha(\neq0)\in\bar{\boldsymbol{Q}}$)，

$\alpha^{\beta}(\alpha(\neq 0,1)\in\bar{\boldsymbol{Q}},\beta\in\bar{\boldsymbol{Q}}-\boldsymbol{Q})$, $J(\tau)$ (J 是模函数†, $\tau\in\bar{\boldsymbol{Q}}$, 并且 τ 不属于任何虚二次数域), $\mathscr{P}(2\pi i/\alpha)$ ($\mathscr{P}$ 是 Weierstrass$\mathscr{P}$ 函数†, $\alpha(\neq 0)\in\bar{\boldsymbol{Q}}$), 以及 $B(p,q)$ (B 为 Beta 函数, $p, q\in\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Z}$) 等都是超越数. 顺便说一下, 从 $\exp\alpha$ 的例子可同时推导出 e 和 π 的超越性.

【超越数的分类】 1) Mahler 的分类: 对于任意的复数 ξ 及自然数 n, H, 令

$$w_n(H,\xi)=\min\left\{\left|\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\xi^\nu\right|\,\middle|\,a_\nu\in\boldsymbol{Z},\ |a_\nu|\leqslant H,\ \sum_{\nu=0}^{n}a_\nu\xi^\nu\neq 0\right\},$$

$$w_n(\xi)=w_n=\limsup_{H\to\infty}(-\log w_n(H,\xi)/\log H),$$

$$w(\xi)=w=\limsup_{n\to\infty}w_n(\xi)/n,$$

$\mu=$(使得 $w_n=\infty$ 成立的第一个数目 n). 这样就会出现 $w=0$, $\mu=\infty$; $0<w<\infty$, $\mu=\infty$; $w=\mu=\infty$; $w=\infty$, $\mu<\infty$ 等四种情形. 对应于每种情形的 ξ 依次分别称为 **A 数, S 数, T 数, U 数**. 把每一种数的全体所组成的集合分别记为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{S},\boldsymbol{T},\boldsymbol{U}$. 我们知道有 $\boldsymbol{A}=\bar{\boldsymbol{Q}}$. 如果 ξ, η 在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数相关†, 则 ξ,η 属于同一类. 特别是当 $\xi\in\boldsymbol{S}$ 时, $\theta(\xi)=\sup\{w_n(\xi)/n\,|\,n=1,2,\cdots\}$ 称为 ξ **的型** (type) (在 Mahler 意义下). 例如 $e\in\boldsymbol{S}$ 的型为 1. Mahler 猜测按照 S 数 ξ 属于 $\boldsymbol{R}$ 与否, $\theta(\xi)=1$ 或 $\frac{1}{2}$, 关于这猜测曾得到各种结果 (W. J. LeVeque, J. F. Koksma, B. Volkmann), 直到 1965 年为 В. Г. Спринджук 所证明 ([14], [15]). 几乎全部的超越数 (除了一个 Lebesgue 测度†为 0 的集合之外) 都是 S 数. 1968 年 W. Schmidt([16]) 证明了 T 数的存在. Liouville 数全部是 U 数([7]), 而 $\log\alpha(\alpha(>0,\neq 1)\in\boldsymbol{Q})$, π 等是不属于 $\boldsymbol{U}$ 的超越数.

(2) J. F. Koksma 的分类. 对于任意的超越数 ξ 及自然数 n, H, 设

$$w_n^*(H,\xi)=\min\{|\xi-\alpha|\,|\,\alpha\in\bar{\boldsymbol{Q}},\ H(\alpha)\leqslant H,\ [\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}]\leqslant n\},$$

$$w_n^*(\xi)=w_n^*=\limsup_{H\to\infty}(-\log Hw_n^*(H,\xi)/\log H),$$

$$w^*(\xi)=w^*=\limsup_{n\to\infty}w_n^*(\xi)/n,$$

$\mu^*=$(使得 $w_n^*=\infty$ 成立的第一个数目 n). 这样, 就会出现 $w^*<\infty$, $\mu^*=\infty$; $w^*=\mu^*=\infty$; $w^*=\infty$, $\mu^*<\infty$ 等三种情形, 对应于每种情形的 ξ 依次分别称为 **S^* 数, T^* 数, U^* 数**, 并把每一种数的全体所组成的集合分别记为 $\boldsymbol{S}^*,\boldsymbol{T}^*,\boldsymbol{U}^*$. 特别是当 $\xi\in\boldsymbol{S}^*$ 时, 将 $\theta^*(\xi)=\sup\{w_n^*(\xi)/n\,|\,n=1,2,\cdots\}$ 称为 ξ 的型 (在 Koksma 的意义下). 可以证明, $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^*$, $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}^*$, $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^*$, 且若 $\xi\in\boldsymbol{S}$, 设 ξ 作为 S 数及 S^* 数的型分别为 θ,θ^*, 则 $\theta^*\leqslant\theta\leqslant\theta^*+1$ 成立.

【超越数的代数独立性】 Lindemann-Weierstrass 定理: "如果 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in\bar{\boldsymbol{Q}}$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上线性无关, 则 $\exp\alpha_1,\cdots,\exp\alpha_m$ 为 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 上的代数无关的超越数", Siegel 关于 Bessel 函数† $J_0(x)$ 的结果 ([3]): "如果 $\alpha(\neq 0)\in\bar{\boldsymbol{Q}}$, 则 $J_0(\alpha)$, $J_0'(\alpha)$ 为在 $\boldsymbol{Q}$ 上代数无关的超越数", 以及 A. Baker 定理: "设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 的非零元素, 使得 $\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上线性无关, 则 1, $\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n$ 在 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 上线性无关", 是这方面主要的结果. 其他的各种结果, 都是孤立和零散的 (А. Б. Шидловский, Гельфонд, Фельдман 等).

Lindemann-Weierstrass 定理更详细的表述是: 对于任意的 $P\in\bar{\boldsymbol{Q}}[X_1,\cdots,X_m]$ 可确定只与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 及 P 的次数 n 有关的正数 C, 使得

$$|P(e^{\alpha_1},\cdots,e^{\alpha_m})|>CH(P)^{-2s\left(2\left(2smn+\frac{m+n}{m}\right)-1\right)},$$

其中

$$s=[\boldsymbol{Q}(\alpha_1,\cdots,\alpha_m):\boldsymbol{Q}].$$

特别是当 $\alpha(\neq 0)\in\bar{\boldsymbol{Q}}$ 时, $\exp\alpha\in\boldsymbol{S}$, 且其型 θ 满足: $\theta\leqslant 8s^2+6s$. Siegel 的结果也可更详细地叙述为: 对于任意的 $P\in\boldsymbol{Q}[X_1,X_2]$, 可确定只与 α 和 P 的次数 n 有关的正数 C, 使得

$$|P(J_0(\alpha),J_0'(\alpha))|>CH(P)^{-82s^3n^3},$$

其中

$$s = [\boldsymbol{Q}(\alpha):\boldsymbol{Q}].$$

因此，当 $\alpha(\neq 0) \in \bar{\boldsymbol{Q}}$ 时，则 $J_0(\alpha), J_0'(\alpha) \notin \boldsymbol{U}$. 上述的 Lindemann-K. Weierstrass 和 Siegel 的两个结果，可以统一成如下的、关于代数独立性的 Siegel 定理. 为了叙述这一定理，需要以下的概念.

整函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n z^n}{n!}$ 称为有限次代数数域[†] K 上的 **E 函数** (E-function)，如果满足以下的三个条件：i) $C_n \in K$ $(n = 0,1,2,\cdots)$；ii) 对于任意的正数 ε，$C_n = O(n^{\varepsilon n})$；iii) 设 q_n $(n \geqslant 0)$ 是使得对于所有的 $k = 0, 1, \cdots n$，$C_k q_n \in \mathfrak{O} = K$ 的整环[†]成立的最小自然数，那么对于任意的正数 ε，有 $q_n = O(n^{\varepsilon n})$. 设 $f_1(z), \cdots, f_m(z)$ 均为 K 上的 E 函数，这组函数称为**正规的** (normal)，如果满足下面二个条件：i) 任何的 $f_i(z)$ 均不恒等于 0；ii) $w_k = f_k(z)$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$ 是一阶线性齐次微分方程组

$$w_k' = \sum_{l=1}^{m} Q_{kl}(z) w_l \quad (1 \leqslant k \leqslant m,$$

$Q_{kl}(z) \in \mathfrak{O}(z) =$ 以 $\mathfrak{O}$ 为系数的有理函数域[†]) 的解，将系数矩阵 $(Q_{kl}(z))$ 化为标准型(即将指标 $1, \cdots, m$ 作适当的改动，使得矩阵化为主对角线上有几个子式，子式以外的部分均为 0，且子式的个数为最大. 这样的标准型是唯一确定的)

$$\begin{pmatrix} W_1 & & \\ & \ddots & \\ & & W_r \end{pmatrix},$$

式中

$$W_t = \begin{pmatrix} Q_{11,t}(z) & \cdots & Q_{1m_t,t}(z) \\ & \cdots\cdots & \\ Q_{m_t1,t}(z) & \cdots & Q_{m_tm_t,t}(z) \end{pmatrix},$$

$$1 \leqslant t \leqslant r, \quad \sum_{t=1}^{r} m_t = m$$

后，这些 $W_1, \cdots, W_r$ 是无关的，即如果

$$\sum_{t=1}^{r} (C_{1t} \cdots C_{m_t t}) W_t \begin{pmatrix} P_{1t}(z) \\ \vdots \\ P_{m_t t}(z) \end{pmatrix} = 0,$$

$$C_{st} \in K,$$

$$P_{kt}(z) \in K[z],$$

则 $C_{st} = 0, P_{kt} = 0$. 设 N 为自然数，如果由正规 E 函数组 $f_1(z), \cdots, f_m(z)$ 构造出的 $(m+N)!/m!N!$ 个 E 函数 $F_{n_1,\cdots,n_m}(z) = f_1(z)^{n_1} \cdots f_m(z)^{n_m} \left(\sum_{i=1}^{m} n_i \leqslant N, n_i \geqslant 0\right)$ 也是正规组，则将 $f_1(z), \cdots, f_m(z)$ 称作 N 次正规 E 函数组.

应用上述概念来叙述 Siegel 的结果：对于任意的自然数 N，如果 $f_1(z), \cdots, f_m(z)$ 是定义在有限次代数数域 K 上，且满足微分方程组 $f_k'(z) = \sum_{l=1}^{m} Q_{kl}(z) f_l(z)$ $(Q_{kl}(z) \in \mathfrak{O}(z), 1 \leqslant k \leqslant m)$ 的 N 次正规 E 函数组，且 $\alpha(\neq 0) \in \bar{\boldsymbol{Q}}$ 不是任何 $Q_{kl}(z)$ 的极点[†]，则 $f_1(\alpha), \cdots, f_m(\alpha)$ 为在 $\bar{\boldsymbol{Q}}$ 上代数无关的超越数.

最后，由 Baker 定理可以推出下面的结果：(i) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 全都属于 $\bar{\boldsymbol{Q}}$，且 $\gamma = \alpha_1 \log \beta_1 + \cdots + \alpha_n \log \beta_n \neq 0$，则 γ 是超越数. (ii) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 都是非零代数数，则 $e^{\beta_0} \alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数. (iii) 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都是不等于 0 和 1 的代数数，而 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 属于 $\bar{\boldsymbol{Q}}$，且 $1, \beta_1, \cdots, \beta_n$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 上线性无关，则 $\alpha_1^{\beta_1} \cdots \alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数.

Baker 还得到了他的定理的一个定量推广 ([17])：假设已给整数 $A \geqslant 4, d \geqslant 4$，以及高度不超过 A，次数不超过 d 的非零代数数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n (n \geqslant 2)$. 又假设 $0 < \delta \leqslant 1$，而 $\log \alpha_1, \cdots, \log \alpha_n$ 为对数主值. 如果存在有理整数 $b_1, \cdots, b_n$，其绝对值 $\leqslant H$，使得

$$0 < |b_1 \log \alpha_1 + \cdots + b_n \log \alpha_n| < e^{-\delta H},$$

则

$$H < (4^{n^2} \delta^{-1} d^{2n} \log A)^{(2n+1)^2}.$$

这个定理在包括一大类 Diophantus 问题在内的各种数论问题中有广泛的应用 ([19]).

【参】 [1] А. О. Гельфонд, Трансцендентные и алгебраические числа, Гостехиздат, 1952; [2] T. Schneider, Einführung in die transzendenten Zahlen, Springer, 1957; [3] C. L. Siegel, Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. Preuss. Akad. Wiss., 1929. (Gesammelte Abhandlungen. Springer, 1966, vol. 1, p. 209—266); [4] C. L. Siegel, Transcendental numbers, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1949;

[5] Н. И. Фельдман, Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел, I, Изв. Акад. Наук СССР, **15** (1951), 53—74; [6] W. J. LeVeque, Note on S-numbers, Proc. Amer. Math. Soc., **4** (1953), 189—190; [7] W. J. LeVeque, On Mahler's U-numbers, J. London Math. Soc., **28** (1953), 220—229; [8] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen, Proc. Acad. Amsterdam, **40** (1937), 421—428; [9] K. Mahler, Über die Dezimalbruchentwicklung gewisser Irrationalzahlen, Mathematica B, Zutphen, **6** (1937), 22—36; [10] T. Schneider, Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen I, J. Reine Angew. Math., **172** (1935), 65—69; [11] T. Schneider, Arithmetische Untersuchungen elliptischer Integrale, Math. Ann., 113 (1936),1—13; [12] T. Schneider, Zur Theorie der Abelschen Funktionen und Integrale, J. Reine Angew. Math., **183** (1941), 110—128; [13] S. Lang, Introduction to transcendental numbers, Addison-Wesley, 1966; [14] В. Г. Спринджук, Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел, **29** (1965); 379—436; [15] В. Г. Спринджук, Проблема Малера в метрической теории чисел, Наука и Техника, 1967; [16] W. M. Schmidt, T-numbers do exist, Rend. Convegno di Teoria dei Numeri, Roma, 1968, [17] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers I, II, III, IV, Mathematika, **13** (1966), 204—216; **14** (1967), 102—107; **14** (1967), 220—228; **15** (1968), 204—216; [18] Н. И. Фельдман-А. Б. Шидловский, Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел, **22** (1967), 3—81; [19] A. Baker, Transcendental number theory, Cambridge Univ. Press, 1975.

二次域的数论 [英 arithmetic of quadratic fields 法 arithmétique des corps quadratiques 德 Arithmetik der quadratischen Körper 俄 арифметика квадратичных полей 日 2 次体の整数論] 有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的二次扩张域†,称为**二次域** (quadratic field). 往有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 里添加一个不含平方因子的整数 $m(\neq 0, 1)$ 的平方根,就可得到一个二次域 k, 记为 $k=\boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$. 当 $m>0$ 时, k 称为**实** (real) **二次域**,当 $m<0$ 时, k 称为**虚** (imaginary) **二次域**(→代数数域的数论). 如果设

$$\omega=(1+\sqrt{m})/2, \quad m\equiv 1 (\bmod 4),$$
$$=\sqrt{m}, \quad m\equiv 2, 3 (\bmod 4),$$

则 $(1, \omega)$ 是 k 的最小基†, 即 k 的任意代数整数† α 可用 $\alpha=a+b\omega$ 的形式唯一表出, 这里 a, b 是有理整数. k 的判别式† d: 当 $m\equiv 1$ (mod 4)时, $d=m$; 当 $m\equiv 2, 3$ (mod 4)时, $d=4m$. k 的元素 $\alpha=a+b\sqrt{m}(a, b\in\boldsymbol{Q})$ 关于 $\boldsymbol{Q}$ 的共轭元素为 $\alpha'=a-b\sqrt{m}$, 则 $\sigma:\alpha\to\alpha'$ 是 k 的自同构†.

【单元】 1) $m<0$ 的情形. 当 $m=-1$ 时, k 的单元†为 $\pm 1, \pm i$; 当 $m=-3$ 时, k 的单元为 $\pm 1, \pm\omega_0, \pm\omega_0^2(\omega_0=(1+\sqrt{-3})/2)$; 在其他情形,只有 ± 1 是 k 的单元. 2) $m>0$ 的情形. 在满足 $\varepsilon>1$ 的单元 ε 中存在绝对值最小的单元, 令它为 ε_0, 则 k 的任意单元 ε 可唯一地表示为 $\varepsilon=\pm\varepsilon_0^n$ 的形式, 即 $\pm\varepsilon_0$ 是 k 的(唯一的一个)基本单元†. 把基本单元 ε_0 设为 $\varepsilon_0=(x+y\sqrt{d})/2$, 则它可以通过求 Pell 方程† $x^2-dy^2=\pm 4$ 的(最小正)整数解计算出来(→连分数). ($m<100$ 时, ε_0 值的表见高木贞治[1].)

【素理想】 1) 素数 p, 如果 $p|d$(d 为判别式),则在 k 的主整环† $\mathfrak{o}$ 中可分解为 $(p)=\mathfrak{p}^2$. 2) 当 $(p, m)=1$, $p\neq 2$ 时, i) 如果 $\left(\frac{m}{p}\right)=1$, 则 $(p)=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'(\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}')$, $N(\mathfrak{p})=N(\mathfrak{p}')=p$; ii) 如果 $\left(\frac{m}{p}\right)=-1$,则 $(p)=\mathfrak{p}$, $N(\mathfrak{p})=p^2$, 其中 N 为范数, $\left(\frac{m}{p}\right)$ 为 Legendre 符号†. 3) 当 $m\equiv 1$(mod 4) 时, $2\nmid d$, i)当 $m\equiv 1$(mod 8) 时, $(2)=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'(\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}')$, $N(\mathfrak{p})=N(\mathfrak{p}')=2$; ii) 当 $m\equiv 5$(mod 8) 时, $(2)=\mathfrak{p}$, $N(\mathfrak{p})=4$. 这里的 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ 都是 $\mathfrak{o}$ 中的素理想.

【Kronecker 符号】 设 $k=\boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$, k 的判别式为 d. 如果对于 k, 当 $(p)=\mathfrak{p}\mathfrak{p}'(\mathfrak{p}\neq\mathfrak{p}')$ 时,令 $\chi(p)=1$, 当 $(p)=\mathfrak{p}$ 时, 令 $\chi(p)=-1$, $(p)=\mathfrak{p}^2$ 时,令 $\chi(p)=0$. 对于 $n\in\boldsymbol{Z}, n>0$, $n=\prod_i p_i^{e_i}$, 令 $\chi(n)=\prod_i \chi(p_i)$. 特别是设 $\chi(1)=1$. 应用 Jacobi 符号†, 1) 当 $m\equiv 1$ (mod 4)时, $\chi(n)=\left(\frac{n}{m}\right)$; 2)当 $m=2, 3$(mod 4) 时,如果令 $d=2^e m'$, 则 $\chi(n)=\chi_2(n)\left(\frac{n}{m'}\right)$, 其中 i) 当 $e=2$, $m'\equiv 3$ (mod 4)时, $\chi_2(n)=(-1)^{(n-1)/2}$; ii) 当 $e=3$, $m'\equiv 1$(mod 4) 时, $\chi_2(n)=(-1)^{(n^2-1)/8}$; iii) 当 $e=3$, $m'\equiv 3$ (mod 4)时, $\chi_2(n)=(-1)^{(n^2-1)/8+(n-1)/2}$; 3) 对

于负的整数 $-n$，规定 $\chi(-n)=(\operatorname{sgn} d)\chi(n)$。这样定义的 $\chi(n)(n\in \boldsymbol{Z})$ 称为 **Kronecker 符号**（Kronecker's symbol）。

Kronecker 符号具有以下的性质：1）当 $(n,d)\neq 1$ 时，$\chi(n)=0$，当 $(n,d)=1$ 时，$\chi(n)=\pm 1$；2）如果 $m\equiv n \pmod 4$，则 $\chi(m)=\chi(n)$；3）$\chi(mn)=\chi(m)\chi(n)$；4）使得 $\chi(n)=1$ 成立的充分必要条件是：存在 k 的某个整理想 $\mathfrak{a}$（但 $(\mathfrak{a},(d))=1$），使得 $n\equiv N(\mathfrak{a}) \pmod d$ 成立。（这是类域论（→类域论）在二次域中的一个表现。）

【理想类】 $k=\boldsymbol{Q}(\sqrt{m})$ 的理想类的个数 h（k 的类数[†]），是 P. G. L. Dirichlet (1840) 应用解析方法计算出来的．即

当 $m>0$ 时，

$$h\log\varepsilon_0=-\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{d-1}\chi(r)\sin\frac{r\pi}{d},$$

当 $m<0$ 时，

$$h=\frac{w}{2|d|}\sum_{r=1}^{|d|-1}\chi(r)r,$$

式中 d 为判别式，ε_0 为正的基本单元，w 为含于 k 中的 1 的幂根的个数，χ 为 Kronecker 符号．

当 $m<0$ 时，设判别式为 d 的二次域 k 的类数为 $h(d)$．从 Gauss 以来就有如下的猜想：当 $|d|\to\infty$ 时，$h(d)\to\infty$．这已由 H. Heilbronn (1934) 给出了证明，后来，C. L. Siegel (Acta Arith., **1** (1935)) 进一步证得一个更精确的结果

$$\lim_{|d|\to\infty}(\log h(d))/(\log\sqrt{|d|})=1.$$

特别是，使得 $h(d)=1$ 的虚二次域只有有限个．对于 $|d|=3,4,7,8,11,19,43,67,163$，有 $h(d)=1$．虽然已知道使得 $h(d)=1$ 的 d 除了这些之外，如果还有，最多还有一个 (Heilbronn-E. H. Linfoot, 1934)，但实际上，最近 A. Baker 和 H. M. Stark 独立地证得除了这 9 个 d 以外，不存在其他的 d 使得 $h(d)=1$ (Michigan Math. J., **14** (1967))．Baker 和 Stark 还独立证明了 (Ann. of Math., (2) **94** (1971))：仅当 $d=15,20,24,35,40,51,52,88,91,115,123,148,187,232,235,267,403,427$ 时，$h(d)=2$ 才成立．

在 $m>0$ 的情形，$\lim_{d\to\infty}(\log(h(d)\log\varepsilon_d)/\log\sqrt{d})=1$ 成立（其中 ε_d 为 k 的基本单元）．然而，是否存在无限多个 d，使得 $h(d)=1$ 成立，这还没有确定（→数表 7）．

【种的理论】 设 k 的全体理想的群为 G，k 中满足 $N(\alpha)>0$ 的全体的主理想[†](α)，构成的子群为 H．G/H 的元素称为**狭义理想类**（这与代数数域中的一般定义是一致的）．当 i) $m<0$，或 ii) $m>0$，$N(\varepsilon_0)=-1$ 时，狭义的类和普通的类是一致的．当 $m>0$，$N(\varepsilon_0)=1$ 时，普通的理想类分为两个狭义的理想类．下面对狭义理想类加以研究．

设 $p_1,\cdots,p_t$ 为除尽 d 的全体素数．对于使得 $(n,d)=1$ 的 $n\in\boldsymbol{Z}$，定义 χ，$\chi_1,\cdots,\chi_t$ 如下：1）当 $p_i\neq 2$ 时，$\chi_i(n)=\left(\frac{n}{p_i}\right)$ (Legendre 符号)；2）当 $p_i=2$ 时，记为 Kronecker 符号 $\chi_2(n)$．对于使得 $(n,d)=1$ 的 $n\in\boldsymbol{Z}$，使 $\chi_1(n)=\cdots=\chi_t(n)=1$ 成立的充分必要条件是：对于 k 中某一整数 α，有 $n\equiv N(d) \pmod d$（这里 $N(\alpha)=\alpha\alpha'$）．且 Kronecker 符号 χ 可以表示为 $\chi=\chi_1\chi_2\cdots\chi_t$．因此，对于 k 的整理想 $\mathfrak{a}$，$n\equiv N(\mathfrak{a}) \pmod d$（$N(\mathfrak{a})$ 为理想 $\mathfrak{a}$ 的绝对范数[†]）成立的充分必要条件是 $\chi_1(n)\cdots\chi_t(n)=1$．在 k 的各理想类 C 中选取使得 $(\mathfrak{a},(d))=1$ 成立的整理想 $\mathfrak{a}$，令 $\varepsilon_i=\chi_i(N(\mathfrak{a}))$ $(i=1,\cdots,t)$，则 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)$ 由理想类 C 唯一确定，而和 $\mathfrak{a}$ 的选法无关．使得 $(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)=(1,\cdots,1)$ 的理想类全体 $\mathfrak{H}$ 称为**主种** (principal genus)，理想类群 $\mathfrak{C}$ 对于主种 $\mathfrak{H}$ 的各剩余类称为 k 的**种** (genus)．对于每一个种，上面的 $\varepsilon_i=\chi_i(N(\mathfrak{a}))(i=1,\cdots,t)$ 的值是一定的．$(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_t)$ 称为这个种的**特征标系** (character system)．种是由其特征标系来确定的．因为特征标系仅具有 $\varepsilon_i=\pm 1$，$\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_t=1$ 的条件，所以 $\mathfrak{C}/\mathfrak{H}$ 是 $(2,2,\cdots,2)$ 型的 Abel 群．因此，一共有 2^{t-1} 个种．

理想类 C 隶属于主种 $\mathfrak{H}$ 的充分必要条件是：存在某一理想类 C_1 使得 C 能表示为 $C = C_1^{1-\sigma} = C_1^2$. 因此，在狭义理想类群的不变量†中，成为 2 的幂者为 $t-1$. 使得 $C^\sigma = C$ 的理想类 C 称为**特异类** (ambig class). 特异类有 2^{t-1} 个，构成 $(2, 2, \cdots, 2)$ 型的 Abel 群. 使得 $\mathfrak{a}^\sigma = \mathfrak{a}$ 的理想 $\mathfrak{a}$ 称为**特异理想** (ambig ideal). 当设 $(p_i) = \mathfrak{p}_i^2$ $(i = 1, \cdots, t)$ 时，特异理想 $\mathfrak{a}$ 通过 $a \in \boldsymbol{Q}$, $v_i = 0, 1$ 可唯一表示为 $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{v_1} \cdots \mathfrak{p}_t^{v_t}(a)$. k 的每个特异类，只包含两个 $\mathfrak{p}_1^{v_1} \cdots \mathfrak{p}_t^{v_t}$ 形的特异理想. 例如，$k = \boldsymbol{Q}(\sqrt{-65})$, $d = -2^2 \cdot 5 \cdot 13$, $t = 3$, $h = 8$, $\mathfrak{C} = \{E, A, A^2, A^3, B, BA, BA^2, BA^3\}(A^4 = E, B^2 = E)$，主种 $\mathfrak{H} = \{E, A^2\}$, $A^\sigma = A^3$, $B^\sigma = B$，特异类 $= \{E, A^2, B, BA^2\}$.

【范数剩余】 $k/\boldsymbol{Q}$ 的前导子† $f = \prod_p f_p$：当 $m > 0$ 时，$f = d$；当 $m < 0$ 时，$f = mp_\infty$. 即如果 $p \mid d$, $p \neq 2$，则 p 前导子 $f_p = p$；如果 $2 \mid d$, $d = 2^e m'$，当 $(2, m') = 1$ 时，$f_2 = 2^e$. 再应用 Hilbert 范数剩余符号†，那么对于 $a \in \boldsymbol{Z}$，Kronecker 符号可表示为

$$\chi(a) = \prod_{p \mid d} \left(\frac{a, d}{p}\right), \quad (a, d) = 1,$$
$$= 0, \qquad (a, d) \neq 1.$$

【历史】 二次域的数论原来是由 Gauss 和 Dirichlet([6])根据有理整系数的二元二次型的理论发展的. 这个理论后来被 J.W.R. Dedekind ([6]) 转化为理想的理论. 例如，对于二次域的种的理论是 Gauss 首先用二元二次型的术语来表述的，Dirichlet 的类数公式也是作为二元二次型的公式得出的. Hilbert ([3]) 通过引进 Hilbert 范数剩余符号系统地发展了二次域的数论 (→[1], [5], [7], [8])，后来二次域的数论成为类域论的最简单的实例的源泉 (→类域论).

【参】 [1] 高木貞治，初等整数論講義，共立出版，1931；[2] 高木貞治，代数的整数論，岩波，1948；[3] D. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1897 (Werke I, Springer, 1932)；[4] H. Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer, 1950；[5] З. И. Боревич–И. Р. Шафаревич, Теория чисел, Наука, 1964 (英译本：Number theory, Academic Press, 1966)；[6] P. G. L. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, Herausgegeben und mit Zusätzen versehen von R. Dedekind, F. Viewig & Sohn, 第四版，1894 (Chelsea, 1969)；[7] B. W. Jones, The arithmetic theory of quadratic forms, Math. Assoc. of America (John Wiley), 1950；[8] E. G. H. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie I, II, III, Hirzel, 1927 (Chelsea, 1969).

代数数域的数论 [英 arithmetic of algebraic number fields 法 arithmétique des corps de nombres algébriques 德 Arithmetik der algebraischen Zahlkörper 俄 арифметика поля алгебраических чисел 日 代数体の整数論] 满足有理整系数代数方程的复数称为**代数数** (algebraic number). 特别是当这种方程的最高次项的系数为 1 时，作为它的根的数称为**代数整数** (algebraic integer). 代数数的全体 A 是有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的代数闭包†. 代数整数的全体 I 是包含有理整数整域 $\boldsymbol{Z}$ 的整域，I 的商域†为 A.

【有限次代数数域的主整环】 有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的有限次扩张域† k 称为**有限次代数数域** (algebraic number field). k 为 A 的子域†. k 和 I 的交 $\mathfrak{o}$ 是以 k 为商域的整域. $\mathfrak{o}$ 称为 k 的**主整环或主整数环** (英 principal order 德 Hauptordnung)，或者简称为**整环或整数环**. (一般，主整环 $\mathfrak{o}$ 的子环 R，如包含 1 并且其商域为 k，也称为**整环** (order). 满足 $\gamma\mathfrak{o} \subset R$ 的 $\mathfrak{o}$ 的元素 γ 的集合 $\mathfrak{f}$ 为 $\mathfrak{o}$ 的理想，称 $\mathfrak{f}$ 为 R 的**前导子** (conductor).) 当 k 为 $\boldsymbol{Q}$ 的 n 次扩张时，主整环 $\mathfrak{o}$ 作为加法群是秩†为 n 的自由 Abel 群†. 它的基† $(\omega_1, \cdots, \omega_n)$ 称为 $\mathfrak{o}$ 的 (或者 k 的) **最小基** (minimal basis). 设 ω_j 关于 $\boldsymbol{Q}$ 的共轭†数为 $\omega_j^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$，设以 $\omega_j^{(i)}$ 为 (i, j) 元素的行列式为 $\Delta = |\omega_j^{(i)}|$，则 $D_k = \Delta^2$ 是有理整数，它与最小基的选择无关. D_k 称为 k 的**判别式** (discriminant). 如果 $k \neq \boldsymbol{Q}$，则 $|D_k| > 1$ (**Minkowski 定理**，1891). 以给定的有理整数为判别式的有限次代数数域，只有有限多个 (Hermite-Minkowski 定理，1896). 这些定理的证明用到数的几何方法(→数的几何).

【主整环 $\mathfrak{o}$ 的理想】 k 的主整环 $\mathfrak{o}$ 的理想†

$\mathfrak{a}$ 称为 k 的**整理想** (integral ideal). $\mathfrak{o}$ 一般不是主理想环†,但总是 Dedekind 环†. 即,$\mathfrak{o}$ 的任意理想 $\mathfrak{a}$ 可唯一表为有限个素理想的幂积（假设不考虑顺序). 这称为**主整环 $\mathfrak{o}$ 的基本定理.**

$\mathfrak{o}$ 关于理想 $\mathfrak{a}(\neq \mathfrak{o})$ 的商环 $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ 是有限环. $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ 的元的个数称为理想 $\mathfrak{a}$ 的**绝对范数** (absolute norm),用 $N(\mathfrak{a})$表示.则 $N(\mathfrak{ab}) = N(\mathfrak{a})N(\mathfrak{b})$ 成立. $\mathfrak{o}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 总是极大理想†, 故 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 为有限域. 设 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 的特征†为 p 时, $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 是素域† $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 的有限扩张,设它的扩张次数为 f,则 $N(\mathfrak{p}) = p^f$. f 称作素理想 $\mathfrak{p}$ 的**次数** (degree).

设复数 s 为变量,

$$\zeta_k(s) = \sum_{\mathfrak{a}} 1/(N(\mathfrak{a}))^s$$

$$= \prod_{\mathfrak{p}} 1/(1-(N(\mathfrak{p}))^{-s})$$

叫作 **Dedekind ζ 函数** (Dedekind zeta function) (1871). 式中 $\sum$ 是过 $\mathfrak{o}$ 的全部理想 $\mathfrak{a}$ 的和, Π 是过 $\mathfrak{o}$ 的全部素理想 $\mathfrak{p}$ 的积. 这个级数当 $\mathfrak{R}_s > 1$ 时绝对收敛, $\zeta_k(s)$ 可单值地解析开拓到全平面上 (→ζ 函数).

【单元】 设 ε 是 k 的整数, 如果 ε^{-1} 也是整数, 则称 ε 是 k 的**单元** (英 unit 德 Einheit). 这等价于主理想 (ε) 等于 $\mathfrak{o}$. k 的单元的集合, 关于乘法构成 Abel 群 E_k. 将 E_k 称作 k 的**单元群** (unit group). E_k 的有限阶元素的集合与 k 中所包含的 1 的幂根的集合一致, 它们构成有限阶 w 的循环群. 设 k 关于 $\boldsymbol{Q}$ 的共轭域为 $k^{(1)}, \cdots, k^{(n)}$, 设其中的 r_1 个为实域(即实数域的子域), 剩下的 αr_2 个为两两互为复共轭的虚域. 则 $n = r_1 + \alpha r_2$. 现在设 $k^{(1)}, \cdots, k^{(r_1)}$ 为实域, $k^{(r_1+1)}, \cdots, k^{(n)}$ 为虚域, $k^{(j)}$ 的复共轭域为 $k^{(j+r_2)}(j = r_1+1, \cdots, r_1+r_2)$. 则 k 的单元群 E_k 是 w 阶的有限循环群与阶数 $r = r_1 + r_2 - 1$ 的（乘法的）自由 Abel 群的直积. 这称为 **Dirichlet 的单元定理** (Dirichlet's unit theorem) (1846). 这里的自由 Abel 群的基 $(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)$ 称为 k 的**基本单元系** (英 fundamental units 德 Grundeinheiten).

对于 $\alpha \in k$, 设 $l^{(i)}\alpha = \log|\alpha^{(i)}|(i=1, \cdots, r_1)$, $l^{(j)}\alpha = 2\log|\alpha^{(j)}|(j = r_1+1, \cdots, r_1+r_2)$, 则对于 $\eta_1, \cdots, \eta_r \in E_k$, 将

$$R[\eta_1, \cdots, \eta_r] = \begin{vmatrix} l^{(1)}_{\eta_1} & l^{(1)}_{\eta_2} & \cdots & l^{(1)}_{\eta_r} \\ l^{(2)}_{\eta_1} & l^{(2)}_{\eta_2} & \cdots & l^{(2)}_{\eta_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l^{(r)}_{\eta_1} & l^{(r)}_{\eta_2} & \cdots & l^{(r)}_{\eta_r} \end{vmatrix}$$

称作 $(\eta_1, \cdots, \eta_r)$ 的**单元基准** (regulator) (R. Dedekind). $\eta_1, \cdots, \eta_r$ 对于乘法独立当且仅当 $R[\eta_1, \cdots, \eta_r] \neq 0$. $R[\eta_1, \cdots, \eta_r]$ 的绝对值最小,是在 $(\eta_1, \cdots, \eta_r)$ 为基本单元系的情形. 对于基本单元系 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r)$, $R[\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r]$ 的绝对值 R 是一定的. R 称为域 k 的**单元基准**. 一般地, $|k[\eta_1, \cdots, \eta_r]|/R$ 的值等于 k 中包含的 1 的幂根及 $\eta_1, \cdots, \eta_r$ 生成的群 H 在 E_k 中的指数 $(E_k:H)$. H. W. Leopoldt 猜想在 k 中关于 $\boldsymbol{Z}$ 乘法独立的单元, 当把它们看作是关于 $\boldsymbol{Q}$ 的张量乘积 $k\otimes\boldsymbol{Q}_p$ 的元素时, 关于 $\boldsymbol{Z}_p$ (p-adic 整环)仍然是乘法独立的. 这个猜想在某些特殊情况下被 J. Ax (Illinois J. Math. **9**(1965)) 和其他人肯定地证明了.

在 $k/\boldsymbol{Q}$ 为 Galois 扩张的情形,在 k 中存在一个单元 ε, 在它关于 $\boldsymbol{Q}$ 的共轭元中含有 r 个乘法独立的单元 (Minkowski 定理). 后面见到的圆单元就是这一例子.

【理想类】 设模 $\mathfrak{a}\subset k$ 为 $\mathfrak{o}$ 模 (即 $\mathfrak{oa} \subset \mathfrak{a}$), 且对于适当的 k 的元 $\alpha(\alpha \neq 0)$, 有 $\alpha\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}$ 成立时, 将 $\mathfrak{a}$ 称为 k 的**分数理想** (fractional ideal). 对于分数理想 $\mathfrak{a}(\neq 0)$, $\mathfrak{a}^{-1} = \{\alpha \in k | \alpha\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}\}$ 也是分数理想, 且 $\mathfrak{aa}^{-1} = \mathfrak{o}$ 成立. (零理想以外的) k 的分数理想全体 $\mathfrak{I}_k$ 关于乘法构成以 $\mathfrak{o}$ 为单位元的 Abel 群. 非 0 的任意分数理想 $\mathfrak{a}$, 如果允许负幂的话, 则可唯一表示为素理想的有限幂积,即, $\mathfrak{I}_k$ 是以 $\mathfrak{o}$ 的所有素理想为基的(乘法的)自由 Abel 群. 对于分数理想 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ 时, 称为能够用 $\mathfrak{b}$ **整除** (divisible)$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的**因子** (divisor), $\mathfrak{a}$ 称为 $\mathfrak{b}$ 的**倍数** (multiple). $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{b}$ 和 $\mathfrak{a} = \mathfrak{bc}$ ($\mathfrak{c}$ 为整理想)是等价的. 当分数理想 $\mathfrak{a} = \Pi\mathfrak{p}_i^{e_i}$, $\mathfrak{b} = \Pi\mathfrak{q}_j^{f_j}$ 不包含共同的素理想 $\{\mathfrak{p}_i\}$ 或 $\{\mathfrak{q}_j\}$ 时, 称 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 为**互素** (relatively prime), 或称 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ **无公因子** (德 teilerfremd).

对于 k 的元 $\alpha(\alpha \neq 0)$, $(\alpha) = \alpha\mathfrak{o}$ 为 k 的分数理想. $(\alpha)(\alpha \in k, \alpha \neq 0)$的全体 P_k 作成 $\mathfrak{J}_k$ 的子群. 因为 $(\alpha) = \mathfrak{o}$ 和 $\alpha \in E_k$ 是等价的, 所以 $P_k \cong k^*/E_k$. 其中, k^* 为 k 的除 0 以外的全体元素作成的乘法群.

商群 $\mathfrak{C}_k = \mathfrak{J}_k/P_k$ 的各元称为 k 的**理想类** (ideal class), $\mathfrak{C}_k$ 称为 k 的**理想类群** (ideal-class group). 各理想类含有 $N(\mathfrak{a}) \leqslant \sqrt{|D_k|}$ 的整理想 $\mathfrak{a}$. (更精确地说, 是含有 $N(\mathfrak{a}) \leqslant (4/\pi)^{r_2}(n!/n^n)\sqrt{|D_k|}$ 的理想 $\mathfrak{a}$.) 因此可知, $\mathfrak{C}_k$ 是有限 Abel 群. 将 $\mathfrak{C}_k$ 的阶数 h 称为 k 的**类数** (class number). 通常应用 Dedekind ζ 函数在极点 $s=1$ 的残数†来计算类数, 即,

$$\lim_{s\to 1+0}(s-1)\zeta_k(s) = gh,$$

$$g = 2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R_k/w_k\sqrt{|D_k|},$$

其中 R_k 为 k 的单元基准, w_k 为 k 中所含的 1 的幂根的个数 (Dedekind, 1877). 这个公式可实际应用于二次域(→二次域的数论)及分圆域的类数计算. $\boldsymbol{Q}$ 的三次、四次(实)循环扩张 k 的类数($k/\boldsymbol{Q}$ 的前导子†在 100 以下的情形), 是 H. Hasse 计算的 (Abh. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin, **2**(1948)). 现在, 将代数数域 k 的次数 $n = [k:\boldsymbol{Q}]$ 固定, 令 $|D_k| \to \infty$ 时, 则

$$\lim(\log(h_kR_k)/\log\sqrt{|D_k|}) = 1$$

成立 ($k=2$ 的情形见 C. L. Siegel (1935); 关于一般情形见 R. Brauer, Amer. J. Math., **69** (1947)).

【有限次代数数域的赋值】 k 的全部 Archimedes 赋值†及非 Archimedes 赋值†是如下定义的(→赋值):

1) Archimedes 赋值. 设 k 关于 $\boldsymbol{Q}$ 的 n 个 ($n = (k:\boldsymbol{Q})$) 共轭域为 $k^{(1)}, \cdots, k^{(n)}$, 设 $\alpha \in k$ 的 n 个共轭元为 $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(n)}$. 设 $k^{(1)}, \cdots, k^{(r_1)}$ 为实域, $k^{(j)}$ 和 $k^{(j+r_2)}(j = r_1+1, \cdots, r_1+r_2)$ 为复共轭虚域. 这时, 由 $|\alpha|_j = |\alpha^{(j)}|(j = 1, \cdots, r_1+r_2)$ 得出 r_1+r_2 个互不等价的 Archimedes 赋值. 这些赋值的等价类用符号 $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \cdots, \mathfrak{p}_\infty^{(r_1+r_2)}$ 表示, 称为 k 的无限素除子†. 其中前 r_1 个称为实的, 后 r_2 个称为虚的. 对于各 $\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$, 令正规赋值†为

$$|\alpha|_{\mathfrak{p}_\infty^{(j)}} = |\alpha|_j, \ j = 1, \cdots, r_1,$$

$$= |\alpha|_j^2, \ j = r_1+1, \cdots, r_1+r_2,$$

其中, 对于 $j = r_1+1, \cdots, r_1+r_2$, $|\ |_{\mathfrak{p}_\infty^{(j)}}$ 是广义赋值. 特别是 $r_1 = n$ 时, k 称为**全实** (totally real) 域, $r_1 = 0$ 时, k 称为**全虚** (totally imaginary) 域.

2) 非 Archimedes 赋值. 设 $\mathfrak{p}$ 为 k 的一个素理想, 对于 $\alpha \in k$, $(\alpha) = \mathfrak{p}^a\mathfrak{b}$ ($\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{b}$ 为互素) 时, 令 $v_\mathfrak{p}(\alpha) = a$, 这时对任一常数 ρ ($0 < \rho < 1$)

$$|\alpha|_\mathfrak{p} = \rho^{v_\mathfrak{p}(\alpha)}$$

为 k 的非 Archimedes 赋值. 这是 k 的 $\mathfrak{p}$-adic 赋值†. 特别当 $\rho = (N(\mathfrak{p}))^{-1}$ 时, $|\alpha|_\mathfrak{p}$ 称为正规赋值†. 对于不同的素理想 $\mathfrak{p}$, $|\ |_\mathfrak{p}$ 是互不等价的. 赋值 $|\ |_\mathfrak{p}$ 的等价类, 用同样的字母 $\mathfrak{p}$ 表示, 称为有限素除子†.

k 的有限和无限素除子的形式幂积 $\mathfrak{m}^* = \prod_i \mathfrak{p}_i^{e_i}$ 称为 k 的**除子** (divisor). 当所有的 $e_i > 0$ 时, $\mathfrak{m}^*$ 称为**整除子**. 对于 $\mathfrak{n}^* = \prod \mathfrak{p}_i^{f_i}$, $\mathfrak{m}^* | \mathfrak{n}^*$ 由 $e_i \leqslant f_i (i = 1, 2, \cdots)$ 来定义.

k 的任意赋值与上列赋值中某一个等价 (E. Artin, 1932). 当 $\mathfrak{p}$ 在全部有限及无限素除子中变动时, 对于任意的 $\alpha \in k(\alpha \neq 0)$, 乘积公式 $\prod_\mathfrak{p} |\alpha|_\mathfrak{p} = 1$ 成立, 此处 $|\ |_\mathfrak{p}$ 为正规赋值. 反之, 对某一域 k, 设存在 k 的互不等价的赋值集合 $V = \{|\ |_\mathfrak{p}\}$, 使得 i) 对于任意的 $\alpha \in k$ ($\alpha \neq 0$), $|\alpha|_\mathfrak{p} \neq 1$ 的 $\mathfrak{p} \in V$ 为有限个, ii) 乘积公式 $\prod_{\mathfrak{p}\in V} |\alpha|_\mathfrak{p} = 1(\alpha \in k, \alpha \neq 0)$成立, iii) V 中至少包含 1 个 Archimedes 赋值, 则 k 为有限次代数数域, V 为 k 的所有素除子的集合 (Artin-G. Whaples, Bull. Amer. Math. Soc., **51** (1945)).

【理想类的推广】 对于 k 的无限素除子 $\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$,

$$\alpha \equiv \beta \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_\infty^{(j)}),$$

当 $\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$ 为实时, 由 $\alpha^{(j)}\beta^{(j)} > 0$ 定义, 当 $\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$ 为虚时, 只由 $\alpha^{(j)}\beta^{(j)} \neq 0$ 定义. 所谓 k 的元 α 为**全正的或总正的** (totally positive), 指的是 α 的全

部实共轭元 $\alpha^{(i)}(i=1,\cdots,r_1)$ 为正实数. 使用上述符号就可表示为 $\alpha\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}_\infty^{(i)})\ (i=1,\cdots,r_1)$. k 的全正元 α 的主理想 (α) 的集合 P_k^+, 是 k 的所有主理想 $(\alpha)(\alpha\neq 0)$ 的集合所成的乘法群 P_k 的子群. 商群 $\mathfrak{I}_k/P_k^+$ 的各元称为 k 的**狭义理想类**. 设 k 的全正的单元的全体为 E_k^+, 则 $(\mathfrak{I}_k:P_k^+)=h2^{r_1}/(E_k:E_k^+)$.

【乘法同余】 设 $\mathfrak{m}$ 为 k 的一个整理想, $\mathfrak{m}$ 和 (α) 互素, 将这样的 $\alpha\in k^*$ 的全体构成的乘法群记为 $k^*(\mathfrak{m})$, 则 $\alpha\in k^*(\mathfrak{m})$ 可表为 $\alpha=\beta/\gamma$, 其中 $\beta,\gamma\in\mathfrak{o}$ 及 $(\beta),(\gamma)$ 均与 $\mathfrak{m}$ 互素.

考虑整理想 $\mathfrak{m}$ 和几个无限素除子 $\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ 的形式积 $\mathfrak{m}^*=\mathfrak{m}\prod\mathfrak{p}_\infty^{(i)}$ (整除子). 这时的 $\mathfrak{m}$ 称为 $\mathfrak{m}^*$ 的有限部分. 对于 k 的整除子 $\mathfrak{m}^*$, 把 $\alpha\in k^*(\mathfrak{m})$ 记为 $\alpha\equiv 1(\mathrm{mod}^\times\mathfrak{m}^*)$, 指的是, 当 $\alpha=\beta/\gamma(\beta,\gamma\in k^*(\mathfrak{m})\cap\mathfrak{o})$ 时, $\beta\equiv\gamma(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m})$ 及 $\alpha\equiv 1\ (\mathrm{mod}\mathfrak{p}_\infty^{(i)})$ 同时成立. 满足 $\alpha\equiv 1\ (\mathrm{mod}^\times\mathfrak{m}^*)$ 的 $\alpha\in k^*(\mathfrak{m})$ 的全体构成乘法群. 其次, 对于 $\alpha,\beta\in k^*$, 所谓 $\alpha\equiv\beta\ (\mathrm{mod}^\times\mathfrak{m}^*)$ 指的是 $\alpha/\beta\in k^*(\mathfrak{m})$, 并且 $\alpha/\beta\equiv 1(\mathrm{mod}^\times\mathfrak{m}^*)$. 这个同余式称为**乘法同余** (multiplicative congruence). 当不会误解时, 就用 mod 代替 $\mathrm{mod}^\times$.

与整理想 $\mathfrak{m}$ 互素的全体分数理想作成的乘法群记为 $\mathfrak{I}_k(\mathfrak{m})$. 由 $\alpha\in k^*(\mathfrak{m}),\alpha\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}^*)$ 生成的全体主理想 (α) 的作成的乘法群记为 $S(\mathfrak{m}^*)$. $S(\mathfrak{m}^*)$ 称为模 $\mathfrak{m}^*$ 的**射线** (德 Strahl). 将包含 $S(\mathfrak{m}^*)$ 的 $\mathfrak{I}_k(\mathfrak{m})$ 的子群 H 称为模 $(\mathfrak{m}^*)$ 的**理想群** (ideal group), $\mathfrak{I}_k(\mathfrak{m})/H$ 称为模 $\mathfrak{m}^*$ 的**同余类群** (group of congruence classes).

对于 k 的两个整除子 $\mathfrak{m}^*,\mathfrak{n}^*$, 假如 $\mathfrak{n}^*|\mathfrak{m}^*$, 则 $\mathfrak{I}_k(\mathfrak{m})\subset\mathfrak{I}_k(\mathfrak{n})$, $S(\mathfrak{m}^*)\subset S(\mathfrak{n}^*)$. 对于模 $\mathfrak{n}^*$ 的理想群 H, $\Phi(H)=H\cap\mathfrak{I}_k(\mathfrak{m})$ 是模 $\mathfrak{m}^*$ 的理想群, 且 $\mathfrak{I}_k(\mathfrak{n})/H\cong\mathfrak{I}_k(\mathfrak{m})/\Phi(H)$ 成立. 现在, 对于模 $\mathfrak{m}^*$ 的理想群 H_0, 在 $H_0=\Phi(H)$ 的理想群 H 里, 定义 H 的最小模 $\mathfrak{f}^*$ 存在 (即, 使 $H_0=\Phi(H')$ 的 H' 如为模 $\mathfrak{n}^*$ 的理想群, 则 $\mathfrak{f}^*|\mathfrak{n}^*$), 这时 $\mathfrak{f}^*$ 称为理想群 H 的**前导子** (英 conductor 德 Führer). 乘法同余的概念在类域论和范数剩余符号理论中是很必要的.

【相对代数数域的理想理论】 当有限次代数数域 K 具有子域 k 时, K 称为 k 上的**相对代数数域** (relative algebraic number field), 用 K/k 表示. 设 K 的主整环为 $\mathfrak{O}$, 对于 k 中的分数理想 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{a}$ 是 K 的分数理想. 记 $\mathfrak{O}\mathfrak{a}=E(\mathfrak{a})$, 称为 $\mathfrak{a}$ 到 K 的**扩张** (extension). 对于 k 中的分数理想 $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$, 有 $E(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=E(\mathfrak{a})E(\mathfrak{b})$, $E(\mathfrak{a})\cap k=\mathfrak{a}$ 成立.

设 K 关于 k 的共轭域为 $k^{(1)},\cdots,k^{(n)}(n=(K:k))$. 对于 K 的分数理想 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^{(i)}=\{A^{(i)}|A\in\mathfrak{A}\}$ 是 $K^{(i)}$ 的分数理想. $\mathfrak{A}^{(i)}$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的**共轭理想** (conjugate ideal). 令 $K^{(1)},\cdots,K^{(n)}$ 的合成域为 L, 由 $\mathfrak{A}^{(1)}\mathfrak{A}^{(2)}\cdots\mathfrak{A}^{(n)}$ 生成的理想是 k 的某个理想 $\mathfrak{a}$ 到 L 的扩张. 这时以 $\mathfrak{a}=N_{K/k}(\mathfrak{A})$ 表示, $\mathfrak{a}$ 称为 $\mathfrak{A}$ 的 (**相对**) **范数** ((relative) norm). $N_{K/k}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})=N_{K/k}(\mathfrak{A})N_{K/k}(\mathfrak{B})$ 并且对于 k 的分数理想 $\mathfrak{a}$, 有 $N_{K/k}(E(\mathfrak{a}))=\mathfrak{a}^n$ 成立. 特别在 $k=\boldsymbol{Q}$ 的情形, 有 $N_{K/Q}(\mathfrak{A})=(N(\mathfrak{A}))$ 成立.

k 的素理想 $\mathfrak{p}$ 到 K 的扩张, 作为 $\mathfrak{O}$ 中的素理想 $\mathfrak{P}_1,\cdots,\mathfrak{P}_g$ 的幂积, 可表为 $E(\mathfrak{p})=\mathfrak{P}_1^{e_1}\mathfrak{P}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{P}_g^{e_g}$. 这时, $N_{K/k}(\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{p}^{\mathfrak{f}_i}$, $\mathfrak{f}_i$ 就等于有限域 $\mathfrak{O}|\mathfrak{P}_i$ 在 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 上的扩张次数. $\mathfrak{f}_i$ 称为 $\mathfrak{P}_i$ 关于 k 的**相对次数** (relative degree), e_i 称为 $\mathfrak{P}_i$ 关于 k 的**分歧指数** (ramification exponent). 有 $n=\sum_{i=1}^{g}e_i\mathfrak{f}_i$ 成立. 特别当 $e_1=\cdots=e_g=1$ 时, 就称 k 的素理想 $\mathfrak{p}$ 对 K/k **非分歧** (unramified), 其他情形, 称 $\mathfrak{p}$ 对 K/k **分歧** (ramified). 如果 k 的全部素理想对 K/k 都非分歧, 则将 K/k 称为**非分歧扩张** (unramified extension).

(对于无限素除子, k 的 Archimedes 赋值 $||_{\mathfrak{p}_\infty}$ 可扩张为 K 的 g 个 Archimedes 赋值 $||_{\mathfrak{P}_\infty^{(i)}}$ $(i=1,\cdots,g)$ 时, 记 $\mathfrak{p}_\infty=\prod_{i=1}^{g}\mathfrak{P}_\infty^{(i)e_i}$, 其中当 $\mathfrak{p}_\infty$ 为实, 而 $\mathfrak{P}_\infty^{(i)}$ 为虚时, 令 $e_i=2$; 其他的情形, 令 $e_i=1$.)

【共轭差积和相对判别式】 在相对代数数域 K/k 中, k 和 K 的主整环分别以 $\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{O}$ 表示. 令 $\mathfrak{M}=\{A\in K|Tr_{K/k}(A\mathfrak{O})\subset\mathfrak{o}\}$ ($Tr_{K/k}$ 表示迹 (→ 域[共轭])), 则 $\mathfrak{M}$ 为 K 的分数理想, $\mathfrak{M}^{-1}=$

$\mathfrak{D}_{K/k}$ 为K的整理想. $\mathfrak{D}_{K/k}$ 称为K关于k的**共轭差积**(德 Differente)(起初, Dedekind 将 $\mathfrak{D}_{K/k}$ 称为**基本理想**(德 Grundideal), 后来 D. Hilbert 命名为 Differente). 对于 $L \supset K \supset k$, 链式规则: $\mathfrak{D}_{L/k} = \mathfrak{D}_{L/K}\mathfrak{D}_{K/k}$ 成立.

对于 $A \in K$, 令 $\delta_{K/k}(A) = \prod_{i=2}^{n}(A - A^{(i)})$. 但在$K$关于$k$的共轭域 $K^{(1)}, \cdots, K^{(n)}$ 中,这里设 $K = K^{(1)}$. 如果 $A \in \mathfrak{O}$, 则 $\delta_{K/k}(A) \in \mathfrak{D}_{K/k}$, 且 $\mathfrak{D}_{K/k}$ 是由 $\{\delta_{K/k}(A) | A \in \mathfrak{O}\}$ 生成的. 还有, 由 $\{A - A^{(i)} | A \in \mathfrak{O}\}$ 生成的域 $L(L = K^{(1)}K^{(2)} \cdots K^{(n)})$ 的理想,记为 $\mathfrak{E}^{(i)}$, 称为K关于k的**元素理想**(德 Elemente)(Hilbert). 这时(取到L的扩张), $\mathfrak{D}_{K/k} = \mathfrak{E}^{(2)}\mathfrak{E}^{(3)} \cdots \mathfrak{E}^{(n)}$ 成立. $N_{K/k}(\mathfrak{D}_{K/k}) = \mathfrak{d}_{K/k}$ 是k的整理想,并且将 $\mathfrak{d}_{K/k}$ 称为 K/k 的**相对判别式**(relative discriminant). 在 $k = \boldsymbol{Q}$ 的情形, $\mathfrak{d}_{k/\boldsymbol{Q}} = (D_K)$ (D_K 为原来的判别式).

在相对代数数域 K/k 中, K的素理想 $\mathfrak{P}$ 是共轭差积 $\mathfrak{D}_{K/k}$ 的因子的充分必要条件为: 对于满足 $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P}$ 的k中的素理想 $\mathfrak{p}$, $E(\mathfrak{p})$ 在K中分解为 $E(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}^e\mathfrak{P}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{P}_g^{e_g}$ 时, 则 $e > 1$. 这称为 **Dedekind 判别式定理**(Dedekind's theorem of discriminant)(1882). 根据这个定理, k的素理想 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 中分歧的充分必要条件是 $\mathfrak{p}$ 为相对判别式 $\mathfrak{d}_{K/k}$ 的因子. 因此, 在 K/k 中分歧的k的素理想 $\mathfrak{p}$ 只有有限个. 特别是, K/k 为非分歧扩张的充分必要条件是 $\mathfrak{d}_{K/k} = \mathfrak{o}$.

【Galois 域的数论】 对于相对代数数域 K/k, 设K为k的n次 Galois 扩张†, K/k 的 Galois 群为 G. 将K的分数理想 $\mathfrak{A}$ 的共轭理想以 $\mathfrak{A}^\sigma = \{A^\sigma | A \in \mathfrak{A}\}$ $(\sigma \in G)$ 表示. 如果 $N_{K/k}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{a}$, 则 $E(\mathfrak{a}) = \prod_{\sigma \in G} \mathfrak{A}^\sigma$ 成立. 对于k的素理想 $\mathfrak{p}$, 有分解 $E(\mathfrak{p}) = (\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_g)^e$, 并且 $N_{K/k}(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}^f (i = 1, \cdots, g)$, $n = efg$ 成立, 而 $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_g$ 是K中关于k的互相共轭的素理想.

Hilbert (1894) 考察了k的素理想 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 中如上的分解过程, 提出了关于分歧的理论. 设 $\mathfrak{P}$ 为K的一个素理想,则

$$Z = \{\sigma \in G | \mathfrak{P}^\sigma = \mathfrak{P}\}$$

构成 Galois 群G的子群. 那么, Z 称为 $\mathfrak{P}$ 关于k的**分解群**(英 decomposition group 德 Zerlegungsgruppe). 设 $G = \bigcup_i Z\tau_i$ 是关于左陪集的分解, 则 $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}^{\tau_i} (i = 1, \cdots, g)$ 为 $\mathfrak{P}$ 的共轭理想的全体.

$$T = \{\sigma \in Z | A^\sigma \equiv A (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}), \quad A \in \mathfrak{O}\}$$

是分解群Z的正规子群. T 称为 $\mathfrak{P}$ 关于k的**惯性群**或**惰性群**(英 inertial group 德 Trägheitsgruppe). 商群 Z/T 为f阶循环群. 并且存在 $\sigma \in Z$, 使得

$$A^\sigma \equiv A^{N(\mathfrak{p})} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}), \quad A \in \mathfrak{O}$$

成立, 且 $\sigma \bmod T$ 是唯一确定的. 这个 σ 生成循环群 Z/T. σ 称为 $\mathfrak{P}$ 关于k的 **Frobenius 置换**(Frobenius substitution)或 **Frobenius 自同构**(Frobenius automorphism). 对于 $m = 1, 2, \cdots$,

$$V^{(m)} = \{\sigma \in Z | A^\sigma \equiv A (\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{m+1}), \quad A \in \mathfrak{O}\}$$

为Z的正规子群. $V^{(m)}$ 称为 $\mathfrak{P}$ 关于k的m次**分歧群**(英 ramification group 德 Verzweigungsgruppe). 设 $V^{(0)} = \cdots = V^{(v_1)} \supsetneqq V^{(v_1+1)} = \cdots = V^{(v_2)} \supsetneqq \cdots \supsetneqq V^{(v_{r-1}+1)} = \cdots = V^{(v_r)} \supsetneqq V^{(v_r+1)} = \{1\}$, 令 $V_\rho = V^{(v_\rho+1)} (\rho = 0, 1, \cdots, r)$, 其中 $v_0 = -1$, 则 $V_0 = V^{(0)} = T$. $v_1, v_2, \cdots$ 称为**分歧常数**(ramification number). $T/V^{(1)}$ 与 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 的乘法群的子群同构. 因此, $T/V^{(1)}$ 是循环群, 它的阶数 e_0 为 $N(\mathfrak{P}) - 1$ 的因素. $V^m/V^{m+1} (m > 1)$ 与 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 的加法群的子群同构, 因此, $V^{(m)}/V^{(m+1)}$ 是 $(p, p, \cdots, p)$ 型 Abel 群, 其阶数是 $N(\mathfrak{P})$ 的因子, 而 p 为有限域 $\mathfrak{O}/\mathfrak{P}$ 的特征. 特别由于 $e = |T| = (T : V^{(1)})|V^{(1)}|$, 可得 $e = e_0p^u$, $(e_0, p) = 1$ (有限群G的阶数一般用 $|G|$ 表示). 由上可知 $\mathfrak{P}$ 的分解群为可解群†. 关于 Galois 扩张 K/k 的分歧常数和中间 Galois 扩张 F/k 的分歧常数之间的关系已由 Herbrand (J. Math. Pures Appl., **10** (1931)) 完全决定了 (→ [2] 或 [13]).

设 Galois 扩张的共轭差积 $\mathfrak{D}_{K/k}$ 的 $\mathfrak{P}$ 分量为 $\mathfrak{P}^d$, 则

$$d = \sum_{\rho=0}^{r-1}(v_{\rho+1} - v_\rho)(|V_\rho| - 1)$$
$$= \sum_{i=0}^{v_r}(|V^{(i)}| - 1).$$

特别是,当 $|T| = 1$ 时, $d = 0$; 当 $|V^{(1)}| = 1$ 时, $d = e - 1$.

根据 Galois 理论†的基本定理，设对应于 G 的子群 Z, T, $V^{(m)}$ 的 K/k 的中间域分别为 k_Z, k_T, $k_{V^{(m)}}$, 则 k_Z, k_T, $k_{V^{(m)}}$ 分别称为 $\mathfrak{P}$ 的**分解域** (decomposition field), **惯性域**或**惰性域** (inertial field), m 次**分歧域**. 在 $k \subset k_Z \subset k_T \subset K$ 中，设包含 k 的素理想 $\mathfrak{p}$ 的素理想分别为 $\mathfrak{p}_Z$, $\mathfrak{p}_T$, $\mathfrak{P}$, 则 $E(\mathfrak{p})$ 在 k_Z/k 中分解为 $E(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}_Z\mathfrak{p}_Z^{(2)}\cdots\mathfrak{p}_Z^{(g)}$; $E(\mathfrak{p}_Z)$ 在 k_T/k_Z 中分解为 $E(\mathfrak{p}_Z) = \mathfrak{p}_T$ $(N_{k_T/k_Z}(\mathfrak{p}_T) = \mathfrak{p}_Z^f)$; $E(\mathfrak{p}_T)$ 在 K/k_T 中分解为 $E(\mathfrak{p}_T) = \mathfrak{P}^e$.

在 Galois 扩张 K/k 中，如果 k 的素理想 $\mathfrak{p}$ 是非分歧的，则 $E(\mathfrak{p}) = \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_g$, $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_1^{\tau_i}$ $(i = 1, \cdots, g)$, $N_{K/k}(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}^f$, $fg = n$ 成立. 且每个 $\mathfrak{P}_i$ 的 Frobenius 置换 $\sigma_i: A^{\sigma_i} \equiv A^{N(\mathfrak{p})}$ $(\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}_i)(A \in \mathfrak{O})$ 唯一确定，其阶数等于 f. 还由 $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_1^{\tau_i}$, 得 $\sigma_i = \tau_i^{-1}\sigma_1\tau_i$. 即, $\sigma_1, \cdots, \sigma_g$ 属于 G 的同一共轭类†. 特别当 K/k 为 Abel 扩张†(即 G 为 Abel 群)时,则 $\sigma_1 = \cdots = \sigma_g$, 且

$$A^{\sigma_1} \equiv A^{N(\mathfrak{p})}(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}), \quad A \in \mathfrak{O}$$

成立,这时表示为

$$\sigma_1 = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right) \qquad (\in G),$$

这个符号称为 **Artin 符号** (Artin symbol). 与 K/k 的相对判别式互素的分数理想 $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^e$, 定义

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right) = \prod\left(\frac{K/k}{\mathfrak{p}}\right)^e \qquad (\in G).$$

显然有

$$\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = \left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right)\left(\frac{K/k}{\mathfrak{b}}\right)$$

成立.

19 世纪以来具体而且清楚地了解了的是二次域的数论 (→ 二次域的数论)以及下面要说明的分圆域的数论.

【分圆域的数论】 对于自然数 m, 自乘 m 次才等于 1 的数称为 **1 的 m 次原根** (primitive root of 1). 它们是 $\exp 2\pi i r/\mathrm{m}$ $(r, \mathrm{m}) = 1$, 总共有 $\varphi(\mathrm{m})$ 个 (φ 为 Euler 函数†). 这 $\varphi(\mathrm{m})$ 个 1 的 m 次原根，是有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上 $\varphi(\mathrm{m})$ 次不可约多项式

$$F_{\mathrm{m}}(X) = \prod_{d|\mathrm{m}}(X^{\mathrm{m}/d} - 1)^{\mu(d)}$$

(μ 为 Möbius 函数†)的零点. $F_{\mathrm{m}}(X)$ 的最高次项的系数为 1, 其他的系数都是有理整数. $F_{\mathrm{m}}(X)$ 称为**分圆多项式** (英 cyclotomic polynomial 德 Kreisteilungspolynom). 例如, $F_{12}(X) = (X^{12} - 1)(X^2 - 1)/(X^6 - 1)(X^4 - 1) = X^4 - X^2 + 1$.

在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 中添加 1 的 m 次原根 $\zeta_{\mathrm{m}} = \exp 2\pi i/\mathrm{m}$ 后得到的数域 $K_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{Q}(\zeta_{\mathrm{m}})$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 上的 $\varphi(\mathrm{m})$ 次 Galois 扩域,其 Galois 群 G 是与 $\boldsymbol{Z}/\mathrm{m}\boldsymbol{Z}$ 的不可约剩余类构成的乘法群同构的 Abel 群: $G = \{\sigma_r | \sigma_r(\zeta_{\mathrm{m}}) = \zeta_{\mathrm{m}}^r, (r, \mathrm{m}) = 1\}$. K_{m} 称作 **m 次分圆域**. 一般把 K_{m} (及其子域)通称为**分圆域**或**圆域** (英 cyclotomic field 德 Kreisteilungskörper). 分圆域是有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 的 Abel 扩张. 反之,有理数域上的任意 Abel 扩张都是分圆域 (**Kronecker 定理**, 1853, 1877).

若把 $\mathrm{m} = l_1^{h_1}\cdots l_t^{h_t}$ 表为素数 $l_1, \cdots, l_t$ 的幂积, 则 $K_{\mathrm{m}} = K_{l_1^{h_1}}\cdots K_{l_t^{h_t}}$ 成为合成域. 可以取 $(1, \zeta_{\mathrm{m}}, \zeta_{\mathrm{m}}^2, \cdots, \zeta_{\mathrm{m}}^{\varphi(\mathrm{m})-1})$ 作为 $K_{\mathrm{m}}/\boldsymbol{Q}$ 的最小基. 令 $K_{l_i^{h_i}} = K^{(i)}$ 时, 则共轭差积为 $\mathfrak{D}_{K_{\mathrm{m}}/\boldsymbol{Q}} = \mathfrak{D}_{K^{(1)}/\boldsymbol{Q}}\cdots\mathfrak{D}_{K^{(t)}/\boldsymbol{Q}}$; 判别式为 $D_{K_{\mathrm{m}}} = D_{K^{(1)}}^{n_1}\cdots D_{K^{(t)}}^{n_t}$ $(n_i = \varphi(\mathrm{m})/\varphi(l_i^{h_i}))$. 在 $\mathrm{m} = l^h$ 的情形, 判别式为 $D_{K_{\mathrm{m}}} = \pm l^a (a = l^{h-1}(hl - h - 1))$, 这里的 $\pm$ 符号, 当 $l^h = 4$ 或 $l \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ 时为 $-$, 其他情形为 $+$. 即

$$D_{K_{\mathrm{m}}} = \left(\sqrt{-1}\mathrm{m}\Big/\prod_{\mathfrak{p}|\mathrm{m}}\mathfrak{p}^{1/(\mathfrak{p}-1)}\right)^{\varphi(\mathrm{m})}.$$

因此, 假设 $(2, \mathrm{m}) = 1$ 或 $4|\mathrm{m}$, 则当且仅当素数 $\mathfrak{p}$ 是 m 的因子时, $\mathfrak{p}$ 才在 $K_{\mathrm{m}}/\boldsymbol{Q}$ 上分歧. 特别当 $\mathrm{m} = l^h$, $\mathrm{m} > 2$ 时,分歧素数只有 l, 且 $(l) = \mathfrak{l}^{\varphi(\mathrm{m})}(N(\mathfrak{l}) = l)$. $\mathfrak{l}$ 可具体地由 $\mathfrak{l} = (1 - \zeta_{\mathrm{m}})$ 给出. 对 $l \neq 2$ 的情形, 分歧常数 $v_i (i = 1, 2, \cdots)$

为 l^i-1，分歧域是 K_l, K_{l^2}, $\cdots$. 对 $l=2$ 的情形(设 $h\geqslant 3$)，分歧常数为 1, 3, 7, …, 分歧域为 $\boldsymbol{Q}$, K_4, K_8, $\cdots$.

一般地，在 $K/\boldsymbol{Q}$ 中，素数 $\mathfrak{p}(\mathfrak{p}\nmid m)$ 可分解为 $(p)=\mathfrak{p}_1\cdots\mathfrak{p}_g(N(\mathfrak{p}_i)=p^f, fg=\varphi(\mathfrak{m}), i=1,\cdots,g)$，且 $\mathfrak{p}$ 的次数 f 是使 $p^f\equiv 1 \pmod m$ 成立的 f 中的最小正整数，即 p 在 $K_{\mathfrak{m}}/\boldsymbol{Q}$ 中的分解形式由 p 的属于 mod $\mathfrak{m}$ 的不可约剩余类决定.

分圆域 $K_{\mathfrak{m}}$ 的类数，可用 Dedekind ζ 函数的残数进行计算(例如→ Hilbert[6]或高木貞治[1])，但这里举出 $\mathfrak{m}=l$(素数)时的公式. 设 r 为 mod l 的一个原根†，对于 $\zeta=\exp 2\pi i/l$，令

$$\varepsilon=\varepsilon(\zeta)=\left(\frac{1-\zeta^r}{1-\zeta}\,\frac{1-\zeta^{-r}}{1-\zeta^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 ε 为 K_l 的单元. 用 $\zeta^\sigma=\zeta^r$ 定义 Galois 群的元 σ，令 $\varepsilon_i=\varepsilon^{\sigma^i}(i=0,1,\cdots)$，则 ε_0, ε_1, $\cdots$, $\varepsilon_{\rho-1}(\rho=(l-3)/2)$ 是乘法独立的单元. 即单元基准 $R[\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_\rho]=E\neq 0$. $(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{\rho-1})$ 称为**分圆单元** (德 Kreiseinheit). K_l 的类数 $h=h_1h_2$ 为两个整数的乘积. 此处，h_2 是 K_l 的实子域 $K_l'=\boldsymbol{Q}(\zeta+\zeta^{-1})$ 的类数. E. E. Kummer 将 h_1 称为**第一因子**(first factor)，h_2 称为**第二因子** (second factor). 设 $\boldsymbol{Z}/l\boldsymbol{Z}$ 的不可约剩余类的乘法特征标为 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_{l-1}$，其中如果满足 $\chi_j(-1)=-1$ 的 $j=1,\cdots,\rho+1$，则

$$h_1=(-1)^{\rho+1}\prod_{i=1}^{\rho+1}\left(\sum_{j=1}^{l-1}j\chi_i(j)\right)\Big/(2l)^\rho,$$

$$h_2=\frac{|E|}{R_0}$$

(Kummer, 1850). 这里设 R_0 为 K_l' 的单元基准. 因为分圆单元属于 K_l'，所以 K_l' 的类数 h_2，与在 K_l' 的单元群中由 ± 1, ε_0, $\cdots$, $\varepsilon_{\rho-1}$ 生成的子群的指数相等.

如果 $l|h$，则 $l|h_1$. 由于 h_1 可以简单计算出来，因此 $l|h$ 成立与否容易判定. 当 $l\nmid h$ 时，l 称为**正则的** (regular) (Kummer). 例如 $l<100$ 的非正则数只有 $l=37, 59, 67$ (→ Fermat 问题). 在 $\mathfrak{m}=l^{n+1}$ 的情形，设 $K_{\mathfrak{m}}$ 的类数的 l 分量为 l^{e_n}，当 n 充分大时，e_n 可用与 n 无关的整数 λ,μ,ν 表示: $e_n=\lambda n+\mu l^n+\nu$ (岩沢健吉, Bull. Amer. Math. Soc., **65**(1959)). 且在 $l\leqslant 4001$ 的情形，已证实 $\mu=0$ (岩沢-C. C. Sims, J. Math. Soc. Japan, **18**(1966)) 并且在 $l<30{,}000$ 的情形，已由 W. Johnson 证实 (Math. Comp., **29** (1975)). 特别是，$e_n>0$ 的充分必要条件是 l 能整除 K_0 的类数 (Ph. Furtwängler, 1911).

根据 Kronecker 定理，二次域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\mathfrak{m}})$(但 $\mathfrak{m}$ 不具有平方因子)也是一种分圆域. 若应用 Gauss 和†的公式，则 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\mathfrak{m}})\subset\boldsymbol{Q}(\zeta_{|d|})$($d$ 为 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{\mathfrak{m}})$ 的判别式). 所以二次域类数的计算和二次(剩余)的互反律†的证明，都可以从分圆域的理论推导出来.

【Kummer 扩张的数论】 代数数域 k 包含 1 的 n 次原根 ζ_n 时，k 的 Kummer 扩张†$K=k(\sqrt[n]{\mu})(\mu\in k)$ 是 k 的循环扩张. 在 K/k 中分歧的 k 的素理想 $\mathfrak{p}$，只限于是 n 或 μ 的因子. 特别当 $\mathfrak{p}\nmid n$, $\nu_{\mathfrak{p}}(\mu)\not\equiv 0 \pmod n$ 时，则 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 中分歧. 和 μ 互素的素理想 $\mathfrak{p}$，在 K/k 中可分解成相异的素理想数 $\mathfrak{P}_1,\cdots,\mathfrak{P}_n$ 的积 $E(\mathfrak{p})=\mathfrak{P}_1\cdots\mathfrak{P}_n$ 的充分必要条件是，对于任意正整数 m, $\mu\equiv\xi^n \pmod{\mathfrak{p}^m}$ 存在解 $\xi\in\mathfrak{o}$. 特别当 n 不能为 $\mathfrak{p}$ 整除时定理只要 $m=1$ 的条件就够了.

一般地，对于 $\mu\in\mathfrak{o}$ 存在某个 $\xi\in\mathfrak{o}$，有

$$\mu\equiv\xi^n \pmod{\mathfrak{p}}$$

成立时，μ 称为模 $\mathfrak{p}$ 的 **n 次幂剩余** (residue of the n-th power). k 的素理想 $\mathfrak{p}$，在 $\mathfrak{p}\nmid n$, $\nu_{\mathfrak{p}}(\mu)=0$ 时，如果 f 是使 μ^f 为模 $\mathfrak{p}$ 的 n 次幂剩余的最小正整数，则 $\mathfrak{p}$ 在 K 中可以分解成 $E(\mathfrak{p})=\mathfrak{P}_1\cdots\mathfrak{P}_g(N_{K/k}(\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{p}^f, i=1,2,\cdots,g)$.

【幂剩余符号】 设 $k\ni\zeta_n$，当 $\mathfrak{p}$ 与 n 和 $\alpha(\in k)$ 均互素时，存在 r 使

$$\alpha^{(N(\mathfrak{p})-1)/n}\equiv\zeta_n^r \pmod{\mathfrak{p}}$$

成立，将它以

$$\zeta_n^r=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n$$

表示时，称为 n 次**幂剩余符号**（power-residue symbol）（Kummer）. 将这个定义加以推广，对于与 $k(\sqrt[n]{\alpha})/k$ 的相对判别式互素的 k 的分数理想 $\mathfrak{b}$，一般地，使用 Artin 符号†$((K/k)/\mathfrak{b})$，通过

$$(\sqrt[n]{\alpha})^{\sigma}=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)_n\sqrt[n]{\alpha},\ \sigma=\left(\frac{K/k}{\mathfrak{b}}\right)$$

来定义 n 次幂剩余符号 $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}\right)_n$. 在这个符号有定义的情形下，下式

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}\right)_n=\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}_1}\right)_n\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{b}_2}\right)_n,$$

$$\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{\mathfrak{b}}\right)_n=\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{b}}\right)_n\left(\frac{\alpha_2}{\mathfrak{b}}\right)_n$$

成立. 特别是，α 为模 $\mathfrak{p}$ 的 n 次幂剩余的充分必要条件是 $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n=1$；用 $n=2$，$k=\boldsymbol{Q}$，$\mathfrak{p}\neq 2$ 的情形下，它与在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 中的二次剩余†符号是一致的.

【幂剩余符号的互反律】 与二次剩余互反律相类似的公式对于 n 次幂剩余也有各种形式的结果(F. G. M. Eisenstein, Kummer, Furtwängler, 高木, Artin, Hasse). 构成这些公式的基础是 Artin 的一般互反律(→类域论).

作为**互反律**（law of reciprocity）的一种形式，设 (i) $n=l$（素数），$\alpha,\beta\in k$，α 全正，(ii) 如果 $\nu_{\mathfrak{p}}(\alpha)\not\equiv 0\pmod l$，则 $\nu_{\mathfrak{p}}(\beta)\equiv 0\pmod l$，如果 $\nu_{\mathfrak{p}}(\beta)\not\equiv 0\pmod l$，则 $\nu_{\mathfrak{p}}(\alpha)\equiv 0\pmod l$，(iii)设 $\alpha\equiv 1\pmod l$，$\beta\equiv 1\pmod{(1-\zeta_l)}$，则

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_l=\zeta_l^a,$$

$$a=Tr_{K/Q}\left(\frac{\alpha-1}{l}\,\frac{\beta-1}{1-\zeta_l}\right)$$

(Hasse, 1924). 这个公式对于 l 次分圆域 k 来说包含了 Eisenstein 的结果 (1850). 还有，作为**补余律**（complementary law）的一个形式，设 $\alpha(\in k)$ 全正，$\alpha\equiv 1\pmod l$，则

$$\left(\frac{\zeta_l}{\alpha}\right)_l=\zeta_l^b,\qquad b=Tr_{K/Q}\left(\frac{\alpha-1}{l}\right);$$

还有，如果 $\alpha\equiv 1\pmod{(1-\zeta_l)}$，则

$$\left(\frac{l}{\alpha}\right)_l=\zeta_l^c,\ c=Tr_{K/Q}\left(\frac{\alpha-1}{l(1-\zeta_l)}\right);$$

$$\left(\frac{1-\zeta_l}{\alpha}\right)_l=\zeta_l^d,$$

$$d=-Tr_{K/Q}\left(\frac{\alpha-1}{l(1-\zeta_l)}\right)$$

(Hasse, 1924).

【范数剩余】 设 $\mathfrak{m}$ 为 k 的一个整除子，β 为与 $\mathfrak{m}$ 互素的 k 的元素. 在相对代数数域 K/k 中，如果在 k 中有与 $\mathfrak{m}$ 互素的元素 B，使

$$\beta\equiv N_{K/k}(B)\pmod{\mathfrak{m}},$$

则称 β 为模 $\mathfrak{m}$ 的 K/k 的**范数剩余**（norm-residue）. 设 $\mathfrak{m}=\prod_i\mathfrak{p}_i^{e_i}\prod_j\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$（其中 $\mathfrak{p}_i$ 为有限素除子，$\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$ 为无限素除子，$e_i>0$），则所谓 $\beta\equiv N_{K/k}(B)\pmod{\mathfrak{m}}$ 和下面的命题等价：对于每个 i，$\beta\equiv N_{K/k}(B)\pmod{\mathfrak{p}_i^{e_i}}$，并且对于实 $\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$，其到 K 的扩张为虚扩张时，则 $\beta^{(j)}>0$.

对于 k 的有限素除子 $\mathfrak{p}$，当取 c 适当大时，如果 β 为模 $\mathfrak{p}^c$ 的范数剩余，则对于所有的 $e>c$，β 为模 $\mathfrak{p}^e$ 的范数剩余. 对于这种 c 的最小值 ($c\geqslant 0$)，将 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}^c$ 称为 K/k 的（关于范数剩余的）$\mathfrak{p}$ **前导子**（英 conductor 德 Führer）. 如果 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 中非分歧，则有 $c=0$，即与 $\mathfrak{p}$ 互素的任意 $\beta\in k$ 是 mod $\mathfrak{p}^e$ 范数剩余. 对于分歧的 $\mathfrak{p}$，设 $f_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}^c$，如果 K/k 为 Galois 扩张，则 c 不大于

$$\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{|V_\rho|}{|V_0|}(v_{\rho+1}-v_\rho)=\sum_{i=0}^{v_r}\frac{|V^{(i)}|}{|V_0|}.$$

特别是，对于 Abel 扩张 K/k，上述值为整数值，并且恰好等于 c (Hasse, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1934). 例如，对于 l^h 次分圆域，如将已求出的值代入，则得 $\mathfrak{f}_l=l^h$. 另外，关于 k 的无限素除子 $\mathfrak{p}_\infty$，当 $\mathfrak{p}_\infty$ 为实，它到 K 的扩张为虚时，则以 $\mathfrak{f}_\infty=\mathfrak{p}_\infty$ 定义对 K/k 的前导子. 对其他的 $\mathfrak{p}_\infty$ 值，则令 $\mathfrak{f}_\infty=1$（→局部域的数论[局部类域论]).

【范数剩余符号】 对于 Abel 扩张 K/k，把

$$\mathfrak{f}=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$$

(其中 $\mathfrak{p}$ 遍及 k 中全部有限及无限素除子)称为 K/k **的前导子**(→类域论). 对于 $\alpha\in k(\alpha\neq 0)$, 取 $\alpha_0\in k$, 使 $\alpha/\alpha_0\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}_\mathfrak{p})$, $\alpha_0\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mathfrak{f}\mathfrak{f}_\mathfrak{p}^{-1})$, 令 $(\alpha_0)=\mathfrak{p}^a\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{b}$ 互素. 这时, $\mathfrak{b}$ 和相对判别式 $\mathfrak{d}_{K/k}$ 互素. 用 Artin 符号,令

$$\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{K/k}{\mathfrak{b}}\right)\quad(\in G).$$

这个值是与参数 α_0 的选取无关而唯一决定的. 此式左边的符号称为**范数剩余符号** (norm-residue symbol) (Hasse, J. Reine Angew. Math., **162** (1930)). 特别当 $\mathfrak{p}_\infty^{(j)}$ 为实无限素除子, 它到 K 的扩张 $\mathfrak{P}_\infty^{(j)}$ 为虚时,相应于 α 的共轭数 $\alpha^{(j)}>0$ 或者 <0, 分别有

$$\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}_\infty^{(j)}}\right)=1\ 或者=\sigma$$

成立. 其中 σ 是由 K 关于 $\mathfrak{P}_\infty^{(j)}$ 的完备域 $\mathbf{C}$ 中由复共轭所诱导出来的 K/k 的自同构.

范数剩余符号有如下的性质:

1) $\left(\frac{\alpha\alpha',K/k}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\alpha',K/k}{\mathfrak{p}}\right)$.

2) 如果 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 非分歧,则

$$\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)=\left(\frac{K/k}{\mathfrak{P}}\right)^{-\nu_\mathfrak{p}(\alpha)}.$$

3) α 为模 $\mathfrak{f}_\mathfrak{p}$ 的 K/k 的范数剩余的充分必要条件为

$$\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)=1.$$

4) **乘积公式** (product formula) (Hasse). 当 $\mathfrak{p}$ 遍及 k 所有的有限及无限素除子时, 则

$$\prod_\mathfrak{p}\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)=1.$$

5) $\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)$的值: 如果 α 在 k 的所有数 $(\neq 0)$ 中变化, 则 $\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ 的值在 $\mathfrak{p}$ 的整个分解群中相应地变化; 如果 α 在和 $\mathfrak{p}$ 互素的数集中变化, 则 $\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ 的值在 $\mathfrak{p}$ 的惯性群中相应地变化; 如果 α 在满足 $\alpha\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^m)$ $(u_\rho+1\leqslant m\leqslant u_{\rho+1})$ 的 α 的集合中变化, 则 $\left(\frac{\alpha,\ K/k}{\mathfrak{p}}\right)$ 的值在 $\mathfrak{p}$ 的分歧群 V_ρ 中相应地变化 $(\rho=0, 1, \cdots, r)$ (Hasse, 弥永昌吉, 1933) (→局部域的数论[局部类域论]).

【Hilbert 的范数剩余符号】 Hilbert (1897) 对二次域引进的符号也可推广到 1 的 n 次原根 $\zeta_n\in k$ 的情形. 对于 $\alpha,\beta\in k(\alpha\neq 0,\beta\neq 0)$ 及 k 的素除子 $\mathfrak{p}$, 将 1 的 n 次幂根 $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n$, 用范数剩余符号是由

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n\sqrt[n]{\beta}=(\sqrt[n]{\beta})^\sigma,$$

$$\sigma=\left(\frac{\alpha,\ k(\sqrt[n]{\beta})}{\mathfrak{p}}\right)$$

来定义的. 这个符号 $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n$ 称为 **Hilbert 范数剩余符号** (Hilbert norm-residue symbol). 对于 $\alpha,\beta,\cdots\in k$, 有

1) $\left(\frac{\alpha\alpha',\ \beta}{\mathfrak{p}}\right)_n=\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n\left(\frac{\alpha',\ \beta}{\mathfrak{p}}\right)_n$,

2) **互反律** (law of reciprocity):

$$\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n=\left(\frac{\beta,\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1},$$

3) **乘积公式** (product formula):

$$\prod_\mathfrak{p}\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n=1,$$

以及其它的公式成立 (Hilbert, Furtwängler, 高木, Artin, Hasse). 关于范数剩余符号、幂剩余符号、Hilbert 的范数剩余符号的种种性质, 在 Hasse 的报告([8])中有详细的介绍.

【密度定理】 对于 k 的素理想的集合 M, 如果

$$\lim_{s\to 1+0}\sum_{\mathfrak{p}\in M}\frac{1}{(N(\mathfrak{p}))^s}\Big/\log\frac{1}{s-1}$$

存在,则将这个值称为 M 的**密度** (density). k 的所有素理想的集合的密度为 1. 另外, 对于模整除子 $\mathfrak{m}$ 的理想群 H, $\mathfrak{I}(\mathfrak{m})\ (\mathrm{mod}\ H)$ 的各陪集的密度为 $1/(\mathfrak{I}(\mathfrak{m}):H)$. 特别当 H 是射线 $S(\mathfrak{m})$ 时, mod $\mathfrak{m}$ 的每个陪集均含有无限多的素理想 $\mathfrak{p}$ (算术级数的素数定理[†]在代数数域的推广).

现在, 设 K/k 为 Galois 扩张, 设 k 的素理

想 $\mathfrak{p}$ 的素因子 $\mathfrak{P}$ 的 Frobenius 置换，属于 K/k 的 Galois 群 G 的某共轭类 C，这样的 $\mathfrak{p}$ 全体设为 $M(C)$，则 $M(C)$ 的密度等于 $|C|/|G|$ (Чеботарев **的密度定理** (density theorem)，Math. Ann., **95** (1926)). 另外，在 n 次 Galois 扩张 K/k 中，将 Galois 群 G 的元 σ，以相对共轭域 $K^{(1)}, \cdots, K^{(n)}$ 的置换 π 表示时，则 π 为 $f_1, f_2, \cdots, f_r$ 次的循环†的积（因此 $f_1+\cdots+f_r=n$). 设使 π 成为这种循环之积的 σ 全体为 $C(f_1, \cdots, f_r)$，则在 K/k 中能分解为相对次数为 $f_1, \cdots, f_r$ 的 r 个相异素因子的素理想的集合 $M(f_1, f_2, \cdots, f_r)$ 的密度等于 $|C(f_1, \cdots, f_r)|/|G|$ (Artin, Math. Ann., **89** (1923)).

【与局部域的数论的关系】 代数数域 k 与局部域 $k_{\mathfrak{p}}$（→局部域的数论）的关系的研究是极为有用的. 例如，在相对代数数域 K/k 中，若 k 的素理想 $\mathfrak{p}$ 在 K 中分解为 $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1^{e_1}\cdots\mathfrak{P}_g^{e_g}$ $(N_{K/k}(\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{p}^{f_i}$，则 $[K_{\mathfrak{P}_i}:k_{\mathfrak{p}}]=e_i f_i$，且 $K\otimes_k k_{\mathfrak{p}}\cong K_{\mathfrak{P}_1}+\cdots+K_{\mathfrak{P}_g}$（直和）. 另外，关于共轭差积有（$\mathfrak{D}_{K/k}$ 的 $\mathfrak{p}$ 分量）$=\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{D}_{K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}}$ 成立. Galois 扩张 K/k 的范数剩余的 $\mathfrak{p}$ 前导子 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}^c$ 同 $K_{\mathfrak{P}}/k_{\mathfrak{p}}$ 的前导子 $\mathfrak{p}^c$ 的幂指数相等. 对于局部域，mod $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ 的范数剩余与 $K_{\mathfrak{P}}$ 的范数本身是一致的. 因此，关于在局部域中的范数剩余的精确结果，在任何的代数数域中都是适用的.

还有，应用代数数域的伊代尔群，能够推导出代数数域的理论(例如，理想类群，单元群，ζ 函数等)（→阿代尔与伊代尔).

【代数数域的数论的历史】 最早将整数概念推广，并对某种代数整数进行了研究的是 C. F. Gauss (1832). 随后经过 G. L. Dirichlet, E. E. Kummer 等的研究，R. Dedekind 在数论中引入了理想的概念 ([4]) (1871). L. Kronecker 对于代数数域的数论基础则是采用了不同的方法来奠定的 ([5]) (1882). Dirichlet 证明了单元定理，又最先将解析方法引进数论来进行二次域的类数计算. H. Minkowski 将格点理论应用于数论（→数的几何），K. Hensel 又引进了 p-adic 数方法（→局部域的数论). D. Hilbert 的数论报告 ([6]) (1897) 及 H. Hasse 的报告 ([8])，将一直到当时的主要成果作了综述，特别是前者以 Hilbert 的 Galois 扩张域的数论为中心，后者以高木貞治，E. Artin 的类域论成果为中心（→类域论). 此外，约从 1950 年以后，许多人在数论中引入伊代尔及阿代尔概念并成功地应用了群的上同调方法（→阿代尔与伊代尔).

【参】 [1] 高木貞治，代数的整数論，岩波，1948; [2] 黒田成勝-久保田富雄，整数論，朝倉，1963; [3] C. F. Gauss, Theoria residuorum biquadraticorum, Werke Bd. 2, Göttingen, 1863; [4] R. Dedekind, Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, 第四版, 1894, Supplement XI, (Werke 3); [5] L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der allgemeinen algebraischen Grösse, J. Reine Angew. Math., **92**(1882), 1—122, (Werke 2); [6] D. Hilbert, Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper, 1897, (Werke I. Springer, 1932); [7] E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, Akademische Verlag., 1923 (Chelsea, 1970); [8] H. Hasse, Bericht über die neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jber. Deutsch. Math. Verein., **35** (1926), 1—55, **36**(1927), 233—311, 1930; [9] H. Weyl, Algebraic theory of numbers, Ann. Math. Studies, Princeton, 1940; [10] H. Hasse, Zahlentheorie, Akademie-Verlag, 第二版, 1963; [11] E. Weiss, Algebraic number theory, McGraw-Hill, 1963; [12] S. Lang, Algebraic numbers, Addison-Wesley, 1964; [13] E. Artin, Algebraic numbers and algebraic function, Lecture notes, Princeton Univ., 1950—51; [14] 弥永昌吉，数論，岩波，1969 (英译本: Theory of numbers, North-Holland, 1975); [15] A. Weil, Basic number theory, Springer, 1967; [16] J. W. S. Cassels-Fröhlich (eds.), Algebraic number theory, Academic Press, 1967.

类域论 [英 class field theory 法 théorie du corps de classes 德 Klassenkörpertheorie 俄 теория поля классов 日 類体論] 【发展历史】 **类域** (德 Klassenkörper) 的概念是 D. Hilbert 首先引进的 (1898). 对于代数数域 k 及其上的 Galois 扩张 K，如果 k 中的一次素理想 $\mathfrak{p}$ (即绝对范数†为素数的素理想) 在 K 中能分解为 K 的一次素理想的积，当且仅当 $\mathfrak{p}$ 是主理想†时，曾称 K 为 k 上的类域，现在称为**绝对类域** (absolute class field). Hilbert 关于绝对类域提出了如下定理 1)—4) 及后面的主理想定理等几个猜想，并在某种特殊情形下给出了证明. 后来，Ph. Furtwängler 完成了这些定理的

证明 (Math. Ann., **63** (1907)). 1) 任意代数数域 k 上的类域存在且唯一. 2) K/k 是 Abel 扩张†, 且其 Galois 群†与 k 的理想类群†同构. (从而相对次数 $[K:k]=n$ 和 k 的类数†相等.) 3) K/k 的共轭差积†为 1. (因而 K/k 中没有分歧的素理想.) 4) 对于 k 的素理想 $\mathfrak{p}$, 如果 $\mathfrak{f}$ 是最小正整数使 $\mathfrak{p}^{\mathfrak{f}}$ 成为主理想, 则 $\mathfrak{p}$ 在 K 中分解为 $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_g(N_{K/k}(\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{p}^{\mathfrak{f}}, \mathfrak{f}_g=h)$.

Hilbert 的类域的想法, 虽然是和一元代数函数理论的研究相关联而产生的, 但作为代数数域的代数理论并不是最后结果. 高木貞治将类域的定义作了推广, 并证明代数数域 k 的任何 Abel 扩张 K 都可表成为 k 上的类域, 因此通过类域论, 一般的 Abel 扩张 K/k 的性质就非常明显了 (Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **41**(1920), (9)). 这篇论文还同时解决了前个世纪以来的悬案, 即关于虚二次域 Abel 扩张的 Kronecker 问题 (→复数乘法论). 类域论是数学诸理论中, 体系最完美的一种. 后来, E. Artin 又证明了一般互反律, 使类域论具有更加完美的形式 (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **5** (1927)). H. Hasse, Artin, J. Herbrand, C. Chevalley 等还对类域论的证明作了简化的尝试, 特别是 Chevalley 引进了新的伊代尔的概念(→阿代尔与伊代尔), 成功地使证明算术化了 (Ann. of Math., **41** (1940)).

另外, 还有把类域论推广到非 Abel 扩张的种种尝试, 我们这里只提一下志村五郎 [19] 及伊原康隆 [20] 的结果.

【类域的定义】 要对一般的类域进行定义, 必须将 k 的理想类群的概念加以推广(→代数数域的数论[乘法同余]). 设 k 中与 $\mathfrak{m}$ 互素的分数理想全体构成的乘法群为 $A(\mathfrak{m})$, 模 $\mathfrak{m}$ 的射线†为 $s(\mathfrak{m})$, 固定商群 $A(\mathfrak{m})/s(\mathfrak{m})$ 的子群 $H(\mathfrak{m})/s(\mathfrak{m})$. 那么, k 的扩张 K 称为理想群 $H(\mathfrak{m})$ 的**类域** (class field), 如果 K 是 k 的 Galois 扩张, k 中与 $\mathfrak{m}$ 互素的一次素理想 $\mathfrak{p}$ 能够分解为 K 的一次素理想的积当且仅当 $\mathfrak{p}\in H(\mathfrak{m})$. Hilbert 的(绝对)类域无非就是 $\mathfrak{m}=(1)$, 而 $H(\mathfrak{m})$ 是由全体主理想构成的群.

k 的理想群 H 唯一地对应于类域 K/k. H 的前导子† $\mathfrak{f}$ 称为 K/k 的**前导子** (英 conductor 德 Führer). 对应于类域 K/k 的理想群 H 表示, 在理想类群 $A(\mathfrak{f})/S(\mathfrak{f})$ 中, 含有(与 $\mathfrak{f}$ 互素的) K 的理想 $\mathfrak{A}$ 的相对范数† $N_{K/k}(\mathfrak{A})$ 的类的全体. 一般地, 对于相对 Galois 扩张 K/k, 可以证明, 假如 k 的理想群 $H(\mathfrak{m})$ 是 $A(\mathfrak{m})/S(\mathfrak{m})$ 中包含 $N_{K/k}(\mathfrak{A})$ 的类的全体, 则指数 $h=(A(\mathfrak{m}):H(\mathfrak{m}))$ 不超过次数 $n=(K:k)$. 特别是, 选取适当的模 $\mathfrak{m}$, 使得 $h=n$ 成立当且仅当 K/k 为 $H(\mathfrak{m})$ 的类域, 因而也可以把 $h=n$ 成立这个条件作为 K/k 为 H 的类域的定义.

关于类域有如下的基本定理.

【基本定理】 1) **主定理** (main theorem). 任意的相对 Abel 域 K/k 是 k 的某个理想群 H 的类域. 2) **存在定理** (existence theorem). 对于任意的理想群 $H(\mathfrak{m})$, 存在 $H(\mathfrak{m})$ 的类域. 3) **合成定理** (composition theorem). 设 K_1, K_2 为 H_1, H_2 的类域, 则合成域 K_1K_2/k 为 $H_1\cap H_2$ 的类域. 因此, $K_1\supset K_2$ 成立的充分必要条件是 $H_1\subset H_2$. 4) **唯一性定理** (unicity theorem). H 的类域是唯一的. 5) **同构定理** (isomorphism theorem). K/k 的 Galois 群与 $A(\mathfrak{m})/H(\mathfrak{m})$ 同构, 特别是, 类域都是相对 Abel 域. 6) **分解定理** (decomposition theorem). 对于类域 K/k, 与前导子 $\mathfrak{f}$ 互素的 k 的素理想 $\mathfrak{p}$, 如 f 为最小正整数使 $\mathfrak{p}^f$ 属于 $H(\mathfrak{f})$, 则在 K/k 中, 可分解为 $\mathfrak{p}=\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots\mathfrak{P}_g(N_{K/k}(\mathfrak{P}_i)=\mathfrak{p}^f, f_g=n)$. 7) **前导子分歧定理** (conductor-ramification theorem). $\mathfrak{f}$ 由 K/k 中的分歧素除子构成, 且包括所有的分歧素除子. 设 $\mathfrak{f}=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}=\mathfrak{p}^c$, 则 $\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}$ 与范数剩余的 $\mathfrak{p}$ 前导子是一致的, c 的值可以用分歧的素除子的分歧群†的阶数及分歧常数来具体表示 (→代数数域的数论[范数剩余]). 8) 对于在类域 K/k 中分歧的素理想 $\mathfrak{p}$, 设 $H_{\mathfrak{p}}$ 为含有 H 且其前导子与 $\mathfrak{p}$ 互素的最小理想群, 记 $(H_{\mathfrak{p}}:H)=e$, 并且如果 $\mathfrak{f}$ 为最小正整数, 使得 $\mathfrak{p}^f\in H_{\mathfrak{p}}$, 那么在 K/k 中可分解为 $\mathfrak{p}=(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots$

$\mathfrak{P}_g)^e$ ($N_{K/k}(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}^f$). 9) **平移定理** (translation theorem). 如果 K/k 是 k 的理想群 $H(\mathfrak{f})$ 的类域，那么关于 k 的任意扩张 Ω，则 $K\Omega/\Omega$ 是满足 $N_{\Omega/k}(\mathfrak{b}) \in H(\mathfrak{f})$ 的与 $\mathfrak{f}$ 互素的理想 $\mathfrak{b}$ 全体构成的 Ω 理想群 H^* 的类域. 特别有，$K\Omega/\Omega$ 的前导子为 K/k 的前导子的因子. 10) (**Artin 的**) **一般互反律** (general law of reciprocity). 当 K/k 为类域，$\mathfrak{f}$ 为 K/k 的前导子时，与 $\mathfrak{f}$ 互素的 k 的理想 $\mathfrak{a}$ 的 Artin 符号[†]记为 $\left(\frac{K/k}{\mathfrak{a}}\right) = (K/\mathfrak{a})$. 如果把 k 的理想 $\mathfrak{a} \in A(\mathfrak{f})$ 对应于 K/k 的 Galois 群 G 的元素 $(K/\mathfrak{a})$，则 $A(\mathfrak{f})/H(\mathfrak{f})$ 与 G 同构. 特别是，$H(\mathfrak{f})$ 就是由满足 $(K/\mathfrak{a}) = 1$ 的所有理想 $\mathfrak{a}$ 所构成的群. 根据这个定理，可以推导出迄今已经知道的所有互反律 (→ 代数数域的数论).

并且，根据上述诸定理，二次域、分圆域和 Kummer 扩张理论等，都可以统一地论述.

【主理想定理】 设 K/k 为绝对类域，则将 k 的任意理想扩张到 K 时，就都成为主理想. 这个定理称为**主理想定理** (principal ideal theorem) 或称为**单项化定理**. 这个定理是 Hilbert 提出的猜想，Artin 把它表成为群论的问题，后为 Furtwängler 通过复杂的计算加以证明的 (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **10**(1934)). 其后，弥永昌吉给出了简单的证明 (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **10** (1934)). 这个结果还可推广成下述的一般主理想定理: 设 Abel 扩张 K/k 为 $S(\mathfrak{f})$ 的类域，当 $\mathfrak{f} = \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{D}$ 为 K/k 的共轭差积[†]) 时，则在 K/k 中非分歧的 k 的素理想到 K 的扩张属于 $S(\mathfrak{F})$ (弥永, Jap. J. Math., **7**(1930)). 当 $\mathfrak{F} = \Pi\mathfrak{P}^v$ 时，v 的值等于分歧常数[†] $v_r + 1$ (→ 代数数域的数论 [Galois 域的数论]). 另外，关于绝对类域 K/k，k 的理想 $\mathfrak{a}$ 在 K 中如表示为 $\mathfrak{a} = (\Theta(\mathfrak{a}))$ 时，则 $\varepsilon(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \Theta(\mathfrak{a})\Theta(\mathfrak{b})^{\sigma(\mathfrak{a})}\Theta(\mathfrak{ab})^{-1} \in k$ (其中 $\sigma(\mathfrak{a}) = (K/\mathfrak{a})$) 成立 (淡中忠郎, Ann. of Math., **67**(1958)). 这个结果也可推广到 $S(\mathfrak{f})$ 的情形.

【种的理论】 一般地，对于某一正规扩张 K/k，(与 $\mathfrak{m}$ 互素的) 理想 $\mathfrak{A}$ 使得 $N_{K/k}(\mathfrak{A})$ 属于 k 的某理想群 $H(\mathfrak{m})$，所有这种理想构成的 K 的理想群称为 H 的**主种**或**单位种** (英 principal genus 德 Hauptgeschlecht). 此外，由 k 的所有理想所成的群关于主种产生的陪集，称为 H 的**种** (genus). 对于循环扩张 K/k，H 如果是形如 $N_{K/k}(A)(\mathrm{mod}\,\mathfrak{f})$ ($\mathfrak{f}$ 为 K/k 的前导子) 的 k 的理想群，那末 H 的主种是由 $c^{1-\sigma}$ 这样的理想类所构成的 K 的理想群 (其中 σ 为 K/k 的 Galois 群的生成元) (→ 二次域的数论 [种的理论]). 一般地在 Abel 扩张 K/k 的情形，设其前导子为 $\mathfrak{f}$，对于上述 K 的理想 $\mathfrak{F}$，有 $N_{K/k}(S(\mathfrak{m}\mathfrak{F})) = S(\mathfrak{m}\mathfrak{f})$ 成立，其中，$\mathfrak{m}$ 是 k 的任意整理想. 特别对于循环扩张 K/k，如果取 k 的理想群为 $H = S(\mathfrak{m}\mathfrak{f})$，则 H 的主种是由 $B^{1-\sigma}$ 模 $S(\mathfrak{m}\mathfrak{f})$ 的类所构成的 K 的理想群 (Herbrand, 弥永, J. Reine Angew. Math., **171** (1934)).

【类域塔问题】 Furtwängler 提出了如下的问题: 在已知的基域 k 上，如构成 $k = k_0 \subset k_1 \subset k_2 \subset \cdots$ (k_i 为 k_{i-1} 上的绝对类域) 时，$K = \cup k_n$ 是否是 k 的无限次扩张? 这称为**类域塔** (class field tower) 问题. 关于这个问题，Artin 指出: 对于 n 次扩张 F/k，如总有判别式 $|d_{F/k}| > (\pi/4)^{2r_2}(n^n/n!)^2 > (\pi e^2/4)^n/(2\pi n e^{1/6n})$ 成立，则 K/k 是有限的 ([2]p. 46). 这个问题很长时间未能解决，后来 И. Р. Шафаревич (1964) 证明了: 当扩张次数为一定的素数 p 的幂时，如果在 k 的理想类群的 p 分量的生成元的个数 γ，与 k 的单位群的生成元的个数 ρ 之间，有 $\gamma \geqslant 3 + 2\sqrt{\rho + 2}$ 的关系存在，则 K/k 是无限次的. 例如，在 $p = 2$ 时的虚二次域 $k(\rho = 1)$，如果 $\gamma \geqslant 7$，则 K/k 是无限次的. 例如 $k = Q(\sqrt{-3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19})$. (关于二次域的类数，→ 二次域的数论.)

构造问题. 设 k 为已知代数数域，G 为有限群. 构造问题是问: 是否存在 Galois 扩张 K/k，使得其 Galois 群 Gal (K/k) 同构于 G. 如果 G 是 Abel 群，则这问题可用类域论肯定地解决. 对于 p-群，这个问题于 1937 年由 A. Scholtz 及 H. Reinhardt 肯定地解决了. 对于一般的可解群，这问题于 1954 年为 И. Р

Шафаревич 肯定地解决了 (Изв. Акад. Наук СССР. Сер. Мат. 18).

【代数函数域的类域论及局部类域论】 F. K. Schmidt (1930) 证明了：对于常数域为有限域的单变数代数函数域† k 的 Abel 扩张 K/k，有同样的类域论成立([10])．证明的算术化是守屋美賀雄(1938)完成的．还有局部域上的类域论是由 Hasse 等人证明，以后又由许多人完成的(→局部域的数论)．

【群的上同调和类域论】 为了尝试将类域论的证明进行简化，产生了"Galois 上同调论"，在中山正，G. Hochschild, A. Weil 等人的研究的基础上，Artin 及 J. Tate 在有限群的上同调†理论的基础上，重新构成了类域论([11])如下：

设 G 为有限群，A 是以 G 为作用域的模(或交换乘法群)，则 G 的以 A 为系数群的上同调群† $H^n(G, A)$ 对于 n 为 o 及正负整数 n 都有定义(→同调代数[有限群])．特别是有 $H^0(G, A) \cong A^G/N_G(A)$，其中 A^G 为 A 的全体 G 不变的元素 $N_G(A)$ 为形如 $N_G(a) = \sum_{\sigma \in G} \sigma a (a \in A)$ 全体的元素．特别是对于整数加法群 $\boldsymbol{Z}$，总可由 $\sigma n = n(\sigma \in G, n \in \boldsymbol{Z})$ 定义为 G 模．如果已给 G 模 A, B, C 及 G-双线性映射† $(A, B) \to C$，那末，对于 $\alpha \in H^r(G, A)$, $\beta \in H^s(G, B)$ 可定义上积† $\alpha \smile \beta \in H^{r+s}(G, C)(r, s \in \boldsymbol{Z})$．且对于 G 模 A 和 G 的子群 H，同态 $\mathrm{Res}_{G/H}: H^n(G, A) \to H^n(H, A)$ (限制映射†)及 $\mathrm{Inj}_{H/G}: H^n(H, A) \to H^n(G, A)$ (单射†)对于所有的 $n \in \boldsymbol{Z}$ 有定义．如果 H 是正规子群，那末也可定义同态 $\mathrm{Inf}_{G/H \to G}: H^n(G/H, A^H) \to H^n(G, A)$ (膨胀映射) $(n \geqslant 1)$ (→同调代数[群的上同调论])．

对于任意的代数数域 k 及其任意 n 次 Galois 扩张 K，将其 Galois 群以 $G = G(K/k)$ 表示，则由除 0 之外的 K 的元素构成的乘法群 $K^{\times}$，K 的伊代尔群† J_K，K 的伊代尔类群† C_K 都是以 G 为作用域的交换乘法群．关于类域论的基本关系有：1) $H^1(G, C_K) = \{0\}$; 2) $H^2(G, C_K) \cong \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$．如果适当地确定这个同构，使 $r(\mathrm{mod}\ n)$ 对应于 $\alpha \in H^2(G, C_K)$，α 的**不变量** (invariant) 由 $\mathrm{inv}_{K/k}\alpha = r/n(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z})$ 定义，则下列 i), ii), iii) 成立．首先根据 $\mathrm{inv}_{K/k}\xi_{K/k} = 1/n(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z})$ 定义**标准上同调类** (canonical cohomology class) $\xi_{K/k} \in H^2(G, C_K)$．i) $k \subset l \subset K$, $G = G(K/k)$, $H = G(K/k)$ 时，$\mathrm{Res}_{G/H}\xi_{K/k} = \xi_{K/l}$; ii) 如果 l/k 也是 Galois 扩张，设 $F = G(l/k)$，则 $\mathrm{Inf}_{F/G}\xi_{l/k} = \xi_{K/k}^m (m = [K:l])$; iii) 对于循环扩张 K/k，$\mathrm{inv}_{K/k}\xi_{K/k} = \sum_{\mathfrak{p}} \mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}(\xi_{K/k})_{\mathfrak{p}}$，其中 $\mathrm{inv}_{\mathfrak{p}}$ 为 $\xi_{K/k}$ 的 $\mathfrak{p}$ 分量不变量．根据以上所述，可以得出标准上同调类 $\xi_{K/k}$ 是唯一确定的．在以上准备的基础上，能够根据下面这个定理推导出类域论的其他诸定理．

Tate 定理：将 Galois 扩张 K/k 的 Galois 群设为 G，则得 $\Phi_n: H^{n-2}(G, \boldsymbol{Z}) \cong H^n(G, C_K)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 成立．而且这个同构 Φ_n 是使 $\xi_{K/k} \smile \alpha \in H^n(G, C_K)$ 对应于 $\alpha \in H^{n-2}(G, Z)$ (Ann. of Math., **56** (1952))．

推论 1. 在 $n = 0$ 的情形，$H^{-2}(G, Z) \cong G/[G, G]$ $H^0(G, C_K) \cong C_K/N_{K/k}(C_K)$，所以 $\Phi_0: G/[G, G] \cong C_K/N_{K/k}(C_K)$ 成立．如果应用属于标准上同调类 $\xi_{K/k}$ 的二维闭上链 $\mathfrak{f}(\tau, \sigma)$，则有 $\Phi_0: \sigma(\mathrm{mod}[G, G]) \to \prod_{\tau \in G} \mathfrak{f}(\tau, \sigma)^{-1}(\mathrm{mod} N_{K/k}(C_{K/k}))$ 成立．这个结果是中山，秋月康夫 (Math. Ann., **112** (1936)) 推导出来的．

推论 2. 对于 Abel 扩张† K/k，有 $G \cong C_K/N_{K/k}(C_K)$ (类域论同构定理)．$(\Phi_0)^{-1}$ 具备整体域的范数剩余符号的性质，由此可以推导出 Artin 的一般互反律及范数剩余的诸性质．这样类域论的主要定理，全部可以应用上同调论的方法证明([11], [15])．

因为上述内容也适用于无限次 Abel 扩张，所以 K 上的最大 Abel 扩张 Ω/k 的 Galois 群(付予 Krull 拓扑†)，它与由 k 的伊代尔类群 C_K 对于其单位元的连通分支 D_K 所成的商群 C_K/D_K 是同构而且是同胚的(通过范数剩余符号)．D_K 的结构是 Artin 具体求出的，还有

C_K/D_K 的 Abel 群的结构是由久保田富雄具体求出来的(→阿代尔与伊代尔[阿代尔环与伊代尔群的结构]).

以上的理论,在前述的 1), 2) 加上若干简单性质为公理,能够作为体系而加以发展.这样的体系称为**类构造** (class formation) (Artin).除了已经列举的代数数域、以有限域为系数的单变量代数函数域、局部域之外,在其他各种场合也能建立 Abel 扩张 K/k 的理论,这些都可以被看作是类构造的理论而加以展开的 (河田敬義, Duke Math. J., **22**(1955)). 例如, 1)在以代数闭域为系数域的单变量代数函数域上的非分歧 Abel 扩张 (Tate-河田, Amer. J. Math., **77**(1955)); 2) k 为特征 0, 包含所有的 1 的幂根, 并且对于 k 的任意有限的 Galois 扩张 K, 使 $N_{K/k}(K)=k$ 成立的 Abel 扩张 (即 Kummer 扩张); 3) 特征 p 的域(次数为 p 的幂时) Abel p 扩张 (E. Witt, J. Reine Angew. Math., **176**(1936),佐武一郎-河田, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **7**(1955)); 4) 对于以特征 p 的代数闭域为系数域的单变量代数函数域的非分歧 (其次数为 p 的幂) Abel p 扩张 (Hasse, Witt, Monatsh. Math., **43** (1936), H. L. Schmid, Шафаревич, 河田, 玉河恒夫); 5) 剩余域 o/p 为代数闭域时的局部域 k 的 Abel 扩张 (G. Whaples, J.-P. Serre, Bull. Sci. Math. France, **89** (1961)).

此外, 还建立了关于无限次代数扩张的类域论 (Herbrand, 守屋,森光弥,河田).

【参】 [1] 高木貞治,代数的整数論,岩波,1948; [2]H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper, Jber. Deutsch. Math. Verein, I, **35**(1926), 1—55, Ia, **36**(1927), 231—311, II, (1930)(Physica Verlag, 1965); [3]H. Hasse, Vorlesungen über Klassenkörpertheorie, Univ. Marburg, (讲义录), 1932 (Physica Verlag, 1967); [4] C. Chevalley, Sur la théorie du corps des classes dans les corps finis et les corps locaux, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **2** (1933), 365—476; [5] J. Herbrand, Le dévelopement moderne de la théorie des corps algébriques, Gauthier-Villars, 1936; [6] E. Artin, Algebraic numbers and algebraic functions, Princeton Univ., 1951 (Gordon and Breach, 1967); [7] C. Chevalley, La théorie du corps de classes, Ann. of Math., **41** (1940), 394—418; [8] 淡中忠郎,代数的整数論,共立出版, 1949; [9] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. Japan, **3**(1951), 1—35; [10] F. K. Schmidt, Die Theorie der Klassenkörper über einem Körper algebraischer Funktionen in einer Unbestimmten und mit endlichem Konstantenbereich, S.-B. Phy.-Med. Soz. Erlangen, **62** (1931), 267—284; [11] E. Artin-J. Tate, Class field theory, Harvard, 1951 (Benjamin, 1967); [12] 弥永昌吉, Class field theory notes, Univ. of Chicago, 1961; [13] J.-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1959, [14] J.-P. Serre, Corps locaux, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1962; [15] 河田敬義,代数的整数論,現代数学講座,共立出版, 1957; [16] 弥永昌吉,数論,岩波,1969 (英译本: The theory of numbers, North-Holland, 1975); [17] A. Weil, Basic number theory, Springer, 1967; [18] J. W. S. Cassels-A. Fröhlich (eds.), Algebraic number theory, Academic Press, 1967; [19] G. Shimura (志村五郎), A reciprocity law in nonsolvable extensions, J. Reine Angew. Math., **221** (1966), 209—220; [20] Y. Ihara (伊原康隆), Non-Abelian class fields over function fields in special cases, Actes Congr. Intern. Math., 1970, Nice, Gauthier-Villars, 381—389; [21] Y. Ihara (伊原康隆), Some fundamental groups in the arithmetic of algebraic curves over finite fields, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **72** (1975), 3281—3284; [22] Y. Kawada (河田敬義), Class formations, 1969 Number theory institute, Proc. Symposia in Pure Math., Amer. Math. Soc., **20** (1971), 96—114.

复数乘法论 [英 theory of complex multiplication 法 théorie de la multiplication complexe 德 Theorie der komplexe Multiplikation 俄 Теория комплексных умножений 日 虚数乘法論]

【古典的复数乘法论】 椭圆函数† $f(z)$ 的周期 ω_1 和 ω_2 的比 ω_1/ω_2, 如果是虚二次域 K 的元, 则对于 K 的任意元 λ, $f(z)$ 和 $f(\lambda z)$ 之间存在代数关系. 此时, f 称为具有**复数乘法** (complex multiplication). C. F. Gauss 对于模为 $\sqrt{-1}$ 的 sn 函数†发现了这个关系, 并将它应用于双纽线†的五等分问题. 更一般地, N. H. Abel 证明具有复数乘法的 sn 函数的特殊等分方程能用根式解. L. Kronecker 从数论的观点来看这个问题,他提出下面的猜想: 虚二次域 K 的 Abel 扩张都可由具有 K 中元素的复数乘法的椭圆函数的变换方程来确定 (1880). 这个问题, 相当于下列事实,它也是由 Kronecker 提出来, 而由 H. Weber 证明的: "有理数域的 Abel 扩张都是分圆域†的子域". Kronecker 的工作是由 Weber 继续的 ([2]), 在 $K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})$

的情形是由高木貞治(1903)解决的，在 $K=Q(e^{2\pi i/3})$ 的情形是由竹内端三(1916)解决的，不久，随着高木完成了类域论†的研究(1920)，将这些问题完全解决了。H. Hasse([5])，菅原正夫等将上述问题作了整理简化。此外，Hasse 还注意到它和同余 ζ 函数†的关系。根据 Hasse 的考虑，M. Deuring 将这个理论作了代数化，并且计算了具有复数乘法的椭圆曲线的 Hasse ζ 函数†。

现在叙述有关的主要定理。K 总是表示虚二次域。设 L 为复平面 $\boldsymbol{C}$ 上的格群†，ω_1, ω_2 为 L 的生成元，z 为 $\boldsymbol{C}$ 中的变数，这时我们定义函数 $\mathscr{P}, g_2, g_3$ 如下。$\mathscr{P}(z;L)=\mathscr{P}(z;\omega_1,\omega_2)=z^{-2}+\sum((z-\omega)^{-2}-\omega^{-2})$，$g_2(L)=g_2(\omega_1,\omega_2)=60\sum\omega^{-4}$，$g_3(L)=g_3(\omega_1,\omega_2)=140\sum\omega^{-6}$($\sum$ 是对于 L 的所有非零元 ω 求和)。如果设 $\mathscr{P}'$ 是 $\mathscr{P}$ 关于 z 的导数，那么对应 $z\to(1, \mathscr{P}(z), \mathscr{P}'(z))$ 是复环面群 $\boldsymbol{C}/L$ 与射影平面内的椭圆曲线† $E: X_0X_2^2=4X_1^3-g_2X_0^2X_1-g_3X_0^3$ 之间的一一对应。如果比值 ω_1/ω_2 生成 K，则 $\boldsymbol{C}/L$ 的解析自同态全体生成的环(即 E 的自同态环)与 K 的主整环 $\mathfrak{o}$ 的子环同构。这时就称 E(或者函数域 $\boldsymbol{C}(\mathscr{P}, \mathscr{P}')$)具有复数乘法。特别是，当我们考察 $K\subset\boldsymbol{C}$ 时，如果把 K 的理想取作 L，则自同态环就成为 $\mathfrak{o}$ 本身。设 $\tau=\omega_1/\omega_2$，$\Im_\tau>0$，如果 $J(\tau)=J(E)=J(L)=2^6 3^3 g_2(L)^3/\Delta(L)(\Delta(L)=g_2(L)^3-27g_3(L)^2)$，则 J 作为 τ 的函数是一级模函数†。$J(E)$ 称为椭圆曲线 E 的**不变量**(invariant)。如果 E 具有复数乘法，则 $J(E)$ 为代数整数。现把复数乘法的古典理论的三个主要定理叙述如下：

定理1：设 h 为 K 的类数†，$\mathfrak{a}_1, \cdots, \mathfrak{a}_h$ 为 K 的想理类的一组代表理想，则 $J(\mathfrak{a}_1), \cdots, J(\mathfrak{a}_h)$ 为 $J(\mathfrak{a}_1)$ 在 K 上的全体共轭元素，且 $K(J(\mathfrak{a}_1))$ 为 K 的最大非分歧 Abel 扩张(绝对类域†)。

其次我们定义函数 f 如下：$\boldsymbol{Q}$ 为有理数域，

$$f(z;L)=g_2g_3\Delta^{-1}\cdot\mathscr{P}(z;L),\quad K\neq\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1}),\ \boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/3}),$$
$$=g_2^2\Delta^{-1}\cdot\mathscr{P}(z;L),\quad K=\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1}),$$
$$=g_3\Delta^{-1}\cdot\mathscr{P}(z;L),\quad K=\boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/3}).$$

定理 2：设 $\mathfrak{o}$ 为 K 的主整环†，$\mathfrak{m}$ 为 K 的整理想，$\mathfrak{a}$ 为 K 的任意理想。如果取 K 的数 ξ 满足 $\mathfrak{m}=\{\lambda\in\mathfrak{o}\mid\lambda\xi\in\mathfrak{a}\}$，则 $K(J(\mathfrak{a}), f(\xi;\mathfrak{a}))$ 为对应于模 $\mathfrak{m}$ 的主理想群 $\{(\alpha)\mid\alpha\in K, \alpha\equiv1(\mathrm{mod}^\times\mathfrak{m})\}$ 的 K 上的类域†。

在这个定理中的 ξ 可由 $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{m}(\xi)=\mathfrak{b}$ 得出，其中 ξ 是与 $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{m}$ 属于同一理想类，且 $\mathfrak{b}$ 是与 $\mathfrak{m}$ 互素的整理想。$f(\xi;\mathfrak{a})$ 是椭圆函数的特殊值，也是某个模函数的特殊值。

此外，还有前述的类域中的互反律†，主理想定理†，分歧的情况等，也可用椭圆函数或椭圆曲线的术语来叙述。

一般地，在域 k 上定义的椭圆曲线的自同态环，如果 k 的特征为零，则它为有理整数环或虚二次域的某个整环。但是，如果 k 的特征不是零，则自同态环是定符号的四元数代数的整环([7])。

【Abel 簇的复数乘法】 根据 Kronecker 的思想，D. Hilbert 在巴黎的讲演中(1900)，将"求解析函数，使得其特殊值在给定的代数数域上生成 Abel 扩张"作为第十二个问题提了出来(→Hilbert)。E. Hecke 基于 Hilbert 的想法，使用二变量的 Hilbert 模函数†，构成了虚四次域的非分歧 Abel 扩张([10])。以后这个问题没有任何进展，一直到了近年随着代数几何的发展，出现了 A. Weil 的 Abel 簇†的代数几何学理论，才可能将这个理论推广到高维情形(志村五郎-谷山豐[11])。下面叙述其主要结果。

考虑由复数域 $\boldsymbol{C}$ 上定义的 Abel 簇 A，A 的极化† $\mathfrak{X}$，以及 A 的点 t 组成的构造 $(A, \mathfrak{X}, t)$。对于同样的构造 $(A', \mathfrak{X}', t')$，如果从 A 到 A' 的某个同构把 $\mathfrak{X}$ 变到 $\mathfrak{X}'$，把 t 变到 t'，则称 $(A, \mathfrak{X}, t)$ 与 $(A', \mathfrak{X}', t')$ 同构。对于给定的 $(A, \mathfrak{X}, t)$，具有如下性质的 $\boldsymbol{C}$ 的子域 k_0 是唯一存在的：对于 $\boldsymbol{C}$ 的自同构 σ，$(A, \mathfrak{X}, t)$ 和 $(A^\sigma, \mathfrak{X}^\sigma, t^\sigma)$ 同构的充分必要条件是 σ 使 k_0 的所有元素不动。k_0 称为 $(A, \mathfrak{X}, t)$ 的**不变量域**(field of moduli)。如果 A 为椭圆曲线 E，$t=0$，

则 $k_0 = \mathbf{Q}(J(E))$ 成立. 在高维情形，不变量域由某个 Siegel 模函数†的特殊值生成.

设 F_0 是共轭全部为实的 n 次代数数域，F 是 F_0 的二次扩张，且其共轭全部为虚. 如果我们能选取由 F 到 $\mathbf{C}$ 中的 n 个同构映射 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$，使得它们互相不同，且相互不为复共轭，这时就将 $(F; \{\varphi_\lambda\})$ 称为 CM 型.

设 $\mathbf{C}^n$ 作为 n 维复线性空间，对于 F 的理想 $\mathfrak{a}$，令

$$L = \{(\varphi_1(\alpha), \cdots, \varphi_n(\alpha)) \in \mathbf{C}^n | \alpha \in \mathfrak{a}\},$$

则 L 为 $\mathbf{C}^n$ 的格群，且复环面群 $\mathbf{C}^n/L$ 与复射影空间内的 n 维 Abel 簇 A 解析同构. 如将 F 的主整环记作 $\mathfrak{o}$，则 A 的自同态环† $\mathfrak{A}(A)$ 包含与 $\mathfrak{o}$ 同构的环. 反之，每一个在 $\mathbf{C}$ 上定义的 n 维 Abel 簇 A，如果使得 $\mathfrak{A}(A)$ 包含与 $\mathfrak{o}$ 同构的环，则均可这样来构造.

现在，在有理数域 $\mathbf{Q}$ 的 Galois 扩张中选取含有 F 的 M，设 M 的 Galois 群为 G，对应于 F 的 G 的子群为 H，选择诱导出 φ_λ 的 G 的元素，这个元素也记为 φ_λ，令

$$S = \bigcup_\lambda \varphi_\lambda H.$$

此时下列的三个条件是互相等价的：1) $\mathfrak{A}(A) \cong \mathfrak{o}$；2) A 是单纯的；3) $H = \{\gamma \in G | S\gamma = S\}$. 其次，如果设 $H^* = \{\delta \in G | \delta S = S\}$，则存在 G 的元素 ψ_μ，使得 $S = \bigcup_\mu H^* \psi_\mu$ 成立. 设对应于 H^* 的 M 的子域为 F^*，则 $(F^*; \{\varphi_\mu\})$ 也是 CM 型的，且 $F^* = \mathbf{Q}\left(\sum_\lambda \varphi_\lambda(\alpha) | \alpha \in F\right)$ 成立. 并且，对于 F^* 的理想 $\mathfrak{x}$，$\prod_\mu \psi_\mu(\mathfrak{x})$ 也成为 F 的理想.

对于 F^* 的整理想 $\mathfrak{m}$，有与 $N(\mathfrak{m})$ 互素的 F^* 的理想 $\mathfrak{x}$，使得

$$\prod_\mu \psi_\mu(\mathfrak{x}) = (\xi), N(\mathfrak{x}) = |\xi|^2,$$

$$\xi \equiv 1(\bmod^\times \mathfrak{m})$$

成立的 F 的元素 ξ 存在，设所有这种 $\mathfrak{x}$ 构成的群为 $H_\mathfrak{m}$，则 $H_\mathfrak{m}$ 为 F^* 的同余理想群.

定理 3：当 $\mathfrak{A}(A) \cong \mathfrak{o}$ 时，设 $\mathfrak{X}$ 为 A 的任意极化，t 为 A 的任意点，而 $\mathfrak{m} = \{\lambda \in \mathfrak{o} | \lambda t = 0\}$. 设 $k_\mathfrak{m}$ 为 $(A, \mathfrak{X}, t)$ 的不变量域，则 $k_\mathfrak{m} F^*$ 是对应于 $H_\mathfrak{m}$ 的 F^* 上的类域†.

这样的点 t 总是存在的. 特别是当 $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}$ 时，$t = 0$，当 A 为椭圆曲线 E，(从而)当 F 为虚二次域时，则 $F^* = K$ 成立，定理 3 同定理 1, 2 的内容在本质上是一致的. 如果 $n > 1$，虽然也有 $F = F^*$ 的情形，但是一般说来，$F \neq F^*$.

这个理论同 A 的 Hasse ζ 函数†具有密切的关系.

【参】 [1] L. Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Funktionen, Monatber. Königlich Preuss. Akad. Wiss. Berlin, (1881), 1165—1172. (Werke IV, Teubner, 1929, p. 309—318; Chelsea, 1969.); [2] H. Weber, Lehrbuch der Algebra, III, F. Vieweg, Braunschweig, 第二版, 1908 (Chelsea, 1961); [3] T. Takagi (高木貞治), Über eine Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers, J. Coll. Sci. Imp. Univ. Tokyo, **41** (1920), 1—132; [4] R. Fueter, Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen I, II, Teubner, 1924, 1927; [5] H. Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation I, II, J. Reine Angew. Math., **157** (1927), 115—139, **165** (1931), 64—88; [6] R. Fricke, Lehrbuch der Algebra III, F. Vieweg, Braunschweig, 1928; [7] M. Deuring, Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **14** (1941), 197—272; [8] M. Deuring, Die Struktur der elliptischen Funktionenkörper und Klassenkörper der imaginären quadratischen Zahlkörper, Math. Ann., **124** (1952), 393—426; [9] M. Deuring, Die Klassenkörper der Komplexen Multiplikation, Enzykl. der Math., Bd. I₂, Heft 10, Teil II, 23, 1958; [10] E. Hecke, Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, Math. Ann., **71** (1912), 1—37; Über die Konstruktion relativ-Abelscher Zahlkörper durch Modulfunktionen von zwei Variabeln, Math. Ann., **74** (1913), 465—510 (Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959, p. 21—58, 69—114.); [11] G. Shimura (志村五郎)-Y. Taniyama (谷山豊), Complex multiplication of Abelian varieties and its applications to number theory, Publ. Math. Soc. Japan, no. 6, 1961; [12] G. Shimura (志村五郎), Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves, Ann. of Math., **85** (1967), 58—159; [13] A. Borel et al., Seminar on complex multiplication, Lecture notes in math. 21, Springer, 1966; [14] G. Shimura (志村五郎), Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Publ. Math. Soc. Japan and Princeton Univ. Press, 1971.

Fermat 问题 [英 Fermat's problem 法 problème de Fermat 德 Fermatsches problem 俄

задача Ферма 日 フェルマーの問題] "设 n 为大于2的自然数,则

(1) $$x^n + y^n = z^n$$

没有整数解 $x, y, z\ (xyz \neq 0)$."这个命题称为 **Fermat 大定理**,或 Fermat 最后定理(约 1637). 在 $n = 2$ 的情形,就是所谓 Pythagoras 定理,此时有整数解(→不定方程). P. Fermat 在阅读 Diophantus《算术》一书的拉丁文译本时的一个抄本上,写出与 Pythagoras 定理有关的上述结果后,留下了一句名言:"我发现了它的一个了不起的证明,但是页边太窄写不下". Fermat 本人是否真的证明出来了,不得而知. 尽管后来很多学者作了许多努力,然而直到今天还没有给出这个定理的一般证明,而且也举不出反例.但是,值得指出,这些研究的副产物却对数论的巨大发展具有重要的推动作用. 例如,它对 E. E. Kummer 理想数理论或分圆域†理论的显著发展的影响就是这样.

下面只考虑方程(1)的这些解: x, y, z 为互素,即除了±1之外没有其他的公因子. 若在 $n = 4$ 及 $n = l$(奇素数)的情形,该定理能被证明,则可知道对于一般的 n,定理也是成立的.

在历史上,对于 n 的几个特殊情形,定理得到证明. 例如,当 $n = 3$ 时,是 L. Euler (1770) 及以后的 A. M. Legendre 证明的;当 $n = 4$ 时,是 Fermat, Euler 证明的;当 $n = 5$ 时,是 Legendre 证明的 (1825);当 $n = 7$ 时,是 G. Lamé 证明的(1839). 当然也进行了一般情形的研究,在十九世纪初叶出现了 S. Germain, Legendre 定理等,然而最著名的则是 Kummer 的结果 (J. Reine Angew. Math., **40** (1850), Abh. Akad. Wiss. Berlin (1857)).

设 l 为奇素数,ζ 为1的本原 l 次幂根,$\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 为在有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上添加 ζ 后所得的分圆域,h 为 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 的类数†. 设 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 中包含的实域 $\boldsymbol{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ 的类数为 h_2,则 h_2 为 h 的因子. $h_1 = h/h_2$ 称为 h 的第一因子†,h_2 称为 h 的第二因子†.

i) 当 $(h, l) = 1$ 时,即对于正则†素数 l,$x^l + y^l = z^l$ 没有使 $xyz \neq 0$ 的整数解 (Kummer, 1850).

100以下的非正则素数只有: 37, 59, 67 三个,而在 $3 \leqslant l \leqslant 4001$ 的素数 l 中则有 334 个正则素数,216 个非正则素数. 现在尚不知是否有无穷多正则素数,虽然在自然数序列的起始部分,正则素数的数目要比非正则的数目为多. $(l, h) = 1$ 的条件,与 Bernoulli 数† $B_{2m}\ (m = 1, 2, \cdots, (l-3)/2)$ 的分子不能被 l 整除的条件等价 (Kummer, 1850) (公式10). 且对于非正则素数 l, Kummer(1857) 的结果有如下改进.(如果 l 是非正则素数,$l \nmid h$,此时一定有 $l | h_1$ 成立 (Kummer, 1850).)(→代数数域的数论)

ii) 如果 1) $(h_2, l) = 1$ 及 2) Bernoulli 数 $B_{2ml}\ (m = 1, 2, \cdots, (l-3)/2)$ 的分子都不能用 l^3 整除,则 $x^l + y^l = z^l$,没有 $xyz \neq 0$ 的整数解 (H. S. Vandiver, Trans. Amer. Math. Soc., **31** (1929)).

Vandiver (1928—36) 通过计算证实:对于 $l < 619$,$x^l + y^l = z^l$ 没有整数解. 现在,这个步骤已通过电子计算机用 D. H. Lehmer, E. Lehmer, H. S. Vandiver 的方法 (Proc. Nat. Acad. Sci. US, **40** (1954))推到 $l \leqslant 30{,}000$ (W. Johnson, Math. Comp., **29** (1975)).

对于 Fermat 问题 $x^l + y^l = z^l$,加上条件 $(xyz, l) = 1$ 的情形称为第一种情形 (case I),加上条件 $(xyz, l) = l$ 的情形称为第二种情形 (case II),上列的 i),ii) 两项在这两种情形下均成立. 下面的结果,只对第一种情形成立.

iii) 在第一种情形,如果 $(h_2, l) = 1$,则 $x^l + y^l = z^l$ 没有 $xyz \neq 0$ 的整数解 (Vandiver, 1934).

iv) 在第一种情形,如果 $x^l + y^l = z^l$ 具有 $xyz \neq 0$ 的整数解,则对于所有的 $-t = x/y$, y/x, y/z, z/y, x/z, z/x,有

(2) $$B_{2m} f_{l-2m}(t) \equiv 0 \pmod{l}, \quad m = 1, 2, \cdots, (l-3)/2,$$

这里 B_m 为第 m 个 Bernoulli 数,$f_m(t) =$

$\sum_{r=0}^{l-1} r^{m-1}l^r$. 这称为 **Kummer 判据** (Kummer's criterion) (D. Mirimanov, 1905).

将以上的形式加以整理变形,则有

v_1) 在第一种情形，如果 $x^l + y^l = z^l$ 具有 $xyz \neq 0$ 的整数解,则

$$(2^{l-1} - 1)/l \equiv 0 \pmod l$$

成立 (A. Wieferich, J. Reine Angew. Math., **136** (1909)).

这个结果在当时的数学界引起了很大的轰动. 最初确定了在 $l < 3700$ 的范围里只有 1093, 3511 两个数使上列同余式成立; 在 1963 年确定了在 $l \leqslant 200183$ 的范围内也只有这两个数使同余式成立;现在确定了在 $l < 31{,}059{,}000$ 的范围里也是只有这两个数使同余式成立. 判据 v_1) 被 Mirimanov (1910, 1911), Ph. Furtwängler (1912), Vandiver (1914), G. Frobenius (1914), F. Pollaczek (1917),森島太郎 (1931), Ja. B. Rosser (1940, 1941) 等陆续地作了推广,例如:

v_2) 在第一种情形,如果 $x^l + y^l = z^l$ 具有 $xyz \neq 0$ 的整数解,则

$$(3)\qquad (m^{l-1} - 1)/l \equiv 0 \pmod l$$

对于 $2 \leqslant m \leqslant 43$ 的所有的 m 成立.

Rosser (1941) 应用这个结果证明当 $l < 41{,}000{,}000$ 时, D. H. Lehmer-E. Lehmer (Bull. Amer. Math. Soc., **47** (1941)) 更进一步改进这个结果,证明当 $l < 253{,}749{,}889$ 时, 在第一种情形, $x^l + y^l = z^l$ 都没有整数解.

上面我们研究了有理整数解 x, y, z 的问题,我们也可以考虑(证明或否定)在 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 的代数整数†环中 $\alpha^l + \beta^l = \gamma^l$ 没有 $\alpha\beta\gamma \neq 0$ 的解 α, β, γ 的问题. 第一种情形为

$$(4)\qquad \alpha^l + \beta^l + \gamma^l = 0,\quad (\alpha\beta\gamma, l) = 1$$

在 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 中没有整数解. 第二种情形, 等价变形为

$$(5)\qquad \alpha^l + \beta^l = \varepsilon\lambda^{nl}\gamma^l,\quad (\alpha\beta\gamma, l) = 1$$

(其中 n 为自然数, ε 为 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 的单元†, $\lambda = 1 - \zeta$) 在 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 中没有整数解. 还有下列结果:

i*) 如果 $(h, l) = 1$, 则 (4), (5) 都没有解 (Kummer, 1850).

ii*) 在与 ii) 相同条件下, (4), (5) 还是都没有解,但是在 (5) 中, α, β, γ 限于是 $\boldsymbol{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ 的整数, 并且是互素的, 其中 λ 代以 $(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})$ (Vandiver, 1929).

iii*) 如果 $(h_2, l) = 1$, 则 (4) 没有解,但是 α, β, γ 限于是 $\boldsymbol{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ 的整数 (森島, 1934).

(ν_2^*) 如果 (4) 在 $\boldsymbol{Q}(\zeta)$ 中具有整数解 α, β, γ, 则 (3) 对于 $2 \leqslant m \leqslant 43$ 中所有的 m 均成立(森島, 1934).

另外,在 l 为足够大的情形,还有 M. Krasner (C. R. Acad. Sci. Paris, 1934),森島 (Proc. Japan Acad., **11** (1935)) 等的结果.

1927 年以前的结果在 Vandiver-G. E. Wahlin [1] 中,关于其后的部分结果,在 Vandiver [2] 中有详细的说明.

【参】 [1] H. S. Vandiver-G. E. Wahlin, Algebraic numbers, Bull. Nat. Res. Council, **62** (1928); [2] H. S. Vandiver, Fermat's last theorem, Amer. Math. Monthly, **53** (1946), 555—578; [3] 森島太郎, フェルマーの問題, 岩波講座数学, 1934.

局部域的数论 [英 arithmetic of local fields 法 arithmétique des corps locaux 德 Arithmetik der lokalen Körper 俄 арифметика локального поля 日 局所体の整数論] 如果域 k 对于离散赋值†是完备的, 并且剩余类域是有限的,则称为**局部域** (local field) (此外, 有时也将实数域、复数域称为局部域,但是在下面的论述中不予涉及). 局部域 k, 与有限次代数数域关于某个素理想 $\mathfrak{p}$ 所确定的 $\mathfrak{p}$-adic 赋值†的完备化†同构,或者与有限域上的单变量形式幂级数†域同构. 在前一情形, k 如果是由代数数域的素理想 $\mathfrak{p}$ 所确定, 则 k 称为 **$\mathfrak{p}$-adic 数域** ($\mathfrak{p}$-adic number field). 以下设 $\mathfrak{o}$ 为 k 的赋值环†, $\mathfrak{p}$ 为赋值理想†, p 为剩余类域 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 的特征, 并设 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 的元素的数目为 $N(\mathfrak{p})$. 以 $\operatorname{ord}\alpha\,(\alpha \in k)$ 表示在 k 的赋值中取值于全体有理整数的加法赋值,但令 $\operatorname{ord} 0 = \infty$. 对于 $\alpha \in k$, 令 $|\alpha| =$

$(N(\mathfrak{p}))^{-\mathrm{ord}\alpha}$，称为 k 的正规赋值†.

【k 的构成】 $\mathfrak{p}$-adic 数域 k 是 p-adic 域 $\boldsymbol{Q}_p$ 的有限扩张. 设 $n=[k:\boldsymbol{Q}_p]=ef$，$e$ 为 $k/\boldsymbol{Q}_p$ 的分歧指数(后述)，f 为 $k/\boldsymbol{Q}_p$ 的相对次数，则存在唯一的域 F，使得 $k\supset F\supset \boldsymbol{Q}_p$，$[k:F]=e$，$[F:\boldsymbol{Q}_p]=f$，且 $F/\boldsymbol{Q}_p$ 成为非分歧扩张，F 的剩余类域 $\kappa\cong GF(p^f)$，且 F 的结构可利用 Witt 向量由 κ 唯一决定(→Witt 向量). $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F\cong\kappa$ 的每一个剩余类只含有唯一的 1 的 m 次幂根 (m 为 p^f-1 的因子)，F 是往 $\boldsymbol{Q}_p$ 添加 1 的本原 (p^f-1) 次幂根得出的. k 为 F 的分歧扩张，是往 F 里添加 Eisenstein 方程†的根得出来的.

【k 的拓扑】 如果以 $\mathfrak{p}^m(m=0,1,2,\cdots)$ 作为 0 的基本邻域系†，在 k 中引入拓扑，则 k 就成为局部紧的且完全不连通的†拓扑域†，$\mathfrak{p}^m(m=0,1,2,\cdots)$ 就是加法群 k 的紧子群. 以 k 中所有非 0 元素构成的乘法群 $k^\times$，对于该拓扑成为局部紧 Abel 群†，且 $\mathfrak{u}^{(m)}=\{\alpha\in\mathfrak{o}\mid\alpha\equiv1(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p}^m)\}(m=0,1,2,\cdots)$ 是 1 的基本邻域系. 加法群 k 的(在 Понтрягин 意义下的)特征标群†与 k 同构. 此同构对应由如下的自然对应得出. k 为 $\mathfrak{p}$-adic 域时，设从 k 到 p-adic 域 $\boldsymbol{Q}_p$ 的迹 Tr，与从 $\boldsymbol{Q}_p$ 到 $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ ($\boldsymbol{Z}_p$ 为 $\boldsymbol{Q}_p$ 的赋值环) 上的自然映射的合成为 f，则对于 $k\ni x$，由 $\chi_x(y)=\exp(2\pi\sqrt{-1}f(xy))(y\in k)$ 来定义 χ_x，那末 χ_x 为 k 的特征标，且 $x\to\chi_x$ 这个对应给出了 k 与其特征标群的同构. k 为有限域 κ 上的幂级数域时，对于 $\alpha\in k$，设 $\mathrm{Res}\,\alpha$ 为 α 的残数，对于 $\kappa\ni\beta$，设 $Tr(\beta)$ 为从 κ 到素域 $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ 的迹，令 $g(\alpha)=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,Tr(\mathrm{Res}\alpha)/p)(\alpha\in k)$. 那末对于 $x\in k$ 设 $\chi_x(y)=g(xy)(y\in k)$，则 χ_x 为 k 的特征标，且由对应 $x\to\chi_x$ 可得出 k 与其特征标群的同构.

【分歧理论】 设 K/k 为 k 的有限次扩张，k 的赋值 v 可唯一地延拓到 K 上，并且 K 对于这个赋值(这个赋值也用同一字母 v 表示)是完备的，因此 K 成为局部域. 设 K，k 的剩余类域分别为 $\mathfrak{k}$，κ 时，则把 $[\mathfrak{k}:\kappa]=f$ 称为 K/k 的**相对次数** (relative degree)，把 $[v(K^\times):v(k^\times)]=e$ 称为 K/k 的**分歧指数** (ramification index)，且有 $[K:k]=ef$ 成立. 当 $e=1$ 时，K/k 就称为**非分歧扩张** (unramified extension). 非分歧扩张 K/k 是 Galois 扩张，其 Galois 群是由 **Frobenius 置换**生成的循环群. 这里的 Frobenius 置换 σ 是 K/k 的 Galois 群的元素，它对于 K 的赋值环的任意元素 α，都有 $\alpha^\sigma\equiv\alpha^{N(\mathfrak{p})}(\mathrm{mod}\ \mathfrak{p})$ 成立. 对于任意的自然数 f，在 k 的代数闭包中，k 上的 f 次非分歧扩张是唯一存在的.

设 K/k 为有限次 Galois 扩张，G 为其 Galois 群，Π 为 K 的素元，即作为赋值理想 $\mathfrak{P}$ 的生成元，令 $V^{(i)}=\{\sigma\in G\mid\Pi^\sigma\equiv\Pi(\mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{i+1})\}$，则 $V^{(i)}$ 与 Π 取法无关. $V^{(0)}$ 称为 K/k 的**惯性群** (inertia group). $V^{(i)}$ 称为 i 次**分歧群** (ramification group). V^i 是 G 的正规子群，且 $[G:V^{(0)}]=f$，$[V^{(0)}:1]=e$，$V^{(1)}$ 就是 $V^{(0)}$ 的 p Sylow 子群，且 $G/V^{(0)}$，$V^{(0)}/V^{(1)}$ 为循环群，$V^{(i)}/V^{(i+1)}$ $(i=1,2,\cdots)$ 是 $(p,p,\cdots,p)$ 型的 Abel 群. 有关 Abel 扩张的分歧理论将在后面介绍.

对于 $x\in k$，$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$ 及 $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x/n$，分别于 $\mathrm{ord}\,x>e/(p-1)$ 及 $\mathrm{ord}\,x>0$ 处收敛. 通过映射 $x\to y=\exp(x)$，$y\to x=\log(y)$，加法群 $\mathfrak{p}^m$ 和乘法群 $\mathfrak{u}^{(m)}(m=[e/(p-1)])$ 作为拓扑群是同构的. 如果固定一个满足 $\mathrm{ord}\,\pi=1$ 的元素 $\pi\in k$，则满足 $\mathrm{ord}\,x=m$ 的任意元素 $x\in k$ 可唯一表示成 $x=\pi^m\zeta\alpha$，$\zeta^{p^f-1}=1$，$\alpha\in\mathfrak{u}^{(1)}$. $\mathfrak{u}^{(1)}$ 是乘法群，$\boldsymbol{Z}_p$ 在其上作用，作为 $\boldsymbol{Z}_p$ 群，$\mathfrak{u}^{(1)}$ 的结构能够具体表出(见 Hasse [2] II 章).

【上同调群】 设 K 为 k 上的 Galois 扩张，其 Galois 群为 G，我们考虑以 K 的乘法群 $K^\times$ 为系数的 G 的上同调群† $H^r(G,K^\times)$ $(r=1,2,\cdots)$. 特别是，研究二维上同调群 $H^2(G,K^\times)$ 的性质对于局部类域论和 k 上的代数的理论是很重要的.

设 C 为 k 的可分闭包，即 k 的代数闭包中 k 上的最大可分域，设 Γ 为 C/k 的 Galois 群，

我们考虑二维上同调群 $H^2(\Gamma, C^\times)$。这里我们取的上闭链是 $\Gamma\times\Gamma$ 到 $C^\times$ 的那些映射 $f(\sigma,\tau)$ $(\sigma,\tau\in\Gamma)$，它对于拓扑群† Γ 的 Krull 拓扑† 和拓扑群 $C^\times$ 的离散拓扑是连续映射.

关于 $H^2(\Gamma, C^\times)$ 的结构，有以下主要结果：设 K/k 为 n 次可分扩张，则在 K 中分裂的 $H^2(\Gamma, C^\times)$ 的上闭链全体，与在 k 上的 n 次非分歧扩张中分裂的上闭链全体是一致的. 这里，在 K 中分裂的上闭链是指它属于上同调群的同态 $H^2(\Gamma, C^\times)\xrightarrow{\text{res}}H^2(H, C^\times)$ 的核†（H 为对应于 K 的 Γ 的子群，res 为使 $H^2(\Gamma,C^\times)$ 的上闭链 $f(\sigma,\tau)$ 对应于把 σ,τ 限制为 H 的元素而得出的 $H^2(H,C^\times)$ 的上闭链的映射）.

设 K/k 为 n 次 Galois 扩张，G 为其 Galois 群，设 H 为对应于 K 的 Γ 的子群. 由上述定理以及关于一般 Galois 上同调的基本正合序列†

(1)　$0\to H^2(G,K^\times)\to H^2(\Gamma,C^\times)\to H^2(H, C^\times)$

得出 $H^2(G,K^\times)\cong \boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$（$n$ 次循环群）及 $H^2(\Gamma, C^\times)\cong\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$（$\boldsymbol{Q}$ 为有理数的加法群，$\boldsymbol{Z}$ 为有理整数的加法群）. 这些同构对应可以确定如下：设 K_n/k 为 k 的 n 次非分歧扩张，σ 为 Frobenius 置换，则代表 $H^2(G_n,K_n^\times)$（G_n 为 K_n/k 的 Galois 群）的元素 c 的上闭链 $f(\sigma^i,\sigma^j)$，可通过适当地选取 $k^\times$ 的元素 a，并令 $f(\sigma^i,\sigma^j)=a^{[(i+j)/n]-[i/n]-[j/n]}$ $(i,j\in\boldsymbol{Z})$ 得出. 反之，对于 $k^\times\ni a$，可这样确定 $H^2(G_n,K_n^\times)$ 中的元素 c. 通过这样的 $H^2(G_n,K_n^\times)\ni c$ 与 $k^\times\ni a$ 的对应，就得 $H^2(G_n,K_n^\times)\cong k^\times/N_{K_n/k}(K_n^\times)$. 这时，令 $\operatorname{inv}c\equiv(\operatorname{ord}a)/n(\bmod\boldsymbol{Z})$，就确定 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 的元素 $\operatorname{inv}c$. 根据上面的定理，因为 $H^2(\Gamma, C^\times)\ni c$ 在某 n 次非分歧扩张中分裂，由正合序列(1)，则得对应于 $H^2(\Gamma, C^\times)\ni c$ 的 $H^2(G_n,K_n^\times)$ 的元素 c'. 令 $\operatorname{inv}c=\operatorname{inv}c'$，由对应 $H^2(\Gamma, C^\times)\ni c\to\operatorname{inv}c$ 就给出同构 $H^2(\Gamma, C^\times)\cong\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$. $\operatorname{inv}c$ 称为 $H^2(\Gamma, C^\times)\ni c$ 的**不变量**（invariant）. 一般的有限次 Galois 扩张 K/k 的上同调群 $H^2(G,K^\times)$ 的元素的不变量就定义为由正合序列(1)所对应的 $H^2(\Gamma, C^\times)$ 的元素的不变量. 使 $H^2(G,K^\times)$ 的元素对应于其不变量就能够得出同构 $H^2(G, K^\times)\cong\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$.

【局部类域论】 设 K/k 为 n 次 Galois 扩张，设 G 为其 Galois 群，设代表具有不变量为 $1/n$ 的 $H^2(G, K^\times)$ 的元素的上闭链为 $f(\sigma,\tau)$. 令 $\left(\dfrac{K/k}{\sigma}\right)=\prod_{\tau\in G}f(\tau,\sigma)^{-1}$，这时由 $\sigma\to\left(\dfrac{K/k}{\sigma}\right)$ 这个对应给出了 G/G'（G' 为 G 的换位子群）和 $k^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 的同构对应. 因此，当 E/k 为 k 的有限次扩张时，则 $[k^\times:N_{E/k}(E^\times)]\leqslant[E:k]$，当且仅当 E/k 为 Abel 扩张时等式才成立. 当 K/k 为 Abel 扩张时，将 $\sigma\to\left(\dfrac{K/k}{\sigma}\right)$ 所表示的由 G 到 $k^\times/N_{K/k}(K^\times)$ 的同构对应的逆对应以 $k^\times\ni\alpha\to(\alpha,K/k)\in G$ 表示，则将 $(\alpha,K/k)$ 称为**范数剩余符号**（norm-residue symbol）. 当 L/k 为 Abel 扩张，K/k 为 L 的子域时，将 $(\alpha, L/k)$ 限制于 $\boldsymbol{K}$ 中与 $(\alpha, K/k)$ 是一致的. 设 k_a 为 k 的最大 Abel 扩张，即 k_a 为 k 的全部有限次 Abel 扩张的并时，则对于 $k_a\ni\gamma$，通过 $(\alpha, k(\gamma)/k)$ 的作用，就决定了 k_a/k 的 Galois 群 $G(k_a/k)$ 的元素. 把它记为 (α,k)，则 $k^\times\ni\alpha\to(\alpha,k)\in G(k_a/k)$ 这个对应就是从 $k^\times$ 到 $G(k_a/k)$ 中的一一连续同态，其像在 $G(k_a/k)$ 中是稠密†的. 对于 $k^\times$ 中指数有限的闭子群 A，已经知道满足 $N_{K/k}(K^\times)=A$ 的 Abel 扩张 K/k 是唯一存在的. 因此，$k^\times$ 中的指数有限的闭子群 A 和 k 上的 Abel 扩张 K/k，通过 $A=N_{K/k}(K^\times)$ 的关系，而成一一对应. 此时称 A 为对应于 Abel 扩张 K/k 的 $k^\times$ 的子群.

设 K/k 为 Abel 扩张，A 为对应的 $k^\times$ 的子群，$V^{(i)}(i=0,1,2,\cdots)$ 为 K/k 的分歧群. 根据

$$V^{(0)}=V^{(1)}=\cdots=V^{(v_1)}\supsetneqq V^{(v_1+1)}$$
$$=\cdots=V^{(v_2)}\supsetneqq\cdots\supsetneqq V^{(v_{r-1}+1)}$$
$$=\cdots=V^{(v_r)}\supsetneqq V^{(v_r+1)}=(1)$$

确定常数 $v_1,v_2,\cdots,v_r$，设 $V^{(v_i+1)}(i=1,2,\cdots,r)$ 的阶数为 n_i，令

$$u_\rho=v_0+(n_0/n_0)(v_1-v_0)+\cdots$$
$$+(n_{\rho-1}/n_0)(v_\rho-v_{\rho-1}),$$
$$\rho=1,2,\cdots,r$$

（其中，令 $v_0=-1,n_0=[V^{(0)}:1]$），则 $u_1,\cdots,u_r$ 为有理整数，且

$$A\mathfrak{u}^{(0)}=\cdots=A\mathfrak{u}^{(u_1)}\supsetneqq A\mathfrak{u}^{(u_1+1)}=\cdots$$
$$=A\mathfrak{u}^{(u_2)}\supsetneqq\cdots\supsetneqq A\mathfrak{u}^{(u_r+1)}=A$$

成立 (H. Hasse[3]). 对于使 $A \supseteq \mathfrak{u}^{(m)}$ 成立的最小整数 m, $\mathfrak{p}^m$ 称为 K/k 的**前导子** (conductor).

Hasse 的上述结果,表明 $m = u_r + 1$. 另外,已知 $A\mathfrak{u}^{(u_\rho)}$ 和 $V^{(v_\rho)}(\rho = 1, 2, \cdots, r)$ 通过范数剩余符号 $(\alpha, K/k)$ 相对应 (→ 类域论).

【代数的理论】 关于 k 上的正规单代数类作成的 Brauer 群†的构造,可用代数的叉积†的一般理论,替换在上同调一节中所叙述过的理论直接得出来. 即,在 n 次可分扩张中分裂的 k 上的正规单代数同 n 次非分歧扩张中分裂的正规单代数是一致的. k 的 Brauer 群与 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 同构. 此外,对于 k 上的正规单代数 $\mathfrak{A}$,幂指数†(即作为 Brauer 群的元素的阶数)和 Schur 指数†相等. 还有,如果 $[\mathfrak{A}:k] = n^2$,则 $\mathfrak{A}$ 可表为在任意 n 次 Galois 扩张中的叉积. $\mathfrak{A}$ 作为叉积表示时的因子组(二维上闭链)的不变量称为 $\mathfrak{A}$ 的**不变量** (invariant) (→ 代数). 关于 $\mathfrak{A}$ 的拓扑环的性质及 $\mathfrak{A}$ 的乘法群的拓扑群的性质 → 阿代尔与伊代尔.

【显式公式】 令 K/k 为有限次 Abel 扩张. 当对范数剩余符号 $(\alpha, K/k)$ 有显式公式时,就说有显式互反律.

令 k 为 $\mathfrak{p}$-adic 数域,它包含一个 m 次本原单位根,再令 β 为 $k^\times$ 中的一个元素. 设 p 为包含在 $\mathfrak{p}$ 中的一个素数. 因为 k 上的 Kummer 扩张 $K = k(\sqrt[m]{\beta})$ 是 Abel 扩张,所以 Hilbert 范数剩余符号 $(\alpha, \beta)_m$ 被定义为 $(\alpha, K/k)(\sqrt[m]{\beta}) = (\alpha, \beta)_m \sqrt[m]{\beta}$,其中 $(\alpha, \beta)_m$ 是一个 m 次单位根. 这时,如果能用 α, β 和依赖于基域 k 的适当的参数来表示符号 $(\alpha, \beta)_m$,则求显式互反律的问题就解决了.

特别当 $p = 2$, $m = 2$ 时, Hasse 求得的简单公式是: $(\alpha, \beta)_2 = (-1)^{Tr((\alpha-1)(\beta-1)/4)}$, 其中 α, β 是在 k 中满足 $\alpha \equiv \beta \equiv 1 \pmod 2$ 的两个单元, Tr 是由 k 到 $\boldsymbol{Q}_p$ 的迹. Hasse 还求得关于补余律的类似公式 [12].

另一方面,如果 $m = p$ 是奇素数,且 $k = \boldsymbol{Q}_p(\zeta_p)$, 则对一个素元 $\lambda_p = 1 - \zeta_p$ 和满足 $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^2}$, $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ 的两个单元 α, β, 有下列公式:

(2) $$(\alpha, \beta)_p = \zeta_p^{(1/p)Tr(\zeta_p \log\alpha D\log\beta)},$$

(3) $$(\zeta, \beta)_p = \zeta_p^{(1/p)Tr(\log\beta)},$$

(4) $$(\lambda_p, \beta)_p = \zeta^{-(1/p)Tr((\zeta_p/\lambda_p)\log\beta)},$$

其中 $D\log\beta = (1/\beta)\sum_{i=1}^{\infty} i b_i \lambda_p^{i-1}$, 而 b_i 由 λ_p 展开式 $\beta = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \lambda_p^i$, $b_i \in \boldsymbol{Z}_p$ 确定 [5]. 此外, 用 Kummer 的对数导数, 从 (2) 还可推出显式 Kummer-Hilbert 公式 [10, 12]. 关于补余律 (3), (4), 对 $k = \boldsymbol{Q}_p(\zeta_{p^n})$ 和 $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$ 有下列 Artin-Hasse 公式:

(3′) $$(\zeta_{p^n}, \beta)_{p^n} = \zeta_{p^n}^{(1/p^n)Tr(\log\beta)},$$

(4′) $$(\lambda_{p^n}, \beta)_{p^n} = \zeta_{p^n}^{-(1/p^n)Tr((\zeta_{p^n}/\lambda_{p^n})\log\beta)},$$

其中 $\lambda_{p^n} = 1 - \zeta_{p^n}$ [11]. 利用这些公式,岩泽健吉得到了关于 $(\alpha, \beta)_{p^n}$ 的公式, 它是 (1) 的一个自然的推广 [15].

关于 $(\alpha, \beta)_{p^n}$, 我们有 **Шафаревич 互反律** [13]. 为了解释它, 令 k_0 为 k 中的惯性域, 即在 k 中在 $\boldsymbol{Q}_p$ 上非分歧的极大子域. 对于 k_0 中任意整数 a. 我们考虑 **Artin-Hasse 函数** $E(a, x) = \exp(-L(a, x))$, 其中 $L(a, x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a^{\mathbf{p}^i}/p^i) x^{p^i}$, $\mathbf{p}$ 是 $k_0/\boldsymbol{Q}_p$ 的 Frobenius 自同构. 我们在 k_0 中选取一个素元 $\tilde{\pi}$ 使得 $\zeta_{p^n} = E(1, \tilde{\pi})$, 还在 k_0 的一个适当的非分歧扩域中选取一个整数 $\bar{a}$ 使得对于在 k_0 中给定的整数 a 有 $\bar{a}^{\mathbf{p}} - \bar{a} = a$. 在 k 中给定任一 p^n 准素元 x (即 $k(x^{1/p^n})$ 在 k 上非分歧), 则在 k_0 中存在一个整数 a 使得 $x \approx E(a) = E(p^n \bar{a}, \tilde{\pi})$, 其中 $x \approx y (x, y \in k^\times)$ 意味着对于 $k^{\times p^n}$ 中的某一元素 u 有 $x = yu$ 成立. 此外, 如果 δ 是 $k^\times$ 中的元素, 则有下列标准分解公式:

$$\delta \approx \pi^{d^*} E(d) \prod_{\substack{1 \leq j < e_0 p \\ (j,p)=1}} E(d_j, \pi^j),$$

其中 π 是 k 中的素元, $d^* \in \boldsymbol{Z}$, d, d_j 是 k_0 中的整数, $e_0 = e/(p-1)$, 而 e 是 k 的分歧指数. Шафаревич 和 Hasse 得到的显式公式表示如下:

$$(\alpha, \beta)_{p^n} = \zeta_{p^n}^{Tr_0(a^* b - a b^* + c)},$$

式中 Tr_0 是从 k_0 到 $\boldsymbol{Q}_p$ 的迹, a^*, b^* 由上述 α, β 的标准分解确定. k_0 中的元素 c 由下式确定:

对奇数 p，则

$$\prod_{\substack{1\leqslant i,j<c_0 p\\(i,p)=(j,p)=1}} E(ja_ib_i,\pi^{i+j}) = \gamma \approx E(c)\prod_{\substack{1\leqslant j<c_0 p\\(j,p)=1}} E(c_j,\pi^j),$$

对 $p=2$，则

$$(-1)^{a^*b^*}\prod_{\substack{1\leqslant i,j<2e_0\\(i,2)=(j,2)=1}} E(ja_ib_j,\pi^{i+j}) \times \prod_{\mu,\nu=1}^{\infty} E((i2^{\mu-1}+j2^{\nu-1})a_i^{p^\mu}b_j^{p^\nu},\pi^{i2^\mu+j2^\nu}) = \gamma \approx E(c)\prod_{\substack{1\leqslant j<2e_0\\(j,2)=1}} E(c_j,\pi^j).$$

在 k 为函数域的情形，还可得到几个公式 [1, 5].

令 k 为一般局部域，如果 K 是 k 的扩域，它是在 k 中添加在 k 的整数环上定义的 Lubin-Tate 形式群的 π^n 分点 $\{\lambda\}$ 得到的，则扩张 K/k 是完全分歧且是 Abel 扩张，并有显式公式：$(u^{-1},K/k)\cdot\lambda=[u]_F(\lambda)$，式中 u 是 k 的单元，$[u]_F$ 是对应于单元 u 的 F 的自同态，特别是这个公式蕴涵着分圆互反律 [9, 14].

求显式互反律的问题，是由如何从整体类域论的互反律求出幂剩余的互反律的问题所引起的.这个问题与久保田富雄最近的工作（例如 [16]）密切相关，他的工作阐明了在代数数域中互反律的解析意义.

【参】 [1] E. Artin, Algebraic numbers and algebraic functions, Lecture notes, Princeton Univ., 1950—51 (Gordon and Breach, 1967); [2] H. Hasse, Zahlentheorie, Akademie-Verlag, 1949; [3] H. Hasse, Normenresttheorie galoisscher Zahlkörper mit Anwendungen auf Führer und Diskriminante abelscher Zahlkörper, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 2 (1934), 477—498; [4] M. Deuring, Algebren, Erg. d. Math., Springer, 1935, 第二版, 1968; [5] E. Artin-J. Tate, Class field theory, Harvard Univ., 1951 (Benjamin, 1967); [6] J.-P. Serre, Corps locaux, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1962; [7] O. F. G. Schilling, The theory of valuations, Amer. Math. Soc., 1950, [8] 高木貞治，代数的整数論，岩波，1948; [9] 河田敬義，代数的整数論 II，現代数学講座，共立出版，1957; [10] T. Takagi (高木貞治), On the law of reciprocity in the cyclotomic corpus, Proc.Phys.-Math. Soc. Japan, 4 (1922), 173—182; [11] E. Artin-H. Hasse, Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 6 (1928), 146—162; [12] H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper II, Jber. Deutsch. Math. Verein. (1930) (Physica Verlag, 1965); [13] И. Р. Шафаревич, Общий закон взаимности, Mat. Sb., 26 (68) (1950), 113—146; [14] J. Lubin-J. Tate, Formal complex multiplication in local fields, Ann. of Math., (2) 81 (1965), 380—387; [15] K. Iwasawa (岩沢健吉), On explicit formulas for the norm residue symbol, J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 151—165; [16] T. Kubota (久保田富雄), Ein arithmetischer Satz über eine Matrizengruppe, J. Reine Angew. Math., 222 (1966), 55—57; [17] J. W. S. Cassels-A. Fröhlich (eds.), Algebraic number theory, Academic Press. 1967.

结合代数的数论 [英 arithmetic of algebras 法 arithmétique des algèbres 德 Arithmetik der Algebren 俄 арифметика алгебры 日 多元環の整数論] 【通论】 设 $\mathfrak{g}$ 为 Dedekind 环†(即任何理想可唯一地分解为素理想之积的整域)，F 为 $\mathfrak{g}$ 的商域†，A 为 F 上的有限次可分代数†. 如果 A 的 $\mathfrak{g}$ 子模 $\mathfrak{a}$ 作为 $\mathfrak{g}$ 模具有有限个生成元且 $A=F\mathfrak{a}$ 时，则 $\mathfrak{a}$ 称为 A 的 **$\mathfrak{g}$ 格** ($\mathfrak{g}$-lattice). 当 A 的子环 $\mathfrak{o}$ 为含有 $\mathfrak{g}$ 的 $\mathfrak{g}$ 格时，则 $\mathfrak{o}$ 称为 A 的**整环** (英 order 德 Ordnung). 不包含在与自身相异的整环中的整环称为**极大整环** (maximal order). 极大整环总是存在的，而且一般不是唯一的，但是，如果 A 是交换的，则极大整环只有一个. 对于 A 的 $\mathfrak{g}$ 格 $\mathfrak{a}$，令 $\mathfrak{o}_l=\{x\in A\,|\,x\mathfrak{a}\subset\mathfrak{a}\}$，$\mathfrak{o}_r=\{x\in A\,|\,\mathfrak{a}x\subset\mathfrak{a}\}$，则 $\mathfrak{o}_l$，$\mathfrak{o}_r$ 为 A 的整环，分别称为 $\mathfrak{a}$ 的**左整环** (left order)，**右整环** (right order). 如果 $\mathfrak{a}$ 的左整环是极大的，则其右整环也是极大的，反之也成立. 当 $\mathfrak{a}$ 的左右整环 $\mathfrak{o}_l$，$\mathfrak{o}_r$ 均为极大时，$\mathfrak{a}$ 就称为**正规 $\mathfrak{g}$ 格** (normal $\mathfrak{g}$-lattice). 此时，$\mathfrak{a}$ 分别称为**左 $\mathfrak{o}_l$ 理想** (left ideal)，**右 $\mathfrak{o}_r$ 理想** (right ideal). 当 $\mathfrak{o}_l=\mathfrak{o}_r=\mathfrak{o}$ 时，$\mathfrak{a}$ 称为**双边 $\mathfrak{o}$ 理想** (two-sided ideal). 当 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}_l$ 等价于 $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}_r$ 时，则 $\mathfrak{a}$ 称为**整 $\mathfrak{g}$ 格** (integral $\mathfrak{g}$-lattice) 或称**整左(右)理想**. 对于正规 $\mathfrak{g}$ 格 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$，当 $\mathfrak{a}$ 的右整环与 $\mathfrak{b}$ 的左整环等同时，$\mathfrak{ab}$ 称为**固有积** (proper product). A 的全部正规 $\mathfrak{g}$ 格关于固有积构成广群†. 特别是正规 $\mathfrak{g}$ 格 $\mathfrak{a}$ 的逆 $\mathfrak{a}^{-1}$ 由 $\mathfrak{a}^{-1}=\{x\in A\,|\,x\mathfrak{a}\subset\mathfrak{o}_r\}=\{x\in A\,|\,\mathfrak{a}x\subset\mathfrak{o}_l\}$ 定义时，则 $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}=\mathfrak{o}_l$，$\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a}=\mathfrak{o}_r$ 成立. 设 $\mathfrak{o}$ 为极大

整环时，不同于 $\mathfrak{o}$ 的极大**整双边** $\mathfrak{o}$ **理想** $\mathfrak{p}$ 称为 $\mathfrak{o}$ 的**素理想** (prime ideal)．如果 $\mathfrak{p}$ 为素的，则 $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ 为某可除代数上的 κ 次矩阵代数．κ 称为素理想 $\mathfrak{p}$ 的**容量** (capacity)．双边 $\mathfrak{o}$ 理想全体关于乘法构成交换群，以素理想为其独立的生成元．

【单环的极大整环】 下面设 A 为单环†，F 为 A 的中心†，$\mathfrak{o}$ 为 A 的极大整环．$\mathfrak{o}$ 的素理想 $\mathfrak{q}$ 和 $\mathfrak{g}$ 的素理想 $\mathfrak{p}$ 由关系 $\mathfrak{q}\cap\mathfrak{g}=\mathfrak{p}$ 而成一一对应．此时，$\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ 上的单代数，且存在自然数 e 使 $\mathfrak{q}^e=\mathfrak{p}\mathfrak{o}$ 成立．$\mathfrak{o}$ 的**共轭差积** (different) $\mathfrak{d}$ 是由 $\mathfrak{d}^{-1}=\{x\in A\,|\,Tr(x\mathfrak{o})\subset\mathfrak{g}\}$ 定义的 (Tr 为自 A 到 F 的缩减迹†)．$\mathfrak{d}$ 为整双边 $\mathfrak{o}$ 素理想，当 $\mathfrak{q}^e=\mathfrak{p}\mathfrak{o}$ 时，则 $\mathfrak{d}$ 被 $\mathfrak{q}^{e-1}$ 整除．$\mathfrak{q}$ 能够整除 $\mathfrak{d}$ 的充分必要条件是 $e>1$ 或者 $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ 在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$ 上是不可分的．特别当 A 是 F 上的全阵代数时，则 $\mathfrak{d}=\mathfrak{o}$，$\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\mathfrak{o}$．$A$ 的正规 $\mathfrak{g}$ 格 $\mathfrak{a}$ 的元素到 F 的缩减范数†的最大公因理想记为 $N_{A/F}(\mathfrak{a})$．如果 $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ 为固有积，则 $N_{A/F}(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=N_{A/F}(\mathfrak{a})N_{A/F}(\mathfrak{b})$ 成立．$N_{A/F}(\mathfrak{d})$ 是 F 的整理想，它与 $\mathfrak{o}$ 的选取无关，称为 A 的**判别式** (discriminant)．假设 $[A:F]=n^2$，$\mathfrak{q}^e=\mathfrak{p}\mathfrak{o}$，则有 $N_{A/F}(\mathfrak{q})=\mathfrak{p}^f$，$ef=n$ 的关系存在．

【局部域上的单环】 设 F 是完备离散赋值域，其剩余域为有限域．设 $\mathfrak{g}$ 为 F 的赋值环†，$\mathfrak{p}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的极大理想，A 为以 F 为中心的单代数．如果 A 是可除代数†，且 $[A:F]=n^2$，则 A 具有唯一的极大整环 $\mathfrak{o}$，且 $\mathfrak{o}$ 具有唯一的素理想 $\mathfrak{q}$，使得 $\mathfrak{q}^n=\mathfrak{p}\mathfrak{o}$，并且 $\mathfrak{o}/\mathfrak{q}$ 为 $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ 的 n 次扩域．在一般情形下，当 A 不一定是可除代数时，对于 A 的极大整环 $\mathfrak{o}$ 及 $\mathfrak{o}'$，存在 A 中的元素 ξ，使 $\xi\mathfrak{o}\xi^{-1}=\mathfrak{o}'$ 成立．并且，对于任意的左(右) $\mathfrak{o}$ 理想 $\mathfrak{a}$，有使 $\mathfrak{a}=\mathfrak{o}\alpha\,(\mathfrak{a}=\alpha\mathfrak{o})$ 成立的元素 α 存在．A 总可用循环代数†的符号 (K_n,σ,π^r) 表示．这里的 K_n 为 F 的 n 次非分歧扩张，σ 为 K_n/F 的 Frobenius 置换†，π 为 F 的素元，$0\leqslant r<n$．此时可将 $r/n(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z})$ 作为加法群 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 的元素来考虑，记为 $\{A\}$．称为包含 A 的代数类的 Hasse 不变量†．对应 $A\to\{A\}$ 是自 F 上的 Brauer 群†到加法群 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 上的同构．如果 M 是 F 的有限次代数扩张，则由系数域扩张成 M 而得到的代数类 $\{A^M\}=\{M:F\}\{A\}$ 成立 (→代数)．

【代数数域上的单环】 设 F 为有限次代数数域，A 为以 F 为中心的单代数，则 A 是循环代数，且同构于可除代数 D 上的全阵代数．在 F 上 A 的代数类的阶 n 由 $[D:F]=n^2$ 确定 (H. Hasse-R. Brauer-E. Noether)．

设 F 关于素除子$^\dagger\mathfrak{p}$ 的完备化为 $F_\mathfrak{p}$，当 A 的系数域由 F 扩张为 $F_\mathfrak{p}$ 所得的 $F_\mathfrak{p}$ 上的代数记为 $A_\mathfrak{p}$ 时，对于有限素除子 $\mathfrak{p}$ 考虑由上面所确定的 $\{A_\mathfrak{p}\}$，对于无限素除子 $\mathfrak{p}$ 按照 $A_\mathfrak{p}$ 是 F 上的全阵代数与否，令 $\{A_\mathfrak{p}\}=0$ 或 $\frac{1}{2}(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z})$，则各 $\{A_\mathfrak{p}\}$ 称为 A 的 $\mathfrak{p}$ 不变量†．其次，如下定义 $\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}$ 的子群 $J_\mathfrak{p}$：

$$
\begin{aligned}
J_\mathfrak{p}&=\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}, &&\mathfrak{p}\ \text{为有限素除子},\\
&=\{0,\tfrac{1}{2}(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{Z})\}, &&\mathfrak{p}\ \text{为实无限素除子},\\
&=\{0\}, &&\mathfrak{p}\ \text{为虚无限素除子}.
\end{aligned}
$$

而且，在直积 $\prod_\mathfrak{p} J_\mathfrak{p}$ 的元素 $(\alpha_\mathfrak{p})$ $(\alpha_\mathfrak{p}\in J_\mathfrak{p})$ 中除去有限个 $\mathfrak{p}$ 外，使 $\alpha_\mathfrak{p}=0$ 且满足 $\sum_\mathfrak{p}\alpha_\mathfrak{p}=0$ 的全体记为 J．这时，对应 $A\to(\{A_\mathfrak{p}\})$ 给出自 F 上的 Brauer 群到 J 上的同构 (Hasse)．特别是，A 是 F 上的全阵代数的充分必要条件是，对于所有的素除子 $\mathfrak{p}$，$A_\mathfrak{p}$ 为 $F_\mathfrak{p}$ 上的全阵代数(→代数)．这个定理与类域论†有密切的关系．

设 $\mathfrak{o}$ 为 A 的极大整环，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ 为左 $\mathfrak{o}$ 理想．如果存在 A 的元素 ξ 使 $\mathfrak{a}\xi=\mathfrak{b}$，则 $\mathfrak{a}$，$\mathfrak{b}$ 称为**等价**的．应用这个等价关系，将左 $\mathfrak{o}$ 理想全体划分为等价类，等价类的数目称为 A 的**类数** (class number)．它与 $\mathfrak{o}$ 的选法无关，并且等于用右理想定义的类数．设使 $\{A_\mathfrak{p}\}=1/2$ 成立的实无限除子的积为 P_∞．当 P_∞ 是所有无限素除子的积，且 $[A:F]=4$ 时，A 称为**全定四元数代数** (totally definite quaternion algebra)．

如果 $\mathfrak{o}$ 为 A 的极大整环，且 A 不是全定四元数代数，则对应 $\mathfrak{a}\to N_{A/F}(\mathfrak{a})$ 给出了左 $\mathfrak{o}$ 理想类与 F 模 P_∞ 的同余理想类 (→代数数域的数论[乘法同余])之间的一一对应关系 (Eichler 定理)．

特别当A是F上的全阵代数时，则A的类数同F的类数相等．全定四元数代数的类数是由 M. Eichler 利用A的ζ函数(后述)计算出来的([5]).

设$\mathfrak{o}$为A的极大整环，$\mathfrak{a}$为整双边$\mathfrak{o}$理想，b为F的整数，ξ为$\mathfrak{o}$的元素，且$b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ P_\infty)$，$N_{A/F}(\xi)\equiv b\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}\cap F)$（乘法同余†）．如果$A$不是全定四元数代数，则存在$\mathfrak{o}$的元素$\beta$，使得$N_{A/F}(\beta)=b$，$\beta\equiv\xi(\mathrm{mod}\ \mathfrak{a})$($N_{A/F}$为缩减范数)(Eichler [6])．这个定理被称为 **Eichler 逼近定理** (approximation theorem)，用途很广．上述 Eichler 定理也可由这定理很容易地推导出来．另外，这个定理还可以推广到半单†代数群的情形(→代数群)．

【代数函数域上的代数】 对于以有限域为系数域的单变量代数函数域†上的正规单代数†，有和上面的 Hasse-Brauer-Noether 定理、Hasse 定理相当的定理成立．另外，以代数闭域为系数域的单变量代数函数域K上的正规单代数，总是K上的全阵代数(**曾(炯之)定理**).

【其他诸概念】 对于有限次代数数域上的单代数A，其阿代尔†和伊代尔†的概念可和代数数域的情形一样地引进(→阿代尔与伊代尔)．设$\mathfrak{o}$为A的极大整环，$\mathfrak{a}$为整左$\mathfrak{o}$理想，此时，将$\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$的元素的个数记为$N(\mathfrak{a})$，$A$的 **ζ 函数** (ζ-function) 由$\zeta_A(s)=\sum N(\mathfrak{a})^{-s}$ (其中和过所有整左$\mathfrak{o}$理想)所定义．这个函数也称为 **Hey ζ 函数**，它与 Dedekind ζ 函数†具有类似的性质(→ζ函数)．对于A的中心F的无限素除子$\mathfrak{p}$，在$A_\mathfrak{p}$的元素中，设缩减范数为1的元素全体为$G_\mathfrak{p}$，$G=\prod_\mathfrak{p} G_\mathfrak{p}$(过$F$的无限素除子全体的积)，则$\mathfrak{o}$的单元全体$\Gamma$可自然地看作$G$的子群，并但是离散的，对于不变测度，$G/\Gamma$的体积是有限的．$A$为可除代数的充分必要条件是$G/\Gamma$是紧的(→不连续群)．这个结果可以看作是半单代数群更一般结果的特殊情形(→代数群)．设K为G的极大紧子群†，则Γ给出了在齐性空间G/K上作用的不连续群†，从而能够讨论关于Γ的自守形式†的理论，特别当A为四元数代数†时，已进行过详细地研究(→自守函数).

【参】 [1]浅野啓三，環論及びイデアル論，共立出版，1949; [2] C. Chevalley, L'arithmétique dans les algèbres de matrices, Actualités Sci. Ind., 323, Hermann, 1936, [3] M. Deuring, Algebren, Erg. d. Math., Springer, 1935; 第二版，1968; [4] M. Eichler, Über die Idealklssenzahl hyperkomplexer Systeme, Math. Z., **43** (1938), 481—494; [5] M. Eichler, Über die Idealklassenzahl total-definiter Quaternionalgebren, Math. Z., **43** (1938), 102—109; [6] M. Eichler, Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre *L*-Reihen, J. Reine Angew. Math., **179** (1938), 227—251; [7] N. Jacobson, The theory of rings, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1943; [8] C. L. Siegel, Discontinuous groups, Ann. of Math., **44** (1943), 674—689 (Gesammelte Abhandlungen, Springer, 1966, vol. 2, p. 390—405); [9] A. Weil, Adèles and algebraic groups, Lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1961.

ζ函数 [英 zeta function 法 fonction zêta 德 Zetafunktion 俄 дзета-функция 日 ゼータ関数] 十九世纪以来，定义和研究了许多种称为ζ函数的特殊函数．关于ζ函数主要有以下四个方面的问题：I) 定义ζ函数的方法．II) ζ函数的性质．ζ函数通常具有下列四个性质：i) 在整个复平面上为单值的亚纯函数；ii) 能够展开成 Dirichlet 级数†；iii) 具有 Euler 无穷乘积表示；iv) 满足函数方程．此外，求ζ函数的极点、残数和零点也是重要的问题．III) ζ函数在数论中的应用，特别是与某个代数数域中的素理想在有限次扩域中的分解法则的关系(→类域论)．IV) 关于各种ζ函数之间相互关系的研究.

大多数的ζ函数或所谓L函数均具有 II) 中的四个性质．下面将现在已经定义的各种主要的ζ函数加以分类.

1) 代数数域的ζ函数，L函数：Riemann ζ函数，Dirichlet L函数(这些函数是ζ函数的原型)．Dedekind ζ函数，Hecke L函数，由量特征标定义的 Hecke L函数，Artin L函数，Weil L函数．2) p-adic L函数，是在 H. W. Leopoldt，久保田富雄，岩沢健吉等人的工作中引进的．3) 二次型的ζ函数：Epstein ζ函数，不定二次

型的ζ函数(C. L. Siegel)等. 4) 单代数的ζ函数, L函数: Hey ζ函数, R. Godement, 玉河恒夫定义的ζ函数及L函数等. 5) Hecke 算子的ζ函数: E. Hecke, M. Eichler, 志村五郎等人的工作中引进的. 6) 在有限域上定义的代数簇的同余ζ函数和同余L函数(E. Artin, F. K. Schmidt, A. Weil), 以及 Hasse ζ函数. 7) 伴随不连续群的ζ函数: Selberg ζ函数, 由 A. Selberg, Godement, И. М. Гельфанд 等定义的 Eisenstein 级数. 8) 与有限域上的函数域的非 Abel 类域论相关联的伊原ζ函数. 9) 伴随前齐性向量空间的ζ函数. 上述各种ζ函数、L函数之间是有密切相关系的.

【Riemann ζ函数】 在实变数 $s>1$ 时,收敛级数 $\zeta(s)=1+1/2^s+1/3^s+\cdots+1/n^s+\cdots$ 可表为无穷乘积 $\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$ 的形式,此处, p 遍及所有素数. 这早已为 L. Euler 所注意到(全集, ser. I, vol. VIII, chap. XV, § 274). 它被称为 **Euler 无穷乘积表示** (Euler's infinite product representation), 或简称为 **Euler 乘积** (Euler product). 但是,最早成功地把 $\zeta(s)$ 作为复变数 s 的函数来研究的是 B. Riemann (1859) ([26]), 因此, 现在这个函数称为 **Riemann ζ函数** (Riemann zeta function). 根据 Euler 无穷乘积表示可知, 当 $\sigma>1(s=\sigma+it)$ 时, $\zeta(s)$ 是没有零点的正则函数. 而且, Riemann 还证明了 $\zeta(s)$ 可在整个复平面上解析开拓为只在 $s=1$ 有一阶极点的亚纯函数. $(s-1)\zeta(s)$ 及 $\zeta(s)-1/(s-1)$ 都是 s 的整函数. 这可由积分表示式

$$\begin{aligned}&\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\\&=\int_0^\infty x^{s/2-1}\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right)dx\\&=\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s}+\int_1^\infty(x^{(1-s)/2-1}\\&\quad+x^{s/2-1})\left(\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x}\right)dx\end{aligned}$$

得出. 根据最后的式子还可得出等式

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

此处, $\xi(s)=(1/2)s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$. 这个等式称为ζ函数的**函数方程** (functional equation). $\zeta(s)$ 在极点 $s=1$ 的残数等于 1, 且当 $s\to1$ 时, 有 $\zeta(s)=1/(s-1)+C+O(s-1)$成立,这里的 C 是 Euler 常数†. 这个式子称为 $\zeta(s)$ 的 **Kronecker 极限公式** (Kronecker's limit formula).

关于$\zeta(s)$的零点: 当 $\mathrm{Re}\,s\geqslant1$ 时, 没有零点;当 $\mathrm{Re}\,s\leqslant0$ 时, 在 $s=-2,-4,\cdots$ 具有一阶零点, 此外没有零点; 当 $0<\mathrm{Re}\,s<1$ 时, 有无穷多个零点. 在带状区域 $0<\mathrm{Re}\,s<1$ 内的零点称为非显然零点. Riemann 猜测ζ函数的非显然零点全部都在直线 $\mathrm{Re}\,s=1/2$ 上, 这称为关于ζ函数的 **Riemann 猜想** (Riemann's conjecture), 这一猜想至今仍未被证明或否定.

如果把长方形 $0<\mathrm{Re}\,s<1$, $0<\mathrm{Im}\,s<T$ 中 $\zeta(s)$ 的零点的个数记为 $N(T)$, 则

$$N(T)=\frac{1}{2\pi}T\log T-\frac{1+\log2\pi}{2\pi}T+O(\log T)$$

成立 (H. von Mangoldt, 1905). 此外, $\zeta(s)$ 具有以下的乘积表达式:

$$\begin{aligned}(s-1)\zeta(s)&=\frac{1}{2}e^{bs}\frac{1}{\Gamma(s/2+1)}\\&\quad\times\prod_\rho\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{s/\rho},\end{aligned}$$

这里, b 为常数, ρ 遍及 $\zeta(s)$ 的所有非显然零点 (J. Hadamard, 1893). Hadamard 和 Ch. de la Vallée-Poussin 应用ζ函数的性质几乎同时证明了素数定理†(→ 素数的分布).

研究$\zeta(s)$的阶及其所取的值时, 下面的**渐近函数方程** (approximate functional equation) 非常重要. 设 $\zeta(s)$ 的函数方程为 $\zeta(s)=\varphi(s)\zeta(1-s)$, 令 $s=\sigma+it$, $2\pi xy=|t|$, 则对 $-h\leqslant\sigma\leqslant h$, $x>k$, $y>k$ (h, k 为正的常数), 一致地有

$$\begin{aligned}\zeta(s)&=\sum_{n<x}\frac{1}{n^s}+\varphi(s)\sum_{n<y}\frac{1}{n^{1-s}}+O(x^{-\sigma})\\&\quad+O(y^{\sigma-1}|t|^{1/2-\sigma})\end{aligned}$$

(G. H. Hardy-J. E. Littlewood, 1921).

Euler 具体地求出了当变数 s 取正偶数时 $\zeta(s)$ 的值:

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}B_{2m}}{(2m)!}$$

$(m=1, 2, 3, \cdots, B_{2m}$ 为 Bernoulli 数†). 然而,当 s 为奇数时, $\zeta(s)$ 的值没有这样简单的表达式. 另外,当 s 的值取负整数时, $\zeta(1-n)=-B_n/n(n=1, 2, 3, \cdots)$.

再者,作为 $\zeta(s)$ 的一个最简单的推广, A. Hurwitz (1862) 考虑了

$$\zeta(s, a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s},\ 0<a\leqslant 1.$$

它称为 **Hurwitz ζ 函数** (Hurwitz zeta function). 于是有 $\zeta(s, 1)=\zeta(s)$, $\zeta(s, 1/2)=(2^s-1)\cdot\zeta(s)$. $\zeta(s, a)$ 在整个复平面上也能单值解析开拓并且满足一定的函数方程. 但是,它一般不能分解为 Euler 乘积的形式.

【Dirichlet L函数】 设 m 为自然数,并把全体有理整数按模 m 进行分类. 所有与 m 互素的 $h=\varphi(m)$ 个类对乘法构成一个 Abel 群. 设 χ 是这个群的一个特征标,以(n)表示 n 所属的模 m 的剩余类,当 $(n, m)=1$ 时,将 $\chi((n))$ 简记为 $\chi(n)$,当 $(n, m)\neq 1$ 时设 $\chi(n)=0$. 这时,复变数 s 的函数

$$L(s)=L(s, \chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}$$

称为 **Dirichlet L 函数** (Dirichlet L-function). 当 $\sigma>1(s=\sigma+it)$ 时,它是绝对收敛的,并可表为

$$L(s, \chi)=\prod_p(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}$$

(无穷乘积表示). 如果存在模 m 的因子 $f(\neq m)$ 及模 f 的特征标 χ^0,使得当$(n, m)=1$ 时,一定有 $\chi(n)=\chi^0(n)$,则称 χ 为**非原特征标** (nonprimitive character),如果不存在这样的 χ^0,则称 χ 为**原特征标** (primitive character). 如果 χ 是非原特征标,那么一定有满足上述性质的原特征标 χ^0 存在,这时, f 称为 χ 的(并且也是 χ^0 的)**前导子** (conductor). 且有关系式

$$L(s, \chi)=L(s, \chi^0)\prod_{p\mid m}(1-\chi^0(p)p^{-s})$$

成立.

设 χ 为原特征标,如果其前导子 f 是 1,则 χ 是单位特征标($\chi=1$),且 $L(s)$就是 Riemann $\zeta(s)$. 如果 $f>1$,则 $L(s)$ 是 s 的整函数†. 特别是 $L(s)$ 在 $s=1$ 的值为有限且不等于 0: $L(1, \chi)\neq 0(\chi\neq 1, \chi$ 为原特征标). P. G. L. Dirichlet 应用这个性质证明了"算术级数的素数定理"(→ 素数的分布).

$L(s, \chi)$ 具有和 $\zeta(s)$ 相类似的函数方程. 即若 χ 是以 f 为前导子的原特征标,当 $\chi(-1)=1$ 时,令 $a=0$,当 $\chi(-1)=-1$ 时,令 $a=1$,并记

$$\xi(s, \chi)=(f\pi^{-1})^{s/2}\Gamma((s+a)/2)L(s, \chi),$$

则有 L 函数的函数方程:

$$\xi(s, \chi)=W(\chi)\xi(1-s, \bar{\chi})$$

成立,这里 $W(\chi)=(-i)^a f^{-1/2}\tau(\chi)(|W(\chi)|=1)$,而 $\tau(\chi)=\sum_{n \bmod f}\chi(n)\zeta_f^n(\zeta_f=\exp(2\pi i/f))$,后一个和称为 **Gauss 和** (Gaussian sum).

L 函数在负整数上所取的值,由 $L(1-m, \chi)=-B_{\chi,m}/m(m=1,2,3,\cdots)$ 给出. 此处, $B_{\chi,m}$ 是由

$$\sum_{\mu=1}^{f}\frac{\chi(\mu)te^{\mu t}}{e^{ft}-1}=\sum_{m=0}^{\infty}B_{\chi,m}t^m$$

所定义的. 此外,当 $\chi(-1)=-1$ 时,

$$L(1, \chi)=\frac{\pi}{i}\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{x=1}^{f}(-\overline{\chi(x)}\cdot x)$$
$$=\pi i\tau(\chi)B_{\bar{\chi},1};$$

当 $\chi(-1)=1$, $\chi\neq 1$ 时,

$$L(1, \chi)=2\frac{\tau(\chi)}{f}\sum_{x=1}^{[f/2]}(-\chi(x)\times\log|1-\zeta_f^x|).$$

$L(m, \chi)$ 的值,在下述情形可由函数方程和 $L(1-m, \chi)$ 的值得出. 如果 $\chi(-1)=1$, $m=2n=2, 4, 6, \cdots$,则

$$L(2n, \chi)=\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2\pi}{f}\right)^{2n}\tau(\chi)(-B_{\chi,2n});$$

如果 $\chi(-1)=-1$, $m=2n+1=3, 5, 7, \cdots$,则

$$L(2n+1, \chi)=(-i)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\times\left(\frac{2\pi}{f}\right)^{2n+1}\tau(\chi)(-B_{\chi,2n+1}).$$

Dirichlet L 函数，不仅对有理数域的数论是重要的，而且对二次域及分圆域的数论也是重要的(例如→[39])。

【代数数域的 ζ 函数（Dedekind ζ 函数)】可以将 Riemann ζ 函数推广为代数数域中的 ζ 函数(→代数数域的数论)。设 k 为 n 次代数数域，当 $\mathfrak{a}$ 遍及 k 的全部整理想时，设 $\zeta_k(s)=\sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s}$，则当 $\sigma=\mathrm{Re}s>1$ 时，这个级数收敛，且有 Euler 无穷乘积表示 $\zeta_k(s)=\prod_{\mathfrak{p}}(1-N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$，这里的 $\mathfrak{p}$ 遍及 k 的全部素理想。这个函数称为 **Dedekind ζ 函数** (Dedekind zeta function)。这个函数可解析开拓成整个复平面上的亚纯函数 $\zeta_k(s)$，它只在 $s=1$ 处具有一阶极点，其残数为 $h_k\kappa_k$，这里 h_k 为 k 的类数†，$\kappa_k=2^{r_1+r_2}\pi^{r_2}R/(w|d|^{\frac{1}{2}})$。其中，$r_1$，$2r_2$ 分别是 k 的实、虚共轭的个数，w 是 k 中的单位根的个数，d 为 k 的判别式†，R 为 k 的单元基准† (R. Dedekind [5], 1877)。

当 $\mathrm{Re}s\geqslant 1$ 时，$\zeta_k(s)$ 没有零点；当 $\mathrm{Re}s\leqslant 0$ 时，在 $-1,-3,-5,\cdots$ 有 r_2 阶的零点；在 $-2,-4,-6,\cdots$ 有 r_1+r_2 阶的零点。其他的零点都在 $0<\mathrm{Re}s<1$ 的带状区域内，实际上确有无穷多个零点，并猜想这些零点全都在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上(关于 Dedekind ζ 函数的 Riemann 猜想)。关于 $\zeta_k(s)$ 也有与 $\zeta(s)$ 相类似的函数方程。即设

$$\Xi_k(s)=\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2^{r_2}\pi^{n/2}}\right)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_k(s),$$

则有函数方程 $\Xi_k(s)=\Xi_k(1-s)$ 成立 (Hecke, 1917)。当域 K 是 k 的 Galois 扩张时，$\zeta_K(s)/\zeta_k(s)$ 为整函数(荒又秀夫，1933，R. Brauer, 1947)。此外还有石田信 (1957) 的研究。

【Hecke L 函数】 作为 Dirichlet L 函数在代数数域上的推广，Hecke (1917) 定义了下面的 L 函数 $L_k(s,\chi)$：设 k 是有限次代数数域，$\tilde{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}\cdot\Pi\mathfrak{p}_\infty$ ($\mathfrak{m}$ 为有限部分，$\Pi\mathfrak{p}_\infty$ 为无限部分)为 k 的整除子†。考虑模 $\tilde{\mathfrak{m}}$ 的 k 的理想类群及其特征标 χ (当$(\mathfrak{a},\mathfrak{m})\neq 1$ 时，设 $\chi(\mathfrak{a})=0$)。定义

$$L_k(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{a}}\chi(\mathfrak{a})/N(\mathfrak{a})^s$$

([15])。这里 $\mathfrak{a}$ 遍及 k 的所有整理想。$L_k(s,\chi)$ 称为 **Hecke *L* 函数** (Hecke L-function)。当 $\mathrm{Re}s>1$ 时它是收敛的，并有 Euler 无穷乘积表示

$$L_k(s,\chi)=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-\chi(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p})^s},$$

这里 $\mathfrak{p}$ 遍及 k 的所有素理想。若有以 $\tilde{\mathfrak{m}}$ 的因子 $\tilde{\mathfrak{f}}$($\tilde{\mathfrak{f}}\neq\tilde{\mathfrak{m}}$)为模的特征标 χ^0，当 $(\mathfrak{a},\mathfrak{m})=1$ 时，$\chi^0(\mathfrak{a})=\chi(\mathfrak{a})$，则 χ 称为非原特征标；如果不存在这样的 χ^0，则 χ 称为**原特征标**(primitive character)。对于一般的 χ，上述的原特征标 χ^0 是唯一存在的。这时，将 $\tilde{\mathfrak{f}}$ 称为特征标 χ 的(也称为 χ^0 的)**前导子**。若 χ 为原特征标且其前导子 $\tilde{\mathfrak{f}}$ 是(1)，则 χ 称为单位特征标，这时，$L_k(s,\chi)$ 和 $\zeta_k(s)$ 相同。若 χ 为原特征标及 $\chi\neq 1$，则 $L_k(s,\chi)$是 s 的整函数，并且 $L_k(1,\chi)\neq 0$。由此可证明，在以 k 的整除子 $\mathfrak{m}$ 为模的理想类群的各剩余类中均有无穷多个素理想存在。

设 χ 是前导子为 $\tilde{\mathfrak{f}}$ 的原特征标，d 为 k 的判别式，k 到实数域 $\boldsymbol{R}$ 中的全部不同的同构记为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{r_1}$。设 $\mathfrak{f}$ 为 $\tilde{\mathfrak{f}}$ 的有限部分。这样设 ξ 为 k 的整数且满足 $\xi\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$，则有

$$\chi((\xi))=(\mathrm{sgn}\xi^{\sigma_1})^{a_1}\cdots(\mathrm{sgn}\xi^{\sigma_{r_1}})^{a_{r_1}}$$

成立，这里 $a_m(m=1,\cdots,r_1)$ 由 χ 来确定其为 0 或者为 1。如果设

$$\xi_k(s,\chi)=(2^{-r_2}\pi^{-n/2}\sqrt{|d|\cdot N(\mathfrak{f})})^s\cdot\prod_{m=1}^{r_1}\Gamma\left(\frac{s+a_m}{2}\right)\cdot\Gamma(s)^{r_2}\cdot L_k(s,\chi),$$

则有 Hecke L 函数的函数方程

$$\xi_k(s,\chi)=W(\chi)\xi_k(1-s,\bar{\chi})$$

成立，式中 $W(\chi)$ 为绝对值是 1 的复数，其确切的值可用 Gauss 和的形式表出(末綱恕一[38])。正如利用 Riemann ζ 函数和 Dirichlet L 函数能证明关于素数分布的某些性质一样，利用 Hecke L 函数可推导出关于代数数域的素理想分布的某些性质 (→素数的分布)。

另外，高木貞治在类域论的证明中应用了

Hecke L函数，这也是很著名的．反之，应用类域论可推出 $L(1, \chi) \neq 0 (\chi \neq 1)$(→[40])．

设K为k上的类域†，它对应于k的指数为h的理想类群H．应用类域论可推导出公式

$$\zeta_K(s) = \prod_{\chi} L_k(s, \chi),$$

其中乘积遍及k的理想类群的满足 $\chi(H) = 1$ 的全体原特征标 χ．相反地，可以将这个公式看作是类域论分解法则的另一个表述形式(→类域论)．在这个公式的两边取 $s = 1$ 的残数，就推导出 $h_K \kappa_K = h_k \kappa_k \prod_{\chi \neq 1} L_k(1, \chi)$．

特别当k为有理数域 $\boldsymbol{Q}$，K为二次域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ (d 为判别式)时，有

$$\zeta_K(s) = \zeta(s) \cdot L(s), L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) n^{-s},$$

这里$\left(\frac{d}{n}\right)$为 Kronecker 符号†，当 $(n, d) \neq 1$ 时，$\left(\frac{d}{n}\right) = 0$．由此可以推导出二次域的类数公式(→二次域的数论)．另外，应用类似的方法可以计算分圆域K的类数(→代数数域的数论[分圆域的数论])．

一般当 K/k 为 Abel 扩张时，以与K, k相关的不变量来表示相对类数 h_K/h_k．这就把问题归结为计算 $L(1, \chi)$．例如，k为虚二次域，K为k上的绝对类域，或对应于射线† $S(\tilde{m})$ 的类域，以及k为实二次域，K为k的全虚的二次扩张等情形，都可以求出 h_K/h_k 的具体表达式．

【具有量特征标的 Hecke L函数】 Hecke (1918, 1920) 进一步推广特征标的概念，引进了量特征标† χ，并用它来定义L函数

$$L_k(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

他给出了这种函数的 Euler 无穷乘积表示及函数方程([12])．进而得到了关于 $\sum_{N(\mathfrak{p})<x} \chi(\mathfrak{p})$ 的估计，并由此就素理想的分布问题推导出了更为深入的结果．

后来，岩沢和 J. Tate 独立地应用代数数域k的阿代尔和伊代尔群上的调和分析，给出了量特征标χ和 $L_k(s, \chi)$ 的更明确的定义(→阿代尔与伊代尔，见 S. Lang [23])．

设 $\boldsymbol{J}_k$ 为k的伊代尔群†，$\boldsymbol{P}_k$ 为主伊代尔群†及 $\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{J}_k/\boldsymbol{P}_k$ 为伊代尔类群．这样，k的量特征标†就是 $\boldsymbol{C}_k$ 的连续特征标 χ，且由χ导出 $\boldsymbol{J}_k$ 的一个特征标，它也同样用χ表示．设 $\boldsymbol{J}_k = \boldsymbol{J}_\infty \times \boldsymbol{J}_0$ 是将 $\boldsymbol{J}_k$ 分解为无限部分 $\boldsymbol{J}_\infty$ 和有限部分 $\boldsymbol{J}_0$ 的直积．设 $\boldsymbol{U}_0$ 为 $\boldsymbol{J}_0$ 的单元群，以及对于k的每一个整理想 $\mathfrak{m}$，令 $\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m},0} = \{\mathfrak{u} \in \boldsymbol{U}_0 \mid \mathfrak{u} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$，则 $\{\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m},0}\}$构成了 $\boldsymbol{J}_0$ 中1的基本邻域系．再设 $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{m},0} = \{\mathfrak{a} \in \boldsymbol{J}_0 \mid \mathfrak{a}_\mathfrak{p} = 1, \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}\}$，把每一个 $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{J}_{\mathfrak{m},0}$ 对应于理想 $\tilde{\mathfrak{a}} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}$，其中 $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$，$k_\mathfrak{p}$ 中由 $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ 所生成的理想等于 $\mathfrak{p}^{\nu_\mathfrak{p}(\mathfrak{a})}$．这样，映射 $\mathfrak{a} \to \tilde{\mathfrak{a}}$ 为自 $\boldsymbol{J}_{\mathfrak{m},0}$ 至k的理想群 $G(\mathfrak{m}) = \{\tilde{\mathfrak{a}} \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = 1\}$ 内的同态，其核包含于 $\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m},0}$ 中．

因为量特征标χ是连续的，故对于某个 $\mathfrak{m}$ 有 $\chi(\boldsymbol{U}_{\mathfrak{m},0}) = 1$．将所有这样的理想 $\mathfrak{m}$ 的最大公因子 $\mathfrak{f}$ 称为χ的前导子．并且，对于每一个 $\mathfrak{a} \in \boldsymbol{J}_{\mathfrak{f},0}$，$\chi(\mathfrak{a})$ 的值仅依赖于理想 $\tilde{\mathfrak{a}} (\in G(\mathfrak{f}))$．所以，如果把 $\chi(\mathfrak{a})$ 记作 $\tilde{\chi}(\tilde{\mathfrak{a}})$，就得到了 $G(\mathfrak{f})$ 的特征标 $\tilde{\chi}$．应用它来定义L函数

$$L_k(s, \chi) = \sum \tilde{\chi}(\tilde{\mathfrak{a}})/N(\tilde{\mathfrak{a}})^s,$$

其中$\sum$是对所有的整理想 $\tilde{\mathfrak{a}} \in G(\mathfrak{f})$ 求和．它称为**具有量特征标 χ 的 Hecke L 函数**(Hecke L-function with Grössencharakter χ)，如果 $\chi \neq 1$，它是整函数．

另一方面，如果将χ限制在 $\boldsymbol{J}_\infty = \boldsymbol{R}^{*r_1} \times \boldsymbol{C}^{*r_2}$ 上，那末，对于 $\boldsymbol{J}_\infty \ni u = (a_1, \cdots, a_{r_1}, a_{r_1+1}, \cdots, a_{r_1+r_2})$ 有

$$\chi(u) = \prod_{j=1}^{r_1+r_2} |a_j|^{\lambda_j \sqrt{-1}} \cdot \prod_{j=1}^{r_1} (\operatorname{sgn} a_j)^{e_j} \times \prod_{l=r_1+1}^{r_1+r_2} \left(\frac{a_j}{|a_j|}\right)^{e_l},$$

式中 $e_j = 0$ 或 1，$e_l \in \boldsymbol{Z}$，$\lambda_j \in \boldsymbol{R}$．这些 $\{e_j, e_l, \lambda_j\}$ 是由χ唯一决定的．

令

$$\xi_k(s,\chi)=\left(\frac{\sqrt{|d|\cdot N(\mathfrak{f})}}{2^{r_2}\cdot\pi^{n/2}}\right)^s$$
$$\times\prod_{j=1}^{r_1}\Gamma\left(\frac{s+e_j+\lambda_j\sqrt{-1}}{2}\right)$$
$$\times\prod_{l=r_1+1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(s+\frac{|e_l|+\lambda_l\sqrt{-1}}{2}\right)$$
$$\times L(s,\chi),$$

则它满足函数方程

$$\xi_k(s,\chi)=W(\chi)\xi_k(1-s,\bar{\chi}),$$

这里 $W(\chi)$ 是绝对值为 1 的复数.

$\xi_k(s,\chi)$ 可用如下 $\boldsymbol{J}_k$ 上的积分表示:

$$\xi_k(s,\chi)=c\int_{\boldsymbol{J}_k}\varphi(\mathfrak{x})\chi(\mathfrak{x})V(\mathfrak{x})^s d^*\mathfrak{x},$$

这里, $V(\mathfrak{x})$ 为伊代尔 $\mathfrak{x}$ 的体积†, c 是依赖于 $\boldsymbol{J}_k$ 的Haar 测度 $d^*\mathfrak{x}$ 的常数. 还有, $\varphi(\mathfrak{x})$ 是根据下式定义的:

$$\varphi(\mathfrak{x})=\prod_{\mathfrak{p}}\varphi_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}),\ \mathfrak{x}=(\cdots x_{\mathfrak{p}}\cdots),$$

$$\varphi_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}(x)=x^{e_i}e^{-\pi x^2},\quad i\leqslant r_1,\ k_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}=\boldsymbol{R},$$
$$\left.\begin{aligned}&=(1/2\pi)\bar{x}^{e_i}e^{-2\pi|x|^2}, && e_i\geqslant 0\\ &=(1/2\pi)x^{-e_i}e^{-2\pi|x|^2}, && e_i<0\end{aligned}\right\}$$
$$i>r_1,\ k_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}=\boldsymbol{C},$$
$$\left.\begin{aligned}\varphi_{\mathfrak{p}}(x)&=e^{2\pi i\lambda(x)}, && x\in(\mathfrak{d}\mathfrak{f})_{\mathfrak{p}}^{-1},\\ &=0, && x\notin(\mathfrak{d}\mathfrak{f})_{\mathfrak{p}}^{-1},\end{aligned}\right\}$$

$\mathfrak{p}$ 为有限的.

这里$(\mathfrak{d}\mathfrak{f})_{\mathfrak{p}}^{-1}$是理想$(\mathfrak{d}\mathfrak{f})^{-1}$($\mathfrak{d}$ 为k/Q的共轭差积†)的 $\mathfrak{p}$ 分量 (→ 阿代尔与伊代尔), $\lambda(x)$ 是如下定义的 $k_{\mathfrak{p}}$ 的加法特征标: $\boldsymbol{Q}_p$ 为 p-adic 域†, $\boldsymbol{Z}_p$ 为 p-adic 整数环, λ_0 是内射 $\boldsymbol{Q}_p\to\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p\subset\boldsymbol{Q}/\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$,以及 $\lambda=\lambda_0\circ Tr(k_{\mathfrak{p}}/\boldsymbol{Q}_p)$. 根据

$$\chi(\mathfrak{x})=\prod_{\mathfrak{p}}\chi_{\mathfrak{p}}(x_{\mathfrak{p}}),\ \mathfrak{x}=(\cdots x_{\mathfrak{p}}\cdots),$$

如定义 χ 的 $\mathfrak{p}$ 分量 $\chi_{\mathfrak{p}}$($\mathfrak{p}$ 为 k 的有限或无限的素除子), 则 $\xi_k(s,\chi)$ 表达式的右端可分解为

$$\xi_k(s,\chi)=c\prod_{\mathfrak{p}\text{ 为有限的及无限的}}\int_{k_{\mathfrak{p}}}\varphi_{\mathfrak{p}}(x)\chi_{\mathfrak{p}}(x)V_{\mathfrak{p}}(x)^{-s}d^*x.$$

并且带有一个常数 $C_{\mathfrak{p}}$, 我们有

$$\int_{k_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}}\varphi_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}(x)\chi_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}(x)V_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}(-x)^{-s}d^*x$$
$$=C_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}\pi^{-(s+\sqrt{-1}\lambda_i+e_i)/2}\Gamma((s+\sqrt{-1}\lambda_i+e_i)/2),\ k_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}=\boldsymbol{R},$$
$$=C_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}(2\pi)^{-(s+(\sqrt{-1}\lambda_i+|e_i|)/2)}\times\Gamma(s+(\sqrt{-1}\lambda_i+|e_i|)/2),$$
$$k_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}=\boldsymbol{C},$$
$$\int_{k_{\mathfrak{p}}}\varphi(x)\chi_{\mathfrak{p}}(x)V_{\mathfrak{p}}(x)^{-s}d^*x$$
$$=C_{\mathfrak{p}}N(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}})^{s-1/2}\tilde{\chi}(\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}^{-1})\frac{1}{1-\tilde{\chi}(\mathfrak{p})/N(\mathfrak{p})^s},$$
$$\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{f},$$
$$=C_{\mathfrak{p}}N((\mathfrak{d}\mathfrak{f})_{\mathfrak{p}})^s\tau_{\mathfrak{p}}(\chi_{\mathfrak{p}})\cdot\mu(U_{\mathfrak{f},\mathfrak{p}}),\ \mathfrak{p}|\mathfrak{f},$$

这里 $\tau_{\mathfrak{p}}(\chi_{\mathfrak{p}})$ 是一个称为**局部 Gauss 和**的常数, $\mu(U_{\mathfrak{f},\mathfrak{p}})$ 是 $\{u\in k_{\mathfrak{p}};\ u\equiv 1(\bmod\ \mathfrak{f})\}$ 的体积. 这些在 $k_{\mathfrak{p}}$ 上的积分分别是 $\xi_k(s,\chi)$ 的 Γ 因子及 Euler 乘积因子. 通过对阿代尔群 $\boldsymbol{A}_k$ 上的函数 $\varphi(x)$ 及其 Fourier 变换, 应用 Poisson 求和公式就得到函数方程 (→ 阿代尔与伊代尔).

设 $\boldsymbol{D}_k$ 为伊代尔类群 $\boldsymbol{C}_k$ 中包含单位元 1 的连通分支. 如果 $\chi(\boldsymbol{D}_k)=1$, 则 χ 所对应的 $\tilde{\chi}$ 是 k 的理想类群的以 $\mathfrak{f}$ 为前导子的特征标. 反之, k 的全部特征标都可以这样得出.

如前节所述, 关于(理想类群的)特征标的 Hecke L 函数可用来陈述类域论的分解法则. 然而,关于一般的量特征标的 L 函数,如此深入的数论性质至今还没有发现. 不过谷山豊按照 A. Weil 的意见研究了关于所谓 A_0 型的特殊的量特征标的 L 函数, 证明了它与 k 的某种无限次 Abel 扩张的数论有深刻的关系 (→ 谷山 [42]). 特别当 $L(s,\chi)$为具有复数乘法的 Abel 簇A 上的 Hasse ζ 函数†的因子时, 它可表述由 A 的等分点的坐标生成的域的数论.

【Artin L 函数】 设 K 为 (n 次)代数数域 k 的有限次 Galois 扩张, $G=G(K/k)$ 是它的 Galois 群, $\sigma\to A(\sigma)$ 为G的矩阵表示, 及 χ 为它的特征标. 对于 k 的素理想 $\mathfrak{p}$,定义 $L_{\mathfrak{p}}(s,\chi)$ 为

$$\log L_{\mathfrak{p}}(s,\chi)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(\mathfrak{p}^m)}{mN(\mathfrak{p}^m)^s},\ \operatorname{Re}s>1,$$

式中 T 为 $\mathfrak{p}$ 的惯性群†, $|T|=e$,

$$\chi(\mathfrak{p}^m)=\frac{1}{e}\sum_{\tau\in T}\chi(\sigma^m\tau),$$

及 σ 为 $\mathfrak{p}$ 的 Frobenius 置换†. 它也可以表示为

$$L_{\mathfrak{p}}(s,\chi)=\det(E-A_{\mathfrak{p}}\cdot N(\mathfrak{p})^{-s}),$$
$$A_{\mathfrak{p}}=\frac{1}{e}\sum_{\tau\in T}A(\sigma\tau).$$

特别当 $T=\{1\}$ 时，即 $\mathfrak{p}$ 在 K/k 中是非分歧的，则有

$$L_{\mathfrak{p}}(s,\chi)=\det(E-A(\sigma)N(\mathfrak{p})^{-s}).$$

现令

$$L(s,\chi,K/k)=\prod_{\mathfrak{p}}L_{\mathfrak{p}}(s,\chi),\ \mathrm{Re}\,s>1,$$

$L(s,\chi,K/k)$ 称为 **Artin L 函数** (Artin L-function) ([2]).

1) $L(s,\chi,K/k)$ 的最重要的性质是，若 K/k 为 Abel 扩张，χ 为线性特征标，则由类域论可推出 $\chi(\mathfrak{p})$ 和以 K/k 的前导子†为模的 k 的理想类群的特征标是一致的，即

Artin L 函数 $=$ Hecke L 函数.

事实上，这个等式和类域论中的一般互反律†等价. 在历史上，Artin 先是在几个具体的情形猜想到有上面的等式成立，后来才得到他的一般互反律. 此外，还有

2) 当 $K'\supset K\supset k$ 时，$L(s,\chi,K/k)=L(s,\chi,K'/k)$.

3) 当 $K\supset\Omega\supset k$ 及 ψ 为 $G(K/\Omega)$ 的特征标时，$L(s,\psi,K/\Omega)=L(s,\chi_{\psi},K/k)$，其中 χ_{ψ} 是由 ψ 诱导表示† $G(K/k)$ 的特征标.

4) 如果 χ_1 为单位特征标，则 $L(s,\chi_1,K/k)=\zeta_k(s)$.

5) $L(s,\chi_1+\chi_2,K/k)=L(s,\chi_1,K/k)\cdot L(s,\chi_2,K/k)$.

反之，满足性质 1)—5) 的 $L(s,\chi,K/k)$ 一定是 Artin L 函数.

6) 如 χ_R 为 G 的正则表示，则 $L(s,\chi_R,K/k)=\zeta_K(s)$. 所以

$$\zeta_K(s)=\zeta_k(s)\prod_{\chi\neq 1}L(s,\chi,K/k)^{\chi(1)},$$

其中 χ 遍及 G 的所有 $\neq 1$ 的不可约特征标.

7) 有限群 G 的每一个特征标 χ，可利用 G 的循环子群的线性特征标 $\psi_i(i=1,2,\cdots)$ 表为 $\chi=\sum m_i\chi_{\psi_i}(m_i\in\boldsymbol{Z})$，其中 χ_{ψ_i} 是由 ψ_i 诱导出的特征标 (Brauer). 因此，根据 3) 及 5) 推得，Artin L 函数可以用若干个 Hecke L 函数 $L_{\Omega_i}(s,\psi_i)$ 的整数幂(正的或负的)之积来表示：

$$L(s,\chi,K/k)=\prod_i L_{\Omega_i}(s,\psi_i)^{m_i}.$$

因此，Artin L 函数为定义在整个复平面上的单值亚纯函数. 并且，如 χ 是不可约特征标且 $\chi\neq 1$，则上式右边的乘积中出现的 ψ_i 均不等于 1. 虽然 Artin 猜想，对这样的 χ，$L(s,\chi,K/k)$ 为整函数，但是直到今天这个猜想还未解决 (**Artin 猜想** (Artin's conjecture)).

8) "函数方程". 设 $\mathfrak{p}_{\infty,i}(i=1,\cdots,r_1+r_2)$ 为 k 的无限素点，令

$$\gamma(s,\chi,\mathfrak{p}_{\infty,i},K/k)$$
$$=(\Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2))^{\chi(1)}$$

$\mathfrak{p}_{\infty,i}$ 为复的；

$$=\Gamma(s/2)^{(\chi(1)+\chi(\sigma))/2}\Gamma((s+1)/2)^{(\chi(1)-\chi(\sigma))/2}$$

$\mathfrak{p}_{\infty,i}$ 为实的.

这里 $\sigma\in G$ 是 $\mathfrak{p}_{\infty,i}$ 在 K 中的素除子的分解群的生成元.

另一方面，Artin 还以下式定义了关于 Galois 域 K/k 的**具有群特征标 χ 的前导子**(conductor with group character) $\mathfrak{f}_{\chi}$ (J. Reine Angew. Math., **164** (1931)). 首先，对于 G 的子集 $\mathfrak{m}$，令 $\chi(\mathfrak{m})=\sum_{m\in\mathfrak{m}}\chi(m)$，设

$$\mathfrak{f}_{\chi}=\mathfrak{f}(\chi,K/k)$$
$$=\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{[\{e\chi(1)-\chi(T)\}+\{\mathfrak{p}^{e_1}\chi(1)-\chi(V^{(1)})\}+\cdots]/e},$$

这里 $V^{(1)},V^{(2)}\cdots$，为 $\mathfrak{p}$ 在 K 中的素除子 $\mathfrak{P}_1$ 的分歧群†，$\mathfrak{p}^{e_i}=|V^{(i)}|$ (→ 代数数域的数论).

现在令

$$\xi(s,\chi,K/k)$$
$$=\left(\frac{|d|^{\chi(1)}N_k(\mathfrak{f}_{\chi})}{\pi^{n\chi(1)}}\right)^{s/2}\prod_{\mathfrak{p}_{\infty,i}}\gamma(s,\chi,\mathfrak{p}_{\infty,i},K/k)\cdot L(s,\chi,K/k),$$

则有函数方程

$$\xi(1-s,\bar{\chi},K/k)=W(\chi)\xi(s,\chi,K/k),$$
$$|W(\chi)|=1$$

成立. 这个函数方程可以根据 7) 归结为 Hecke L 函数的函数方程而加以证明.

9) 在关于素理想分布的问题上也有某些应用 (→ 末綱 [38]).

【Weil L 函数】 Weil 将 Hecke 的具有量特征标的 L 函数和 Artin L 函数两者结合起来定义了一种新的 L 函数([48]). 设 K 为代数数

域 k 的有限次 Galois 扩张，$\boldsymbol{C}_k$ 为 k 的伊代尔类群，$G_{K,k}$ 为 $\boldsymbol{C}_k$ 通过 $G=G(G/k)$ 的扩张，它对应于属于 G 的标准上同调类†的二维上闭链†．从而 $G_{K,k}\supset \boldsymbol{C}_k$，且 $G_{K,k}/\boldsymbol{C}_k\cong G(G/k)$．Weil 仿照 Artin L 函数，利用 $G_{K,k}$ 定义了这种 L 函数．玉河把其函数方程归结为 Hecke L 函数的函数方程，而作出了证明（1953）．

【Riemann 猜想】 所谓 Riemann 猜想就是 Riemann ζ 函数在 $0<\mathrm{Re}s<1$ 内的零点都在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上．这个猜想前面已经讲过．Riemann 在其论文（[26]）中，叙述了包括这个猜想在内的六个猜想，并在假定这些猜想成立的前题下，证明了素数定理

$$\pi(x)\sim\frac{x}{\log x}\sim Li(x)=\int_2^x\frac{dx}{\log x},\ x\to\infty.$$

这里，$\pi(x)$ 是小于 x 的素数的个数．这些猜想中的其他五个猜想后来都得到了证明，只有上面这个猜想，虽然认为它是正确的、但直到现在也没有人能作出证明（在［21］中有详细的解释）．另外，后来不用 Riemann 猜想，Hadamard 及 de la Vallée-Poussin 独立地证明了素数定理（→ 素数的分布）．

R. Backlund 和 J. I. Hutchinson 实际计算了 $\zeta(s)$ 的零点，证实了至少在 $0<|\mathrm{Im}s|<300$ 的范围内零点确是在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上．E. C. Titchmarsh（1936）又进一步在 $0<|\mathrm{Im}s|<1468$ 的范围内作了验证．R. S. Lehman 证明了 $\zeta(\sigma+it)$ 正好有 2,500,000 个零点在 $0<t<170,571.35$ 内，它们都在 $\sigma=\frac{1}{2}$ 这条直线上，且都是单零点（Math. Comp., **20** (1966)）．后来，J. Rosser, J. M. Yohe 及 L. Schoenfield 把这个计算推进到前 3,500,000 个零点（Proc. IFIP Congress, Edinburgh 1968, vol. **1** (1969)）．最近，R. P. Brent 证明恰有 75,000,000 个零点在 $0<t<32,385,736.4$ 内，它们都在直线 $\sigma=1/2$ 上，且都是单零点（Math. Comp., **33** (1979)）．

在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上，$\zeta(s)$ 有无限多个的零点是 Hardy 证明的（1914）．在这条直线的 $0<\mathrm{Im}s<T$ 的线段上，$\zeta(s)$ 的零点个数如记为 $N_0(T)$，Selberg 证明了 $N_0(T)>AT\log T$（A 为正常数）（1942）．所以，若设在长方形 $0<\mathrm{Re}s<1$，$0<\mathrm{Im}s<T$ 内 $\zeta(s)$ 的零点个数为 $N(T)$，则有

$$\liminf_{T\to\infty} N_0(T)/N(T)>0$$

成立．N. Levinson 证明了 $\liminf_{T\to\infty} N_0(T)/N(T)>\frac{1}{3}$（Advances in Math., **13** (1974)）．另外，若设在 $\frac{1}{2}-\varepsilon<\mathrm{Re}s<\frac{1}{2}+\varepsilon,0<\mathrm{Im}s<T$ 内 $\zeta(s)$ 的零点个数为 $N_\varepsilon(T)$，那末无论正数 ε 怎样小，必有 $\lim N_\varepsilon(T)/N(T)=1$ 成立（H. Bohr-E. Landau, 1914）．为了仔细地研究 $\zeta(s)$ 的值的分布，Bohr 创立了概周期函数论（1925）．

D. Hilbert 在巴黎的演讲中指出，Riemann 猜想与

$$\pi(x)=Li(x)+O(\sqrt{x}\log x),\ x\to\infty$$

是等价的（H. von Koch, 1901）．此外，设 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数，则 Riemann 猜想也等价于对任意的 $\varepsilon>0$，有

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\mu(n)\right|=O(N^{1/2+\varepsilon}),\ N\to\infty.$$

还有，如果 Riemann 猜想成立，则 $\zeta(s)$ 在 $0<\mathrm{Re}s<1$，$0<\mathrm{Im}s<T$ 内的零点个数

$$\begin{aligned}N(T)=&(1/2\pi)T\log T\\&-((1+\log 2\pi)/2\pi)T\\&+o(\log T),\ T\to\infty\end{aligned}$$

（Littlewood, 1924）．

关于代数数域的 ζ 函数及 L 函数的零点的计算是很困难的，然而都提出同样的关于零点的猜想．

对于代数数域 K 的所有量特征标 χ 的 Hecke L 函数 $L(s,\chi)$，Weil 证明了 Riemann 猜想成立的充分必要条件是在伊代尔群 $\boldsymbol{J}_k$ 上定义的某个广义函数是正定的（[50]）．

关于代数数域的 ζ 函数和 L 函数，我们还不知道在实轴的 (0, 1) 区间内是否有零点存在，Selberg-S. Chowla 等进行了这方面的研究．

对于以后定义的ζ函数也要研究其零点和极点位置的类似问题(→[单变量代数函数域或代数曲线的同余ζ函数],[代数簇的同余ζ函数],[Selberg ζ 函数,伴随不连续群的ζ函数]).

【p-adic L函数】 久保田及 Leopoldt 定义了这样的L函数 $L_p(s, \chi)$; 它的定义域是有理 p-adic 单元群 $\{u|u \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)\}$,它的值域是 p-adic 域 $\boldsymbol{Q}_p$. 它和分圆域的数论有深刻的关系. 后来,岩泽应用他的 Γ 扩张理论给出了深刻的解释([18]).

【二次型的ζ函数】 Dirichlet 定义了与二元二次型相关联的 Dirichlet 级数,并也考虑了展布在具有给定判别式D的全体二元二次型的类上的这样的 Dirichlet 级数的和,实际上它等价于二次域的 Dedekind ζ 函数. Dirichlet 给出了二元二次型类数的公式,这就是现在的二次域的狭义类数公式.

按照二元二次型是定型或不定型,我们要用不同的方法去求得它的类数.

Epstein ζ 函数 (Epstein zeta function). P. Epstein 将正定二元二次型的ζ函数的定义,推广到n元的情形(Math. Ann. **56** (1903), **63** (1907)). 设V为$\boldsymbol{R}$上的具有正定二次型Q的m维实向量空间,设M为V内的格[†],令

$$\zeta_Q(s, M) = \sum_{\substack{x \in M \\ x \neq 0}} \frac{1}{Q(x)^s}, \ \mathrm{Re}\, s > \frac{m}{2}.$$

当 $\mathrm{Re}\, s > m/2$ 时,级数绝对收敛,且在 $m/2$ 处有一阶极点:

$$\lim_{s \to \frac{m}{2}} \left(s - \frac{m}{2}\right) \zeta_Q(s, M) = D(M)^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^{-1},$$

$$D(M) = \det|Q(x_i, x_j)|.$$

当 $Q(x)(x \in M,\ x \neq 0)$的值总是正整数时,设使得 $Q(x) = n$ 的不同的 $x \in M$ 的个数为 $a(n)$,则可表为

$$\zeta_Q(s, M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}.$$

一般情形下取M的基为 $x_1, \cdots, x_m$; 设其对偶基为 $x_1^*, \cdots, x_m^* (Q(x_i, x_j^*) = \delta_{ij})$, 则 $M^* = \sum_i x_i^* \boldsymbol{Z}$ 称为M的**对偶格** (dual lattice). 若定义 ϑ 级数[†]

$$\vartheta_Q(u, M) = \sum_{x \in M} \exp(-\pi u Q(x)),$$

则有

$$\vartheta_Q(u, M) = (u^{-m/2} D(M)^{1/2}) \vartheta_Q(u^{-1}, M^*).$$

成立. 如令

$$\xi_Q(s, M) = \pi^{-s} \Gamma(s) \cdot \zeta_Q(s, M),$$

根据以上的关系式就导出函数方程:

$$\xi_Q(s, M) = D(M)^{-1/2} \cdot \xi_Q(m/2 - s, M^*).$$

一般来说, $\zeta_Q(s, M)$不能表为 Euler 无穷乘积.

特别考虑 $M = \sum \boldsymbol{Z} x_i (x_i = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0))$, 对 $x = (u_1, \cdots, u_m)$, $Q(x) = \sum_{i=1}^{m} u_i^2$ 的情形. 若令

$$\zeta_m(s) = \zeta_Q(s, M), \ L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4}{n}\right) n^{-s},$$

则有:

$$\zeta_1(s) = 2\zeta(2s),$$

$$\zeta_2(s) = 4\zeta(s) \cdot L(s)$$
$$= 4(\boldsymbol{Q}(\sqrt{-1})\text{的 Dedekind ζ 函数}),$$

$$\zeta_4(s) = 8(1 - 2^{2-2s})\zeta(s)\zeta(s-1),$$

$$\zeta_6(s) = -4(\zeta(s)L(s-2) - 4\zeta(s-2)L(s)),$$

$$\zeta_8(s) = 16(1 - 2^{1-s} + 2^{4-2s})\zeta(s) \cdot \zeta(s-3),$$

$$\zeta_{10}(s) = (4/5)(\zeta(s)L(s-4) + 4^2\zeta(s-4)L(s)) - 2\sum_{\substack{\mu \in \boldsymbol{Z}[\sqrt{-1}] \\ \mu \neq 0}} \frac{\mu^4}{(\mu\bar{\mu})^s},$$

$$\zeta_{12}(s) = c_1 2^{-s} \zeta(s)\zeta(s-5)(2^6 - 2^{6-s}) + c_2 \varphi\{\sqrt{\Delta(\tau)}\},$$

$\varphi\{\sqrt{\Delta(\tau)}\}$为通过 Mellin 变换对应于 $\sqrt{\Delta(\tau)}$ 的 Dirichlet 级数,

$$\Delta(\tau) = z\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1 - z^n)\right\}^{24}, \ z = e^{2\pi i\tau}.$$

$\zeta_m(s)$ 在直线 $\sigma = m/4$ 上具有零点, 当 $m = 4, 8$ 时, 可分别给出如下:

$m = 4$: $s = 1 + l\pi i/\log 2,\ l = 1, 2, \cdots,$

$m = 8$: $s = 2 + (i/\log 2)(2l\pi \pm \arctan\sqrt{15}),$
$l = 0, \pm 1, \cdots.$

对于二元二次型的 Epstein ζ 函数

$$\zeta_Q(s) = \sum_{m,n}{}' Q(m, n)^{-s};$$

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

$a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $a > 0$, $c > 0$, $\Delta = 4ac - b^2 > 0$, 有如下的 Chowla-Selberg (1949) 公式:

$$\zeta_Q(s) = 2\zeta(2s)a^{-s} + \frac{2^{2s}a^{s-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(s)\Delta^{s-1/2}}\zeta(2s-1) \cdot \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi^s 2^{s+3/2}}{a^{1/2}\Gamma(s)\Delta^{s/2-1/4}} \times \sum_{n=0}^{\infty} n^{s-1/2}\sigma_{1-2s}(n) \cos\frac{n\pi b}{a} \times \int_0^{\infty} \varphi^{s-3/2}\exp\left\{-\frac{\pi n\Delta^{1/2}}{2a}(\varphi + \varphi^{-1})\right\}d\varphi,$$

式中 $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, $\zeta(s)$ 为 Riemann ζ 函数. 特别当 $Q(x, y)$ 为虚二次域 k 的范数形式时, $\zeta_Q(s)$ 和二次域 k 的 ζ 函数 $\zeta_k(s)$ 是一致的. 利用以上的公式可以证明下述结果: 设 $h(-\Delta)$ 是判别式为 $-\Delta$ 的虚二次域的类数, 则

1) $h(-\Delta) \to \infty$, $\Delta \to \infty$ (M. Deuring, 1933; H. Heilbronn, 1934),

2) $h(-\Delta) > \Delta^{1/2-\varepsilon}$, $\Delta \gg 0$ (C. L. Siegel).

另外, 对于 Dirichlet L 函数 $L_p(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right) \times n^{-s}$, 我们有

3) 如果 p 为奇素数, $p > 7$, $h(-p) = 1$, 则存在 $\theta \in (-1, 1)$, 使得

$$\zeta\left(\frac{1}{2}\right)L_p\left(\frac{1}{2}\right) = C + \log\left(\frac{\sqrt{p}}{8\pi}\right) + \frac{8\theta e^{-\pi\sqrt{p}/2}}{\pi\sqrt{p}(1-e^{-\pi\sqrt{p}/2})}$$

成立, 其中 C 为 Euler 常数†. 因此, 当 $p = 43, 67, 163$ 时, $L_p(1/2) \neq 0$.

关于不定二次型的 **Siegel ζ 函数** (Siegel zeta function). Siegel 对于非退化的不定二次型, 也定义了在整个复平面上为亚纯的, 满足函数方程的 ζ 函数 (Siegel) [36].

以上这些 ζ 函数是对于有理整系数的二次型定义的. 对于以代数数域的元素为系数的二次型的情形, 是由玉河, K. G. Ramanathan 研究的.

【代数的 ζ 函数】 K. Hey 定义了有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上的单代数$^{\dagger}A$ 的 ζ 函数 (M. Deuring [6]) (→ 结合代数的数论). 即取 A 中任意极大整环† $\mathfrak{o}$, 令

$$\zeta_A(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}, \ \mathrm{Re}s > 1.$$

其中 $\sum_{\mathfrak{a}}$ 是对 $\mathfrak{o}$ 的全部左整理想求和. ζ_A 不依赖于极大整环 $\mathfrak{o}$ 的选取. 设 A 的中心†为 k, 并令 $(A:k) = n^2$. 首先将 ζ_A 分解为 Euler 无穷乘积表示: $\zeta_A(s) = \prod_{\mathfrak{p}} Z_{\mathfrak{p}}(s)$ ($\mathfrak{p}$ 遍及极大整环 $\mathfrak{o}$ 的素理想). 对于不能整除 $\mathfrak{o}$ 的判别式 $\mathfrak{d}$ 的 $\mathfrak{p}$, $Z_{\mathfrak{p}}(s)$ 与 $\prod_{j=0}^{n-1} \zeta_k(ns-j)$ 的 $\mathfrak{p}$ 分量是一致的. 所以,

$$\zeta_A(s) = \prod_{j=0}^{n-1} \zeta_k(ns-j) \times \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}} \left[\prod_{j=0}^{n-1}(1 - N(\mathfrak{p}_k)^{j-ns} \Big/ \prod_{j=0}^{\kappa_{\mathfrak{p}}-1}(1 - N(\mathfrak{p}_k)^{e_{\mathfrak{p}}j-ns})\right]$$

成立, 式中 $\mathfrak{p}_k$ 为包含在 $\mathfrak{p}$ 中的 k 的素理想, $\mathfrak{p}_k = \mathfrak{p}^{e_{\mathfrak{p}}}$, $\kappa_{\mathfrak{p}}$ 为 $\mathfrak{p}$ 的容量†.

还有, 如果 A 为可除代数 $\mathfrak{D}$ 上的 r 阶全阵代数: $A = D_r((A:D) = r^2)$, 则有

$$\zeta_A(s) = \prod_{j=0}^{r-1} \zeta_{\mathfrak{D}}(rs-j),$$

且 $\zeta_{\mathfrak{D}}(s)$ 满足类似于 $\zeta_k(s)$ 的函数方程 (Hey). $\zeta_A(s)$ 也为复平面上的亚纯函数, $s = 1, (n-1)/n, \cdots, 1/n$ 为其一阶极点. 利用分析方法, M. Zorn (1931) 证明了: 具有中心 k 的单代数 A, 如果对 k 的每一个有限或无限的素除子 $\mathfrak{p}$, $A_{\mathfrak{p}}$ 是 $k_{\mathfrak{p}}$ 上的矩阵代数, 那末它本身也是 k 上的矩阵代数. Brauer-H. Hasse-E. Noether 给出了这个定理的纯代数证明.

藤崎源二郎 (1958) 仿照岩沢-Tate 的方法给出了上述结果的另外的证明. 作为 ζ 函数的

直接应用，由计算 ζ_A 在 $s=1$ 的残数，推导出了包括极大整环 $\mathfrak{o}$ 的类数的公式. M. Eichler (1953)引进了相当于具有类特征标的 Hecke L 函数的函数

$$\zeta_A(s,\chi)=\sum_{\mathfrak{A}}\chi(N_{A/k}(\mathfrak{A}))/N(\mathfrak{A})^s,$$

其中 $\mathfrak{A}$ 为极大整环 $\mathfrak{o}$ 的左整理想，χ 为 mod $\mathfrak{f}$ 的 k 的类特征标. 藤崎 (1962) 将上面的 χ 用 k 的量特征标来代替，并求出了它的函数方程及 Euler 无穷乘积表示.

Godement 定义了最一般的代数的 ζ 函数 ([101]), 玉河深入地研究了具体的可除代数的 ζ 函数，特别是证明了它们的函数方程 ([41]).

设 A 的阿代尔环为 $\tilde{A}=\prod_{\mathfrak{p}}{}' A_{\mathfrak{p}}$，伊代尔群为 $G=\prod_{\mathfrak{p}}{}' G_{\mathfrak{p}}$. 设 $A_{\mathfrak{p}}$ 的极大整环为 $\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}$，设 $G_{\mathfrak{p}}$ 的极大紧子群为 $U_{\mathfrak{p}}$. 设 $\omega_{\mathfrak{p}}$ 为 $G_{\mathfrak{p}}$ 关于 $U_{\mathfrak{p}}$ 的球带函数[†]: 即 $\omega_{\mathfrak{p}}$ 为 $G_{\mathfrak{p}}$ 上的函数并满足 $\omega_{\mathfrak{p}}(ugv)=\omega_{\mathfrak{p}}(g)\ (u,v\in U_{\mathfrak{p}})$, $\omega_{\mathfrak{p}}(1)=1$, $\int_{U_q}\omega_{\mathfrak{p}}(guh)du=\omega_{\mathfrak{p}}(g)\omega_{\mathfrak{p}}(h)$. 我们还由下式定义 $A_{\mathfrak{p}}$ 上的权函数 $\varphi_{\mathfrak{p}}$:

$$\varphi_{\mathfrak{p}}(x)=\mathfrak{O}_{\mathfrak{p}}\text{ 的定义函数},\ \mathfrak{p}\text{ 为有限时}$$
$$=\exp(-\pi T_{\mathfrak{p}}(xx^*)),\ \mathfrak{p}\text{ 为无限时}.$$

其中 $T_{\mathfrak{p}}$ 为 $A_{\mathfrak{p}}/R$ 的缩减迹[†], *为正对合[†]. 玉河用

$$\zeta_p(s,\omega_{\mathfrak{p}})=\int_{G_{\mathfrak{p}}}\varphi_{\mathfrak{p}}(g)\omega_{\mathfrak{p}}(g^{-1})|N_{\mathfrak{p}}(g)|_{\mathfrak{p}}^s dg$$

定义了以 $\omega_{\mathfrak{p}}$ 为特征标的局部 ζ 函数，并给出了它的具体形式，式中 $N_{\mathfrak{p}}$ 为 $A_{\mathfrak{p}}/k_{\mathfrak{p}}$ 的简化范数[†], $\|_{\mathfrak{p}}$ 为 $k_{\mathfrak{p}}$ 的赋值. 这样，$\omega=\prod_{\mathfrak{p}}\omega_{\mathfrak{p}}$ 是 G 关于 $\prod U_{\mathfrak{p}}=U$ 的球带函数. 特别地，当 ω 是属于 G 的离散子群 $\Gamma=A^*=\{A$ 的可逆元全体$\}$ 的谱的正定球带函数时，以 ω 为特征标的 A 的**玉河 ζ 函数** (Tamagawa zeta function) 由下式给出:

$$\zeta(s,\omega)=\prod_{\mathfrak{p}}\zeta_{\mathfrak{p}}(s,\omega_{\mathfrak{p}})$$
$$=\int_G\varphi(g)\omega(g^{-1})\|g\|^s dg.$$

其中，$\varphi(g)=\Pi\varphi_{\mathfrak{p}}(g_{\mathfrak{p}})$, $\|\ \|$ 为 G 的元素 g 的容积. 当 A 是可除代数时，$\zeta(s,\omega)$ 可解析开拓成整个复平面上的亚纯函数，并满足函数方程. 此外，木下素夫 (1965) 证明，当 A 为 $\boldsymbol{Q}$ 上的 n 次全阵代数 $M_n(\boldsymbol{Q})$ 时，$\zeta(s,\omega)$ 满足函数方程. 玉河 ζ 函数也可看作为由 Hecke 算子定义的 ζ 函数的一种.

当球函数 ω 是 G/U 上的自守函数时，我们可由与 U 的有限维表示相伴的 G/U 上的向量丛的自守截面 f 来构造 $\zeta(f,s)$. 当 A 是全实代数数域 $\boldsymbol{\Phi}$ 上不定四元代数时，A 的各种整环的单元群都不连续地作用于上半复平面的乘积上. 从而全纯形式的空间与 A 自然地相伴. 对于与这些全纯自守形式相伴的 ζ 函数的研究是由 M. Eichler 开始的，后为志村五郎，清水英男等人所推广. Eichler 研究了 $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{Q}$ 的情形，志村、清水研究了任意全实域 $\boldsymbol{\Phi}$ 的情形，他们的方法是构造 A 的算术并且定义一般的全纯自守形式，Hecke 算子及相应的 ζ 函数. 清水 ([92]) 证明了这些 ζ 函数的函数方程. 清水推广了 Eichler 的工作并且找出了属于不同判别式和级 (level) 的各种四元代数的整环的 ζ 函数之间的关系 ([56]). 最近的一些工作继续这方面的研究，例如，土井公二和長沼英久的工作 ([66]). 此外，清水通过 ζ 函数的残数的计算，给出了对应的商空间 $\Gamma\backslash\mathfrak{H}\times\cdots\times\mathfrak{H}$ (其中 $\mathfrak{H}$ 是上半平面)的体积公式 [92].

属于 $GL_2(k)$ (其中 k 是数域或有限常数域上单变量函数域)的自守形式(包括全纯和非全纯情形都在内)的一般理论，以及对应的 ζ 函数的一般理论是由 Weil 研究的 ([105]). H. M. Jacquet 及 R. P. Langlands ([82, 83]) 从表示论的观点发展了一种理论，得到了和 Weil 理论实质上一样的结果. 他们的理论提供一个统一的方法来讨论四元代数的 Godement-玉河 ζ 函数和 Eichler-志村-清水 ζ 函数. Eichler 的一个定理断言自守形式可表示为(某一个 Γ 中的) ϑ 函数，清水把这个定理推广成 Jacquet 和 Langlands 理论体系中的一个定理 ([94]). 这些 ζ 函数也是由 Hecke 算子定义的 ζ 函数，这在下一节中将会讲到.

【由 Hecke 算子定义的 ζ 函数】 代数数域、代数或二次型的 ζ 函数和 L 函数都是由

Dirichlet 级数所定义，再解析开拓成复平面上单值函数，并满足函数方程．反之，我们可以试用这样的性质来刻划这些函数．

1) H. Hamburger (1921—1922) 用如下三个性质来刻划 Riemann ζ 函数(精确到一常数倍)：i) 能够展开为$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$ ($\mathrm{Re}\,s\gg 0$)；ii) 除了 $s=1$ 为其一阶极点外，在复平面为正则；iii) $G(s)=G(1-s)$，这里 $G(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$.

2) Hecke 理论([13])：固定 $\lambda>0$, $k>0$, $\gamma=\pm1$, 并对于解析函数 $\varphi(s)$，令

$$R(s)=(2\pi/\lambda)^{-s}\Gamma(s)\varphi(s),$$

假定有 i) $(s-k)\varphi(s)$ 为亏数有限的整函数；ii) $R(s)=\gamma R(k-s)$；iii) 能够展开为 $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}$ ($\mathrm{Re}\,s>\sigma_0$)．此时，$\varphi(s)$ 称为属于 sign (λ, k, γ) 的函数．

$\zeta(2s)$, $L(2s)$ 或 $L(2s-1)$ 都是属于这类函数的例子，这里 L 可以是 Dirichlet L 函数，虚二次域的量特征标的 L 函数，或其 Γ 因子为 $\Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2)$ 的实二次域的类特征标的 L 函数等等．如 $\varphi(s)$属于 sign (λ,k,γ)，则 $n^{-s}\varphi(s)$ 属于 sign $(n\lambda, k, \gamma)$．对于每一个属于 sign (λ, k, γ) 的 Dirichlet 级数 $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$，我们以级数

$$f(\tau)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{2\pi in\tau/\lambda}$$

与它相对应，这里，$a_0=\gamma(2\pi/\lambda)^{-k}\Gamma(k)\mathrm{Res}_{s=k}(\varphi(s))=\gamma\,\mathrm{Res}_{s=k}(R(s))$．这个对应 $\varphi(s)\leftrightarrow f(\tau)$ 也可由 Mellin 变换†

$$R(s)=\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-2\pi ny/\lambda}\right)y^{s-1}dy$$
$$=\int_0^{\infty}(f(iy)-a_0)y^{s-1}dy,$$

$$f(iy)-a_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,s=\sigma_0}R(s)y^{-s}ds$$

来实现．这时，1) $f(\tau)$ 在上半平面为正则且 $f(\tau+\lambda)=f(\tau)$；2) $f(-1/\tau)/(-i\tau)^k=\gamma f(\tau)$；3) 对所有的 x，一致有 $f(x+iy)=O(y^{\text{常数}})(y\to+0)$.

反过来，由满足 1), 2), 3) 的 $f(\tau)$ 通过上述变换构成的 Dirichlet 级数 $\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}$ 属于 sign (λ, k, γ)．这个函数 $f(\tau)$ 也称为是属于 sign (λ, k, γ) 的．条件 1), 2) 意味着 $f(\tau)$ 是关于由 $\tau\to\tau+\lambda$, $\tau\to-1/\tau$ 生成的变换群 $G(\lambda)$ 的广义自守形式†．即对于 $\sigma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G(\lambda)$, $f(\tau)$ 满足变换公式

$$f((a\tau+b)/(c\tau+d))(c\tau+d)^{-k}$$
$$=\chi(\sigma)f(\tau),\ |\chi(\sigma)|=1.$$

如果 k 是整数，则 $\chi(\sigma)^4=1$；如果 k 是偶数，则 $\chi(\sigma)=\pm1$．这样一来，具有函数方程的 Dirichlet 级数与自守形式理论之间有着密切的关系．因此，如果 $\lambda>2$，则由属于 (λ, k, γ) 的这样的函数 $\varphi(s)$ 构成的线性空间 $\Phi(\lambda, k, s)$ 的维数是无限的；如果 $0<\lambda\leqslant2$，则 $\dim\Phi(\lambda, k, s)<\infty$．在后一情形，为使 $\dim\Phi(\lambda, k, s)>0$ 成立的必要条件是 $\lambda=2\cos(\pi/q)(q=1, 2, 3, \cdots)$．特别是，当 $\lambda=2$ 时，则 $G(2)$ 是 $SL(2, \boldsymbol{Z})$ 的指数为 3 的子群．特别是考虑 ϑ 级数† $\vartheta(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{\pi in^2\tau}$ 时，$\vartheta^{2k}(\tau)$ 属于 $(2, k, 1)$．它对应的 Dirichlet 级数为 Epstein ζ 函数 $\sum1/(n_1^2+\cdots+n_{2k}^2)^s$．特别是，当 $\lambda=1$ 时，$G(1)$ 为模群 $SL(2, \boldsymbol{Z})$．此外，当 k 为偶数时，属于 $(1, k, (-1)^{k/2})$ 的函数 $f(\tau)$ 是 $-k$ 维的模形式†．例如，Eisenstein 级数† $G_k(\tau; 0, 0, 1)$ 就是这样的模形式，其对应的 Dirichlet 级数为 $\zeta(s)\cdot\zeta(s-k+1)$ 乘上一个常数．还有，属于 $(1, 12, 1)$ 中的函数除了 $\zeta(s)\cdot\zeta(s-11)$ 之外还有 Ramanujan 函数 $\sum\tau(n)n^{-s}$，这里

$$q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}=\sum\tau(n)q^n\ \ (q=e^{2\pi i\tau}).$$

为使属于 $(1, k, (-1)^{k/2})$ 的函数 $\varphi(s)$ 具有 Euler 无穷乘积表示的充分必要条件是：对应的模形式 $f(\tau)$ 是由 Hecke 算子† $T_n(n=1, 2, \cdots)$ 所构成的代数环的公共特征函数．此时，$\varphi(s)=\sum a_n n^{-s}$ 的系数 a_n 与 T_n 的特征值

是一致的. 即若 $f|T_n = t_n f$ 时,就有 $\varphi(s) = a_1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n n^{-s}\right)$, 且它可以分解为 Euler 无穷乘积表示:

$$\varphi(s) = a_1 \prod_p (1 - t_p p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

我们称 $\varphi(s)/a_1$ 为**由 Hecke 算子定义的ζ函数** (zeta function defined by Hecke operators) (Hecke [14]). 例如上述的 $\zeta(s)\cdot\zeta(s-k+1)$ 及 Ramanujan 函数

$$\sum_n \tau(n)n^{-s} = \prod_p (1 - \tau(p)p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}$$

都是由 Hecke 算子定义的ζ函数.

如果 $\lambda>2$, 则 $\dim \Phi(\lambda, k, \gamma)=\infty$, 因此正在作种种尝试, 想在这些无限维的函数空间中选出由具有某种数论意义的函数所构成的有限维的子空间. 虚二次域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{-D})(D>0)$ 的ζ函数 $\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{-D})}(s)$ 属于 $(\sqrt{|D|}, 1, 1)$. 故若 $\sqrt{|D|}>2$, 则满足与 $\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{-D})}(s)$ 同样的函数方程的 Dirichlet 级数有无限多个. Hecke 曾研究过在属于 $(\sqrt{D}, 1, 1)$ 的级数中刻划 $\zeta_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{-D})}(s)$ 的问题. 此外, 属于 N 级 (level) 主同余子群† $\Gamma(N)$ 的 $-k$ 维† 自守形式空间 $\mathfrak{M}_k(N)$ 由属于 $\operatorname{sign}(N, k, \pm 1)$的函数所张成.

Hecke 也应用 Hecke 算子理论来研究群 $\Gamma(N)$ ([14]), 但它比 $\Gamma(1)=SL(2, \boldsymbol{Z})$ 的情形要复杂得多. 在这种情形下也可以定义 Hecke 算子 $T_n, R_n, (n, N)=1$, 这些算子在 $\mathfrak{M}_k(N)$ 中可以交换, 并导出 $\mathfrak{M}_k(N)$ 上关于 Petersson 度量† 的交换正规算子, $\mathfrak{M}_k(N)$ 是由 $T_n, R_n (n\geqslant 1)$ 生成的交换算子环的公共特征函数所张成.

如果 $\mathfrak{M}_k(N)\ni f(\tau)=\sum a_n e^{2\pi i n\tau/N}$ 为特征函数, 及 $f|T_n=\omega_n f$, $f|R_n=\rho_n f$, 则在 $(n, N)=1$ 时, $a_n=a_1\omega_n$, 并且

$$\sum_{(n,N)=1} a_n n^{-s} = a_1 \prod_{p\nmid N} \frac{1}{1-\omega_p p^{-s}+\rho_p p^{k-1-2s}}$$

成立. 为了求出 $a_n, (n, N)\neq 1$, 定义 $T_n^t (n, N)\neq 1$. 另外一个困难是, 由这样的 Hecke 算子定义的ζ函数 $\varphi(s)=\sum_{(n,N)=1} a_n n^{-s}$ 不一定都满足函数方程. 这是因为 $\mathfrak{M}_k(N)$ 不是由 Hecke 算子 $\{T_n\}$ 和变换 $f(\tau)\to f(-1/\tau)(-i\tau)^{-k}$ 的公共特征函数所张成. 但是, 在某种意义下, 属于 $\mathfrak{M}_k(N)$ 的函数均满足函数方程. 例如, 当 T_n 在 $\mathfrak{M}_k(N)$ 上的运算以 $(T_n)_k$ 表示时, $\det \sum_{(n,N)=1} (T_n)_k n^{-s} = \prod_{p\nmid N} \det(1-(T_p)_k p^{-s} + (R_p)_k p^{k-1-2s})^{-1}$ 满足某一函数方程(志村).

将属于同余子群†

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2, \boldsymbol{Z}): c\equiv 0 \pmod N\right\}$$

的 $-k$ 维自守形式的空间以 $\mathfrak{M}_k(\Gamma_0(N))$ 表示, 则 $\mathfrak{M}_k(\Gamma_0(N))\ni f(\tau)=\sum a_n e^{2\pi i n\tau}$ 仍然是均不属于任何的 (λ, k, γ), 然而 $\mathfrak{M}_k(\Gamma_0(N))$ 是由使 $f(\tau/\sqrt{N})=\sum a_n e^{2\pi i n\tau/\sqrt{N}}$ 属于 $(\sqrt{N}, k, \gamma)$ 的那些 $f(\tau)$ 所张成. 更确切地说, $\mathfrak{M}_k(\Gamma_0(N))$ 是由满足如下条件的 $f(\tau)=\sum a_n e^{2\pi i n\tau}$ 所张成: 1) $\varphi(s)=\sum a_n n^{-s}$ 具有 Euler 无穷乘积表示

$$\varphi(s)=\prod_{p|N}(1-p^{k-1-2s})^{-1}\prod_{p\nmid N}(1-a_p p^{-s}+p^{k-1-2s})^{-1};$$

2) 满足函数方程 $R(s)=\gamma R(k-s)$, 其中 $R(s)=(2\pi/\sqrt{N})^{-s}\Gamma(s)\varphi(s)$; 3) 当 χ 是 $\boldsymbol{Z}$ 的任意的原特征标(其前导子 f 与 N 互素)及 $R(s, \chi)=(2\pi/\sqrt{N}f)^{-s}\Gamma(s)\sum a_n\chi(n)n^{-s}$ 时, 有函数方程 $R(s,\chi)=\omega R(k-s, \chi)(|\omega|=1)$ 成立 (志村). 反之, 2), 3) 刻划了对应于 $f(\tau)\in\mathfrak{M}_k(\Gamma_0(N))$ 的 Dirichlet 级数 $\varphi(s)$ (Weil). 还有, $\mathfrak{M}_2(\Gamma_0(N))$ 是由 $\boldsymbol{Q}$ 上的定型四元代数的范数形式的 ϑ 函数所张成 (Eichler).

假如将上述的对应 $f(\tau)=\sum a_n q^n\to\varphi(s)=\sum a_n n^{-s}$, 不作为 Mellin 变换, 而索性有意识地作为以 Hecke 算子为媒介的对应, 就可导出由 Hecke 算子定义的ζ函数. 当对于由不连续群 Γ 定义 Hecke 算子 T_n, 并有 Hecke 算子环 $\mathscr{H}$ 的表示空间 $\mathfrak{M}$ 时, 我们将 $\mathscr{H}\ni T_n$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的运算的矩阵记为 $(T_n)=(T_n)_{\mathfrak{M}}$, 并称矩阵值函数 $\sum_n (T_n)_{\mathfrak{M}} n^{-s}$ 为由 Hecke 算子定义的ζ函数. 如果 $\Gamma=\Gamma(N)$, $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_k(N)$, $\dim\mathfrak{M}=1$, 则 $\varphi(s)=\sum a_n n^{-s}$ 就是上述对应的一个特殊情形. 这个定义的一个优点是, 对于群 Γ 只要能够定义 Hecke 算子的概念, 就总

能定义 ζ 函数(例如，甚至 Γ 为不具有尖点[†]的 Fuchs 群)．这样一来，当 Γ 是由有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 上的四元代数 Φ 的单元群所给出的 Fuchs 群，$\mathfrak{M}$ 为关于 Γ 的自守形式空间时，就定义了 ζ 函数 $\sum(T_n)n^{-s}$ (Eichler)．另外，利用在 Φ 的伊代尔群 $\boldsymbol{J}_\Phi$ 上的积分表示式，仿照岩沢-Tate 的方法，能够导出其函数方程(志村 [32])．更进一步，由代数几何的观点来考虑 T_n，这时 $\mathfrak{M}$ 成为所有 -2 维尖点形式[†]组成的空间 $\mathfrak{S}_2$，可以证明：$\zeta(s)\zeta(s-1)\det(\sum(T_n)_{\mathfrak{S}_2}n^{-s}) = \zeta(s)\zeta(s-1)\det\left(\prod_p(1-(T_p)_{\mathfrak{S}_2}p^{-s}+(R_p)_{\mathfrak{S}_2}p^{1-2s})^{-1}\right)$ 与由 Γ 定义的 Riemann 面的某个模型的代数曲线的 Hasse ζ 函数(除去常数倍以外)相等 (Eichler [9]，志村 [32])．

当 $\mathfrak{M}$ 为所有 $-k$ 维尖点形式组成的空间 $\mathfrak{S}_k$ 时，在 Γ 为由 $\Gamma_0(N)$，$\Gamma(N)$ 及四元代数所生成的情形，已阐明了 $\det(\sum(T_n)_{\mathfrak{S}_k}n^{-s})$ 的代数几何意义(久賀道郎，佐藤幹夫，志村，伊原康隆)．由这些事实，使我们可以利用 Hecke 算子来表示 $(T_p)_{\mathfrak{S}_k}$——在某种 Galois 扩张中的素数 p 的分解(志村 [35]，久賀 [19])．这些工作给出了非 Abel 类域论的首批例子．

当 Γ 为代数数域上的可除代数 D 的单元群，$\mathfrak{M}$ 为自守球函数空间时，ζ 函数 $\sum(T_n)_{\mathfrak{M}}n^{-s}$ 是 D 的玉河 ζ 函数．

Eichler、志村、清水所研究的在四元代数情形的与自守形式相伴的 ζ 函数，Weil，Jacquet 及 Langlands 所研究的 GL_2 的 ζ 函数也都是由 Hecke 算子定义的 ζ 函数．

此外，根据表 1 的对照可知，这种形式的 ζ 函数能够看成是代数数域的 L 函数的类似或推广．

表 1

代数数域	k	理想群	特征标 χ	$\Sigma\chi(n)n^{-s}$
↕	↕	↕	↕	↕
代数群	G	Hecke 环	表示空间 $\mathfrak{M}$ (自守球函数，自守形式等)	$\Sigma(T_n)\ \ n^{-s}$

例如，正如 $\zeta(s)$ (或 $L(s)$) 乘上 Γ 因子后可表为 k 的伊代尔群上的积分的形式一样，$\Sigma(T_n)_{\mathfrak{M}}n^{-s}$ 乘上 Γ 因子也能表示成 G 的伊代尔群上的积分的形式．

此外，关于非正则的权为 -1 的自守形式，N. Maass 考虑了 Γ 因子为 $\Gamma(s/2)^2$ 或 $\Gamma((s+1)/2)^2$ 的实二次域的具有类特征标的 L 函数．久保田对于任意代数数域 k 的 ζ 函数 $\zeta_k(s)$、单代数的 ζ 函数与多变数的(非解析的)自守形式之间的关系进行了研究，并由新的观点来研究 Gauss 和的互反律 ([17])．

【单变量代数函数域或代数曲线的同余 ζ 函数】 设 K 是以有限域 k 为系数域的一个给定的单变量代数函数域，由和

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}$$

所定义的复变数 s 的函数 $\zeta_K(s)$，称为**代数函数域 K/k 的 ζ 函数** (zeta function of algebraic function field K/k)，或简称为**同余 ζ 函数** (congruence zeta function)，其中 $\sum_{\mathfrak{a}}$ 为对 K 的全部整除子 $\mathfrak{a}$ 求和，范数 $N(\mathfrak{a})$ 定义为 $N(\mathfrak{a})=q^f$，q 为 k 的元素的个数，f 为 $\mathfrak{a}$ 的次数．

同余 ζ 函数是由 Artin 仿照 Riemann ζ 函数及 Dedekind ζ 函数最早引进的 (1924，[1])，后来通过 Schmidt，Hasse，Weil 等人的研究，才弄清楚了这些 ζ 函数的许多类似于 Riemann ζ 函数的性质．而且在这种情形相应的 Riemann 猜想：$\zeta_K(s)$ 的零点在直线 $\mathrm{Re}\,s=1/2$ 上，得到了肯定的解答(Schmidt [27]，Hasse [11]，Weil [45])．

令 $q^{-s}=u$，将本节第一个等式的右端改写为 u 的幂级数，并应用 Riemann-Roch 定理[†]．那末，这个幂级数在 $|u|<q^{-1}$ 时是收敛的，并且与形如 $P(u)/(1-u)(1-qu)$ 的有理函数相等．这里，当 K 的亏格[†]为 g 时，$P(u)$ 是 u 的 $2g$ 次的多项式．这个有理函数也称为 K/k 的同余 ζ 函数，并以 $Z(u, K/k)$ 表示．因为在这样的变数 s 到 u 的变换下，$\mathrm{Re}\,s=1/2$ 对应于 $|u|=q^{-1/2}$，所以，Riemann 猜想就等价于：$P(u)=0$ 的根在圆周 $|u|=q^{-1/2}$ 上．若 C 为

函数域 K/k 的模型，即是在 k 上定义的完备且无奇点的代数曲线，则 $Z(u, K/k)$ 和 C 的同余 ζ 函数 $Z(u, C)$（后述）一致．这就是说，当表示

$$\frac{d}{du}\log Z(u,C)=\sum_{m=1}^{\infty}N_m u^{m-1}$$

时，N_m 为曲线 C 上的坐标取自 k 的 m 次扩域 k_m 的点的个数．

设 J 为 C 的在 k 上定义的 Jacobi 簇[†]，$\varphi: C\to J$ 为典范映射．假定 C 具有 k 有理点，而 φ 是在 k 上定义的．设 l 为与 k 的特征 p 不同的素数，固定一个 J 的 l-adic 坐标系[†] Σ_l^J，并将 J 的自同态 α 的 l-adic 表示[†]记为 $M_l(\alpha)$．再设 q 为 k 的元素的个数，并将 J 的 q 次幂自同态 $(x)\to(x^q)$ 记为 π．那末，$M_l(\pi)$ 的特征多项式 $\det(I-M_l(\pi)u)$ 为有理整系数多项式，并有

$$(*)\quad Z(u,C)=\det(I-M_l(\pi)u)/(1-u)(1-qu)$$

成立．由(*)和 Castelnuovo 引理[†]，Weil 证明了 Riemann 猜想（Weil [45]）．又由式(*)可看出，Weil 猜想(后述)对于这种曲线 C 成立．

【代数簇的同余 ζ 函数】 设 k 为具有 q 个元素的有限域，V 为在 k 上定义的 n 维非奇完备代数簇．设 k 的 m 次扩张为 k_m 及坐标取自 k_m 中的 V 的点的个数为 N_m，则由

$$\frac{d}{du}\log Z(u,V)=\sum_{m=1}^{\infty}N_m u^{m-1}$$

及初始条件

$$Z(0,V)=1$$

所定义的 u 的函数 $Z(u,V)$，称为有限域 k 上的**代数簇 V 的同余 ζ 函数**（congruence zeta function of algebraic variety V）．当 V 为代数曲线时，$Z(u,V)$ 或 $Z(q^{-s},V)$，与 V 在 k 上的函数域[†]（单变量代数函数域）$k(V)/k$ 的同余 ζ 函数一致．

代数簇的同余 ζ 函数的定义，是 Weil 给出的（[46]），关于这个函数 $Z(u,V)$，Weil 提出了如下的四个猜想，并在许多简单的例子中证明了这些猜想实际上是成立的．

Weil 猜想（Weil's conjecture）．

1）$Z(u,V)$ 为 u 的有理函数．

2）$Z(u,V)$ 满足函数方程：

$$Z((q^n u)^{-1},V)=\pm q^{n\chi/2}u^{\chi}Z(u,V),$$

这里整数 χ 是在积 $V\times V$ 中对角子簇 Δ_V 与自身的相交数(即交叉积[†] $\Delta_V\cdot\Delta_V$ 的次数)，即 $\chi=I(\Delta_V\cdot\Delta_V)$．$\chi$ 称为 V 的 Euler-Poincaré 示性数[†]．

3）$Z(u,V)$ 的零点的绝对值为 $q^{-1/2}$ 的奇次幂，极点的绝对值为 $q^{-1/2}$ 的偶次幂．所以，若设 $1/\alpha_j^{(h)}(j=1,2,\cdots,B_h)$ 是绝对值为 $q^{-h/2}$ 的零点或极点，则 $Z(u,V)$ 可分解为

$$(*)\qquad Z(u,V)=\frac{P_1(u)P_3(u)\cdots P_{2n-1}(u)}{P_0(u)P_2(u)\cdots P_{2n}(u)},$$

其中 $P_h(u)=\prod_{j=1}^{B_h}(1-\alpha_j^{(h)}u)$．特别地，$P_0(u)=1-u$，$P_{2n}(u)=1-q^n u$．且由 1)，2) 推出 $\chi=\sum_{h=0}^{2n}(-1)^h B_h$．这个猜想是关于代数曲线的 Riemann 猜想的推广，有时也称为 Riemann-Weil 猜想．如果在 V 上有与 Lefschetz 的不动点定理相当的定理成立，那末可以由此推导出公式(*)，而 B_h 恰好是所谓 V 的 Betti 数的幂．在这个意义上，Weil 又进一步提出了如下的猜想．

4）假设 $V^{(0)}$ 是在某个有限次代数数域 K 上定义的非奇的完备代数簇，K 对于 K 的某个素理想 $\mathfrak{p}$ 是 $\mathfrak{p}$ 单纯的，以及 $V^{(0)}$ 的模 $\mathfrak{p}$ 约化（reduction mod $\mathfrak{p}$）为 V．如果 $V^{(0)}$（将其作为 $2n$ 维的实解析代数簇来考虑）的 h 维 Betti 数[†]为 $B_h^{(0)}$，则有 $B_h^{(0)}=B_h(h=0,1,\cdots,2n)$．

这些猜想中的 1)，后来由 B. Dwork 作出了肯定的解答（[7]）．猜想 3)（绝对值猜想，或称一般的 Riemann 猜想）是一个困难的问题．P. Deligne 于 1973 年证明了所有这四个猜想．我们把 1)—4) 称为 Weil-Deligne 定理．在这之前，在代数曲线、Abel 簇、Grassmann 流形（特别包括射影空间）、特殊型的超曲面等情形，包括绝对值猜想在内的 Weil 的这些猜想已经得到证明．在证明 Weil-Deligne 定理的许多贡

献中，我们这里将讨论 Weil, B. Dwork, A. Grothendieck, S. Lubkin 及 Deligne 的工作．对于椭圆曲线的早期研究 ⇀ [单变量代数函数域或代数曲线的同余 ζ 函数]．

Weil 对于由 $a_0X_0^{d_0}+\cdots+a_nX_n^{d_n}=0$ 所定义的超曲面证明了这些猜想，他的方法是利用 Jacobi 和来定出 Frobenius 射的特征值．这个方法的原型早已见于 Gauss [69]，它与分圆域的数论密切相关．Weil 还对曲线 $Y^e=\gamma X^f+\delta(2\leqslant e\leqslant f,\ \gamma\neq 0,\ \delta\neq 0)$ 证明了 Hasse 猜想（⇀ [Hasse ζ 函数]）．这些方法尽管很重要（除了 Dwork 的某些 p-adic 的工作外），但并没有引起人们的注意，直到 Weil 本人最近又重新提出这些方法（[108, 109]）才引起注意．在他这些早期研究工作之前，Weil 已经建立了代数几何的基础，发展了 Abel 簇的理论，并对于代数曲线及 Abel 簇证明了 Weil 猜想（[45, 102, 103]）．他的 Abel 簇上的 l-adic 坐标理论是 Grothendieck 的 l-adic étale 上同调理论的原型．Weil 对于代数曲线和 Abel 簇证明 Riemann-Weil 猜想，乃是基于 Castelnuovo 不等式，即 $M_l({}^t\lambda\lambda)$ 是正定的（⇀ [单变量代数函数域或代数曲线的同余 ζ 函数]）．

Weil 建议（[104]），可能通过具有 Lefschetz 不动点公式的上同调理论来证明 $Z(u,V)$ 的有理性等猜测，以及可能通过具有某些确定的性质的 Hodge 型理论对于一般的簇来证明 Riemann-Weil 猜想．这个建议导至 J.-P. Serre, Grothendieck, G. Washnitzer, P. Monsky 等人的许多研究工作．设 $\bar{k}$ 为代数闭域，K 为一个特征为零的域，称为系数域．由 $\bar{k}$ 上完备的连通光滑簇的范畴到增广 $\boldsymbol{Z}^+$ 分次有限维反交换 K 代数（以上积为乘法）的逆变函子 $V\to H^*(V)$ 称为系数取在 K 中的 **Weil 上同调**（Weil cohomology），如果它满足下面三个性质：(1) Poincaré 对偶性：如果 $n=\dim V$，则存在一个典范同构 $H^{2n}(V)\cong K$，且上积 $H^i(V)\times H^{2n-i}(V)\to H^{2n}(V)\cong K$ 诱导出一个完全的配对．(2) Künneth 公式：对于任意 V_1 及 V_2，由 $a\otimes b\to \mathrm{Proj}_1^*(a)\cdot\mathrm{Proj}_2^*(b)$ 定义的映射 $H^*(V_1)\otimes H^*(V_2)\to H^*(V_1\times V_2)$ 是同构的．(3) 与代数闭链有良好关系：设 $C^i(V)$ 为 V 上余维 i 的代数闭链群，则对于所有的 i，存在一个基本类同态 FUND: $C^i(V)\to H^{2i}(V)$，它在 V 上具有函子性质，通过 Künneth 公式与乘积相容，且交与上积有可相容性，它还把 0 维闭链 $\in C^0(V)$ 映到其次数，次数可看成 $K\cong H^{2n}(V)$ 的元素．

假如对于 $\bar{k}$ 上的簇 V，Weil 上同调理论存在，那末我们就能够对于射 $F:V\to V$ 证明 Lefschetz 不动点公式：

$$((F\text{ 的图象})\cdot(\text{对角簇}))_{V\times V}=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\mathrm{tr}(F^*|H^i(V)).$$

假如对于 $\bar{\boldsymbol{F}}_p$ 上的簇 V，存在一个 Weil 上同调理论，我们就可以把 $Z(u,V)$ 表为

$$Z(u,V)=\frac{P_1(u)\cdot P_3(u)\cdot\cdots\cdot P_{2n-1}(u)}{P_0(u)\cdot P_2(u)\cdot\cdots\cdot P_{2n}(u)},$$

其中 $P_i(u)=\det((1-u\pi^*)|H^i(V))$，是 Frobenius 射 $\pi:(x_i)\to(x_i^q)$ 在 V 的上同调群 $H^i(V)$ 上的作用 π^* 的特征多项式（Weil [104], S. Kleiman [84], B. C. Mazur [86]）．

Serre, Grothendieck, M. Artin, Lubkin 以及其他人定义了 l-adic étale 上同调 $H_{et}^*(V,\boldsymbol{Q}_l)$，其中 l 是任一与 k 的特征不同的素数．从而我们就有上述 $Z(u,V)$ 的公式，其中 $P_i(u)=\det((1-u\pi^*)|H_{et}^i(V,\boldsymbol{Q}_l))$．正如 Grothendieck, Artin 及 J. L. Verdier 的研究工作（[58]）所证明的，若 V 定义于数域 $K\subset C$，且 $H_{et}^*(V,\boldsymbol{Q}_l)$ 与模 $\mathfrak{p}$ 的好约化 $V\to\widetilde{V}^{(\mathfrak{p})}$ 是相容的（即对于 $\mathfrak{p}$ 单簇 V，$H_{et}^*(V,\boldsymbol{Q}_l)\cong H_{et}^*(\widetilde{V}^{(\mathfrak{p})},\boldsymbol{Q}_l)$，其中 l 是与 $\mathfrak{p}$ 互素的任意素数），则 $H_{et}^*(V,\boldsymbol{Q}_l)\cong H^*(V,\boldsymbol{Z})\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}_l$ 成立．因此，假如我们能够证明多项式 $P_i(u)=\det(1-u\pi^*|H_{et}^*(V,\boldsymbol{Q}_l))$ 属于 $\boldsymbol{Z}[u]$，与 l 的选取无关，并且 $P_i(u)=0$ 的所有根 $\alpha_i^{(j)}(i=1,\cdots,B_i)$ 在任何嵌入 $\boldsymbol{Q}(\alpha_i^{(j)})\to\boldsymbol{C}$ 中都有绝对值 $q^{-\frac{i}{2}}$，那末，Weil 猜想就全部证完了．这就是 Deligne 所完成的工作．

对于 k 的特征 p，p-adic étale 上同调并非

Weil 上同调；但晶式上同调（Grothendieck 和 P. Berthelot [59]）取代 p-adic 上同调，并且是 Weil 上同调.

Dwork 广泛地研究了 p-adic 分析，并把 $Z(u, V)$ 看成 p-adic 幂级数而利用 p-adic 分析来进行研究. 他用这种 p-adic 方法证明了 $Z(u, V)$ 的有理性. 他还对于超曲面 V 来研究 $Z(u, V)$ 以及在 V 的变形之下 $Z(u, V)$ 的变化（[67]）. 他没有直接应用上同调，但是，他考虑 Frobenius 射在某个 p-adic 微分方程的解空间上的作用. Dwork 早期思路的来源之一是井草的结果：$F_p(\lambda)$ 上由方程 $y^2 = x(1-x)(\lambda - x)$ 定义的椭圆曲线的 Hasse-Witt 不变量 $A_p(\lambda)$ 适合微分方程 $\lambda(1-\lambda)(d^2A/d\lambda^2) + (1-2\lambda)(dA/d\lambda) - A/4 = 0$.

Dwork 的思想由 Washnitzer 和 Monsky 所继续，他们对于某些特征 p 的仿射光滑簇发展了一种 de Rham 型上同调. Grothendieck 由他们的方法得出了晶式上同调的思想. Lubkin 还研究了 p-adic 理论（[85]）.

Deligne 首先对一些初步工作作出自己的贡献：对于伊原康隆，久賀道郎，佐藤幹夫和志村五郎关于 Ramanujan 猜想与 Riemann-Weil 猜想之间的关系的某些结果的深入研究，应用久賀道郎和佐武一郎关于 Abel 簇的结果对于 $K3$ 曲面的约化证明了 Riemann-Weil 猜想（独立于 Шафаревич 和 Пятецкий-Шапиро 的工作），以及对于 Hodge 级 1 的簇证明了 Riemann-Weil 猜想，这就推广了 E. Bombieri 和 H. P. F. Swinnerton-Dyer 的工作，他们对于三次三维簇证明了这个猜想（[61]）. Deligne 把这些初步工作中的思想加以发展，例如，不仅对单独一个 $H^r(X)$，而是对于所有 m 使用 $\otimes^m H^r(X)$，结合 R. A. Rankin 的方法，应用 Lefschetz 束来达到归纳的目的，以及应用他自己把 Lefschetz-Pham 型的单演理论代数化所得的理论等思想，最终，他完成了 Weil 猜想的全部证明.

Weil-Deligne 定理的应用

(1) 解决 Ramanujan 猜想（→ 自守函数）.

(2) 三角和的估计：

$$\left|\sum_{(x_1,\cdots,x_n)\in F_p^n} \exp\frac{2\pi i F(x_1,\cdots,x_n)}{p}\right| \leqslant (d-1)^n \cdot p^{\frac{n}{2}},$$

其中 $F(X_1,\cdots,X_n)\in \boldsymbol{F}_p[X_1,\cdots,X_n]$ 是不能被 p 整除的 d 次多项式，以及 F 的最高次齐次部分定义 $\boldsymbol{P}^{n-1}$ 中的一个不可约光滑超曲面. 这就推广了 Weil 对于 Kloosterman 和的估计（[65, 105]）（→ 堆垒数论）.

代数簇 V 还有一些几何性质反映在 $Z(u, V)$ 的性质中. 一个 Abel 簇 A 的 ζ 函数 $Z(u, A)$ 决定 A 的同种类（[99]）. 对于任何代数整数 α，如其所有共轭均有绝对值 $q^{\frac{1}{2}}$，则存在一个 Abel 簇 $A/\boldsymbol{F}_q$，使得 α 是 $\det(u1-\pi^*|H^1(A))=0$ 的一个根（[71]）. Tate 猜想：余维 r 的代数闭链的上同调类的秩等于 $Z(u,V)$ 的分母中因子 $(1-q^r u)$ 的指数（[98]）. 他还利用 Hasse ζ 函数的极点提出了有关的另一猜想（[98]）.

【代数簇的同余 Artin L 函数】 设 V 是在有限域 $k = F_q$ 上定义的非奇完备代数簇. 设 G 为 V 的双正则双有理变换†构成的有限群，其阶数为 N. 假定 G 的每个元素是在 k 上定义的. 另外，确定 G 的一个表示 R，并将其特征标记为 χ. 进一步假设定义商簇 $W = V/G$，并将自然映射 $V \to W$ 记为 φ.

设 V 的 q^n 次幂有理映射 $(x)\to(x^{q^n})$ 的象为 Π^n，设双有理变换 $\alpha\in G$ 的象为 X_α，并令 $\nu_n(\alpha) = I(\Pi^n\cdot X_\alpha)$. 这时，由

$$\frac{d}{du}\log L(u, V/G, \chi) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\in G}\chi(\alpha)\nu_n(\alpha)\right)u^{n-1},$$

$$L(0, V/G, \chi) = 1$$

所定义的函数 $L(u, V/G, \chi) = L_\chi(u)$ 称为**同余 Artin L 函数**（congruence L-function of Artin）（V 为曲线的情形见 [45]）. 分别以 $\bar{V}$ 及 $\bar{W}$ 表示 V 及 W 上的全体素的 k 有理零维代数循环所组成的集合. $\bar{V}$ 的元素 x 为 V 的 $\bar{k}$ 有理点的全体共轭元素 $P_1,\cdots,P_f$ 的形式和：$x=\Sigma P_i$. 这时，$k(P_1)$ 记为 $k(x)$. 至于 $\bar{W}$ 的

元素 y，也可以同样地定义 $k(y)$. 这样 G 自然地作用于 $\bar{V}$ 上，并由 φ 定义了从 $\bar{V}$ 到 $\bar{W}$ 的自然映射 $\bar{\varphi}$. 我们有 $\bar{\varphi}\circ g=\bar{\varphi}(g\in G)$. 对于 $\bar{V}$ 的元素 x, $D(x)=\{g\in G|gx=x\}$ 称为 x 的分解群. 当令 $\bar{\varphi}(x)=y\in\bar{W}$ 时，则有从 $D(x)$ 到扩张 $k(x)/k(y)$ 的 Galois 群 $G(k(x)/k(y))$ 上的自然同态存在. 它的核记作 $I(x)$ 并称为 x 的惯性群. $D(x)/I(x)\cong G(k(x)/k(y))$ 是循环群，它是由 x 的 Frobenius 置换 F_x 生成的. 属于剩余类 F_x 的 $D(x)$ 的元素也都称为 Frobenius 置换，它只有 $(I(x):1)$ 个. 现令

$$\chi(y^n)=\Big(\sum_{\sigma\in F_x}\chi(\sigma^n)\Big)\Big/(I(x):1),$$

$$R(F_x^n)=\Big(\sum_{\sigma\in F_x}R(\sigma^n)\Big)\Big/(I(x):1).$$

这里 $\chi(y^n)$ 是矩阵 $R(F_x^n)$ 的迹，它仅依赖于 y，而与 x 的取法无关. 这样就有

$$\frac{d}{du}\log L(u,V/G,\chi)$$

$$=\sum_{y\in\bar{W}}\sum_{n=1}^{\infty}\chi(y^n)u^{f_y(n-1)},$$

$$L(u,V/G,\chi)=\prod_{y\in\bar{W}}\det(1-R(F_x)u^{f_y})^{-1}$$

成立. 在这些等式中，y 遍及 W 的素的 k 有理零维代数循环，x 是 V 在 y 中的一个素除子，且 $f_y=[k(y):k]$.

对于这样的 Artin 同余 L 函数，也有许多和簇的 ζ 函数及代数数域的 Artin L 函数相类似的性质 (S. Lang [22], 石田, J.-P. Serre [29]). 特别当 V/W 为具有 Abel 群 G 的覆盖时，还有与类域论相类似的理论 (Lang).

此外，还定义了更一般的概型†的 ζ 函数和 L 函数 (Serre [30]).

【Hasse ζ 函数】 对于在有限次代数数域 K 上定义的非奇完备代数簇 V，设以 K 的素理想 $\mathfrak{p}$ 为模的 V 的约化 (reduction) 为 $V_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p}$ 的剩余类域为 $K_{\mathfrak{p}}$, 而 $Z(u,V_{\mathfrak{p}})$ 为在 $K_{\mathfrak{p}}$ 上的 $V_{\mathfrak{p}}$ 的 ζ 函数，则由无穷乘积(除去 $V_{\mathfrak{p}}$ 没有定义的有限个 $\mathfrak{p}$)

$$\zeta(s,V)=\prod_{\mathfrak{p}}{}' Z(N(\mathfrak{p})^{-s},V_{\mathfrak{p}})$$

所决定的复变数 s 的函数 $\zeta(s,V)$ 称为在代数数域 K 上的 V 的 **Hasse ζ 函数** (Hasse zeta function). 关于这个函数，有如下的 **Hasse 猜想** (Hasse's conjecture) ([47]):

$\zeta(s,V)$ 在整个复平面上为 s 的亚纯函数并满足一般型式的(即与代数数域的 ζ 函数、L 函数等的函数方程相类似的)函数方程.

对一般情形这个猜想还没有解决，但是，在 V 为如下的簇的情形已经得到证明:

1) 由方程 $y^e=\gamma x^f+\delta(2\leqslant e\leqslant f,\gamma\neq 0,\delta\neq 0)$ 所定义的曲线 (Weil [46]).

2) 具有复数乘法的椭圆曲线 (Deuring).

3) 具有极大的复数乘法的 Abel 簇(谷山，志村-谷山 [31]).

4) 代数曲线——它是椭圆模函数域的适当模型 (Eichler [9], 志村 [32]).

5) 代数曲线——它是由有理数域上的不定四元代数的单元群构成的某种类型的 Fuchs 群的自守函数域的适当模型(志村 [32]).

6) 以 5) 中的曲线为基，以 Abel 簇为纤维的某种类型的纤维丛†(久賀-志村 [20]).

7) 以 4) 中的曲线为基，以椭圆曲线的积为纤维的某些类型的纤维丛(佐藤、伊原[16]).

8) 5) 的一种推广，即 5) 中的四元代数 B 的中心 F 是任一全实的代数数域，且除去一个以外，F 的无限素点均为 B 中的分歧(志村).

9) 奇异 $K3$ 曲面，即具有 20 个独立极化的 $K3$ 曲面 (Шафаревич 及 Пятецкий-Шапиро [87, 90], P. Deligne [62]).

在这些情形，$\zeta(s,V)$ 可用已知函数，即代数数域量特征标的 L 函数或对应于模形式的 Dirichlet 级数等具体表出. 由于这些函数的数论性质，这个事实就具有本质的意义. 例如，关于自守形式的 Hecke 算子的广义 Ramanujan 猜想†，就归结为关于上述 4)—8)等的簇的 Weil 猜想. 由此及对于一些代数曲线的 Riemann 猜想成立这一事实，实际上已经证明了广义 Ramanujan 猜想，特别是对于 -2 维自守形式的情形(志村 [32]). 此外，关于 4), 5), 6), 7), 8)，本质之点为如下的同余关系式: $\tilde{T}_p=$

$\Pi + \Pi^*$ (Kronecker, Eichler, 志村). 特别对于8)，这个公式与利用自守函数的特殊值及F上的类域来构造全实域F的全虚二次扩张上的类域的问题联系起来了.实际上,对类域来说这个公式与互反律是等价的(志村).还有,相应于例4)及5)中的 Hasse ζ 函数与Hecke的Dirichlet级数之间的关系, S. S. Rangachari (1961) 和今野秀二(1963)研究了由同余 Artin L函数构成的 Artin-Hasse L函数与 Hecke 的 Dirichlet 函数之间的关系.

使得 Hasse ζ 函数显其重要性的事实之一是，当V为代数曲线或 Abel 簇时，它刻划了代数数域的素理想的分解法则 (Weil, 志村[33, 35]，谷山[42]). 在那种情形，其 Hasse ζ 函数具有如下的数论意义.

在情形 9),奇异$K3$曲面S所对应的 Abel 簇A同构于具有复数乘法的椭圆曲线E的自乘积$E \times \cdots \times E$，且$\zeta(S, s)$约化为$\zeta(E, s)$，即约化为具有量特征标的 Hecke L函数.

设C为在代数数域K上定义的完备非奇的代数曲线,设J为在K上定义的C的 Jacobi 簇. 对于素数l，固定J上的一个l-adic 坐标系Σ_l，并设$K(J, l^\infty)$是由将J的l^ν次等分点$(\nu = 1, 2, \cdots)$的坐标全部添加于K所得的K的扩域. 那末，$K(J, l^\infty)/K$是K的无限次代数扩张，而且是 Galois 扩张. 相应的 Galois 群$\mathfrak{G}(J, l^\infty)$，通过$l$-adic 坐标$\Sigma_l$，具有$l$-adic 矩阵表示$\sigma \to M_l^*(\sigma)$. K的几乎所有素理想$\mathfrak{p}$在$K(J, l^\infty)/K$中是非分歧的. 所以，当取$\mathfrak{p}$在$K(J, l^\infty)$中的任意的素除子$\mathfrak{P}$时，$\mathfrak{P}$的 Frobenius 置换

$$\sigma_{\mathfrak{P}} = \left[\frac{K(J, l^\infty)/K}{\mathfrak{P}}\right]$$

是唯一决定的. 并且，特征多项式$\det[1 - M_l^*(\sigma_{\mathfrak{P}})u]$由$\mathfrak{p}$唯一确定而与素除子$\mathfrak{P}$的选择无关，故把这多项式记为$P_{\mathfrak{p}}(u, C)$. 此时，对于几乎所有的$\mathfrak{p}$，$P_{\mathfrak{p}}(u, C)$是不依赖于$l$的有理整系数多项式，且$C$的模$\mathfrak{p}$约化$\tilde{C}^{\mathfrak{p}}$的ζ函数等于

$$Z(u, \tilde{C}^{\mathfrak{p}}) = P_{\mathfrak{p}}(u, C)/(1-u)(1-qu).$$

所以

$$\zeta(s, C) = \prod_{\mathfrak{p}}{}' P_{\mathfrak{p}}(N(\mathfrak{p})^{-s}, C)(1 - N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}(1 - N(\mathfrak{p})^{1-s})^{-1}$$
$$\sim \zeta(s)\zeta(s-1) \prod_{\mathfrak{p}}{}' \det(1 - M_l^*(\sigma_{\mathfrak{P}})N(\mathfrak{p})^{-s}).$$

这里，如果不计M_l^*为l-adic 表示以及$K(J, l^\infty)/K$是无限次扩张这两点,则乘积$\Pi'\det(1 - M_l^*(\sigma_{\mathfrak{P}})N(\mathfrak{p})^{-s})$具有和 Artin L函数同样的表示. 因此，如果我们能够将$\zeta(s, C)$具体表示出来，那末素理想在$K(J, l^\infty)$及K的中间域中的分解形式就完全清楚了. 实际上，例 1)—8) 均为 ζ 函数可以具体表示出来的情形，由此已经导出等分点域$K(J, l^\infty)/K$的数论与 Hecke 算子的特征值之间的关系. 因而，对于曲线和 Abel 簇，$\zeta(s, V)$和某些数域的数论有密切的关系,但是，除了很少的情形外，还不知道对其他类型的簇是否存在类似的数论关系.

佐藤猜想. 设E为在有理数域上定义的椭圆曲线，其 Hasse ζ 函数具有如下形式:

$$\zeta(s, E) \sim \zeta(s)\zeta(s-1) \prod_p{}' (1 - \pi_p p^{-s}) \times (1 - \bar{\pi}_p p^{-s}),$$

这里，$|\pi_p| = |\bar{\pi}_p| = \sqrt{p}$. 所以，$\pi_p = \sqrt{p}\, e^{i\theta_p}$，$\bar{\pi}_p = \sqrt{p}\, e^{-i\theta_p}(0 < \theta_p < \pi)$. 佐藤应用电子计算机研究了当$p$在素数集合中变化时，$\theta_p$的分布，并得出了如下的经验公式: 设$[\alpha, \beta]$为属于$[0, 2\pi]$的任意区间，假如$E$不具有复数乘法，则

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\text{小于 } x \text{ 且使 } \theta_p \in [\alpha, \beta] \text{ 的素数 } p \text{ 的个数}}{\text{小于 } x \text{ 的素数个数}} = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta d\theta.$$

这称为佐藤猜想. 当E具有复数乘法时，对于半数的p，θ_p在$[0, \pi]$区间中的分布是一致的，而对于剩下的一半p，θ_p为$\pi/2$. 关于佐藤猜想，有 Tate，山本芳彦([51])等的研究.

对于定义在具有有限常数域的函数域上的椭圆曲线，H. Yoshida ([110])提出了类似的猜想，并证明了在以下两种情形猜想是成立的:

(1)其不变量在 $\boldsymbol{F}_p$ 上是超越的椭圆曲线,(2)二维 Abel 簇 A, 其 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{Q}}(A)$ 同构于 $\boldsymbol{Q}$ 上的四元代数，而其模域 (field of moduli) 在 $\boldsymbol{F}_p$ 上是超越的. B. J. Birch[60] 讨论了一个类似的问题.

【形式群及 ζ 函数】 设 C 为 $\boldsymbol{Q}$ 上一维 Abel 簇(即具有有理点的椭圆曲线)，对于所有素数 p(包括"坏的"素数)都可以适当定义 C 的 Hasse ζ 函数的 p 因子 (Weil), 并且我们有如下形式的 C 的 L 函数:

$$L(s, C) = \prod_{p:坏} (1 - \varepsilon_p p^{-s})^{-1} \times \prod_{p:好} (1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1},$$

式中 $\varepsilon_p = 0$ 或 ± 1, $1 - a_p u + pu^2 = P_p(u, C)$. 我们记 $L(s, C) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, 且令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n/n.$$

本田平证明了 $f^{-1}(f(x) + f(y))$ 是系数取在 $\boldsymbol{Z}$ 中的形式 (Lie) 群，并且，这个群在 $\boldsymbol{Z}$ 上同构于这样的形式群——它是通过把 C 的群律关于适当的局部单值化坐标在原点作幂级数展开而得到的 ([71]) (1968). 对ζ函数的这样一种解释,也可以用于其他情形,如那些可以刻划为其系数给出群律标准型的 Dirichlet 级数的群簇的ζ函数.

【Selberg ζ 函数，伴随不连续群的 ζ 函数】 设 $\Gamma \subset SL(2, \boldsymbol{R})$ 为作用于上半复平面 $H = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ 的不连续群，且 $\Gamma\backslash H$ 关于不变测度 $dxdy/y^2$ 的面积是有限的. 当 Γ 的元素 γ 的两个特征值为相异的实数 ξ_1, ξ_2($\xi_1\xi_2 = 1, \xi_1 < \xi_2$) 时，$\gamma$ 称为双曲的†. 将 ξ_2^2 记为 $N(\gamma)$ 并称之为 γ 的范数. 当 γ 为双曲元素时，$\gamma^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 也是双曲元素. 当 γ 不是另外的双曲元素的正幂时，γ 称为本原双曲元素. Γ 的本原双曲元素 γ 的共轭元素也是本原双曲元素，并与 γ 有相同的范数. 设 Γ 的本原双曲元素的共轭类全体为 $P_1, P_2, \cdots$, 并设 $\gamma_i \in P_i$ 为其代表元素. 另外还假设已给了 Γ 的矩阵表示 $\gamma \to M(\gamma)$. 那末，由公式

$$Z_\Gamma(s, M) = \prod_i \prod_{n=0}^{\infty} \det\,(I - M(\gamma_i) N(\gamma_i)^{-s-n})$$

给出的 s 的解析函数称为 **Selberg ζ 函数** (Selberg zeta function) (Selberg [28]). 当 $\Gamma\backslash H$ 是紧的且 Γ 在 H 上不具有不动点时，$Z_\Gamma(s, M)$ 具有如下的性质.

1) $Z_\Gamma(s, M)$ 可以解析开拓成整个复平面上的阶数不超过二的整函数.

2) $Z_\Gamma(s, M)$ 在 $-n(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ 具有 $(2n + 1)(2g - 2)v$ 阶零点. 这里，g 为 Riemann 面 $\Gamma\backslash H$ 的亏格. 除了在实轴的 (0, 1) 区间上可有有限个零点外，其他的零点全部在 $\mathrm{Re}\,s = 1/2$ 的直线上.

3) 满足函数方程

$$Z_\Gamma(1 - s, M) = Z_\Gamma(s, M) \times \exp\left(-vA(\Gamma\backslash H) \int_0^{s-1/2} v \tan(\pi v) dv\right),$$

其中

$$A(\Gamma\backslash H) = \iint_{\Gamma\backslash H} \frac{dx\,dy}{y^2} = 2\pi(2g - 2), \quad x + iy \in H.$$

性质 2) 表明 Riemann 猜想对于 $Z_\Gamma(s, M)$ 基本上成立. 其证明是根据如下的事实: 簇 $\Gamma\backslash H$ 上的特征值问题

$$y^2(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)u + \lambda u = 0, \quad u \in L^2(\Gamma\backslash H)$$

的特征值 λ 不能是负数.

山田俊彦 (1965) 应用这个函数研究了实二次域的单元分布问题.

当 $\Gamma\backslash G$ 的体积是有限的，而不是紧的时，也可以同样地定义 Selberg ζ 函数. 但是，此时 G 的酉表示空间 $L_2(\Gamma\backslash G)$ 在不可约表示空间的分解具有连续谱，因此，这种 Γ 的 Selberg ζ 函数的性质与 $\Gamma\backslash G$ 为紧时比较起来是很不相同的. 作为给出上述连续谱的特征函数，Selberg 定义了**广义 Eisenstein 级数** (generalized Eisenstein series). 当 $\Gamma = SL(2, \boldsymbol{Z})$ 时，它由

$$\sum_{(c,d)=1} \frac{y^s}{|c\tau + d|^{2s}}$$

给出.

这种广义 Eisenstein 级数，对于一般的半单代数群 G 及其算术子群 Γ 也可定义．它是由 Selberg, Godement, Гельфанд, Harish-Chandra, R. P. Langlands 等进行研究的(见 Woodshole 报告集 [54]).

【伊原ζ函数】 命 $k_{\mathfrak{p}}$ 为一 $\mathfrak{p}$-adic 域，$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ 为 $k_{\mathfrak{p}}$ 中的整数环，$G=PSL_2(\boldsymbol{R})\times PSL_2(k_{\mathfrak{p}})$. 假设 Γ 为 G 的子群，使得：(1) Γ 是离散的，(2) $\Gamma\backslash G$ 是紧的，(3) Γ 除单位元外没有挠元，(4) $\Gamma_{\boldsymbol{R}}$ (Γ 在 $PSL_2(\boldsymbol{R})$ 中的射影)在 $PSL_2(\boldsymbol{R})$ 中稠密，及 (5) $\Gamma_{\mathfrak{p}}$(Γ 在 $PSL_2(k_{\mathfrak{p}})$ 中的射影)在 $PSL_2(k_{\mathfrak{p}})$ 中稠密，则 $\Gamma\cong\Gamma_{\boldsymbol{R}}\cong\Gamma_{\mathfrak{p}}$. 命 $X=\{x+iy\,|\,y>0\}$ 为上半平面，Γ 通过 $\Gamma_{\boldsymbol{R}}$ 作用于 X 上．Γ 在 X 上的作用并非不连续的，但是子群 $\Gamma_0=\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma$ 到 $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ 的射影 $\in PSL(\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}})\}$ 在 X 上的作用是真不连续的．对于每个 $z\in X$，定义 $\Gamma_z=\{\gamma\in\Gamma\,|\,\gamma(z)=z\}$，则 Γ_z 同构于 $\boldsymbol{Z}$ 或 $\{1\}$．命 $\widetilde{\boldsymbol{P}}(\Gamma)=\{z\in X\,|\,\Gamma_z\cong\boldsymbol{Z}\}$．群 Γ 作用于 $\widetilde{\boldsymbol{P}}(\Gamma)$ 上，因为 Γ_z 与 $\Gamma_{\gamma z}$ 在 Γ 中共轭．命 $\boldsymbol{P}(\Gamma)=\widetilde{\boldsymbol{P}}(\Gamma)/\Gamma$．假设 $P\in\boldsymbol{P}(\Gamma)$ 为 $z\in X$ 所表示．选择 Γ_z 中的一生成元 γ，并把 γ 投射到 $\Gamma_{\mathfrak{p}}$ 中．于是矩阵 $\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}\in SL_2(k_{\mathfrak{p}})$ 等价于一个对角矩阵 $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix}$, $\lambda\in k_{\mathfrak{p}}$．我们用 $\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}$ 表示 $k_{\mathfrak{p}}$ 的赋值，并考虑 $|\mathrm{ord}_{\mathfrak{p}}(\lambda)|$．这个值只依赖于 P，我们用 $\deg(P)$ 表示它．Γ 的**伊原ζ函数** (Ihara ζ-function) 就定义为

$$Z_\Gamma(u)=\prod_{P\in\boldsymbol{P}(\Gamma)}(1-u^{\deg(P)})^{-1}.$$

伊原证明了

$$Z_\Gamma(u)=\frac{\prod_{i=1}^{g}(1-\pi_i u)(1-\pi_i' u)}{(1-u)(1-q^2u)}(1-u)^H,$$

其中 q 是 $\mathfrak{p}$ 的剩余类域的元素个数，g 是 Riemann 面 $\Gamma_0\backslash X$ 的亏格，$H=(g-1)(q-1)$. 甚至当 Γ 非紧但商 $\Gamma\backslash G$ 有有限体积以及 Γ 具有挠元时，我们也得到类似的结果．

除了 $(1-u)^H$ 这个因子之外，这个公式看来好像是 $\boldsymbol{F}_{q^2}$ 上定义的曲线的ζ函数的 Weil 公式．伊原猜想 $Z_\Gamma(u)$ 的第一因子总是 $\boldsymbol{F}_{q^2}$ 上某代数曲线的ζ函数，并且在某些情形下证明了这个结果 [80]．$Z_\Gamma(u)$ 的定义与 Selberg ζ函数的定义十分相似，但是 $Z_\Gamma(u)$ 的性质却和 $\boldsymbol{F}_{q^2}$ 上的代数函数域 K 的同余ζ函数的性质相似．从这个性质以及其他一些证据(根据模函数论等)出发，伊原得出了 Γ 型的 K 上非 Abel 类域论的表述．事实上他证明在某些特殊情形，这个表述十分完善 [76, 78].

【伴随前齐性向量空间的ζ函数】 佐藤幹夫提出前齐性空间的概念，并且定义了伴随它的ζ函数．他的计划为佐藤本人和新谷所完成 [88, 89, 96, 97]．命 G 为一线性代数群，V 为有限维线性空间，ρ 为一有理表示 $G\to GL(V)$，其中 G, V 及 ρ 均定义于 $\boldsymbol{Q}$ 上．三元组 (G, ρ, V) 称为**前齐性向量空间** (prehomogeneous vector space)，如存在 $V_{\boldsymbol{C}}$ 中的真代数子集 S，使得 $V_{\boldsymbol{C}}-S$ 是一个单独的 $G_{\boldsymbol{C}}$ 轨道．代数集 S 称为 V 的奇点集合．我们再假定 G 是不可约群，S 是 V 的不可约超曲面．命 V^* 为 V 的对偶向量空间，ρ^* 是 G 的对偶(逆步)表示．这时，(G, ρ^*, V^*) 也是一个前齐性空间，并用 S^* 表示它的奇点集合．在 V 及 V^* 上分别有相同次数 d 的齐次多项式 P 及 Q 使得 $S=\{x\in X\,|\,P(x)=0\}$ 及 $S^*=\{x^*\in V^*\,|\,Q(x^*)=0\}$. P 与 Q 是 G 的相对不变式，即 $P(\rho(g)x)=\chi(g)P(x)$ 及 $Q(\rho^*(g)x^*)=\chi(g)^{-1}Q(x^*)$(对于 $g\in G$, $x\in V$ 及 $x^*\in V^*$) 成立，而 χ 是 G 的一个有理特征标．令 $G^1=\ker\chi=\{g\in G\,|\,\chi(g)=1\}$．用 $G_{\boldsymbol{R}}^+$ 表示 Lie 群 $G_{\boldsymbol{R}}$ 上 1 的连通分支．命 $V_{\boldsymbol{R}}-S=V_1\cup\cdots\cup V_l$, $V_{\boldsymbol{R}}^*-S^*=V_1^*\cup\cdots\cup V_l^*$ 为把 $V_{\boldsymbol{R}}-S$ 及 $V_{\boldsymbol{R}}^*-S^*$ 分解为拓朴连通分支．这时，V_i 及 V_i^* 是 $G_{\boldsymbol{R}}^+$ 轨道．我们进一步假定 $V_{\boldsymbol{R}}\cap S$ 分解为有限个 $G_{\boldsymbol{R}}^1$ 轨道之并集．令 $\Gamma=G_{\boldsymbol{R}}^+\cap G_{\boldsymbol{Z}}^1$，并分别取 $V_{\boldsymbol{Q}}$ 及 $V_{\boldsymbol{Q}}^*$ 中的 Γ 不变格 L 及 L^*．考虑下面 s 的函数：

$$\Phi_i(f, s)=\int_{V_i}f(x)|P(x)|^s dx,$$

$$\Phi_i^*(f, s)=\int_{V_i^*}f(x^*)|Q(x^*)|^s dx^*,$$

以及

$$Z_i(f, L, s) = \int_{G_R^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{x \in L \cap V_i} f(\rho(g)x)dg,$$

$$Z_j^*(f^*, L^*, s)$$
$$= \int_{G_R^+/\Gamma} \chi(g)^{-s} \sum_{x^* \in L^* \cap V_j^*} f^*(\rho^*(g)x^*)dg,$$

式中 f 及 f^* 分别是 V_R 及 V_R^* 上的 Schwartz 函数，dx，dx^* 分别是 V_R 及 V_R^* 上的 Euclid 测度，dg 是G的 Haar 测度．这时下面的比值

$$\frac{Z_i(f, L, s)}{\Phi_i\left(f, s-\frac{n}{d}\right)} = \xi_i(s, L),$$

$$\frac{Z_j^*(f^*, L^*, s)}{\Phi_j^*\left(f^*, s-\frac{n}{d}\right)} = \xi_j^*(s, L)$$

不依赖于 f 及 f^* 的选取，且是以 s 为复变数的 Dirichlet 级数．这些 Dirichlet 级数 $\xi_i(s, L)$ 及 $\xi_j^*(s, L)$ 称为**伴随前齐性空间的 ζ 函数**（ζ function associated with the prehomogeneous space）．考虑 $|P(x)|^s$ 及 $|Q(x^*)|^s$ 的 Fourier 变换，我们得到 ξ_i 及 ξ_j^* 的函数方程如下．Dirichlet 级数 ξ_i 及 ξ_j^* 可解析开拓成整个 s 平面上的亚纯函数并且满足

$$v(L^*)\xi_j^*\left(\frac{n}{d}-s, L^*\right)$$
$$= \gamma\left(s-\frac{n}{d}\right)(2\pi)^{-ds}|b_0|^s$$
$$\times \exp\left(\pi d\sqrt{-1}\,\frac{s}{2}\right)\sum_{j=1}^{l} u_{ij}(s)\xi_i(s, L)$$

式中 Γ 因子 $\gamma(s) = \prod_{i=1}^{d} \Gamma(s-c_i+1)$．这里 $u_{ij}(s)(1 \leqslant i, j \leqslant l)$ 是 $\exp(-\pi\sqrt{-1}s)$ 的次数 $\leqslant d$ 的多项式，且 b_0 及 c_i 是只依赖于 (G, ρ, V) 的常数．

伴随不定二次型的 Epstein ζ 函数及 Siegel Dirichlet 级数是上面定义的ζ函数的例子．新谷对于整二元三次型定义了这种 ζ 函数，并且得到了关于判别式为 n 的不可约整二元三次型的类数的渐近公式，这公式改进了 Davenport 的结果 [96]．

【参】 [1] E. Artin, The Collected papers, Addison-Wesley, 1965; [2] E. Artin, Zur Theorie der L-Reihen mit allgemeinen Gruppencharakteren, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **8** (1930), 292—306; [3] K. Chandrasekharan, Lectures on the Riemann zeta-function, Tata Institute, Bombay, 1953; [4] S. Chowla-A. Selberg, On Epstein's zeta function I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **35** (1949), 371—374; [5] R. Dedekind, Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen, Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie, Supplement XI, 第四版 1894, § 184, 185, 186; [6] M. Deuring, Algebren, Springer, 1934 (Chelsea, 1948); [7] B. Dwork, On the rationality of the zeta-function of an algebraic variety, Amer. J. Math., **82** (1960), 631—648; [8] B. Dwork, On the zeta function of a hypersurface, Publ. Math. Inst. HES, no. 12, 1962, 5—68; II, Ann, of Math., **80** (1964), 227—299; III, Ann.of Math., **38** (1966), 457—519; [9] M. Eichler, Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen, Birkhäuser, 1963; [10] R. Godement, Les fonctions ζ des algèbres simples I, II, Sem. Bourbaki, Exp. 171, 1958—59; [11] H. Hasse, Zur Theorie der elliptischen Funktionenkörper I, II, III, J. Reine Angew. Math., **175** (1936), 55—62, 69—88, 193—208; [12] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehung zur Verteilung der Primzahlen I, II, Math. Z., **1** (1918), 357—376, **6** (1920), 11—51 (Werke, 215—234, 249—289); [13] E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletschen Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann., **112** (1936), 664—693 (Werke, 591—626); [14] E. Hecke, Über Modulfunktionen und Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, Math. Ann., **114** (1937), 1—28, 316—351 (Werke, 644—671, 672—707); [15] E. Hecke, Mathematische Werke, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959; [16] Y. Ihara (伊原康隆), Hecke Polynomials as congruence ζ-functions in elliptic modular case, (A report on partial validity of Sato's observation), Ann. of Math., **85** (1967), 267—295; [17] 久保田富雄，相互法則と保型函数，数学， **18** (1966), 10—24; [18] T. Kubota (久保田富雄)-H. W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte, J. Reine Angew. Math., **214/215** (1964), 328—339; [19] M. Kuga (久賀道郎), Fibre varieties over a symmetric space whose fibres are abelian varieties, Lecture notes, Chicago Univ., 1963—64 (第7回代数分科会シンポジウム報告集，1964，九大); [20] M. Kuga (久賀道郎)-G. Shimura (志村五郎), On the zeta function of a fibre variety whose fibres are abelian varieties, Ann. of Math., **82** (1966), 478—539; [21] E. G. H. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, II, Teubner, 1909 (Chelsea, 1953); [22] S. Lang, Sur les series L d'une variété algébrique, Bull. Soc. Math. France, **84** (1956), 385—407; [23] S. Lang, Algebraic numbers, Addison-Wesley, 1963; [24] S. Lubkin, On a conjecture of André Weil, Mimeographed notes, Oxford, 1963; [25] K. Prachar, Primzahlverteilung, Springer, 1957; [26] B. Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, 1859, Werke 145—153; [27] F. K. Schmidt, Analytische Zahlentheorie in Körpern der Charakteristik p, Math. Z., **33** (1931), 1—32; [28] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric

Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, J. Indian Math. Soc., **20** (1956) 47—87; [29] J.-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1959; [30] J.-P. Serre, Zeta and L functions (Woodshole 報告集 [54]), 1964; [31] 志村五郎-谷山豊, 近代的整数論, 現代数学講座, 共立出版, 1957; [32] G. Shimura (志村五郎), Correspondences modulaires et les fonctions de courbes algébriques, J. Math. Soc. Japan, **10** (1958), 1—28; [33] 志村五郎, 保型函数と整数論 I, II, 数学, **11** (1960), 193—205, **13** (1961), 65—80; [34] G. Shimura (志村五郎), On zeta-functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions, J. Math. Soc. Japan, **13** (1962), 257—331; [35] G. Shimura (志村五郎), A reciprocity law in nonsolvable extensions, J. Reine Angew. Math., **221** (1966), 209—220; [36] C. L. Siegel, Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen I, II, Math. Z., **43** (1938), 682—708, **44** (1939), 398—426; [37] C. L. Siegel, Gesammelte Abhandlungen I, II, III, Springer, 1966; [38] 末綱恕一, 解析的整数論, 岩波, 1950; [39] 高木貞治, 初等整数論講義, 共立出版, 1931; [40] 高木貞治, 代数的整数論, 岩波, 1948; [41] T. Tamagawa (玉河恒夫), On the ζ-functions of a division algebra, Ann. of Math., **77** (1963), 387—405; [42] Y. Taniyama (谷山豊), L-functions of number fields and zeta functions of abelian varieties, J. Math. Soc. Japan, **9** (1957), 330—366; [43] J. Tate, Algebraic cohomology classes, Amer. Math. Soc., Summer Institute, 1964; [44] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford, 1951; [45] A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1948; [46] A. Weil, Numbers of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., **55**(1949), 497—508; [47] A. Weil, Number theory and algebraic geometry, Proc. Internat. Congress, 1950; [48] A. Weil, Sur la théorie du corps de classes, J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), 1—35; [49] A. Weil, Jacobi sums as Grössencharaktere, Trans. Amer. Math. Soc., **73** (1952), 487—495; [50] A. Weil, Sur les "formules explicites" de la théorie des nombres premières, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Tome Supplémentaire, 1952, 252—265; [51] 山本芳彦, Sato (佐藤) 予想について, 第 8 回日本数学会代数シンポジウム報告集, 1965, p. 31—36; [52] 山本芳彦-長沼英久-土井公二, 実験整数論, 数学, **18** (1966), 95—103; [53] 代数シンポジウム報告集, 第8回不連続群の整数論, 1965, 第5回ゼータ函数, 1963, 日本数学会代数学分科会, 1966; [54] Lecture notes on Algebraic Geometry, Woodshole, Massachusetts, 1964, Amer. Math. Soc., 1964; [55] Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math., IX, 1966; [56] H. Shimizu (清水英男), On zeta functions of quaternion algebras, Ann. of Math., **81** (1965), 166—193; [57] T. Tatuzawa (龍沢周雄) On the Hecke-Landau L-series, Nagoya Math. J., **16** (1960), 11—20; [58] M. Artin-A. Grothendieck-J. L. Verdier, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4), Lecture notes in math. 269, 270, 305, Springer, 1972—1973; [59] P. Berthelot, Cohomogie cristalline des schéma de caracteristique $p>0$, Lecture notes in math. 407, Springer, 1974; [60] B. J. Birch, How the number of points of an elliptic curve over a fixed prime field varies. J. London Math. Soc., **43** (1968), 57—68; [61] E. Bombieri-H. P. F. Swinnerton-Dyer, On the local zeta function of a cubic threefold, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **21** (1967), 1—29; [62] P. Deligne, La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$, Inventiones Math., **75** (1972), 206—226; [63] P. Deligne, Les intersections complètes de niveau de Hodge I, Inventiones Math., **15** (1972), 237—250; [64] P. Deligne, Formes modulaires et représentations l-adiques, Sém. Bourbaki, exp. 355, Lecture notes in math. 349, Springer, 1973; [65] P. Deligne, La conjecture de Weil. Publ. Math. Inst. HES. **43** (1974), 273—307; [66] K, Doi (土井公二) H. Naganuma, (長沼英久) On the functional equation of certain Dirichlet series, Inventiones Math., **9** (1969—1970), 1—14; [67] B. Dwork, A deformation theory for the zeta function of a hypersurface, Proc. Internat. Congress Math. 1962, Stockholm, Almqvist & Wiksell, p. 247—259; [68] M. Eichler, Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen, J. Reine Angew. Math., **195** (1955) 156—171; [69] C. F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, English translation, Yale Univ. Press, 1966; [70] A. Grothendieck, Formule de Lefschetz et rationalité des fonction L, Sém. Bourbaki, exp. 379, 1964—1965 (Benjamin, 1966); [71] T. Honda (本田平), Formal groups and zeta functions, Osaka J. Math., **5** (1968), 199—213; [72] T. Honda (本田平), Isogeny classes of Abelian varieties over finite fields, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 83—95; [73] Y. Ihara (伊原康隆), Algebraic curves mod p and arithmetic groups; in Algebraic groups and discontinuous subgroups, Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math. IX, 1966, p. 265—271; [74] Y. Ihara (伊原康隆), The congruence monodromy problems, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 107—121; [75] Y. Ihara (伊原康隆), On congruence monodromy problems, I, II, Lecture notes, Univ. of Tokyo, 1968—1969; [76] Y. Ihara (伊原康隆), Non-Abelian class fields over function fields in special cases, Actes Congr. Intern. Math., 1970, Nice, Gauthier-Villars, p. 381—389; [77] Y. Ihara (伊原康隆), On($\infty\times p$)-adic coverings of curves (The simplest example), Proc. Internat. Conference on Number Theory, Moscow, 1971, Trudy Math. Inst. Steklov, 132, p. 118—131; [78] Y. Ihara (伊原康隆), On modular curves over finite fields, Internat. Colloquium on Discrete Subgroups of Lie Groups, Bombay, 1973, Tata Inst., Oxford Univ. Press, 1975, p. 161—202; [79] Y. Ihara (伊原康隆), On the differentials associated with congruence relations and the Schwarzian equations defining uniformizations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (IA) **21** (1974), 309—332; [80] Y. Ihara (伊原康隆), Some fundamental groups in the arithmetic of algebraic curves over finite fields, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **72** (1975), 3281—3284; [81] Y. Ihara (伊原康隆)-H. Miki (三木博雄), Criteria related to potential unramifiedness and reduction of unramified coverings of curves, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (IA) **22** (1975), 237—254; [82] H. Jacquet-R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture notes in math. **114**, Springer, 1970; [83] H. Jacquet, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture notes in math. 278, Springer, 1972; [84] S. Kleiman, Algebraic cycles

and the Weil conjectures, Dix exposés sur la cohomologies des schémas, North-Holland, 1968, p. 359—386; [85] S. Lubkin, A p-adic proof of the Weil conjecture, Ann. of Math., (2) **87** (1968), 105—194; (2) (1968), 195—225; [86] B. Mazur, Eigenvalues of Frobenius acting on algebraic varieties over finite fields, Amer. Math. Soc. Summer Institute at Arcata, Calif., 1973; [87] I. I. Pjateckiĭ (И. И. Пятецкий)-Šapiro (Шапиро)-I. R. Šafarevič (И. Р. Шафаревич), A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $K3$ Изв. Акад. Наук СССР, **35** (1971), 530—572; English translation, Math. USSR-Izv., **5** (1971), 547—588; [88] M. Sato (佐藤幹夫), Theory of prehomogeneous vector spaces (note by T. Shintani (新谷卓郎))(Japanese), Sûgaku no Ayumi, **15** (1970) 85—157; [89] M. Sato (佐藤幹夫)-T. Shintani (新谷卓郎), On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, Ann. of Math., (2) **100** (1974), 131—170; [90] I. R. Šafarevič (И. Р. Шафаревич), La théorie de Torelli pour les surfaces algébriques de type $K3$, Actes Congr. Intern. Math., 1970, Nice, vol. 1, Gauthier-Villars, p. 413—417; [91] A. Selberg, On the zeros of Riemann's zeta-function, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo, no. **10** (1942), p. 1—59; [92] H. Shimizu (清水英男), On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, Ann. of Math., (2) **77** (1963), 33—71; [93] H. Shimizu (清水英男), On traces of Hecke operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (I) **10** (1963), 1—19; [94] H. Shimizu (清水英男), Theta series and automorphic forms on GL_2, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 638—683; **26** (1974), 374—376; [95] G. Shimura (志村五郎), Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves, Ann. of Math., (2) **85** (1967), 58—159; [96] T. Shintani (新谷卓郎), On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), 132—188; [97] T. Shintani (新谷卓郎), On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, (IA) **22** (1975), 25—65; [98] J. Tate, Algebraic cycles and poles of zeta functions, Proc. Conference at Purdue Univ., 1963, Harper & Row, p. 93—110; [99] J. Tate, Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields, Inventiones Math., **2** (1966), 134—144; [100] J. Tate, Classes d'isogène des variété abélienne sur un corps fini (d'après T. Honda), Sém. Bourbaki, exp. 352, 1968—1969 (Lecture notes in math. 179, Springer, 1971, p. 95—109); [101] A. Weil, On a certain type of characters of the idele-class group of an algebraic number field, Proc. Intern. Symposium on Algebraic Number Theory, Tokyo-Nikko, 1955, p. 1—7; [102] A. Weil, Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1946; [103] A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann, 1948; [104] A. Weil, Abstract versus classical algebraic geometry, Proc. Intern. Congr. Math., 1954, Amsterdam, North-Holland, 1956, vol. 3, p. 550—558; [105] A. Weil, On some exponential sums, Proc. Nat. Acad. Sci. US, **34** (1948), 204—207; [106] A. Weil, Basic number theory, Springer, 1967; [107] A. Weil, Dirichlet series and automorphic forms, Lecture notes in math. 189, Springer, 1971; [108] A. Weil, Sommes de Jacobi et caractères de Hecke, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1974, 1—14; [109] A. Weil, Essais historiques sur la théorie de nombres, L'Enseignement Math., 22 (1975), 39—55; [110] H. Yoshida, On an analogue of the Sato conjecture, Inventiones Math., **19** (1973), 261—277.

六、几何学（Euclid 几何学和射影几何学）

几何学 [英 geometry 法 géométrie 德 Geometrie 俄 геометрия 日幾何学] 根据 Herodotus 的记录，在古埃及当尼罗河泛滥后为了重整土地而需要进行丈量．因此，他所用的 geometry 一词的原义是"丈量土地"的意思．这样，自古以来从实用的目的出发对图形进行了研究，Thales 已经知道利用三角形的全等来间接地进行测量．Pythagoras 学派更进一步建立了从理论上证明这些问题的基础（→古代的数学，希腊的数学）．Euclid《原本》(Stoicheia) 把直到古希腊时代为止的这些知识综合整理出来而成为一个逻辑体系．《原本》中除了关于图形的知识以外，还包含着关于量的一般理论（现在的实数理论的原型，第 V 卷）和数论的知识（第 VII—IX 卷），而对这些问题的证明也用了图形的概念，又由于其中直接研究图形的部分最多，所以汉译本称为《几何原本》("几何"是 geo 的音译)．总而言之，几何学是关于图形的数学分支，但是在古希腊时代几何学意味着全部的数学．由于这个原因现在还经常把 géomètre, Geometer 与"数学家"当做同义语来使用，B. Pascal 把"细致的精神"（法 esprit de finesse）所表现的一般的数学思想方法，也用"几何学的精神"（法 esprit de géométrie）来表示．

在文艺复兴以后的欧洲，受到了阿拉伯的影响，代数学有了发展，而且在十七世纪以后分析学显著地发展起来了，所以几何学与代数学和分析学成为独立的分支．

可是正如 R. Descartes 所强调的（[1]），数与图形之间有着密切的关系，在空间建立了坐标† 后图形可用数量之间的关系来表示，反之，数量之间的关系也可以用图形来表示．这样利用坐标就能把图形的问题转化为数量之间的问题，用代数的计算处理几何问题的方法，从 S. F. Lacroix 以来称为**解析几何学**（analytical geometry）（[2]）．Descartes 的思想为十七世纪分析学的发展打下了坚实的基础，解析几何学在十八世纪，特别是由于 L. Euler 等人的努力有了显著的进展（[3]），把希腊的 Apollonios（公元前 250 年左右—?）等人总结出的圆锥曲线†的理论，作为二次曲线论用代数方法进行了整理．再利用了十八世纪中发展的分析学的结果，在这个世纪的末叶出现了象 G. Monge([4]) 这样的在微分几何学†中作出贡献的先驱者．

然而，我们并不能说对于一切几何学问题，采用解析几何学的方法来研究都是最适宜的．相对于解析几何学来说，不用坐标而直接研究图形的方法，称为**综合几何学**（synthetic geometry）或**纯粹几何学**（pure geometry）．在这方面，作为新的方法从十七世纪开始出现了由 G. Desargues, Pascal 等人提出的射影几何学†，十八世纪以来由 J. V. Poncelet, L. N. M. Carnot 等人的研究，使之继续得到了发展，而到十九世纪，J. Steiner 等人对综合几何学比解析几何学更加重视（→射影几何学）．

另一方面，很早以来 Euclid 的平行公理†就被作为批评研究的对象，但是到了十九世纪出现了 J. Bolyai, Н. И. Лобачевский 等人提出的否定这个公理的非 Euclid 几何学†．对于相信 Euclid 几何学的先验性的人来说，这是感到不可理解的事情．由于在 Euclid 几何学和射影几何学里能够作出非 Euclid 几何学的模型，因而证实了非 Euclid 几何学的建立，从理论上来说没有任何的矛盾性（→非 Euclid 几何学）．

又根据解析几何学的方法，物质空间和平面分别表现为三维和二维的 Euclid 空间† E^3, E^2，把这些空间解析地一般化，把点定义为具有 n 个实数的组 $(x_1, \cdots, x_n)$，并且把两点 $(x_1, \cdots, x_n)$, $(y_1, \cdots, y_n)$ 之间的距离定义为 $((y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2)^{1/2}$，这样就容

易得到 n 维 Euclid 空间 E^n. 研究 E^2, E^3 的几何学分别称为**平面几何学** (plane geometry), **空间几何学** (space geometry) 和**立体几何学** (solid geometry), 同样地, 研究 E^n 的几何学也就是 **n 维 Euclid 几何学** (n-dimensional Euclidean geometry), 而且也可以研究 n 维的射影几何学和 n 维的非 Euclid 几何学. 把这些几何学从群†的观点统一起来加以论述的是 F. Klein 的埃尔兰根纲领†([6]). 也就是说各种几何学是由一个点集的空间 S, 以及由 S 到它本身上的一个变换群† G 确定的, 研究 S 的子集(图形)的性质中对 G 来说不变的性质, 这就是一种几何学(→ 埃尔兰根纲领).

B. Riemann 开始使几何学再向其他方向发展([5]). 他研究了 n 维流形†, 研究了作为它的特殊情况的 Riemann 空间†和它的几何学. 这种几何学包含着不一定是 Klein 意义下的几何学的内容. Riemann 几何学更进一步发展为一般的微分流形†的几何学, 为新的微分几何学†的发展提供了广阔的领域(→ 微分几何学).

另一方面, 把 Euclid《原本》的公理体系现代化的是 D. Hilbert 的几何基础†, 它成为现代数学公理化的先驱. 由圆锥曲线论开始的代数曲线论发展为一般代数流形†的研究, 即代数几何学†, 它与分析学及代数学进一步相结合, 正在迅速地发展着 (→ 代数几何学).

此外, 自上世纪末叶以来取得很大进展的拓扑学†, 对全部数学的发展有着重大的影响(→ 拓扑学, 微分拓扑学).

这样, 现在几何学已渗透在全部数学之中, 它虽然与代数学、分析学不容易完全区别开, 但是在数学的研究中, 依赖于图形的直观性及由它进行类推的方法, 在今天也没有失去其重要性.

【参】 [1] R. Descartes, *Géométrie*, Paris, 1637; [2] S. F. Lacroix, *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Bachelier, Paris, 1798—99; [3] L. Euler, Introductio ad analysin infinitorum, Lausanne, 1748; (Opera omnia VIII, IX, 1922) (法译本: Introduction à l'analyse infinitesimale I, II, Paris, 1835; 德译本: Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Springer, 1885); [4] G. Monge, Application de l'analyse à la *géométrie*, Paris, 1807; [5] B. Riemann, Über die Hypothese, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsschrift, 1854 (收集在 B. Riemann's gesammelte mathematische Werke, Teubner, 1892); [6] F. Klein, Vergleichende Betrachtungen über neuere *geometrische* Forschungen, Das Erlanger Programm, 1872 (收集在 F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen I, Springer, 1921).

几何基础 [英 foundation of the geometry 法 fondement de la géométrie 德 Grundlagen der Geometrie 俄 основания геометрии 日幾何学基礎論] 几何学本来的对象是图形, 因此研究它必然要用我们的空间直观性. 可是直观也有缺乏客观性的情况. 因而在明确地规定了定义和公理的基础上, 排除直观, 建立纯粹的合乎逻辑的几何学的思想, 在古希腊已经开始, Euclid《原本》就是在这种思想的基础上形成的.《原本》虽然长期以来被看做是完善的逻辑体系的典型, 但是随着时代的前进, 特别是十九世纪以来, 数学的批判精神有所发展, 人们注意到《原本》中的逻辑性存在许多缺陷. 虽然关于 Euclid 的平行公理的研讨和非 Euclid 几何学†的建立都成为批判《原本》的推动力之一, 但是作为形成 Euclid 几何学本身的基础来说,《原本》中的公理也是不完备的. 十九世纪后半叶以来, 许多数学家提出了可以用来代替它的逻辑上完善的公理体系, 其中由 D. Hilbert 提出的公理体系([1])是考虑得最周到的.

【Hilbert 的公理体系】 Hilbert 把空间内的**点** (point) (用 $A, B, C, \cdots$ 表示)、**直线** (straight line) (用 $a, b, c, \cdots$ 表示) 以及**平面** (plane) (用 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示)作为不定义的概念†, 并令在这些概念之间存在着"在…之上"、"在…之间"、"合同"、"平行"等关系. 以下的五组公理 I)—V) 规定了这些关系:

I) **关联公理** (英 incidence axioms 德 Axiome der Verknüpfung).

1) 如果已知 A, B 两点, 则存在一条直线 a, 使 A, B 都在它上面. —— A "在 a 上", 这句话也可以说成 a "通过" A. 所以对上述情况也可以说 a "通过" A, B.

2) 如果已知 A, B 是不同的两点, 则通过

A, B 只有一条直线. ——这个 a 称为由 A, B "确定"的直线,或者称为直线 $A\cup B$.

3) 在一条直线上至少有两个不同的点. 至少有三点不在同一条直线上.

4) 如果已知不在同一条直线上的 A, B, C 三点, 则存在一个平面 α, 使 A, B, C 在这个平面上. 在任意一个平面上至少有一个点. ——点 A "在 α 上", 这句话也可以说成 α "通过"点 A.

5) 如果已知不在同一条直线上的 A, B, C 三点, 则只有一个平面 α 通过 A, B, C. ——这个平面 α 称为由 A, B, C "确定"的平面, 或者称为平面 $A\cup B\cup C$.

6) 如果一条直线 a 上的不同两点 A, B 在一平面 α 上, 则 a 上的每一点都在平面 α 上. ——这时就说"a 在 α 上"或者"α 通过 a".

7) 如果两平面 α 和 β 有一公共点 A, 则 α, β 至少有另一公共点.

8) 至少有四个点不在同一平面上.

II) **顺序公理** (英 axioms of order 德 Axiome der Anordnung). 一直线上的点与点之间的相互关系, 我们用"在…之间"这句话来描述.

1) 如果"点 B 在点 A 和点 C 之间", 则 A, B, C 是一直线上不同的三点, 这时 B 也在 C 和 A 之间.

2) 如果已知 A, C 是直线 a 上的不同两点, 则可在直线 a 上找到点 B, 使得 C 在 A 和 B 之间.

3) 如果 B 在 A, C 之间, 则 A 不可能在 B, C 之间. ——由不同的两个点 A, B 所构成的集合称为**线段** (segment), 用 AB 或 BA 来表示. 在 A 和 B 之间的点称为在线段 AB 的**内部** (interior), A 和 B 称为线段 AB 的**端点** (end). 在通过 A、B 的直线上的点中, 不在 AB 的内部也不是端点的点, 称为在 AB 的**外部** (exterior).

4) 设 A, B, C 是不在同一直线上的三点, 通过 A, B, C 的平面为 α, a 是 α 上的一直线, 但不通过 A, B, C 这三点中的任一点. 如果 a 通过线段 AB 内部的点, 则它必定也通过线段 BC 或 CA 的内部的点 (**Pasch 公理**, M. Pasch).

从 1), 2), 3) 可以证明以下事实: 对于一直线上的点可赋予线性的序[†], 即当给出直线 a 上的 n 个点 ($n>2$) 时, 如果对这些点给予适当的标号 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, 则可使"当 $1\leqslant i<j<k\leqslant n$ 时, A_j 处于 A_i 和 A_k 之间". 这样给出标号的方法只有两种(**线性顺序定理** (theorem of linear order)). 又设 O 是直线 a 上的一点, A, B 为 a 上的与 O 不同的两个点, 如果 $A=B$ 或 O 在线段 AB 的外部的情形用 $A\sim B$ 表示, O 在线段 AB 的内部的情形用 $A\nsim B$ 表示, 则符号 $\sim$ 表示等价关系[†]. 并且当 $A\nsim B$, $A\nsim C$ 时有 $B\sim C$. 当 $A\sim B$ 时, A, B 称为在 a 上关于 O 的同**侧** (side), 当 $A\nsim B$ 时, 称为在异侧. 设 $a'=\{A'|A\sim A'\}$, $a''=\{A''|A\nsim A''\}$, 则有 $a=a'+\{O\}+a''$ (集合的直和). 把 a', a'' 称为以 O 为**端点**(或者从 O 发出)的在直线 a 上的**射线** (ray). 用 4) 可以证明下面的事实: 设 a 是平面 α 上的一直线, 当 A, B 是在 α 上而不在 a 上的两个点时, $A=B$ 或者在线段 AB 的内部没有 a 的点的情形用 $A\sim B$ 表示, 在线段 AB 的内部有 a 的点的情形用 $A\nsim B$ 表示, 则 $\sim$ 是等价关系. 又如果 $A\nsim B$, $A\nsim C$, 则 $B\sim C$. 当 $A\sim B$ 时, A, B 称为在 α 上关于 a 的同**侧**, 当 $A\nsim B$ 时, 称为在异侧. 把 a 上的点的集合仍用 a 来表示, 如果 $\alpha'=\{A'|A\sim A'\}$, $\alpha''=\{A''|A\nsim A''\}$, 则有 $\alpha=\alpha'+a+\alpha''$ (集合的直和). α', α'' 称为以 a 为**边界** (boundary) 且属于平面 α 的**半平面** (half-plane).

III) **合同公理** (英 axioms of congruence 德 Axiome der Kongruenz). 在两条线段 AB, $A'B'$ 之间, 用 $AB\equiv A'B'$ 表示的**合同** (congruent) 关系成立. (由于线段是作为两个不同点的集合来定义的, 因此 $AB\equiv A'B'$, $AB\equiv B'A'$, $BA\equiv A'B'$, $BA\equiv B'A'$ 这四个式子的意义相同.) 关于这个关系, 下面的公理 1), 2), 3) 成立.

1) 设 A, B 是直线 a 上的不同的两点, A_1

是直线 a_1 上的一点（a，a_1 可以相同也可以不同），如果从 A_1 出发的在 a_1 上的一条射线为 a_1'，则可在 a_1' 上求得一点 B_1 使 $AB \equiv A_1B_1$.——这时称为在 a_1' 上取 A_1B_1 合同于 AB.

2）如果 $AB \equiv A_1B_1$，$AB \equiv A_2B_2$，则有 $A_1B_1 \equiv A_2B_2$.——由此可以证明线段的合同关系是等价关系.

3）如果 A，B，C 是 a 上的三个点，B 在 A，C 之间，A_1，B_1，C_1 是在 a_1 上的三个点；B_1 在 A_1，C_1 之间，且 $AB \equiv A_1B_1$，$BC \equiv B_1C_1$，则有 $AC \equiv A_1C_4$.

设 h，k 是平面 α 上通过一点 O 的两条不同的直线．h' 是从 O 引出的 h 上的一条射线，同样，k' 是从 O 引出的 k 上的一条射线．我们把这一对射线的集合称为平面 α 上的**角**(angle)，用 $\angle(h', k')$ 或 $\angle(k', h')$ 表示．A，B 分别是 h'，k' 上的两点，这时把 $\angle(h', k')$ 用 $\angle AOB$ 或简略地用 $\angle O$ 表示．h'，k' 称为这个角的**边**(side)，点 O 称为这个角的**顶点**（vertex)．又 h' 是以 k 为边界的属于平面 α 的一个半平面的子集，k' 是以 h 为边界的属于平面 α 的一个半平面的子集．这两个半平面的公共部分称为角 $\angle(h', k')$ 的**内部**(interior)，在 α 上的点中不属于 $\angle(h', k')$ 的内部，不是顶点，也不在角的边上的点的集合称为这个角的**外部**(exterior)．与线段的情况相同，用记号 $\equiv$ 表示的两个角 $\angle(h', k')$ 和 $\angle(h_1', k_1')$ 之间的合同关系成立．对于角的合同关系，下列公理成立.

4）设 $\angle(h', k')$ 是平面 α 上的角，h_1 是平面 α_1 上的一直线（α_1 与 α 可以是相同的，也可以是不同的)．O_1 是 h_1 上的一点，从 O_1 引出的属于 h_1 的射线是 h_1'，设以 h_1 为边界属于 α_1 的一个半平面为 α_1'，则在 α_1' 中可求得射线 k_1'，使 $\angle(h', k') \equiv \angle(h_1', k_1')$．并且这样的 k_1' 是唯一确定的(这时称为在半平面 α_1' 内，取 $\angle(h_1', k_1')$ 合同于 $\angle(h', k')$)．而且对一切的角，$\angle(h', k') \equiv \angle(h', k')$ 成立．——由此可以证明对于角的合同关系就是等价关系.

5）设 A，B，C 及 A_1，B_1，C_1 分别为不在一直线上的三个点，如果有 $AB \equiv A_1B_1$，$AC \equiv A_1C_1$，$\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$，则 $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$.

IV）**平行公理**（英 axiom of parallels 德 Axiom der Parallelen)．如果 a，b 是两条不同的直线，或者既在 a 上又在 b 上的点只有一点 P，或者不存在这样的点，不论那种情形都可以由关联公理 I 2）得到证明，前面的情形称为 a，b 在 P 点**相交**（intersect)，用 $a \cap b = P$ 表示．后面的情形如果 a，b 在同一平面上，则称 a，b **平行**（parallel)，用 $a /\!/ b$ 表示．由公理 I)—III）可以证明：如果 A，a 在同一平面 α 上，且 A 不在 a 上，则在 α 上存在通过 A 且平行于 a 的直线 b．平行公理是要求这样的直线 b 只存在一条.

V）**连续性公理**（英 axioms of continuity 德 Axiome der Stetigkeit).

1）如果 AB，CD 为任意的两条线段，则可在直线 $A \cup B$ 上取有限个点 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，使得 $CD \equiv AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \cdots \equiv A_{n-1}A_n$，而且可使 B 在 A，A_n 之间（**Archimedes 公理**).

2）一直线上的点集，在它满足线性顺序定理，合同公理 III 1)，及 Archimedes 公理的条件下，不可能再行扩充．即直线上的点集是满足公理 I 1)，II 2)，III 1)，V 1）的，但是把这个集合再扩充，使扩充后的集合满足这些公理是不可能的（**直线的完备性公理**（英 axiom of linear completeness 德 Axiom der linearen Vollständigkeit))．——由此可以证明下面的**完备性定理**(英 theorem of completeness 德 Satz der Vollständigkeit)：空间内的点、直线、平面的集合在满足公理 I)—IV)，V 1）的条件下，把这个集合再添加新的点、直线或平面使它们还满足以上公理是不可能的.

【相容性】 Hilbert 列举出以上的公理，并证明了这个公理体系的相容性和公理群之间的独立性，而且讨论了这些公理间的关系.

Hilbert 关于相容性的证明依赖于实数理论的相容性(→数学基础)．即反用通常的解析几何学的方法，把由三个实数的组（x_1，x_2，x_3）表

示的点，看作满足一个或者两个无关的一次方程的 (x_1, x_2, x_3) 的集合，分别定义为平面和直线，如果"在…之间"，"合同"等也按解析几何学中的定义，则可以在实数理论中作出满足所有公理 I)—V) 的模型，所以假设实数理论是相容的，则可以证明公理 I)—V) 也是相容的(→ 公理)。

除去最后的 V 2)，满足 I)—V1) 的模型，不是在实数全体上，而是用实的代数数†的数域 R_0 代替实数域 $\boldsymbol{R}$，同样也可以作出，因此在可数集的范围内可以证明 I)—V1) 的相容性。而且也可以用按下面定义的域 P_0(比 R_0 更小的)来代替 R_0。一般地，当 α 是域 F 的元素时，$F(\sqrt{1+\alpha^2})$ 称为 F 的 **Pythagoras 扩张** (Pythagorean extension)。当 F 的全部的 Pythagoras 扩张与 F 一致时，F 称为 **Pythagoras 闭域**或 **Pythagoras 域** (Pythagorean field)。例如上面的 $\boldsymbol{R}$, R_0 都是 Pythagoras 域，一般地在"Pythagoras 域上的解析几何学中"公理 I)—IV) 是成立的。可以证明，与存在包含任意域的最小的代数闭域†一样，存在包含任意域的最小的 Pythagoras 域。P_0 定义为含有有理数域的最小的 Pythagoras 域。

【独立性】 因为在 Hilbert 的公理体系中，关联公理 I)、顺序公理 II) 是作为叙述 III) 以下公理的前提来使用的，因此公理群 I), II) 与其他公理群不是独立存在的，而 III), IV), V) 的各公理群分别与其他的公理群是独立存在的。

关于平行公理 IV) 是独立的事实，由非 Euclid 几何学的成立就可以知道 (→ 非 Euclid 几何学)。III 5) 对其他所有的公理是独立的事实，可用下面的模型来表示。与证明 I)—V) 的相容性一样，反用三维的解析几何学的方法来定义点、直线和平面，而两点 (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) 间的距离定义为 $((x_1-y_1+x_2-y_2)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2)^{1/2}$。在这样建立的几何学里，除去 III 5) 以外，其他公理都成立，但只有 III 5) 不成立。V 2) 对于其他的公理是独立的事实，可由上述的 R_0 或 P_0 上建立的几何学表示出来，但是 V1) 独立于公理群 I)—IV) 的事实，由存在非 Archimedes 的† Pythagoras 域可以得知。也就是任意的非 Archimedes 域(例如有理数域上的对一元有理函数域上按非 Archimedes 赋值†所给出的)为 F 时，含有 F 的最小的 Pythagoras 域 P 是非 Archimedes 的，虽然对于 P 上的解析几何学来说公理群 I)—IV) 是成立的，但是 V1) 不成立。这样 V1) 不成立的几何学称为**非 Archimedes 几何学** (non-Archimedean geometry)。

【完备性与公理间的关系】 由 I)—V) 所规定的几何学里引入坐标†，这样把它看成普通的解析几何学(即实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的三维 Euclid 几何学)，那么就可以表示出上述 I)—V) 公理的完备性。引入坐标时在本质上是运用了连续性公理 V)，但 Hilbert 还说明了下面的事实。

i) 只由 I)—IV) 确定的几何学，表现为某个 Pythagoras 域上的解析几何学。

ii) I), II) 与 IV*) 加强的平行公理："通过不在一直线 a 上的点 A，存在平行于 a 的直线 a'，并且只存在一条"所确定的几何学表现为关于某个域 K(不一定是可换的)上的三维仿射几何学†。

iii) 上面的域 K 是可换的充分必要条件是对这个几何学，以下的 **Pascal 定理**成立：对于图 1，如果有 $A'\cup B /\!/ A\cup B'$, $B'\cup C /\!/ B\cup C'$，则有 $A'\cup C /\!/ A\cup C'$。

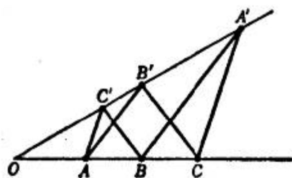


图 1

iv) 由 I 1)—I 3), II), IV*) 确定的"二维几何学"嵌入由 I), II), IV*) 所确定的三维几何学的充分必要条件是以下的 **Desargues 定理**成立：在图 2 中如果有 $A\cup B /\!/ A'\cup B'$, $B\cup C /\!/ B'\cup C'$，则有 $C\cup A /\!/ C'\cup A'$。

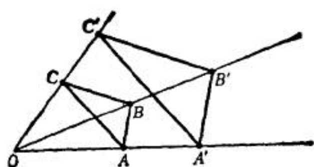


图 2

v) 如果 I 1)—I 3), II), IV*) 与 Pascal 定理成立, 则 Desargues 定理也成立.

vi) Desargues 定理对于 I 1)—I 3), II), III 1)—III 4), IV*), V) 是独立的. 也就是说这些公理成立, 而 Desargues 定理不成立的**非 Desargues 几何学** (non-Desarguesian geometry) 是可以作出的.

虽然关于 I), II), IV*), Pascal 定理及 Desargues 定理的结果属于仿射几何学, 但是与其相应的结果对于射影几何学也成立 (→射影几何学).

【多边形和它的面积】 对于有限个点 $A_i(i=0, 1, \cdots, r)$, 线段 $A_i A_{i+1}(i=0, 1, \cdots, r-1)$ 的集合(或者是这些线段上的点集)称为连接 A_0, A_r 的**折线**(德 Streckenzug),特别是 $A_0=A_r$ 的折线称为**多边形** (polygon), A_i 称为这个多边形的**顶点** (vertex), 线段 A_iA_{i+1} $(i=0, 1, \cdots, r-1)$ 称为它的**边** (side). 顶点个数为 r 的多边形, 称为 **r 边形** (r-gon) (特别是 $r=3, 4, 5, 6$ 时, 分别称为**三角形** (triangle), **四边形** (quadrangle), **五边形** (pentagon), **六边形** (hexagon)), 所有的顶点都在同一个平面上的多边形称为**平面多边形** (planar polygon). 相邻的三个以上的顶点不在一直线上, 而且除相邻的两个边有公共的顶点以外, 任何其他两个边没有公共点这样的折线或多边形称为**单的** (simple). 以下把单的平面多边形简称为多边形.

由这种意义下的多边形把平面分成**内部** (interior) 和**外部** (exterior) 两部分,这是 Jordan 曲线定理†的特殊情况,但是这个定理只从公理 I 1)—I 3), II) 就可以得到证明. 连结一个多边形 P 的边上两个点, 画一条在 P 内部的单的折线, 可以得出两个新的多边形 P_1, P_2 (图 3), 这时用 $P=P_1+P_2$ 表示, 称为把 P **分解** (decompose) 为 P_1, P_2. 当把 P_1, P_2 再进一步分解时, 可以表示为 $P=P_1+\cdots+P_k$. 多边形的**面积** (area) 是对应于平面上的多边形 P 的正数 $m(P)$, 当 P, Q 合同时, 有 $m(P)=m(Q)$, 并且以 $m(P_1+P_2)=m(P_1)+m(P_2)$ 作为其特征. 如果在两个多边形 P, Q 中, 有 $P=P_1+\cdots+P_k$, $Q=Q_1+\cdots+Q_k$, 且 $P_1\equiv Q_1, \cdots, P_k\equiv Q_k$, 则多边形 P, Q 称为**分解合同**(德 zerlegungsgleich), 用 PzQ 表示. 又对于 P, Q 如果取适当的 P', Q', 使得 $P'zQ'$, $(P+P')z(Q+Q')$, 则 P, Q 称为**补充合同** (德 ergänzungsgleich), 用 PeQ 表示. 如果有 PzQ 或 PeQ, 则显然有 $m(P)=m(Q)$, 而且在公理 I)—IV) 的情况下, 当 $m(P)=m(Q)$ 时, 可证

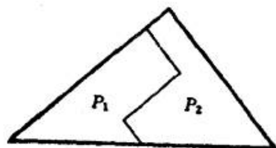


图 3

明 PeQ. 又当有公理 I)—IV), V1) 且 $m(p)=m(Q)$ 时, 也可以证明有 PzQ. 也就是说不用连续性公理 V 2), 关于平面多边形的面积理论也是可以建立的,但是对三维以上的情形,上述内容不成立. 对于体积相等的多面体可以作出既不是分解合同也不是补充合同的例子 (M. Dehn ([2])).

【利用直尺和长规的几何作图】 由公理 I)—IV) 确定的几何学可以表现为关于 Pythagoras 域的解析几何学, 反之, 关于任意的 Pythagoras 域上的解析几何学, 公理 I)—IV) 是成立的, 因此所谓由公理 I)—IV) 存在的"量"的最小范围, 是包含上述的有理数域的最小的 Pythagoras 域 P_0. Hilbert 注意到把"由公理 I)—IV) 存在着"这样一个问题转变为几何学上的"利用直尺和长规的几何作图". 所谓**长规** (德 Eichmass) 是一种工具, 当给出定长 x 时,

能够在从 A 点引出的射线 AB 上求出点 X，使 $AX=x$，只利用长规和画直线的工具（直尺）并不能解决所有用直尺和圆规能够解决的作图问题（→ 几何作图问题）．可是当 α 是 P_0 的任意元素时，能求出所有 αx 的长度．P_0 的元素是只用平方根作出全正†的(即所有的共轭数是正的)代数数，它具有算术的特征．这是 Hilbert 曾经设想的结论，由 E. Artin 做了证明（[3]）．

【关联的问题】 虽然 Hilbert 的几何基础是三维 Euclid 几何学的公理论，但是很容易把它推广为 n 维的情况（→ Euclid 几何学）．而且对于仿射几何学†，射影几何学†(至少对三维以上的情形)也有组织得很好的公理体系．Hilbert 曾指出对于二维的双曲几何学†，只要把上面的公理体系稍作修改即可（[1] 附录 III）．除此以外，关于一般非 Euclid 几何学(特别是椭圆的情形)的完备的公理体系尚未被人们所认识．另一方面，也有把 Euclid 空间的运动群†表征为拓扑群†而根据它来建立 Euclid 几何学的方法（[1] 附录 IV）．又 G. Thomsen 注意到 Euclid 空间的运动群是由点、直线、平面的对称变换而生成的，他利用这些对称变换把 Hilbert 的公理改写为群论的表示方法([4])．Hilbert 把对几何基础的研究引向了数学基础†问题的研究（[1] 附录 VI—X）．

【参】 [1] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, 初版 1899, 第七版 1930; [2] M. Dehn, Über den Rauminhalt, Math. Ann., **55** (1902), 465—478; [3] E. Artin, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **5** (1927), 100—115; [4] G. Thomsen, Grundlagen der Elementargeometrie, Teubner, 1933; [5] 弥永昌吉，幾何学基礎論，岩波講座数学，1935.

Euclid 几何学 [英 Euclidean geometry 法 géométrie euclidienne 德 Euklidische Geometrie 俄 евклидова геометрия 日 ユークリッド幾何学] 【历史】 从古希腊时代起就有人试图把物质空间的几何学公理化，而 Euclid† 首先完成了（→ 希腊的数学）．

在 Euclid《几何原本》所记载的公理中，称为**第五公设**（fifth postulate）的是"两条直线与第三条直线相交，在第三条直线一侧的两个角(所谓同傍内角，图 1 的 α, β）之和小于二直角时，这两条直线必在这一侧相交"．如果按《原本》，把一平面上互不相交的直线称为平行的，则同傍内角之和等于二直角的两条直线是平行的(图 2)．因而，过不在直线 l 上的点 P 且平行于 l 的直线 l' 存在的事实，由《原本》的其他公理可以得到证明，但这样的 l' 只有一条的结论，须用第五公设来证明．因为在与《原本》的其他公理的关系中，第五公设与"平行线的唯一性"是等价的，所以第五公设也叫做**平行公理**（axiom of parallels）．利用这个公理可以证明关于平行线同傍内角之和是二直角、错角相等、三角形的三内角之和是二直角等．在《原本》第一卷最后的 Pythagoras 定理的证明中，第五公设起到了重要作用．如上所述这个公理在 Euclid《原本》所列举的公理中占有重要的地位，所以，有时也称为 **Euclid 公理**（Euclidean axiom）．

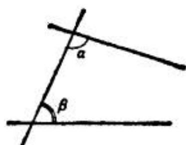


图 1

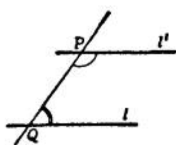


图 2

然而，这个公理在《原本》的所有公理中不仅叙述起来最繁琐，而且在有界空间中，用作图来验证它是不可能的，所以它成了各种批判的对象．最初人们想从《原本》的其他公理中导出这个公理，但是全都失败了．终于到了十九世纪出现了非 Euclid 几何学，这时才明确了这个公理与《原本》中的其他公理是无关地存在的（→ 非 Euclid 几何学）．

所谓 Euclid 几何学是相对非 Euclid 几何学来说的术语，Euclid 几何学意味着 Euclid 公理成立的几何学．《原本》在叙述方面也有一些不完善之处，直到十九世纪末，《原本》的内容才得到了逻辑性的整理（→ 几何基础）．从今天的数学观点来看，正如下面所说的那样，首先

由着眼于刚体运动自由度的 H. Helmholtz 的思想定义运动群，然后像 F. Klein 那样，把对于在运动群下不变的仿射空间† 的性质的研究定义为 Euclid 几何学，这是最自然的（→埃尔兰根纲领）（参考文献之一，有安倍亮-弥永昌吉，Proc.Imp. Acad. Tokyo, **19**（1943））.

【运动群】 设 A^n 是有序域† P 上的 n 维仿射空间，B^r 是 A^n 的 r 维子空间（$n \geqslant r \geqslant 0$）（→仿射几何学）. 设 B^r 上的 $r-1$ 维子空间是 B^{r-1}，B^{r-1} 上的 $r-2$ 维子空间是 $B^{r-2}, \cdots$. 对于这个空间的序列 $B^r, B^{r-1}, \cdots B^0$ 来说，B^{k-1} 把 B^k 分割为两个半空间†（$k=r, \cdots, 1$），设其中一个半空间为 H^k. 这样得到的 r 个半空间的序列 $H^r, H^{r-1}, \cdots H^1$ 称为 **r 阶的半空间链**（chain of half-spaces of rank r），用 $\mathfrak{H}^r$ 表示（$n \geqslant r \geqslant 1$）. 而且这时 H^r 称为 $\mathfrak{H}^r$ 的**主半空间**，B^r 称为 $\mathfrak{H}^r$ 的**主空间**. 如果存在 A^n 到其自身上的固有仿射变换† f，设 $f(H^k)=K^k$，则 $K^r, K^{r-1}, \cdots, K^1$ 也成为 r 阶的半空间链. 把它用 $\mathfrak{K}^r$ 表示，写作 $f(\mathfrak{H}^r)=\mathfrak{K}^r$.

由 A^n 到其自身上的固有仿射变换的全体构成群 $\mathfrak{A}^n$，当它的子群 $\mathfrak{B}^n$ 有以下性质 1），2）时，把 $\mathfrak{B}^n$ 称为 $\mathfrak{A}^n$ 的**运动群**或**合同变换群**（英 group of motions 德 Bewegungsgruppe），$\mathfrak{B}^n$ 的元素称为**运动**或者**合同变换**（motion）. 而且把 1），2）称为**自由运动**（free mobility）公理. 1）满足 $n \geqslant r \geqslant 1$ 的任意自然数为 r，如果 $\mathfrak{H}^r$，$\mathfrak{K}^r$ 是任意的两个 r 阶的半空间链，则存在使 $f(\mathfrak{H}^r)=\mathfrak{K}^r$ 的 $\mathfrak{B}^n$ 的元素 f. 2）如果 $f(\mathfrak{H}^r)=\mathfrak{K}^r$，$g(\mathfrak{H}^r)=\mathfrak{K}^r(f, g \in \mathfrak{B}^n)$，而且 p 是 $\mathfrak{H}^r$ 的主空间的任意一点，则有 $f(p)=g(p)$. 也就是说，把 $\mathfrak{H}^r$ 映为 $\mathfrak{K}^r$ 的 $\mathfrak{B}^n$ 的元素即或存在两个以上，它们在 $\mathfrak{H}^r$ 主空间上的效果也是一致的. 特别是 $r=n$ 的情形，满足 $f(\mathfrak{H}^n)=\mathfrak{K}^n$ 的 $\mathfrak{B}^n$ 的元素是唯一确定的. 在 $n=1$ 的情形，有形如 $f(x)=\pm x+a(a \in P)$ 的 $\mathfrak{A}^1$ 的元素变成 $\mathfrak{B}^1$ 的元素，这是显然的. 在 $n \geqslant 2$ 的情形，为使满足 1），2）的 $\mathfrak{A}^n$ 的子群 $\mathfrak{B}^n$ 存在，P 具有下面的性质是充分必要的：如果 $a, b \in P$，则在 P 中存在满足 $x^2=a^2+b^2$ 的 x. 当域 P 具有这个性质时，P 叫做 **Pythagoras 域**（Pythagorean field）. P 为实闭域†（例如实数域）时，就是 Pythagoras 域. 当 $\mathfrak{B}^n$ 存在时，根据上面的条件它被唯一确定. 在 P 是实数域的情形，假设上面的条件 1）只有当 $r=n$ 时成立，那么可以导出对于其他的 r 也是成立的（M. S. Lie, H. Weyl）. 以下设 P 是 Pythagoras 域，因而 $\mathfrak{B}^n$ 是存在的.

现在有 $A^n \supseteq B^r \supseteq B^k (n \geqslant r \geqslant k \geqslant 0)$，$\mathfrak{H}^r$ 是以 B^r 为主空间的 r 阶的半空间链 $H^r, \cdots, H^k, \cdots, H^1$，而且 H^k 是在 B^k 上的半空间. 又同样对于 r 阶的半空间链 $\mathfrak{K}^r$：$K^r, \cdots, K^k, \cdots, K^1$ 来说，当 $j=k$ 时有 $H^j=K^j$，当 $r \geqslant i \geqslant k+1$ 时 H^i 与 K^i 在 B^i 的不同的半空间上，这两个半空间是由 B^{i-1} 所分成的，把 $\mathfrak{K}^r$ 用 $\mathfrak{H}^r_k$ 来表示. 使 $f(\mathfrak{H}^r)=\mathfrak{H}^r_k$ 的 $\mathfrak{B}^n$ 的元素 f 称为 B^r 关于 B^k 的**对称变换**或**镜面反射**（英 symmetry 德 Spiegelung）. 对于 B^r 的效果只是由 B^k 来确定. 特别地，关于 A^n 的一点 $A^0=p$ 的镜面反射 S_p 称为以 p 为中心的**中心对称变换**（central symmetry），关于 A^n 的超平面 $A^{n-1}=h$ 的镜面反射 $S(h)$，称为对于 h 的**超平面对称变换**（hyperplanar symmetry）. 如果 A^n 的所有超平面的集合为 $H(A^n)$，则 $\mathfrak{B}^n$ 由 $\{S(h) \mid h \in H(A^n)\}$ 来生成. 又 $S_p\ S_q$ 只是 A^n 的 $2 \cdot \overrightarrow{pq}$ 的平行移动（图 3）. 从而平行移动也都属于 $\mathfrak{B}^n$. A^n 的平行移动群 $\mathfrak{T}^n$ 构成 $\mathfrak{B}^n$ 的正规子群. 当 $p, q \in A^n$ 时，使 $\tau(p)=q$ 的 $\mathfrak{T}^n$ 的元素 τ 可写作 τ_{pq}. 设在 $\mathfrak{B}^n$ 的元素中，由使 A^n 的一点 p 不变的元素构成的子群为 O^n_p 时，则有 $O^n_q=\tau_{pq} O^n_p \tau^{-1}_{pq}$. 所以一切的 O^n_p 都是 $\mathfrak{B}^n$ 的共轭子群，从而是同构的. $\mathfrak{B}^n$ 是由 $\mathfrak{T}^n$ 与 O^n_p 所生成的. O^n_p 为 p 周围的 n 维**旋转群**（group of rotations），一般来说，$\mathfrak{B}^n$ 的元素中使 A^n 的一个平面 $A^k (0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 不变的元素所构成的 $\mathfrak{B}^n$ 的子群，称为 A^k 周围的旋转群.（也有时把其中的只由不改变空间 A^n 的方向的元素构成的子群称为旋转群，这时前者称为**广义的旋转群**.）旋转群的元素称为**旋转**（rotation）.

研究在 $\mathfrak{B}^n$ 下 A^n 的不变性质的是 **n 维**

Euclid 几何学. 由于有 $\mathfrak{A}^n \supset \mathfrak{B}^n$，所以仿射几何学的诸命题(关于各维平面结合的性质等)都可认为是 Euclid 几何学的命题，但是另外还有 Euclid 几何学本身所特有的定理。还有，由 A^n 的相似变换†和 $\mathfrak{B}^n$ 生成的 $\mathfrak{A}^n$ 的子群，称为 A^n 的"扩大的运动群"，研究在它下 A^n 的不变性质，称为**广义的 n 维 Euclid 几何学**.

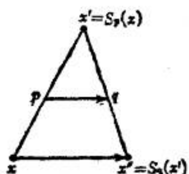


图 3

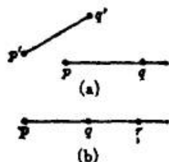


图 4

【线段的长度】 对于 A^n 的两个图形 F, F'，当存在满足 $f(F) = F'$ 的 $f \in \mathfrak{B}^n$ 时，则称 F, F' 为**合同的** (congruent)，用 $F \equiv F'$ 表示. 合同关系是一种等价关系†. 设 A^n 的线段为 $s = \overline{pq}$, $s' = \overline{p'q'}$，如果 $s \equiv s'$，则称为 s, s' 的**长度** (length) 相等. 线段的长度不外是其合同类的名称. 线段 s 的长度用 $|s|$ 表示. 一切 $\overline{pp}$ 形的线段都是合同的. 它的长度是 $|\overline{pp}| = 0$. 给出以 p 为起点的射线，在它上面取 q，能使 $|\overline{pq}|$ 为所给的长度，这时 q 是唯一确定的(图 4 (a)). 若 r 在线段 $\overline{pq}$ 的延长线上，那么 $|\overline{pr}|$ 只由 $|\overline{pq}|$ 和 $|\overline{qr}|$ 来确定(图 4 (b)). 这时用 $|\overline{pr}| = |\overline{pq}| + |\overline{qr}|$ 来定义长度的加法. 根据这个加法，长度可构成交换半群†，0 是它的零元，因为消去律† $|s| + |s'| = |s_1| + |s'| \Rightarrow |s| = |s_1|$ 成立，因此这个半群可扩张为有序加法群 P (→群).

当 $|s| \neq 0$, $|s'|$ 是任意长度时，在从 p 发出的射线上可取 q, r，使 $|\overline{pq}| = |s|$, $|\overline{pr}| = |s'|$，而且 $pr/pq = \lambda$ 是 P 的正的元素，这个 λ 只由 $|s|$, $|s'|$ 所确定. 在这里，定义 $|s'|:|s| = \lambda$，把 λ 称为以 $|s|$ 为**单位** (unit) 测量 $|s'|$ 所得的量. 它是 P 的元素，但是如果 P 为 Archimedes 的†，因为 P 与实数域的子域是同构的，所以 λ 可以表示为正的实数 (→域[有序域]). 这时如果 $(|s'| + |s''|):|s| = (|s'|:|s|) + (|s''|:|s|)$, $|s'| \neq 0$，则 $(|s''|:|s'|)(|s'|:|s|) = |s''|:|s|$ 成立. 所以根据"用某个单位来测量"而得到 P，它被同构地映射在 P 的加法群上. 又以某个 $|s_0|$ 为单位，测量 $|s|$, $|s'|$, $|s''|$, $\cdots$，所得的量是 λ, λ', λ'', $\cdots$，若在 P 的这些元素之间齐次有理关系 $\varphi(\lambda, \lambda', \lambda'', \cdots) = 0$ (即当 $\varphi(x, x', x'', \cdots)$ 是以 P 中的元素为系数的有理式，$\varphi(\mu x, \mu x', \mu x'', \cdots) = \mu^\alpha \varphi(x, x', x'', \cdots)$ (α 是一定的有理整数 ≥ 0) 时，再代入 $\lambda, \lambda', \lambda'', \cdots$ 后等于 0 的关系)成立，那么把单位换成其他的任意(非 0 的)长度 $|s_1|$，这时表示 $s, s', s'', \cdots$ 的量即使为 λ_1, λ_1', λ_1'', $\cdots$，而 $\varphi(\lambda_1, \lambda_1', \lambda_1'', \cdots) = 0$ 仍然成立. 因而，它也可以用 $\varphi(|s|, |s'|, |s''|, \cdots) = 0$ 来表示.

【角和它的大小】 从一点 O 引出的两条射线 OA, OB 构成的图形称为**角** (angle) AOB，用 $\angle AOB$ 表示(图 5). O 称为它的**顶点** (vertex)，OA, OB 称为它的**边** (side). 合同的角具有同样的**大小**. $\angle AOB$ 的大小用 $|\angle AOB|$ 表示. 它有时也用一个字母 α 表示.

当 α 是给出的角的大小，$\mathfrak{H}^2: H^2, H^1$ (= 射线 QR) 是给出的二阶的半空间链时，在 H^2 中作射线 QP 可使 $|\angle PQR| = \alpha$ (图 6)，这样的 PQ 是唯一确定的. 这时 $\angle PQR$ 称为"属于" $\mathfrak{H}^2$ 的. 对于直线 $P \cup Q$，射线 QR 所在的一侧为 K^2，射线 QP 所在的一侧表示为 K^1，则 $\angle PQR$ 可以认为是属于 $\mathfrak{K}^2: K^2, K^1$ 的. $H^2 \cap K^2$ 称为 $\angle PQR$ 的**内部** (interior). 对属于一个 $\mathfrak{H}^2$ 的两个角 $\angle PQR$, $\angle P'QR$，当 $QP \neq QP'$，前者的内部包含着后者的内部时，称为 $|\angle PQR|$ 大于 $|\angle P'QR|$，用 $|\angle PQR| > |\angle P'QR|$ 来表示. 这个关系只表示两个角之间的大小关系. 角的大小，由这个大小关系构成线性有序

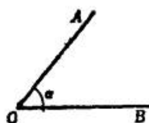


图 5

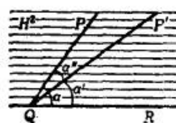


图 6　$\alpha' + \alpha'' = \alpha$

集[1]. 而且这时 $|\angle PQR|$ 称为 $|\angle PQP'|$ 与 $|\angle P'QR|$ 的和. 用 $|\angle PQR| = |\angle PQP'| + |\angle P'QR|$ 来表示. 这也只表示这些角的大小的关系，由此可以定义角的大小的加法."充分小的角"的大小，根据这个加法成为交换的局部半群(即对于充分小的两个角的大小可定义它们的和，而且定义它的和时结合律成立)，并且，因为消去律成立，所以这个局部半群可以扩张为线性有序加法群. 这个线性有序加法群的元素称为**一般的角的大小**. 当 P 是 Archimedes 的有序域时，这个线性有序加法群也成为 Archimedes 的,从而取一定的角的大小作为单位，可以用实数来表示任意角的大小.

把 $\angle AOB$ 的两边 OA, OB 反向延长为 OA', OB' 时，$\angle AOB$ 与 $\angle A'OB$ 或 $\angle AOB$ 与 $\angle AOB'$ 称为互为**补角** (supplementary angles), $\angle AOB$ 与 $\angle A'OB'$ 称为互为**对顶角** (vertical angles) (图 7). 如果确定了互为补角中的一个角的大小，那么另一个角的大小也随之而确定. 所以对顶角的大小是相等的. 两条直线 l, l' 都与一条直线 m 相交时，如图 8，可作出八个角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$. 在这里 α 与 α', β 与 β', γ 与 γ', δ 与 δ', 称为**同位角** (corresponding angles), α 与 γ', β 与 δ', γ 与 α', δ 与 β' 称为**错角** (alternate angles). 当 l, l' 平行时，同位角或错角的两个角的大小彼此相等.

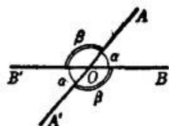


图 7

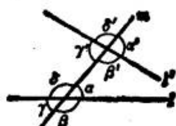


图 8

当一个角与它的补角相等时，这个角称为**直角** (right angle). 直角是存在的而且它的大小是一定的. 这个定角的大小用 $|\angle R|$ 或 $\angle R$ 表示(这个角的大小也称为直角). 在 $\triangle ABC$ 中，当 $|\angle ABC| = |\angle R|$ 时 (图 9)，则 $|AB|^2 + |BC|^2 = |CA|^2$ (**Pythagoras 定理**). 也经常用 $|\angle R|$ 作为角的大小的单位. 最初定义的角的大小是指比 $2|\angle R|$ 小的角. 在这些角中比 $|\angle R|$ 小的角称为**锐角** (acute angle), 比 $|\angle R|$ 大的称为**钝角** (obtuse angle). 等于 $2|\angle R|$ 的角称为**平角** (straight angle), 等于 $4|\angle R|$ 的角称为**周角** (perigon). 如果 P 是实数域时，对于任意的实数 λ 存在大小等于 $\lambda|\angle R|$ 的角. 特别是有时取 $(1/90)|\angle R|$ 作为角的单位，这时把这个单位称为**度** (degree)，用 $|\angle R| = 90°$ 表示. $1°$ 的 $1/60$ 称为**分** (minute), 1 分的 $1/60$ 称为**秒** (second), 分用 $'$ 表示,秒用 $''$ 表示. 有时也用 $(2/\pi)|\angle R|$ 作为角的单位. 这个单位称为**弧度** (radian). 1 弧度 $= 180°/\pi = 57° 17' 44.806'' \cdots \fallingdotseq 57.3°$. 在理论上常用这个单位,弧度有时也用 rad 表示,但一般使用时不附上单位名称.



图 9

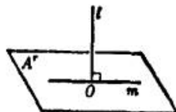


图 10

【正交坐标系】 如果二直线 l, m 相交，则得到以交点为顶点的四个角，如果其中一个角是直角，则其余的角也都是直角. 这时 l 与 m 是**垂直的** (perpendicular), 也称 l, m 互相**正交** (orthogonal), 记为 $l \perp m$. 设 A^r 是 A^n 的 r 维子空间 $(1 \leqslant r \leqslant n-1)$, l 是 A^n 上的直线，且 $l \cap A^r = 0$, 如果 l 与通过 O 点的 A^r 上的任意直线正交，则 l **垂直**于 A^r. 或称为与 A^r **正交**，记作 $l \perp A^r$ (图 10). 若 A^n 内有超平面 A^{n-1}, 则通过 A^n 的任意一点 P, 垂直于 A^{n-1} 的直线 l 是唯一存在的. l 称为由 P 到 A^{n-1} 的**垂线** (perpendicular). $l \cap A^{n-1}$ 是一个点，把它称为由 P 到 A^{n-1} 所作的垂线的**垂足** (foot of a perpendicular). 当给出 A^{n-1} 时，对于 A^n 的任意点 P 有由 P 到 A^{n-1} 所作的垂线足和它对应，这种由 A^n 到 A^{n-1} 的映射称为由 A^n 到 A^{n-1} 的**正射影** (orthogonal projection).

给出 A^n 的 n 阶的半空间链 $\mathfrak{H}^n: H^n, H^{n-1}, \cdots,$

H^1，如果 H^1 的始点为 O，在 H^i 内分别各取一点 E_i，1）可使 $O\cup E_i\perp O\cup E_j$ $(i\neq j;\ i,j=1,\cdots,n)$。当 $|e|$ 为任意给定的长度单位时，则有 2）$|OE_i|=|e|$。这样的 E_i 是唯一确定的。这时 $O,E_1,\cdots,E_n$ 是无关的，且 $A^n=O\cup E_1\cup\cdots\cup E_n$。因而可以作出以 O 为原点，$E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为单位点的标架 $\sum=(O,E_1,\cdots,E_n)$。$\sum$ 称为**正交标架**（orthogonal frame），关于 $\sum$ 的坐标系称为**适合**（adapt）于 $\mathfrak{H}^n$ 的**正交坐标系**（orthogonal coordinate system）。它是由 $\mathfrak{H}^n$ 唯一确定的。运动是把正交标架映射为正交标架的仿射变换。

如果使用正交坐标系，则可以简单地表示出长度及角度的大小。也就是当取 $|e|$ 为单位时，则连结原点 O 与 $X(x_1,\cdots,x_n)$ 的线段的长度为 $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$，射线 OX 与射线 OY（$Y=(y_1,\cdots,y_n)$）所构成的角 θ 的余弦为 $\cos\theta=(\sum x_iy_i)/(\sum x_i^2)^{1/2}(\sum y_i^2)^{1/2}$。特别是，使 $O\cup X\perp O\cup Y$ 的充分必要条件为 $\sum x_iy_i=0$。设 A^n 的一般点 X 关于正交坐标系的坐标向量 $\overrightarrow{OX}$ 为 $\mathfrak{x}$，使仿射变换 $A\mathfrak{x}+\mathfrak{b}$ 是运动的充分必要条件为 A 是正交矩阵†。因而向量的内积 $(\mathfrak{x},\mathfrak{y})=\sum x_iy_i$ 在 Euclid 几何学中是有意义的。如果 $|\mathfrak{x}|=\sqrt{(\mathfrak{x},\mathfrak{x})}$，则上面的结果可以记作 $|OX|=|\mathfrak{x}|$，$\cos\theta=(\mathfrak{x},\mathfrak{y})/|\mathfrak{x}|\,|\mathfrak{y}|$。一般说来，$|XY|=|\mathfrak{y}-\mathfrak{x}|$。把它称为 X,Y 之间的 **Euclid 距离**（Euclidean distance）或者简称为**距离**。A^n 成为具有这个距离的度量空间†。它是 Euclid 空间†。在历史上用 Euclid 距离的特性来定义一般的度量空间（→度量空间）。

【面积，体积】　在 A^n 的一个正交坐标系中，具有 $0\leqslant x_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$ 的坐标的点集称为（关于这个坐标系的）**单位立方体**（unit cube），用 I^n 表示。当使 A^n 的广义的多面体† $P,Q,\cdots$ 对应于非负实数的泛函 m 具有下面的性质 1)—4) 时，则 m 称为 n **维体积**（volume）。1) $m(\varnothing)=0$; 2) $m(P\cup Q)+m(P\cap Q)=m(P)+m(Q)$; 3) 若 P 经过平行移动后与 Q 重合，则 $m(P)=m(Q)$; 4) $m(I^n)=1$。这样的 m 是唯一存在的，当 $P\equiv Q$ 时，有 $m(P)=m(Q)$ 成立。因此，$m(P)$ 在 Euclid 几何学中是有意义的。此外，一般地在仿射变换 $f(\mathfrak{x})=A\mathfrak{x}+\mathfrak{b}$ 下如果 $f(P)=Q$，则 $m(Q)=cm(P)$，且 c 是行列式 $|A|$ 的绝对值 $\mathrm{abs}|A|$。如果 P 包含在有限个超平面的并集之中，则 $m(P)=0$。如果 P 是以 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 为棱的超平行体†，则 $m(P)=\mathrm{abs}|\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n|$。如果 P 是以坐标向量 $\mathfrak{x}_0,\cdots,\mathfrak{x}_n$ 所确定的点为顶点的 n 维单形，则 $m(P)=\frac{1}{n!}\mathrm{abs}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \mathfrak{x}_0 & \mathfrak{x}_1 & \cdots & \mathfrak{x}_n\end{vmatrix}$。一般的多面体的体积，是把它分解成单形后，把各个单形的体积相加来求出的。当 P 是 A^n 的 r 维多面体（$0\leqslant r\leqslant n$）时，它的 r 维的体积，是属于 P 的 r 维单形的（包含各个单形的 r 维空间中的）r 维体积的和。特别是当 $r=1$ 时，把它称为**长度**（length）（例如"折线†的长度"等），当 $r=2$ 时（或者一般来说 $n>r$ 时）把它称为**面积**（area）。设以 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_r$ 为棱的 r 维超平行体的 r 维体积为 V，内积为 $(\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_j)=a_{ij}$，则 $V^2=|a_{ij}|$。关于多面体以外的点集的（各维的）体积概念，可把原概念扩张而得到（→测度）。

【正规正交化】　设 O 是 A^n 的一点，$\mathfrak{a}_1,\mathfrak{a}_2,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 是 A^n 的 n 个无关的向量 $\overrightarrow{OA_i}=\mathfrak{a}_i$，射线 OA_1 为 H_1，平面 $O\cup A_1\cup A_2$ 被直线 $O\cup A_1$ 分为两个部分，其中 A_2 所在的一侧为 $H_2,\cdots$，A^n 被超平面 $O\cup A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}$ 分为两个部分，其中 A_n 所在的一侧为 H_n 时，则可得到 n 阶的半空间链 $\mathfrak{H}^n:H_n,\cdots,H_2,H_1$。适合这个 $\mathfrak{H}^n$ 的正交坐标系的单位向量 $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2,\cdots,\mathfrak{b}_n$ 可由 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 按下面的方式作出（但是开始就设有某个正交坐标系，而 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 是由这个坐标系的坐标给出的）。首先设 $\mathfrak{b}_1=\mathfrak{a}_1/|\mathfrak{a}_1|$。然后如果取 $\mathfrak{a}_2-(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{b}_1)\mathfrak{b}_1=\mathfrak{c}_2$，则 $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)=0$。这里设 $\mathfrak{b}_2=\mathfrak{c}_2/|\mathfrak{c}_2|$。这样可以得到 $\mathfrak{b}_1,\cdots,\mathfrak{b}_{n-1}$，如果取 $\mathfrak{a}_n-(\mathfrak{a}_n,\mathfrak{b}_1)\mathfrak{b}_1-\cdots-(\mathfrak{a}_n,\mathfrak{b}_{n-1})\mathfrak{b}_{n-1}=\mathfrak{c}_n$，则 $(\mathfrak{b}_i,\mathfrak{c}_n)=0(i=1,\cdots,n-1)$。这里设 $\mathfrak{b}_n=\mathfrak{c}_n/|\mathfrak{c}_n|$ 即可。从 $\mathfrak{a}_1,\cdots,\mathfrak{a}_n$ 按以

上方法作出 $\mathfrak{b}_1, \cdots, \mathfrak{b}_n$ 时，称为把前者**正规正交化**(orthonormalize)(E. Schmidt).

一般地，线性空间† $\mathfrak{M}$ 有两个子空间 $\mathfrak{M}_1$，$\mathfrak{M}_2$，如果 $\mathfrak{M}_1$ 的任意的元素 m_1 与 $\mathfrak{M}_2$ 的任意的元素 m_2 之间有正交关系 $m_1m_2=0$ 成立，则称 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ 为**正交的**(orthogonal)，记作 $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$(对于 m_1, m_2 也用 $m_1 \perp m_2$ 表示). 根据正规正交化的方法，如果给出关于 Pythagoras 域上的有限维线性空间 $\mathfrak{M}$ 的任意的真子空间 $\mathfrak{M}_1$，则能求出其余的子空间 $\mathfrak{M}_2$ 使 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1\cup\mathfrak{M}_2$，$\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$. 这时 $\mathfrak{M}_1\cap\mathfrak{M}_2=0$，所以 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$. 这个 $\mathfrak{M}_2$ 称为 $\mathfrak{M}_1$ 关于 $\mathfrak{M}$ 的**正交补空间**(orthocomplement). 这时因为 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1+\mathfrak{M}_2$，所以 $\mathfrak{M}$ 的任意元素 $\mathfrak{a}$ 可以唯一地表示为 $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2$ 的形式 $(\mathfrak{a}_i\in\mathfrak{M}_i, i=1,2)$. $\mathfrak{a}_1$ 称为 $\mathfrak{a}$ 的 $\mathfrak{M}_1$ **分量**(component)，$\mathfrak{a}_2$ 称为 $\mathfrak{a}$ 关于 $\mathfrak{M}_1$ 的**正交分量**(orthogonal component to $\mathfrak{M}_1$). 使 $\mathfrak{a}$ 对应于 $\mathfrak{a}_1$ 的映射称为从 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}_1$ 的**正射影**(orthogonal projection). 正射影成为幂等†的线性映射†.

【平面间的距离】 由于 Euclid 空间是度量空间，因而可以定义它的任意两个集合间的距离(→度量空间). 特别是设两个平面 A^r，B^s 之间的距离为 d，存在 $A^r\ni p$，$B^s\ni q$ 的两点 p, q，使 $|pq|=d$，另外如果存在使 $|p'q'|=d$ 的 $p'\in A^r$，$q'\in B^s$，则有向量 $\overrightarrow{pq}=\overrightarrow{p'q'}$. 特别是如果 $r=0$，$A^r=p$，$s=n-1$，B^s 的方程由 $(\mathfrak{a},\mathfrak{x})-b=0$ 给出，则 $d=|(\mathfrak{a},\mathfrak{p})-b|/|\mathfrak{a}|$ ($\mathfrak{p}$ 是 p 的坐标向量). 对于超平面的方程 $(\mathfrak{a},\mathfrak{x})-b=0$，若 $|\mathfrak{a}|=1$，则 $d=|(\mathfrak{a},\mathfrak{p})-b|$. $|\mathfrak{a}|=1$ 这样的超平面方程，称为它的 **Hesse 标准型**(Hessian normal form).

【球与平面】 与一定点有定距离的点的轨迹，称为以这个定点为**中心**(centre)、以这个距离为**半径**(radius)的**球面**(sphere). 设中心的坐标向量为 $\mathfrak{p}$，半径为 r，则球面的方程为 $|\mathfrak{x}-\mathfrak{p}|=r$，或 $(\mathfrak{x},\mathfrak{x})-2(\mathfrak{p},\mathfrak{x})+(\mathfrak{p},\mathfrak{p})-r^2=0$. 与 $k+1$ 个点(它的坐标向量为 $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_k$)等距离的点的轨迹，一般来说是平面. 如果这些点是无关的†，则它是 $n-k$ 维平面. 特别地，如果这些点是 n 维单形的顶点，则这个轨迹就变成一点，而且通过这些顶点的球是唯一存在的. 把它称为这个单形的**外接球面**(circumscribing sphere)，并且称这个单形**内接**(inscribe)于这个球面. 顶点的坐标向量为 $\mathfrak{p}_0$，$\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 的单形，它的外接球面的方程由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \mathfrak{p}_0 & \mathfrak{p}_1 & \cdots & \mathfrak{p}_n & \mathfrak{x} \\ \mathfrak{p}_0^2 & \mathfrak{p}_1^2 & \cdots & \mathfrak{p}_n^2 & \mathfrak{x}^2 \end{vmatrix}=0$$

给出. 当 $n=2, 3$ 时，对于单形的外接球面的许多性质是已熟知的.

【参】 [1] 寺阪英孝，初等幾何学，岩波全書，1952; [2] 弥永昌吉，幾何引論，岩波，1968; [3] G. D. Birkhoff – R. Beatley, Basic geometry, Scott, Foresman, 1941 (Chelsea, 第三版 1959); [4] E. E. Moise, Elementary geometry from an advanced standpoint, Addison-Wesley, 1963; [5] H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Springer, 1923. (Chelsea, 1960); [6] F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 第三版 1926 (Chelsea, 1957); [7] J. Dieudonné, Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Hermann, 第二次修订版 1964 (英译本: Linear algebra and geometry, Hermann, 1969).

Euclid 空间 [英 Euclidean space 法 espace euclidien 德 Euklidischer Raum 俄 евклидово пространство 日 ユークリッド空間] 满足 Euclid 几何学公理的空间称为 **Euclid 空间**. 以实数域 $\boldsymbol{R}$ 上具有 n 维 Euclid度量的线性空间†作为标准向量空间†的仿射空间†是 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{E}^n$. 对于 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{E}^n$，当给定一个正交标架† $\Sigma=(O, E_1, \cdots, E_n)$，$e_i=\overrightarrow{OE_i}$，$(e_i, e_j)=\delta_{ij}$ 时，由于 $\boldsymbol{E}^n$ 的点有对应的正交坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，所以 $\boldsymbol{E}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)|x_i\in\boldsymbol{R}\}$ 之间具有一一对应的关系. 在这个意义上 $\boldsymbol{E}^n$ 与 $\boldsymbol{R}^n$ 可以看做一致的，所以经常把 $\boldsymbol{R}^n$ 本身称为 Euclid 空间. 一维空间 $\boldsymbol{R}^1$ 是实数直线，n 个 $\boldsymbol{R}^1$ 的直积†是 n 维 Euclid 空间或者叫做 **Cartesian 空间**(Cartesian space). Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的点 x，用 n 个实数的组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来表示，x 与 $y=(y_1, y_2, \cdots y_n)$ 之间的距离 $d(x, y)$ 由

$$\sqrt{(y_1-x_1)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

给出. x_i 称为点 x 的**第 i 坐标**(i-th coordinate)，点 $(0, \cdots, 0)$ 称为 $\boldsymbol{R}^n$ 的**原点**(origin)，点集

$\{x \mid -\infty < x_i < \infty;\ x_j = 0, j \neq i\}$ 称为 x_i **轴** (axis) 或称第 i **坐标轴** (coordinate axis). 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上 n 维 Euclid 几何学成立, 特别是对于整数 $m(-1 \leqslant m \leqslant n)$, 可以定义 m 维平面†. -1 维平面是空集, 0 维平面是点, 1 维平面是直线. m 维平面在建立正交标架后可表示为 $\boldsymbol{R}^m$ (→ Euclid 几何学, 仿射几何学).

因为 $\boldsymbol{R}^n$ 是度量空间, 当然也是拓扑空间. $\boldsymbol{R}^n$ 是局部紧的†而且是连通†的拓扑空间. 又 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界闭集是紧的 (B. Bolzano-K. Weierstrass).

对于 $\boldsymbol{R}^n$ 的一点 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 和正实数 r, 把 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 $\{x \mid d(x, a) \leqslant r\}$ 称为以 a 为**球心** (centre)、r 为**半径** (radius) 的 n 维**球** (英 solid sphere 法 boule 德 Vollkugel), 它的内部† $\{x \mid d(x, a) < r\}$ 称为 n 维**开球** (open sphere), 它的边界† $\{x \mid d(x, a) = r\}$ 称为 $n-1$ 维**球面** (sphere), 特别是把二维球称为**圆盘** (circular disc), 它的内部称为**开圆** (open circle), 作为它的边界的一维球面称为**圆周** (circumference). 圆盘或圆周也简称为**圆** (circle). n 维开球给出 $\boldsymbol{R}^n$ 的基本邻域系†. 一个球面与通过球心的直线的两个交点称为此球面上的**对蹠点** (antipodal points), 以对蹠点为两端点的线段 (它的长度为半径的二倍) 称为球或球面的**直径** (diameter). 把球或者球面看做度量空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集时, 它的直径† (→ 度量空间) 与上面所定义的直径的长度是一致的. 当 $n \geqslant 3$ 时, 通过中心的二维平面与球面的交线称为球面上的**大圆** (great circle). $\boldsymbol{R}^n$ 内 m 维平面 $(1 \leqslant m \leqslant n)$ 上的 m 维球或 $m-1$ 维球面, 对于 $\boldsymbol{R}^n$ 来说也同样称为 m 维球或 $m-1$ 维球面.

特别是以原点为球心、1 为半径的球称为**单位球** (unit disk) 或**单位胞腔** (unit cell), 它的边界称为**单位球面** (unit sphere) (二维的情形, 也可以仿此使用**单位圆** (unit circle) 等名称). 点 $(0, \cdots, 0, 1)$ 及 $(0, \cdots, 0, -1)$ 分别称为单位球面的**北极** (north pole) 和**南极** (south pole), 单位球面与超平面 $x_n = 0$ 相交而成的 $n-2$ 维球面称为它的**赤道** (equator), 单位球面在这个超平面"上部" (即半空间 $x_n \geqslant 0$) 的部分称为**北半球** (north hemisphere), "下部" (即半空间 $x_n \leqslant 0$) 的部分称为**南半球** (south hemisphere).

当实数 $a_i, b_i (i = 1, 2, \cdots n)$ 满足 $a_i < b_i$ 时, $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 $\{x \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \cdots, n\}$ 称为在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的**开区间** (open interval), 把条件改变为 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ 时称为**闭区间** (closed interval). 有时也叫做矩形 ($n = 2$ 时)、长方体、箱 (box) 等. 由于开区间实际上是 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集, 闭区间就是闭集, 因此可以作为 $\boldsymbol{R}^n$ 的基本邻域系†来取开区间. 特别把闭区间 $\{x \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, \cdots, n\}$ 称为 $\boldsymbol{R}^n$ 的**单位立方体** (unit cube) 或**单位 n 立方体** (unit n-cube).

$\boldsymbol{R}^n$ 的有内点的凸的†闭集 (例如闭区间) 与一切 n 维球是同胚的. 把与 n 维球同胚的拓扑空间 I^n 称为 **n 维拓扑球**或 **n 维拓扑胞腔** (n-cell), 也称为 **n 维元素** (n-element). 与 $n-1$ 维球面同胚的拓扑空间 S^{n-1} 称为 **$n-1$ 维拓扑球面**或简称为 **$n-1$ 维球面**. I^n, S^{n-1} 是可定向的组合流形†, 这个方向由指定 (相对) 同调群† $H_n(I^n, \dot{I}^n)$, $H_{n-1}(S^{n-1})$ (都是无限循环群) 的生成元† 而确定. 根据边缘算子† $\partial: H_n(I^n, \dot{I}^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ 可以由 I^n, S^{n-1} 中一个方向确定另一个方向.

【参】 →Euclid 几何学的[参].

几何作图问题 [英 problem of geometrical construction 法 problème de construction géométrique 德 Problem der geometrischen Konstruktion 俄 проблема геометрической конструкции 日 作図問題] **几何作图问题**是指只允许有限次使用某种特定的工具, 画出适合所给条件的图形的问题. 按指定的方法画出适合于所给出的条件的图形, 叫做**解**几何作图问题, 解得的图形叫做这个几何作图问题的**解** (solution). 由于几何作图所使用的工具受一定的限制, 因此有时按指定的方法不能画出所求的图形. 按指定方法可以画出所求图形时, 这个问题称为**作图可能问题** (problem of possible construction), 这时

我们说这个图形是作图可能的．另一方面虽然所求的图形实际上是存在的，但是按指定的方法画不出图形，这时，我们说这个图形是**作图不可能的** (of impossible construction)．又所求图形实际上不存在时，我们说这个问题是**不成立的** (inconsistent)．

在几何作图问题中，最古老的、人们最熟悉的是从 Euclid 以来使用直尺和圆规的平面图形的作图．以下把它简称为初等作图问题．著名的初等作图问题有以下几个．

1) 给出三条直线 l, m, n 和三个点 P, Q, R，作三角形 ABC，使顶点 A, B, C 分别在 l, m, n 上，并使 BC, CA, AB 分别通过 P, Q, R (J. Steiner 问题)．

2) 给出圆 O，和不在 O 上的三点 P, Q, R，作圆 O 的内接三角形 ABC，并使 BC, CA, AB 分别通过 P, Q, R (G. Cramer-G. F. M. M. S. de Castillon 问题)．

3) 作与三个已知圆相切的圆 (Apollonius 问题)．

4) 在已知三角形内作三个圆，使每个圆分别与三角形的两边相切，而且这三个圆两两相外切 (G. Malfatti 问题)．

以上 1)—4) 都是作图可能问题．

5) n 是自然数，n 等分圆周，从而使正 n 边形成为作图可能的充分必要条件是 n 能分解为素因数 $n = 2^\lambda p_1 \cdots p_k$ ($\lambda \geqslant 0$; $p_1, \cdots, p_k$ 都是相异的 $2^h + 1$ 形的素数(Fermat 数†))(C. F. Gauss)．

6) 希腊的三大作图不可能问题．i)三等分已知角(**角的三等分问题** (trisection of an angle))；ii) 作一立方体，使其体积等于已知立方体体积的二倍(**立方体倍积问题** (duplication of a cube) 或称 **Delos 问题** (Delos' problem))；iii) 作一正方形，使其面积与已知圆的面积相等(**圆积问题** (quadrature of a circle))．P. L. Wantzel (1837)已证明了 i), ii) 是作图不可能问题，而 iii) 的不可能性由 C. L. F. Lindemann (1882) 在证明 π 是超越数†的同时给出了证明．

【作图可能的条件】 初等作图问题归结为通过两点作直线，和以一点为圆心作通过另一点的圆，从而归结为确定若干个点的问题，所以只要把问题用解析方法来表示，就可以明确作图的可能与不可能性．对所考虑的几何作图问题来说，设所给出的点的直角坐标为 (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\cdots$, (a_n, b_n)，包含所有这些数 $a_1, \cdots, b_n$ 的最小数域†为K．因为连结已知点的直线，或以已知点为圆心且通过另一个已知点的圆，可由以 K 的数为系数的一次或二次方程来表示，所以它们的交点的坐标属于把K的某数的平方根添加†于 K 而得到的域．因此初等作图可能的充分必要条件是确定所求图形的数 α，可由数域K的数经过有限次四则和平方根的运算而得到．也就是说 α 是属于次数为 2 的幂的K的某一正规扩张域的数．从这个定理可以得出，三等分角及立方体倍积作图的不可能性．

Euclid 以后，人们研究不用直尺和圆规，而只用直尺或圆规的作图．有以下主要结果．1) 如果把作直线解释为求直线上的两点，则只用圆规就可以解决一切初等作图问题 (G. Mohr, L. Mascheroni)．2) 给出一圆与其圆心时，只用直尺可以解决任何初等作图问题，但作圆须解释为求圆心和圆周上的一点 (J.-V. Poncelet, J. Steiner)．3) 如果给出一圆但没给出圆心，则只用直尺不可能求出已知圆的圆心 (D. Hilbert)．4) 只用直尺不可能平分已知线段．5) 如果给出有公共点的两个圆周或两个同心圆，则只用直尺可以求出这些圆的圆心．但没有公共点，也不同心的两个圆，不可能只用直尺求出它们的圆心 (D. Cauer)．

与此有关的是，人们也研究了用圆规画圆时限制圆的大小，或用直尺画线段时限制线段的长度等等的情形．也研究用普通的直尺、圆规以外的特殊工具作图的各种情形．例如，初等作图可能问题，只用普通的直尺不一定是作图可能的，但我们知道所有的初等作图可能问题只用平行直尺、直角尺、锐角尺中的一种，则全部问题可以得到解决．如果用直角尺和圆规，则三等分任意角以及立方体倍积问题是作图可能的 (L. Bieberbach)．如果已画出不是圆

的二次曲线时，可以用直尺与圆规使角的三等分与立方体倍积问题成为作图可能（H. J. S. Smith-H. Kortum）。只用直尺和长规†可以解决 Malfatti 的问题，但不能解决 Apollonius 的问题（Feldblum）。

此外，有时图形虽是作图可能的，但作图方法一般是相当复杂的，因此很多是不实用的，所以也有许多种具有相当精度的近似作图法可供使用。

【参】［1］H. Lebesgue, Leçons sur les constructions géométriques, Gauthier-Villars, 1950；［2］L. Bieberbach, Theorie der geometrischen Konstruktionen, Birkhäuser, Basel, 1952.

正多面体［英 regular polyhedron 法 polyèdre régulier 德 reguläres Polyeder 俄 правильный многогранник 日 正多面体］【正多边形】各边及各内角分别都相等的平面上的闭凸†多边形称为**正多边形**(regular polygon)．当它的顶点的个数（＝边的个数）为 n 时，称为**正 n 边形**．通过同一个正 n 边形的所有顶点的圆（外接圆），以及与所有的边都相切的圆（内切圆）是存在的．这两个圆是同心圆，它的圆心称为这个正多边形的**中心**(centre)．凸多边形这个名称既意味着平面上的凸胞腔†，也意味着它的边界的闭折线（即一维流形†）．这两种概念可以混用．

C. F. Gauss 得出了有名的正十七边形的几何作图法，但是正 n 边形作图可能的充分必要条件是边数可以素因数分解为 $n=2^m p_1\cdots p_k$ $(m\geqslant 0)$ 的形式，而每个 $p_i(i=1,2,\cdots)$ 是 2^l+1 形的相异的素数（→ 几何作图问题）．

【正多面体】在通过正多边形的中心且垂直于这个平面的直线上取一点，过这个点和正多边形上的点的所有射线的集合所构成的多面角，称为围绕这个点的**正多面角**(regular polyhedral angle)（图 1）．

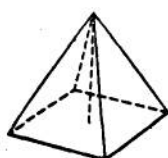


图 1

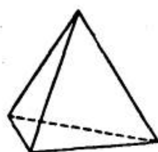


图 2 正四面体

三维 Euclid 空间内的闭凸多面体†（由二维的胞腔复形得到的）$\mathfrak{T}$，如果满足以下条件，则称为**正多面体**：1）各面（二维胞腔）都是全等的正多边形，2）从各顶点作 $\mathfrak{T}$ 的射影得到多面角，且这些多面角又都是全等的正多面角．由 2）可知，从各顶点出发的边的个数都是相等的．

表 1 三维 Euclid 空间内的正多面体

	面的种类	顶点的个数	边的个数	面的个数	围绕一个顶点的面的个数	
正四面体	正三角形	4	6	4	3	图 2
正八面体	正三角形	6	12	8	4	图 3
正二十面体	正三角形	12	30	20	5	图 4
正六面体	正四边形	8	12	6	3	图 5
正十二面体	正五边形	20	30	12	3	图 6

从 Platon 以来人们已经知道了正多面体的种类有**正四面体**（regular tetrahedron）（图 2），**正八面体**（regular octahedron）（图 3），**正二十面体**（regular icosahedron）（图 4），**正六面体**（regular cube, hexahedron）（图 5），**正十二面体**（regular dodecahedron）（图 6）等五种（表 1）．

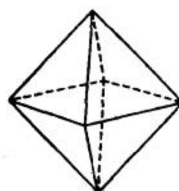


图 3 正八面体

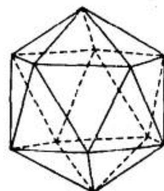


图 4 正二十面体

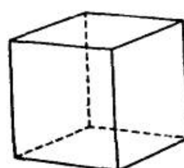


图 5 正六面体

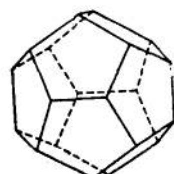


图 6 正十二面体

一个正多面体和以这个多面体的各面的中心为顶点的正多面体（图 7），称为是互为**对偶的**（dual）．正八面体与正六面体，正二十面体与正十二面体都是互为对偶的，而与正四面体对偶的仍为正四面体．一个正多面体 $\mathfrak{T}$ 的外接和内切的同心球面是存在的．这个球心是

$\mathfrak{F}$ 的对称中心，把它称为正多面体的**中心**．过各顶点作外接球面的切平面，则可得到对偶的正多面体(图 8)．

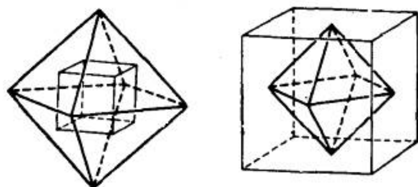


图 7　　　　图 8

设棱长为 a 的正多面体，其各棱上二面角的大小为 θ，外接球与内切球的半径分别为 R，r，如果正多面体的各面是正 p 边形，每个顶点都只有 q 个面相交，则有以下的关系

$$\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\pi}{q}\Big/\sin\frac{\pi}{p},$$

$$R=\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{q}\Big/\sin\frac{\pi}{p}\cos\frac{\theta}{2},$$

$$r=\frac{a}{2}\cot\frac{\pi}{p}\tan\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{R}{r}=\tan\frac{\pi}{p}\tan\frac{\pi}{q}.$$

θ, R, r 的数值见表 2．

对应于各正多面体，存在有正多面体群[†]，它是三维 Euclid 空间的旋转群的有限子群(→ 有限群)．

表 2

面数	$\sin\theta$	θ	R/a	r/a
4	$2\sqrt{2}/3$	70°31′43.6″	$\sqrt{6}/4$	$\sqrt{6}/12$
6	1	90°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
8	$2\sqrt{2}/3$	109°28′16.4″	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{6}$
12	$2/\sqrt{5}$	116°33′54.2″	$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)}{4}$	$\frac{\sqrt{25+11\sqrt{5}}}{2\sqrt{10}}$
20	$2/3$	138°11′22.8″	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$

【高维的情形】 可以把以上的考虑推广到高维空间 $E^n(n\geqslant 4)$，归纳地定义 n 维正多面体；在 $n=4$ 的情况，有六种正多面体(表 3)；在 $n\geqslant 5$ 的情况，只有三种(表4)(→ 复形)．

表 3　四维 Euclid 空间内的正多面体

	三维正多面体的种类	个数	顶点的数	对偶性
正五面体	正四面体	5	5	a
正八面体	正六面体	8	16	}b
正十六面体	正四面体	16	8	
正二十四面体	正八面体	24	24	a
正一百二十面体	正十二面体	120	600	}b
正六百面体	正四面体	600	120	

a：与同种类多面体对偶，b：互为对偶．

表 4　n 维 Euclid 空间内的正多面体 $(n\geqslant 5)$

	作为基础胞腔的 $n-1$ 维正多面体的种类	个数	顶点的数	对偶性
正 $n+1$ 面体	正 n 面体	$n+1$	$n+1$	a
正 $2n$ 面体	正 $2n-2$ 面体	$2n$	2^n	}b
正 2^n 面体	正 n 面体	2^n	$2n$	

a：与同种类多面体对偶，b：互为对偶．

【参】[1] J. Hadamard, Leçons, de géométrie élémentaire II, Armand Colin, Paris, 1916, p. 425—427; [2] D. Hilbert-S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer, 1932; [3] E. Steinitz-H. A. Rademacher, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Springer, 1934; [4] H. S. M. Coxeter, Regular Polytopes, Methuen, 1948.

圆周率 [英 number π, ratio of the circumference of the circle to the diameter 法 nombre π 德 Ludolphsche Zahl 俄 число π 日 円周率] Euclid 平面上的圆周长与直径的比，即 $2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 的值称为**圆周率**，从 L. Euler 以来在习惯上用 $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$ (周)的字头 π 来表示圆周率．关于圆周长与直径的比是常数的结论，在 Euclid 的《原本》中已有记载，但是，对于这个数值，Euclid 并没有任何叙述．自古以来人们把 3 作为这个数值的近似值来使用，根据 Rhind Papyrus 的叙述，在埃及也曾把这个近似值取为 $(4/3)^4$．设直径为 1 的圆的外切(内接)正 n 边形的周长为 $L_n(l_n)$，则有

$$L_n>\pi>l_n,\quad \frac{2}{L_{2n}}=\frac{1}{L_n}+\frac{1}{l_n},$$

$$l_{2n}=\sqrt{l_nL_{2n}}.$$

Archimedes 利用上式计算了圆的内接及外切正

96边形的周长，得到 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. 在历史上关于 π 的近似值曾由印度的 Aryabhatta(五世纪)得到 3.1416，欧洲的 A. Adriaen (十六世纪)得到 355/113，在中国，魏末晋初的刘徽(三世纪)得到 3.14，宋朝的祖冲之(五世纪)得到 22/7 (疏率)和 355/113 (密率). 以上都是用和 Archimedes 同样的方法得到的. F. Viète 把 $2/\pi$ 表示为以下的无穷乘积的形式:

$$\prod_{n=2}^{\infty}\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots.$$

荷兰的 Ludolph van Ceulen (1540—1610) 用此式计算 π 到小数点以后 35 位数. 日本数学家関孝和、建部賢弘、松永良弼(十七到十八世纪)等人也计算到小数点以后 50 位数. 十七世纪以后得出了很多用无穷级数的和或各种形式的极限值表示 π 的式子，因而它的近似值也进一步得到更精确的计算. 例如有以下各种表示方法.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot\cdots}\ \text{(J. Wallis)},$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\cdots\ \text{(Lord Brouncker)},$$

$$= 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$$

(J. Gregory, G. W. Leibniz),

$$= 4\,\mathrm{Arctan}\,1/5 - \mathrm{Arctan}\,1/239$$

(J. Machin).

把 Machin 的表示与幂级数 $\mathrm{Arctan}\,x = x - (1/3)x^3 + (1/5)x^5 - \cdots$ 结合起来的公式称为 **Machin 公式**，这是计算 π 时经常使用的公式. 1873 年 W. Shanks 根据这个公式计算到小数点以后 707 位数，在很长时间内人们一直认为这是最高纪录，但是在 1946 年发现了这个值的小数点以后第 528 位的数是错误的. 近年来，由于计算机的发展，精确地计算这样的常数值是容易做到的，现在已算到了十万位 ([2]) (→ 数表 9).

再有在 1761 年 J. H. Lambert 利用上述 Brouncker 的连分数展开，证明了 π 是无理数，1882 年 C. L. F. Lindemann 利用 Euler 的关系式 $e^{\pi i} = -1$ 证明了 π 是超越数†. π 的小数点后到 50 位的值为: 3.14159265358979323846 26433832795028841971693993751 0···(其余→数表 9).

【参】[1] 高木貞治，昔と今(円周率をめぐって)，数学の自由性，考へ方研究社，1949; [2] D. Shanks-J. W. Wrench, Calculation to 100000 decimals of π, Math. Comp., **16** (1962), 76—99; [3] P. Beckmann, A history of pi, Golem Press, 第二版 1971; [4] K. Y. Choong, D. E. Daykin, and C. R. Rathbone, Rational approximations to π, Math. Comp., **25** (1971), 387—392; [5] A. Hinčin. Continued fractions, Noordhoff, 1963.

三角学 [英 trigonometry 法 trigonométrie 德 Trigonometrie 俄 тригонометрия 日 3 角法]

【平面三角学】设平面上的直角坐标系 $O\text{-}XY$，在与 X 轴正向的夹角为 α 的动径上取点 P，P 的坐标是 (x, y)，$OP = r$ (图 1)，则把以下六个比:

$$\sin\alpha = y/r,\quad \cos\alpha = x/r,\quad \tan\alpha = y/x,$$
$$\cot\alpha = x/y,\quad \sec\alpha = r/x,\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = r/y$$

分别称为角 α 的**正弦** (sine)、**余弦** (cosine)、**正切** (tangent)、**余切** (cotangent)、**正割** (secant)、**余割** (cosecant). 这些都是角 α 的函数，总称为**三角函数** (trigonometric function) 或**圆函数** (circular function) (→ 初等函数). 这些函数是以 2π (正切、余切为 π) 为基本周期的周期函数†. 由上面的定义可以推导出 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ 及正弦、余弦的**加法定理** (addition theorem):

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

等性质 (→ 公式 2).

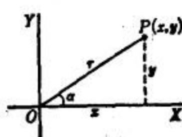


图 1

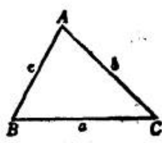


图 2

在图 2 的平面三角形 ABC 中利用这些三

角函数，则有 $a = b\cos C + c\cos B$（**第一余弦公式**（first cosine formula）），$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$（**第二余弦公式**（second cosine formula）），和 $a/\sin A = b/\sin B = c/\sin C = 2R$（$R$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径）（**正弦公式**（sine formula））等性质（→ 公式2）．这样，应用三角函数研究平面图形，称为**平面三角学**（plane trigonometry）．例如，在三角形的六个元素中，当给出任意三个元素（其中必有一边）时，可以求出其余未知元素．这种运算称为**解三角形**．

平面三角学与下面介绍的**球面三角学**（spherical trigonometry）统称为**三角学**．

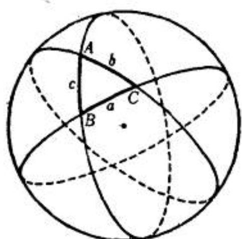


图 3

【球面三角学】 在球面上由三个大圆弧围成的球面部分 ABC 称为**球面三角形**（spherical triangle），A，B，C 称为它的**顶点**（vertex），三条弧 a，b，c 称为它的**边**（side），过一个顶点作两条边的切线，这两条切线的夹角称为它的**角**（angle）（图 3）．这些角之间有 $A + B + C - \pi = E > 0$ 的关系，这里的 E 称为**球面角盈**（spherical excess）．对于球面三角形也有与平面三角形相类似的性质：$\sin a/\sin A = \sin b/\sin B = \sin c/\sin C$（**正弦公式**（sine formula）），$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$（**余弦公式**（cosine formula））成立．这样，应用三角函数研究球面图形，称为球面三角学，在天文学、测地法、航海术中被广泛利用（→ 公式 2）．

【历史】 最初从实际问题中提出了由三角形的三个元素来确定三角形的问题，于是出现了三角学．在历史上由于天文学方面的应用，因而球面三角学比平面三角学发展早一些．在埃及、巴比伦、中国对于三角学的知识都有所发现，但据说三角学的创始者是希腊的 Hipparchos（公元前 150 年）．在 Ptolemaios（公元 150 年左右）"Almagest" 里对于精确到小数点后五位的每隔 30′ 的弦长表以及加法定理已有记载．在希腊人已计算出二倍弧的弦长的基础上，印度人又求出它的一半即弧的正弦及**正矢**（指 $1 - \cos\alpha$），在 Aryabhatta（公元 500 年左右）的著作中已有了余弦公式．阿拉伯人在印度人的影响下把希腊人在几何学方面的计算用代数方法表示出来．Abû'l Wafâ（十世纪后半）连每隔 30′ 的正弦值都正确地计算到小数点后九位数，他和 Al Battani 一起在从事研究日规的影三角时得到了正切、余切、正割、余割．后来阿拉伯人作出了角度间隔为分的正弦表及正切表．德国的 Regiomontanus（1476 年去世）对这些表进行了改进，他在三角学方面总结出的形式到现在大体上还保持着．此后三角学的各定理经过 G. J. Rhaeticus, J. Napier, J. Kepler 一直到 L. Euler（1748）才告完备．Euler 把三角学作为分析学的一分支来对待，于是把变数扩充到复数，并且引进了现在所用的三角函数的简略记号（→ 初等函数）．

【参】 [1] E. W. Hobson, A treatise on plane trigonometry, Cambridge Univ. Press. 第七版 1928；[2] 掛谷宗一-蓮池良太郎，平面球面三角法，文政社，1927；[3] 黒須康之介，三角法入門，岩波全書，1955．

圆锥曲线 [英 conic sections 法 sections coniques 德 Kegelschnitte 俄 коническое сечение, кривая второго порядка 日 円錐曲線] 设在三维 Euclid 空间 E^3 中，有交于一点 V（但不正交）的二直线 l，m，如果绕 l 旋转 m，则 m 描绘出一个曲面 $\mathfrak{F}$．这个曲面 $\mathfrak{F}$ 称为以 V 为**顶点**（vertex）、l 为**轴**（axis）的**圆锥面**（circular cone）．在这个曲面上通过 V 的直线称为 $\mathfrak{F}$ 的**母线**（generating line）．

由不通过 V 的平面 π 截 $\mathfrak{F}$ 到得的截口，即作为 π 与 $\mathfrak{F}$ 的交 $C = \pi \cap \mathfrak{F}$ 得到的 π 上的平面曲线 C 称为**圆锥曲线**．从 $\mathfrak{F}$ 中除去 V 的点集，形成两个连通分支† $\mathfrak{F}_1$ 和 $\mathfrak{F}_2$．现在设 π_i（$i = 1, 2, 3$）是不通过 V 的平面．圆锥曲线 $C_1 = \pi_1 \cap \mathfrak{F}$

如果是有界的[†]，则 C_1 包含在 $\mathfrak{F}_1$ 或 $\mathfrak{F}_2$ 之中而且是连通[†]的．这样的 C_1 称为**椭圆** (ellipse)．$C_2 = \pi_2 \cap \mathfrak{F}$ 无界且连通时，π_2 与 $\mathfrak{F}$ 的一条母线平行，而且 C_2 包含在 $\mathfrak{F}_1$ 或 $\mathfrak{F}_2$ 之中，这样的 C_2 称为**抛物线**(parabola)．π_3 与 $\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$ 两者相交时，$C_3 = \pi_3 \cap \mathfrak{F}$ 具有两个连通分支，但是无界，这样的 C_3 称为**双曲线** (hyperbola)．这三种曲线都是圆锥曲线．特别是，当 $\pi \perp l$ 时，$\pi \cap \mathfrak{F}$ 是圆．圆是椭圆的特例．

【焦点，准线】 设 $C = \pi \cap \mathfrak{F}_1$ 是椭圆．E^3 由 π 分为两个半空间[†] (π 的两"侧") E_1^3，E_2^3．如果 $\mathfrak{F}_1 \cap E_1^3 = \mathfrak{F}_{11}$，$\mathfrak{F}_1 \cap E_2^3 = \mathfrak{F}_{12}$，则可以在 $\mathfrak{F}_{11}$ 内作出切于圆 K 而且与 π 切于一点 F 的球面 S．同样可以在 $\mathfrak{F}_{12}$ 内作出切于圆 K' 而且与 π 切于一点 F' 的球面 S'．F，F' 称为椭圆 C 的**焦点** (focus) (图 1)．又设圆 K，K' 所在的平面

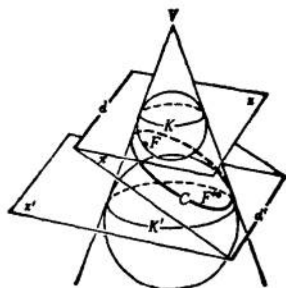


图 1

分别为 κ，κ' 时，直线 $d = \kappa \cap \pi$，$d' = \kappa' \cap \pi$ 称为 C 的**准线** (directrix)．只有 C 不是圆时有 $F \neq F'$，而 κ，π 及 κ'，π 实际上分别相交于 d，d'．$C = \pi \cap \mathfrak{F}$ 是抛物线或双曲线时，由图 2，3 看出也可以定义焦点 (对于抛物线有一个焦

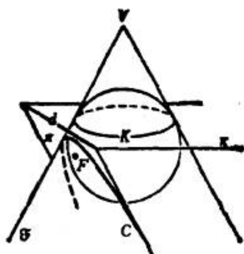


图 2

点 F，对于双曲线有两个焦点 F，F') 及准线 (对于抛物线有一个准线 d，对于双曲线有两个准线 d，d')．

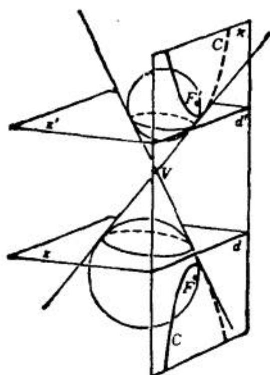


图 3

不论在哪一种情形圆锥曲线 C 都可以看做具有如下特征的点 X 的轨迹．从 X 到焦点 F 的距离与 X 到准线 d 的距离之比为常数 e．这个 e 称为圆锥曲线 C 的**离心率**或**偏心率** (eccentricity)．对应于 $e <, =, > 1$，C 分别是椭圆、抛物线、双曲线(对于圆，有 $e = 0$)．也可以把椭圆定义为满足 $FX + F'X = 2a$ 的点 X 的轨迹，双曲线为满足 $|FX - F'X| = 2a$ (a 为正常数)的点 X 的轨迹．当有两个焦点时，直线 FF' 垂直于 d 及 d'．

【标准方程】 如果 C 为椭圆(除去圆的情形)或双曲线，则 C 有两个焦点 F，F'．这时线段 FF' 的中点 O 是 C 的对称中心 (C 是圆的情形，当然它的圆心 O 是 C 的对称中心)．O 称为 C 的**中心** (centre)，椭圆和双曲线称为**有心圆锥曲线** (central conic)．如果取以 O 为原点、FF' 为 x 轴的直角坐标系，则 C 的方程有下面的形式：

(1) $$x^2/a^2 \pm y^2/b^2 = 1, \quad a, b > 0$$

(左边的 ± 号，当 C 为椭圆时取 +，双曲线时取 −)．如果 C 是椭圆，则有 $a > b$．椭圆的离心率 $e = \sqrt{a^2 - b^2}/a$，双曲线的离心率 $e = \sqrt{a^2 + b^2}/a$，对于椭圆、双曲线，焦点坐标都是 $F(ae, 0)$ 及 $F'(-ae, 0)$，准线的方程是 $x = \pm a/e$．

对于抛物线 C，通过焦点 F 而垂直于准线 d 的直线是 C 的对称轴。这个直线称为 C 的**轴**，轴与 C 的交点 O 称为 C 的**顶点**。如果取以 O 为原点、C 的对称轴为 x 轴的直角坐标系，则 C 的方程有下面的形式：

(2) $$y^2 = 4ax, \quad a > 0.$$

(1), (2) 称为圆锥曲线的**标准方程** (normal equation, canonical equation)，为把方程写成这种形式所取的坐标系称为**标准坐标系** (canonical coordinates)。当 $a > b$ 时，设 x 轴与椭圆的交点为 A, A'，y 轴与椭圆的交点为 B, B'。这时 AA' 称为 C 的**长轴** (major axis)，BB' 称为 C 的**短轴**(minor axis)。对于双曲线的情形，x 轴称为**横轴** (transverse axis)，y 轴称为**共轭轴**(conjugate axis)。对于有心圆锥曲线，x, y 轴统称为**主轴** (principal axis)，而对于抛物线，x 轴称为**主轴**.

【椭圆的性质】 椭圆可以看作是圆的平行射影[†]的象。因而用平面截圆柱[†]面的截口是椭圆。从已知圆周上的动点 P，作这圆的已知直径的垂线 PM，PM 的定比内分（或外分）点 X 的轨迹也是椭圆。设以直角坐标系的原点 O 为中心、以 a, b 为半径作同心圆，从 O 任意引出射线与两圆周相交于 P, Q，通过 P 的纵线(即与 y 轴平行的直线)与通过 Q 的横线(即与 x 轴平行的直线)的交点 X 的轨迹是椭圆(图 4)，当 $a > b$ 时，它的长轴、短轴的长度分别为 $2a, 2b$。以椭圆的长轴为直径的圆称为**辅助圆** (auxiliary circle)。由椭圆的焦点向椭圆的切线作垂线，其垂足的轨迹是辅助圆。两焦点 F, F' 与椭圆上点 X 所连结的二直线 FX, $F'X$ 与在 X 点的切线交成相等的角(图 5)。因而，

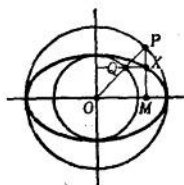


图 4

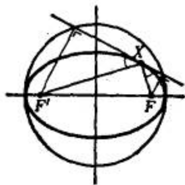


图 5

由一个焦点射出的光线经椭圆反射后，这些光线都集中到另一个焦点。再有从椭圆两焦点到任意切线的距离的乘积等于常数 b^2.

椭圆 C: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$，当取 θ 为参数时，可以表示为以下的形式：

(3) $$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta.$$

这个 θ 称为 C 上点 (x, y) 的**离心角** (eccentric angle)。从而 C 是 Jordan 曲线[†]，且把平面分为内外两部分。C 的内部为满足 $x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1$，外部为满足 $x^2/a^2 + y^2/b^2 > 1$ 的点 (x, y) 的集合。它的内部是凸集[†]。从 C 外部的点 Q 可以引 C 的两条切线。使这两切线正交的点 Q 的轨迹是圆 $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$。这个圆称为 C 的**准圆** (director circle)。过椭圆上的两点 $A(a, 0)$, $X(a\cos\theta, b\sin\theta)$ $(\theta > 0)$ 以及原点 O 所作的"扇形"OAX 的面积是 $ab\theta/2 = (ab/2)\times \mathrm{Arccos}\, x/a$，椭圆的弧 $\widehat{AX}$ 的长度可用椭圆积分[†] $a\int_0^\theta \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\, d\theta = aE(\pi/2 - \theta, e)$ 的值表示。特别是椭圆内部的面积为 πab，椭圆的全长为 $4aE(0, e)$.

对于以焦点 $F(ae, 0)$ 为极点，以 x 轴正向的射线为极轴的极坐标系 (r, φ)，椭圆 C 的方程为

(4) $$r = \frac{l}{1 + e\cos\varphi}, \quad l = \frac{b^2}{a}.$$

这个 l 等于通过焦点且垂直于长轴的弦(这个弦称为椭圆的**通径** (latus rectum)) 长的一半。F 为定点，X 为动质点，若 X 始终被向 F 的方向的、与 FX 长度的平方成反比的向心力所吸引，且具有沿着以 F 为焦点的椭圆 C 的切线方向的初速度，则 X 总是在 C 上运动，而且动径 FX 描出的面积速度为常数 (J. Kepler, I. Newton).

【双曲线的性质】 二直线 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$，即 $y/x = \pm b/a$ 是双曲线 C: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ 的渐近线[†]。双曲线 C': $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$ 称为 C 的**共轭双曲线** (conjugate hyperbola)。当 $a = b$ 时，两渐近线正交，C 与 C' 全等。这时 C 称为**直角双曲线** (rectangular hyperbola) 或**等轴双曲线** (equilateral hyperbola)。从 C 上的点 X 引两渐近线的平行线，它们与两渐近线所围成的平行四边形的面积为常量。(特别是 C 为直

角双曲线的情形，如果取两渐近线为坐标轴，则 C 的方程为 $xy=k^2/2$.）C 上过点 X 的切线由两渐近线所截割的线段被 X 平分. 对于双曲线的情形，从两焦点到任意切线的距离之积也等于常数 b^2，连结两焦点与 C 上的点 X 的二直线之间的角，被点 X 的切线所平分.

双曲线 C 用参数 θ 可表示为

$$(3')\qquad x=a\sec\theta,\quad y=b\tan\theta.$$

这时 θ 也称为 (x,y) 的**离心角**. 如果用双曲函数†，取 u 为参数，则可用下式代替 (3′)：

$$(3'')\qquad x=a\cosh u,\quad y=b\sinh u.$$

双曲线上的两点 $A(a,0)$，$X(x,y)$ 与原点 O 所构成的"扇形" OAX 的面积为 $\frac{abu}{2}=\frac{ab}{2}\operatorname{Arccosh}\frac{x}{a}=\frac{ab}{2}\log\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$，双曲线的弧 $\widehat{AX}$ 的长度可由椭圆积分 $\int_0^x\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}}\,dx$ 表示.

对于以焦点 $F(ae,0)$ 为极点，x 轴的正向的射线为极轴的极坐标系 (r,φ)，双曲线 C 的方程为

$$(4')\qquad r=\frac{l}{1-e\cos\varphi},\quad l=\frac{b^2}{a}.$$

这个 l 等于通过焦点且垂直于主轴的弦（它也称为**通径**）的长度的一半.

【抛物线的性质】 被一定方向的"重力"所吸引而不受其他力作用的质点所描绘的曲线是抛物线 (G. Galilei). 抛物线上过点 X 的切线与连结焦点 F 与 X 的直线及主轴的方向成相等的角(图 6). 因而由焦点射出的光线被抛物线"反射"后，都与主轴平行. 如果在点 $X(x_0,y_0)$ 的切线与 x 轴交于点 X'，点 X 的法线与 x 轴交于点 X''，由点 X 到 x 轴的垂足为 X_0，则有 $FX=FX'$，故 $\triangle FXX'$ 为等腰三角形，XX' 被 y 轴平分，因而从 F 向切线所作垂线的垂足的轨迹是 y 轴. 又切线投影 $X'X_0$ 之长 $=2x_0$，法线投影 $X''X_0$ 之长 $=2a=2\cdot OF$，反之，法线投影为定长的曲线是抛物线. 抛物线的平行弦中点的轨迹是与主轴平行的直线.

在以焦点为极点，以 x 轴的正向的射线为极轴的极坐标系中，抛物线方程为

$$(4'')\qquad r=\frac{l}{1-\cos\varphi},\quad l=2a.$$

抛物线的弦 BC 与弧 $\widehat{BC}$ 所围成的面积(图 7)

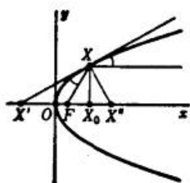


图 6

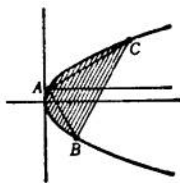


图 7

等于 $\triangle ABC$ 的面积的 4/3，这里 A 是与 BC 平行的抛物线的切线的切点(Archimedes). 当 X 的坐标为 (x_0,y_0) 时，抛物线(2) 的弧 $\widehat{OX}$ 之长度等于 $\frac{y_0}{4a}\sqrt{y_0^2+a^2}+a\log\frac{y_0+\sqrt{y^2+a^2}}{2a}$.

【共轭直径】 通过有心圆锥曲线中心的直线称为它的**直径** (diameter). 平行于有心圆锥曲线的一条直径 d 的弦的中点轨迹是另一条直径 d'. d' 称为 d 的**共轭** (conjugate) 直径. 这时 d' 的共轭直径为 d. 标准坐标系的 x 轴、y 轴是一对共轭直径. 设 d, d' 被曲线所截的线段（有时也称为共轭直径）的长度各为 $2a'$, $2b'$，且 d, d' 间的角为 ω 时，则有以下关系成立(关于 ± 号，当表示椭圆时取 +，双曲线取 −)：$a'^2\pm b'^2=a^2\pm b^2$, $a'b'\sin\omega=ab$. 又 d, d' 的方向系数之积 $=\pm b^2/a^2$，以 d, d' 为两轴的斜角坐标系的曲线方程为 $x^2/a'^2\pm y^2/b'^2=1$.

【共焦圆锥曲线】 以两定点 F, F' 为焦点的椭圆以及双曲线的集合称为**共焦有心圆锥曲线族** (family of confocal central conics) (图 8). 包含椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的共焦有心圆锥曲线族是以 λ 为参数的曲线族 $x^2/(a^2+\lambda)+y^2/(b^2+\lambda)=1$. 通过各象限内部的点(例如第一象限内部的点 (x_0,y_0) $(x_0>0,\ y_0>0)$) 属于这个曲线族的椭圆及双曲线各存在一个，而且它们是正交的. 因而属于一个共焦有心圆锥曲线族的椭圆及双曲线构成正交曲线坐标†，称为椭圆坐标†（→ 坐标).

又，以一定点 F 为焦点、通过 F 的一直线为轴的抛物线的集合称为**共焦抛物线族** (family of confocal parabolas) (图 9)．含有 $y^2 = 4ax$ 的



图 8

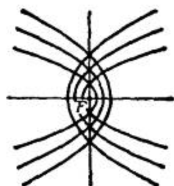


图 9

共焦抛物线族是以 λ 为参数的曲线族 $y^2 = 4(a+\lambda)(x+\lambda)$．共焦抛物线族也确定一个正交曲线坐标系．

【二次曲线】 对于平面上的直角坐标系，实系数的二元二次方程

(5) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

所表示的曲线(其中 $(a, b, h) \neq (0,0,0)$)称为**二次曲线** (curve of second order)．二次曲线可以是空集、一条或两条直线、或圆锥曲线．对于 (5) 设

(6) $$D_0 = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix},$$

D 称为这个二次曲线的**判别式** (discriminant)．当 $D_0 \neq 0, D \neq 0$ 时，如果这个曲线不是空集，则为有心圆锥曲线．如果 $D_0 > 0$ 则为椭圆或空集．如果 $D_0 < 0$ 则为双曲线．当 $D_0 = 0, D \neq 0$ 时这个曲线为抛物线．当 $D = 0, D_0 > 0$ 时，曲线是一点；当 $D = 0, D_0 < 0$ 时是两条相交的直线；当 $D = D_0 = 0$ 时是空集、一条直线或两条平行直线．

【极点和极线】 设 $F(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 是圆锥曲线 C 的方程，(x_0, y_0) 是在其平面上的一点 P 的坐标，则方程 $(1/2)(x_0\partial F/\partial x + y_0\partial F/\partial y) = ax_0x + h(x_0y + xy_0) + byy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$ 所表示的直线 P^* 称为 P 关于 C 的**极线** (polar) (图 10)．当 P 的极线为直线 l 时，P 称为 l 的**极点** (pole)，用 l^* 表示．一般地，l^* 由 l 唯一确定，且 $P^{**} = P$，$l^{**} = l$．如果 $P^* \ni Q$，则 $P \in Q^*$，如果 $l \ni P'$，则 $l^* \in P'^*$．如果通过 P 的直线与 C 相交于 X, Y，与 P^* 交于 P'，则 P, P' 对于 X, Y 成为调和共轭点．特别是如果 $P \in P^*$，则有 $P \in C$，P^* 成为 C 在点 P 的切线．对于 C 所在平面上的 ΔPQR 来说，以 P^*, Q^*, R^* 为三边的三角形称为 ΔPQR 的**极三角形** (polar triangle)．如果 $Q^* \cap R^* = P'$，$R^* \cap P^* = Q'$，$P^* \cap Q^* = R'$，则三直线 $P \cup P', Q \cup Q', R \cup R'$ 相交于一点 (M. Chasles)．当 ΔPQR 的极三角形与其本身相一致时，ΔPQR 称为**自配极三角形** (self polar triangle)．焦点的极线就是准线．

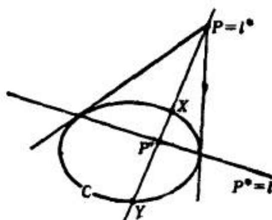


图 10

【二级曲线】 当直线 $ux + vy + w = 0$ 的系数 u, v, w 满足实系数的二次方程

(5′) $$Au^2 + 2Huv + Bv^2 + 2Guw + 2Fvw + Cw^2 = 0$$

(其中 $(A, B, H) \neq (0,0,0)$) 时，这些直线的包络曲线称为**二级曲线** (curve of second class)．它与二次曲线在本质上是一样的．二级曲线与由 (5) 所表示的二次曲线相同的条件是 A, B, C, F, G, H 与 (6) 的行列式 D 的 a, b, c, f, g, h 的余因子成比例．

从射影的观点看来，二次曲线可定义如下：当通过不同中心 A, A' 的线束† $A(l, m, \cdots)$，$A'(l', m', \cdots)$ 由射影映射† f 而对应时，它是对应直线的交点 $l \cap l' = X$ 的轨迹 (J. Steiner)(图 11)．由此可知，内接于二次曲线的六边形 $ABCDEF$ 的三对对边 (AB, DE)，(BC, EF)，(CD, FA) 的交点在一直线上 (**Pascal 定理** (图 12))，当二次曲线由二直线

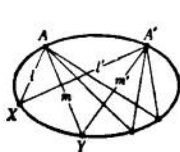


图 11

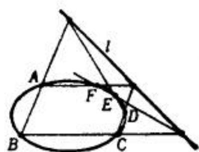


图 12

组成时，即可得到 **Pappos 定理**(图 13). 这个直线 l 称为 $ABCDEF$ 的 **Pascal 线**(Pascal line). 对于二次曲线上的六个点 A, B, C, D, E, F 进行不同的排列，可以得到60条 Pascal 线. 由这 60 条直线构成的图形，称为 **Pascal 构图** (Pascal's configuration). J. Steiner, Kirkman 等人对这个图形进行了研究. 与 Pascal 定理成对偶的有以下的 **Brianchon 定理**：外切于二级曲线的六边形的三条对角线相交于一点(图 14).

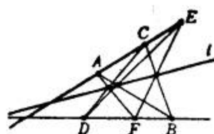


图 13

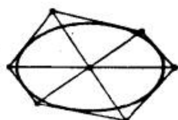


图 14

【参】 [1] 窪田忠彦，解析幾何学I，内田老鶴圃，1937; [2] G. Salmon, A treatise on conic sections, Longmans, Green and Co., 第六版 1879 (Chelsea 1962); [3] H. F. Baker, Principles of geometry II. Plane geometry, Cambridge Univ. Press, 1922.

二次曲面 [英 surface of the second order, quadric 法 surface du deuxième ordre, quadrique 德 Fläche von der zweiten Ordnung, Quadrik 俄 коническая поверхность 日 2 次曲面]

【定义】 三维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中的坐标 x, y, z 之间的二次方程

(1) $$ax^2+by^2+cz^2+d+2fyz+2gzx+2hxy+2f'x+2g'y+2h'z=0$$

(系数 $a, b, c, \cdots$ 为实数，二次项的系数不全为零)表示的曲面称为**二次曲面**. 一般来说，直线与二次曲面相交于两个点，如果相交于三个点以上，那么此直线必全部在曲面上. 通过一点 O 的直线与一个二次曲面相交于两个点 A, A', 如果总有 $AO=A'O$, 则 O 称为这个二次曲面的**中心** (centre).

【分类】 二次曲面有如 $x^2+y^2+z^2+1=0$ 这样的空集的情形，但以下我们只考虑非空的情形. 当无奇点†的二次曲面 F 有中心时，称 F 为**有心的** (central, centred), 没有中心时，称 F 为**无心的** (noncentral).

如果取适当的直角坐标系，则有心二次曲面的方程可以写成以下形式之一：

(2) $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$,

(3) $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$,

(4) $-x^2/a^2-y^2/b^2+z^2/c^2=1$,

(5) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$,

(6) $x^2/a^2-y^2/b^2=1$,

(7) $x^2/a^2=1$.

形如 (2), (3), (4), (5), (6) 的曲面，分别称为**椭圆面** (ellipsoid)、**单叶双曲面** (hyperboloid of one sheet)、**双叶双曲面** (hyperboloid of two sheets)、**椭圆柱面**或**椭圆柱** (elliptic cylinder)、**双曲柱面**或**双曲柱** (hyperbolic cylinder). 方程为 (7) 的情况，曲面成为两个平行平面. 对于 (2), (3), (4), (5), 当 $a=b$ 时，这些曲面是以 z 轴为旋转轴的旋转曲面†. 把它们分别称为**旋转椭圆面** (ellipsoid of revolution)、**单叶旋转双曲面** (hyperboloid of one sheet of revolution)、**双叶旋转双曲面** (hyperboloid of two sheets of revolution)、**圆柱面**或**圆柱** (circular cylinder). 对于旋转椭圆面，当 $a=b=c$ 时，曲面成为以 a 为半径的球面†.

如果取适当的直角坐标系，则无心二次曲面的方程可以写成以下的形式之一：

(8) $2z=x^2/a^2+y^2/b^2$,

(9) $2z=x^2/a^2-y^2/b^2$,

(10) $2z=x^2/a^2$.

在 (8), (9), (10) 的情况，曲面分别称为**椭圆抛物面** (elliptic paraboloid)、**双曲抛物面** (hyperbolic paraboloid)、**抛物柱面**或**抛物柱** (parabolic cylinder). 对于 (8), 当 $a=b$ 时，称为**旋转椭圆抛物面** (elliptic paraboloid of revolution).

其中 (2), (3), (4), (8), (9) 也称为**常态**

(proper) 二次曲面，其余的称为**退化** (degenerate) 二次曲面.

(2), (3), ···, (10) 称为这些曲面方程的**标准型** (canonical form) (标准型的 a, b, c 与 (1) 中的 a, b, c 当然不相同). 对于曲面 (2), (3), (4) 来说，平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$; 对于曲面 (8), (9) 来说，平面 $x=0$, $y=0$, 分别称为曲面的**主平面** (principal plane). 主平面的交线称为**主轴** (principal axis). 对于旋转面来说，主平面及主轴的位置是不定的. 标准型方程中的 a, b, c 称为主轴的长度或主轴. 在单叶双曲面与双曲抛物面上，分别有两族直线，同族的二直线不相交(也不平行)，不同族的二直线相交. 即对于 (3) 有以 λ 及 μ 为参数的直线族,

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{y}{b}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

对于 (4) 有

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\lambda, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{2z}{\lambda}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\mu, \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{2z}{\mu}. \end{cases}$$

这些直线分别称为曲面的**母线** (generating line). 单叶双曲面以及双曲抛物面是由它们的母线生成的直纹曲面†.

如果二次曲面有奇点，则这个奇点是二重点，一个二次曲面 F 的二重点的集合成为 1) 一点 O, 或 2) 一直线 l, 或 3) 一平面 π. 最后的情形 3), F 与 π 是一致的, 在 2) 的情形, F 是通过 l 的二平面或 l 本身. 1) 的情形, 称 F 是以 O 为**顶点** (vertex) 的**二次锥面** (cone of the second order). 它的方程可表示为 $Ax^2+By^2+Cz^2=0$ ($ABC \neq 0$). A, B, C 同号时 F 变成点 O, 异号的情形可认为 A, $B>0$, $C=-1$, 且当 $A=B$ 时, F 称为**直立圆锥** (right circular cone), $A \neq B$ 时 F 称为**斜圆锥** (oblique circular cone).

对于双曲面 (3), (4), 二次锥面

(3′) $\quad x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=0$,

(4′) $\quad -x^2/a^2-y^2/b^2+z^2/c^2=0$

分别称为 (3), (4) 的**渐近锥面** (asymptotic cone).

【极点, 极面】 通过二次曲面外一点 P 的直线与曲面相交于 X, Y 两点, 如果关于 X, Y, 点 P 的调和共轭点†为 Q, 则点 Q 的轨迹是平面. 这个平面 π 称为关于二次曲面的点 P 的**极面** (polar plane), 点 P 称为这个平面 π 的**极点**或**极** (pole). 当点 P 的极面通过点 Q 时, 点 Q 的极面通过点 P. 这时称 P, Q 两点对于二次曲面是**共轭的** (conjugate). 当 P 点在二次曲面上时, 可以认为极面是在 P 点的切平面. 关于无奇点的二次曲面, 当四面形各顶点的极面是对应于它的顶点的平面时, 这个四面形称为**自配极四面形** (self polar tetrahedron). 四面形 A 的四个顶点的关于二次曲面的极面为四面形 B 的平面时, 交换 A, B 后也有同样的性质. 这样的两个四面形, 称为关于二次曲面互为**配极四面形** (polar tetrahedron). 关于二次曲面, 当两个平面中一个平面的极点在另一个平面上时, 称这两个平面关于二次曲面是**共轭的** (conjugate).

当两个平面束†有射影关系†时, 其对应的二平面交线的轨迹一般是单叶双曲面或双曲抛物面. 特别是当平面束的轴相交时, 这个轨迹是二次锥面, 轴互相平行时为二次柱面(即椭圆柱面或双曲柱面). 当考虑不在同一平面上的二直线的射影对应时, 通过其对应点的直线的轨迹也成为二次曲面 (M. Chasles).

【二级曲面】 一般地把通过任意直线都可作两个切平面的 $\boldsymbol{R}^3$ 的曲面, 称为**二级曲面** (surface of the second class). 它是用平面坐标† u_1, u_2, u_3, u_4 的二次齐次方程所表示的曲面, 而且它可以分解为圆锥曲线或两个点. 在一般情况下二次曲面与二级曲面是一致的. 同二次曲面一样, 对于二级曲面也可以定义极点、极

面、配极四面形．关于二级曲面，连结互为配极四面形的两个四面形的相对应顶点的四直线在同一个二次曲面上．这时称这两个四面形是在**双曲面位置**(hyperboloidic position)．

【共焦二次曲面】　在直角坐标系中表示为

$$(11)\qquad \frac{x^2}{a+k}+\frac{y^2}{b+k}+\frac{z^2}{c+k}=1,\quad a>b>c>0$$

的一族有心二次曲面称为**共焦二次曲面**(confocal quadrics)．对于属于这族的二次曲面，椭圆

$$x^2/(a-c)+y^2/(b-c)=1,\ z=0$$

及双曲线

$$x^2/(a-b)-z^2/(b-c)=1,\ y=0$$

上的所有点都称为它的**焦点**(focus)，这个椭圆及双曲线称为这个二次曲面的**焦点二次曲线**(focal conics)．

已给有心二次曲面 F，通过主平面外的一点 $X(x, y, z)$，可以作出除 F 以外的两个与 F 共焦点的二次曲面．这些曲面 F, F', F'' 是互为正交的．F, F', F'' 之中，一个是椭圆面，一个是单叶双曲面，一个是双叶双曲面．设对应于这三个曲面，(11) 中 k 的值为 k_1, k_2, k_3 时，这个点 X 的直角坐标为

$$x=\sqrt{(a+k_1)(a+k_2)(a+k_3)/(b-a)(c-a)},$$
$$y=\sqrt{(b+k_1)(b+k_2)(b+k_3)/(a-b)(c-b)},$$
$$z=\sqrt{(c+k_1)(c+k_2)(c+k_3)/(a-c)(b-c)}.$$

k_1, k_2, k_3 称为 X 的**椭圆坐标**(elliptic coordinates)．

在两个同种类的共焦二次曲面

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1,$$
$$\frac{x^2}{a+k}+\frac{y^2}{b+k}+\frac{z^2}{c+k}=1$$

上，分别取适合于

$$\frac{x}{\sqrt{a}}=\frac{x'}{\sqrt{a+k}},\quad \frac{y}{\sqrt{b}}=\frac{y'}{\sqrt{b+k}},$$
$$\frac{z}{\sqrt{c}}=\frac{z'}{\sqrt{c+k}}$$

的两个点 (x, y, z)，(x', y', z')，称为**对应点**(corresponding points)．如果 P_1, P_2; Q_1, Q_2 为对应点，则有 $P_1Q_2=P_2Q_1$ (J. Ivory)．

【圆截口】　一般来说，二次曲面由两族平行平面可以截出**圆截口**(cyclic section)．与其平行的切平面的切点，是二次曲面的脐点[†]．

【二次超曲面】　n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的坐标 $(x_1, \cdots, x_n)$ 之间的二次方程

$$(12)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k+2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i+c=0$$

(设 a_{ik}, b_i, c 都是实数，矩阵 $A=(a_{ik})$ 为对称矩阵并不失去一般性．设 A 是非零矩阵) 所表示的点集称为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的**二次超曲面**(quadratic hypersurface) 或简称为**二次曲面**(quadratic surface)．当 $n=2$ 时，它成为二次曲线[†]，当 $n=3$ 时是上述的二次曲面．上述二次曲面的分类等理论，可以照样推广到 n 维的情形，显然能得出预期的结果．

设 $n+1$ 阶方阵

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n\\ b_1 & \cdots & b_n & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & A & & b_1\\ & & & \vdots\\ & & & b_n\\ b_1 & \cdots & b_n & c\end{pmatrix}$$

的秩数为 $r(A^*)=r^*$，如果 $r(A)=r$，则有以下三种情形

I) $r=r^*$, II) $r+1=r^*$, III) $r+2=r^*$.

对应于这些不同的情形，根据 $\boldsymbol{R}^n$ 的坐标变换，方程(12)可以变成以下**标准型**(canonical form):

$$\text{I)}\ \sum_{i=1}^{r}\lambda_ix_i^2=0,\quad \text{II)}\ \sum_{i=1}^{r}\lambda_ix_i^2+1=0,$$
$$\text{III)}\ \sum_{i=1}^{r}\lambda_ix_i^2+2x_{r+1}=0.$$

这里 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$ (0 的个数为 $n-r$) 与矩阵 A 的特征值[†]成比例．一般地，$1\leqslant r\leqslant n$，但在 I)，II) 中有 $r=n$，在 III) 中有 $r+1=n$ 时的超曲面称为**常态 n 维的**(properly n-dimensional) 二次曲面，其余的情形，称为**二次柱面**或**二次柱**(quadric cylinder)．I)，II)的情形，二次柱面是通过常态 r 维二次曲面的各点所作的平行于固定的 $n-r$ 维平面的同维平面的轨迹．III) 的情形，二次柱面是从常态 $r+1$ 维的二次曲面各点所作的平行于固定的 $n-r-1$ 维平面的同维平面的轨迹．常态 n

维的二次曲面，在 I) 的情形，若 $\lambda_i > 0(i=1,\cdots,n)$，则成为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的一个点，在 II) 的情形，若 $\lambda_i > 0(i=1,\cdots,n)$，则为空集．对于 I),II)，若除去 $\lambda_i > 0(i=1,\cdots,n)$ 的情形，把同一曲面用两个标准型表示时，两标准型的类(I), II), III)类以及 r) 一致，而且两个标准方程中的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ (不考虑顺序)成比例，这个比例常数在 II) 的情形是 1，在 III) 的情形是 ± 1．在 I) 的情形，原点 O 在曲面上，如果原点以外的点 X 在曲面上，则直线 OX 全部都在曲面上．这种情形的曲面称为**二次锥面**(quadric cone)．

又 I), II) 情形的曲面对于原点是对称的．I), II) 情形的曲面称为**有心二次曲面** (central quadric)，III) 情形的曲面称为**无心二次曲面** (non-central quadric) 或称为**抛物型二次曲面** (parabolic quadric)．如果把 III)所表示的抛物型二次曲面用含 x_{n+1} 轴的(二维)平面去截，则其截口是抛物线．对于 II) 如果 $\lambda_i < 0(i=1,\cdots,r)$，则曲面为**椭圆型二次曲面** (elliptic quadric)，在 λ_i 中如果有正有负，则称为**双曲型二次曲面** (hyperbolic quadric)．椭圆型二次曲面被平面所截，其截口都是椭圆．双曲型二次曲面被平面所截，其截口是双曲线或椭圆．一般来说，二次曲面的(任意维的)平面截口是此平面上的二次曲面．

【仿射空间的二次曲面】 以上研究的是 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的二次曲面(12)，在 $\boldsymbol{R}^n$ 中由于坐标的正交变换把方程化为标准型，如果将 $\boldsymbol{R}^n$ 考虑为实数域上的 n 维仿射空间†，根据仿射空间的坐标变换，把(12)化成最简单的形式，则同上面一样，相应于 I), II), III) 的情形，可以得到以下的标准型：

$$\text{I}: \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2 = 0,$$

$$\text{II}: \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2 + 1 = 0,$$

$$\text{III}: \sum_{i=1}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2 + 2x_{r+1} = 0.$$

其中设 $0 \leqslant s \leqslant r$．设 N 表示 I, II, III 的任何一种情形，而且有 $r-s=t(0\leqslant t\leqslant r)$ 时，可以由 $N(s,t)$ 表示上面的标准型．上述的常态 n 维、柱面(柱)、锥面、抛物型、椭圆型、双曲型等名称对于仿射分类也都成立．例如锥面是 I，抛物型是 III，椭圆型是 II$(0,r)$，双曲型是 II(s,t) $(s,t>0)$．II$(s,0)$ 表示空集，但除去这种情形，同一个曲面可以表示为两个标准型 $N(s,t)$、$N'(s',t')$ 的充分必要条件是 (i) $N=N'$，而且 (ii) $N=$ I 或 III 的情形，这时有"$s=s'$, $t=t'$ 或 $s=t'$, $t=s'$"，$N=$ II 的情形，则有"$s=s'$, $t=t'$"．

【射影空间的二次曲面】 对于在某个域 K 上的 n 维射影空间† P^n，P^n 上的齐次坐标 $(x_0, x_1,\cdots,x_n)$ 之间的齐次二次方程

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}x_ix_k = 0$$

($a_{ik}\in K$，矩阵 $A=(a_{ik})$ 是非零的对称矩阵) 所表示的点集，称为 P^n 上的**二次超曲面**或简称**二次曲面**．它的分类问题归结为二次型†的分类问题，或对于 K 上的正则矩阵 T，认为可写成 ${}^tTAT$ 形式的矩阵与 A 是等价的，这时归结为 K 上的对称矩阵的分类问题(→二次型)．特别是 K 为代数闭域†或实闭域†的情形，可以得到简单的结果．也就是当 K 为代数闭域时，如果 A 的秩数为 $r(A)=r$，则二次曲面的方程可化为标准型

$$\sum_{i=0}^{r} x_i^2 = 0.$$

又 K 为实闭域时可化为标准型

$$\sum_{i=0}^{s} x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} x_j^2 = 0.$$

【参】 [1] G. Salmon, A treatise on the analytic geometry of three dimensions, Hodges, Figgis & Co., Dublin. 第四版 1882 (R. A. P. Rogers 编，同書 I，第六版 1914); [2] G. Salmon-W. Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes I, Teubner, 1898; [3] 窪田忠彦，解析幾何学 I, II, 内田老鶴圃, 1936, 1945. 2次超曲面などについては; [4] E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra II, Vandenhoeck & Ruprecht, 1948; [5] S. Iyanaga (弥永昌吉), Kikagaku Zyosetu (Japanese Introduction to geometry), Iwanami, 1968; [6] H. F. Baker, Principles of geometry III. Solid geometry, Ca-

mbridge Univ. Press, 1922; [7] O. Schreier- E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra II, Vandenhoeck & Ruprecht, 1951 (英译本: Projective geometry of n -dimensions, Chelsea, 1961).

凸集 [英 convex set 法 ensemble convexe 德 konvexe Menge 俄 выпуклое множество 日 凸集合] 当 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集X满足"若 $x, y \in X, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, 则 $\alpha x + (1-\alpha)y \in X$"时, X 称为**凸的** (convex), 又称X是**凸集**. 凸集的开核†和闭包†都是凸集. 具有内点的有界闭凸集称为**凸体** (convex body). 包含集合 $X(\neq \varnothing)$ 的最小凸集是存在的. 把它称为 X 的**凸包** (convex hull), 用 $[X]$ 表示. $[X]$ 的点 x 可以表示为X的至多 $n+1$ 个点的凸线性组合. 也就是说,对于 $x \in [X]$, 可以适当选择 $x^i \in X$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n+1;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} = 1)$,使 $x = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n+1} x^{n+1}$. 无论怎样选择 X 的相异的两点 x^1, x^2 也不能用 $x = (1/2)(x^1 + x^2)$ 表示的点 $x \in X$, 称为 X 的**端点**或**极值点** (extreme point). 当X是有限集时, $[X]$ 称为**凸多面体** (convex polyhedron). 如果用 $\dot{X}$ 表示凸多面体 X 的顶点的集合, 则有 $X = [\dot{X}]$.

超平面 $H = \{x \mid (a, x) = \alpha\}$ 确定两个**半空间** (half space) $\{x \mid (a, x) \leqslant \alpha\}$, $\{x \mid (a, x) \geqslant \alpha\}$. 这些都是闭凸集. 当凸集$X$包含在由超平面$H$所确定的一个半空间$S$中, X的边界与H有共同点时, H称为X的**支撑超平面**(supporting hyperplane), S 称为X的**支撑半空间** (supporting half space). 闭凸集 X 与它的一切支撑半空间的交相重合. 凸集X的边界点在X的某一个支撑超平面上. 另外 i)设 X, Y 是凸集, X具有内点, 且 $X \cap Y = \varnothing$, 则可选择适当的 $a(\neq 0)$ 与实数 α, 使得当 $x \in X$ 时有 $(a, x) \geqslant \alpha$, 当 $y \in Y$ 时有 $(a, y) \leqslant \alpha$ 成立. ii) 在没有共同点的两个闭凸集 X, Y 中, 如果至少有一个是有界的, 则可选择 $a \neq 0$ 与实数 α, 使得当 $x \in X$ 时有 $(a, x) > \alpha$, 当 $y \in Y$ 时有 $(a, y) < \alpha$ 成立. 以上 i), ii) 都是由超平面分离 X 与 Y, 所以这样的定理称为**分离定理** (separation theorem). 如 ii) 所述, 用 $>$ (而不是 $\geqslant$) 分离的情形称为**强分离** (strongly separated).

作为分离定理的直接应用, 可以导出关于矩阵的下述性质: 如果 A 是以实数为分量的 (m, n) 型矩阵,则有使 ${}^t A y > 0$, $y > 0$ 的 m 维向量 y 存在,或有使 $Ax \leqslant 0, x \geqslant 0, x \neq 0$ 的 n 维向量 x 存在. 其中 $x \geqslant 0 (> 0)$ 表示 x 的分量都 $\geqslant 0 (> 0)$. → 对策论.

在多复变函数论中, 研究了关于 $\boldsymbol{C}^n$ 的子集的各种凸性 (→ 多变量解析函数).

【Helly 定理】 设集合 Λ 的基数 $\geqslant n+1$, $C_\lambda(\lambda \in \Lambda)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的有界闭凸集. 如果任何 $n+1$ 个 C_λ 的交不空, 则所有的 C_λ 存在共同点, 这称为 **Helly 定理**.

这个定理的应用是广泛的, 例如由此定理可以导出以下的性质. 1) 如果 $\boldsymbol{R}^n$ 的凸集 X 被有限个半空间覆盖, 则X被这些半空间中的 k 个 $(k \leqslant n+1)$ 所覆盖. 2) $\boldsymbol{R}^n$ 的有限集合 X, Y 被超平面强分离的条件是: 对于 $X \cup Y$ 的至多 $n+2$ 个点所构成的任意集合 S 来说, 必有 $S \cap X$ 与 $S \cap Y$ 被超平面强分离. 3) 若 $\boldsymbol{R}^n$ 的集合X的直径$\leqslant 2$, 则 X 包含在半径为 $(2n/(n+1))^{1/2}$ 的球中. 4) 设 X 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的凸体. 适当的选择 $x \in X$, 通过 x 的任意直线与凸体的边界交于点 u, v 时, 可使 $\|x-u\|/\|v-u\| \leqslant n/(n+1)$ 成立. Helly 定理也被应用于函数逼近的问题.

【卵形线】 在平面上凸体的边界称为**卵形线** (oval), 在空间(三维)中凸体的边界称为**卵形面** (ovaloid). 卵形线E是 Jordan 曲线†, 在E上的各点都存在从左侧以及右侧的切线, 两者不重合的点至多有可数个. 这些切线与E共有一点或一线段, 称为卵形线的**支撑线** (supporting line). 设O是E内部的一点, X是与O不同的一点, 那么垂直于 OX 并交于射线 OX 的支撑线 l 只有一条. 取以O为原点的正交坐标系, 如果任意点 X 的坐标为 (x, y), l 上的点的坐标为 (ξ, η), 则直线 l 的方程是 $\xi x + \eta y = H(x, y)$, 其中 $H(x, y)$ 有以下性质: i) $H(0, 0) = 0$; ii) 如果 $t > 0$, 则 $H(tx,$

$ty) = tH(x, y)$; iii) $H(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \leqslant H(x_1, y_1) + H(x_2, y_2)$; 这个 $H(x, y)$ 称为**支撑线函数** (supporting line function). E 的形状与大小由支撑线函数来确定；反过来，具有性质 i), ii), iii) 的函数是某卵形线的支撑线函数.

卵形线 E 具有长度 $L(E)$, 其内部的面积为 $F(E)$, 又设对应于 OX 反向的射线 OX' 的支撑线为 l' 时，则 l 与 l' 的距离称为 XX' 方向的 E 的**幅** (breadth). 设改变方向时的幅的最大值、最小值分别为 $D(E)$, $\Delta(E)$. $D(E)$ 是 E 的直径, $\Delta(E)$ 称为 E 的**厚度** (thickness). 再有，幅与方向无关的曲线称为**定幅曲线** (curve of constant breadth). 这些量之间有下面的不等式成立 (以下暂时把 $L(E)$ 中的 E 省略，等号只对于括弧中所注明的图形成立). $L^2 \geqslant 4\pi F$ (圆, J. Steiner, 1838, → 等周问题): $L \leqslant \pi D$ (定幅曲线, W. Blaschke, 1916); $\pi D^2 \geqslant 4F$ (圆, L. Bieberbach, 1915); $F \geqslant \Delta^2/\sqrt{3}$ (正三角形, J.Pál, 1921) (窪田忠彦, 東北理報 I, **12, 13**, Tôhoku Math, J., **24, 49**).

【卵形线的线性组合】 设二卵形线的支撑线函数为 H_1, H_2, 当 t_1, t_2 为正数时，由于 $t_1H_1 + t_2H_2$ 满足条件 i), ii), iii), 因此成为某卵形线 $E(t_1, t_2)$ 的支撑线函数. $E(t_1, t_2)$ 也记作 $t_1E_1 + t_2E_2$, 称为 E_1, E_2 的**线性组合** (linear combination). 特别是, $(E_1 + E_2)/2$ 称为 E_1, E_2 的**平均卵形线** (mean oval). 对于它有关系 $F(E(t_1, t_2)) = F(E_1)t_1^2 + 2Mt_1t_2 + F(E_2)t_2^2$ 成立. 其中 M 是与 t_1, t_2 无关的量，且满足 $M^2 \geqslant F(E_1)F(E_2)$. M 称为 E_1, E_2 的**混合面积** (mixed area). 这里，等号成立，当且仅当 E_1 与 E_2 相似，而且它们在相似的位置. 又设 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时, $F(E(t, 1-t))$ 的平方根为 t 的凸函数† (H. Minkowski, Math. Ann., **57** (1903)).

【特殊卵形线】 以正三角形的三顶点为中心、边长为半径所作的三个圆，由它们的劣弧围成的卵形线称为 **Reuleaux 三角形** (Reuleaux's triangle). 这是以边长为幅的定幅曲线，而且定幅曲线所围成的面积在 Reuleaux 三角形的情况为最小. Reuleaux 三角形内接于以它的边长为一边的正方形而旋转. 一般来说，内接于凸多边形且可转的卵形线称为**内转卵形线** (inrevolvable oval). 任何这样的卵形线都能从内接于正多边形而旋转得到(藤原松三郎–掛谷宗一, 東北理報 I, **4**; Tôhoku Math. J., **11**).

类似于以上所述卵形线的性质，对于卵形面或 $\boldsymbol{R}^n$ 的凸体的边界也成立.

【凸锥】 当 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 $X \neq \varnothing$ 满足"如果 $x, y \in X, \alpha \geqslant 0$ 则 $\alpha x, x + y \in X$" 时, X 称为**凸锥** (convex cone). 凸锥是凸集. 存在包含集合 $X \neq \varnothing$ 的最小凸锥. 把它表示为 $K(X)$. 对于两个凸锥 X, Y, 如果其和 $X + Y$ 定义为 $\{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$, 则 $X + Y$ 是凸锥. 两个凸锥的交仍为凸锥. 又对于凸锥 X, 集合 $\{y \mid$ 对于 X 的所有点 x 有 $(x, y) \leqslant 0\}$ 是凸锥. 把它称为 X 的**对偶凸锥** (dual convex cone) 或称为**共轭凸锥** (conjugate convex cone), 用 X^* 表示. 当 X 为有限集合时, $K(X)$ 称为**凸多面锥** (convex polyhedral cone). 例如，射线 $(b) = \{x \mid x = \alpha b, \alpha \geqslant 0\}$ $(b \neq 0)$, 半空间 $\{x \mid (a, x) \leqslant 0\} = (a)^*$ $(a \neq 0)$ 就是凸多面锥. 凸多面锥是闭集. 凸锥 X 是凸多面锥的充分必要条件为 X 是有限个射线的和(作为上述凸锥的和). 对于凸锥 X_1, X_2, 有 1) 当 $X_1 \subset X_2$ 时, $X_2^* \subset X_1^*$; 2) $(X_1 + X_2)^* = X_1^* \cap X_2^*$; 3) $X_1^* + X_2^* \subset (X_1 \cap X_2)^*$. 特别是当 X_1, X_2 为凸多面锥时，有 $X_1^* + X_2^* = (X_1 \cap X_2)^*$. 可以把 $(X^*)^*$ 记作 X^{**}. 对于凸锥 X 有 $X \subset X^{**}$, 但对于闭凸锥 X, 有 $X = X^{**}$. 把它称为凸多面锥的**对偶性** (duality). $\boldsymbol{R}^n$ 的线性子空间 L 是凸多面锥. 又，对于 (m, n) 型实矩阵 A 来说, $\{x \mid Ax = 0, x \geqslant 0\}$ 以及 $\{x \mid Ax \geqslant 0\}$ 是凸多面锥. 当 X 为凸多面锥时 $X = X^{**}$ 成立，这个等式表示关于线性不等式的 Minkowski-Farkas 定理†(设 A 为 (m, n) 型实矩阵, b 为 m 维实向量. 使 $Ay = b$ 有 $y \geqslant 0$ 的解的充分必要条件是对于 ${}^tAx \geqslant 0$ 的所有 m 维向量 x, $(b, x) \geqslant 0$ 成立). 关于线性不等式 → 线性规划 [线性不等式与凸集的理论].

【关于函数空间的凸集】 以上是在 n 维 Euclid 空间中考虑的,但凸集、凸锥也可以在一般的线性空间来定义.适当条件下,与 $\boldsymbol{R}^n$ 中的定理相类似的定理都成立. 例如,1) 设 E 是满足 Hausdorff 分离条件的实拓扑线性空间†, A,B 是 E 的凸集且 B 有内点,$A\cap B=\varnothing$,这时 A,B 被超平面所分离.也就是说,存在 E 上的连续线性泛函 $f\neq 0$ 且满足 $\sup f(A)\leqslant \inf f(B)$. 2)设 C 是 Hausdorff 实拓扑线性空间的凸集.对于 C 的边界点 x,当存在满足 $f(x)=\sup f(c)$ 的连续线性泛函 $f\neq 0$ 时,x 称为 C 的**支撑点** (supporting point),f 称为 C 的**支撑泛函** (supporting functional).如果凸集 C 有内点,则存在以 C 的边界点 x 为支撑点的支撑泛函. 3) 设 C 是 Banach 空间† E 的闭凸集. C 的支撑点的集合在 C 的边界上稠密.

对于被实拓扑线性空间 E 的对偶空间† E^* 所包含的凸集 C,当若 $f_0\in E^*$ 不属于 C,则对某个点 $x_0\in E$ 能使 $\sup\{f(x_0)|f\in K\}<f_0(x_0)$ 时, C 称为**正则凸集** (regularly convex set).

又设 E 为 Hausdorff 实拓扑线性空间, $K(\subset E)$ 是以 0 为端点的闭凸锥而且 $K\cap(-K)=\{0\}$. 这时如果将 $x\leqslant y$ 规定为 $y-x\in K$,则可在 E 上定义半序. 例如,n 维 Euclid 空间的**正象限** (positive orthant) $\{x=(x_i)|x_i\geqslant 0\ (i=1,\cdots,n)\}$ 是闭凸锥且满足 $K\cap(-K)=\{0\}$. 这个正象限的半序 $(x_i)\leqslant(y_i)$,对所有的 i 可以表示为 $x_i\leqslant y_i$. 这样,元素为正数的矩阵的性质,核为正数值函数的积分算子的性质,可以推广到满足 $f(K)\subset K$ 的由 E 到 E 的映射 f 的情形.

另外 → 线性规划〔空间的扩张与应用〕. 对于 Kreĭn Milman 端点定理† → 拓扑线性空间.

【参】 [1] W. Blaschke, Kreis und Kugel, Verlag von Veit, 1916; [2] T. Bonnesen-W. Fenchel, Theorie der konvexen Körper, Erg. d. Math., Springer, 1934 (Chelsea, 1948); [3] W. Fenchel, Convex cones, sets and functions, Lecture notes, Princeton Univ. Press, 1953; [4] Convexity, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics VII, Amer. Math. Soc., 1963; [5] M. Г. Крейн-М. А. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи Мат. Наук, 3 (1948), no. 1 (23), 3—95; [6] 窪田忠彦, 近世幾何学, 岩波, 1947; [7] 窪田忠彦, 卵形線及び卵形面に関する微分幾何学, 岩波講座数学, 1934; [8] 二階堂副包, 現代経済学の数学的方法, 岩波, 1960; [9] B. Grünbaum, Convex polytopes, Interscience, 1967; [10] И. М. Яглом-В. Г. Болтянский, Вышуклые фигуры, Гостехиздат 1951.

向量 [英 vector 法 vecteur 德 Vektor 俄 вектор 日 ベクトル] 【向量的定义】 所谓**向量**最初是指在力学中表示速度、加速度、力的那样有长度和方向的量,可以定义数乘法,并由平行四边形法则还可以定义加法. 而没有方向的普通量称为**数量** (scalar). 在 Euclid 空间 E^n(一般是仿射空间†)中,向量 $\boldsymbol{a}$ 用**定向线段(有向线段)** (oriented segment) $\overrightarrow{pq}$ 表示. 对于两个有向线段 $\overrightarrow{p_1q_1}$ 与 $\overrightarrow{p_2q_2}$,当1) p_1,q_1,p_2,q_2 四点在同一平面 π 上,2) $p_1q_1/\!/p_2q_2$ 以及 $p_1p_2/\!/q_1q_2$ 成立时,且只有在这种情况下,认为 $\overrightarrow{p_1q_1}$ 与 $\overrightarrow{p_2q_2}$ 表示同一向量 $\boldsymbol{a}$. 因此,考虑 E^n 内有向线段 $\overrightarrow{pq}$ 的集合,根据 1), 2) 定义等价关系 $\overrightarrow{p_1q_1}\sim\overrightarrow{p_2q_2}$,这时各等价类可以称为 E^n 中的**向量**. 在这种意义下,今后将向量用 $[\overrightarrow{p_1q_1}]$ 或用它的代表 $\overrightarrow{pq}$ 表示. 有向线段 $\overrightarrow{pq}$ 的**始点(起点)** (initial point) p 和 **终点** (terminal point) q 也叫做向量 $\overrightarrow{pq}$ 的始点(起点)和终点.

对于向量 $\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{pq}]$,在两点 p,q 所确定的直线上取点 r,使 $[\overrightarrow{pr}:\overrightarrow{pq}]=\lambda$($\lambda$ 为实数)成立,这时向量 $\boldsymbol{b}=[\overrightarrow{pr}]$ 用 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 表示. 向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**数量倍数** (scalar multiple).使 $(\lambda,\boldsymbol{a})$ 对应 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的运算称为**数乘法** (scalar multiplication).当给出向量 $\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{pq}]$, $\boldsymbol{b}=[\overrightarrow{qs}]$ 时,把向量 $\boldsymbol{c}=[\overrightarrow{ps}]$ 表示为 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和** (sum). 特别是 $\boldsymbol{0}=[\overrightarrow{pp}]$ 称为**零向量** (zero vector),对于 $\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{pq}]$ 可定义 $-\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{qp}]$.

关于向量的和与数乘法,以下的公式成立.

1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）；2) $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$（结合律）；3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；4) 对于 $\boldsymbol{a}$ 可定义 $-\boldsymbol{a}$，使 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；5) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$（分配律）；6) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$（结合律）；7) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$. 由于 1)—7)，$E^n$ 中的所有向量的集合 V，构成实线性空间†. 一般地，当给出上述 1)—7)成立的集合，即任意的实线性空间 V 时，V 的元素称为向量，V 称为**向量空间**（vector space）.

对于 E^n 中的向量 $\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{pq}]$，把 $\boldsymbol{a}$ 同 E^n 的一点 p 同时考虑时，它称为**固定向量**（fixed vector）. 表示力的向量 $\boldsymbol{f}$ 与它的作用点 p 同时考虑的情况就是其中一例. 而向量 $\boldsymbol{a}$ 本身称为**自由向量**（free vector）. 当在 E^n 中确定原点 o 时，向量 $\boldsymbol{a}=[\overrightarrow{op}]$ 称为点 p 的**位置向量**（position vector）.

线性空间的各种概念对于向量空间 V 是适合的. 例如，线性相关†、线性无关†、V 的维数†等. 特别是当 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{op}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{oq}$ 线性相关时，称 $\overrightarrow{op}$，$\overrightarrow{oq}$ **共线**（collinear），当 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{op}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{oq}$，$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{or}$ 线性相关时，称 $\overrightarrow{op}$，$\overrightarrow{oq}$，$\overrightarrow{or}$ **共面**（coplanar）.

当 n 个向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是 V 的基†时，这些向量称为**基本向量**（fundamental vectors）. 任意向量 $\boldsymbol{a}\in V$ 可唯一地表示为 $\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{e}_i$ $(\alpha_i\in\boldsymbol{R})$. $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 称为（关于基本向量 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的）向量 $\boldsymbol{a}$ 的**分量**（component）.

【内积】 在 Euclid 空间 E^n 中，对于向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{pq}$，线段 $\overrightarrow{pq}$ 的长度称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**绝对值**（absolute value）、**大小**（magnitude）或**长度**（length），用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示. 长度为 1 的向量称为**单位向量**（unit vector）. 对于两个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{op}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{oq}$，设 $\angle poq=\theta$，则 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**内积**（inner product）或**数量积**（scalar product）. $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 也可以写为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{ab}$. 当 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ 时 $\angle poq=\pi/2$，这时就说 $\overrightarrow{op}$ 与 $\overrightarrow{oq}$ 是正交的. 取 E^n 的正规正交†基 $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$，即 $|\boldsymbol{e}_i|=1$，$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=0$ $(i\neq j)$，对于 $\boldsymbol{a}=\sum\alpha_i\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{b}=\sum\beta_i\boldsymbol{e}_i$ 有 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\sum\alpha_i\beta_i$. 内积有以下性质. i) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$；ii) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$；iii) $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y})$，$(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ $(\alpha\in\boldsymbol{R})$. 对于 $\boldsymbol{y}$ 也有类似的结果.

对于一般的向量空间 V，使任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ 对应于 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{R}$，而且满足条件 i)，ii)，iii) 时，则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 称为**内积**，定义了内积的向量空间称为**度量向量空间**（metric vector space）（→线性空间，Hilbert 空间）. 这时 $\boldsymbol{x}$ 的绝对值为 $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$.

【外积】 在三维 Euclid 空间 E^3 中，对于两个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{op}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{oq}$，垂直于 $\overrightarrow{op}$，$\overrightarrow{oq}$，而且大小等于 $\overrightarrow{op}$，$\overrightarrow{oq}$ 所确定的平行四边形的面积 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta(\theta=\angle poq)$ 的向量，用 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 表示，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**（outer product）或**向量积**（vector product）（图 1）. 但是它的方向规定为从 $\boldsymbol{a}$ 旋转（经 180° 以内的角度）到 $\boldsymbol{b}$ 时右螺旋的前进方向. $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ 也可以写为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 对于外积下列定律成立：**反交换（反对称）律** $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；关于数量的结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$. 结合律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 不成立，但 Jacobi 法则† $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$ 成立. 另外，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 称为**向量三重积**（vector triple product），有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

这称为 **Lagrange 公式**. 取右手系（图 2）的正

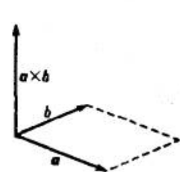


图 1

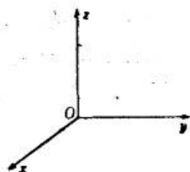


图 2

规正交基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的分量为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则外积可表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_1\\ \beta_3 & \beta_1\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3.$$

又对于三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$$

等于由 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 的分量构成的三阶行列式的值，称为**数量三重积** (scalar triple product). 它的几何意义是以 o 为起点，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{op}, \boldsymbol{b}=\overrightarrow{oq}, \boldsymbol{c}=\overrightarrow{or}$ 作为三个棱的平行六面体的体积，这个值为正值时 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 构成右手系，为负值时构成左手系. 又 $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]=0$ 与 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面是等价的.

关于 n 维向量的外积与 p 向量 → 线性空间[外积].

【向量场】 这部分仅就三维 Euclid 空间 E^3 的情况来叙述. (对于一般的情形 → 微分流形.) 在 E^3 内的集合 D 上定义的数量值函数和向量值函数分别称为**数量场** (scalar field) 和**向量场** (vector field). 向量场可根据它的分量函数的性质来定义连续和可微等性质.

对于可微的数量场 $f(x, y, z)$, 以 $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ 为分量的向量场称为 f 的**梯度**或**斜量** (gradient), 用 $\mathbf{grad}\, f$ 表示. 设可微的向量场 $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ 的分量为 $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ 时, 分量为 $(\partial w/\partial y-\partial v/\partial z, \partial u/\partial z-\partial w/\partial x, \partial v/\partial x-\partial u/\partial y)$ 的向量场称为 $\boldsymbol{V}$ 的**旋度** (rotation, curl), 用 $\mathbf{rot}\boldsymbol{V}$ 或 $\mathbf{curl}\boldsymbol{V}$ 表示. 又, 对于向量场 $\boldsymbol{V}$, $\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z$ 是数量场, 把它称为 $\boldsymbol{V}$ 的**散度** (divergence), 用 $\mathbf{div}\,\boldsymbol{V}$ 表示. 如果引进以微分算子 $(\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ 为分量的向量算子 ∇, 则有 $\mathrm{grad} f=\nabla f$, $\mathrm{div}\boldsymbol{V}=(\nabla, \boldsymbol{V})$, $\mathrm{rot}\boldsymbol{V}=\nabla\times\boldsymbol{V}$. ∇ 称为**微分算子** (nabla), **atled** (delta 的逆读)或称 **Hamilton 算子** (Hamiltonian).

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}=0$ 的向量场 $\boldsymbol{V}$ 称为**无旋的** (irrotational), **无涡的**(德 wirbelfrei) 或**层状的** (lamellar), $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}=0$ 的向量场称为**不发散的**(德 quellenfrei) 或**螺线的** (solenoidal). $\mathrm{grad}\, f$ 是无涡的向量场, $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}$ 是不发散的向量场. 在各点的邻域, 或单连通†域中, 无涡的向量场可以表示为梯度, 不发散的向量场可表示为旋度, 任意的向量场 $\boldsymbol{V}$ 可以表示为这两个向量场的和 (**Helmholtz 定理**): $\boldsymbol{V}=\mathrm{grad}\,\varphi+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$. 这里 φ 称为**标势** (scalar potential), $\boldsymbol{u}$ 称为**向量势** (vector potential). $\nabla^2=\nabla\nabla=\mathrm{div\ grad}=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ 称为 **Laplace 算子**或**调和算子** (Laplacian), 用 Δ 表示. 满足 $\Delta\varphi=0$ 的 φ 是调和函数†. 无涡且不发散的向量场, 在局部上可以表示为调和函数的梯度. 又对于向量场 $\boldsymbol{A}$ (对它的每个分量也同样), 如果作用以 Laplace 算子, 则变成 $\Delta\boldsymbol{A}=\nabla^2\boldsymbol{A}=\mathrm{grad\ div}\boldsymbol{A}-\mathrm{rot\ rot}\ \boldsymbol{A}$.

把向量场 $\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{V}(p)\,|\,p\in D\}$ 看做是以它的定义域 D 的各点 p 为起点的方向场 $\{\overrightarrow{pq}(p)\,|\,p\in D\}$ $(\boldsymbol{V}(p)=[\overrightarrow{pq}(p)])$, 这时在各点与它相切的曲线 C (向量场的积分曲线†) 称为 $\boldsymbol{V}$ 的**向量线** (vector line), 通过闭曲线 C 上各点的向量线的集合称为**向量管** (vector tube). 设闭曲线 C 的切线方向的 $\boldsymbol{V}$ 的分量为 v_s, C 的线素为 ds 时, 线积分† $\int v_s ds=\int(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{s})$ 称为沿 C 的**环流** (circulation). 沿着任意闭曲线的环流为 0 的向量场是无涡的, 在单连通域 D 上, 其逆也正确. 又设曲面 S 的法线方向的 $\boldsymbol{V}$ 的分量为 v_n, S 的定向面片的面素为 $\boldsymbol{n}\,dS=d\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{n}$ 是指向曲面 S 的正向的单位法向量) 时, 面积分† $\int v_n dS=\int(\boldsymbol{V}, d\boldsymbol{S})$ 称为通过 S 的**向量流量** (vector flux). 通过任意闭曲线的向量流量为 0 的向量场是不发散的. 与它们有关的一些公式, → 线积分, 面积分. 对于推广到流形的情形, → 调和积分, 微分流形, 公式 3.

【参】 [1] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Springer, 第五版1923; [2] S. Banach, Mechanics, Warsaw, 1956; [3] H. Flanders, Differential forms with applications to the physical sciences, Academic Press, 1963; [4] 山内恭彦, 代数学及び幾何学, 共立出版, 1952; [5] 安達忠次, ベクトル解析, 培風館, 1956; [6] 岩堀長慶, ベクトル解析, 裳華房, 1960.

埃尔兰根纲领 [英 Erlangen program 法 Programme d'Erlangen 德 Erlanger Programm 俄 программа Эрлангена 日 エルランゲンの目録] 1872年 F. Klein 继 C. v. Staudt 任埃尔兰根大学哲学部教授时，发表了题为"Vergleichende Betrachtung über neuere geometrische Forschungen(关于近代几何学研究工作的比较)"的论文，把到当时为止的多方面分别研究出来的种种几何学，在变换群概念的基础上，概括为划时代的卓越见解公诸于世．现在人们把它简称为埃尔兰根纲领．这篇论文于1893年又被刊登于"Math. Ann., **43**"上，此外，还登载在《Klein 全集》I 上，p. 460—497.

虽然变换的概念，在几何学中早已使用，但是从十八世纪前后人们才开始认识到变换群[†]概念的效用，由于线性变换群的不变式[†]论及 E. Galois 的代数方程[†]论才特别引起了人们的注意．另一方面，随着射影几何学[†]在十九世纪有了显著的发展，由 A. Cayley 和 E. Laguerre 用射影几何学的观点对 Euclid 几何学[†]和非 Euclid 几何学[†]的度量性质给以明确的解释，因而认为射影几何学包括了全部几何学．在 J. Plücker 的基础上从事几何学研究的 Klein 和 M. S. Lie 对变换群论在全部数学上的重要性都有深刻的理解，Lie 主要在连续变换群[†]方面进行研究，而 Klein 则从几何学的观点对不连续变换群进行了研究．在埃尔兰根纲领中所宣布的 Klein 的思想，就是从这样发展起来的变换群论的观点出发，把所有的几何学综合起来，并对几何学的定义给予明确的解释．

在集合 S 上用某种方法给出几何学的构造时，则 S 称为空间．埃尔兰根纲领的思想可概括如下："设已给出空间 S 与 S 的变换群 G．那么 S 的子集，也就是图形，可能具有多种性质，研究这些性质中，在属于 G 的所有变换下保持不变的性质的学科，称为从属于 G 的空间 S 的几何学"．在这个意义下的几何学用 (S, G) 表示．因而在 Klein 意义下的几何学 (S, G)，是空间 S 在 G 下的不变式论．不变式这个术语，在这里意味着不变量、不变性质、不变关系等，具有较广泛的意义．

关于几何学 (S, G)，如果把群 G 用它的子群 G' 代替，则可得到新的几何学 (S, G')，对应于 G 的一系列子群，可得到一系列的几何学．例如，使 S 的特定图形 A 保持不变的 G 的变换全体构成 G 的子群 $G(A)$．可以认为 $G(A)$ 作用于从 S 去掉 A 的子空间 S'，这样就得出新的几何学 $(S', G(A))$．这时，指定的图形 A 称为**绝对形** (absolute figure)．这样，就可从射影几何学具体地导出各种几何学．Klein 举出许多有趣味的实例加以说明，特别是，谈到了有理变换群及拓扑变换群，这是最值得注意的．

Klein 的思想不仅包括了当时所知道的几何学，而且对于新的几何学的发展也起了指导的作用．

B. Riemann 在1854年发表了现今称为 Riemann 几何学的划时代的思想．Riemann 空间虽然具有度量的概念，但一般来说没有与合同相当的变换(等距变换)．如果说有，一般也比同维的 Euclid 空间要少．所以 Riemann 几何学一般不能看做 Klein 的意义下的几何学，因而说明不属于埃尔兰根纲领的几何学是存在的．自从 A. Einstein 在1916年把 Riemann 几何学应用于一般相对论以后，它的重要性才被认识．由 H. Weyl, O. Veblen, J. A. Schouten 等人发现了用类似于 Euclid 几何学推广到 Riemann 几何学的方法推广仿射几何学、射影几何学、保形几何学而得到的几何学，从而就迫切地需要以更高的观点来统一 Klein 和 Riemann 的思想，这样 E. Cartan 提出了在他的意义下的联络这种卓越的概念 (→ 联络)．

埃尔兰根纲领使人们看清了古典几何学的本质，成为研究几何学的指导原理，有非常大的历史价值．

【参】 [1] G. Fano, Kontinuierliche geometrische Gruppen, Encykl. der Math., Leipzig, 1907—10, Geometrie I, III AB4b; [2] F. Klein, Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie, Springer, 1928; [3] F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 第三版 1926; [4] E. Cartan, Les récentes généralisations de la notion d'espace, Bull. Sci. Math., **48** (1924), 294—320;

[5] E. Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle, Enseignement Math., **24** (1925), 1—18; Proc. Internat. Congr. Math., Toronto, **1** (1928), 85—94.

坐标 [英 coordinates 法 coordonnées 德 Koordinaten 俄 координаты 日 座標] 在 Euclid 平面 E^2 上，取正交于一点 O 的二直线 $X'X$，$Y'Y$，规定单位长度 1 以后，则得到 E^2 上的正交坐标系．也就是把二直线 $X'X$，$Y'Y$ 都看做以 O 点为 0 的实数直线 $\boldsymbol{R}$，设从 E^2 的一点 P 到二直线所引垂线的垂线足分别为 x, y，则点 $P\in E^2$ 可用称为它的**坐标**的实数组 $(x, y)\in\boldsymbol{R}^2$ 一一地表示出来．

一般地，对于某个数学对象的集合，若有使它的元素对应于数量的结构，则此结构称为这个集合上的**坐标系** (coordinate system)，对应各元素的数量称为该元素的**坐标**(coordinate)．在实用上，为了用图形表示数量概念，可引入坐标系．例如列车运行图表以及算图†等，都是应用坐标系的实例．另外地图投影法†、图解计算法†、画法几何学†等也是这种坐标概念的应用．

一般地，在某空间引入坐标系时，如果在此空间内指定一个基础图形，则由此常常可以唯一地确定坐标系．对于平面 E^2 上的正交坐标系来说，在原点 O 正交的坐标轴 $X'X$，$Y'Y$ 是基础图形，若用标准尺度进行度量，则可定出 E^2 各点的坐标．再有，根据用途不同，不把 E^2 的坐标轴作为普通的实数直线，而是标上适当的函数刻度来应用．例如对数坐标纸、概率坐标纸†、统计分析纸†等都是为了某种方便，适于不同的用途而制作的．

对于数学的各分支，坐标是多种多样的，但可根据不同的作用而区分，并按以下三个观点进行叙述．

【标架与坐标】 一般地，在变换群† G 作用下的空间 M 的几何学中，最好能引入便于表示它的几何构造的 M 的坐标系．对于空间 M 内的图形的集合 G_*，群 G 单可迁地†作用在 G_* 上，这时属于 G_* 的图形称为**标架** (frame)．以每个标架为基础图形引入 M 的坐标系，对于任意的变换 $g\in G$，如果关于标架 $R\in G_*$ 的点 $X\in M$ 的坐标与关于标架 $gR\in G_*$ 的点 $gX\in M$ 的坐标相一致，则空间 M 的几何性质可以表示为在这些坐标系之间的变换下的不变量．利用这样的坐标就可以构成 M 上的解析几何学．

1）射影坐标． 对于域 K 上的 n 维射影空间† P^n，取标架 $(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ 后，任意点 $X\in P^n$ 可以用齐次坐标†

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n),\quad X=\sum_{i=0}^{n} x_i A_i,\quad x_i\in K$$

来表示．把它称为 P^n 的射影坐标†．即 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)\neq(0, 0, \cdots, 0)$，而且 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ 与 $(\lambda x_0, \lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)(\lambda\neq 0)$ 表示 P^n 的同一个点，这时，P^n 的超平面 π 由一次齐次方程

$$\sum_{i=0}^{n} x_i u_i = 0,\quad u_i\in K$$

给出，从而超平面 π 可用齐次坐标 $(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ 来表示．称它为 π 的超平面坐标†．

2）仿射坐标． 对于 n 维仿射空间† E^n，如果取 O 为原点，取以 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ 为基向量的标架 $(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$，则任意点 $X\in E^n$ 可由非齐次坐标†

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ X=O+\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i$$

来表示，称它为 E^n 的仿射坐标†．在 E^n 上规定了单位体积的情形下，用关于特殊标架

$$(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n),\quad \text{体积}[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n]=1$$

的仿射坐标则更为方便．

再有，当 E^n 是 Euclid 空间†时．关于正交标架†

$$(O; \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n),\quad \text{内积}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$$

（δ 是 Kronecker 符号†）

的仿射坐标称为 E^n 的**正交坐标** (orthogonal coordinates)．对于 Euclid 空间，有时也用一般的仿射坐标，称它为**斜坐标** (skew coordinates)．在这种情形下，内积 $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=g_{ij}$ 是 Euclid 几何学的不变量，而两点 (x_i)，(y_i) 的距离 ρ 是

$$\rho^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(y_i-x_i)(y_j-x_j).$$

有时用 $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = 1 \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 的斜坐标比较方便，在这种情形下，设两个基向量 $\boldsymbol{e}_i$，$\boldsymbol{e}_j$ 的夹角为 θ_{ij}，则 $g_{ij} = \cos\theta_{ij}$。

3）重心坐标． 对于 n 维仿射空间 E^n，取无关的† $n+1$ 个点 $A_0, A_1, \cdots, A_n$，设从一点 O 到这些点的位置向量分别为 $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$．这时，任意点 $X \in E^n$ 可以由使得

$$X = O + \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \boldsymbol{a}_j, \quad \sum_{j=0}^{n} \lambda_j = 1$$

的数组 $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ 表示．称它为 E^n 的**重心坐标** (barycentric coordinates)．它与点 O 的取法无关．

4）Plücker 坐标． 设 n 维射影空间 P^n 内的 m 维子空间的全体构成的集合为 $V(n, m)$．称之为 Grassmann 流形†．为在 $V(n, m)$ 上引入坐标系，在 P^n 上确定一个射影坐标系．P^n 内的一个 m 维子空间 $\pi \in V(n, m)$ 是由无关的 $m+1$ 个点 $B_0, B_1, \cdots, B_m \in P^n$ 张成的，设这些点的射影坐标分别为 $(b_{0j}), (b_{1j}), \cdots, (b_{mj})$，作行列式

$$p_{i_0 i_1 \cdots i_m} = \begin{vmatrix} b_{0i_0} & b_{0i_1} & \cdots & b_{0i_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{mi_0} & b_{mi_1} & \cdots & b_{mi_m} \end{vmatrix}, 0 \leqslant j_\lambda \leqslant n,$$

则子空间 π 可用齐次坐标

$$(\cdots, P_{i_0 i_1 \cdots i_m}, \cdots)$$

来表示，这与张成 π 的 $m+1$ 个点的取法无关．称它为 $V(n, m)$ 的 **Plücker 坐标** (Plücker coordinates) 或 **Grassmann 坐标** (Grassmann coordinates)．对于这个坐标，$p_{i_0 i_1 \cdots i_m}$ 有反对称性，并满足 **Plücker 关系式** (Plücker's relations)

$$\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k p_{i_1 i_2 \cdots i_m j_k} p_{j_0 \cdots \hat{j}_k \cdots j_{m+1}} = 0$$

($\hat{j}_k$ 表示除去 j_k 的意思)．特别是当 $n=3$，$m=1$ 时，Plücker 关系式只是一个二次齐次方程

$$Q: \ p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0.$$

也就是说，三维射影空间 P^3 内的所有直线 $V(3, 1)$ 可表示为以 $(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ 为射影坐标的五维射影空间 P^5 内的二次曲面 Q．再有，当 P^3 为复射影空间时，设

$$p_{01} = \xi_0 + i\xi_3, \qquad p_{02} = \xi_1 + i\xi_4,$$
$$p_{03} = \xi_2 + i\xi_5, \qquad p_{23} = \xi_0 - i\xi_3,$$
$$p_{13} = -\xi_1 + i\xi_4, \qquad p_{12} = \xi_2 - i\xi_5,$$

则对应于 Plücker 关系式有关系式

$$\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 = 0$$

成立，P^3 的直线可用齐次坐标 $(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_5)$ 来表示．称它为 **Klein 直线坐标** (Klein's line coordinates)．

5）$n+2$ 超球面坐标． 设 $n+1$ 维实射影空间 P^{n+1} 的射影坐标为 $(x_0, x_1, \cdots, x_n, x_\infty)$．$n$ 维保形空间† S^n 可由 P^{n+1} 内的二次曲面

$$S^n: \quad \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j - 2x_0 x_\infty = 0$$

$((g_{ij})$ 是正定对称矩阵)

表示，P^{n+1} 的一般点可以看做是 S^n 的超球面†．即由点 $X \in P^{n+1}$ 表示的超球面，可以表示为关于二次曲面 S^n 的点 X 的极超平面†与 S^n 的交，S^n 的外部的点是实超球面，S^n 上的点是点超球面，而 S^n 内部的点是虚超球面．所以，S^n 的超球面可以用 P^{n+1} 的齐次坐标 $(x_0, x_1, \cdots x_n, x_\infty)$ 来表示．称它为 S^n 的 **$n+2$ 超球面坐标** ($(n+2)$-hyperspherical coordinates)，$n=2$ 的情形称为**四圆坐标** (tetracyclic coordinates)，$n=3$ 的情形称为**五球坐标** (pentaspherical coordinates)．因而，当把 $n+2$ 超球面坐标看作 S^n 上的点的坐标时，它满足上述的二次关系式．而且对于确定这个坐标的射影空间的标架 $(A_0, A_1, \cdots, A_n, A_\infty)$，$A_0$，$A_\infty$ 是 S^n 上的点，其他的 A_i 是通过这两点的实超球面．特别是，若这些超球面互相正交（→保形几何学），则 $g_{ij} = \delta_{ij}$．关于 $n+2$ 超球面坐标的二次齐次方程所表示的 S^n 内的超曲面，称为**四次圆纹曲面** (cyclide)．它是四次代数曲面，是切于 n 个超球面的超球面族的包络面．

6）动坐标． 一般地，对于变换群 G 作用的空间 M 内的 m 维曲面 W，从微分几何的角度进行考察，取在 W 的每个点的标架比取固定于 M 上的坐标系，在考虑它们的联络†时，往往更

为方便.这样的标架称为**动标架**(moving frame),关于这些标架的坐标系称为**动坐标系**(moving coordinate system)(→ 曲线和曲面的微分几何).

【曲线坐标】 对于 n 维 Euclid 空间 E^n,设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正交坐标,把它们表示为 n 个变数 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的 C^r 类 $(r \geqslant 1)$ 函数

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \cdots, u_n), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

对于某开区域,如果函数行列式† $D(x_1, x_2, \cdots, x_n)/D(u_1, u_2, \cdots, u_n) \neq 0$,则 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 可看作 E^n 的局部坐标. 称它为 E^n 的**曲线坐标**(curvilinear coordinates). 这时,固定一个 u_i 而得到的超曲面 $u_i =$ 常数称为**坐标超曲面**(coordinate hypersurface),变动一个 u_i 而固定其他 $n-1$ 个 $u_j(j \neq i)$ 所得到的曲线称为**坐标曲线**(coordinate curve). Euclid 空间 E^n 的线素 ds 由

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{n} dx_k^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} du_i du_j,$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}$$

给出. 这是 Riemann 度量†,但是由于 E^n 是平坦的,所以曲率张量†为 $R^i_{jkl} = 0$. 特别地,当度量是对角线形,即

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i du_i^2$$

时,这个坐标称为**正交曲线坐标**(orthogonal curvilinear coordinates),若 $g_1 = \cdots = g_n$,则称为**等温坐标**(isothermal coordinates). 这个条件,对于空间各点来说,意味着坐标曲线两两互为正交.由于这种情形用解析法处理比较简单,因此常常使用满足这个条件的具体的曲线坐标.

曲线坐标不仅用于 Euclid 空间,一般地,还用作为微分流形†上以及它的子流形上的局部坐标.

1) 平面以及空间的曲线坐标(→ 公式 3). 设 Euclid 平面 E^2 的正交坐标为 (x, y),对于 E^2,常用

极坐标(polar coordinates): (r, θ)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta;$$

椭圆坐标(elliptic coordinates): (λ, μ)

$$x^2 = (\lambda + a^2)(\mu + a^2)/(a^2 - b^2),$$
$$y^2 = (\lambda + b^2)(\mu + b^2)/(b^2 - a^2),$$
$$a > b > 0, \quad \lambda > -b^2 > \mu > -a^2;$$

抛物线坐标(parabolic coordinates): (α, β)

$$x = -(\alpha + \beta), \quad y = \sqrt{-4\alpha\beta}, \quad \alpha > 0 > \beta;$$

等轴双曲线坐标(rectangular hyperbolic coordinates): (u, v)

$$x = uv, \quad y = (u^2 - v^2)/2;$$

双极坐标(dipole coordinates): (ξ, η)

$$x = a\sinh\xi/(\cosh\xi + \cos\eta),$$
$$y = a\sin\eta/(\cosh\xi + \cos\eta),$$
$$-\infty < \xi < \infty, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi$$

等. 设 Euclid空间 E^3 的正交坐标为 (x, y, z). 对于 E^3,常用

柱面坐标(cylindrical coordinates): (r, θ, z)

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z;$$

极坐标或球面坐标(spherical coordinates): (r, θ, φ)

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta;$$

椭圆面坐标(ellipsoidal coordinates): (λ, μ, ν)

$$x^2 = (\lambda + a^2)(\mu + a^2) \cdot (\nu + a^2)/(a^2 - b^2)(a^2 - c^2),$$
$$y^2 = (\lambda + b^2)(\mu + b^2) \cdot (\nu + b^2)/(b^2 - c^2)(b^2 - a^2),$$
$$z^2 = (\lambda + c^2)(\mu + c^2) \cdot (\nu + c^2)/(c^2 - a^2)(c^2 - b^2),$$
$$a > b > c > 0,$$
$$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$$

等. 以上各例都是正交曲线坐标. 为了确定与 E^3 的正交坐标系 (x, y, z) 有相同原点的任意正交坐标系 (ξ, η, ζ) 的轴的方位,可引入 **Euler 角**(Euler's angles) (θ, φ, ψ). 其中,θ 为 z 轴与 ζ 轴的夹角,φ 为 zx 平面与 $z\zeta$ 平面的夹角,ψ

为$\zeta\xi$平面与ζz平面的夹角,这里设$0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi$, $\psi<2\pi$. Euler 角在刚体运动学中经常用到.

2）多极坐标. 在n维 Euclid 空间E^n内,取任意位置的m个点$P_1, P_2, \cdots, P_m\ (m\leqslant n)$,如果从一点$X\in E^n$到点$P_i$的距离为$\rho_i(\geqslant 0)$,则$(\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m)$是$E^n$的适当范围内的点$X$的坐标. 称它为$E^n$的**多极坐标** (multipolar coordinates),特别是,$m=2$的情形,称为**双极坐标** (bipolar coordinates), $m=3$的情形,称为**三极坐标** (tripolar coordinates). 当$m>n$时,这种坐标满足$m-n$个关系式. 在E^n内取任意位置的m个超平面$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\ (m\leqslant n)$,对于任意点$X\in E^n$,设从超平面$\alpha_i$到点$X$的有向距离为$\xi_i$,则$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$是点$X$的坐标. 称它为$E^n$的**多面坐标** (multiplanar coordinates). 当$m>n$时,这个坐标满足$m-n$个关系式.特别是当$n=2, m=3$时,称为**三线坐标** (trilinear coordinates). 在这种情形下,设三条直线$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$围成的三角形面积为$S$,三边长度分别为$a_1, a_2, a_3$,则三线坐标$(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$满足线性关系式$a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3=2S$.

3）切线极坐标. 在 Euclid 平面E^2上,取通过点O的有向直线l_0,对于E^2的任意有向直线g,设从原点O到有向直线g的有向距离为p,二直线l_0, g的夹角为θ,则(p, θ)是直线g的坐标. 当研究E^2上的曲线C时,C上各点的切线用上述坐标表示比用E^2的点坐标表示有时比较方便. 这种坐标(p, θ),称为**切线极坐标** (tangential polar coordinates)(图 1). 和

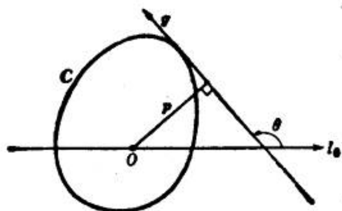


图 1

E^2上的卵形线† C只共有一点或一线段的直线称为C的支撑线†. 对于卵形线C,如果原点O取在它的内部,用支撑线的坐标(p, θ)将C表示为方程$p=p(\theta)$,则函数$p(\theta)$是周期为2π的周期函数. 特别是将函数$p(\theta)$展开成 Fourier 级数时,更便于使用这种坐标. 此外,切线极坐标还应用在齿轮†理论方面. 对于 Euclid 空间E^3,也同样可以用切平面进行研究.

4）标准坐标. 设n维 Riemann 流形$^\dagger M$上一点A的切向量空间†为$T_A(M)$. 对于切向量$\boldsymbol{v}\in T_A(M)$,从A引出方向为$\boldsymbol{v}$的测地线†,在它上面取点$P\in M$,使A到P的距离等于$\boldsymbol{v}$的长度,则$\boldsymbol{v}$和P的对应是在A点邻域内的微分同胚†. 因此,如果在$T_A(M)$上取基底,则$\boldsymbol{v}$的分量$(v^1, v^2, \cdots, v^n)$是点P的坐标. 称它为点$A\in M$附近的**标准坐标** (normal coordinates). 如果用这种坐标,则通过点A的测地线可由方程$v^i=\alpha^i r\ (i=1, 2, \cdots, n)$给出. 这里$(\alpha^i)$是$\boldsymbol{v}$方向的单位向量的分量,$r$是表示以$A$为起点的弧长的参数. 特别是,当$n=2$时,在$A$确定一个切方向. 设它与$\boldsymbol{v}$的夹角为$\theta$,则$(r, \theta)$是点$P$的坐标. 它称为**测地极坐标** (geodesic polar coordinates),已被应用在三维 Euclid 空间的曲面论中.

此外,对于仿射联络†流形以及 Lie 群†,也同样可以考虑标准坐标.

【局部坐标】 对于某空间M,用建立了坐标系的开邻域族覆盖M,再使两个邻域公共部分的坐标变换满足特定的条件,就可以定义M的数学结构.

设E为拓扑空间†,Φ是以E内的开集为元素的集合,且属于它的任意个开集的并及有限个开集的交也属于Φ. 如果同胚†的集合Γ满足以下三个公理,则称Γ为E上的**变换伪群** (pseudo-group of transformations): i) 任意的同胚$f\in\Gamma$,定义在一个开集$U\in\Phi$上,而且$f(U)\in\Phi$. ii)当开集$U\in\Phi$可表示为开集族$\{U_i\}(U_i\in\Phi)$的并时,使定义在U上的同胚f属于Γ的充分必要条件是,限制在各个U_i的f都属于Γ. iii) 对于任意开集$U\in\Phi$,在U上的恒等映射属于Γ; 又若$f\in\Gamma$,则逆映射f^{-1}也属于Γ;

再有，若 $f, g \in \Gamma$，则它们的结合 $g \circ f$ 也属于 Γ.

设 E, M 为拓扑空间，从 E 内的开集 U 到 M 内的开集 V 上的同胚 $\varphi: U \to V$ 称为关于 E 的 M 的**局部坐标系** (local coordinate system). 对于两个局部坐标系 $\varphi_1: U_1 \to V_1$, $\varphi_2: U_2 \to V_2$, 同胚

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1: \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

称为**局部坐标变换** (transformation of local coordinates).

设 Γ 是 E 上的变换伪群. 若关于 E 的 M 上的局部坐标系的集合 Σ 满足下面两个条件，则称为在 M 上定义了一个 **Γ 构造**(gamma structure): i) 属于 Σ 的局部坐标系在 M 内的象的全体覆盖 M; ii) 属于 Σ 的两个局部坐标系间如果有局部坐标变换，则它必属于 Γ. 设用局部坐标系的两个集合 Σ, Σ' 在 M 上定义两种 Γ 构造，如果 Σ 与 Σ' 的并仍然定义一个 Γ 构造，则可以定义这两个 Γ 构造是等价的.

设在 n 维实数空间 $\mathbf{R}^n$ 上，由微分同胚⁺作出的变换伪群是 Γ，这时，如果在 M 上定义 Γ 构造，则 M 就成为 n 维微分流形⁺. 又，设在 n 维复数空间 $\mathbf{C}^n$ 上，由复解析同胚作出的变换伪群是 Γ，这时，如果在 M 上可定义 Γ 构造，则 M 就成为 n 维**复解析流形** (complex analytic manifold). 另外，**局部齐性空间** (locally homogeneous space)、**叶层流形**(法 variété feuilletée)、纤维丛⁺等也都可以这样来定义.

【参】[1] E. Cartan, La méthode du repère mobile, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1935; [2] C. Ehresmann, Sur la théorie des espaces fibrés, Colloques Internat. C. N. R. S. XII, Topologie algébrique, p. 3—15, Paris, 1949; [3] F. Klein, Höhere Geometrie, Springer, 1926; [4] B. L. van der Waerden, Einführung in die algebraischen Geometrie, Springer, 1939; [5] O. Veblen-J. H. C. Whitehead, The foundations of differential geometry, Cambridge Univ. Press, 1932; [6] Wu Wen-Tsün-G. Reeb, Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1952.

射影几何学 [英 projective geometry 法 géométrie projective 德 projektive Geometrie 俄 проективная геометрия 日 射影幾何学] 射影几何学在古典几何学中是最基础的，最广泛的而且是最自由的. 又是公理化数学的典型之一例，也可以说它是现代数学的先驱.

【射影几何的构成】 用公理法来构成射影几何. 如果给出两个集合 P, Q 以及它们的关系⁺ $\Gamma \subset P \times Q$，则对于 $\mathfrak{P} = \{P, Q, \Gamma\}$ 中，P 的元素称为**点** (point)，Q 的元素称为**直线** (line)，而且对于点 p、直线 l，若 $(p, l) \in \Gamma$ 时，则称“直线 l 包含点 p”. 若二直线 l_1, l_2 都包含点 p 时，则称它们交于点 p. 若同一直线包含几个点时，则称这些点**共线** (collinear). 若几条直线包含同一点，则称这些直线**共点** (concurrent). 对于 $\mathfrak{P}$ 有下面公理成立.

I) 同时包含相异的两个点的直线必存在而且是唯一的.

II) 如果 p_0, p_1, p_2 是不共线的三点，q_1, q_2 是相异的两点，且 p_0, p_1, q_1; p_0, p_2, q_2 都分别共线，则包含 p_1, p_2 的直线与包含 q_1, q_2 的直线必相交(图 1).

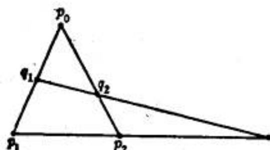


图 1

III) 任何直线都至少包含三个相异的点.

满足公理 I), II); I), II), III) 的 $\mathfrak{P}$ 分别称为**一般射影几何** (general projective geometry)、**射影几何** (projective geometry). 把一直线包含的所有点的集合，称为以这个直线为**底** (base) 的**点列** (point range). 对于射影几何，直线和以直线为底的点列之间有一一对应的关系，因此可以把直线与点列同样看待. 这时直线 $l \in Q$ 可作为 P 的子集，关系 $(p, l) \in \Gamma$ 意味着点 p 属于集合 l.

对于 P 的子集 S 的任意相异两点 p_1, p_2，包含这些点的直线又被 S 包含时，则 S 称为**子空间** (subspace). 点、直线是子空间. 另外，再给以公理:

IV) 存在有限个点，并且包含这些点的任意的子空间必包含 P;

赋予这个公理的射影几何称为**有限维射影几何**(finite dimensional projective geometry)，下面就介绍它．P称为**射影空间**(projective space)，P包含的子空间序列$P \supsetneqq P_{n-1} \supsetneqq \cdots \supsetneqq P_1 \supsetneqq P_0 \neq \varnothing$($\varnothing$是空集)之中最长的序列的$n$，称为$P$的**维数**(dimension)，当$P$是$n$维时，用$\boldsymbol{P}^n$表示．$P^1$称为**射影直线**(projective line)，P^2称为**射影平面**(projective plane)．P的子空间S当与P的直线中被S包含的集合一起考虑时，成为有限维射影几何，因而S是射影空间．直线是一维的、点是0维的射影空间．特别是，空集可定义为-1维射影空间．二维子空间称为**平面**(plane)，P^n内的$n-1$维子空间称为**超平面**(hyperplane)．

对于P的子空间M, N，分别取任意一点p，q，包含p, q的直线上的所有点的集合用$M \cup N$表示，称为M, N所张的集合．这里，$\varnothing \cup M = M$，$p \cup p = p$．$P^r \cup P^s$是包含P^r, P^s的最低维的射影空间．又P^r, P^s的公共部分用$P^r \cap P^s$表示，这是被两者同时包含的最高维的射影空间．$P^r \cup P^s, P^r \cap P^s$分别称为$P^r$，$P^s$的**并**(join)和**交**(intersection)．P^n的$r+1$个点所张的空间维数为r时，称这些点是**无关的**(independent)，反之，称为**相关的**(dependent)．又，如果P^n的子集M的任意$r+1$个点只有当$r \leqslant n$时是无关的，则称M的点在**一般位置**(general position)．"P^r必包含$r+1$个无关的点，而且包含任意的$r+1$个点的P^r一定存在，如果它们无关，则唯一存在"．"若$P^r \cup P^s = P^t$，$P^r \cap P^s = P^u$，则$r+s=t+u$"．后者称为射影几何的**维数定理**(dimension theorem)，又称为**交的定理**(intersection theorem)．

其次，在P^n中，包含一个P_0^{n-2}的所有超平面的集合Σ_1称为**超平面束**(pencil of hyperplanes)，共有的P_0^{n-2}称为Σ_1的**中心**(centre)．包含P^n的两个不同超平面的超平面束是唯一确定的．特别是，$n=2$的情形称为**线束**(pencil of lines)，$n=3$的情形称为**平面束**(pencil of planes)．P^n的超平面束以及被P^n包含的各维的子空间的超平面束，总称为P^n的**线性基本图形**(linear fundamental figure)或者简称为**基本图形**．在P^n中，包含同一个P_0^{n-r-1}的所有P^{n-r}，$P^{n-r+1}, \cdots, P^{n-1}$的集合$\Sigma_r$，称为以$P_0^{n-r-1}$为中心的**星形**(star)，由被同一个$P^r$包含的各维子空间的全体或者一部分构成的集合称为$\boldsymbol{P}^r$**图形**($P^r$-figure)．

其次，P^r, P^s没有共同点时，作$P^r \cup P^s$的过程称为从P^r**射影**(project)到P^s，当P^r, P^s有共同点时，作$P^r \cap P^s$的过程称为用P^s把P^r**截断**(cut)．从P_0射影到P_1上的一个基本图形Σ，再把它用P_2截断构成P_2上的基本图形Σ'，称之为把Σ从P_0射影到P_2上，称P_0为**射影中心**(centre of projection)(图2)．这时，称Σ，Σ'有**透视关系**(perspective relation)，用$\Sigma \,\overline{\wedge}\, \Sigma'$表示．对于两个基本图形$\Sigma$，$\Sigma'$，若存在有限个的基本图形$F_i$ ($1 \leqslant i \leqslant l$)使$\Sigma \,\overline{\wedge}\, F_1 \,\overline{\wedge} \cdots \overline{\wedge}\, F_l \,\overline{\wedge}\, \Sigma'$时，则称$\Sigma$，$\Sigma'$有**射影关系**(projective relation)，用$\Sigma \,\overline{\wedge}\, \Sigma'$表示(图3)．

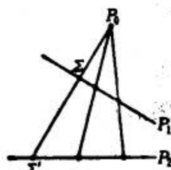


图 2

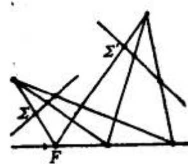


图 3

现在，对于P^n($n \geqslant 2$)的任意子空间P_1^r, P_2^r($0 \leqslant r < n$)，取与两者没有共同点的P_0^{n-r-1}，把P_1^r的各点从P_0^{n-r-1}射影到P_2^r上，而得到一一点对应$P_1^r \to P_2^r$，称之为**透视映射**(perspective mapping)．又一一对应$P_1^r \to P_2^r$可由有限个透视映射合成时，则称为**射影映射**(projective mapping)．它们也可以推广到基本图形之间的映射．

其次，对于在P^n中的命题或图形，交换P^r与P^{n-r-1}($0 \leqslant r < n$)后，再交换"包含"与"被包含"以及和它们关连的术语后所得到的新命题或图形，称为与原命题或图形是互为**对偶**(dual)的．"在射影几何中，如果一个命题成立，则它的对偶命题也成立"．称为**对偶原理**(principle of duality)．它由公理I)—IV)的对偶命题成立而得到了保证．P^r与Σ_r是互为对偶的．又把P^n

的超平面考虑为点，由对偶原理作出的射影空间 P^n_* 称为 P^n 的**对偶空间**(dual space).

【射影坐标】 下面在 P^n 中引入坐标(**射影坐标**(projective coordinates)).

我们考虑 **Desargues 定理**: "设 P^n 的两个无关组的三点为 p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3, $p_i \neq q_i$ $(i=1,2,3)$. 如果三直线 $p_i \cup q_i (i=1,2,3)$ 共点,则三点 $(p_2 \cup p_3) \cap (q_2 \cup q_3)$, $(p_3 \cup p_1) \cap (q_3 \cup q_1)$, $(p_1 \cup p_2) \cap (q_1 \cup q_2)$ 共线, 反之也成立". 这个定理对于 $n \geqslant 3$ 一般是成立的, 但是,当 $n=2$ 时,存在着这个定理不成立的射影几何. 称为**非 Desargues 几何**(non-Desarguesian geometry). 由于这种情形不能引入坐标,所以对于 $n=2$, 假定 Desargues 定理成立.

P^n 的四个点 $p_i (1 \leqslant i \leqslant 4)$ 在同一平面上的一般位置时, 由这四个点及六条直线 $g_{ij} = p_i \cup p_j (1 \leqslant i < j \leqslant 4)$ 构成的图形称为**完全四点形** (complete quadrangle) $p_1\ p_2\ p_3\ p_4$, p_i 称为**顶点**, g_{ij} 称为**边**. 一直线 l 上的六个点 q_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ 是完全四点形的六个边 $g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{34}, g_{24}, g_{23}$ 与 l 的交点时, 这六个点称为**四点型六点**或者称为**六点图形**(quadrangular set of six points)(图 4). 根据 Desargues 定理, 如

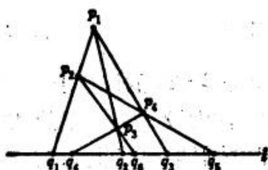


图 4

果在一直线 l 上已给相异的三个点及任取相异的两个点, 则与这五个点一起构成四点型六点的点必唯一存在. 四点型对于射影映射是不变的性质. 设直线 l 上 p_0, p_1, p_∞ 为相异的三个定点, p_x, p_y 是与 p_∞ 不同的任意两个点, 则使 $p_\infty, p_x, p_0, p_\infty, p_y, s$ 成为四点型六点的点 s, 称为关于 $[p_0, p_\infty, p_1]$ 的 p_x, p_y **的和**(图 5). 又使 $p_0, p_x, p_1, p_\infty, p_y, t$ 成为四点型六点的点 t, 称为关于 $[p_0, p_\infty, p_1]$ 的 p_x, p_y 的**积**(图 6). 对于给定的三点 p_0, p_1, p_∞, 定义了上述点的和、积的点列称为**数性点列** (point range of number system). 但是要由此点列除去 p_∞. 这样的相

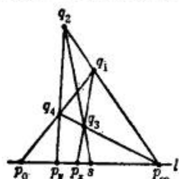


图 5

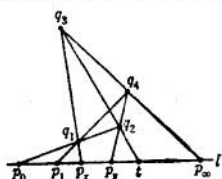


图 6

异三点的组 $[p_0, p_\infty, p_1]$ 称为 l 的**标架** (frame) 或**射影标架** (projective frame), p_0 称为**原点** (origin), p_1 称为**单位点** (unit point), p_∞ 称为**支撑点** (supporting point).

可知数性点列关于上述的和与积构成域†, 这个域不一定是可交换的, 这个域称为 **Staudt 代数** (Staudt algebra). 与它同构的抽象域称为 P^n 的**系数域** (coefficient field). 由标架 $[p_0, p_\infty, p_1]$ 确定的 Staudt 代数用 $\mathfrak{K}(p_0, p_\infty, p_1)$ 表示. 使 l 上相异三点 p_0, p_∞, p_1 不动的由 l 到 l 的射影映射只有域 $\mathfrak{K}(p_0, p_\infty, p_1)$ 的内自同构†. 设以 $\mathfrak{K}$ 为系数域的 P^n 的直线 l 上的标架为 $[p_0, p_\infty, p_1]$, 则同构 θ: $\mathfrak{K}(p_0, p_\infty, p_1) \to \mathfrak{K}$ 称为 l 的**坐标系** (coordinate system), 对于 l 上的点 p 来说, $\mathfrak{K}$ 的元素 $\xi = \theta(p)$ 称为 p 关于这个标架的**非齐次坐标**(inhomogeneous coordinate), 而且有 $x^0, x^1 \in \mathfrak{K}$, $x^1(x_0)^{-1} = \xi$ 的组 (x^0, x^1) 称为 p 的**齐次坐标** (homogeneous coordinate). 由于支撑点 p_∞ 已从 $\mathfrak{K}(p_0, p_\infty, p_1)$ 除掉, 因此 p_∞ 的齐次坐标确定为 $(0, x^1)$ (但是 $x^1 \neq 0$). 使 (x^0, x^1), (y^0, y^1) 是同一个点的齐次坐标的充分必要条件是, 存在 $\mathfrak{K}$ 的元素 $\lambda \neq 0$ 使 $y^\alpha = x^\alpha \lambda (\alpha = 0, 1)$.

其次, 以此为基础引入 P^n 的坐标. P^n 的一般位置的有序 $n+2$ 个点的组 $\mathfrak{F} = [a_0, a_1, \cdots, a_n, u]$ 称为 P^n 的**标架或射影标架**, $a_\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant n)$ 称为**基本点** (fundamental point), u 称为**单位点** (unit point). 对于 $A = a_{\alpha_0} \cup \cdots \cup a_{\alpha_r} (0 \leqslant \alpha_0 < \cdots < \alpha_r \leqslant n)$, 其余的基本点所张的空间用 A^* 表示, 对不包含于 A^* 的点 p; $p_A = A \cap (p \cup A^*)$ 称为 p 在 A 上的**分量** (component). $\mathfrak{F}_A = [a_{\alpha_0}, \cdots, a_{\alpha_r}, u_A]$ 是 A 的

标架，以下省略 u_A. 当指定同构 $\theta_{\alpha\beta}$: $\Re(a_\alpha, a_\beta) \to \Re(0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant n)$ 后，如果在某条件下，给出 $\{\theta_{\alpha\beta}\}$ 中的任何一个，那么全部就可以唯一确定. 这时，如果 $\theta_{\alpha\beta}$ 都用同一个 θ 来表示，则 $\{\mathfrak{F}, \theta\}$ 称为 P^n 的**射影坐标系** (projective coordinate system). 对于 P^n 的任意点 p, p 不被 $A_0 = a_1 \cup \cdots \cup a_n$ 包含时，设 p 在 $a_0 \cup a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 上的分量是 p_i, 令 $\xi^i = \theta(p_i)$, 则 $(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n)$ 称为 p 关于 $\mathfrak{F}$ 的**非齐次坐标** (inhomogeneous coordinates), $x^i(x^0)^{-1} = \xi^i$ 的 $(x^0, x^1, \cdots, x^n)$ 称为**齐次坐标** (homogeneous coordinates). 当 p 为 A_0 的点时，如果关于 $\mathfrak{F}_{A_0}$ 的 p 的齐次坐标为 $(x^1, \cdots, x^n)$, 则 $(0, x^1, \cdots, x^n)$ 定义为 p 关于 $\mathfrak{F}$ 的齐次坐标.

坐标为 $(x^0, x^1, \cdots, x^n)$ 的点可以简单地用 x 表示. 设已引入坐标的 P^n 的相异两个点为 x, y, 则点 z 在通过 x, y 的直线上的充分必要条件是 $z^\alpha = x^\alpha\lambda + y^\alpha\mu (0 \leqslant \alpha \leqslant n;\ \lambda, \mu \in \Re$ 为参数). 由此可知，一般地，由 P^n 的 $r+1$ 个无关点 $x_\beta (0 \leqslant \beta \leqslant r)$ 所决定的 P^r 上点 z 必须满足的条件是 $z^\alpha = \sum_{\beta=0}^{r} x_\beta^\alpha \lambda^\beta (0 \leqslant \alpha \leqslant n, \lambda^\beta \in \Re)$. 特别是，超平面的方程对于流动坐标 z^α 可表示为 $\sum_{\alpha=0}^{n} X_\alpha z^\alpha = 0 (X_\alpha \in \Re)$ 的形式，因而超平面由 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 的比唯一确定. $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 称为这个超平面的**超平面坐标** (hyperplane coordinates), 特别是 $n = 2$ 时，称为直线的**线坐标** (line coordinates), $n = 3$ 时，称为平面的**面坐标** (plane coordinates). 关于 P^n 内的 P^r 的坐标可以参照 Grassmann 坐标† (→ 坐标).

以上的 $\Re$ 不一定是可交换的.

【射影变换】 关于两个射影空间 P^n, $\bar{P}^n$ 之间的一一点对应 φ, 当且仅当 P^n 的三点 p_1, p_2, p_3 共线，$\varphi(p_i) (i = 1, 2, 3)$ 也共线时，φ 称为**直射映射** (collineation in general sense). 当 $\bar{P}^n = P_*^n$ 时，特别称为**对射变换** (correlation). $\bar{P}^n = P^n$ 时，称为**直射变换** (collineation). 设一个对射变换为 τ_0, 则任意的对射变换可由 τ_0 与直射变换的合成而得到. 又设 τ 为对射变换，它诱导的映射 $P_n^* \to P_n$ 也由 τ 表示时，$\tau \circ \tau$ 是直射变换，特别地当它是恒等变换时，τ 称为**对合的对射变换** (involutive correlation). 直射映射 φ: $P^n \to \bar{P}^n$, 对于 $0 \leqslant r \leqslant n-1$, 有 1) 诱导出 P^n 的 r 维子空间与 $\bar{P}^n$ 的 r 维子空间之间的一一空间对应，2) 对于 P^n, 如果 $P^r \supset P^s$, 则对于 $\bar{P}^n$ 也是 $\varphi P^r \supset \varphi P^s$.

其次，对于直射映射 φ: $P^n \to \bar{P}^n$, 假设某个空间 $P^N (n < N)$ 包含这两个空间(这种情形只要不是非 Desargues 几何常是可能的), φ 是射影映射时，称为**射影直射映射** (projective collineation), **射影直射变换**简称为**射影变换** (projective transformation). P^n 的直射变换的集合构成 P^n 的变换群†. 称它为 P^n 的**直射变换群** (group of collineations), 用 $\mathfrak{C}(P^n)$ 表示. 射影变换的全体构成 $\mathfrak{C}(P^n)$ 的正规子群†, 用 $\mathfrak{G}(P^n)$ 表示，称为 P^n 的**射影变换群** (projective transformation group). 使 P^n 的一个标架 $\mathfrak{F}$ 不动的射影变换全体构成子群 $\mathfrak{G}_0^{n+1}(\mathfrak{F})$, 它与 P^n 的系数域 $\Re$ 的内自同构群† $\mathfrak{J}(\Re)$ 同构. 又直射变换不一定是射影变换. 它是由射影变换与系数域的自同构组合而得到的. 即"若 $\Re$ 的自同构群†为 $\mathfrak{A}(\Re)$, 则 $\mathfrak{C}(P^n)/\mathfrak{G}(P^n) \cong \mathfrak{A}(\Re)/\mathfrak{J}(\Re)$". 因而直射变换为射影变换的充分必要条件是，系数域的自同构只是内自同构. 如果系数域为实数域，则直射变换一定是射影变换，但是当系数域是复数域时，直射变换就不一定是射影变换.

在这里，考虑下面的三个命题.

A) P^n 的系数域是可换的.

B) 使 P^n 的任意的标架移到其他任意标架的射影变换必存在，而且是唯一的.

C) 在 P^n 的同一平面上的两条直线上，若分别取相异三点 $p_i (i = 1, 2, 3)$, $q_i (i = 1, 2, 3)$, 那么三点 $(p_2 \cup q_3) \cap (p_3 \cup q_2)$, $(p_3 \cup q_1) \cap (p_1 \cup q_3)$, $(p_1 \cup q_2) \cap (p_2 \cup q_1)$ 是共线的.

这三个命题是互相等价的. 命题 B) 称为**射影几何的基本定理** (fundamental theorem of projective geometry), 命题 C) 称为 **Pappus 定理**. 如果系数域是实数域 (或复数域), 则以上命题都成立. 这些域上的射影空间称为**实**

(或复)射影空间 (real (complex) projective space). 在古典的研究中只处理这些问题.

如果系数域是交换的, 指定空间的某一条直线上的 Staudt 代数 $\mathfrak{R}(p_0, p_\infty, p_1)$ 的同构 θ_0: $\mathfrak{R}(p_0, p_\infty, p_1) \to \mathfrak{R}$, 由此, 从任意直线上的 Staudt 代数 $\mathfrak{R}(q_0, q_\infty, q_1)$ 到 $\mathfrak{R}$ 的同构 θ 是唯一确定的,使 $\theta^{-1}\circ\theta_0$ 为射影映射. 因而在所有直线上如果这样的同构被确定后, 则 P^n 的任意子空间上的齐次坐标, 只要给出它上面的标架就可以完全确定.

现在设系数域是特征不为 2 的交换域. 对于 P^n 上共线的四点 $p_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ (但 p_1, p_2, p_3 是相异的, 且 $p_4\neq p_1$), 我们考虑一个标架, 使得 p_1, p_2, p_3 分别为支撑点、原点、单位点, p_4 关于这个标架的非齐次坐标 λ 称为这四点的**非调和比** (anharmonic ratio) 或**交比** (cross ratio), 用 $[p_1, p_2; p_3, p_4]$ 表示. 关于一般的标架, 设 p_i 的非齐次坐标为 (x_i^0, x_i^1) $(i=1,2,3,4)$, 则 $\lambda=[p_1,p_2;p_3,p_4]=(x_1^0x_3^1-x_3^0x_1^1)(x_2^0x_4^1-x_4^0x_2^1)/(x_1^0x_4^1-x_4^0x_1^1)(x_2^0x_3^1-x_3^0x_2^1)$. 而且交换四点的顺序时, $\lambda=[p_2,p_1;p_4,p_3]=[p_3,p_4;p_1,p_2]=[p_4,p_3;p_2,p_1]$, $[p_1,p_2;p_4,p_3]=1/\lambda$, $[p_1,p_3;p_2,p_4]=1-\lambda$, $[p_1,p_3;p_4,p_2]=1/(1-\lambda)$, $[p_1,p_4;p_2,p_3]=(\lambda-1)/\lambda$, $[p_1,p_4;p_3,p_2]=\lambda/(\lambda-1)$. 一般地, 以上的六个值是不同的, 但是当 1) $\lambda=-1$, $1/2$, 2; 以及 2) $\lambda^2-\lambda+1=0$ 的两个根时为例外. 当 $\lambda=-1$ 时, 这四个点称为**调和点列** (harmonic range of points), 并且说 p_3, p_4 关于 p_1, p_2 互为**调和共轭点** (harmonic conjugates), 或 $p_1, p_2; p_3, p_4$ **互相调和分离** (separate harmonically). 当 $\lambda^2-\lambda+1=0$ 时,这四个点称为**等交比点列**(equianharmonic range of points). 此外,与此成对偶的, 也可以考虑超平面束的四个超平面的非调和比,更一般地,还可推广到基本图形的四元素上.非调和比对于射影变换是不变量.

射影变换关于 P^n 的齐次坐标 $x^\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant n)$ 用

$$(1)\quad \rho\bar{x}^\alpha=\sum_{\beta=0}^{n} t_\beta{}^\alpha x^\beta,\ \rho,\ t_\beta{}^\alpha\in\mathfrak{R},\ \det(t_\beta{}^\alpha)\neq 0$$

表示. 因而射影变换与正则矩阵 $T=(t_\beta{}^\alpha)$ 的等价关系† $T\sim\lambda T(\lambda\in\mathfrak{R})$ 下的等价类†是一一对应的. 所以 $\mathfrak{R}$ 可交换时, P^n 的射影变换群 $\mathfrak{G}(P^n)$ 与以 $\mathfrak{R}$ 为系数域的一般线性群† $GL(n+1,\mathfrak{R})$ 的中心 $\{\rho I\mid\rho\in\mathfrak{R}\}$ 的剩余群 $PGL(n+1,\mathfrak{R})$ 是同构的: $\mathfrak{G}(P^n)\cong PGL(n+1,\mathfrak{R})$.

现在将射影变换的定义推广, 即使 T 为非正则的,对于任意的方阵,可由 (1) 表示的变换也称为射影变换, 当 T 正则时称为**正则射影变换** (regular projective transformation), T 非正则时称为**非正则(或奇异)射影变换** (singular projective transformation), 如果 T 的秩†数为 $n+1-h$,则这个射影变换称为 ***h* 种** (h-th species) **奇异的**. 如果 (1) 是 h 种奇异的, 则 $n+1$ 个的超平面 $\sum_{\beta=0}^{n} t_\beta{}^\alpha x^\beta=0\,(0\leqslant\alpha\leqslant n)$ 共有一个 P^{h-1}. P^{h-1} 称为这个变换的**奇异子空间**(singular subspace). 对于奇异子空间上的点,变换的象是不确定的. h 种奇异射影变换, 无非是以奇异子空间为中心的 P^n 到某个 P^{n-h}上的射影与 P^{n-h} 的正则射影变换的合成.

其次, 关于 P^n 的某个标架, 如果点的坐标用 (x^α), 超平面坐标用 (X_α) 表示, 则线性变换

$$(2)\qquad \tau_*:\ \rho X_\alpha=\sum_{\beta=0}^{n} t^*_{\alpha\beta}x^\beta,\quad \rho,\ t^*_{\alpha\beta}\in\mathfrak{R}$$

是对射变换. 关于它也可以考虑 $T_*=(t^*_{\alpha\beta})$ 是非正则的情形. 它是对合的对射变换的条件为 $T_*=\pm{}^tT_*$. 特别是, $T_*=-{}^tT_*$ 的对合对射变换称为**零系** (null system). 对于零系, P^n 的任意一点必包含于它所对应的超平面内. 反之也成立. 另外, $T_*={}^tT_*$ 的对合对射变换称为**极系** (polar system). 对于极系, P^n 的点不一定包含于它所对应的超平面内. 包含在超平面内的所有点的集合,是下面介绍的**二次超曲面** (quadratic hypersurface).

【二次超曲面】 当 τ_* 为极系时, 被 $\tau_*(x)$ 包含的所有点 x 的集合是二次超曲面 $\mathfrak{Q}_2^{n-1}$, 它的方程式由

$$(3)\qquad \sum_{\alpha,\beta=0}^{n} t^*_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0$$

给出．对于这个τ_*，P^n的任意点x与超平面$\tau_*(x)$之间的关系称为关于 $\mathfrak{Q}_2^{n-1}$ 的**配极** (polarity)，$\tau_*(x)$称为x关于$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$的**极超平面** (polar)，x称为$\tau_*(x)$关于$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$的**极点或极** (pole)．如果通过P^n的点x的直线与$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$，$\tau_*(x)$的交点分别为$z_1, z_2; y$，则$x, y; z_1, z_2$构成调和点列．当点x在点y的极超平面上时，称x, y互为**共轭** (conjugate)，则$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$上的点与它本身是共轭的，反之也成立．又$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$上的点的极超平面称为在这个点的$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$的**切超平面**(tangent hyperplane)．

如果τ_*是正则、h种奇异的，则二次超曲面也是**正则、h 种奇异的**．如果τ_*是h种奇异的，则这个奇异子空间包含于$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$中．这样的奇异子空间的点称为$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$的**奇点** (singular point)．一种奇异的即只有一个奇点的 $\mathfrak{Q}_2^{n-1}$ 称为**锥面** (cone)．

其次，包含于$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$的子空间称为**母空间** (generating space)，直线称为**母线** (generating line)．当系数域是代数闭域†时，随n的奇偶，分别设$q = (1/2)(n-2)$，$(1/2)(n-1)$，则正则的$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$中必存在q维母空间．又$\mathfrak{Q}_2^2$恒是由两个母线族覆盖的直纹曲面†，而且$\mathfrak{Q}_2^{2k}$被两个k维母空间族所覆盖．

$\mathfrak{Q}_2^1$称为**二次曲线** (quadratic curve)．设$p_i(1 \leqslant i \leqslant 5)$是平面上占有一般位置的五个点，则通过这五个点的$\mathfrak{Q}_2^1$必唯一存在．又平面上六个点$p_i(1 \leqslant i \leqslant 6)$在一个$\mathfrak{Q}_2^1$上的充分必要条件是三点$(p_1 \cup p_2) \cap (p_4 \cup p_5)$，$(p_2 \cup p_3) \cap (p_5 \cup p_6)$，$(p_3 \cup p_4) \cap (p_6 \cup p_1)$共线．后一定理称为 **Pascal 定理**．与它对偶的定理称为 **Brianchon 定理**．

下面，对于P^n的两个$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$，$\bar{\mathfrak{Q}}_2^{n-1}$再考虑一个$\bar{\bar{\mathfrak{Q}}}_2^{n-1}$，$P^n$的任意一点$x$关于$\bar{\bar{\mathfrak{Q}}}_2^{n-1}$的极超平面如果属于$x$关于$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$，$\bar{\mathfrak{Q}}_2^{n-1}$的极超平面所确定的超平面束，则这样的所有$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$的集合称为以$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$，$\bar{\mathfrak{Q}}_2^{n-1}$为底的**二次超曲面束** (pencil of quadratic hypersurfaces)．它是通过$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$，$\bar{\mathfrak{Q}}_2^{n-1}$交的$\bar{\bar{\mathfrak{Q}}}_2^{n-1}$的集合．同样，当$n=2$时，称为**二次曲线束** (pencil of quadratic curves)，当$n=3$时称为**二次曲面束** (pencil of quadratic surfaces)．

另外，设P^3的二直线$l, \bar{l}$的 Plücker 坐标†为$l^{ij}, \bar{l}^{ij}(0 \leqslant i < j \leqslant 3)$，如果

(4) $$(l, \bar{l}) = l^{01}\bar{l}^{23} - l^{02}\bar{l}^{13} + l^{03}\bar{l}^{12} + \bar{l}^{01}l^{23} - \bar{l}^{02}l^{13} + \bar{l}^{03}l^{12},$$

则$(l, l) = 0$．现在如果把l^{ij}看作P^5的齐次坐标，则由$(l, l) = 0$确定的正则二次超曲面$\mathfrak{Q}_2^4$上的点与P^3的直线是一一对应的．$\mathfrak{Q}_2^4$上的点称为与它对应的P^3的直线的**象** (image)．二直线$l, \bar{l}$相交与$(l, \bar{l}) = 0$成立是等价的．这无非是$l, \bar{l}$的象关于$\mathfrak{Q}_2^4$共轭．因此，通过$l, \bar{l}$的象的直线成为$\mathfrak{Q}_2^4$的母线．因而P^3的线束的象是$\mathfrak{Q}_2^4$的母线．二次超曲面以及利用它的P^3的直线集合，特别是**线性线汇** (linear congruences) (具有两个独立参数的直线族)，**线性线丛** (linear complexes) (具有三个独立参数的直线族)等，都是射影几何及代数几何中有趣的内容．

对于以非交换域为系数域的情形，必须将以上的理论作大幅度的修改．

【射影几何与埃尔兰根纲领】 从 F. Klein 的埃尔兰根纲领†的观点来看，可以说射影几何学是研究在射影变换群下的不变性质的．由此可以看出射影几何与其他的古典几何学之间的关系．如果指定系数域是实数域的射影空间P^n的一个超平面Π_∞，则使它不变的所有射影变换的集合构成射影变换群的子群，而从属于它的几何学是仿射几何学†．又在这个Π_∞内再指定一个正则二次超曲面$\mathfrak{Q}_2^{n-2}$，从属于使它不变的子群的几何学称为相似几何学．Euclid 几何学是其中的一种．又指定P^n的某个正则二次超曲面$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$，从属于使它不变的子群的几何学，当该群作用于$\mathfrak{Q}_2^{n-1}$的内部或其上时，是非 Euclid 几何学†或保形几何学†．所以说射影几何是最广义的几何，正是在这种意义下来谈的．

【射影几何与模格】 格†(格序集)与射影几何有密切的联系．一般射影几何$\mathfrak{P}$的所有的各维子空间，关于包含关系构成完备的模格† $L(\mathfrak{P})$．如果$\mathfrak{P}$是有限维射影几何，则它是高度†为有限的不可约有补模格†．反之，如果L是具有最小元† Φ的模格，设Φ上素的†元素p，也就是原子元†的全体为P，在原子元上的素元素l

的全体为 Q，如果当 $p < l$ 时，$(p, l) \in \Gamma$，则 $\mathfrak{P}(L) = \{P, Q, \Gamma\}$ 是一般射影几何．如果 L 是高度为有限的不可约有补模格，则 $\mathfrak{P}(L)$ 是有限维射影几何．这时，$\mathfrak{P} \approx \mathfrak{P}(L(\mathfrak{P}))$，$L \approx L(\mathfrak{P}(L))$ 成立．也就是说，可以认为射影几何与不可约有补模格具有同样的数学结构．如果格 L 是 n 维射影几何，则它的对偶格†也是 n 维射影几何，这无非就是对偶原理．

【射影几何的解析表示】 对于任意的自然数 n，考虑任意的域 $\mathfrak{K}$（非可换也可以）上的 $n+1$ 维（在非交换域上是右或左）线性空间 $V^{n+1}(\mathfrak{K})$．这个线性子空间全体关于包含关系构成不可约有补模格 $P^n(\mathfrak{K})$，因而得到 n 维射影几何．称它为**右（或左）射影空间**（right (left) projective space）．特别是 $P^n(\mathfrak{K})$ 的点对应于 $V^{n+1}(\mathfrak{K})$ 的（右或左）一维线性子空间．反之，也可以看出，$\mathfrak{K}$ 上的 n 维射影几何与现在的 $P^n(\mathfrak{K})$ 同构．所以射影几何可以用自然数 n 与域 $\mathfrak{K}$ 进行完全的分类（但是当 $n=2$ 时的非 Desargues 几何例外）．换言之，有以下情形．对于 $\bar{P} = \{x = (x^0, x^1, \cdots, x^n) | \forall x^\alpha \in \mathfrak{K}, 0 \leqslant \alpha \leqslant n\}$（但 $(0, 0, \cdots, 0)$ 除外），当且仅当 $(y^\alpha) = (x^\alpha\lambda)(\lambda \in \mathfrak{K}, 0 \leqslant \alpha \leqslant n)$ 时定义 $x \sim y$．设 $\bar{P}$ 的这个等价关系 $\sim$ 的商集合为 P．把含有 x 的等价类表示为 $[x]$．其次，令 $l([x], [y]) = \{[z] | z^\alpha = x^\alpha\lambda + y^\alpha\mu, \forall\lambda, \mu \in \mathfrak{K}\}$，设 $Q = \{l([x],[y]) | [x],[y] \in P\}$，当把 P 的元素叫做点，Q 的元素叫做直线，直线上的点叫做含于直线时，它满足公理 I)—IV)，因而得知它是 n 维射影几何．当 $\mathfrak{K}$ 是拓扑域†时（例如 $\mathfrak{K}$ 是实数域，复数域，四元数域†时），则由 $\mathfrak{K}$ 的 $n+1$ 个直积 $\tilde{P}$ 以 $\tilde{P} - \{0\}$ 作为上面的等价关系分类所得到的商空间 $P = (\bar{P} - \{0\})/\sim$ 来定义 $P^n(\mathfrak{K})$ 的拓扑．特别当 $\mathfrak{K}$ 是实数域时，则 P^n 与把 $n+1$ 维 Euclid 空间 E^{n+1} 的 n 维超球面 S^n：$(x^0)^2 + \cdots + (x^n)^2 = 1$ 的直径两端看作同一点而得的商空间同胚，而且它是紧的．当 $\mathfrak{K}$ 是复数域，或四元数域的情形也是一样．又由于射影变换群 $\mathfrak{G}(P^n)$ 在 P^n 上是可迁的†，所以如果 $\mathfrak{K}$ 是拓扑域，则 P^n 可以看做是拓扑群 $\mathfrak{G}(P^n)$ 的齐性空间†．另外，P^n 内的 r 维子空间全体构成 Grassmann 流形†．又在代数几何学中，两个射影空间的直积†也是很重要的，称它为**双射影空间**（biprojective space）．

关于以上内容的详细讨论，[射影几何的构成] → 各文献，特别是与格论的关系 →[1]，公理体系与基本性质的关系 → [7]，关于其他 → [5]，[6]．

【参】 [1] G. Birkhoff, Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 第二版 1963; [2] W. V. D. Hodge-D. Pedoe, Methods of algebraic geometry I, Cambridge, 1947; [3] O. Schreier-E. Sperner, Projective geometry of n-dimensions, Chelsea, 1961; [4] O. Veblen-J. W. Young, Projective geometry I, II, Ginn, 1910—1938; [5] 秋月康夫-滝沢精二，射影幾何学，共立出版，1960; [6] 蟹谷乗養，射影幾何学，丸善，1950; [7] 寺阪英孝，射影幾何学の基礎，共立出版，1948; [8] E. Artin, Geometric algebra, Interscience, 1957; [9] S. Iyanaga（弥永昌吉）-K.Matsuzaka（松坂和夫）, Affine geometry and projective geometry, J. Fac.Sci. Univ. Toyko, **14**(1967), 171—196; [10] A. Seidenberg, Lectures in projective geometry, van Nostrand, 1962; [11] R. Hartshorne, Foundations of projective geometry, Benjamin, 1967.

仿射几何学 [英 affine geometry 法 géométrie affine 德 affine Geometrie 俄 аффинная геометрия 日 アフィン幾何学] 【仿射空间的构成】 仿射空间 A 的构成如下．对于实数域 $\boldsymbol{R}$ 或一般域† $\mathfrak{K}$ 上的向量空间† V 与集合 A，在任意的向量 $\boldsymbol{a} \in V$ 与任意的元素 $p \in A$ 之间定义和 $p + \boldsymbol{a} \in A$，设它们满足以下条件．

I) $p + \boldsymbol{o} = p$（$\boldsymbol{o}$ 是零向量）．

II) $(p + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{b} = p + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V)$，

III) 对于任意的元素 $q \in A$，存在唯一的向量 $\boldsymbol{a} \in V$ 使得 $q = p + \boldsymbol{a}$．

（条件 I) 可由 II)，III) 导出．）这时，A 称为**仿射空间**（affine space），V 称为 A 的**标准向量空间**（standard vector space），$\mathfrak{K}$ 称为 A 的**系数域**（coefficient field），A 的元素称为**点**．

根据定义，空间 A 可以看做加法群 V 的基本集合．也就是说，如果确定任意一点 $o \in A$，则使 $p = o + \boldsymbol{a}$ 的 A 的元素 p 与 V 的元素 $\boldsymbol{a}$ 有一一对应关系．这样的 $\boldsymbol{a}$ 称为以 o 为**起点**（initial point）的 p 的**位置向量**（position vector），

以 $\overrightarrow{op}$ 表示．对于 A 的 $r+1$ 个点 $p_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant r)$，当 r 个向量 $\boldsymbol{a}_i=\overrightarrow{p_0p_i}(1\leqslant i\leqslant r)$ 在 V 上线性无关时，这些点叫做**无关的** (independent)，否则叫做**相关的** (dependent)．点的无关性与起点 p_0 的选择无关．若 V 的维数是 n，则称 A 的**维数** (dimension) 也是 n，用 $\dim A=n$ 表示．维数一般用右上标表示．所谓 A 的维数是 n，这意味着 A 的无关点的最大个数是 $n+1$．

其次，对于 V^n 的向量子空间 V^k 与 A^n 的任意一点 p，$A_p^k=\{q\in A^n|q=p+\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\in V^k\}$ 称为 A^n 的**子空间** (subspace)，它是 k 维仿射空间．反之，如果 A^n 的子集是仿射空间，则必能表示为上面形式．A^1 称为**直线** (line)，A^2 称为**平面** (plane)，A^n 内的 A^{n-1} 称为**超平面** (hyperplane)，但只由一点构成的集合也看做子空间 A^0．对于 A^n 的两个子空间 A^r，A^s，它们的交集表示为 $A^r\cap A^s$，同时包含 A^r，A^s 的所有子空间的并集用 $A^r\cup A^s$ 表示，则 $A^r\cap A^s$ 是同时包含于 A^r，A^s 中的最高维的仿射空间，$A^r\cup A^s$ 是同时包含 A^r，A^s 的最低维的仿射空间．这时，含 A^n 的 $r+1$ 个点的 A^r 必定存在，如果它们无关则确定唯一的 A^r．如果 $A^r\cap A^s\neq\varnothing$（$\varnothing$ 表示空集），则有 $r+s=\dim(A^r\cup A^s)+\dim(A^r\cap A^s)$．这个定理称为仿射几何的**交的定理** (intersection theorem) 或**维数定理** (dimension theorem)．

其次，对于 A^n 的 $r+1$ 个无关点 $p_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant r)$，令 $p_{r+1}=p_0$．设 q_α 是 $p_\alpha\cup p_{\alpha+1}$ 上与 p_α，$p_{\alpha+1}$ 不同的任意点，λ^α 是满足 $\lambda^\alpha\cdot\overrightarrow{p_\alpha q_\alpha}=\overrightarrow{q_\alpha p_{\alpha+1}}$ 的 $\mathfrak{R}$ 的元素．这时"$q_0,\cdots,q_r$ 相关的充分必要条件是 $\lambda^0\lambda^1\cdots\lambda^r=(-1)^{r+1}$"，又"如果 $r\geqslant2$，$\sigma_\alpha=q_\alpha\cup p_{\alpha+2}\cup\cdots\cup p_{\alpha-1}(p_{-1}=p_r)$，则 $\sigma_0,\cdots,\sigma_r$ 有一公共点的充分必要条件是 $\lambda^0\lambda^1\cdots\lambda^r=1$"，前者称为 **Menelaus 定理**，后者称为 **Ceva 定理**．

再有，A^n 的各维子空间（$\varnothing$ 可看作 -1 维仿射空间、这里也包含它）的全体 $L(A)$，由包含关系构成格[†]．反之，对于格 L，对它的各个元素 α 定义了维数，且它的值为 $\{-1,0,\cdots,n\}$，当 $\alpha\prec\beta$ 时，则有 $\dim\alpha\leqslant\dim\beta$，如果交的定理成立，当 $n\geqslant3$ 时，则 L 与某域上的 n 维仿射空间的各维子空间所构成的格同构．

【仿射空间的平行概念】 对于 A^n 的子空间 A^r，A^s，当其中一个被另一个所包含，或 $A^r\cap A^s=\varnothing$ 而且 $\dim(A^r\cup A^s)\leqslant r+s$ 时，则两者称为**广义平行** (parallel in the wide sense)．其次，对于两个同维子空间 A^r，B^r，当两者重合，或 $A^r\cap B^r=\varnothing$ 而且 $\dim(A^r\cup B^r)=r+1$ 时，两者称为**狭义平行**或简称为**平行** (parallel)，用 $A^r/\!/B^r$ 表示．当 $r=s=1$ 时，广义、狭义两种平行的定义是一致的，当 $r>1$ 时，狭义平行也是广义平行．对于两组无关的 $r+1$ 个点构成的点组 (a_α)，$(b_\alpha)(0\leqslant\alpha\leqslant r)$，分别以 $\overrightarrow{a_0a_i}$，$\overrightarrow{b_0b_i}(1\leqslant i\leqslant r)$ 为基的向量空间用 V^r，W^r 表示，则 $A^r=a_0\cup\cdots\cup a_r$ 与 $B^r=b_0\cup\cdots\cup b_r$ 平行的充分必要条件是 $V^r=W^r$．又通过不包含于 A^n 的子空间 A^r 中的任意一点，平行于 A^r 的 r 维子空间只有一个．当 A^r，B^s 是广义平行时，在各空间内存在子空间 A^t，$B^t(t\geqslant1)$ 且 $A^t/\!/B^t$．如果取这样最大的 t，而且 A^r，B^s 中的一个不被另一个包含时，则有 $t=r+s+1-\dim(A^r\cup B^s)$．

其次，由于平行概念 $/\!/$ 满足等价关系[†] 的三个条件，由此可分为等价类．由平行于 r 维子空间 A^r 的 r 维子空间构成的等价类用 A_∞^{r-1} 表示，称它们为 $r-1$ 维**无穷远空间** (space at infinity)，属于 A_∞^{r-1} 的 A^r 称为通过 A_∞^{r-1} 或包含 A_∞^{r-1}，用 $A^r\supset A_\infty^{r-1}$ 表示．又，特别把 A_∞^0 叫做**无穷远点** (point at infinity)．相对于无穷远空间，也有时把原来的子空间称为**正常空间** (proper space)．对于无穷远空间必须加下标 ∞ 来表示．这些无穷远空间与正常空间之间的关系有以下两个条件．

IV）正常空间不包含于无穷远空间中．

V）如果 $A^r\supset A_\infty^{r-1}$，$B^s\supset B_\infty^{s-1}$，$A^r\supset B^s$，则有 $A_\infty^{r-1}\supset B_\infty^{s-1}$．

这时，A^n 只有唯一的 A_∞^{n-1}，称它为**无穷远超平面** (hyperplane at infinity)．A^n 的子空间的无穷远空间都含于无穷远超平面．现在暂用

$A^r \cup A_\infty^{r-1} = \bar{A}^r$ 表示. 子空间 A, B, 当一个被另一个所包含, 或者 $\bar{A} \cap \bar{B}$ 是无穷远空间时是广义平行的情形. 对于前面的交的定理考虑 $A^r \cap A^s = \varnothing$ 的情形. 因为当 A^r, A^s 是广义平行时, $\dim(\bar{A}^r \cap \bar{A}^s) = \dim(A_\infty^{r-1} \cap A_\infty^{s-1})$, 当 A^r, A^s 不是广义平行时, $\dim(\bar{A}^r \cap \bar{A}^s) = -1$, 所以对于添加了无穷远的子空间 $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\cdots$ 来说,与射影几何同样,不需要前提条件,交的定理始终成立. 在 A^n 上添加了这样的无穷远空间的空间称为 **Desargues 空间** (Desarguesian space). 这就是射影空间.

【仿射空间的坐标】 取 A^n 的任意一点 o, 标准向量空间 V^n 的任意的基 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, 则 A^n 的任意点 p 可以唯一地表示为

$$p = o + \sum_{i=1}^{n} x^i \boldsymbol{e}_i. \tag{1}$$

这个 $\mathfrak{F} = (o; \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 称为 A^n 的**仿射标架** (affine frame)或简称为**标架**. 这时 o 称为**原点** (origin), $\boldsymbol{e}_i$ 称为第 i **单位向量** (unit vector). 又, 把 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 看做点 p 的函数, 称它为关于标架 $\mathfrak{F}$ 的 A^n 的**仿射坐标系** (affine coordinate system). 对于点 p 的 $(x^1, x^2, \cdots, x^n)$ 的值称为点 p 关于 $\mathfrak{F}$ 的**仿射坐标** (affine coordinates), x^i 称为**第 i 仿射坐标**. 此后, 如果设 $\mathfrak{K}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$, 复数域 $\boldsymbol{C}$, 或一般的拓扑域†, 则定义 A^n 的拓扑与 $\mathfrak{K}$ 上的 n 维向量空间†是同胚†的. 以下除特别声明以外, 坐标指的就是仿射坐标. 设 $a_i = o + \boldsymbol{e}_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 有时也称 $(o; a_1, \cdots, a_n)$ 为仿射标架. 这时, 设 $l_i = o \cup a_i$, $\pi_i = o \cup a_1 \cup \cdots \cup a_{i-1} \cup a_{i+1} \cup \cdots \cup a_n$, 则 a_i, l_i, π_i 分别称为仿射标架的第 i **单位点** (unit point), 第 i **坐标轴** (coordinate axis), 第 i **坐标面** (coordinate plane).

对于非广义平行的子空间 A^r, $A^s (r, s > 0, r + s = n)$, 通过 A^n 的一点 p 且平行于 A^r 的子空间用 $A^r(p)$ 表示, 如果对于 $A^r(p) \cap A^s = q$, 映射 φ: $A^n \to A^s (\varphi(p) = q)$ 叫做从 A^r 方向到 A^s 上的**平行射影** (parallel projection), 则 p 的第 i 坐标 x^i, 是把 p 从 π_i 方向到 l_i 上平行射影的点为 p_i 时有 $\overrightarrow{op_i} = x^i \cdot \overrightarrow{oa_i}$ 的 $\mathfrak{K}$ 的元素. 这样的坐标称为**平行坐标** (parallel coordinates) 或 **Descartes 坐标** (Cartesian coordinates).

其次, 设 A^n 的子空间 A^r 的 $r+1$ 个无关的点为 $b_0, b_1, \cdots, b_r$, 如果关于 A^r 的点 p 的重心坐标†为 $\lambda^0, \lambda^1, \cdots, \lambda^r$ (这里 $\sum_{\alpha=0}^{r} \lambda^\alpha = 1$), 则 $\overrightarrow{b_0p} = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \cdot \overrightarrow{b_0b_i}$ 或 $\overrightarrow{op} = \sum_{\alpha=0}^{r} \lambda^\alpha \cdot \overrightarrow{ob_\alpha}$ (这里 o 是 A^n 的一点). A^r 的一点与这样的 $r+1$ 个 $\mathfrak{K}$ 的元素 $\lambda^\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant r, \sum_{\alpha=0}^{r} \lambda^\alpha = 1)$ 的组是一一对应的. 如果 $b_\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant r)$ 不是无关的, 则这个对应虽不是一一对应, 但在这种情形下, 也有时把 λ^α 称为重心坐标. 重心坐标是 $\lambda^0 = \lambda^1 = \cdots = \lambda^r = (r+1)^{-1}$ 的点称为 b_0, b_1, $\cdots$, b_r 的**重心** (bary-centre), 用 $g(b_0, \cdots, b_r)$ 表示. 特别是, 两点 b_0, b_1 的重心称为它的**中点** (middle point). 有重心坐标 $\lambda^0, \cdots, \lambda^r$ 的点也称为在 $b_0, \cdots, b_r$ 上附以**重量** (weight) $\lambda^0, \cdots, \lambda^r$ 的重心. 一些点组的重心与这些点的顺序无关. 如果把 $B = \{b_0, \cdots, b_r\}$ 分为任意的两组时, 设两个组的重心分别为 g_1, g_2, 则 $g_1 \cup g_2$ 通过 B 的重心. 其次, $A^r = b_0 \cup \cdots \cup b_r$ 的任意的一点 p 关于 $b_0, \cdots, b_r$ 的重心坐标 $\lambda^\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant r, \sum \lambda^\alpha = 1)$, 如上所述, 满足 $\overrightarrow{op} = \sum \lambda^\alpha \cdot \overrightarrow{ob_\alpha}$. 现在, 设关于以 o 为原点的 A^n 的仿射标架的点 p 和 b_α 的坐标分别为 y^i, $x_\alpha^i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则有 $y^i = \sum \lambda^\alpha x_\alpha^i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 这是点 p 在 A^r 上的充分必要条件. 它称为以 λ^α 为参数, A^r 的**参数表示** (parametric representation). 所以 $r = n - 1$ 即超平面 π 的方程可表示为以 y^i 为流动坐标的一次式 $y^1 x_1 + \cdots + y^n x_n = x_0$ (这里 $x_\alpha \in \mathfrak{K}$).

【有序域上的仿射空间】 若系数域 $\mathfrak{K}$ 是实数域 $\boldsymbol{R}$ 或一般的有序域†时, 可以引入以下的概念.

对于 A^n 的一个超平面 π, 取以它为第 n 坐标面的仿射标架. 设它的坐标是 $(x^1, \cdots, x^n)$, 则 π 的方程为 $x^n = 0$. 如果 A_+^n, A_-^n 分别是第 n 坐标为正、负的点集, 则 A_+^n, A_-^n 分别称为由

π 所分成的 A^n 的**半空间**(half space). 这个半空间与 π 的并集称为**闭半空间** (closed half space). A^n 的点 p 不在 π 上时含 p 的半空间称为对于 π 的 p **侧** (side), 特别是当 $n=1$ 时, 设直线 l 上的两点为 p, q, 对于 p 的 q 的闭侧称为从 p 向 q 的**半直线**或**射线** (half line, ray), 从 p 向 q 的半直线与从 q 向 p 的半直线的共同部分称为连结 p, q 的**线段**(segment), 用 $\overline{pq}$ 表示. 显然, $\overline{pq}=\overline{qp}$.

对于 A^n 的子集, 连结它的任意两点的线段也包含在这个子集内时, 称这个子集为**凸集** (convex set). 任何维的半空间都是凸集. 对于凸集的族 $\{C_\tau\}$, $\bigcap_\tau C_\tau$ 也是凸的. 所以, 对于 A^n 的任意子集 D, 存在含有 D 的最小凸集. 称它为 D 的**凸胞** (convex closure). A^n 的有限个点集 $P=\{p_0, \cdots, p_k\}$ 的凸包 $C(P)$ 称为**凸胞腔** (convex cell), $\dim(p_0\cup\cdots\cup p_k)$ 称为这个凸胞腔的**维** (dimension). 特别地, 当 $p_0, \cdots, p_k$ 是无关时 $C(P)$ 称为以 $p_0, \cdots, p_k$ 为**顶点** (vertex) 的 k 维**单形** (simplex). 以相异的两点 p, q 为顶点的一维单形是线段 $\overline{pq}$. 顶点 p, q 也称为它的**端** (end). 一个点看做零维单形. 二、三维单形分别称为**三角形** (triangle)、**四面体**(tetrahedron). 以 $p_0, \cdots, p_k$ 为顶点的 k 维单形, 是关于顶点的重心坐标 $\lambda^\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant k, \sum\lambda^\alpha=1)$ 满足 $\lambda^\alpha\geqslant 0$ 的点集. 或者是设 $A^k=p_0\cup\cdots\cup p_k$ 对于 $\pi_\alpha=p_0\cup\cdots\cup p_{\alpha-1}\cup p_{\alpha+1}\cup\cdots\cup p_k$ 在 p_α 侧为 A_α^k, 闭侧为 $\overline{A}_\alpha^k$, 则这个单形为 $\bigcap_{\alpha=0}^{k}\overline{A}_\alpha^k$. 且 $\bigcap_{\alpha=0}^{k}A_\alpha^k$ 称为**开单形** (open simplex). 对于 A^n, 可以引入以开 n 维单形的集合为开集†的基†的拓扑†. 它与 A^n 已经定义的拓扑是同胚的. 对这个拓扑, A^n 是 Hausdorff 空间†, 而且上面所说的"开""闭"集是这个拓扑的开集, 闭集†.

A^n 的子集被某一个单形所包含时, 称为**有界的** (bounded). 从有限个闭半空间取有限个的交以及有限个的并, 在这样得到的集合中, 有界的闭集称为**多面体** (polyhedron). 凸多面体的点, 由它的坐标满足几个一次不等式为特征. 其中对于 $k^i, h^i\in\Re$, 关于某坐标系满足 $h^i\leqslant x^i\leqslant k^i\,(1\leqslant i\leqslant n)$ 的坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的点集称为**超平行体** (parallelotope), 它的内部†称为**开超平行体**, 单形是多面体的一种, 而多面体可以剖分为单形. 又, 可以用单形定义多面体†.

其次, 设凸胞腔 $C(P)$ 的维数是 m, 如果取 P 的适当的子集 Q, 则可使 $C(Q)$ 的维数是 $m-1$, 且 $C(Q)$ 属于 $C(P)$ 的边界†, 这样的 $C(Q)$ 称为 $C(P)$ 的**面** (face), 用 $C(P)\succ C(Q)$ 表示. 如果 $C(P)\succ C(P_1)\succ\cdots\succ C(P_s)$, 则 $C(P_s)$ 也称为 $C(P)$ 的 $m-s$ 维面. 零维面称为**顶点** (vertex), 一维面也称为**棱** (edge). 当 $C(P)\succ C(Q)$, $P=\{p_0, \cdots, p_k\}$, $Q=\{p_{i_0}, \cdots, p_{i_{k-1}}\}$ 时, 则 $F=p_{i_0}\cup\cdots\cup p_{i_{k-1}}$ 是 $E=p_0\cup\cdots\cup p_k$ 的超平面, 且 $C(P)$ 在 E 被 F 分开的一侧. 所以, $C(P)$ 如果具有 d 个 $m-1$ 维面, 则 $C(P)$ 可以表示为 E 中的 d 个 m 维半空间的交. 也就是说, 凸胞腔就是多面体.

【仿射变换】 所谓从系数域 $\Re$ (可以不是有序域)上的 A^n 到同一个 $\Re$ 上的 A^m 的映射 φ: $A^n\to A^m$ 是**仿射映射** (affine mapping), 就是存在标准向量空间的线性映射 $\bar\varphi$: $V^n\to V^m$, 且对于一切的 $p\in A^n$, $\boldsymbol{x}\in V^n$, 使 $\varphi(p+\boldsymbol{x})=\varphi(p)+\bar\varphi(\boldsymbol{x})$ 成立. 再有, 当 $A^n=A^m$ 且 φ 是双射时, 称 φ 为 A^n 的**仿射变换** (affine transformation, affinity). 仿射变换是: 1) 固定一点 $o\in A^n$, 用向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V^n$ 与 V^n 的线性变换 f 可唯一地表示为

$$(2)\qquad \varphi(o+\boldsymbol{x})=o+\boldsymbol{\alpha}+f(\boldsymbol{x})$$

的双射. 或者 2) φ: $A^n\to A^n$ 为双射, 且有 $\overrightarrow{ab}=\lambda\cdot\overrightarrow{pq}\,(\lambda\in\Re)$ 时, 则 $\overrightarrow{\varphi(a)\varphi(b)}=\lambda\cdot\overrightarrow{\varphi(p)\varphi(q)}$ 成立. 在 $\Re$ 的特征† $\neq 2$ 的情形下, 3) 直线映射为直线, 且保持平行的线段比不变的双射. 即使 f 不是正则的情形, 也称 φ 为仿射变换, 但在这种情形, 把正则的特别称为**固有仿射变换** (proper affinity). 以下只考虑正则的情形.

A^n 的仿射变换的集合 $\mathfrak{A}(A^n)$ 构成**群**, 称

为**仿射变换群**(affine transformation group). 对于仿射变换 φ, 当 f 是恒等变换时, 称它为**平行移动**(parallel translation),平行移动全体构成 $\mathfrak{A}(A^n)$ 的正规子群称为**平行移动群**(parallel translation group), 以 $\mathfrak{B}(A^n)$ 表示. 平行移动群与 V^n 的加法群是同构的. 线性空间的加法群(向量群)单可迁的†作用的空间是仿射空间. 且有 $\mathfrak{A}(A^n)/\mathfrak{B}(A^n)\cong GL(n,\mathfrak{R})$(右边表示一般线性群†). 使 A^n 的一点 o 不变的仿射变换的集合(点 o 的稳定群†)构成 $\mathfrak{A}(A^n)$ 的子群 $\mathfrak{C}(A^n)$,它与 $GL(n,\mathfrak{R})$同构. 对于以 o 为原点的 A^n 的仿射标架 $\mathfrak{F}=(o;\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$, 如果 $\boldsymbol{a}=\sum a^i\boldsymbol{e}_i$, $f(\boldsymbol{e}_i)=\sum a_i^j\boldsymbol{e}_j$, 则由(2)给出的$\varphi\in\mathfrak{A}(A^n)$ 关于 $\mathfrak{F}$ 可以表示为下式:

$$(3)\quad \bar{x}^i=a^i+\sum_{k=1}^n a_k^i x^k,\ \det(a_j^i)\neq 0,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

反之,由(3)给出的变换是仿射变换. $\mathfrak{B}(A^n)$, $\mathfrak{C}(A^n)$的元素关于 $\mathfrak{F}$ 可分别表示为下面的形式

$$(4)\qquad \bar{x}^i=x^i+a^i,\qquad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$(5)\quad \bar{x}^i=\sum_{k=1}^n a_k^i x^k,\ \det(a_j^i)\neq 0,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

由此得知, $\mathfrak{A}(A^n)$ 可表示为 $\mathfrak{B}(A^n)$ 与 $\mathfrak{C}(A^n)$ 的半直积†. 特别是, 对于 $a\in\mathfrak{R}(a\neq 0)$, 由 $\bar{x}^i=ax^i(1\leqslant i\leqslant n)$ 表示的仿射变换, 称为以原点 o 为中心的**相似变换**(similarity transformation).

如果从 F. Klein 的观点来说, 则仿射几何学是研究在仿射变换下不变性质的几何学. 上述平行概念, 重心等都是不变的. 如果说在仿射变换下可以重合的图形是**仿射叠合**(affinely congruent)的, 则对于固定的 k, 所有的 k 维单形都是仿射叠合的. 现在固定 A^n 的一个仿射标架 $\mathfrak{F}$. 设 A^n 的 $n+1$ 个点 $p_\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant n)$ 的坐标为 x_α^i, 考虑下面的量.

$$(6)\quad V(p_0,\cdots,p_n)=\frac{1}{n!}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix},$$

称为以 $p_0,\cdots,p_n$ 为顶点的 n 维单形的关于标架 $\mathfrak{F}$ 的**体积**(volume). 它对于由(3)给出的正则仿射变换 φ, 有 $\bar{V}=\det(a_j^i)V$. 因此, 两个 n 维单形体积之比与坐标系的选择无关. 并且在正则仿射变换下是不变的. 特别是, 如果一维单形的体积称为这个线段的**长度**, 则平行线段的长度比在仿射变换下是不变的.

特别是 $\det(a_j^i)=1$ 的仿射变换称为**等积仿射变换**(equivalent affinity). 等积仿射变换全体的集合构成仿射变换群 $\mathfrak{A}(A^n)$ 的子群. 从属于它的几何学称为**狭义的仿射几何学**.例如, 体积是狭义的仿射不变量.

【与射影几何的关系】 对于系数域 $\mathfrak{R}$ 上的射影空间 P^n(→射影几何学), 指定一个超平面 Π_∞, 使它不变的射影变换的集合构成射影变换群†的子群. 它与仿射变换群同构. 实际上, 取 P^n 的射影标架† $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ 使 $a_1,\cdots,a_n$ 是 Π_∞ 上的点时, 则关于这个射影标架使 Π_∞ 不变的射影变换若用非齐次射影坐标时则与(3)有同样形式. 从 P^n 中除去 Π_∞ 余下的点集 A^n 是仿射空间, 而 Π_∞ 是它的无穷远超平面. P^n 的相异的二直线在无穷远超平面上相交时, 则在 A^n 中是平行的. 所以 A^n 的直线 l 与 Π_∞ 的交点的齐次射影坐标取为 $(0,l^1,\cdots,l^n)$ 时, 则$(l^1,\cdots,l^n)$称为 l 的**方向比**(direction ratio). 使 Π_∞ 的各点不变的射影变换是平行移动. 在射影几何中成立的对偶原理在仿射几何中不成立. 另一方面, 关于二次超曲面的无穷远超平面的极†点称为这个二次超曲面的**中心**(centre). 正则二次超曲面, 由于它的中心在寻常点或无穷远点而分别称为**有心**(central)或**无心**(noncentral). 一般来说, 仿射空间的二次超曲面可根据它与无穷远超平面的相互关系进行各种分类(→圆锥曲线, 二次曲面).

【参】 [1] O. Schreier-E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra I, II, Teubner, 1931, 1935; [2] E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra I, II, Vandenhoeck & Ruprecht, 1948; [3] 中村幸四郎,解析幾何学,岩波全書, 1942; [4] E. Artin, Geometric algebra, Interscience, 1957; [5] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Springer, 第五版 1923(英译本: Space, time, matter, Dover, 1952); [6] S. Iyanaga(弥永昌吉)-K. Matsuzaka(松坂和夫), Affine geometry and projective geometry, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo,14 (1967), 171—196.

非 Euclid 几何学 [英 non-Euclidean geometry 法 géométrie non-euclidienne 德 nicht-Euklidische Geometrie 俄 неевклидова геометрия 日 非ユークリッド幾何学] 【历史考察】 关于 Euclid《原本》的第五公设也就是平行公理†，从最初人们对它的正确性就持有疑问，并且成为很多批判的对象(→ Euclid 几何学)．十八世纪开始，G. Saccheri 曾尝试用反证法证明这个公理能由其他公理导出，以假定这个公理不成立为前提，而得到与它不同的种种结果．他自己认为这是导出了矛盾，其实，这些结果虽然在习惯上是奇妙的，但在逻辑上并无矛盾．他的研究被看作是**非 Euclid 几何学**的先驱．

十九世纪初叶，Н. И. Лобачевский, J. Bolyai 大胆地否定了平行公理，提出替代它的公理，而建立了一种几何学．称为**双曲几何学**(hyperbolic geometry)，也称为 **Лобачевский 的非 Euclid 几何学** (Lobačevskiĭ's non-Euclidean geometry)．C. F. Gauss 虽然也具有同样的想法，但当时由于受了风靡一时的 Kant 哲学的影响，没能发表出来．B. Riemann 发展了 Лобачевский 的思想，而建立了与 Euclid 几何学和双曲几何学都不同的所谓**椭圆几何学** (elliptic geometry)．也称为 **Riemann 的非 Euclid 几何学** (Riemann's non-Euclidean geometry)．这些非 Euclid 几何学成立的空间称为**非 Euclid 空间** (non-Euclidean space)．相对这些几何学来说，原有的 Euclid 几何学(包括相似的理论)，有时也称为**抛物几何学** (parabolic geometry)．

从十九世纪末到二十世纪初，A. Cayley, F. Klein, H. Poincaré 等，在 Euclid 几何学中作出非 Euclid 几何学的模型．还有 E. Beltrami 用微分几何学的理论作出了非 Euclid 几何学的模型．由此，证明了只要 Euclid 几何学没有矛盾，那末非 Euclid 几何学也是没有矛盾的体系．D. Hilbert 给出了 Euclid 几何学完备的公理体系，证明了平行公理对其他公理是独立的，因而明确了非 Euclid 几何学成立的逻辑基础．此外，A. Einstein 根据相对论†证明了把我们所在的时空的性质看作非 Euclid 的比看作 Euclid 的更为合理．非 Euclid空间与 Euclid 空间一起作为基本模型对于空间型†的问题及对称空间†的理论都是非常有用的．

【公理论的考察】 在 Hilbert 的几何基础中，平面 Euclid 几何学的公理是由结合、顺序、合同、平行、连续五组构成(→ 几何基础)．其中，平行公理是叙述为“在平面上，通过直线外的一点与此直线不相交的直线唯一存在”．

对此，在双曲几何学中，替代这个公理的是“在平面上，通过直线外一点，与此直线不相交的直线至少存在两条”，而其他四组公理是相同的．在这种情形下，在平面上通过直线 l 外的点 C，而与 l **平行** (parallel) 的直线正好存在两条，设 XY, $X'Y'$ 为这两条直线，则有以下特性(图 1)．即通过点 C 在 $\angle X'CY$ 内的直线

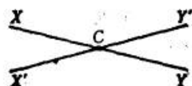


图 1

必与 l 相交，但二直线 XY, $X'Y'$ 及在 $\angle XCX'$ 内的直线都与 l 不相交．Euclid 几何学可看作是二直线 XY, $X'Y'$ 趋于一致时的极限情形．

在椭圆几何学中，对应于平行公理的是“在平面上，通过直线外一点，与此直线不相交的直线不存在”．在这种情形下，直线是封闭的，顺序公理不成立．也就是说，在 Euclid 几何学中，对于直线上不同的三点，可以确定其中一点在另外两个点之间，但在椭圆几何学中，对于直线上不同的四点可以确定两两相互分割，与此相应，和前面类似的顺序公理成立．

此外，三角形的内角和，在双曲几何学中，小于二直角，在椭圆几何学中，大于二直角．

【射影几何学的考察】 在 n 维实射影空间† P^n 中，取射影坐标†，考虑 P^n 内的二次曲面

$$Q:\ ax_0^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=0,\quad a\neq 0$$

(→射影几何学,坐标). 设使 Q 变为本身的 P^n 的射影变换[†]全体所构成的群为 G,称 Q 为**绝对形**(absolute),G 称为**合同变换群** (congruent transformation group). 当 $a<0$ 时, Q 是实二次曲面,如果 Q 的内部点全体为 H^n,则群 G 对于 H^n 的作用是可迁的[†]. 这个体系 $\{G, H^n\}$ 是双曲几何学, n 维**双曲空间** (hyperbolic space) H^n 与 n 维开胞腔是同胚的. H^n 的点称为**寻常点** (ordinary point), Q 上的点称为**无穷远点** (point at infinity), Q 的外部的点称为**超无穷远点** (ultrainfinite point). 所谓 H^n 的二直线平行,意味着它们在绝对形 Q 上相交. 其次,当 $a>0$ 时,绝对形 Q 是虚二次曲面,群 G 对 P^n 的作用是可迁的. 这个体系 $\{G, P^n\}$ 是椭圆几何学. n 维**椭圆空间** (elliptic space) P^n 与 n 维实射影空间同胚,因而是紧的. 又,在椭圆几何学中,同一平面上的不同的二直线必交于一点. 将非 Euclid 几何学作如上的表示时,称它为 **Klein 模型** (Klein's model).

对于 Klein 模型,设连结 A, B 两点的直线与绝对形 Q 相交的两点(实或虚)为 I, J(图 2),

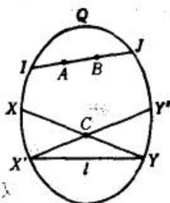


图 2

如果这四点的非调和比[†]为 (A, B, I, J),则两点 A, B 的**非 Euclid 距离** (non-Euclidean distance) ρ 可用

$$\rho=(\sqrt{a}/2i)\log(A, B, I, J),\quad i=\sqrt{-1}$$

给出. 又,二直线 l, g 交于点 D 时,在含有 l, g 的二维平面内,设从 D 到绝对形所引的二切线(虚)为 u, v,如果这四条直线的非调和比为 (l, g, u, v),则二直线 l, g 所成的**非 Euclid 角** (non-Euclidean angle) θ 可用

$$\theta=(1/2i)\log(l, g, u, v),\quad i=\sqrt{-1}$$

给出.

设一点 $O\in P^n$ 关于绝对形 Q 的极超平面为 α,把与 α 重合的二超平面看做二次曲面,设它为 S_0. 属于含有 Q 与 S_0 的二次曲面束[†]的 P^n 的二次曲面 S 称为以 O 为中心的**非 Euclid 超球面** (non-Euclidean hypersphere). 特别是在双曲几何学中,根据中心 O 是寻常点、无穷远点、超无穷远点,分别称它们为**正常超球面** (proper hypersphere)、**极限超球面** (limiting hypersphere)、**等距超曲面** (equidistant hypersurface).

此外,在 Klein 的模型中,作为 $a\to\infty$ 的极限情形,可以得到抛物几何学.

【保形几何学的考察】 在 n 维保形空间[†] S^n 中,若取适当的 $n+2$ 超球面坐标[†],则 S^n 可表示为 $n+1$ 维实射影空间 P^{n+1} 内的二次曲面

$$S^n:\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2x_0x_\infty=0,$$

P^{n+1} 上的一般的点表示 S^n 的超球面[†]. 也就是说,点 $X\in P^{n+1}$ 表示的超球面是由关于 S^n 的点 X 的极超平面与 S^n 的交所形成的(→保形几何学,坐标). 设使一点 $J\in P^{n+1}$ 不变的 S^n 的 Möbius 变换[†]的全体所成的群为 $\bar{G}$,点 J 表示的超球面为 Q. 当点 J 在 S^n 的外部时, Q 是实超球面,且空间 S^n 可分为 Q 及两个开胞腔 H^n, H_*^n. 若在群 $\bar{G}$ 的变换中使 H^n 与 H_*^n 为非可换的变换全体构成 G,则它是 $\bar{G}$ 的指数[†]为 2 的子群. 这时,序对 $\{G, H^n\}$, $\{G, H_*^n\}$ 都是双曲几何学. 当点 J 在 S^n 上时, Q 是与点 J 一致的点超球面. 从 S^n 除去一点 J 的空间 E^n 与开胞腔是同胚的,而序对 $\{\bar{G}, E^n\}$ 是抛物几何学. 再有,当点 J 在 S^n 的内部时, Q 是虚超球面, $\bar{G}$ 与 $n+1$ 阶正交群[†] $O(n+1)$ 是同构的. 这个序对 $\{\bar{G}, S^n\}$ 称为**球面几何学** (spherical geometry). S^n 称为 n 维**球面空间** (spherical space). 这时,通过点 J 的 P^{n+1} 的直线与球面空间 S^n 相交的两点可以叫做**对蹠点** (antipodal point). 把对蹠点的两点同等看待而得到的 S^n 的商空间 P^n,与 n 维实射影空间同胚. 若设使变换群 $\bar{G}$ 在 P^n 上的作用是有效的群为 G,则 G 是 $\bar{G}$ 除以阶数为 2 的循环群 $\mathbf{Z}_2$ 后的剩余群. 这个序对 $\{G, P^n\}$ 是椭圆几何学. 把各种几何学作如上的表

示时，称为 **Poincaré 模型** (Poincaré's model). 这是在 $n=2$ 的情形下，联系保形函数的研究所导出的结果.

在 Poincaré 的模型中，所谓直线是与 Q 正交的圆. 但在球面几何学中，直线是普通的**大圆** (great circle)，不相同的两个大圆在同一个二维球面上时，它们必交于对蹠点的两点. 又在 Poincaré 的模型中，两点 A, B 的距离可用圆上四点 A, B, I, J 的非调和比，与前面同样来定义(图 3). 再有，作为在保形空间已经定义了角(→ 复数 [Poincaré 度量]).

【微分几何学的考察】 所谓 n 维常曲率空间† M，是关于适当的局部坐标，它的线素 ds 可由

$$ds^2=\frac{dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2}{(1+(K/4)(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2))^2}$$

给出的 Riemann 流形† (→ Riemann 流形). 这里常数 K 称为**曲率**†. 对于曲率 K 为正、0、负的情形，在局部上可以把 M 分别看作与椭圆空间、Euclid 空间和双曲空间是相同的. 这时，直线是 M 的测地线†，非 Euclid 距离和非 Euclid 角作为 Riemann 流形已经定义了. 特别是，当 $n=2$ 时，正的常曲率空间可以作为三维 Euclid 空间内的球面，负的常曲率空间是曳物线†绕渐近线旋转而得到的**伪球面** (pseudosphere) (图 4).

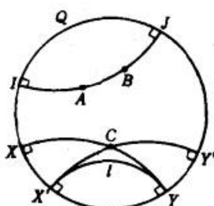


图 3

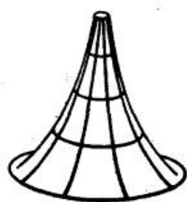


图 4

完备†的 n 维常曲率空间 ($n\geqslant 2$) 称为**空间型** (space form). 单连通的空间型是球面空间、Euclid 空间、双曲空间之一. 它们对应于其曲率成为一般连通的空间型的通用覆盖流形†，它的覆盖变换群是合同变换群的不连续子群.

还有，Euclid 空间、非 Euclid 空间或球面空间，由于它的合同变换群有可迁作用，所以都可表示为齐性空间†，而且也是对称 Riemann 空间†.

【参】 [1] D. M. Y. Sommerville, The elements of non-Euclidean geometry, Bell, London, 1914; [2] F. Klein, Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie, Springer, 1928; [3] E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1928, 第二版 1946; [4] 西内貞吉，非ゆうくりつど幾何学，岩波講座数学，1935; [5] H. S. M. Coxeter, Non-Euclidean geometry, Univ. of Toronto Press, 第五版 1965; [6] F. Engel-P. Stäckel, Urkunden zur Geschichte der nicht-Euklidischen Geometrie I, II, Teubner, 1898—1913.

画法几何学 [英 descriptive geometry 法 géométrie descriptive 德 darstellende Geometrie 俄 начертательная геометрия 日 画法幾何学]

由于实用科学的要求，研究在适当的规则之下把三维空间的图形表现在平面上的方法，称为**画法几何学**. 它大约有七种，主要的是前五种.

1) **正投影法** (orthogonal projection). 设正交于直线 XY 的二投影面为 π_1, π_2，空间图形 $\mathfrak{F}$ 在各面上的正投影为 F 和 F'，当投影面绕 XY 旋转展成 180° 的位置时，把投影表现在这个平面上的方法称为正投影法. **水平投影**称为**俯视图** (plan) F，**直立投影**称为**主视图** (elevation) F'. F 与 F' 的对应点连线称为**投影对应线** (projection)，它垂直于**基线** (ground line) XY. 一般的平面 E 可用它与 π_1, π_2 的交线，即**水平迹** (horizontal trace) e 以及**垂直迹** (vertical trace) e' 的直线对来表示，只限于 E 不平行于 XY 时，两迹交于 XY 上. 根据需要，取与 π_1, π_2 双方都垂直的平面 π_3 上的正投影，称为**侧视图** (side elevation)，可并用主视图、俯视图和侧视图.

2) **标高平面图** (indexed plan). 对俯视图的主要点标上它在主视图上的高度即**标高** (index) 来表示空间图形. 一般平面的倾斜方向及倾斜度是用刻度直线即**坡度标尺** (scale of slope) 来表示的，而曲面是用**等高线** (counter line) 来表示的.

3) **斜投影法** (oblique projection). 它是把空间图形 $\mathfrak{F}$ 平行投射到一个平面上所得到的图形. 通常是把它画在正投影法的垂直投影面

π_2上，用来表示立体的形状．设垂直于画面的线段 AB 的投影是 A_qB_q，则 $A_qB_q/AB=\mu$，以及 A_qB_q 对于 XY 的倾角 δ 分别由平行投射的方向来确定．把它们分别称为**斜投影的比率及倾角**．特别是当 $\mu=1$，$\delta=45°$ 时，称为 **Cavalieri 投影法**(Cavalieri projection)，当 $\mu=0.5$，$\delta=45°$ 时，称为 **Cabinet 投影法**(Cabinet projection)，它们已被广泛应用．

4) **中心投影法**(透视图法)(central projection, perspective drawing)．它是通过以定点 S 为中心的线束把空间图形 F 的各点投射到定平面 π 上的方法（图 1，图 2 (a)，(b)）．S 称为

图 1

图 2 (a) 德式．$D_2V_cD_1$ 是地平线，D_1是距离点，M是 g 的测点，GP_0 是 g 的测线，GP_0，V_cS_0，$G_\infty M=G_\infty S_0$ 分别是 GP，SV_c，SG_∞ 的实长

视点(point of sight)，它在 π 上的正投影 V_c 称为**视心**(visual centre)．一般的直线 g，用它与 π 的交点 G(即 g **的迹**(trace)) 和从 S 作 g 的平行线而得到的与 π 的交点 G_∞ (即 g **的没影点**(vanishing point))之间的线段GG_∞(即 g **的全透视图**(total perspective))来表示．一般的点 P 用它的像 p 和通过 P 的适当的直线的全透视图来表示．特别是通过 P 且垂直于 π 的直线 h 的全透视图 HV_c 称为 P 的**矩线**(perpendicular)．平面 e 可用它与 π 的交线 E 和 e 上所有直线的

图 2 (b) 英，法，(日本)式．GL 是基线，HL 是地平线，s 是视点 S 的平面图，V_c 是其正视图，P 是 p 的透视图，$G_\infty M$ 是 SG_∞的实长(即$=G_\infty s_1$)，M 是测点，GP_0 是 Gp 的实长

没影点的轨迹——直线 E_∞（称为 e 的**没影线**(vanishing line)，平行于 E）的直线对来表示．在制图时，为了测出实际长度，需要作出水平面的没影线(**地平线**(horizon))，水平且与 π 成 45° 倾角的直线(**对角线**(diagonal))的没影点(**距离点**(distance point))，在 π 上任意方向上与 G_∞ 的距离等于 $G_\infty V_c$的长度的点 M(g **的测点**(measuring point))，以及从 G 引出的与 $G_\infty M$ 反向平行的直线(g **的测线**(measuring line))．

5) **轴测投影法**(axonometry)．设 $Oxyz$ 是空间的正交坐标系，平面 π 与坐标轴交于点 X，Y，Z，坐标平面 Oxy，Oyz，Ozx 用 π_1，π_2，π_3 来表示．设 $\mathfrak{F}$ 是空间图形，而 $\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_2$，$\mathfrak{F}_3$ 是它在 π_1，π_2，π_3 上的正投影．$\mathfrak{F}_i$ 中的任意两个都能确定$\mathfrak{F}$，而且也能作出$\mathfrak{F}$在 π 上的投影(正或斜的)$\mathfrak{F}'$．轴测投影法是通过 $\mathfrak{F}_i$ 作出$\mathfrak{F}'$ 的作图法．当向 π 的投影法为正投影时，则称为**正轴测投影法**(德 orthogonale Axonometrie)，π 与坐标轴的交点，称为**轴测点**(德 axonometrischen Spurpunkete)，由它们所构成的$\triangle XYZ$的垂心是原点O的象 O^*(图 3)，各轴方向的**缩尺比**(德 Verkürzungszahlen) $\cos\angle OXO^*=\lambda$，$\cos\angle OYO^*=\mu$，$\cos\angle OZO^*=\nu$ 之间，存在关系式 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2=2$ 及 $\lambda^2:\mu^2:\nu^2=QR:RP:PQ$ ($\triangle PQR$ 是 $\triangle XYZ$ 的垂足三角形)，这就是 **Schlömilch 定理**．又设以 OA 及 OB 为主轴的椭圆的任意共轭半径是 OA'，OB'，焦点是

F_1, F_2, 这时可以作出轴的位置是 OA', OB', OB, 缩尺比是 OA'/OA, OB'/OA, F_1F_2/OA 的正轴测投影(**Schwarz 定理**)(图 4). 在实际

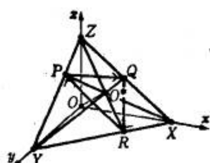


图 3

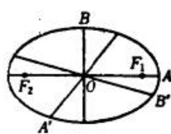


图 4

制图时, 一般只画缩尺比为 1:1:1, 2:1:2 或者 3:1:1 的情形的 𝔉'. 第一种情形称为**等轴测投影法**(德 isometrische Axonometrie), 这时 $\triangle XYZ$ 是正三角形. 若向 π 上投射用斜投影法, 则称为**斜轴测投影法**(德 schiefe Axonometrie). 在平面 π 上给出至多有两个重合而且至多有一个长度为零的三线段 O^*A, O^*B, O^*C, 它们是空间过一点 O 的正交等长三线段的斜投影, 这个斜投影的存在是以 **Pohlke 定理**为依据的. 根据这个定理, 就可以在平面上选取适当的三线段 O^*A, O^*B, O^*C 来描画出空间图形的示意图.

6) **照象测量法**(德 Photogrammetrie). 由空间图形 𝔉 的**象**(德 Bild), 即 𝔉 的中心投影图或它的若干个投影变形来确定原来的 𝔉 以及投影中心的位置的几何方法 (图 5) 就是照象测量

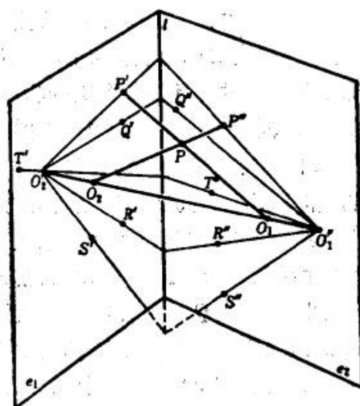


图 5

法. 设已给由不同中心 O_1, O_2 所得到的象 𝔉', 𝔉''; 它们所在的画面为 e_1, e_2. 由 𝔉 上七个点的象, 可经过三次作图, 就能确定 O_1, O_2 在 e_1, e_2 上的象 O_2', O_1'', 称它为**对应核点**(德 gegnerische Kernpunkt), 从而得到 e_1, e_2 上分别以 O_2', O_1'' 为中心互为投影对应的线束, 由于这些对应点列在直线 l 上, 所以由象 𝔉' 和 𝔉'' 确定原象 𝔉 有 ∞^5 种. 如果含有 𝔉 上的共面四个点的象, 则确定核点, 有六个点就可以, 作图有两次即可. 如果给出三个象 𝔉', 𝔉'' 和 𝔉''', 确定原象有 ∞^3 种, 如果给出四个象, 则 𝔉 除大小外完全确定. 然而不论哪种情况都不能确定原来投影中心的位置. 特别地 𝔉 是对称图形时, 它的作图比较简单, 它对研究结晶体是有用的. 另方面, 如果已知象 𝔉' 的投影中心 O_1 的位置, 则可用 **Scheinpflug 方法**简化作图.

7) **圆点投影法**(德 Zyklographie). 从空间点 P 向一个定平面 π 作垂线, 以它的垂足 P_0 为圆心, 以 P_0 到 P 的有向线段为半径作有向圆(或者是有向直线), 称它为点 P 的**有向圆**(德 Zykel). 它的有向切线称为**矢线**(德 Speer). 两个有向圆在同一点共有同一矢线时, 确定互为相切的圆. 这样, 空间图形就成为由平面 π 上的有向圆形成的图形. 一般的直线就成为在同一点切于同一矢线的有向圆的集合, 平面就成为相切于同一矢线的有向圆的集合, 二次锥面就成为相切于一个有向圆的有向圆的集合.

【历史】 有关这方面的历史, 首先是由法国人 G. Monge (1746—1818) 开始的, 他对于以正投影法为根据的斜投影法, 通过研究立体的截线、光线的阴影, 直到中心投影法 (J. École Norm. Sup., 1795), 都作出了贡献. 为此, 1) 也称为 '**Monge 法**'. 此后经过阴影和截面的研究得出了 3), 4) 以及 5) (十九世纪末). 6) 是由 Hauck 开始研究, 由 S. Finsterwalder 在 1899 年的论文中才得以完成的, 7) 是由 W. Fiedler 开始研究 (1878) 又由 E. Müller 的研究才得以完成的 (1920 年左右).

【参】 [1] G. Monge, Géométrie descriptive, Paris, 1798 (Ostwald's Klassiker 有德译本); [2] S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der photogrammetrie, Jber. Deutsch. Math. Verein, 6 (1899), 1—41; [3] G. Loria, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Teubner, I, 1907, II, 1913; [4] J. Hjelmslev, Darstellende Geome-

trie, Teubner, 1914; [5] E. L. Ince, A course in descriptive geometry and photogrammetry for the mathematical laboratory, Bell, London, 1915; [6] K. Rohn-E. Papperitz, Lehrbuch der darstellenden Geometrie I, II, Veit, Leipzig 初版 1893—1896; [7] E. Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Teubner, I, 1908, II 1916, III, 1927; [8] D. A. Low, Practical geometry and graphics, Longmans-Green, 1912; [9] J. F. Dowsett, Advanced constructive geometry, Oxford, 1927; [10] F. Rehbock, Darstellende Geometrie, Springer, 1957.

保形几何学 [英 conformal geometry 法 géométrie conforme 德 Konformgeometrie 俄 конформная геометрия 日 共形幾何学] 【Möbius 几何学】 n 维球面 S^n 可以表示为 $n+1$ 维实射影空间† P^{n+1} 内的二次超曲面†

$$S^n:\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-2x_0x_\infty=0.$$

这里 (x_α) 是 P^{n+1} 的齐次坐标†. 设 P^{n+1} 的使 S^n 不变的射影变换†的全体所构成的群为 $M(n)$, 考虑变换群 $M(n)$ 作用在 S^n 上时, 则 S^n 称为 **n 维保形空间** (conformal space), 属于 $M(n)$ 的变换称为 **Möbius 变换** (Möbius transformation), $M(n)$ 称为 **Möbius 变换群**, 这个体系称为**保形几何学**或 **Möbius 几何学** (Möbius geometry). 这时, 射影空间 P^{n+1} 的任意点 A 表示 S^n 的**超球面** (hypersphere). 也就是说, 当点 A 在 S^n 的外部时, 关于 S^n 的点 A 的极超平面†与 S^n 的交为 $n-1$ 维球面 S^{n-1}, A 表示**实超球面** (real hypersphere) S^{n-1}. 同样, 当点 A 在 S^n 上时, A 表示**点超球面** (point hypersphere), 当点 A 在 S^n 的内部时, A 表示**虚超球面** (imaginary hypersphere). 对于 P^{n+1} 的两点 $A=(a_\alpha)$, $B=(b_\alpha)$, 令

$$AB=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-(a_0b_\infty+a_\infty b_0),$$

称为二超球面 A, B 的**内积** (inner product). 两个实超球面 A, B 所成的**角** (angle) θ 可用 $\cos\theta=AB/\sqrt{A^2}\sqrt{B^2}$ 来定义. 这个角对于 Möbius 变换是不变的.

取射影空间 P^{n+1} 内的标架† $(A_0, A_1, \cdots, A_n, A_\infty)$, 而且它满足条件:

$$A_0^2=A_0A_i=A_iA_\infty=A_\infty^2=0,\ A_0A_\infty=-1,$$
$$A_iA_j=g_{ij},\quad i, j=1, 2, \cdots, n.$$

由此条件可知, A_0, A_∞ 是 S^n 上的点, 而且各个 A_i 是通过此二点的实超球面. 任意的超球面 $X\subset S^n$ 可以用关于这个标架的射影坐标† (u_α) 表示. 也就是说, 可用线性组合 $X=u_0A_0+u_1A_1+\cdots+u_nA_n+u_\infty A_\infty$ 给出. 齐次坐标 (u_α), 称为关于标架 (A_α) 的超球面 X 的 **$n+2$ 超球面坐标** ($n+2$-hyperspherical coordinate). 用这个坐标, 二超球面 $X=(u_\alpha)$, $Y=(v_\alpha)$ 的内积就可表示为

$$XY=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}u_iv_j-(u_0v_\infty+u_\infty v_0).$$

特别是, 如果取互相正交的 n 个实超球面 A_i, $A_i^2=1$, 则关于这个标架的内积的表示式与最初给出的定义有同样形式.

Möbius 变换群 $M(n)$ 有两个连通分支†. 设 $M(n)$ 的最大连通子群为 $M_0(n)$, 如果使保形空间 S^n 的一个实超球面不变的 $M_0(n)$ 的子群为 H, 则 S^n 的实超球面全体 E 与齐性空间† $M_0(n)/H$ 可以看做是同一的. 因为群 H 还可以分为两个连通分支, 所以若它的最大连通子群为 H_0, 则齐性空间 $\tilde{E}=M_0(n)/H_0$ 成为 E 的二重覆盖空间†. 对于实超球面 $A\in E$, 其上的元素 $\tilde{A}\in\tilde{E}$ 称为**有向实超球面** (oriented real hypersphere). 又, Möbius 变换群包含 Euclid 空间的合同变换群†以及非 Euclid 空间的合同变换群作为它的子群. 使一个点超球面不变的 $M(n)$ 的子群与由 Euclid 合同变换及相似变换†生成的群是同构的, 且使一个实(或者虚)超球面不变的 $M(n)$ 的子群中指数†为 2 的子群(或阶数†为 2 的循环群†的剩余群)与双曲的(或者椭圆的)非 Euclid 合同变换群是同构的.

在 n 维 Euclid 空间 E^n 中, 取点 O 为中心, r 为半径的超球面. 对于 E^n 的点 P, 在射线 OP 上取 $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=r^2$ 的点 Q, 那么使 P 对应 Q 的点变换, 称为关于这个超球面的**反演** (inversion). 在空间 E^n 加上一个无穷远点后作出 n 维球面 S^n. 这时, S^n 的任意 Möbius 变换可由有限个 E^n 的合同变换, 相似变换及反演生成. S^n 的 Möbius 变换使超球面变为超球面. 又, 过 E^n 的一点的二曲线的夹角对于 Möbius

变换是不变的．反之，当 $n \geqslant 3$ 时，在 E^n 的局部点变换中，使二曲线的夹角不变的只有 S^n 的 Möbius 变换．当 $n=2$ 时，就不一定如此，使角不变的变换一般称为保角映射†．在复数球面† $S^2 = C \cup \{\infty\}$ 上来说，任意的 Möbius 变换 $z \to w$ 可以表示为

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad 或 \quad w = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta},$$

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ 是复数，且 } \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

其中，$\bar{z}$ 表示 z 的共轭†复数．

【Laguerre 几何学】 对于 Euclid 平面，考虑使有向直线对应有向直线，且使包络一曲线 Γ 的直线族仍对应包络某曲线 Γ' 的直线族的变换．为简单起见，可以说在这个直线变换下，使"有向曲线 Γ 变换为有向曲线 Γ'"．特别是，使两个有向曲线的公共切线的长度不变的直线变换，称为**等距变换** (equilong transformation)．它是保角映射的对偶概念．作为更特殊的情形的是，使圆变换为圆的等距变换称为 **Laguerre 变换** (Laguerre transformation)．这是 Möbius 变换的对偶概念．使各个有向直线平行移动一定的垂直距离的变换称为**膨胀变换** (dilatation)．在膨胀变换下，任意的有向圆变为以它的半径(正或负)加上常数为半径的有向圆．设在平面上已给出有向圆 O 和与它不相切的有向直线 p (图 1)．对于此平面上的有向直线 l，作平

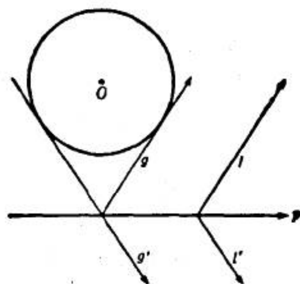


图 1

行于 l 且与圆 O 相切的有向直线 g，通过 g 与 p 的交点作圆 O 的第二条有向切线 g'．再通过 l 与 p 的交点作平行于 g' 的有向直线 l'，那么使 l 对应 l' 的直线变换称为 **Laguerre 反演** (Laguerre inversion)．它是反演的对偶概念．一般的 Laguerre 变换可由有限个 Laguerre 反演，膨胀变换及使各个有向直线成为反向的变换而生成．从属于 Laguerre 变换群的几何学称为 **Laguerre 几何学** (Laguerre geometry)．

再有，即使对于 n 维空间，用有向超球面与有向超平面，同样可以考虑 Laguerre 反演及膨胀变换而定义 Laguerre 变换．

【球几何学】 对于 Euclid 平面，当在使有向圆对应有向圆的变换下，能保持二有向圆相切的性质时，这样的变换称为 **Lie 切触圆变换** (Lie's contact transformation of circles)，任意的 Lie 切触圆变换可由有限个反演与 Laguerre 反演生成．Lie 切触圆变换群包含 Möbius 变换群及Laguerre变换群作为它的子群．从属于这三种变换群的几何学总称为**圆几何学** (circle geometry)．一般来说，对于 n 维空间也完全类似，在这种情形称为**超球面几何学** (hypersphere geometry)，特别是当 $n=3$ 时，称为**球几何学** (sphere geometry)．

三维空间的直线及有向球共同构成四维流形，它们之间可定义称为 **Lie 线球变换** (Lie's line-sphere transformation) 的拓扑映射，它使相交二直线对应两个相切的有向球．

【群的观点】 按照埃尔兰根纲领†，对于上述三种几何学说明如下．在四维实射影空间 P^4 上，考虑用齐次坐标表示的二次型 $Q(x) = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ($x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$)．使 Q 不变的 P^4 的射影变换的全体表示为 G．群 G 的元素是行列式值为 1 的五阶矩阵 A 中使 $Q(Ax) = x$ 对于所有的 x 都成立的 A 的全体．在 P^4 中满足 $Q(x) = 0$的点 x 的全体用 L^3 表示．因为 G 对于 L^3 的作用是可迁的，所以如果设 H_a 为固定 L^3 上的点[例如 $a = (-1, 1, 0, 0, 0)$] 的 A(G 的元素)的全体，则可以假设 $L^3 = G/H_a$．这是圆几何学．(同样，对于固定 L^3 的其他的点 $b = (-1, 1, 0, 0, 0)$ 的子群 H_b，则有 $L^3 = G/H_b$.)使超平面 $x_4 = 0$ 不变的 G 的变换的全体G_a，对于由 L^3 中除去此超平面的部分的作用是可迁的，则可用 $G_a/H_a \cap G_a$ 表

示．这是平面保形几何学．(为更有内在性，从满足 $Q(a')<0$ 的任意的 a' 出发，取使 $-a_0'x_0+a_1'x_1+a_2'x_2+a_3'x_3-a_4'x_4\neq 0$ 的 x 全体为 $G_{a'}/H_{a'}\cap G_{a'}$ 来定义，实质上完全相同．)其次，使 $x_0+x_4\neq 0$ 的点全体不变的 G 的变换全体 $G_b=H_b$，对于这个集合的作用是可迁的．这是平面 Laguerre 几何学．在这个意义下，圆几何学包括另两种几何学．

以上是三种几何学的 Klein 观点的说明，但与前面的说明大致有如下的关系．粗略地说(不考虑特征性及方向)，L^3 是 Euclid 平面 E^2 的点、直线、圆的全体，而点的全体及直线的全体分别对应于 $x_4=0$ 及 $x_0+x_1=0$．对于 Laguerre 几何学，正确地说，是把 E^2 看做三维 Euclid 空间 E^3 中的平面．在 E^3 中固定正交坐标系 (y_0, y_1, y_2)，E^2 可由 $y_0=0$ 给出．使点 $y(\in E^3)$ 对应中心为 $(0, y_1, y_2)$，半径为 $|y_0|$ 的圆(E^2 上的)．但 y_0 的正负表示圆的方向．(y_0 是正的时候表示圆的外部，负的时候表示圆的内部，这样代替圆的方向也可以．) y 在 E^2 上时，表示 y 本身．考虑使 E^3 上的二次型 $Q'(y)=-y_0^2+y_1^2+y_2^2$ 除数量倍以外在旋转下不变的仿射变换的全体 G_b'(旋转部分使 Q' 不变的是上述意义下的等距变换)．从 E^3 到 L^3 中的映射：$x_0+(1+Q'(y))/2$，$x_1=(1-Q'(y))/2$，$x_2=y_1$，$x_3=y_2$，$x_4=y_0$ 是到 L^3 的子集 $x_0+x_1\neq 0$ 上的一一对应，且由此 G_b' 与 G_b(包括作用在内)是同构的．在 Laguerre 几何学中，E^2 上的点与圆没有本质上的区别，所以不得不考虑群 G_b 作用于三维空间．此外，从局部微分几何来看，可以说平面保形几何学研究的是可微的曲线族及圆族在 Möbius 变换下的不变性，平面Laguerre几何学研究的是可微的有向直线族及有向圆族在 Laguerre 变换下的不变性．

【参】[1] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Springer, 1929; [2] 窪田忠彦，解析幾何，内田老鶴圃，I 1937, II 1945; [3] T. Takasu (高須鶴三郎), Differentialgeometrien in den Kugelräumen I, II, Maruzen, 1938—1939.

网络几何学 [英 geometry of nets 法 géométrie des réseaux 德 Geometrie der Gewebe 俄 геометрия сети 日 網目の幾何学] 在平面上单连通的区域 G 内有 n 组曲线族，通过 G 的各点属于各族的曲线有且仅有一条，而属于不同族的两条曲线最多只相交于一点时，把它称为 **n 重罗** (英 n-web of curves 德 Kurven der n-Gewebe)．

在平面上互相交成 $60°$ 角的平行线族是三重罗的最简单的例子，把它称为**正规三重罗** (normal 3-web)．在 G 的任意点 P 的邻域，如图 1 从点 A 开始按拉丁字母顺序作图，当 H 总

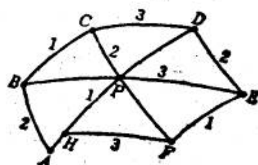


图 1

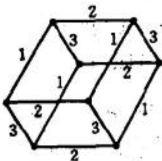
和 A 重合时，这样的三重罗称为**六角线罗** (英 hexagonal web 德 Sechseckgewebe)．三重罗拓扑映射为正规三重罗的充分必要条件为它是六角线罗 (W. Blaschke-G. Thomsen)．只由直线形成的六角线罗，可以由同一个三级平面代数曲线†(可约也可以)的三组切线族形成，反过来也成立 (Graf-Sauer 定理)．

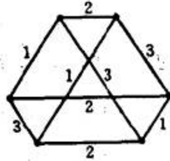
【Abel 定理】 对于 Descartes 坐标系，把 n 重罗的曲线分别用形如 $u_i(x, y)=$ 常数 $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的方程表示时，u_i 称为**标准参数** (canonical parameter)．伴随着 u_i，$f_i(u_i)$ 也是标准参数．对于六角线罗可选取使 $u_1+u_2+u_3=0$ 的标准参数，反之也成立．在此意义下"直线 n 重罗是 n 级代数曲线的切线族的充分必要条件为：存在着使 $u_1+u_2+\cdots+u_n=0$ 成立的标准参数"，这是 Graf-Sauer 定理的推广．这个定理不过是代数函数论中 Abel 定理†的对偶定理，由此开辟了通向代数几何学的道路．

又对于 n 重罗来说，设其各族曲线为可微的，那么在微分同胚下完全表征所给的 n 重罗的微分不变式系的求法问题也已解决．

【抽象的三重罗】 把点、直线当做不定义元素，把直线分为三族，并且满足：公理 1)"通

过每个点各族直线有且仅有一条”，公理2）“不同族的二直线仅相交于一点”时，可以按公理化来定义抽象的三重罗．这里属于同族的直线叫做“平行”，用 // 表示．当 $AB/\!/CD$，$AC/\!/BD$ 时，或存在 EF 使 $AB/\!/EF$，$AE/\!/BF$，$CD/\!/EF$，$CE/\!/DF$ 时，定义向量 AB 与 CD 相等，于是以任意给出的点 C 为起点可以作出与所给的向量 AB 相等的向量 CD．对于这个抽象的三重罗来说，当 **Reidemeister 的图形** (Reidemeister's figure) R（图 2）封闭时，这个向量的相等满足等价规律，且一条直线上的向量类之间与一般情形一样也可以定义加法．对于这个加法来说，直线上的向量类构成群，所有直线上的这种群都是同构的．反之，对于任意给出的群可以作出这样抽象的三重罗．在这里 **Thomsen 的图形** (Thomsen's figure) T（图 3）是封闭的与这个群为 Abel 群是等价的．


图 2　R


图 3　T

关于空间曲面的 n 重罗，空间曲线的 n 重罗，也正在研究中．

【参】［1］W. Blaschke-G. Bol, Geometrie der Gewebe, Springer, 1938；［2］K. Reidemeister, Vorlesungen über Grundlagen der Geometrie, Springer, 1930；［3］G. Pickert, Projektive Ebenen, Springer, 1955.

地图投影法［英 map projection　法 projection de carte　德 Landkarteprojektion　俄 проекция карты　日 地図投象法］**地图投影法**就是指作为描画地图基础的经纬线的作图法．由于地球大致成球形，不可能展成平面，所以在地图上表示的经纬线必然与实际情况多少有所差别．因此根据地图的目的、用途、比例尺及区域等要求的不同，必须有各种不同的投影法．

地图投影的基本条件：1）长度，2）角度，3）面积，要求这三者的关系必须正确．其中，要把 1）的长度关系，对所有的方向都能正确地表示出来，一般来说在理论上是不可能的，而只不过是可以对于特定方向的线保持正确的关系，正确地表示从特定点出发的距离，或者在一定的地域内近似于正确地表示．正确地表示角度或面积的关系都是可能的，但是，使两者同时都满足在理论上是不可能的．另外，也有在以上三个条件之外附加其他特殊的条件，例如，连结地图上两点的直线是地球上的最短线，或者连结地图上两点的直线是地球上的等方位线等的投影法．

这样，对于地图投影，就有许多特殊的办法，如果从投影的方法来考虑，大致可以分为以下三种．i）**透视投影法** (perspective projection)．ii）以给出的条件为基础，用数学进行的绘图法．iii）满足必要的条件，按简便规则进行的绘图法．

透视投影法与一般的投影法一样，假设有视点、物体（绘制地图时指地球）及投影面（平面或圆锥面，圆柱面等可展成平面的曲面），然后在投影面上按透视法绘制物体的像．具有代表性的可举出**球极投影法** (stereographic projection)．这种方法如图 1 所示，是以地球面上的任意点 S 为视点，在以它为极的大圆面上，作视点相对一侧半球面的投影，这是保角映射[†]，经纬线的形状一般可用圆弧表示．在这种情形下，投影后经纬线上的各点坐标（坐标原点是投影中心）是

$$x=\frac{r\sin\lambda\cos\varphi}{1+\sin\beta\sin\varphi+\cos\beta\cos\varphi\cos\lambda},$$

$$y=\frac{r(\cos\beta\sin\varphi-\sin\beta\cos\varphi\cos\lambda)}{1+\sin\beta\sin\varphi+\cos\beta\cos\varphi\cos\lambda}.$$

其中 r 是地球半径，φ 是纬度，λ 是与投影中心的经度差，β 是投影中心（坐标原点）的纬度．以同样的透视投影法，把视点放到地球中心，而在地球表面上一点的切平面上投影，这种方法称为**中心投影法** (central projection) 或称为**心射投影法** (gnomonic projection)．在这种情形下，球面上的大圆投影成直线．日本国国土地理院发行的五万分之一地形图以及各种基本地图的投影，是利用所谓**多面体投影法** (polyhedral pro-

jection)，这是对某个小区域较为简便的中心投影法，但严格来说，是下述多圆锥投影法.

有一种不考虑视点和投影面，而尽可能保持实际关系绘制经纬线的方法. 例如，取与地球的各纬度带相切的许多圆锥面带，把经纬线映射在它上面展开后就得到经纬线网. 这种方法称为**多圆锥投影法**（polyconic projection). 设纬度为 φ，地球半径为 r，这种投影的各个纬线成为半径是 $r\cot\varphi$ 的圆弧，在各个纬线上取经度 λ 所对的长度 $r\cot\varphi\lambda$，那么对于某一定地域内距离、角度的关系可以正确地表示出来.

1569 年 G. Mercator 所设计的 **Mercator 投影法**(Mercator's projection)，到现在一直作为海图投影法而被广泛地使用. 这种投影法是把经纬线取为互相正交的直线，**斜驶曲线**（loxodrom curve）即与地球上的一切子午线成一定角度的曲线(也称为**等方位线**)在图上表示为直线的保角映射(图 2). 设地球的半径为 r，纬度为 φ，

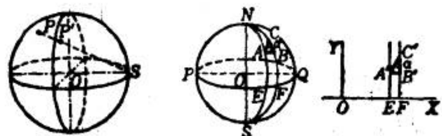


图 1 图 2

经度为 λ，则平面上直角坐标是 x, y 的点由 $x = r\lambda$，$y = r\log\tan(\pi/4 + \varphi/2)$ 就可以得到与纬度为 φ，经度为 λ 的点的对应关系. 在这种地图上连结两点的直线是等方位线，可是它并不表示两点间的最短线.

同样属于保角映射的还有 **Lambert 保角圆锥投影法** (Lambert's conformal conic projection) (J. H. Lambert, 1772). 投影后的经纬线的形状，经线可以用从一点引出的射线表示，而纬线可以用以此点为中心的同心圆表示. 这种投影法能正确地表示角的关系，同时，也能把长度的关系相当正确地投影出来，并应用在较高纬度向东西延伸地域的投影. 这种投影法分为两个基准纬线的复式投影法与一个基准纬线的单式投影法两种，精确度以前者为佳. 现在设基准纬线的纬度为 φ_1, φ_2，它的展开半径为 ρ_1, ρ_2，而 θ 为中央子午线到经度差为 λ 的子午线的投影角，则它的投影关系可表示如下.

$$\rho_1 = r\cos\varphi_1/\mu, \quad \rho_2 = r\cos\varphi_2/\mu,$$
$$\rho_1 = c\tan^\mu \chi_1/2, \quad \rho_2 = c\tan^\mu \chi_2/2.$$

由这些等式可以确定 ρ_1, ρ_2, c,

$$\rho = c\tan^\mu \chi/2, \qquad \theta = \mu\lambda,$$

其中

$$\mu = \frac{\log\cos\varphi_1 - \log\cos\varphi_2}{\log\tan\chi_1/2 - \log\tan\chi_2/2},$$
$$\chi_1 = \pi/2 - \varphi_1, \quad \chi_2 = \pi/2 - \varphi_2,$$
$$\chi = \pi/2 - \varphi.$$

等积映射有以下几种. 设地球半径为 r，经度、纬度用 λ, φ 表示，则

(1) $$x = rk\lambda, \qquad y = (r/k)\sin\varphi$$

(M. Eckert, 1906).

(2) $$x = (2\sqrt{2}/\pi)r\lambda\cos g(\varphi),$$
$$y = \sqrt{2}\, r\sin g(\varphi)$$

(这里 $g(\varphi)$ 是由 $2g(\varphi) + \sin 2g(\varphi) = \pi\sin\varphi$ 决定的函数) (K. B. Mollweide, 1805).

(3) $$x = (2\sqrt{2}/\pi)r\lambda\sin(\pi/4 - \varphi/2),$$
$$y = r\sqrt{\pi}(1 - \sqrt{2}\sin(\pi/4 - \varphi/2))$$

(Colligmon, 1865).

【参】 [1] T. W. Birch, Maps, topographical and statistical, Clarendon Press, 1949; [2] E. Raisz, General cartography, McGraw-Hill, 第二版 1948; [3] W. Chamberlin 编, The round earth on flat paper, map projections used by cartographies, National Geographic Society; Washington, D. C., 1947.

曲线 [英 curve 法 courbe 德 Kurve 俄 кривая 日 曲線] 【概念的历史】 在 Euclid《原本》开始的"定义"中，叙述了"线是有长度而没有宽度的"，"线的各端是点"等. 这虽然是对于线的概念的最早的说明，但"宽度"、"长度"等都还没有定义，因此实质上并没有给**线** (line) 以完全的定义. 通俗地说，线分为**直线** (straight line) 与**曲线**，不是直线的线称为曲线. 虽然 Euclid 也有这个观点，但在现代数学中，如果说曲线，也就是包含了直线，是与 Euclid 的"线"在同样意义下使用的. 线或者曲线，在 Euclid 以后也没有追求过它的完全的定义，而作为几何

学中自明的原始概念一直在使用着，从十九世纪后半期，对数学各个分支的基础进行严密化以来，对于曲线的概念也要求有明确的解析定义．最初作这种尝试的是 C. Jordan (Cours d'analyse I, 1893).

【Jordan 弧，Jordan 曲线】 Jordan 把平面上的**连续曲线** (continuous curve) 定义为从区间 $[0, 1]$ 到 Euclid 平面 E^2 的单值连续映射的象，也就是说，设 f, g 是定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数，则把平面上的连续曲线定义为具有由

(1) $x = f(t), \quad y = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

表示的坐标 (x, y) 的点集．Jordan 把这样的点集称为 **Jordan 弧** (Jordan arc)，在这里我们称为**连续弧** (continuous arc)．$(f(0), g(0))$ 及 $(f(1), g(1))$ 称为它的**两端** (end)，从连续弧除掉两端的点集称为**开弧** (open arc)，连续弧称为**闭弧** (closed arc)，有时把这两者以及开弧与其一端的并集通称为 Jordan 弧，或者简称为**弧** (arc) 或**曲线**．在 (1) 中，对于 $t_1 < t_2$ 如果 $f(t_1) = f(t_2)$，$g(t_1) = g(t_2)$，则曲线上的使得 $(f(t_1), g(t_1)) = (f(t_2), g(t_2))$ 的点称为它的**多重点** (multiple point)，无多重点的弧称为**简单弧** (simple arc) (有时也把简单弧称为 **Jordan 弧**)．如果 C 是两端重合的 Jordan 弧，并且除两端以外没有多重点，则 C 可以看作是圆周在平面上的拓扑映射的象．这样的 C 称为 **Jordan 曲线** (Jordan curve) 或**简单闭曲线** (sinple closed curve) (→ 连通 [Jordan 曲线定理])．在(1)中，如果 f, g 为 C^k 类的(即 k 次连续可微的)函数，则(1)所表示的曲线称为 **C^k 类**曲线，如果是解析函数，则 C 称为**解析曲线** (analytic curve).

$k \geqslant 1$ 的曲线是微分几何学的对象．一般地，用拓扑空间 S 代替 E^2，且从实数空间的区间到 S 的单值连续映射的象称为 S 上的弧或曲线，特别是当 S 是微分流形†时，与 E^2 的情形一样，可定义 S 上的 C^k 类曲线，如果 S 是解析流形†，则可定义 S 上的解析曲线.

【寻常曲线】 有限个简单弧相交于有限个点，并且它们的并集连通时，称为**寻常曲线** (ordinary curve)．不含有与 Jordan 曲线同胚的子集的寻常曲线称为**树木曲线**或**树形曲线** (tree)．设寻常曲线 C 上的点为 p 时，p 的充分小邻域†的边界†与 C 交于有限个点，这些交点的个数由 p 确定．这个个数称为 p 在 C 上的**位数** (order)，位数是 1 的点称为 C 的**端点** (end point)，位数是 2 的点称为**寻常点** (ordinary point)，位数 $\geqslant 3$ 的点称为**分枝点** (branch point)．已给出的寻常曲线 C 表示为简单弧的和的方法，当然不是唯一的．如果 C 可表示为一个简单弧或一个 Jordan 曲线，则说 C 可以**一笔描画** (unicursal) (例如图 1 的曲线)．C 可以一笔描画的充分必要条件是使位数是奇数的 C 的点的个数 $\leqslant 2$ (L. Euler).

【概念的扩张】 虽然上述"寻常曲线"的定义包含日常见到的曲线，但不包含例如当 $0 < x \leqslant 1$ 以及 $-1 \leqslant x < 0$ 时 $y = \sin 1/x$，$x = 0$ 时 $-1 \leqslant y \leqslant 1$ 所表示的点集(图 2)．这个

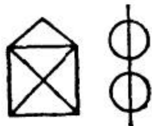


图 1

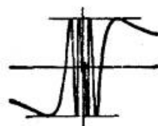


图 2

点集称为**正弦摆线** (sinusoid)．它在广义上也可以称为曲线．又，在上面的定义中用到了映射，因此它不是对于点集本身直接的定义．作为直接的定义，想避开利用并集的概念，但由于简单弧不包含圆，所以作为曲线概念过于狭窄，而允许有多重点的连续弧包含如填满正方形的 Peano 曲线†这样的曲线，所以作为曲线概念又过于扩大．连续弧作为点集来说可以有局部连通†的连续统†的特性，它可以称为 **Peano 连续统** (Peano continuum) (H. Hahn, S. Mazurkiewicz)．另一方面，着眼于 Jordan 曲线定理†的结论，A. Schoenflies 把平面分为两部分，而作为两部分区域的共同边界的闭集，命名为平面上的闭曲线，因为它不含有简单弧，所以作为一般的曲线概念是不适当的.

作为平面上最一般的(也包含正弦摆线的)曲线概念，可以取 E^2 的疏的†连续统，也就是成为平面上开集的边界的连续统 (G. Cantor)．不过，这个定义不在平面上就难于通用．因此

P. S. Uryson 及 K. Menger 用一维的连续统来定义一般的曲线（1921—22，Menger [1]）. 对于 E^2 这个定义与 Cantor 的曲线概念是一致的，对于 E^3 来说，它和任何区域^† 也不分作两部分的连续统是一致的（→ 连通）.

【万有曲线】 从三维立方体 $I^3(I=[0,1])$ 各棱的三等分点作平行于各面的平面把 I^3 分为 3^3 个立方体，从 I^3 除去它的中央部分 $I_1^3(I_1=[1/3,2/3])$ 和与它共有面的六个立方体，设 M_1 是由这 20 个立方体所成的点集（图 3），对于构成 M_1 的 20 个立方体的每一个，再施以对 I_3 同样的作法，设这时得到的点集的并集（由 20^2 个棱长为 $1/3^2$ 的立方体所构成）为 M_2，这样进行下去，最后，得到 20^n 个棱长为 $1/3^n$ 的立方体所构成的点集 M_n. $M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \cdots$，而 $U=\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ 是 Uryson-Menger 意义下的曲线. 而且可以证明任何曲线与 U 的子集同胚. 在这个意义下，U 称为**万有曲线**（universal curve）.

【曲线的长度】 当考虑长度时，曲线具有 E^n 中的连续弧的意义. 设 C 为用 $x_i=f_i(t)$（$i=1,2,\cdots,n$: $a \leqslant t \leqslant b$; f_i 是在 $[a,b]$ 定义的实数值连续函数）（用 n 维坐标向量，它也可简记为 $\xi=f(t)$）所表示的 E^n 的曲线（即连续弧）. 任意分割 $[a,b]$ 后，设 $a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_r=b$ 时，将具有坐标向量 $\xi=f(t_k)$ 的点 X_k 顺次连结，所得到的折线（图 4）的长度 $l=\sum_{k=1}^{r}\overline{X_{k-1}X_k}$ 如果有界，则称 C 是**可求长的**（rectifiable）曲线，根据分割的方法，把 l 的上限称为 C 的**长度**（length）. 曲线 C 有长度的充分必要条件是 $f_i(i=1,2,\cdots,n)$ 具有有界变差^†（Jordan）. 所以，如果 C 是有长度的曲线，则任何 $f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$ 都是几乎到处可微分的（H. Lebesgue）. 特别是，C 为 C^1 类时是有长度的，它的长度可用

$$s=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{df_i}{dt}\right)^2\right)^{1/2}dt$$

表示（→ 长度和面积）.

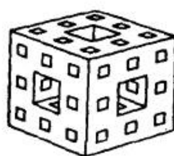


图 3

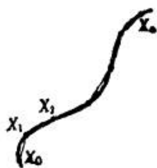


图 4

【曲线的形状】 关于 Euclid 空间 E^n 的 C^k 类曲线 C，在它存在的整个区域考察 C 的形状是有必要的，从 C 的方程用整体观点确定它的形状的过程称为**曲线描迹**（curve tracing）. 特别是当 $n=2$ 时，C 的方程可用正交坐标表示为 $f(x,y)=0$（或用极坐标^† $F(r,\theta)=0$）的形式，对于 f（或 F）是解析函数的情形这个问题已得到详细的研究，以下就正交坐标的情形进行叙述.

设 φ 是单值解析函数，I 是 x 轴上的（有限或无限）区间，由 $y=\varphi(x)(x\in I)$ 所表示的曲线 C_0，如果是 C 的子集，则 C_0 称为 C 的一个**分支**（branch），对应 I 是有限或无限的情形，C_0 称为**有限分支**或**无限分支**. 由 $x=\psi(y)(y\in J)$（ψ 是单值解析函数，J 是 y 轴上的区间）所表示的曲线也是 C 的子集时，也称为 C 的分支，如果需要区别这两种分支，则把前者称为"x 分支"，后者称为"y 分支". C 至多由可数个分支所构成. 如果 $P(x_0,y_0)\in C$，对于 P 有 $f_y=\partial f/\partial y\neq 0$，则存在包含 P 的 x 分支，如果 $f_x=\partial f/\partial x\neq 0$，则存在包含 P 的 y 分支. 对于 P 有 $\partial f/\partial x=0,\partial f/\partial y=0$ 时，P 称为 C 的**奇点**（singular point），C 上非奇异的点称为 C 的**寻常点**（ordinary point）.

若 P 是 C 的寻常点，则确定包含 P 的 C 的一个分支 C_0. C 上 P 点的**切线**（tangent line）、**法线**（normal line）对 C_0 也同样，它们都唯一确定，它们的方程分别为 $(x-x_0)f_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0)=0$，$(x-x_0)f_y(x_0,y_0)-(y-y_0)f_x(x_0,y_0)=0$. 变换坐标系后，设 P 是新坐标系的原点，切线、法线分别是 ξ 轴、η 轴，则关于这个坐标轴，C 的方程在 P 的邻域有 $\eta=c_2\xi^2+c_3\xi^3+\cdots$ 的形式. 若设曲线 C 在 P 点的

曲率†为 ρ，则 $\rho = 2c_2 = -(f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2)/(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}$. 当 $c_2 = \rho = 0$ 时，P 是平稳点†. E^2 的 C^2 类曲线的平稳点也称为**拐点**(point of inflection). 如果 P 不是拐点，在 P 的邻域中曲线 C 在 ξ 轴的一侧如图 5，如果是拐点且 $c_3 \neq 0$，则曲线 C 如图 6. 对于拐点，

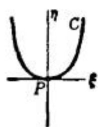


图 5

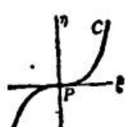
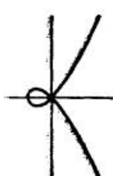
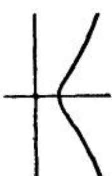


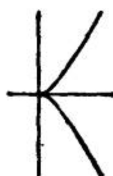
图 6

$c_3 = \cdots = c_{\nu-1} = 0$，$c_\nu \neq 0$，且 ν 为偶数时曲线 C 如图 5，ν 为奇数时曲线 C 如图 6.

在奇点的邻域 C 的形状是各式各样的. 例如，对于 $y^2 = x^2(x + a)$ 所表示的曲线，设原点 $(0, 0)$ 是 P 点，如果 $a > 0$，则通过 P 点 C 有两个分支，在 P 点分别有不同的切线(图 7). 这样，通过 C 上一点 P 有有限个相异的分支，且在 P 分别有不同的切线时，则称 P 为 C 的**结点**(node). 如果 $a < 0$，则虽然 $P \in C$，但在 P 的邻域除 P 外没有 C 的点(图 8). 这样的点称为 C 的**孤立点** (isolated point). 如果 $a = 0$，则 C 有从 P 引出的两个分支，且它们在 P 有相同的切线(图 9). 这样的点称为 C 的**尖点** (cusp). C


图 7


图 8


图 9

是代数曲线的情形，可以用 Puiseux 级数†来考察奇点邻域的形状.

此外，当 C 有无限分支 C_0 时，例如 C_0: $y = \varphi(x)(x \in I)$ 是 C 的 x 分支且 $I = [a, \infty)$ 时，如果 C_0 在 $P(x_0, y_0)(x_0 \in I)$ 的切线当 $x_0 \to \infty$ 时有极限位置，则这个极限位置 l 称为 C_0 的**渐近线** (asymptote). 这时 C_0 上的点 $P(x_0, y_0)$ 到 l 的距离，当 $x_0 \to \infty$ 时趋近于 0. C 的无限分支的渐近线也称为 C 的渐近线.

【特殊的平面曲线】 以下的一些曲线在历史上是早已为人们所熟悉的.

在三次曲线中，由形如

(1) $$y^2 = f(x)/(x - a)$$

($f(x)$ 是 x 的最多三次整式)的方程所表示的曲线关于 x 轴对称，而且以 $x = a$ 为渐近线. 特别是，当 $a > 0$ 时，如果 $f(x) = -x^3$，则曲线如图 10 所示，原点 O 为尖点. 设从原点引出的射线与曲线相交于点 X，与以 x 轴的区间 $[0, a]$ 为直径的圆周相交于点 Y，与直线 $x = a$ 相交于点 A，则 $OX = YA$. 这样的曲线称为 Diocles 的**蔓叶线** (cissoid).

对于 (1)，如果 $a = 0$，$f(x) = c^2(c - x)$ $(c > 0)$，则曲线如图 11 所示. 设坐标是

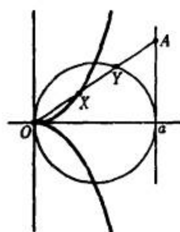


图 10

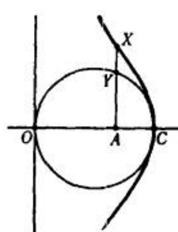


图 11

$(a, 0)$，$(c, 0)$ $(0 < a < c)$ 的点分别为 A，C，通过 A 平行于 y 轴的直线在第一象限的部分与曲线及以 OC 为直径的圆周分别相交于点 X, Y，则 $AX:AY = OC:OA$. 这样的曲线称为 Agnesi 的**箕舌线** (witch).

还有，对于 (1)，如果 $a < 0$，$f(x) = -x^2 \cdot (x/3 + a)$，则曲线如图 12(a) 所示. 当把坐标轴旋转 $\pi/4$ 变成图 12(b) 的位置时，它的方程变为 $x^3 + y^3 = 3cxy$ $(c = -\sqrt{2a})$ 的形状. 设 $t = y/x$ 为参数，则得这个曲线的参数表示式 $x = 3ct/(1 + t^3)$，$y = 3ct^2/(1 + t^3)$. 这样，

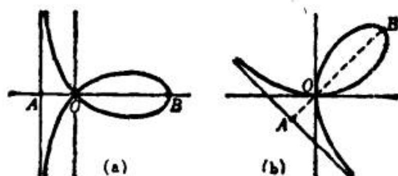


图 12

由单参数 t 的有理函数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ 表示的形如 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$的曲线称为(作为代数曲线的)**有理曲线** (rational curve). 这是亏格†为 0 的代数曲线. 这样的曲线称为 **Descartes 的叶形线**(拉 folium cartesii).

曲线 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 关于原点 O 的极坐标方程为 $r=f_1(\theta)$, $r=f_2(\theta)$, $\cdots$, $r=f_k(\theta)$ 时, 对于同一坐标系有方程 $r=\lambda_1 f_1(\theta)+\cdots+\lambda_k f_k(\theta)$ (λ_i 为常数, 在许多情形下为 ± 1) 的曲线 C 称为关于 O 的 $C_1, \cdots, C_k$ 的**蔓叶类曲线** (cissoidal curve)(图 13: $r=-f_1(\theta)+f_2(\theta)$). 对于图 10, 设以 $[0, a]$ 为直径的圆周是 C_1, 直线 $x=a$ 为 C_2, $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, 则可得到 Diocles 的蔓叶线. Descartes 的叶形线也可以看作从直线与椭圆得到的蔓叶类曲线的一种. C_1是以 O 为中心的圆周时, C 称为 C_2关于 O 的**蚌线** (conchoidal curve). 特别是, 当 C_2为直线, O 在 C_2 的外部时, C_2 关于 O 的蚌线称为 Nicomedes 的**蚌线**(conchoid). 如图 14 所示,当C_2 在

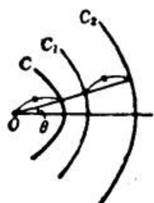


图 13

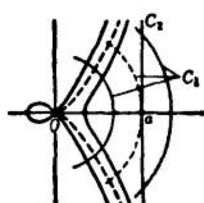


图 14

垂直于极坐标系极轴的位置时, 关于这个极坐标的曲线方程为 $r=a\sec\theta\pm b$(b 是 C_1 的半径), 关于直角坐标的方程是 $(x-a)^2(x^2+y^2)=b^2x^2$, 根据 $a \gtreqless b$, 这个曲线在原点有结点、尖点和孤立点. 又, 当 C_2是圆周, 而 O 是 C_2上的点时, C_2 关于 O 的蚌线称为**蜗牛线**(法 limaçon)

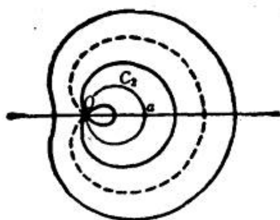


图 15

(图 15). 它关于以通过 O 的圆的直径为极轴的极坐标的方程是 $r=a\cos\theta\pm b$, 关于直角坐标的方程是 $(x^2+y^2-ax)^2=b^2(x^2+y^2)$. 在这里, 当 $a>b$ 时, O 为曲线的结点, 当 $a=b$ 时为尖点. $a=b$ 时的曲线也称为**心脏线**(cardioid)(图 15 的虚线).

到二定点 A, B 的距离的积是常数的点 X 的轨迹称为 **Cassini 的卵形线** (Cassini's oval)(图 16). 它关于以 A, B 的中点 O 为原点, 连结

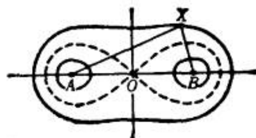


图 16

A, B 的直线为 x 轴的直角坐标的方程是 $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=k^4-a^4$ (其中 $AB=2a$, $k^2=AX\cdot BX$). 特别是, 当 $a^2=k^2$ 时, O 为曲线的结点. 这种情形的曲线称为 Jakob Bernoulli 的**双纽线** (lemniscate) (图 16 的虚线).

从一点 O 到定曲线 C 各点的切线所作的垂线的垂足的轨迹, 称为 C 关于 O 的**垂足曲线** (pedal curve). 等轴双曲线关于它的中心的垂足曲线是双纽线(图 17), 圆关于一点的垂足曲线是蜗牛线.

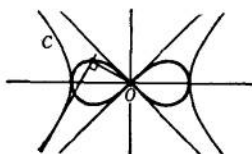


图 17

曲线 C' 与定曲线 C 相切, 同时沿曲线 C 无滑动地滚动时, 固定于 C' 的定点 X 的轨迹 Γ 一般称为以 C 为**底线**(base)、以 C' 为**滚线**(rolling curve)、以 X 为**极** (pole) 的**一般旋轮线** (roulette). 特别是, 当 C 为直线、C' 为圆周、X 在 C' 上时, Γ 称为**摆线**(cycloid)(图18); 当 X 不在 C' 上时, Γ 称为**次摆线** (trochoid) (图 19). 它的方程是以 C' 的旋转角 θ 为参数, 可表示为 $x=a\theta-b\sin\theta$, $y=a-b\cos\theta$. 当 $a=b$ 时, 它变为摆线. 摆线的渐屈线、渐伸线仍是摆线(图 20).

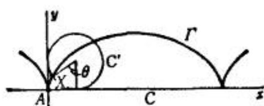


图　18

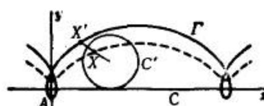


图　19

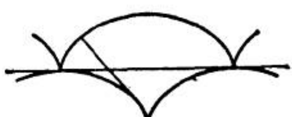


图　20

把摆线凸向向下放置如图 21，在均匀重力场中，从曲线上任意点 X，质点沿着曲线滑动，到达最低点 C 的时间与 X 的位置无关（C. Huygens，但不考虑摩擦）．根据这个性质，摆线也称为**等时曲线**（tautochrone）．在重力作用下不考虑摩擦时，质点从空间的一点 A 出发沿着某曲线 Γ 滑动到下方的另一个点 B 时，如果使所需要的时间最少，则这个曲线 Γ 可以取包含 AB 的铅直面内的以通过点 A 的水平线为底线的摆线（图 22）．根据这个性质，摆线也称为**捷线**



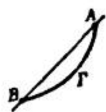


图　21　　　　图　22

（brachistochrone）（或**最速降线**（line of swiftest descent））（Johann Bernoulli）．

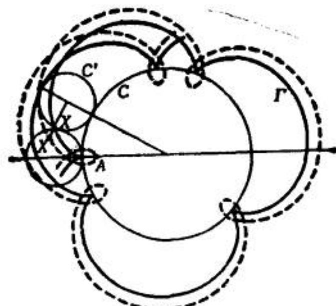


图　23

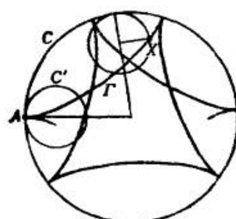


图　24

若底线 C 与滚线 C' 都是圆周，X 在 C' 上，则当 C，C' 外切时，Γ 称为**外摆线**（epicycloid）（图23），内切时，Γ 称为**内摆线**（hypocycloid）（图24）．若 X 不在 C' 上，则对应于上面两种情形，分别称为**长短辐圆外旋轮线**（epitrochoid），**长短辐圆内旋轮线**（hypotrochoid）．设 C，C' 的半径为 a，b，从 C' 的圆心到 X 的距离为 c，以 C' 的旋转角 θ 为参数，则它们的方程是 $x=(a\pm b)\cdot\cos\theta\mp c\cos((a\pm b)/b)\theta$，$y=(a\pm b)\sin\theta-c\sin((a\pm b)/b)\theta$．（外旋轮线的情形取上面的符号，内旋轮线的情形取下面的符号，$b=c$ 时为摆线．）如果 $a:b$ 是有理数 $=p/q$（既约分数），则 C' 在 C 上旋转 q 周后回到原来的位置，这种情形 Γ 都是代数曲线．特别是 $a=4b=4c$ 时的内摆线称为**星形线**（asteroid）（图 25）．它的直角坐标方程为 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$．又两端在直角坐标系的 x，y 轴上，长度

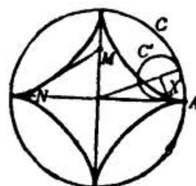


图　25

为 a 的线段的包络线就是这样的曲线（图 25）．$a=b=c$ 时的外摆线是心脏线（图 26）．

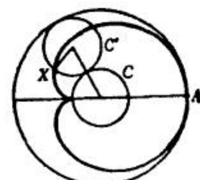


图　26

底线 C 为直线，滚线 C' 为椭圆或双曲线，极 X 是 C' 的焦点时的一般旋轮线称为 **Delaunay 的曲线** (Delaunay's curve)(图 27).



图 27

C 为直线，C' 为抛物线，X 为 C' 的焦点时的一般旋轮线称为**悬链线** (catenary)(图 28). 把均匀密度的绳的两端悬挂在重力场中，绳就成为悬链线的形状. 悬链线的直角坐标方程是 $y = a\cosh x/a = a(e^{x/a} + e^{-x/a})/2$. 从这个曲线上的点 $A(0, a)$ 出发的渐伸线称为**曳物线** (tractrix)(图29). 设曳物线的任意一点 P 的切

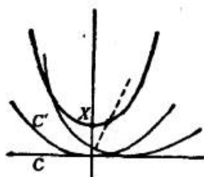


图 28

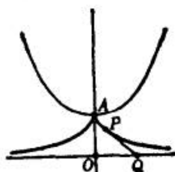


图 29

线与 x 轴的交点为 Q，则 PQ 的长度等于常数 a. 因而在 A 点的重物用长度为 OA 的绳在 x 轴上拉引时，这个重物描出的曲线是曳物线. 它的方程当取 t 为参数时是 $x = a(\log\tan t/2 + \cos t)$, $y = a\sin t$.

一点 Q 在 x 轴上作匀速度运动，另一个点 P 始终向着 Q 按一定的速度运动时，P 的轨迹称为**追踪曲线** (curve of pursuit)(图30). 若 Q 的速度是 P 的速度的 α 倍，则追踪曲线的方程，当 $\alpha \neq 1$ 时为 $2(x-a) = y^{1-\alpha}/c(1-\alpha) - cy^{1+\alpha}/(1+\alpha)$, $\alpha = 1$ 时为 $2(x-a) = (1/c)\log y - cy^2/2$. 使 Q 在更一般的曲线上运动来代替在 x 轴上运动的情形，也可以考虑类似的问题.

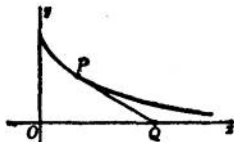


图 30

一般称为**螺线**、**蜷线**、**涡旋线** (spiral) 等的平面曲线多用极坐标 (r, θ) 表示为 $r = f(\theta)$ (f 单调) 的形式. **Archimedes 螺线** (Archimedes' spiral) 是由方程 $r = a\theta$ 表示的(图 31), Archimedes 发现了由二直线 $\theta = \theta_1$ 和 $\theta = \theta_2$ $(\theta_1 < \theta_2)$ 以及此曲线所围的面积是 $a^2(\theta_2^3 - \theta_1^3)/6$. **Bernoulli 螺线** (Bernoulli's spiral) 或**对数螺线** (logarithmic spiral) 或**等角螺线** (equiangular spiral) 是由方程 $r = ke^{a\theta}$ 表示的(图 32), $\theta =$ 常数的直线与此曲线的切线所夹的角为常数. 又，Johann Bernoulli 发现了这曲线的渐伸线、渐屈线都与该曲线是全等的. 另外，由方程 $r = a/\theta$ 表示的曲线称为**双曲螺线** (hyperbolic spiral)，由方程 $r^2\theta = a^2$ 表示的曲线称为**连锁螺线** (lituus)，它们分别有如图 33，图 34 的形状.

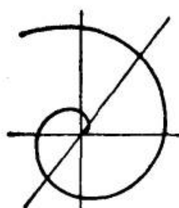


图 31

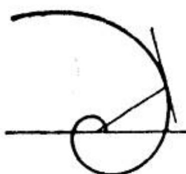


图 32

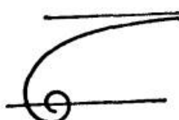


图 33

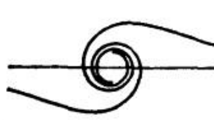


图 34

对于自然方程† $\rho = \varphi(s)$, φ 是简单函数的情形也得到了研究. 由方程 $\rho = ks$ (k 为常数) 表示的是 Bernoulli 螺线. 由方程 $\rho = a^2/s$ 表示的曲线称为 **Cornu 螺线**或**回旋曲线** (clothoid) (关于图 → 合流型函数). 它的参数表示为

$$x = a\sqrt{\pi}\int_0^t \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt,\quad y = a\sqrt{\pi}\int_0^t \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt$$

(Fresnel 积分†). M. A. Cornu 在表示物理光学中的衍射现象时用到了这个曲线.

作为其他初等函数†的图象出现的曲线，例如由方程 $y = \sin x$ 表示的曲线称为**正弦曲线** (sine curve), $y = e^x$, $y = \log x$ 的图象分别称为**指数曲线** (exponential curve)、**对数曲线** (loga-

rithmic curve)，但这两者是全等的. 相对代数曲线来说，不是代数曲线的解析曲线称为**超越曲线**(transcendental curve).

关于平面曲线以及空间曲线的微分几何的性质→曲线和曲面的微分几何. 关于平面代数曲线→代数曲线.

【包络线】 设 $f(s,t)$ 是两个实变数 s,t 的 C^1 类函数，如果固定 $t=t_0$，则 $\xi=f(s,t_0)$成为以 s 为参数的一个曲线 C_{t_0} 的方程. 当 $s(t)$ 为 t 的函数时，$f(s(t_0),t_0)$ 表示 C_{t_0} 上的一点 P_{t_0}，设 t_0 变动时 P_{t_0} 的轨迹为 E. 如果 $s(t)$ 为 C^1 类函数，则 E 也是 C^1 类曲线. 在各个点 P_{t_0}，当 E 与 C_{t_0} 总是相切时，E 称为曲线群 C_t 的**包络线** (envelope). 当给出 $f(s,t)$ 时，为求出 E 只需要确定函数 $s(t)$，但函数 $s(t)$ 必须满足的条件是对于 $s=s(t)$ 有 $\partial f/\partial s=\lambda\partial f/\partial t$. 对于 $n=2$，C_{t_0} 的方程由 $f(x,y,t_0)=0$ 给出时，C_{t_0} 与 $f_t(x,y,t_0)=0\,(f_t=\partial f/\partial t)$ 相交于 P_{t_0}. 由 $f(x,y,t)=0$ 与 $f_t(x,y,t)=0$ 消去 t 后得到的 $R(x,y)=0$ 称为 $f(x,y,t)=0$ 的**判别式** (discriminant). 满足判别式的点 (x,y) 的集合是由 E 与 C_{t_0} 的奇点的轨迹合并而成的.

【参】 [1] K. Menger, Kurventheorie, Teubner, 1932; [2] R. L. Wilder, Topology of manifolds, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1949; [3] G. T. Whyburn, Analytic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1948; [4] 窪田忠彦，微分幾何学，岩波，1940; [5] G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I, II, Teubner, 1910—11; [6] F. G. Teixeira, Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches I—III, Coïmbre, 1908—15; [7] 佐久武雄，曲線の追跡，成美堂(河出), 1937.

Peano 曲线 [英 Peano curve 法 courbe de Peano 德 Peanosche Kurve 俄 пеановская кривая 日 ペアノ曲線] Euclid 平面 E^2 上的连续曲线†，也就是线段 $I=[0,1]$ 到 E^2 的连续映射 f 下的象 $f(I)$，可以覆盖整个正方形. 这样的连续曲线称为 **Peano 曲线**. 最初由 G. Peano 给出了它的例子，但由 D. Hilbert 把它简单化，并按下图表示的方法，作出了这样的曲线 (Math. Ann., **36** (1890), **38** (1891)).

如图 1，把正方形及线段四等分，使 D_i 对应于 T_i，然后，如图 2 把各个 D_i 四等分，并使

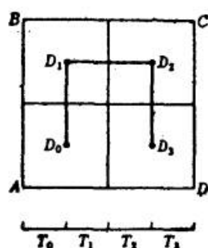
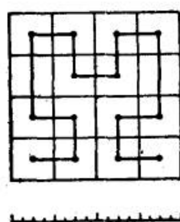


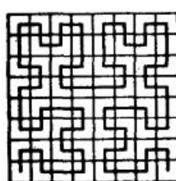
图 1


图 2

D_{ij} 对应于 $T_{ij}(j=0,1,2,3)$，照此作法逐次进行(图 3). 对应于正方形序列 $D_i\supset D_{ij}\supset D_{ijk}\supset\cdots$，确定唯一共同点 $p_{ijk}\cdots$，使这个点对应于线段序列 $T_i\supset T_{ij}\supset T_{ijk}\supset\cdots$ 的共同点 $t_{ijk}\cdots$. 对应 $t_{ijk}\cdots\to p_{ijk}\cdots$ 成为由线段 $[0,1]$ 到正方形 D 上的连续映射，并且这个连续曲线具有二重点、三重点、四重点，多重点的集合具有连续的基数，形成正方形内的稠密†集.

改进这个方法，可以使不具有三重点以上的重复点. 但是不可能做到最多只具有二重点.

又如图 4，图 5，图 6 所示，也可以作出


图 3

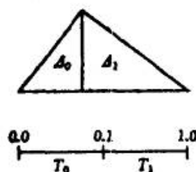


图 4

Peano曲线. 这就是把三角形及线段[0,1]逐次分成两份，建立如下的对应关系：使二进小数 $t=0.ijk\cdots(i,j,k,\cdots=0,1)$ 所表示的点对应于 $\Delta_i\supset\Delta_{ij}\supset\Delta_{ijk}\supset\cdots$ 的唯一共同点，就这样可得到由线段 $[0,1]$ 到三角形上的连续映射 (→曲线).

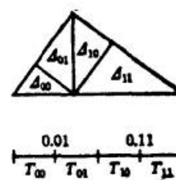


图 5

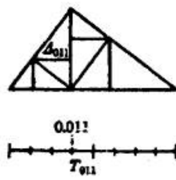


图 6

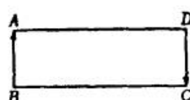
【参】［1］高木貞治，解析概論，岩波，增訂版，1943，534—536；［2］辻正次，集合論，共立出版，新版，1967；［3］S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton Univ. Press, 1949, p. 5.

曲面［英 surface　法 surface　德 Fläche　俄 поверхность　日 曲面］　曲面的概念可以朴素地用“曲线移动可以形成曲面”，“立体的表面是曲面”等来解释，但是这些都不能作为数学上曲面的定义．也有通俗地把曲面和平面区别开，凡不是平面的“面”都称为曲面，但一般来讲，在数学中所谓曲面也包括平面．如果把曲线⁺看做是一维连续统，则可以把曲面定义为二维的连续统，但是至今还没能按照这样的定义形成与曲线论相应的理论（→曲线）．通常称为**面**或**曲面**的是二维拓扑流形⁺，即满足第二可数公理⁺，且各邻域与 Euclid 平面的圆的内部同胚⁺的拓扑空间．以后再介绍广义的曲面概念，暂时按这样的曲面概念来说明．

【例及分类】　与二维单形⁺或二维球面⁺同胚的拓扑空间是最简单的曲面的例子．曲面一般可以进行单形剖分⁺(或者三角形剖分)，因此它与二维多面体⁺是同胚的（T. Radó, Acta Sci. Math. Szeged, 1925）．紧的⁺曲面称为**闭曲面**(closed surface)，不是紧的曲面称为**开曲面**(open surface)．闭曲面可以剖分成有限个二维单形，而且表示为组合流形⁺．具有正则边界⁺的二维组合流形称为**有界**(英 with boundary　德 berandet)曲面．二维单形就是它的例子，球面是无界闭曲面的例子．

按照一般的伪流形⁺的定义，曲面可以分为可定向⁺的曲面和不可定向⁺的曲面．当曲面能够同胚地嵌入⁺三维 Euclid 空间时，因为曲面是否可定向与能否确定曲面的内外侧是一致的，所以可定向的称为**双侧的**（英 two-sided)，不可定向的称为**单侧的**(英 one-sided)，不可定向的闭曲面不能嵌入到三维 Euclid 空间．

把长方形扭成 180° 后把对边粘合起来得到的 **Möbius 带**(英 Möbius' strip　德 Möbiussches Band)，这是最先发现的单侧(有界的)曲面．这个曲面是使图 1 中长方形 $ABCD$ 的对边 BA 与 DC 粘合而得到的．



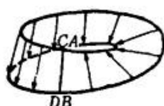


图 1

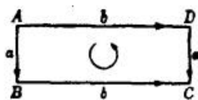




图 2

如图 2，把长方形 $ABCD$ 的对边 AB 与 DC，BC 与 AD 粘合，则得到与两个圆周的直积 $S^1\times S^1$ 同胚的曲面．这个曲面是二维的**环面**(英 torus, anchor ring　德 Ringfläche)．这时长方形的四个顶点 A，B，C，D 都集中到曲面上的一点 P，长方形的边 $AB = DC$，$BC = AD$（= 是粘合的意思）分别成为曲面上的曲线 a'，b'．像 a'，b' 这样从曲面上的一点出发再回到出发点的曲线，称为曲面上的**回归线**(又称**回归截线**)(德 Rückkehrschnitt)．用符号 $aba^{-1}b^{-1}$ 表示环面．这意味着首先构成以四个线段 $a=AB$，$b=BC$，CD，DA 为四边的凸四边形，然后将这个定向四边形按上述方法使 AB 与 DC，BC 与 AD 粘合而得到环面，更进一步对与凸四边形的边 $a = AB$ 贴合在一起而赋予“自然的”方向的 CD 来说，它的逆向 DC 与第一边 $AB = a$ 的粘合用 a^{-1} 来表示(b^{-1} 也如此)．同理用 aa^{-1} 表示球面(图 3)，$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ 表示图 4 最下面的曲面．通过这个曲面上的一点可以得到四条回归线．

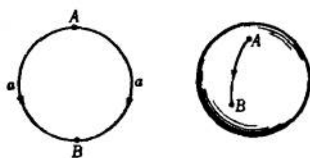


图 3

一切无边界的闭曲面，可以由平面上的 $2n$ 边形的每两个边分别粘合而得出．可以证明，无边界但可定向的闭曲面都与

(1)　　$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$

图 4

所表示的曲面同胚．这个曲面的一维 Betti 数†等于 $2p$，0 维及二维 Betti 数是 1，挠群†的 Betti 数是 0．p 称为这个曲面的**亏格**（英 genus 德 Geschlecht）．具有边界 $c_1, \cdots, c_k$ 的可定向闭曲面（图 5）可以表示为

(2) $$w_1c_1w_1^{-1}\cdots w_kc_kw_k^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}.$$

无边界的不可定向闭曲面可表示为

(3) $$a_1a_1a_2a_2\cdots a_qa_q.$$

q 称为曲面 (3) 的**亏格**．具有边界 $c_1, \cdots, c_k$ 的不可定向的闭曲面可表示为

(4) $$w_1c_1w_1^{-1}\cdots w_kc_kw_k^{-1}a_1a_1\cdots a_qa_q.$$

(1)，(2)，(3)，(4) 称为曲面的**标准型** (normal form)，这些曲面上的曲线 a_i，b_i，w_k 称为曲面的**正截口** (normal section)．

例如，aa 表示圆周上的对径点（直径两端）的粘合（图 6），且与射影†平面同胚，把它施行三角形剖分后成为图 7．又 $aabb$ 是图 8 所表示

图 5

图 6

图 7

图 8

的曲面，称为 **Klein 瓶**（英 Klein's bottle 德 Kleinscher Schlauch）．

图 9 的曲面称为**环柄**（英 handle 德 Henkel），图 10 的曲面称为**交叉帽**（德 Kreuzhaube）．

图 9

这些都是有边界的曲面，其中环柄是可定向的，而交叉帽是不可定向的．后者与 Möbius 带同胚．从球面镞掉 p 个圆盘，在镞掉处分别安上环柄，则与曲面 (1) 同胚；如果不用环柄而分别安上交叉帽，则与曲面 (3) 同胚．

图 10

曲面(3)的0, 1, 2维的Betti数分别为1, $q-1$, 0, 挠群的0维及2维的Betti数为0, 而1维时成为阶数是2的循环群. 从而把曲面进行三角形剖分时的0, 1, 2维的拓扑单形的数分别为α^0, α^1, α^2时, 对于曲面(1), (3), 根据Euler-Poincaré公式†分别有

$$\alpha^0-\alpha^1+\alpha^2=2(1-p),$$
$$\alpha^0-\alpha^1+\alpha^2=2-q.$$

所有一元复变数的代数函数†的Riemann面†都是(1)形的曲面. 它的亏格p与其代数函数的亏格是一致的.

在上述意义下所定义的闭曲面都与(1), (2), (3), (4)中的某一个同胚,两个曲面成为同胚的充分必要条件是: 其边界数, 是否可定向, 以及亏格(或Euler示性数† $\alpha^0-\alpha^1+\alpha^2$)等都分别是一致的. 这称为**曲面的拓扑的基本定理** (fundamental theorem of the topology of surfaces). 根据这个定理完全可以解决闭曲面的同胚问题†. 关于三维以上的流形的同胚问题,甚至在紧的情形也还没有得到解决(1963).

对于曲面的表面积→长度和面积. 对于曲面的微分几何→曲线和曲面的微分几何.

【参】 [1] B. von Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, Springer, 1932; [2] H. Seifert- W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934; [3] S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton Univ. Press, 1949; [4] D. Hilbert-S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer, 1932; [5] 河田敬義,位相数学,共立出版,1956.

平面域 [英 plane domain 法 domaine dans le plan 德 Gebiet in der Ebene 俄 плоская область 日 平面領域] 【复平面上的域】 复平面或复球面上的域†(即连通†开集)称为(**平面**)**域** (英 (plane) domain, region 德 Gebiet, Bereich). 也称为**面分**.域的闭包称为**闭域**(closed domain). (但这时的拓扑不一定是普通平面的拓扑,一般考虑为适当的Riemann面上的拓扑(后述).) 如果J是复数平面内的Jordan曲线†, 则J的内部†是域. 这种形状的域称为**Jordan域** (Jordan domain).两端在域D的边界上的Jordan弧中,被D所包含的称为**D的截线**(英 cross cut 德 Querschnitt).

关于域D的下述三个条件1)—3), 任何一个都等价于D是单连通的†. 1) Q为D的任意截线时,$D-Q$正好具有两个连通分支†. 2)在D内的任意Jordan曲线在D中同伦†于一点. 即在D上连续变形可缩为一点. 3) 对于D单值定理†恒成立. 在D是复球面上的域的情形下, D的单连通性还与以下4), 5), 6)等价. 4) D的边界由一个连续统†或由一点构成. 5) D内的Jordan曲线的内部或外部总包含在D中. 6) 对于复球面, D的余集是连通(不一定是弧状连通)闭集.

D是复平面上的n连通†域时,如果适当选取D的没有共同点的$n-1$个截线$Q_1, \cdots, Q_{n-1}$,则$D-(Q_1\cup\cdots\cup Q_{n-1})$成为单连通域.

以下举出几个具有代表性的域的例子. 1) **圆形域**(circular domain): $|z-c|<r$. 2) **半平面** (half plane): $\Re z>0$, $\Im z>0$等. 3) **角域** (angular domain): $\alpha<\arg(z-c)<\beta$. 4) **圆环域** (annular domain): $r<|z-c|<R$. 5) **裂纹域** (slit domain): 从某个域D去掉至多除一个端点外全部包含在D内的Jordan弧Γ后得到的域; 这个被去掉的Γ称为**裂纹** (slit).

【边界元素】 对于域D的边界点P, 可作收敛于P的D的点列$P_\nu\to P$, 使折线$P_1P_2\cdots$完全属于D时, P称为**D的可达的** (accessible)边界点,反之,称为**不可达的** (inaccessible)边界点. 例如,在从正方形$0<x<1$, $0<y<1$除掉$x=1/(n+1)$, $0<y\leqslant 1/2(n=1, 2, \cdots)$的域中, 使$x=0$, $0\leqslant y<1/2$的点就是不可达的边界点(图1).

从以光滑的Jordan曲线包围的域D的边界点P为顶点、两边的起始部分被D包含的角域内部收敛于P的D内曲线, 称为终点为P的**Stolz道路** (Stolz's path).

单连通域D的、至多共有端点的截线序列$\{q_\nu\}$满足以下二条件时, 称为**基本截线序列** (fundamental sequence of cross cuts) (图2). i) q_ν在D内把$q_{\nu+1}$与$q_{\nu-1}$分开; ii) 当$\nu\to\infty$时, q_ν收敛于边界的一点. 当$\{q_\nu\}$为基本序

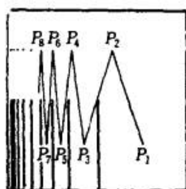


图 1

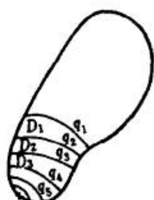


图 2

列时，设由 q_ν 分开且包含 $q_{\nu+1}$ 的D的子域为D_ν，则 $\bigcap \overline{D}_\nu$是只由D的边界点构成的集合.从两个基本序列 $\{q_\nu\}$, $\{q'_\nu\}$ 作 D_ν, D'_ν, 如果q_μ除有限个外都包含于 D_μ 中，q'_ν 除有限个外也都包含于D_μ中，则两个基本序列称为**等价的**. 这就是实际的等价关系†. 等价的基本序列类称为**边界元素**(英 boundary element 德 Primende). 这些概念的建立应归之于 C. Carathéodory ([4]). 多重连通域的边界元素，对于孤立的连续统的各个分支可同样定义. 例如，截线域的截线端点以外的点，在它的两侧确定不同的边界元素. 闭域的概念，通常也是看作加上所有的边界元素的域. 另外，各种理想边界的概念是由于考虑适于种种目的的"边界元素"而派生出来的(→理想边界).

【域核】 设 $\{G_\nu\}$ 是复平面上包含原点的域的序列. 原点的某个邻域被所有的 G_ν 包含时，取适当的域 G 后，则包含原点的、被G包含的所有闭域，除有限个例外的情形以外，都含于G_ν，所有这样的G的并集K (被所有的 G_ν 包含的原点邻域不存在时，则只由原点构成的集合)被 Carathéodory 命名为 $\{G_\nu\}$ 的**域核** (domain kernel). G_ν的所有无限子序列具有同样的域核时，则称 $\{G_\nu\}$ 收敛于K. 域核对于研究映射函数序列的极限是一个重要的概念(→保角映射).

【参】 [1] 辻正次，集合論，共立出版，1933; [2] 小松勇作，等角写像論，上，共立出版，1944; [3] M. H. A. Newman, Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge Univ. Press 第二版 1951; [4] C. Carathéodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann., **73** (1913), 323—370.

四色问题 [英 four colour problem 法 problème des quatre couleurs 德 Vierfarbenproblem 俄 задача о четырёх цветах закрашиваний 日 4色問題] 在为一个球面上(或平面上)的地图着色时，四种颜色是否充分必要？这是著名的四色问题. 为了正确地陈述这个问题，我们必须附加以下两个条件: (i) 每一个国家在地图上是一个连通†域; 海的连通部分当作一国. (ii) 有相邻边界线的两个国家必须用不同的颜色. 另一方面，只是在有限个点相接的两个国家，可以用相同的颜色.

这个推测在 1852 年由 Francis Guthrie 得出并且通信告诉了 De Morgan. 在 1878 年 A. Cayley 也注意到这个问题. 虽然它的必要性是明显的，但是这个推测的充分性还没有被证明. (对于这个问题用计算机的肯定解答的报告，请看美国数学会公报 82 卷(1976 年)中 W. Haken 和 K. Appel 所著文章.)对于国家的数目 $\leqslant 40$ 的地图，这个问题已被解决 (O. Ore 和 J. Stemple, 1968 年). 对于任何地图的着色，用五色就足够了，这是容易证明的 (P. J. Heawood, 1890 年).

另一方面，为环面†上的地图着色，用七色是充分必要的. 一般在 Euler 示性数† $\chi < 2$ 的闭曲面上地图的着色问题比球面 ($\chi = 2$) 上是容易的. 设 p_k 是为 Euler 示性数 $\chi = k(<2)$ 的曲面上的任意地图着色时所需颜色的最小种数，p_k 称为曲面的**色数**(chromatic number). 那么有 Heawood 不等式 (1890 年)

$$p_k \leqslant [(7+\sqrt{49-24k})/2]. \qquad (1)$$

这个括号$[\alpha]$的意思是最大整数 $a \leqslant \alpha$. J. W. T. Youngs 和 G. Ringel 在 1968 年证明了除 Klein 瓶(这是不可定向的 $\chi = 0$ 的曲面)以外(1)式的等号是成立的. 在 1934 年 P. Franklin 证明了 Klein 瓶的色数是 6.

【参】 [1] 高木貞治，数学小景，岩波，1943; [2] P. Franklin, The four-colour-problem, Scripta Math., **6** (1939), 149—156, 197—210; [3] D. Hilbert-S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer, 1932 (英译本: Geometry and the imagination, Chelsea, 1952); [4] O. Ore, The four-colour problem, Academic Press, 1967; [5] G. Ringel, Map colour theorem, Springer, 1974; [6] W. Haken - K. Appel, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976).

七、微分几何学(微分流形和复流形)

微分几何学 [英 differential geometry 法 géométrie différentielle 德 Differentialgeometrie 俄 дифференциальная геометрия 日 微分幾何学] 在古典的意义下,**微分几何学**是应用微分学来研究(Euclid)平面和空间中的曲线、曲面等图形性质的一个数学分支. P. de Fermat 研究了对光滑平面曲线作切线的方法,成了微积分的先驱. 从此可以想到,曲率、曲率圆、渐屈线、包络线等平面曲线的微分几何是作为微积分的一部分发展起来的. 可是,从空间曲线的类似研究出发,逐渐扩展到曲面的渐近曲线、曲率线、曲率、测地线、直纹曲面等等的研究领域,与此同时,曲面内蕴几何等崭新的思想产生了,因此,C. F. Gauss 奠定了曲面论的基础,使微分几何有了作为一个数学分支的巩固地位.曲线、曲面的微分几何的研究对于数学的其它分支以及力学、物理学、工程学等的影响是不可估量的. 例如,E. Beltrami 发现:所谓伪球面的那种曲面上的几何与非 Euclid 几何有密切的关系;测地线† 和力学、变分学、拓扑学等有深刻的联系,是内容丰富的研究课题,这方面有以 J. Hadamard, H. Poincaré, P. Funk, G. D. Birkhoff 等人为首的优异研究. 又如极小曲面† 是和复变函数论、变分学、拓扑学关联很深的研究领域,这里有 K. Weierstrass, H. A. Schwarz, J. Douglas 和其他人的卓越贡献.

Euclid 几何是属于 F. Klein 埃尔兰根纲领的一种几何(→埃尔兰根纲领),对于 Klein 意义下的其它几何也可以进行微分几何的研究. 例如,射影微分几何† 是把射影几何意义下的平面或空间中的曲线和曲面对射影变换的不变性质,系统地用微分学进行研究的学科. 射影微分几何的研究是以 E. J. Wilczynski, G. Fubini 等为中心进行的;仿射微分几何、保形微分几何的研究则是以 W. Blaschke 为中心进行的(→各种空间的微分几何学).

B. Riemann 受 Gauss 曲面内蕴几何的启示,于 1854 年以"Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen"为题在格廷根作了就职讲演(Göttingen Abh., **13**(1868), 1~20; 全集,第二版 1892. p.272—287)而开创了所谓 Riemann 几何(→Riemann 流形). 这种几何不仅包括 Euclid 几何和非 Euclid 几何作为它的特例,而且对进入二十世纪以来的空间概念和几何思想给予不可估量的巨大而深远的影响. Riemann 几何后来受到代数的不变式论的影响,由 E. B. Christoffel, C. G. Ricci 等人把它当作二次微分形式的不变式论进行了研究. Riemann 几何之所以受到人们的注意,是由于 1916 年 A. Einstein 开始把它应用到广义相对论上去.

同一年,T. Levi-Civita 引进了所谓 Levi-Civita 平行的概念,由此才使 Riemann 空间具有明显的几何意义而易于理解. H. Weyl, A. S. Eddington 等注意到平行性是仿射几何的概念,从 Riemann 空间中除去度量性质,只保留平行概念,仿射地展开一种几何理论,这种几何叫作仿射联络几何(→联络).

Euclid 空间的直线具有其各点的切线都平行的性质,而在仿射联络几何的空间内也可以根据这个性质定义一种与直线相类似的所谓道路† 的曲线,它可以作为某种类型的二阶常微分方程组的积分曲线给出. 这种微分方程组的系数确定了平行性,也就确定了仿射联络. Weyl 发现了那种使道路的全体不变的系数变换,就是仿射联络的射影变换†. 研究道路或仿射联络在这些变换下不变性质的几何学,称为道路射影几何. L. P. Eisenhart, O. Veblen 等人研

究了这种几何，射影联络的概念就此产生了．与此相类似地，保形联络的概念也是从考查 Riemann 空间保形变换[†]的研究产生的．

这样的几何一般地不能看作是 Klein 意义下的几何．这是因为：相当于 Klein 意义下几何中的合同变换的变换，在前者中一般不存在，即使存在，在空间内也是没有可迁作用的．因此，几何学除了以公理为基础的几何之外，还可以分为两个范畴，即以群概念为基础的 Klein 意义下的几何和属于 Riemann 思想范畴的几何．在这种状况下，E. Cartan 以较高的观点统一了 Klein 和 Riemann 的思想，构成了在他的意义下的联络理论．

在空间各点都附随以具有一定基本群（结构群）G 的 Klein 意义下的空间(切空间)，在相邻两点附随的空间之间给出使它们在变换 G 下可重合的法则，这个法则叫作联络，称所考虑的空间是以 G 为结构群的联络空间，研究这种空间的结构以及其中图形性质的数学分支叫做以 G 为结构群的联络几何．以 G 为结构群的 Klein 意义下的空间是这种空间的最简情形．当 G 是 Euclid 几何的合同变换群时，以 G 为结构群的联络空间称为 Euclid 联络空间，Riemann 空间就是其中以无挠率为特征的一种．如果 G 是射影(保形)几何的变换群，则得到 Cartan 意义下的射影(保形)联络空间，其中重要的有所谓标准射影(保形)联络空间，它们与 Veblen 等所研究过的具有射影联络、保形联络的空间本质上是一致的．Cartan 联络的思想对现代微分几何有着极其深刻的影响．

在曲线 C 上一点 P 处的切线是在 C 上取与点 P 邻近的点 Q，当 Q 趋近于 P 时直线 PQ 的极限位置，所以它在 P 点的周围，C 上任意小的邻域中就可以确定．象这样从给定的图形或空间一点处的任意小邻域都能确定的对象，则叫作局部的（小范围的或微分几何的）概念(或性质)．因为微分几何是以微分为主要的研究工具而发展起来的，所以，它的研究多为小范围的．与此相反，与给定图形或空间的整体相关联所确定的对象叫整体（大范围的）概念(或性质)．在现代的微分几何中，以探讨微分几何(小范围的)性质和大范围性质之间的关联为目标的研究，引起人们的兴趣而非常盛行．这种观点由 Blaschke 所强调，用于研究卵形线、卵形面的微分几何．S. Cohn-Vossen 对于卵形面的刚性研究是属于这个范围的，又前面提到的关于测地线和极小曲面的研究中也有很多是属于这个观点的．

作为 Riemann 几何和联络几何基地的空间，从现代数学的观点来看就是微分流形[†]．但在 Riemann 时代，Lie 群论以及拓扑学还没有发展起来，因而 Riemann 几何只限于小范围的理论．关于联络几何，包括 Cartan 的研究在内，直到 1930 年几乎都是小范围的研究．H. Hopf 约在 1925 年才开始对 Riemann 空间的微分几何结构与拓扑结构的关系进行了研究．随着微分流形概念的确立，Lie 群的大范围理论的进展以及拓扑学的发展，促使陈省身(S. S. Chern)于 1944 年证明了 n 维的 Gauss-Bonnet 公式[†]和 1941 年 W. V. D. Hodge 展开了调和积分[†]论的工作等等都是受了这种影响，而把 Riemann 几何作为具有非退化二次微分形式的微分流形的理论来研究．关于具有基本群 G 的联络几何，由于 C. Ehresman 于 1950 年的研究，可以把它看作微分流形 M 上，以 G 为结构群的主纤维丛[†]上一次微分形式(即联络形式[†])的理论．这样一来微分几何，不用说与 Lie 群、拓扑学，就是与古典微分几何、变分学、微分形式论、代数几何、多变量复变函数论等许多其它分支都联系起来地发展着．

由于与代数几何以及复变函数论相联系，对复流形[†]的研究盛行起来，随之对微分流形上的复结构[†]、殆复结构[†]等的研究也开展起来．联络可以看作是微分流形上的一种结构．现在，微分流形是在微分几何与拓扑学两者的观点下发展起来的重要研究课题．因此，微分几何可看作是给定二次微分形式、Finsler 度量、复结构、联络等等特殊结构的微分流形的理论，这可以说是现代最普遍的观点．

在日本继窪田忠彦、河口商次、矢野健太

郎、佐々木重夫等人之后，在现代微分几何的各分支中有很多研究者活跃地进行着工作.

【参】 [1] L. P. Eisenhart, A treatise on the differential geometry of curves and surfaces, Ginn, 1909; [2] G. Darboux, Théorie générale des surfaces I—IV, Gauthier-Villars, 1888—96; [3] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Springer, I 第三版 1930, II 1923, III 1929; [4] L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 1926; [5] E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1928, 第二版 1946; [6] J. A. Schouten, Ricci-calculus, Springer, 第二版 1954; [7] O. Veblen-J. H. C. Whitehead, The foundations of differential geometry, Cambridge Tracts, no. 29, 重印 1953; [8] S. S. Chern (陈省身), Topics of differential geometry, Inst. for Adv. Study, Mimeographed Notes, 1951; [9] W. V. D. Hodge, The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge Univ. Press, 1941; [10] S. Kobayashi (小林昭七)-K. Nomizu (野水克己), Foundations of differential geometry, Interscience, 1963; [11] E. Cartan, Oeuvres complètes I, II, III, Gauthier-Villars, 1952—55.

微分流形 [英 differentiable manifold 法 variété différentiable 德 differenzierbare Mannigfaltigkeit 俄 дифференцируемое многообразие 日 微分可能多様体] **【局部坐标】** 设M是拓扑流形†，即M是 Hausdorff 空间且在它的各个点处都具有与 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集同胚的邻域. 当M的开集U与 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 E 同胚时，则把U和从U到E的同胚ϕ的组 (U, ϕ) 叫作M的**坐标邻域**(coordinate neighbourhood). 设 $\boldsymbol{R}^n$ 的点 $\phi(p)$ $(p\in U)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的坐标为 $(x^1(p), \cdots, x^n(p))$，则 $x^1, \cdots, x^n$ 是U上的实连续函数，这 n 个函数组 $(x^1, \cdots, x^n)$ 叫作在坐标邻域 (U, ϕ) 中M的**局部坐标系** (local coordinate system)，而 $(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ 叫作点 p 的**局部坐标** (local coordinates). n 维拓扑流形M的坐标邻域族 $S=\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 叫作M的**坐标邻域系** (system of coordinate neighbourhoods)，如果 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 构成M的开覆盖.

【微分流形】 设 n 维拓扑流形M的坐标邻域系为 $S=\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 对于属于$S$的任意坐标邻域 (U_α, ϕ_α), (U_β, ϕ_β)，如果 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$，则 $\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}$ 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 $\phi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 $\phi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 的同胚. 用 $\boldsymbol{R}^n$ 的坐标 $(x^1, \cdots, x^n)$ 可以表示为 $(\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1})(x)=(f_{\beta\alpha}^1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, f_{\beta\alpha}^n(x^1, \cdots, x^n))$. 如果 n 个函数 $f_{\beta\alpha}^1, \cdots, f_{\beta\alpha}^n$ 对于任意的 $\alpha, \beta\in A$ (但 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$)可微分 r 次 (或是(实)解析的)，则S叫作 **C^r 类** (of class C^r) (或 **(实) 解析的** (real analytic)) **坐标邻域系** (但 $1\leqslant r\leqslant\infty$). 实解析坐标邻域系也叫作 **$C^\omega$ 类坐标邻域系**. 如果 n 维拓扑流形M具有 C^r 类坐标邻域系S (但 $1\leqslant r\leqslant\omega$)，则$M$与$S$的组 (M, S) 叫作 n 维 **C^r 类微分流形** (differentiable manifold of class C^r)，或叫做 **C^r (类)流形** $(1\leqslant r\leqslant\omega)$. 微分流形也叫作**可微分流形**. 特别是把 C^ω 流形叫作 **(实) 解析流形** (real analytic manifold). 称M为 (M, S) 的**基础拓扑空间** (underlying topological space)，称M的 C^r 类坐标邻域系S确定了拓扑流形M上的 **C^r (类) 微分结构** (differentiable structure of class C^r) 或者说确定 **C^r 结构** $(1\leqslant r\leqslant\omega)$. 特别是把 C^ω 结构叫作 **(实) 解析结构** (real analytic structure). 基础拓扑空间是紧(仿紧†)的 C^r 流形叫作**紧 (仿紧) C^r 流形**. 当 (M, S) 是 C^r 流形，(U, ϕ) 是M的坐标邻域时，S 与(U, ϕ)所构成的并集 $S\cup\{U, \phi\}$ 仍是M的坐标邻域系，如果它也是 C^r 类的，则 (U, ϕ) 叫作 C^r 流形 (M, S) 的 **C^r 类坐标邻域**(coordinate neighbourhood of class C^r). 特别是属于S的M的所有坐标邻域都是 C^r 类的. (M, S) 的 C^r 类坐标邻域的全体 $\tilde{S}$ 是包含S的 C^r 类坐标邻域系，把 $\tilde{S}$ 叫作 (M, S) 的最大 C^r 类坐标邻域系.

设 S, S' 是M的两个 C^r 类坐标邻域系. 如果 $\tilde{S}=\tilde{S}'$ 成立，则称S与S'在M上确定相同的 C^r 结构，也说 C^r 流形 (M, S) 与 (M, S') 是等价的. 特别值得提出的是 (M, S) 与 $(M, \tilde{S})$ 是等价的 C^r 流形. 如果S是 C^r 类坐标邻域系，S' 是 $C^{r'}$ 类坐标邻域系 $(1\leqslant r<r'\leqslant\omega)$，因为 $r<r'$，则 S' 也可以看作是 C^r 类坐标邻域系. 在这样设想下，如果S与S'确定相同 C^r 结构，则说由S'所确定的 $C^{r'}$ 结构**从属** (subordinate) 于S所确定的 C^r 结构. 如果M是仿紧†的，则可知总存在从属于M的 C^r 结构的 C^ω 结构 (Whitney[8]).

【有界的微分流形】 设 $\boldsymbol{R}^n$ 中满足条件 $x^1 \geqslant 0$ 的点 $(x^1, \cdots, x^n)$ 所构成的半空间为 H^n，H^n 的边界用 ∂H^n 表示. 设 U, U' 是 H^n 的开集，φ 是从 U 到 U' 中的连续映射. 设有包含 U, U' 的 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 W 和 W' 以及从 W 到 W' 中的 C^r 类映射 f，当 f 限制于 U 而等于 φ 时，φ 叫作从 U 到 U' 中的 C^r 类映射. 设 M 是 Hausdorff 空间，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的开复盖. 对于各个 U_α 存在从 U_α 到 H^n 的开集上的同胚 ψ_α; 对于使 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 的任意 α, β，有 $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$ 是从 $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 到 $\psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ 的 C^r 类映射，如果这些条件成立，令 $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$，则 M 与 S 的组 (M, S) 叫作**有界** (with boundary) **的 n 维 C^r 类微分流形**（或称具有边界的 C^r 类流形）. 取含有 M 的点 p 的 U_α，如果 $\psi_\alpha(p)$ 属于 H^n 的边界 ∂H^n，则 p 叫作 M 的**边界点** (boundary point)，M 的边界点的集用 ∂M 表示. ∂M 是 $n-1$ 维拓扑流形，而且 $U'_\alpha = U_\alpha \cap \partial M$，设 ψ_α 限制于 U'_α 上的映射为 ψ'_α，则 $S' = \{(U'_\alpha, \psi'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 ∂M 的 C^r 类坐标邻域系. 因而 $(\partial M, S')$ 是 $n-1$ 维 C^r 流形，把它叫作 (M, S) 的**边界** (boundary). 当 ∂M 是空集时，(M, S) 就是 C^r 流形. 在这个意义下，C^r 流形也可以说是无边界的 C^r 流形.

【流形的定向】 设 $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是 M 的 C^∞ 类坐标邻域系，$(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$ 是 U_α 中的局部坐标系. 假设对于 $U_\alpha \cap U_\beta$ (但 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$) 中的两个局部坐标系 $(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$ 与 $(x^1_\beta, \cdots, x^n_\beta)$ 之间有 $x^i_\beta = F^i(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$ $(i = 1, \cdots, n)$ 关系，且函数行列式†: $D(F^1, \cdots, F^n)/D(x^1_\alpha, \cdots, x^n_\alpha)$ 的值在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 的各点处不为 0. 不论 α, β 取什么值，如果能选取 S 使上述函数行列式在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上常取正值，则称 M 是**可定向的** (orientable)，而 S 则叫作**已定向的坐标邻域系** (oriented system of coordinate neighbourhoods).

设 $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 以及 $S' = \{(V_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ 是两个已定向的坐标邻域系. 如果 M 是连通的，这时在 U_α 的局部坐标系与 V_i 的局部坐标系之间的变换函数行列式对所有的 α, i 和 $U_\alpha \cap V_i$ (但 $U_\alpha \cap V_i \neq \varnothing$) 的各点要么常取正值，要么常取负值，二者必居其一. 取正值时，则称 S 与 S' 是**同向的**，取负值时，则称是**反向的**. 因此，当 M 连通时，已定向的坐标邻域系的集合可分两组，属于同一组的同向，不同组的则互相反向. 把各组叫作连通 C^∞ 流形 M 的**定向** (orientation). 对于可定向的连通流形 M，当指定 M 的一个方向时，M 叫作**定向流形** (oriented manifold). 指定的方向叫**正定向** (positive orientation)，另一个方向叫作**负定向** (negative orientation). 如果 $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 属于正定向，则 S 叫作**正坐标邻域系**，(U_α, ψ_α) 所确定的局部坐标系叫作**正局部坐标系**.

【可微函数】 设 $p \in U$，f 是在 M 上点 p 的邻域中定义的实值函数，(U, ψ) 是 C^∞ 坐标邻域. 如果在 $\boldsymbol{R}^n$ 的点 $\psi(p)$ 的邻域所定义的函数 $f \circ \psi^{-1}$ 为 r 次连续可微 $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$，则称 f 在点 p 是 C^r 类的. 这个定义与 C^∞ 坐标邻域 (U, ψ) 的取法无关. 设 (U, ψ) 确定的 M 的局部坐标为 $(x^1, \cdots, x^n)$，则存在 n 变量的函数 $f(u^1, \cdots, u^n)$，对于 p 的邻域内的任意点 q，$f(q) = f(x^1(q), \cdots, x^n(q))$ 成立，用记号 $f = f(x^1, \cdots, x^n)$ 来表示. 所谓 f 在点 p 是 C^r 类的，不外是 $f(x^1, \cdots, x^n)$ 在 $\mathbf{R}^n$ 的点 $(x^1(p), \cdots, x^n(p))$ 的邻域中是 C^r 类的. 如果在 M 上所定义的实值函数 f 在 M 的各个点都是 C^r 类的，则 f 叫作 M 的 **C^r 类函数** (function of class C^r) $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$.

【切向量】 以下的叙述对于 C^r 流形 (r 任意) 也成立，但是，为了简单起见，仅就 C^∞ 流形来考虑. 并且表示 C^r 流形时，习惯上把 (M, S) 的 S 省去而只写 M，今后就按此惯例来写. M 上的 C^∞ 类函数的全体所组成的实线性空间，用 $\mathfrak{F}(M)$ 表示. 所谓在 M 上点 p 处的**切向量** (tangent vector) 是从 $\mathfrak{F}(M)$ 到 $\boldsymbol{R}$ 的线性映射 L，对于 $\mathfrak{F}(M)$ 的任意函数 f, g 有

$$L(fg) = L(f)g(p) + f(p)L(g)$$

成立. 对于在点 p 处的切向量 L_1, L_2 和实数 λ_1, λ_2，定义 $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$ 如下:

$$(\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2)(f) = \lambda_1 L_1(f) + \lambda_2 L_2(f),$$

$f \in \mathfrak{F}(M)$.

那么，点 p 处的切向量全体构成一个实线性空间 T_p. T_p 叫作在 p 处M的**切空间**或**切向量空间**(tangent vector space). 切空间的维数等于M的维数. M的切向量全体构成以M为底空间的向量丛[†] (→纤维丛). 这个向量丛叫作M的切向量丛[†].

属于 T_p 的线性无关的 r 个向量的有序集叫作在点 p 的**切 r 标架** (tangent r-frame), 但 $r \leqslant n$. M的切 r 标架的全体也构成以M为底空间的纤维丛(切 r 标架丛[†]).

【函数的微分】 对于M上的 C^∞ 类函数 f, 从 T_p 到 $\boldsymbol{R}$ 的线性映射 df_p 由

$$df_p(L) = L(f)$$

来定义. df_p 叫作 f 在点 p 的**微分**(differential). 函数微分的全体构成 T_p 的对偶空间 T_p^*.

【可微映射】 设φ是从C^∞流形M到C^∞流形 M' 的连续映射. 对于 M' 上的任意 C^r 类函数 f', 如果M上的函数 $f'\circ\varphi$ 是 C^r 类的, 则 φ 叫作 **C^r 类可微映射**(differentiable mapping of class C^r)或简称为 **C^r 类映射** ($1 \leqslant r \leqslant \infty$). 如果$\varphi$是从$M$到 M' 上的同胚, 且φ与 φ^{-1} 都是 C^r 类的, 则φ叫作 **C^r 类微分同胚** (diffeomorphism of class C^r). 当从M到 M'上的 C^∞ 类微分同胚存在时, 则称M与 M' 是**微分同胚的** (diffeomorphic).

【映射的微分】 设φ是从M到 M' 的 C^∞ 映射. 对在M上点 p 的切向量 L, 则有在 $\varphi(p)$ 的 M' 的切向量 L' 按

$$L'(g) = L(g\circ\varphi), \qquad g \in \mathfrak{F}(M')$$

和它对应, 对应 $L \to L'$ 用 $d\varphi_p$ 表示, 叫作在点 p 处**映射 φ 的微分**(differential of a mapping φ). 微分 $d\varphi_p$ 是从在点 p 上 M 的切空间 T_p 到点 $\varphi(p)$ 上 M' 的切空间 $T_{\varphi(p)}$ 的线性映射. 如果 $d\varphi_p$ 是一一映射, 则称映射φ在点 p 是**正则的** (regular). 如果φ在M的所有点正则, 则φ叫作 M到 M' 中的**浸入**[†] (immersion). 如果φ是浸入且是一一映射, 则φ叫作M到 M' 中的**嵌入** (embedding, imbedding).

【子流形】 所谓C^∞流形M是C^∞流形 M' 的**子流形** (submanifold), 指的是作为点集来说 M是 M' 的子集, 且从M到 M' 中的恒等映射是M到 M' 中的嵌入. 如果M的拓扑与M作为M'的子空间的拓扑一致, 则M叫作 M' 的**正则子流形** (regular submanifold), 又当M是 M' 的闭集时, M叫作 M' 的**闭子流形** (closed submanifold). n 维仿紧 C^∞ 流形与 $2n+1$ 维 Euclid 空间的闭子流形微分同胚 (Whitney 定理).

如果M是 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^m$ 的子流形, 则在M的点 p 处和M的切空间相正交的 $\boldsymbol{R}^m$ 的向量叫作M在点 p 处的**法向量**(normal vector). M 的法向量全体所构成的以 M 为底空间的向量丛, 称之为**法丛**(normal bundle). 如果M是紧的, 则存在正数 ε, 长度小于 ε 的法向量全体构成 M 在 $\boldsymbol{R}^m$ 中的开邻域, 这个开邻域叫作 M 的**管状邻域** (tubular neighbourhood).

【向量场】 所谓在M的子集N上定义的**向量场** (vector field) 指的是把N的各点 p 对应于在 p 上M的切向量 X_p 的对应 X. X 可以看作是 M 的切丛在N上的截面[†]. 设在 p 的坐标邻域(U, ϕ)的局部坐标系为$(x^1, \cdots, x^n)$, 则在U的各点 p 由

$$(\partial/\partial x^i)_p f = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p),$$

$$f \in \mathfrak{F}(M), \qquad i = 1, \cdots, n$$

所定义的 n 个切向量构成 T_p 的基. 因而在M上定义的向量场 X, 在U的各点 p 处可以表示为

$$X_p = \sum_i \xi^i(p)(\partial/\partial x^i)_p.$$

$\xi^i(i = 1, \cdots, n)$ 叫作向量场X关于$(x^1, \cdots, x^n)$的**分量**(component). 如果各分量 ξ^i 都是 C^r 类函数 ($0 \leqslant r \leqslant \infty$), 则$X$叫作 **$C^r$ 类向量场** (vector field of class C^r). 设在点 p 的另一局部坐标系为$(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n)$, 又关于这个坐标系$X$的分量为 $\bar{\xi}^i$, 则在 p 的邻域各点 q 有

$$\bar{\xi}^i(q) = \sum_j (\partial\bar{x}^i/\partial x^j)_q \xi^j(q).$$

其中 $(\partial\bar{x}^i/\partial x^j)$ 是坐标变换的函数行列式. 以后, 我们所考虑的向量场都假定为 C^∞ 类的, M

上的 C^∞ 类向量场的全体用 $\mathfrak{X}(M)$ 表示.当 X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ 时, $fX + gY$ 由

$$(fX + gY)_p = f(p)X_p + g(p)Y_p$$

所定义, $\mathfrak{X}(M)$ 构成以 $\mathfrak{F}(M)$ 为作用域的加法群[†]. 在点 p 的坐标邻域 (U, ϕ) 中, X 表示为

$$X = \sum_i \xi^i(\partial/\partial x^i).$$

其中 $\partial/\partial x^i$ 是使 U 的各点 p 与 $(\partial/\partial x^i)_p$ 相对应的 U 上的向量场. 上式的右边有时也叫作向量场 X 的**记号** (symbol).

对于任意的 $f \in \mathfrak{F}(M)$,如果规定 $Xf \in \mathfrak{F}(M)$ 由 $(Xf)(p) = X_p f$ 所定义, 则 X 是线性空间 $\mathfrak{F}(M)$ 的线性算子.在坐标邻域 (U, ϕ)中

$$Xf = \sum_i \xi^i \partial f/\partial x^i,$$

X 不外是 M 上的**一阶微分算子** (first order differential operator).

设 X, Y 是向量场,在坐标邻域 (U, ϕ) 中,如果 $X = \sum_i \xi^i(\partial/\partial x^i)$, $Y = \sum_i \eta^i(\partial/\partial x^i)$, 则唯一存在关于 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的分量 ζ^i, 即 $\zeta^i = \sum_k (\xi^k \partial \eta^i/\partial x^k - \eta^k \partial \xi^i/\partial x^k)$所给定的向量场. 这个向量场用 $[X, Y]$ 表示,称之为 X, Y 的 **Poisson 括号式**或简称**括号积** (bracket). $[X, Y]$ 可表示为

$$[X, Y] = \sum_i \Big(\sum_k (\xi^k \partial \eta^i/\partial x^k - \eta^k \partial \xi^i/\partial x^k) \Big) (\partial/\partial x^i).$$

向量场的括号积具有下列性质.

1) $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$,

2) $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$,

3) $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$,
$[X, Y + Z] = [X, Y] + [X, Z]$,

4) $[X, Y] = -[Y, X]$,

5) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (**Jacobi 恒等式** (Jacobi's identity).

从上列关系式可知 $\mathfrak{X}(M)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lie 代数 (→Lie 代数).

设 φ 是从 M 到 M' 的微分同胚, 当 X 是 M 上的向量场时, M' 上的向量场 $\varphi_* X$ 可用

$$(\varphi_* X)_p = d\varphi_q(X_q), \quad p = \varphi(q)$$

来定义. φ_* 是从 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ 到 Lie 代数 $\mathfrak{X}(M')$ 上的同构对应.

【向量场和单参数变换群】 所谓 M 的**单参数变换群** (one-parameter group of transformations) 是满足下列条件的 M 的微分同胚 $\varphi_t (t \in \boldsymbol{R})$的族: 1) 由 $(t, p) \to \varphi_t(p)$ 定义的从 $\boldsymbol{R} \times M$ 到 M 中的映射是 C^∞ 类映射,2) $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

关于单参数变换群 φ_t, 对在 M 的各点 p 的切向量 X_p 可由

$$X_p f = \lim_{t \to 0} (f(\varphi_t(p)) - f(p))/t$$

来定义. 由对应 $p \to X_p$ 给定的向量场 X 叫作 φ_t 的**无穷小变换** (infinitesimal transformation), 也可以说单参数变换 φ_t 是由无穷小变换 X 生成的. φ_t 有时用记号 $\exp tX$ 表示. 设$(x^1, \cdots, x^n)$ 是局部坐标系,则在坐标邻域的各点 p 有

$$X_p = \sum_i (dx^i(\varphi_t(p))/dt)_{t=0} (\partial/\partial x^i)_p.$$

如果 M 是紧的, 则 M 上的任意向量场是单参数变换群的无穷小变换,但一般不是这样.然而就局部来讲,下述事实成立:即当 X 是 M 上的向量场时,对于 M 的点 p, 存在 p 的邻域 U, 正数 ε 以及从 U 到 M 中的映射 $\varphi_t(|t| < \varepsilon)$,且满足下列条件:

1) 由$(t,p) \to \varphi_t(p)$定义的从$(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$ 到 M 中的映射是 C^∞ 类的,而且对各个 t, φ_t 是从 U 到 M 的开集 $\varphi_t(U)$ 上的微分同胚.

2) 如果 $|s|, |t|, |s + t|$ 中的任何一个都小于 ε, 而且 $q \in U$, $\varphi_t(q) \in U$, 则 $\varphi_{s+t}(q) = \varphi_s(\varphi_t(q))$.

3) $X_q f = \lim_{t \to 0} (f(\varphi_t(q)) - f(q))/t$,

$$(f \in \mathfrak{F}(M), q \in U).$$

这样的 φ_t 叫作由向量场 X 所生成的、在 p 周围的**局部单参数变换群** (local one-parameter group of local transformations).

设X, Y是M上的向量场,则在M的各点p

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0}(Y_p - ((\varphi_t)_* Y)_p)/t$$

成立. 这里φ_t是由X所生成的、在p周围的局部单参数变换群,$(\varphi_t)_* Y$ 是把Y限制于p的邻域U上所得到的向量场,再对它实行从U到$\varphi_t(U)$的微分同胚φ_t的变换后在U上的向量场.要注意到下列事实:由于φ_0是U的恒等变换,所以$|t|$充分小时,常有$p \in \varphi_t(U)$,以及上式右边的极限是对向量空间T_p的拓扑结构而言的极限.

特别是当X是M的单参数变换群的无穷小变换时,对于M上的任意向量场Y,常有

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0}(Y - (\varphi_t)_* Y)/t.$$

【张量场】 设在M上点p处的切空间T_p上,由r阶反变s阶共变张量所构成的线性空间为

$$T^r_s(p) = \left(\bigotimes^r T_p\right) \otimes \left(\bigotimes^s T^*_p\right),$$

这里T^*_p表示T_p的对偶线性空间(→线性空间). 所谓在M的子集N上定义的r阶反变s阶共变**张量场**(tensor field)(或(r, s)型张量场)指的是对于N的各点p有$T^r_s(p)$的元K_p与之对应的对应K. 特别是当$r = s = 0$时,K是N上的实函数,这时K叫作**数量场**(scalar field). 当$r = 1$, $s = 0$时,K就是向量场,有时也叫**反变向量场**(contravariant vector field). 当$r = 0$, $s = 1$时,K是**共变向量场**(covariant vector field), 当$r \neq 0$, $s = 0$, 或$r = 0$, $s \neq 0$时,K分别叫作r阶**反变张量场**,s阶**共变张量场**. 反变或者共变张量场K在各个点p上,如果K_p具有对称(或交代)张量的性质,则K叫作**对称**(或**交代**)**张量场**(symmetric (alternating) tensor field).

在M上点p的坐标邻域(U, ϕ)中,如果局部坐标系为$(x^1, \cdots, x^n)$,则在U的各点p的微分$(dx^i)_p$ $(i = 1, \cdots, n)$ 给出T_p的对偶空间T^*_p的基,T_p的基$\{(\partial/\partial x^1)_p, \cdots, (\partial/\partial x^n)_p\}$与$T^*_p$的基$\{(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p\}$互相对偶.因而在$M$上定义的$(r, s)$型张量场$K$在$U$的各点可表示为

$$K_p = \Sigma K^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}(p)(\partial/\partial x^{i_1})_p \otimes \cdots \otimes (\partial/\partial x^{i_r})_p \otimes (dx^{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (dx^{j_s})_p.$$

$K^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}(p)$叫作关于局部坐标系$(x^1, \cdots, x^n)$张量场$K$的**分量**(component). 如果$K$的各分量是$C^t$类$(0 \leqslant t \leqslant \infty)$函数,则$K$叫作**$C^t$类张量场**(tensor field of class C^t).

设在点p的另一坐标邻域(U', ϕ')的局部坐标系为$(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n)$,关于这个坐标系$K$的分量为$\bar{K}^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}$,则在$U \cap U'$的各点$q$,它们的关系可以表示为

$$\bar{K}^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s}(q) = \sum \left(\frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\right)_q \cdots \left(\frac{\partial \bar{x}^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\right)_q \cdot \left(\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}_{j_1}}\right)_q \cdots \left(\frac{\partial x^{l_s}}{\partial \bar{x}_{j_s}}\right)_q K^{k_1 \cdots k_r}_{l_1 \cdots l_s}(q).$$

由M上各点p的张量K_p, L_p的和$K_p + L_p$以及积$K_p \otimes L_p$对应地给出M上的两个张量场K, L的和$K + L$以及积$K \otimes L$. 也可同样地来定义张量场的缩约.

设φ是从M到M'的微分同胚,则$d\varphi_q$是从T_q到$T_p(p = \varphi(q))$的同构,因而$(d\varphi)_q$导出从$T^r_s(q)$到$T^r_s(p)$的同构(→线性空间). 把这个同构写成$\tilde{\varphi}_q$,对于M上的张量场K,可由

$$(\tilde{\varphi}K)_p = \tilde{\varphi}_q(K_q), \quad p = \varphi(q)$$

给出M'上的张量场$\tilde{\varphi}K$. $\tilde{\varphi}$把张量场的和与积分别映射为和与积,保持缩约和可换性.

【张量场的 Lie 导数】 设X是M上的C^∞类向量场,为了简单起见,设X是M的单参数变换群φ_t的无穷小变换. 如果K是M上的任意C^∞类张量场,则M上的C^∞类张量场$L_X K$由

$$(L_X K)_p = \lim_{t \to 0}(K_p - (\tilde{\varphi}_t K)_p)/t$$

确定. $L_X K$叫作K对于向量场X的**Lie 导数**(Lie derivative). 对于一般的X,在上式中若把φ_t理解为由X生成的,p周围的局部单参数变换群,则完全可以同样地来定义$L_X K$(→[向量场]). L_X具有下列性质.

1) $L_X(K + K') = L_X K + L_X K'$,

2) $L_X(K \otimes K') = (L_X K) \otimes K'$

$+K\otimes(L_X K')$,

3) L_X 是可缩约和可换的,

4) 如果 f 是数量场, 则 $L_X f = Xf$. 如果 Y 为向量场,则 $L_X Y = [X, Y]$,

5) $L_{[X,Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$,

6) K 在 φ_t 下不变,即 $\varphi_t K = K$ 对于所有的 t 都成立,这个事实与 $L_X K = 0$ 等价.

【共变张量场与 $\mathfrak{F}(M)$-加法群 $\mathfrak{X}(M)$ 的多线性映射†】 设K是M上 C^∞ 类的 r 阶共变张量场, 由于在M的各点 p 处 K_p 是 $T_p^*\otimes\cdots\otimes T_p^*$ 的元, 所以 K_p 可以看作是从 T_p 到 $\boldsymbol{R}$ 的 r 线性映射 (→线性空间). 如果 $X_1, \cdots, X_r$ 是向量场,则数量场 $K(X_1, \cdots, X_r)$可由 $K(X_1, \cdots, X_r)_p = K_p((X_1)_p, \cdots, (X_r)_p)$ 来确定. $(X_1, \cdots, X_r) \to K(X_1, \cdots, X_r)$ 是从 $\mathfrak{F}(M)$ 的加法群 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$ 的 r 线性映射: 即 $K(X_1, \cdots, fX_i + gY_i, \cdots, X_r) = fK(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_r) + gK(X_1, \cdots, Y_i, \cdots, X_r)$ $(i = 1, \cdots, r; f, g \in \mathfrak{F}(M))$ 成立. 反之,从 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$的任意 r 线性映射, 象上面那样可从适当的 r 阶共变张量场求得, 因此, r 阶共变张量与从 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$ 的 r 线性映射可以看作是相同的. 在K是对称(或交代)的情形下, $K(X_1, \cdots, X_r)$ 关于 $X_1, \cdots, X_r$ 是对称(或交代)的. 对于K的 Lie 导数 $L_X K$, 有

$$\begin{aligned}&(L_X K)(X_1, \cdots, X_r)\\&= X(K(X_1, \cdots, X_r))\\&\quad - \sum_{i=1}^{r} K(X_1, \cdots, [X, X_i], \cdots, X_r)\end{aligned}$$

成立.

【Riemann 度量】 设 g 是M上的 2 阶对称共变张量, g_p 是切空间 T_p上的对称双线性型. 如果 g_p 在各点 p **非退化** (non-degenerate), 则 2 阶对称张量 g 叫作 **Riemann 伪度量**(pseudo-Riemannian metric); 如果 g_p 在各点是正定的, 则 g 叫作 **Riemann 度量**(Riemannian metric). 如果在M上给定 Riemann 度量 g, 则切向量 L 的长度 $\|L\|$ 由 $\|L\|^2 = g_p(L, L)$ 确定. 在仿紧流形上常存在 Riemann 度量. 具有一个 Riemann 度量的流形叫作 **Riemann 流形** (Riemannian manifold) (→Riemann 流形).

【微分形式】 C^t 类的 r 阶共变交代张量场 $(0 \leqslant t \leqslant \infty)$ 叫作 C^t 类的 r 次**微分形式** (differential form) 也叫**外微分形式** (exterior differential form). r 叫作这个微分形式的**次数** (degree). 由于在一点 p 的 r 阶共变张量是 T_p^* 的 r 个外积 $\bigwedge^r T_p^*$ 的元, 所以 r 次微分形式是使各点 p 与 $\bigwedge^r T_p^*$ 的元 ω_p 相对应的对应 ω. 又 ω 也可以看作是从 $\mathfrak{X}(M)$ 到 $\mathfrak{F}(M)$ 的 r 交代线性映射. 特别是一次微分形式也叫作 **Pfaff 形式** (Pfaffian form). 设坐标邻域(U, ϕ)中的坐标系为 $(x^1, \cdots, x^n)$, 由于 $(dx^i)_p$ $(i = 1, \cdots, n)$ 在U的各点 p 构成 T_p^* 的基, 所以 ω 在 U上可唯一地表示为

$$\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_r} a_{i_1\cdots i_r}(p)(dx^{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{i_r})_p.$$

对于任意 r 个指标 $(j_1, \cdots, j_r)$ $(1 \leqslant j_k \leqslant n)$, 如果在 $(j_1, \cdots, j_r)$ 中有相同指标重复出现, 则$a_{j_1\cdots j_r} = 0$. 如果$(j_1, \cdots, j_r)$中指标都不相同, 则可令 $a_{j_1\cdots j_r} = (\mathrm{sgn}\sigma)a_{i_1\cdots i_r}$, 其中 $(i_1, \cdots, i_r)$ 是按 $(j_1, \cdots, j_r)$ 的大小顺序排列而成, $\mathrm{sgn}\sigma$ 表示置换 $\sigma: j_k \to i_k$ $(k = 1, \cdots, r)$ 的符号, 这时, ω 可以表示为

$$\omega = \frac{1}{r!}\sum_{j_1,\cdots,j_r=1}^{n} a_{j_1\cdots j_r}(p)(dx^{j_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{j_r})_p.$$

$a_{j_1\cdots j_r}$是张量场 ω 的分量, 如果 $a_{i_1\cdots i_r}$ 是 C^t 类时, 则 ω 是 C^t 类的. 由满足 $\omega_p \neq 0$ 的点 p 构成的 M上子集的闭包叫作微分形式 ω 的**支集** (support, carrier).

以后,如不特别声明, 则只考虑 C^∞ 类微分形式. M 上的 C^∞ 类 r 次微分形式构成的实线性空间用 $\mathfrak{D}^r(M)$ 表示. 若 r 比M的维数大,则 $\mathfrak{D}^r(M) = \{0\}$.

对于 C^∞ 类微分形式可以定义各种运算.

i) 外积. 设 ω, θ 为 r 次和 s 次的微分形式. 则 $r+s$ 次微分形式 $\omega\wedge\theta$ 在各点 p 可由

$$(\omega\wedge\theta)_p = \omega_p \wedge \theta_p$$

给出. $\omega\wedge\theta$ 叫作ω 与 θ 的**外积** (exterior pro-

duct). 如果 $X_1, \cdots, X_{r+s}$ 是向量场,则

$$(\omega\wedge\theta)(X_1,\cdots,X_{r+s})$$
$$=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\k_1<\cdots<k_s}}(\mathrm{sgn}(i;k))\omega(X_{i_1}\cdots X_{i_r})\theta(X_{k_1},\cdots,X_{k_s}),$$

其中的和是关于 $(1,\cdots,r+s)$ 的所有划分 $(i_1,\cdots,i_r),(k_1,\cdots,k_s)$的总和, $\mathrm{sgn}(i;k)$是置换 $(1,\cdots,r+s)\to(i_1,\cdots,i_r,k_1,\cdots,k_s)$ 的符号. 特别是当 $\omega_1,\cdots,\omega_r$ 是一次微分形式时,有

$$(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_r)(X_1,\cdots,X_r)=\det(\omega_i(X_j))$$

成立.

ii) 外微分. 设 ω 是 r 次微分形式, 当 $\omega_p=\left(\frac{1}{r!}\right)\sum a_{j_1\cdots j_r}(p)\,(dx^{j_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{j_r})_p$ 时, $r+1$ 次微分形式 $d\omega$ 由

$$(d\omega)_p=\left(\frac{1}{r!}\right)\sum(da_{j_1\cdots j_r})_p\wedge(dx^{j_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx^{j_r})_p$$

定义. $d\omega$ 叫作 ω 的**外微分** (exterior differentiation). 当 $d\omega=0$ 时, ω 叫作**闭微分形式** (closed differential form). $d\omega$ 形的微分形式叫作**恰当微分形式** (exact differential form). 对于 $a, b\in\boldsymbol{R}$, $\omega,\omega'\in\mathfrak{D}^r(M)$, 有 $d(a\omega+b\omega')=ad\omega+bd\omega'$. 因而 r 次闭微分形式和恰当微分形式的全体 $\mathfrak{S}^r(M)$ 以及 $\mathfrak{E}^r(M)$ 是 $\mathfrak{D}^r(M)$ 的线性子空间. 设 $X_1,\cdots,X_{r+1}$ 是 M 上的向量场,则外微分 $d\omega$ 为

$$(d\omega)(X_1,\cdots,X_r)=\sum_{i=1}^{r+1}(-1)^{i+1}$$
$$\cdot X_i(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{r+1})$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,$$
$$\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{r+1}),$$

其中 $\hat{X}$ 意味着在 ^ 下的变数被略去的记号.

iii) 向量场的内积. 设 X 是向量场, ω 是 r 次微分形式 $(r\geqslant 1)$,则 $r-1$ 次微分形式 $\iota(X)\omega$ 由公式

$$(\iota(X)\omega)(X_1,\cdots,X_{r-1})=\omega(X,X_1,\cdots,X_{r-1})$$

来定义. 当 ω 是 0 次的,即数量场时,我们令

$$\iota(X)\omega=0.$$

微分形式 $\iota(X)\omega$ 叫作 X 与 ω 的**内积** (interior product).

iv) Lie 导数. 设 ω 是 r 次的, ω 的 **Lie 导数** (Lie derivative) $L_X\omega$ 是由

$$(L_X\omega)(X_1,\cdots,X_r)=X(\omega(X_1,\cdots,X_r))$$
$$-\sum_{i=1}^{r}\omega(X_1,\cdots,[X,X_i],\cdots,X_r)$$

所确定的 r 次微分形式.

v) 设 φ 是从M到 M' 的 C^∞ 类映射, 从 T_p 到 $T_{\varphi(p)}$ 的线性映射 $(d\varphi)_p$ 的对偶映射† 为 φ_p^*. 即 φ_p^* 是从 $T^*_{\varphi(p)}$ 到 T^*_p 的线性映射且满足条件 $((d\varphi)_pL,\alpha)=(L,\varphi_p^*\alpha),(L\in T_p,\alpha\in T^*_{\varphi(p)})$. 由 φ_p^* 所定义的从 $\wedge T^*_{\varphi(p)}$ 到 $\wedge T^*_p$ 的映射仍然用 φ_p^* 表示. 当 ω 是 M' 上的 r 次微分形式时, M 上的 r 次微分形式 $\varphi^*\omega$ 可由

$$(\varphi^*\omega)_p=\varphi_p^*\omega_{\varphi(p)},\quad p\in M$$

来定义. $\varphi^*\omega$ 叫作由 φ 把 M' 上的微分形式 ω 引到M上的**还原** (pull back).

以上这些运算之间有下列关系.

1) $d(\omega\wedge\theta)=d\omega\wedge\theta+(-1)^r\omega\wedge d\theta$ (但 ω 是 r 次的),

2) $d^2=0$, 即 $d(d\omega)=0$,

3) $\varphi^*(\omega\wedge\theta)=\varphi^*\omega\wedge\varphi^*\theta$, $\varphi^*(d\omega)=d(\varphi^*\omega)$,

4) $L_X(\omega\wedge\theta)=(L_X\omega)\wedge\theta+\omega\wedge(L_X\theta)$,

5) $L_X=\iota(X)d+d\iota(X)$, $L_X(d\omega)=d(L_X\omega)$,

6) $L_{[X,Y]}=L_XL_Y-L_YL_X$, $\iota([X,Y])=L_X\iota(Y)-\iota(Y)L_X$.

【de Rham 上同调群】 设 $\mathfrak{D}(M)=\sum_{r=0}^{n}\mathfrak{D}^r(M)$ (n 是M的维数), 则 $\mathfrak{D}(M)$ 可以看作是以 d 为上边缘算子† 的上链复形†(→链复形). 这个上链复形的 r 维上同调群用 $H^r(\mathfrak{D})$ 表示, 叫作M 的 r 维 **de Rham 上同调群**(de Rham cohomology group),即 r 次闭微分形式的全体 $\mathfrak{S}^r(M)$, 由前节 2) 中 $d^2=0$ 这个事实可知, 它包含 r 次恰当微分形式的全体 $\mathfrak{E}^r(M)$. 可以定义 r 维 de Rham 上同调群为 $H^r(\mathfrak{D})\cong\mathfrak{S}^r(M)/\mathfrak{E}^r(M)$ $(0\leqslant r\leqslant n)$,由 1)可知,如果 $\omega\in\mathfrak{S}^i(M)$, $\theta\in$

$\mathfrak{S}^r(M)$，则$\omega\wedge\theta\in\mathfrak{S}^{i+r}(M)$．如果$\omega\in\mathfrak{S}^i(M)$，$\theta\in\mathfrak{E}^r(M)$（或$\omega\in\mathfrak{E}^i(M)$，$\theta\in\mathfrak{S}^r(M)$），则$\omega\wedge\theta\in\mathfrak{E}^{i+r}(M)$．因此，当$H(\mathfrak{D})=\sum_{r=0}^{n}H^r(\mathfrak{D})$（直和）时，对于$[\omega]\in H^i(\mathfrak{D})$，$[\theta]\in H^r(\mathfrak{D})$定义$[\omega]\cdot[\theta]=[\omega\wedge\theta]$，从而在$H(\mathfrak{D})$中定义了乘积，关于这个乘积，$H(\mathfrak{D})$构成$\boldsymbol{R}$上的代数，称为$M$的 **de Rham 上同调环**（de Rham cohomology ring）．

【单位分解】 设M是仿紧的C^∞流形，$\{V_i\}_{i\in I}$是M的局部有限的†开覆盖，而且各个V_i的闭包是紧的，这时对于各个i在M上存在C^∞类函数f_i且满足下列条件．1) $0\leqslant f_i\leqslant 1$，2) f_ν的支集包含于V_i中，3) $\sum_{i\in I}f_i(x)=1$ $(x\in M)$．这时$\{f_i\}_{i\in I}$叫作从属于开覆盖$\{V_i\}_{i\in I}$的 **C^∞ 类单位分解**（partition of unity of class C^∞）．

【微分形式的积分】 i) 定向流形上的积分．设M是仿紧的定向n维C^∞流形，ω是M上具有紧支集的n次微分形式，则可定义ω在M上的积分．可选取M的正坐标邻域系$S=\{U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$，使之满足下列条件，即各$\bar{U}_\alpha$是紧的，$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$M$的局部有限开覆盖，而且$\psi_\alpha(U_\alpha)$是立方体，它的面与$\boldsymbol{R}^n$的坐标面平行．首先考虑$\omega$的支集包含于某$U_\alpha$的情形．这时，$(\psi_\alpha^{-1})^*\omega$是立方体$\psi_\alpha(U_\alpha)$上的具有紧支集的$n$次微分形式，它可唯一地表示为$(\psi_\alpha^{-1})^*\omega=adx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$．其中$(x^1,\cdots,x^n)$是$\boldsymbol{R}^n$的坐标系，设$x_\alpha^i=x^i\circ\psi_\alpha$ $(i=1,\cdots,n)$，则$(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$是正坐标系，$\omega$在$M$上的积分由

$$\int_M\omega=\int_{\psi_\alpha(U_\alpha)}adx^1\cdots dx^n$$

来定义．对于一般的ω，如果$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$是从属于$M$的开覆盖$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$的单位分解，则$f_\alpha\omega$的支集包含于$U_\alpha$中，并且除有限个$\alpha$外，$f_\alpha\omega=0$．因此，$\omega$在$M$上的积分可由

$$\int_M\omega=\sum_\alpha\int_M f_\alpha\omega$$

来定义．可以证明上面定义的积分与S的选法无关．

ii) 在奇异链上的积分．在$\boldsymbol{R}^r$中取正交坐标系$(x^1,\cdots,x^r)$，设原点为d_0，第i坐标轴上的单位点为d_i．以$d_0,d_1,\cdots,d_r$为顶点的**定向 r 单形**（oriented r-simplex）$(d_0,d_1,\cdots,d_r)$用S^r表示，当把S^r看作点集时记作$|S^r|$．从$|S^r|$的邻域到M的C^∞类映射φ与S^r的组(S^r,φ)叫作M的**定向 C^∞ 类奇异 r 单形**（oriented singular r-simplex of class C^∞）．有限个定向C^∞类奇异r单形的整系数（或实系数）的线性组合$C=\sum_i m_i(S_i^r,\varphi_i)$ $(m_i\in\boldsymbol{Z}$或$m_i\in\boldsymbol{R})$叫作M的 **C^∞ 类奇异 r 链**（singular r-chain of class C^∞）．设ω是M上的r次微分形式，则$\varphi^*\omega$是$\boldsymbol{R}^r$中$|S^r|$的邻域的r次微分形式，它可表示为$\varphi^*\omega=adx^1\wedge\cdots\wedge dx^r$．$\omega$在$(S^r,\varphi)$上的积分，由

$$\int_{(S^r,\varphi)}\omega=\int_{|S^r|}adx^1\cdots dx^r$$

来定义．当$r=0$时，ω是M上的函数，S^0是点o，这时积分由

$$\int_C\omega=\sum_i m_i\omega(\varphi_i(o))$$

来定义．由M的实系数C^∞类奇异r链构成的实线性空间记作$C_r(S,\boldsymbol{R})$．r次微分形式ω在C上的积分值记作$\omega(C)$，ω是$C_r(S,\boldsymbol{R})$上的线性函数，可以把它看作是 **C^∞ 类奇异 r 上链**（singular r-cochain of class C^∞）．

【Stokes 公式】 i) 设D为n维C^∞流形M的域†，∂D为D的边界，$\bar{D}$是D的闭包．设$S=\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是$M$的$C^\infty$类坐标邻域系，$U_\alpha\cap\bar{D}=U'_\alpha$，$\psi_\alpha$在$U'_\alpha$的限制下为$\psi'_\alpha$，$T=\{(U'_\alpha,\psi'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$．对于适当的$S$，如果$(\bar{D},T)$是具有边界的$C^\infty$流形时，则$D$叫作具有**正则边界域**（domain with regular boundary）．$(\bar{D},T)$的边界∂D是M的$n-1$维闭子流形，当M可定向时，∂D也是可定向的．设M为仿紧且可定向的，D为具有正则边界域，C是D上的定义函数（即$C(p)=1$ $(p\in D)$，$C(p)=0$ $(p\notin D)$）．如果θ是M上具有紧支集的n次微分形式，则θ在D上的积分由

$$\int_D\theta=\int_M C\theta$$

来定义. ∂D的定向由M的定向自然地确定,对于M上具有紧支集的$n-1$次微分形式ω有

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} i^*\omega$$

成立. 其中i表示从∂D到M中的恒等映射. 这公式称之为 **Stokes 公式**.

ii) 设C是M的C^∞类奇异r链,∂C是C的边界,ω是M上的$r-1$次微分形式,则有

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega$$

成立. 这也叫作 **Stokes 公式**(Stokes's formula).

【de Rham 定理】 设M是仿紧的,ω看作是**奇异上链** (singular cochain), Stokes 公式写作$(d\omega)(C)=\omega(\partial C)$, 恰好$d$表示奇异上链$\omega$的上边缘算子. 设$\omega$是$r$次闭微分形式,$C$是$C^\infty$类奇异$r$闭链,$[\omega]$,$[C]$分别表示以$\omega$,$C$为代表的 de Rham 的上同调类与奇异同调类,则由 Stokes 公式,$[\omega]$,$[C]$的内积可由

$$([\omega],[C]) = \int_C \omega$$

给出. 通过内积得到M的 de Rham 上同调群$H^r(\mathfrak{D})$与M的实系数奇异上同调群$H^r(M,\boldsymbol{R})$同构,又 de Rham 上同调环$H(\mathfrak{D})$与奇异上同调环$H^*(M,\boldsymbol{R})$同构. 这叫作 **de Rham 定理** (de Rham's theorem).

【体积元素,向量场的散度】 设M是n维定向C^∞流形,ω是M上的n次微分形式. 如果$(x^1,\cdots,x^n)$是正的局部坐标系,则ω在坐标邻域中可唯一地表示为

$$\omega = a\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,$$

a到处为正时,则ω叫作M的**体积元素** (volume element). 如果M是仿紧的,则在M中必存在体积元素(注意,n维流形M的可定向性与M上到处不为 0 的n次微分形式的存在是等价的).设f是M上具有紧支集的函数,ω是体积元素,由于$f\omega$具有紧支集,因而可定义

$$\int_M f\omega.$$

这个积分叫作**f关于体积元素ω的积分**.

设g是M上的 Riemann 度量,g_{ij}是关于正的局部坐标系$(x^1,\cdots,x^n)$的g的分量,设$G=\det(g_{ij})$,则M的体积元素ω可以由

$$\omega = \sqrt{G}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

给出,这个体积元素叫作**伴随 Riemann 度量g的体积元素**.

设ω是M的体积元素,X是向量场,则可表示为

$$L_X\omega = f_X\omega,$$

其中f_X是数量场,它称之为向量场X关于ω的**散度** (divergence),用 $\operatorname{div} X$ 表示. 当ω是伴随 Riemann 度量g的体积元素时,$\operatorname{div} X$叫作关于 Riemann 度量g的X的散度. 如果M是紧的,则有

$$\int_M \operatorname{div} X\omega = 0$$

成立. 称之为 **Green 定理** (Green's theorem).

【**导网** (Jet)】 设M,N是C^∞流形,x是M的点,r是整数($\geqslant 0$).对于从M到N的C^∞类映射的全体中,两个映射f,g间有$f(x)=g(x)$,且f,g按坐标系分别表示为n个($n=\dim N$)函数,如果它们(从1阶)到r阶偏导数在点x相等,这时把f和g看成是等价的,这样就引进了等价关系,其等价类叫作r次**导网**(jet).以f作为代表,它的导网用$j_x^r f$表示,x叫作导网的**始点**(source),$f(x)$叫作导网的**终点**(英 target 法 bout). 以x为始点而终点在N中的r次导网的全体用$J_x^r(M,N)$表示,$\bigcup_{x\in M} J_x^r(M,N)$用$J^r(M,N)$表示. 从$J^r(M,N)$到$M$,$N$的射影$\pi_s$,$\pi_t$由各导网的始点与终点的对应来定义. $J^r(M,N)$自然地具有C^∞流形结构,以及以π_s,π_t为射影的两个纤维丛结构. 例 1) $J_0^1(\boldsymbol{R},N)$是由π_t而得到的N的切丛. 例 2)由C^∞类向量丛ξ的截面所确定的r次导网的全体$J^r(\xi)$是向量丛.

对于C^∞类映射$f:M\to N$和$g:N\to L$,规定$j_x^r(g\circ f)=j_{f(x)}^r g\cdot j_x^r f$,则可定义导网的合成. 特别是当存在这样的$g$使得左边的导网是由恒等映射所确定的导网时,称导网$j_x^r f$是**可逆的** (invertible). $J^r(M,N)$中的可逆导网全体以$I^r(M,N)$表示,并令$I_x^r(M,N)=I^r(M,N)\cap J_x^r(M,N)$. 例 3) $G^r(n)=\{j_0^r f\in I^r(\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{R}^n)|$

$f(0)=0\}$ 是 Lie 群，它是 $G^1(n)=GL(n, \boldsymbol{R})$ 的幂零 Lie 群的扩张[+]. 射影 $G^r(n)\to G^1(n)$是一般定义的射影 $J^r(M,N)\to J^s(M,N)(r\geqslant s)$ 的特例的局限情形. 例 4) $I_0^1(\boldsymbol{R}^m, M)$ 是 M 的切m标架丛 $(m=\dim M)$. 一般地 $I_0^r(\boldsymbol{R}^m, M)$是$M$上的 $G^r(m)$ 丛.

【叶状结构物 (foliations)**】** 设M是 n 维 C^∞ 流形，$M(0\leqslant q\leqslant n, 0\leqslant r\leqslant\infty)$的余维数为 q 的 C^r 叶状结构物是M的弧状连通子集族 $\mathfrak{F}=\{L_\alpha;\alpha\in A\}$，叫作**叶** (leaves)，它具有下列性质：i)如果 $\alpha\neq\alpha'$ 则 $L_\alpha\cap L'_\alpha=\varnothing$；ii) $M=\bigcup_{\alpha\in A}L_\alpha$；iii) M的每个点具有 C^r 类局部坐标系 (U,ϕ)，对于每个叶 L_α 有 $U\cap L_\alpha$ 的弧状连通分支，它由 $x^{n-q+1}=$ 常数，$\cdots$，$x^n=$ 常数定义，这里 $x^1,\cdots,x^n$ 表示在坐标系 (U,ϕ) 中的局部坐标. 特别是，$\mathfrak{F}$ 的每个叶都是 M 的 $(n-q)$ 维子流形.

完全可积非奇 Pfaff 方程组 $\omega_i=a_{i1}(x)dx_1+a_{i2}(x)dx_2+\cdots+a_{in}(x)dx_n=0\ (i=1,\cdots,q)$ 的解系构成一个余维数为 q 的叶状结构物，而且 $M(r\geqslant1)$ 上 C^r 类非奇向量场的积分曲线族构成余维数为 $n-1$ 的 C^r 叶状结构物.

设Q是 q 维 C^r 流形 $(q\leqslant n)$ 且 $f:M\to Q$ 为 C^r **浸没** (submersion)(即：f 的微分 df 的阶为 q)，则 f 诱导出M的、具有 $f^{-1}(x)(x\in Q)$ 的连通分支的、余维数为 q 的 C^r 叶状结构物如下：

如果一个闭 C^∞ 流形 M 具有余维数为 1 的 C^r 叶状结构物，则M的 Euler 数必为 0. 在 1944 年 G. Reeb 在 3-球面 S^3 上构造了一个余维数为 1 的 C^∞ 叶状结构物. →[20]. 设 $f(x)$ 是定义在开区间 $(-1,1)$ 上的 C^∞ 类函数，使得 $\lim_{|x|\to1}f^{(k)}(x)=\infty\ (k=0,1,2,\cdots)$，则方程 $y=f(x)+c(-1<x<1, c\in\boldsymbol{R})$ 的图象和直线 $x=c'\ (|c'|\geqslant1)$ 构成 $\boldsymbol{R}^2$ 上余维数为 1 的 C^∞ 叶状结构. 在 $\boldsymbol{R}^3$ 中绕 Y 轴旋转 $\{(X,Y)\in\boldsymbol{R}^2|-1<x<1\}$，我们得到 $\mathrm{Int}D^2\times\boldsymbol{R}$ 集合的余维数为 1 的 C^∞ 叶状结构，这里 D^2 表示 2-圆盘. 这个叶状结构对旋转是不变的. 从而确定 $\mathrm{Int}D^2\times S^1$ 的余维数为 1 的 C^∞ 叶状结构. S^3 表示两个环体的交，交成一般的环面. 在它的内部利用一般环面定义 S^3 的 **Reeb 叶状结构物**(Reeb foliation). 对于每个开流形存在一个余维数为 1 的 C^∞ 叶状结构 (A. Phillips)；对于每一个闭三维流形存在一个余维数为 1 的 C^∞ 叶状结构物(П. С. Новиков [19], W. Lickorish, J. Wood)，每个奇维球存在一个余维数为 1 的 C^∞ 叶状结构(田村一郎[21] 和 A. Durfee). 关于上列叶状结构的结果，可参看田村[21]和 Thurston [22].

设闭 C^∞ 流形 $M(r\geqslant2)$ 上 $\mathfrak{F}$ 是余维数为 1 的 C^r 叶状结构，它是由完全可积一维形式 ω (即 $d\omega\wedge\omega=0$) 构成. 如果 θ 是任意一维形式，有 $d\omega=-\theta\wedge\omega$，则闭形式 $\theta\wedge d\theta$ 的 de Rham 上同调类 $\Gamma_{\mathfrak{F}}\in H^3(M;R)$ 是 $\mathfrak{F}$ 的不变量，即所谓 **Godbillon-Vey 不变量** (Godbillon-Vey invariant) [16].

两个闭定向 n 维 C^∞ 流形 M_0 和 M_1，具有余维数 q 的 C^r 叶状结构称为**叶状配边** (foliated cobordant)，如果存在紧的、定向的$(n+1)$维 C^∞ 流形 W，它具有边界 $\partial W=M_0-M_1$ 而且W的余维数为 q 的 C^r 叶状结构，它横截 ∂W 且包含 M_0 和 M_1 的叶状结构. 叶状配边类 $\{\mathfrak{F}\}$ 关于不相交的并构成一个群 $\mathfrak{F}\cdot\Omega^r_{m,q}$ 而 Godbillon-Vey 数 $\Gamma_{\mathfrak{F}}\{M\}$是关于 $\mathfrak{F}\Omega^r_{3,1}\ (r\geqslant2)$ 的不变量. Thurston 证明由 $\{\mathfrak{F}\}\to\Gamma_{\mathfrak{F}}\{M\}$ 给定的同态 $\mathscr{F}\Omega^r_{3,1}\to R$ 是满的. 关于叶状结构的更深入的内容→[15,18].

【伪群结构】 从拓扑空间X的开集 U_f 到开集 V_f 上的同胚 f 所构成的集合 Γ，满足条件：1)含有X的恒等映射；2)当$f\in\Gamma$时，f 在任意开集 $U\subset U_f$ 中的限制包含于 Γ；3) 当 $f, g\in\Gamma$，且$V_f\subset U_g$ 时，Γ 含有 $f\circ g$；4) 当$f\in\Gamma$时，也含有 f^{-1}；则 Γ 叫作X的 (拓扑变换) **伪群** (pseudo-group)；5)当 Γ 的子集为 F，$f_1,f_2\in F$，$U_{f_1}\subset U_{f_2}$ 时，如果在 U_{f_1} 上 f_2 与 f_1 相同，则 f_0: $\bigcap_{f\in F}U_f\to X$ 作为属于 F 的各 f 的扩张而确定，

但有时必须附加 Γ 含有 f 这样的条件.

与微分流形的定义同样,从M的子集 U_α 到 X 的开集 V_α 的一一映射 α 的集 A, 如果 1) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$; 2) 当 $\alpha, \beta \in A$ 时, $\alpha\circ\beta^{-1} \in \Gamma$(但 $\alpha\circ\beta^{-1}$ 的定义域是 $\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$; 3) A 是满足条件(i),(ii)的最大的一一映射集合. 这时 A 称为M的**伪群结构**(pseudo-group structure),或者更精确地叫作 ***Γ* 结构** (Γ-structure). 在M里引入最弱的拓扑使得每个一一映射 α 均为同胚. 设 Γ' 是含有 Γ 的X的伪群, A' 是M 的 Γ' 结构, 且 $A\subset A'$ 时, 则称 A' 从属于 A. $X = \boldsymbol{R}^n$ 或 H^n, Γ 是从X的开集到 X 的开集上的 C^r 类同胚的全体,如果对M能赋予 Hausdorff 拓扑时的结构 Γ, 则 Γ 结构是已定义的无边界或有边界的 C^r 结构.如果X是 Banach 空间†而不是$\boldsymbol{R}^n$, H^n, 则给定 Γ 结构的M叫作 **C^r 类 *X* 流形** (X-manifold of class C^r),也叫**以 *X* 为模型的**(modelled on X) C^r 流形 ([10]). 这个概念由于可把X换成从 Banach 空间到 $\boldsymbol{R}$ 的连续线性映射 L所确定的 $\lambda^{-1}([0,\infty])$, 而可以扩张成有边界的 X 流形. 若 Γ' 如上述那样是 $\boldsymbol{R}^n$ 局部 C^r 变换 $(r\geqslant 1)$ 的全体, 则对于从属于 Γ' 的 Γ, 可举出下列例子. 当 n 是偶数时,与$\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{C}^{n/2}$ 视为同等的全纯变换的全体为 Γ, Γ 结构叫作复结构†. 其次, 在维数为奇数的情形下, 对于使一次微分形式 $\sum_{i=1}^{m} x^i dx^{m+i} + dx^{2m+1}(n = 2m+1)$ 除数量倍外不变的变换全体 Γ, Γ 结构叫作**接触结构** (contact structure). 把 $\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^p \times \boldsymbol{R}^{n-p}$ 看作 $\boldsymbol{R}^{n-p}$ 上的平凡纤维丛†, 使纤维 $R^p \times \{y\}$ 变为纤维的变换全体为 Γ,则 Γ 结构叫作**叶状结构**(foliated structure, foliation). 对于已给定了 Γ 与 M, 要确定 Γ 结构的存在是跨越拓扑学与解析学的较广泛的问题, 具有这些条件的 Γ 的分类是有待将来解决的问题.

A. Haefliger 对于 Γ 结构造出分类空间 $B\Gamma$ [17].

【参】 [1] 秋月康夫, 調和積分論, 上, 岩波, 1955; [2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; [3] G. de Rham, Variétés différentiables, Hermann, 1955; [4] S. Kobayashi (小林昭七)-K. Nomizu (野水克己), Foundations of differential geometry, Interscience, I 1963, II 1969; [5] J. R. Munkres, Elementary differential topology, Ann. of Math. Studies, no. 54, Princeton Univ. Press, 1963; [6] K. Nomizu (野水克己), Lie groups and differential geometry, Publ. Math. Soc. of Japan, no. 2, 1956; [7] S. Sternberg, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1963; [8] H. Whitney, Differentiable manifolds, Ann. of Math., **37** (1936), 645—680; [9] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, **1965**; [10] S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, Interscience, 1962; [11] L. Auslander, Differential geometry, Harper, 1967; [12] R. L. Bishop-S. I. Goldberg, Tensor analysis on manifolds, Macmillan, 1968. [13] E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieures et leurs applications géométriques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1945; [14] H. Whitney, Geometric integration theory, Princeton Univ. Press, 1957; [15] R. Bott, Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture notes in math. 279, Springer, (1972); [16] C. Godbillon-J. Vey, Uninvariant des feuilletages de codimension 1, C. R. Acad. Sci Paris, **273** (1971), 92—95; [17] A. Haefliger, Homotopy and integrability, Lecture notes in math., Springer, **197** (1971), 133—163; [18] H. Lawson, Foliations, Bull. Amer. Math. Soc., **80** (1974), 369—418; [19] П.С. Новиков, Топология слоений, Труды, Моск. Мат. Об **14** (1965), 248—278; [20] G. Reeb, Sur certains propriétés topologiques des variétés feuilletées, Actualités. Sci Ind., Hermann, 1952; [21] I Tamura (田村一郎),Foliations and spinnable structures on manifolds, Ann. Inst. Fourier, **23** (1973), 197—214; [22] W. Thurston, The theory of foliations of codimension greater than one, Comment. Math. Helv., **49** (1974), 214—231.

联络 [英 connection 法 connexion 德 Übertragung 俄 соединение 日 接続] 几何中的联络概念是从 Levi-Civita 的平行移动开始的 (Rend. Circ. Mat. Palermo, **42** (1917)). 现在已经扩张到具有流形结构的纤维丛上. 仿射联络、Riemann 联络、射影联络、保形联络各种几何, 都是流形上切丛所构成的纤维丛上的特殊联络. 这些也就是由 E. Cartan, C. Ehresmann 所确定的 Cartan 联络的典型例子.

【纤维丛的联络】 考虑可微 (以后为了方便总是设 C^∞ 类) 的主纤维丛† $P=(P,\pi,M,G)$. 底空间† M是微分流形 (→微分流形), 结构群† G是 Lie 群, π 表示从 P 到M的射影. P 具有微分流形的结构, G是从右侧作用于P的 Lie 变换群†. G的元 a 也可用 R_a 表示,又对于 P的元 x 写为 $R_a(x) = xa$. R_a以及 π 对切向

量空间[†]所诱导出的映射也用同样的文字表示，即 $R_a: T_x(P) \to T_{xa}(P)$，$\pi: T_x(P) \to T_{\pi(x)}(M)$. 又$G$传递的作用在任意纤维[†]上并使之无不动点. 由射影π把P上各点x的切向量空间$T_x(P)$映到M上点 $p=\pi(x)$ 的切向量空间$T_p(M)$上. 用$V_x(P)$表示这个线性映射π的核，并称它的元是**垂直的** (vertical). 核 $V_x(P)$的元就是 $T_x(P)$ 中与纤维方向相切的元的全体.

【联络】 对于P上各点 x，如果它的切向量空间 $T_x(P)$ 的一个向量子空间 Q_x 满足下列三条件，则称在P上给出了**联络**: 1) $T_x(P)=V_x(P)+Q_x$ (直和); 2) $R_a(Q_x)=Q_{xa}$ (Q在G变换下变为本身); 3) 对应 $x\to Q_x$ 是可微的. 属于Q_x的向量叫**水平的** (horizontal). 现在设X是P上的任意向量场[†]，由条件 1)，在P上各点x处的向量X_x，可唯一地表示为 $X_x=Y_x+Z_x(Y_x\in V_x(P),\ Z_x\in Q_x)$. 由$Y_x, Z_x(x\in M)$所定义的向量场$Y, Z$ 分别叫作 X 的**垂直分量**(vertical component) 与**水平分量** (horizontal component). 条件 3) 表示，若 X 是可微向量场，则它的水平（垂直）分量也是可微向量场. 又由射影π可知，Q_x与$T_p(M)$ ($p=\pi(x)$) 是同构的线性空间，所以，对于M上的向量场X有对应的P上的向量场 X^* 唯一存在，使得 i) $\pi(X^*)=X$; ii) $X_x^*\in Q_x$，这个X^*叫作X的**上升** (lift). 上升 X^* 由于条件 2) 可知在G下是不变的.

当在P上给定联络时，对于在底空间M内的分段可微曲线C可如下地定义，从C的始点p上的纤维到C的终点q上的纤维的映射，在p的纤维上任取一点 x. 对于曲线C，取P内曲线 C_x^*使之满足下列两个条件: i) $\pi(C_x^*)=C$; ii) C_x^* 的切向量恒为水平的，则以x为始点的这样曲线 C_x^* 唯一存在([4]). C_x^* 叫作从x出发的C的**上升** (lift). 对于 p 上纤维的元x有C_x^*的终点与之对应. 因为 $C_{xa}^*=R_a(C_x^*)$，所以这个映射与G的变换是可换的. 它叫作沿曲线C的**平行移动** (parallel displacement).

【完整群】 现在设C是从M上一固定点p出发的闭曲线，经过沿C的平行移动，将p上的纤维变为本身. 如果x是p上纤维的某一定点，则由平行移动将点x变为点 $x\cdot a$ ($a\in G$). 当曲线C在从点p为出发点的闭曲线全体上变动时，产生的元a的全体，构成G的一个子群. 这个子群叫作在P上对于已知联络在点x处的**完整群** (holonomy group). 若M是连通的，则关于任何点的完整群都是G的共轭子群. 特别是在从点p出发的闭曲线中，选择与 0 同伦[†]的全体所得到的元，构成完整群的子群，称为**限制完整群** (restricted holonomy group). 完整群是结构群G的 Lie 子群[†]，限制完整群是它的连通分支 ([4]). 完整群在研究联络的形态时是有用的.

【联络形式】 将主纤维丛$P=(P,\pi,M,G)$的结构群G的 Lie 代数(→Lie 群)用 $\mathfrak{g}$ 表示. 设与 $\mathfrak{g}$ 的每个元A对应的有G的单参数子群[†] $\exp tA(-\infty<t<+\infty)$，则 $R_{\exp tA}$ 是流形P的单参数变换群[†]，并且它定义了P上的向量场(→微分流形)，用 A^* 表示. A^* 在P的各点都是垂直的，这样的 $A^*(A\in\mathfrak{g})$ 生成 $V_x(P)$. 又对G的任何元a，满足 $R_a(A^*)=(\mathrm{ad}(a^{-1})A)^*$.

若在P上已规定了联络，则可如下地定义它的**联络形式** (connection form)ω. ω是在$\mathfrak{g}$中取值的一次微分形式[†]，它在P的各点x有 1) $\omega_x(A_x^*)=A(A\in\mathfrak{g})$; 2) $\omega_x(X)=0(X\in Q_x)$; 这样定义的联络形式ω满足条件: 3) $R_a^*(\omega)=\mathrm{ad}(a^{-1})\circ\omega(a\in G)$. 这个式子的左边是由变换$R_a^*$ 作用于ω后得到的微分形式.

反之，如果在P上给出在 $\mathfrak{g}$ 中取值的一次微分形式ω，且满足上述条件 1), 3) 时，将用ω作用下变为 0 的元定义为水平的元，则得到P上的联络，它的联络形式与原来的ω一致. 这样，在P上给出联络与给出联络形式这两种说法是等价的.

特别是当主纤维丛为积纤维丛[†]，即当 $P=M\times G$ 时，对P的点 $x=(p,g)$ 的切向量空间 $T_x(P)$ 可看作 $T_p(M)$ 与 $T_g(G)$的直和. 将Q_x取成$T_p(M)$这样的联络叫作**平坦** (flat) 联络. 对于一般的联络，就局部来说，总能表示为上述形式时，就叫作**局部平坦**(locally flat). 因

为一般的主纤维丛局部地是积纤维丛，因此，局部地存在着联络．若底空间M是仿紧†时，则能够证明在P上联络是存在的．

【联络的扩张与限制】 当主纤维丛$P=(P, \pi, M, G)$具有**约化**†(reduced)纤维丛时，我们来观察两者的联络之间的关系．设G'是G的Lie子群，G'的Lie代数为$\mathfrak{g}'$．从G'到G，从$\mathfrak{g}'$到$\mathfrak{g}$的**单射**(injection)都用j表示．如果存在可微主纤维丛$P'=\{P', \pi', M, G'\}$和从P'到P的**嵌入**(embedding)可微映射f，且满足 1) $\pi\circ f=\pi'$; 2) $f\circ R_a = R_{j(a)}\circ f(a\in G')$时，则$(P', f)$叫作$P$的(可微的)约化纤维丛．这时，对于$A\in\mathfrak{g}'$有$f_*(A_x^*)=j(A)^*_{f(x)}$，对所有的$x\in P'$都成立．

设在P'上已给出联络，在P'点x处的水平向量空间为Q'_x．并在P上点$f(x)$处，$f_*(Q'_x)$为其水平向量空间，把它用G的右变换进行变换，则在P上可定义联络．设它们的联络形式分别为ω', ω，则得$j\circ\omega'=f^*(\omega)$．反之，对于$P$的联络，当它的联络形式为$\omega$时，若$P'$上有形式$f^*(\omega)$，它常取值于$j(\mathfrak{g}')$，则可写作$f^*(\omega)=j\circ\omega'$，$\omega'$定义了$P'$的联络．这种联络的关系分别叫作联络的**扩张**(extension)和**限制**(restriction)．

【曲率形式】 设在主纤维丛$P=\{P, \pi, M, G\}$上已给定联络．F是有限维线性空间，α为在F中取值的P上的k次微分形式，α的**共变微分**(covariant differential) $D\alpha$用下式来定义．

$$(D\alpha)(X_1, \cdots, X_{k+1}) = (d\alpha)(hX_1, \cdots, hX_{k+1}),$$

这里X_i是P上的向量场，h是它们在水平分量上的射影．$D\alpha$是在F中取值，在P上的$k+1$次微分形式．

设已给出Lie群G在F上的表示† $\rho: G\to GL(F)$．当在P上取值于F的微分形式α满足$R_a^*(\alpha)=\rho(a^{-1})\circ\alpha(a\in G)$时，$\alpha$叫作$\rho$型**伪张量形式**(pseudo-tensorial form)．特别当ρ型伪张量形式α对任意的$A\in\mathfrak{g}$，满足$\iota(A^*)\alpha=0$(→微分流形[微分形式])时，α叫作ρ型**张量形式**(tensorial form)．对应于G的表现ρ，可作出与P相伴的†向量丛† E，所谓ρ型张量形式，无非是取值于向量丛E的M上的微分形式．如果α是ρ型伪张量形式，则$D\alpha$是ρ型张量形式．

对于P上的联络形式ω，ω的共变微分$\Omega=D\omega$叫作给定联络的**曲率形式**(curvature form)．ω是取值于$\mathfrak{g}$的ad型伪张量形式，因而Ω也是取值于$\mathfrak{g}$的ad型张量形式．对于曲率形式Ω，**结构方程**(structure equation)

$$d\omega=-[\omega, \omega]+\Omega$$

成立([4], [6])．如果X, Y是M上的向量场，X^*, Y^*是它们的上升，则

$$\omega([X^*, Y^*])=\Omega(X^*, Y^*)$$

成立．这指出曲率形式Ω给出了$[X^*, Y^*]$的垂直分量．

此外，联络为局部平坦的条件是它的曲率形式Ω为0，或者它的限制完整群仅由单位元构成，这两种提法是等价的．

下列两个定理是基本的：

定理1. 设在主纤维丛$P=\{P, \pi, M, G\}$上已给定联络，则P的结构群可约化成完整群([4],[6])．事实上，对于P上点x，令$P(x)$为P上这样点y的集合，y可用在P内水平的曲线与x连接，则$P(x)$给出P的约化纤维丛．又，原来P中的联络是$P(x)$中联络的扩张([4],[6])．

定理2. 在P上点x的完整群的Lie代数与$\{\Omega_y(X, Y) \mid y\in P(x), X, Y\in T_y(P)\}$所张成的$\mathfrak{g}$的子空间一致([4],[5],[6])．

曲率形式Ω可以用来决定纤维丛P的示性类†([1],[2])(→示性类)．

有时，P的联络可定义P的相伴纤维丛的联络．特别是当$G=GL(n, \boldsymbol{R})$或$G=GL(n, \boldsymbol{C})$时，可定义相伴向量丛的联络．向量丛的联络可以用更近于代数的方法来定义(M. F. Atiyah, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957))．也可以当作向量丛之间的一种微分算子([8])来定义．

【仿射联络】 设M是n维微分流形，P是

M的切 n 标架丛. P的结构群是 $G = GL(n, \boldsymbol{R})$, P是M的切向量空间所构成的切向量丛的主纤维丛. 在M的切 n 标架丛上给出的联络叫作M的**仿射联络** (affine connection) (或叫**线性联络** (linear connection)). M 的仿射联络可定义 P 上的曲率形式 Ω, 而且也可以定义叫作挠率形式的另一种形式如下:

F是 n 维线性空间, 固定它的一组基 $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$. 切 n 标架丛 P 是M上各点 p 的切向量空间 $T_p(M)$ 的基$(e_1, \cdots, e_n)$(即标架)的全体, 所以 P 的各点 $x = (e_1, \cdots, e_n)$ 是由 F 到 $T_p(M)$ 的线性空间的同构 $e_i \to \xi_i$ 来定义的, 这个同构用 $\bar{x}$ 表示. θ 是在 P 上, 但取值于 F 的一次微分形式, 由 $\theta_x(X) = \bar{x}^{-1}(\pi_x(X))$, $(X \in T_x(P))$ 来定义, 称之为流形M的切 n 标架丛的**标准一次微分形式** (canonical 1-form). θ 有如下的意义, 现在设 φ 是微分流形M到自身的同构, 则由 φ 可诱导出纤维丛 P 到自身的同构 $\tilde{\varphi}$, 且$\tilde{\varphi}(\theta) = \theta$ 成立. 反之, 可以证明 P 的任何纤维丛到自身的同构使 θ 不变, 这个同构是由M到自身的同构所诱导出的.

对于M上的仿射联络. 它的**挠率形式** (torsion form) Θ, 由 $\Theta = D\theta$ 来定义. Θ 是取值于 F 的二次微分形式, 满足 $R_a\Theta = a^{-1}\Theta$, 而且关于 Θ 有**结构方程**

$$d\theta = [\omega, \theta] + \Theta$$

成立([2],[4],[6]).

对于 F 的各个元素 ξ, P 上向量场 $B(\xi)$ 由下列条件 1), 2) 可唯一地定义, 并称之为**基本向量场** (basic vector field). 1) $B(\xi)$是水平的; 2) $\theta(B(\xi)) = \xi$. 对于 P 的各点x, $B(\xi_1)_x, \cdots, B(\xi_n)_x$ 构成 Q_x 的基. 设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ 的基是 $A_1, \cdots, A_m (m = n^2)$, 则 $A_1^*, \cdots, A_m^*$, $B(\xi_1), \cdots, B(\xi_n)$ 构成 P 上各个点的切向量空间的基. 因而 P 是具有**平行性** (parallelizable)的流形, 基本向量场的积分曲线† 在M上的射影是后面将要提到的测地线([4]).

由M的仿射联络定义M的切向量空间的平行移动如下. 对于 M 中的曲线 $C = p_t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$, 设它到 P 的上升为 $C^* = x_t$. 在M上点 p_0 的切 n 标架 x_0 沿 C 的平行移动为 x_t, 则由

$$\bar{x}_t \circ \bar{x}_0^{-1}: T_{p_0}(M) \to T_{p_t}(M),$$

可得到从切向量空间 $T_{p_0}(M)$ 到 $T_{p_t}(M)$ 沿 C 的**平行移动** (parallel displacement). 易知它与上升的取法无关.

【共变微分】 在M中已知曲线 $C = \{p_t\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, 对于各个 t 有 $T_{p_t}(M)$ 的向量 Y_t 与之对应, 若这个对应是可微的, 则 $\{Y_t\}$ 叫作沿曲线C的向量场. 对于 $\{Y_t\}$, 设

$$Y_t' = \lim_{h \to 0}(1/t)(\varphi_{t,h}^{-1}(Y_{t+h}) - Y_t),$$

则得到沿C的向量场 $\{Y_t'\}$, 叫作**共变导向量** (covariant derivative). 式中的 $\varphi_{t,h}$ 是 $T_{p_t}(M)$ 到 $T_{p_{t+h}}(M)$ 沿C的平行移动. $\{Y_t\}$ 沿C平行移动成为本身, 与 $\{Y_t'\}$ 常为 0 是等价的. 特别是如果曲线 C 的切向量沿 C 平行移动成为本身, 则C叫作M中的**测地线** (geodesic).

对于已给仿射联络的流形M上的两个向量场 X, Y, 向量场 Y 关于向量场 X 方向的**共变导向量** $\nabla_X Y$ 可定义如下. 对于 M 上点 p_0, 设过 p_0 的 X 的积分曲线为 $C = \{p_t\} (-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon)$, 沿$C$的平行移动为 φ_t, 令

$$(\nabla_X Y)_{p_0} = \lim_{t \to 0}(1/t)(\varphi_t^{-1}(Y_{p_t}) - Y_{p_0}).$$

$\nabla_X Y$ 仍为M上的向量场.

M上的向量场 X, Y 与向量场 $\nabla_X Y$ 对应的映射满足下列三个条件. 1) $\nabla_X Y$ 关于 X, Y 是线性的; 2) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$; 3) $\nabla_X(fY) = f \cdot \nabla_X Y + (Xf) \cdot Y$. 其中 f 是M上的可微函数. 反之, 如果已给出满足上列条件的对应, 则存在唯一的M上的仿射联络, 以这个映射为共变导向量([4],[6]).

对应 $X \to \nabla_X Y$ 确定一个$(1,1)$型张量场†, 称之为向量场 Y 的**共变微分** (covariant differential), 记作 ∇Y. 当向量场X固定时, 对应 $Y \to \nabla_X Y$ 可以自然地向M上任意张量场扩张, 并且和张量缩约† 是可换的. 对于张量场 K, 可以写为 $\nabla_X K$. 而且对应 $X \to \nabla_X K$ 叫作K的**共变微分**, 写作 ∇K. 又把 $\nabla_X K$ 叫作张量场K沿X方向的**共变导张量** (covariant derivative). 张量场

K满足 $\nabla K=0$ 与张量场K在平行移动下不变是等价的(→张量分析).

【曲率张量与挠率张量】 在M上给出仿射联络,这个联络的**曲率张量**(curvature tensor) R 以及**挠率张量**(torsion tensor) T 可定义为

$$R(X,Y)(Z)=\nabla_X(\nabla_Y(Z))-\nabla_Y(\nabla_X(Z))-\nabla_{[X,Y]}(Z),$$

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y],$$

其中 X,Y,Z 是M上的向量场. R及T分别是(1,3),(1,2)型的张量场. R以及T可由M的切n标架丛P上的曲率形式Ω,以及挠率形式Θ定义如下:

$$R_p(X,Y)(Z)=\tilde{x}^{-1}\cdot\Omega_x(X^*,Y^*)\cdot\tilde{x}(Z),$$

$$T_p(X,Y)=\tilde{x}^{-1}(\Theta_x(X^*,Y^*)),$$

其中 $\pi(x)=p$, $X,Y\in T_p(M)$, X^*,Y^* 分别是X及Y的上升. 曲率张量,挠率张量满足 $R(X,Y)=-R(Y,X)$, $T(X,Y)=-T(Y,X)$, 而且有 **Bianchi 恒等式** (Bianchi's identities):

$$\mathfrak{S}(R(X,Y)(Z))=\mathfrak{S}(T(T(X,Y),Z)+(\nabla_XT)(Y,Z)),$$

$$\mathfrak{S}((\nabla_X R)(Y,Z)+R(T(X,Y),Z))=0$$

成立. 其中 $\mathfrak{S}$ 表示由 X,Y,Z 作循环置换后的和([4]). 例如,后面将要提到的 Riemann 联络的情形, $T=0$, 因而上式变为

$$R(X,Y)(Z)+R(Y,Z)(X)+R(Z,X)(Y)=0,$$

$$(\nabla_XR)(Y,Z)+(\nabla_YR)(Z,X)+(\nabla_ZR)(X,Y)=0.$$

在n维线性空间 $M=\boldsymbol{R}^n$ 里,设它的坐标为 $(x^1,\cdots,x^n)$, 对于向量场的基 $(X_1,\cdots,X_n)$ $\left(X_i=\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)$, 设 $\nabla_{X_i}X_j=0$, 则得到 $\boldsymbol{R}^n$ 的仿射联络. 关于这个联络, $R=0$, $T=0$, $\boldsymbol{R}^n$ 的任意直线都是测地线. 这样的联络叫作 $\boldsymbol{R}^n$ 的**标准仿射联络**(canonical affine connection). 如果任意流形M的一个仿射联络满足 $R=0$, $T=0$, 则局部地与上述$\boldsymbol{R}^n$的联络同构. 其逆也成立.

对于给定仿射联络的流形M, 如果M的微分同胚φ在M的切n标架丛上所诱导的同构映射 $\tilde{\varphi}$ 使联络不变, 则φ叫作M的**仿射变换**(affine transformation). 用共变微分来说,就是对于任意向量场 X,Y, 它满足 $\nabla_{\varphi(X)}\varphi(Y)=\varphi(\nabla_XY)$. 这两种说法是等价的. 关于$\boldsymbol{R}^n$的标准仿射联络的仿射变换就是 $\boldsymbol{R}^n$ 的普通仿射变换. 一般地已给仿射联络的流形上, 仿射变换群是 Lie 群, 在M上起着 Lie 变换群†的作用([4],[5]).

对于已给仿射联络的流形 M, 如果满足 $\nabla R=0$, $\nabla T=0$, 则M叫作**仿射局部对称空间**(affine locally symmetric space). 它的另一种说法是,对于M的各点 p,存在p的邻域U与U的仿射变换φ, 有 $\varphi^2=1$, 而且φ只有一个固定点p, 以上两种说法是等价的. 如果对于M的各点p, 都定义了M的仿射变换,且以p为孤立固定点,则M叫**仿射对称空间** (affine symmetric space). 对称 Riemann 空间是它的特例(→对称 Riemann 空间).

给定仿射联络的流形M, 在它的各点p具有如下的局部坐标$(x^1,\cdots,x^n)$. 1) $x(p)=0$; 2) 对任意的实数组$(a^1,\cdots,a^n)$ $\left(但\sum_i(a^i)^2=1\right)$, 直线 $x^i=a^it$ $(-\delta<t<\delta)$恒为测地线. 这样的局部坐标叫作点p的**测地坐标** (geodesic coordinates) ([4]). 关于这个坐标, 有 $(\nabla_{X_i}X_j)_p=0$ $(\partial/\partial x^i=X_i)$ 成立.

【Riemann 联络】 当在流形M上给定 Riemann 度量(→Riemann 流形) g 时, 则可在M上各点p的切向量空间 $T_p(M)$中引入度量,因而可取 $T_p(M)$ 的正规正交基. 这样的 $T_p(M)$ 的正规正交基的全体 P' 是 M 的切n标架丛P的子集,它给出P的子纤维丛†, 它的结构群是正交群† $O(n)$. 反之,如果给定这样的约化,则可在M上定义 Riemann 度量.

对于M上的 Riemann 度量 g, 在M上唯一存在满足下列条件的仿射联络: 1) $\nabla g=0$; 2) 挠率张量 $T=0$([4]). 把它叫作对于g的 **Riemann 联络** (Riemannian connection). 条件 1) 与 Riemann 度量g在平行移动下不变是等

价的．因此，这个仿射联络使M上的正规正交基变为正规正交基，且能定义前面说过的P'上的联络．仅满足条件 1) 的联络叫作**度量联络**(metric connection)．对于这种 Riemann 联络，它的限制完整群是正交群$O(n)$的闭子群([4])．

【坐标表示】 1) 设流形M的一个局部坐标为$(x^1,\cdots,x^n)$，对应的向量场为$X_i=\partial/\partial x^i$．在$M$上已给的仿射联络可表示为

当$\nabla_{X_i}(X_j)=\sum_k \Gamma^k_{ij}X_k$时，$\{\Gamma^k_{ij}\}$叫作关于局部坐标$(x^1,\cdots,x^n)$仿射联络的**联络系数**(coefficients of connection)．如果关于另一个局部坐标$(y^1,\cdots,y^n)$的联络系数为$\{\bar\Gamma^k_{ij}\}$，则在这些坐标邻域公共部分中有

$$\bar\Gamma^k_{ij}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}+\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial y^i\partial y^j}\right)$$

成立．反之，在M的各坐标系中已给$\{\Gamma^k_{ij}\}$，如果在各坐标邻域公共部分有上述关系，则唯一存在以$\{\Gamma^k_{ij}\}$为联络系数的M的仿射联络．

2) 由流形M的 Riemann 度量$g=\sum g_{ij}dx^i\cdot dx^j$定义的 Riemann 联络的**联络系数**为

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left\{\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right\}.$$

3) 设**挠率张量**T和**曲率张量**R的系数为

$$T=\sum T^i_{jk}dx^j\otimes dx^k\otimes X_i,$$
$$R=\sum R^i_{jkl}dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l\otimes X_i,$$

则

$$T^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj},$$
$$R^i_{jkl}=(\partial\Gamma^i_{lj}/\partial x^k-\partial\Gamma^i_{kj}/\partial x^l)+\sum_m(\Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km}-\Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm}).$$

4) 设$K=(K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s})$是$(r,s)$型张量场，则它的**共变微分**$\nabla K=(K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k})$为

$$K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}=\partial K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}/\partial x^k+\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\sum_l\Gamma^{i_\alpha}_{kl}K^{i_1\cdots l\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{s}\left(\sum_m\Gamma^m_{kj_\beta}K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots m\cdots j_s}\right).$$

5) 曲线$x^i=x^i(t)$是**测地线**的条件为

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0,\ i=1,\cdots,n$$

(→张量分析)．

【Cartan 联络】 设$\dim M=n$，考虑 Lie 群的齐性空间(→齐性空间)$F=G/G'$中$\dim F=n$．以M为底空间的纤维丛为$B=(B,M,F,G)$，它的纤维为F，结构群为G，且在M上有截面[†]为f时，则B的伴随主纤维丛[†] $P=(P,M,G)$的结构群可以约化为G'．设这个约化的纤维丛为$P'=(P',M,G')$．j是P'到P中的单射(→纤维丛)．

当P上的联络满足下列条件时，则称之为M上以$F=G/G'$为纤维的 **Cartan 联络**(Cartan connection)．设联络的联络形式为ω，ω是P上取值于$\mathfrak{g}$(G的 Lie 代数)的一次微分形式，而$\omega'=j^*(\omega)$也是取值于$\mathfrak{g}$的P'上的一次微分形式．条件：在P'的各点x处，ω'_x给出$T_x(P')$与$\mathfrak{g}$作为线性空间之间的同构．在P上给出这样的联络与在P'上给出满足下列三个条件且取值于$\mathfrak{g}$的一次微分形式ω'是等价的．1) $\omega'(A^*)=A$ ($A\in\mathfrak{g}$ (G'的 Lie 代数))；2) $R_a(\omega')=ad(a^{-1})\omega'(a\in G')$；3) 在$P'$的各点$x$，$\omega'_x$确定$T_x(P')$与$\mathfrak{g}$的同构．对于这样的$\omega'$，$P$上的联络形式$\omega$可取为$\omega'=j^*(\omega)$，则$\omega$定义了 Cartan 联络．

【贴合】 按纤维丛B的截面f给出M上的向量丛$T'(B)$如下．对M上的各点p，设在B的点$f(p)$的切向量空间为$T_{f(p)}(B)$，它的元中，令由映射$B\to M$可变到零向量的为$V_{f(p)}(B)$，则$T'(B)=\bigcup_p V_{f(p)}(B)$是$M$上的一个向量丛，它的纤维的维数$n=\dim F$．

P上的 Cartan 联络给出了$T'(B)$与M的切向量丛$T(M)$之间作为向量丛的同构如下．取P'的任意点x，设$p=\pi(x)$．由射影$\pi:P'\to M$诱导出$T_x(P')/V_x(P')$与$T_p(M)$的同构．一方面，ω'诱导出$T_x(P')/V_x(P')$与$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$的同构．点$x$把纤维$F=G/G'$变换为$B$的纤维，并将$F$上与$G'$对应的点变为$f(p)$．由这个映射使$T_0(F)=\mathfrak{g}/\mathfrak{g}'$与$V_{f(p)}(B)$同构．通过这些步骤，得到$T_p(M)$与$V_{f(p)}(B)$之间的同构，这个同构与$p$上点$x\in P'$的取法无关，因而给

出 $T(M)$ 与 $T'(B)$ 之间的同构. 当M上的纤维从B关于它的截面f,具有上述的同构时，则称B具有**贴合**(法 soudure)([3]).

反之，当M上的纤维从B关于它的截面f具有贴合时，则P存在 Cartan 联络，由这个联络给出的贴合与已给的贴合一致([3]).

对M的切向量从 $T(M)$，它的纤维F是n维线性空间,可以写为 $F=G/G'$. 这里G是F的仿射变换群†，而且 $G'=GL(n,\boldsymbol{R})$，$T(M)$在M上有 0 截面，且存在自然贴合. 又从M上的仿射联络，标准地可定义M上的，以 $F=G/G'$ 为纤维的 Cartan 联络([3]).

对于M上的 Cartan 联络,可引进把M内的曲线变为在它的纤维上的**展开**(development)以及**完备**(complete)等概念([3]).

【射影联络】 设 $F_1=G_1/G_1'$, $F_2=G_2/G_2'$ 是两个齐性空间,设 $\dim F_1=\dim F_2=n$，而且 G_1 是 G_2 的 Lie 子群，$G_1'\subset G_2'$. 这时定义了规范的单射 $F_1\to F_2$(F_1是F_2的开子集).

设存在以 F_1 为纤维的纤维从 B_1，它具有截面f_1，把它的结构群扩大，则存在以 F_2 为纤维的纤维从 B_2，它具有截面 f_2. 如果 B_1 关于f_1具有贴合，则 B_2 关于 f_2 也有贴合. 在 B_1 的伴随主纤维从 P_1 上关于这个贴合的 Cartan 联络定义了 B_2 伴随主纤维从 P_2 上的 Cartan 联络，而诱导出 B_2 的贴合,后者叫作由前者所**诱导的**(induced) Cartan 联络.

设 F_1 是n维线性空间，F_2 为 n 维射影空间†,则 F_1 的仿射变换群可**嵌入**(embedding) F_2 的射影变换群†. 由流形M的切向量从构成的，以n维射影空间为纤维的纤维从上的 Cartan 联络叫作M的**射影联络**(projective connection). M的仿射联络如上所述可诱导出射影联络.

对于M上的两个仿射联络，设它们的共变微分各为 ∇ 以及 ∇'. 由 ∇,∇' 诱导的射影联络相等的条件是,在M上存在一次微分形式 φ，且对任意的向量场 X，Y，有

$$\nabla'_X Y-\nabla_X Y=\varphi(X)Y+\varphi(Y)X$$

成立 ([7]). 使M上定义的仿射联络所诱导出的射影联络不变的M的变换，将M的测地线仍变为测地线.

【保形联络】 设 F_1 为 n 维 Euclid 空间，F_2 为 n 维球面，F_1 的等距变换† 群可以嵌入于 F_2 的保形变换†群. 流形M的切向量从的 Riemann 度量在M上定义了以 F_2 为纤维的纤维从. 这个纤维从的 Cartan 联络叫作M上的**保形联络**(conformal connection). 或者说M的 Riemann 联络可以诱导出M上的保形联络.

由M上的两个 Riemann 度量 g_1,g_2 定义的保形联络相等的条件是：在 M 上存在正值函数 f，使 $g_2=f\circ g_1$. 因而有M的变换 φ，满足 $\varphi^*(g_1)=f\circ g_1$，它们使保形联络不变. 这样的$\varphi$叫作关于已知 g_1，M的**保形变换**(conformal transformation).

设M的 Riemann 度量为 g，由g定义的保形联络成局部平坦的条件是：由g确定的 Riemann 联络,并由它的曲率张量 R 构成的 Weyl **保形曲率张量**(conformal curvature tensor)，(但 $\dim M=n\geqslant 3$)

$$\begin{aligned}W^i_{jkl}=R^i_{jkl}&-(1/(n-2))(R_{jk}\delta^i_l-R_{jl}\delta^i_k\\&+g_{jk}R^i_l-g_{jl}R^i_k)\\&+(R/(n-1)(n-2))(g_{jk}\delta^i_l-g_{jl}\delta^i_k)\end{aligned}$$

为 0. 这里 R_{jk} 是 Ricci 张量†，R 是数量曲率†(→Riemann 流形,张量分析)([7]).

【参】 [1] H. Cartan, Notions d'algèbre différentielle; application aux groups de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie, Colloque de topologie, Brussels, 1950, P. 15—27; [2] S. S. Chern (陈省身), Topics in differential geometry, Inst. for Advanced Study, 1951; [3] C. Ehresmann, Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de topologie, Brussels, 1950, p. 29—55; [4] S. Kobayashi (小林昭七)-K. Nomizu (野水克己), Foundations of differential geometry I, Interscience, 1963; [5] A. Lichnerowicz, Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Cremona, 1955; [6] K. Nomizu (野水克己), Lie groups and differential geometry, Publ. Math. Soc. Japan, 1956; [7] K. Yano (矢野健太郎)-S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Princeton Univ. Press, 1953; [8] R. S. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Princeton Univ. Press, 1965., [9] S. S. Chern (陈省身), Differentiable manifolds, Lecture notes, Univ. of Chicago, 1959.

张量分析 [英 tensor calculus 法 calcul tensoriel 德 Tensorrechnung 俄 тензорное исчисление

日 テンソル解析]. 如果在微分流形†M上给定仿射联络†，特别是当给定 Riemann 联络†时，对于M上的张量场，可以定义所谓共变微分的运算(→微分流形，联络，Riemann 流形). **张量分析**是用共变微分表示各种几何量和微分算子性质的运算方法，可以看作是微分流形上的"微分法". 张量分析是研究流形上的几何和分析的一种重要工具.

【共变微分】 以下设M是C^∞流形，假定在M上已给定了仿射联络. 并设M的点a的切空间†为$T_a(M)$，$T_a(M)$上的(r,s)型张量构成的线性空间用$T^r_s(a)$表示. 设X是向量场†，$\varphi(t)$是X的积分曲线†，但$\varphi(0)=a$. 如果沿曲线φ从$\varphi(0)$到$\varphi(t)$的平行移动†用P_t表示，则P_t是从$T_a(M)$到$T_{\varphi(t)}(M)$的同构，因此P_t确定了从线性空间$T^r_s(a)$到$T^r_s(\varphi(t))$的同构$\bar{P}_t$. 设K是M上的(r,s)型张量场†，则$\bar{P}_t^{-1}K_{\varphi(t)}$是$T^r_s(a)$的元，而且由

$$(\nabla_X K)_a=\lim_{t\to 0}(\bar{P}_t^{-1}K_{\varphi(t)}-K_a)/t$$

确定$T^r_s(a)$的元$(\nabla_X K)_a$，由对应$a\to(\nabla_X K)_a$可定义(r,s)型张量场$\nabla_X K$. $\nabla_X K$叫作按向量场X对张量K的**共变导张量** (covariant derivative). 当v是在点a的切向量时，取$X_a=v$的向量场X，设

$$\nabla_v K=(\nabla_X K)_a,$$

则$\nabla_v K$的确定与X的取法无关，$\nabla_v K$叫作K沿v方向的共变导张量.

∇_X叫作按X的**共变微分算子** (covariant differential operator). ∇_X具有下列性质.

1) $\nabla_{X+Y}=\nabla_X+\nabla_Y$, $\nabla_{fX}=f\cdot\nabla_X$,

2) $\nabla_X(K+K')=\nabla_X K+\nabla_X K'$,

3) $\nabla_X(K\otimes K')=(\nabla_X K)\otimes K'+K\otimes(\nabla_X K')$,

4) ∇_X与张量场的缩约†是可换的，如果f是数量场，则$\nabla_X f=Xf$.

对于(r,s)型张量场K，可定义$(r,s+1)$型张量场∇K如下：在各个点a，$(\nabla K)_a$是$T^r_{s+1}(a)$的元，对于任意的$v\in T_a(M)$，将$(r+1,s+1)$型张量$(\nabla K)_a\otimes v$的第$r+1$个反变指标和第$s+1$个共变指标缩约后，它与$\nabla_v K$相等，即

$$(\nabla K)(a)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s,k}v^k=(\nabla_v K)(a)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$$

(相同指标在上，下同时出现时，根据 Einstein 约定†按此指标取从 1 到 n 的总和).

∇K叫作张量场K的**共变微分** (covariant differential). 当$\nabla K=0$时，K叫作**平行张量场** (parallel tensor field). 当K是r阶共变张量场时，∇K是$r+1$阶共变张量场，对于$r+1$个向量场$X_1,\cdots,X_r,X$，将∇K与$X_1\otimes\cdots\otimes X_r\otimes X$的缩约用$(\nabla K)(X_1,\cdots,X_r;X)$表示，则有

$$\begin{aligned}(\nabla K)(X_1,\cdots,X_r;X)&=(\nabla_X K)(X_1,\cdots,X_r)\\&=X(K(X_1,\cdots,X_r))\\&\quad-\sum_{i=1}^{r}K(X_1,\cdots,\nabla_X X_i,\cdots,X_r)\end{aligned}$$

成立.

设$(x^1,\cdots,x^n)$是M的局部坐标系，用∇_i表示按$X=\partial/\partial x^i$的共变微分算子，∇K的分量$(\nabla K)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}$等于$(\nabla_k K)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$. 习惯上把$(\nabla K)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}$用记号$K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}$或$\nabla_k K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$表示. 即

$$\begin{aligned}(\nabla K)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}&=(\nabla_k K)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\\&=K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}=\nabla_k K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}.\end{aligned}$$

又$\nabla(\nabla K)$的分量用$K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k;l}$或$\nabla_l\nabla_k K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$来表示. 对于 2 阶以上的共变微分的分量写法也完全类似.

设X，α，K分别是向量场、一次微分形式、(r,s)型张量场，它们的分量各为ξ^i，α_i，$K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$，则

$$\xi^i_{;j}=\partial\xi^i/\partial x^j+\Gamma^i_{jl}\xi^l,$$

$$\alpha_{i;j}=\partial\alpha_i/\partial x^j-\Gamma^l_{ji}\alpha_l,$$

$$\begin{aligned}K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s;k}&=\partial K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}/\partial x^k\\&\quad+\sum_{t=1}^{r}\Gamma^{i_t}_{kl}K^{i_1\cdots i_{t-1}li_{t+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\\&\quad-\sum_{u=1}^{s}\Gamma^l_{kj_u}K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{u-1}lj_{u+1}\cdots j_s}.\end{aligned}$$

其中 Γ^i_{jK} 是仿射联络的联络系数†.

仿射联络的挠率张量† T、曲率张量† R 分别是(1,2)型、(1,3)型张量场,可由

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

$$R(X, Y)(Z) = [\nabla_X, \nabla_Y] \cdot Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

来定义. 其中 X, Y, Z 是向量场. T, R 的分量 T^i_{jk}, R^i_{jkl} 为

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$$

$$R^i_{jkl} = (\partial\Gamma^i_{lj}/\partial x^k - \partial\Gamma^i_{kj}/\partial x^l) + (\Gamma^a_{lj}\Gamma^i_{ka} - \Gamma^a_{kj}\Gamma^i_{la})$$

(注意: 有的书中把 $-R$ 叫曲率张量,但这里是按参考文献 [1], [3], [5] 的符号,它和 [2], [8] 中的符号相反). 从挠率张量、曲率张量的定义可知,算子 ∇_X, ∇_Y 一般是不可换的,且有下列公式成立.

$$f_{;k;j} - f_{;j;k} = T^i_{kj} f_{;i} \ (f \text{是数量场}),$$

$$\xi^i_{;j;k} - \xi^i_{;k;j} = R^i_{lkj}\xi^l + T^l_{jk}\xi^i_{;l},$$

$$\alpha_{i;j;k} - \alpha_{i;k;j} = R^l_{ijk}\alpha_l + T^l_{jk}\alpha_{i;l}.$$

特别是当挠率张量为 0 时,则

$$f_{;k;j} = f_{;j;k},$$

$$\xi^i_{;j;k} - \xi^i_{;k;j} = R^i_{lkj}\xi^l,$$

$$\alpha_{i;j;k} = \alpha_{i;k;j} = R^l_{ijk}\alpha_l.$$

这些公式称为 **Ricci 公式**(Ricci formulas).

【Riemann 流形的张量场】 以下设 M 是 Riemann 流形而来考虑 Riemann 联络.

【指标的上升和下降】 设基本张量† g 的分量为 g_{ij}, 矩阵 (g_{ij}) 的逆矩阵用(g^{ij})表示(即 $g_{ij}g^{jk} = \delta^k_i$), g^{ij} 是 2 阶反变对称张量的分量. 设 ξ^i 是反变向量场 X 的分量,则 $\xi_i = g_{ij}\xi^j$ 是共变向量场 α 的分量, ξ_i 叫作 X 的**共变分量**(covariant component). α 是由 $\alpha(Y) = g(X, Y)$ (Y 是任意向量场) 确定的一次微分形式. 同样,设 ξ_i 是共变向量场 α 的分量,则 $\xi^i = g^{ij}\xi_j$ 是反变向量场的分量, ξ^i 叫作 α 的**反变分量**(contravariant component). 这样使反变向量场和共变向量场之间以基本张量为媒介成一一对应,如果 f 是数量场,则它的微分 df 是共变向量场,和它对应的反变向量场叫作 f 的**梯度**(gradient), 用 grad f 表示.

对于张量场也可以用 g_{ij}, g^{ij} 使指标上升或下降得出新张量场. 例如,

$$R^i_{jkl} \to R_{ijkl} = g_{ia}R^a_{jkl},$$

$$R^i_{jkl} \to R^{i\ k}_{\ j\ \cdot\ l} = g^{ka}R^i_{jal}.$$

如第二例,哪个指标是上升或下降,为了不致混淆,在原来位置用点来表示.

【L_X 和 ∇_X 的关系】 设 T 是任意的 (1,1) 型张量场,它的分量为 t^i_j. 对于任意的(r, s)型张量场 K, 则 (r, s) 型张量场 $A_T K$ 关于 $r + s > 0$ 由

$$(A_T K)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = \sum_{v=1}^{r} t^{i_v}_k K^{i_1\cdots i_{v-1}k i_{v+1}\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} - \sum_{u=1}^{s} t^l_{j_u} K^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_{u-1}l j_{u+1}\cdots j_s}$$

来定义. 当 $r = s = 0$ 时,即对于数量场K有 $A_T K = 0$. 设X是向量场, $T = -\nabla X$ 时, 若将 A_T 改写作 A_X, 则对于任意张量场 K, 有

$$L_X K = \nabla_X K + A_X K$$

成立. 此处 L_X 是对X的 Lie 导数†算子. 特别是当把K取为基本张量 g 时,由于 $\nabla_X g = 0$,则 $L_X g = A_X \cdot g$, 由 $A_X g = 0$ 给出, X是 Killing 向量场†的条件. 设X的共变分量为 ξ_i, 则这个条件可以写作 $\xi_{i;j} + \xi_{j;i} = 0$ $(i, j = 1, \cdots, n)$.

【曲率张量的性质】 Riemann 空间M的曲率张量具有下列性质.

1) $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$,

2) $R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0$,

3) $R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jmk;l} = 0$.

设 $R_{ijkl} = g_{is}R^s_{jkl}$, 则

4) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$, $R_{ijkl} = -R_{jikl}$,
$R_{ijkl} = R_{klij}$,

5) $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$.

2), 3), 5) 叫作 **Bianchi 恒等式** (Bianchi's identities).

设

$$R_{jk} = -\sum_s R^s_{jks},$$

以 R_{jk} 为分量的 2 阶共变张量场叫作 **Ricci 张量**(Ricci tensor). Ricci 张量是对称的,即 $R_{jk} = R_{kj}$. 又数量场 $R = g^{jk}R_{jk}$ 叫**数量曲率** (scalar

curvature).

【各种算子的表示】 关于向量场的散度†，微分形式的算子 d, δ, Δ (→调和积分) 可用共变微分来表示.

1) 设向量场 X 的分量为 ξ^i, 则

$$\mathrm{div}X = \sum_i \xi^i_{;i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial \sqrt{g}\,\xi^i}{\partial x^i},$$

2) 设 α 是 p 次微分形式, 则

$$(d\alpha)_{i_1\cdots i_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu+1} \alpha_{i_1\cdots \hat{i}_\nu \cdots i_{p+1};i_\nu},$$

$$(\delta\alpha)_{i_1\cdots i_{p-1}} = -g^{kj}\alpha_{ki_1\cdots i_{p-1};j} \quad (p \geqslant 1)$$

指标上面的记号∧表示已去掉它下面的的指标.

$$(\Delta\alpha)_{i_1\cdots i_p} = -g^{lj}\alpha_{i_1\cdots i_p;j;l} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^\nu R^h{}_{\cdot i_\nu} \alpha_{hi_1\cdots \hat{i}_\nu \cdots i_p} + 2\sum_{u<\nu} (-1)^{u+\nu} R^h{}_{\cdot i_\nu}{}^k{}_{\cdot i_u} \alpha_{khi_1\cdots \hat{i}_u \cdots \hat{i}_\nu \cdots i_p}.$$

特别是当 $p = 0$ 时, 即对数量场 f, 有

$$\Delta f = -g^{ij} f_{;i;j} = -\mathrm{div}\ \mathrm{grad} f = -g^{ij}(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j) + g^{ij}\Gamma^s_{ij}(\partial f/\partial x^s).$$

微分算子 $\Delta_2 = g^{ij} \dfrac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij}\Gamma^s_{ij} \dfrac{\partial}{\partial x^s}$ 叫作 **Beltrami 第二种微分算子** (Beltrami differential operator of the second kind), 它等于改变符号的 Laplace 算子 Δ. 另外有 **Beltrami 第一种微分算子** (Beltrami differential operator of the first kind) Δ_1, 它是使数量场 f 与 grad f 的长度对应的算子. 即 $\Delta_1 f = g^{ij} f_{;i} f_{;j} = g^{ij} \dfrac{\partial f}{\partial x^i} \dfrac{\partial f}{\partial x^j}$ (→公式 4II).

【参】 [1] E. Cartan, Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann, Gauthiers-Villars, 第二版 1946; [2] L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princeton Univ. Press, 第二版 1949; [3] S. Helgason, Differential geometry and symmetric spaces, Academic Press, 1962; [4] T. Levi-Civita, The absolute differential calculus, Blackie, 1927; [5] S. Kobayashi (小林昭七)-K. Nomizu (野水克己), Foundations of differential geometry, Interscience, I 1963, II 1969; [6] G. de Rham, Variétés différentiables, Hermann, 1955; [7] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Springer, 1918; [8] K. Yano(矢野健太郎) -S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Ann. of Math. Studies, no. 32, Princeton Univ. Press, 1953; [9] K. Yano (矢野健太郎), The theory of Lie derivatives and its applications, North Holland, 1957.

曲线和曲面的微分几何学 [英 differential geometry of curves and surfaces 法 géométrie différentielle des courbes et des surfaces 德 Differentialgeometrie der Kurven und Flächen 俄 дифференциальная геометрия кривых и поверхностей 日 曲線と曲面の微分幾何学] 设 m 维 C^r 类流形† M 到 n 维 Euclid 空间 E^n 内的浸入† 为 f. 即 f 是 C^r 类映射, 它的微分为 f_*, f_* 的阶数† 对于 M 上的各点都与 M 的维数 m 相等. $f(M)$ 不限定是 E^m 的子流形. M 与 f 合并的概念称为 E^n 的**浸入的子流形** (immersed submanifold) 或叫**曲面** (surface). $m=1$ 时, 叫作**曲线** (curve), $m = n-1$ 时, 特别叫作**超曲面** (hypersurface). 微分几何的主要对象是 $n = 3$ 或 2 的情况, 这是曲线和曲面.

【E^n 的标架】 E^n 的运动可以表示为平行移动† 和使 E^n 的原点不变的正交变换† 的积, 平行移动的全体构成交换群, 可看作与 $\boldsymbol{R}^n$ 相同, 它是运动全体所构成的群 $I(E^n)$ 的正规子群†. 不改变原点的旋转全体是正交群 $O(n)$, $I(E^n)$ 是 $\boldsymbol{R}^n$ 与 $O(n)$ 的半直积. $I(E^n)$ 的 Lie 代数† 是 $\boldsymbol{R}^n$ 与正交群的 Lie 代数 $\mathfrak{o}(n)$ 的直和 (作为加法群). $I(E^n)$ 上的 Maurer-Cartan 微分形式† 按这样的分解可写为 $\omega + \Omega$. ω 属于 $\boldsymbol{R}^n$, $\Omega \in \mathfrak{o}(n)$. $I(E^n)$ 的结构方程是 $d(\omega+\Omega) = -\left(\frac{1}{2}\right)(\omega+\Omega)\wedge(\omega+\Omega)$ 可分解为两个式子 $d\omega = \Omega\wedge\omega$ 和 $d\Omega = -\left(\frac{1}{2}\right)\Omega\wedge\Omega$. 它们叫作 E^n 的**结构方程** (structure equation). 在 E^n 的点 x, 取 E^n 的正规正交系 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 有序组 $(x, \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ 叫作**正交标架** (orthogonal frame). 它的全体用 $\mathcal{O}(n)$ 表示. 把平行移动看作与 $x \in \boldsymbol{R}^n$ 相同, 并记成 T_x, $I(E^n)$ 与 $\mathcal{O}(n)$ 在映射 $\varphi: \varphi(T_x A) = (x, A\boldsymbol{e}_1, \cdots, A\boldsymbol{e}_n)$ $(A \in \mathcal{O}(n))$ 下是微分同胚. 由 φ^* 所得的 ω 以及 Ω 在 $\mathcal{O}(n)$ 上的象是 $\mathcal{O}(n)$ 上的微分形式, 同样

也用ω与Ω来表示．作为$\boldsymbol{R}^n$上的主纤维丛† $\mathcal{O}(n)$，它的射影$\pi:\pi(x,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=x$与$\mathcal{O}(n)$上的$n$个向量函数$\varphi_i:\varphi_i(x,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{e}_i$，有下列关系式成立．

$$\omega=\sum_i\omega^i\boldsymbol{e}_i,\qquad \Omega=\sum_{i<j}\Omega^{ij}E_{ij},$$
$$\omega^i=(d\pi,\varphi_i),\quad \Omega^{ij}=(d\varphi_i,\varphi_j),$$
$$d\omega^i=\sum_j\Omega^{ij}\wedge\omega^j,\qquad (1)$$
$$d\Omega^{ij}=\sum_k\Omega^{ik}\wedge\Omega^{kj},$$

这里，E_{ij}是由$E_{ij}\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i$, $E_{ij}\boldsymbol{e}_i=-\boldsymbol{e}_j$, $E_{ij}\boldsymbol{e}_k=0\ (k\neq i,j)$确定的$\mathfrak{o}(n)$的基底，$(,)$是用$E^n$的内积定义的，以向量为值的形式之间的积．$\mathcal{O}(n)$的任何微分自同胚使$\omega$与$\Omega$不变的，只有$E^n$的运动．

【曲线论】 用(M,f)表示一维流形M到E^n内的浸入．E^n各点的切空间†看作与E^n是相同的．在$M\ni x$的切空间M_x在映射f_*下所成的象$f_*(M_x)$是E^n的直线，它叫作在$f(x)$处$f(M)$的**切线**(tangent line)．在M的点x，由$f_*(M_x)\ni\boldsymbol{e}_1$构成的正交标架$(x,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$的全体用$\mathcal{O}_f(M)$表示．令$\mathcal{O}_f(M)$到$\mathcal{O}(n)$内的自然浸入为$\hat{f}$，可以将$\mathcal{O}(n)$上的微分形式$\omega$, Ω, ω^i, Ω^{ij}用$\hat{f}^*$移到$\mathcal{O}_f(M)$上去，并把这样的微分形式分别记作θ, Θ, θ^i, Θ^{ij}，则$\theta^i=0\ (i>1)$．对于M的两个浸入f_1,f_2，则存在E^n的运动α，使$f_1=\alpha\circ f_2$的充分必要条件是，$\mathcal{O}_{f_1}(M)$与$\mathcal{O}_{f_2}(M)$间存在微分同胚φ，使$\theta_{f_1}=\varphi^*(\theta_{f_2})$, $\Theta_{f_1}=\varphi^*(\Theta_{f_2})$成立．对于纤维丛$\mathcal{O}_f(M)$的射影$\pi_f$和自然定义的以向量为值的函数$\varphi_i\ (i=1,\cdots,n)$之间成立着$d(f\circ\pi_f)=\theta^1\varphi_1$, $d\varphi_i=\sum_{j=1}^n\Theta^{ij}\varphi_j$．设$ds^2(X)=\|df_x(X)\|^2\ (X\in M_x)$，则$(\theta^1)^2=\pi_f^*(ds^2)$．在各点$x\in M$，$\boldsymbol{e}_1$的取法受定向取法的影响，存在两种．但由于$(d\varphi_1,d\varphi_1)=\pi_f^*(\rho^2ds^2)$，$\rho^2$只决定于$x\in M$．$\rho\geqslant0$叫作**绝对曲率**(absolute curvature)．以下，指定了$\boldsymbol{e}_1$的一个定向，将得到的$\mathcal{O}_f(M)$的一个子流形，也用同样符号$\mathcal{O}_f(M)$表示．设$(df(X),\boldsymbol{e}_1)=ds(X)$，则$\theta^1=\pi_f^*(ds)$，$ds$叫作**线素**(line element)．纤维丛$\mathcal{O}_f(M)$的任一截面† R：如果满足$R:\pi_f\circ R=1$，叫作**动标架**或**活动标构**(英 moving frame 法 repère mobile)．对于$R^*(\theta^1)=ds$，设$R^*(\Theta^{ij})=\rho^{ij}ds$，则在$M$上有下式成立．

$$d\boldsymbol{e}_i=\sum_{j=1}^n\rho^{ij}ds\boldsymbol{e}_j.\qquad (2)$$

当(M,f_1)和(M,f_2)关于某个标架具有相同的ds和ρ^{ij}时，并且只有在这时，$f_1=\alpha\circ f_2$（α是E^n的运动）成立．

【Frenet 公式】 当研究曲线（局部的）性质时，只考虑C^r类 Jordan 弧†就够了，对于E^n的正交坐标$(x^1,\cdots,x^n)$用$x^i=f^i(t)\ (t\in[a,b]$, $\sum_{i=1}^n\left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2>0)$或向量式$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$表示．由两个闭区间$[a,b]$, $[a',b']$之间的微分同胚φ合成的映射$f\circ\varphi$与f表示E^n的同一个弧．φ叫作参数变换．C^1类弧具有长度，它的长度可用$s=\int_a^b\left(\sum_{i=1}^n(dx^i/dt)^2\right)^{1/2}dt$表示．可取从曲线上一点出发测得的弧长$s$作为表示曲线的参数．$s$叫作曲线上的**典范参数**(canonical parameter)．

设C^n类弧C的向量表示式为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(s)\ (s\in[a,b])$，并设它的 Wronski 行列式† $|\boldsymbol{x}'(s),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(s)|$不恒等于0（以下，关于典范参数的微分用$'$来表示），这就是说假定曲线不在$E^n$内超平面上．这个行列式为零的点叫作**平稳点**(stationary point)，设C上不存在平稳点．这时，在C的各点将n个向量$\boldsymbol{x}'(s),\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)}(s)$按此顺序用Schmidt正交化†的办法将它们正规正交化．则得到 **Frenet 标架** $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ ($|\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n|>0$)，这时(2)有如下的形式．

$$\boldsymbol{e}_i'(s)=-\rho_{i-1}(s)\boldsymbol{e}_{i-1}(s)+\rho_i(s)\boldsymbol{e}_{i+1}(s),$$
$$i=1,\cdots,n;$$
$$\rho_0(s)=\rho_n(s)=0;\qquad (3)$$
$$\rho_j(s)>0,\quad j=1,\cdots,n-2.$$

叫它作E^n的 **Frenet 公式**（或 **Frenet-Serret 公式**）．$\rho_1,\cdots,\rho_{n-2}$叫作第1，…，第$n-2$**曲率**(curvature)，当$n\geqslant3$时，ρ_{n-1}叫作**挠率**

(torsion). 对于 E^n 的子空间 E^m 内的曲线，规定 $\rho_i = 0(i > m)$. 直线的曲率，挠率都是 0. 对于这种情形，将 $\boldsymbol{e}_i(i > m)$ 固定于 E^m 的正交补空间里，可以进行与 Frenet 标架类似的论述.

对它们的 Frenet 标架，确定了 C^1 类的两个曲线弧 C_1, C_2, 若在它们之间存在微分同胚，保持长度不变，在对应点处，所有的 $\rho_i(i = 1, \cdots, n-1)$ 都相等，则 C_1, C_2 在 E^n 的运动下可以重合. 这叫作**曲线论的基本定理** (fundamental theorem of the theory of curve). 若 $\rho_i(s) \geqslant 0\ (i = 1, \cdots, n-2)$ 及 $\rho_{n-1}(s)$ 作为 s 在范围 $0 \leqslant s \leqslant L$ 的 C^1 类函数被给出，则存在着以它们分别为曲率、挠率的曲线弧. 故称方程 $\rho_i = \rho_i(s)$ 为曲线的**自然方程** (natural equation).

【平面曲线】 设有 E^2 的 C^2 类曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, 它的 Frenet 标架为 $(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, Frenet 公式为

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{e}_1, \quad \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{e}_1' = \rho \boldsymbol{e}_2,$$

ρ 叫作**曲率**(curvature). 自然方程是 $\rho = \rho(s)$. 特别 $\rho(s) =$ 常数 $\neq 0$ 的曲线是圆弧. 作为曲率 ρ 的另一种定义如下，在 E^2 上取一定方向，例如 x 轴的正向，设曲线 C 在 $\boldsymbol{x}(s)$ 的切线 T 与 x 轴的正向所成的角为 $\theta(s)$, 也可由 $\rho = d\theta/ds$ 给出曲率. 仅当 $n = 2$ 时，曲率才能取正值或取负值. $\rho > 0$, $\rho < 0$ 的几何意义如图 1, 图 2 所示. 以 $\boldsymbol{x}(s) + (1/\rho)\boldsymbol{e}_2$ 为中心，$1/\rho$ 为半径的圆，对 $\boldsymbol{x}(s)$ 比 E^2 内任何其它的圆都以较高的次数与该曲线密切. 这样的圆叫作曲线在点 $\boldsymbol{x}(s)$ 的**密切圆** (osculating circle) 或**曲率圆** (circle of curvature), 它的中心叫作**曲率中心** (centre of curvature), 它的半径 $1/\rho$ 叫作**曲率半径** (radius of curvature). 曲线 C 的曲率中心的轨迹 C' 叫 C 的**渐屈线** (evolute), 反之，C 叫作 C' 的**渐伸线** (involute). C' 是 C 的法线族的包络线†. 如果曲线用典范参数 s 表示，则曲率可用 $|\boldsymbol{x}'(s), \boldsymbol{x}''(s)|$ 给出，如果用其它参数表示为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'(t)$, 则

$$\rho(t) = |\boldsymbol{x}'(t), \ \boldsymbol{x}''(t)| / |\boldsymbol{x}'(t)|^3.$$

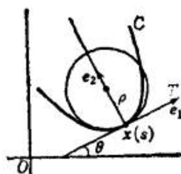


图 1 $\rho > 0$

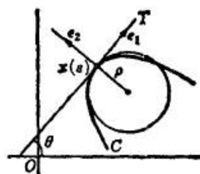


图 2 $\rho < 0$

上述的平面曲线的性质是关于曲线的局部性质，此外，还有讨论平面曲线整体形状的大范围曲线论，简单闭曲线 C 的内部以及由 C 上点构成的点集用 $\bar{D}$ 表示，连结 $\bar{D}$ 上任意两点的线段若完全由属于 $\bar{D}$ 的点构成时，则 C 叫作**凸闭曲线**或**卵形线** (oval). 具有已知长度的所有卵形线中，圆的面积最大. 这个定理有过种种的推广，这类问题叫作**等周问题** (isoperimetric problem). 但勿宁说它是与积分几何学† 等其它分支有密切关系的问题. 此外，还有研究局部性质，例如曲率与曲线整体性质间关系的结果，如著名的**四顶点定理** (four-vertex theorem). 即将曲线 C 上 $d\rho/ds = 0$ 的点叫作顶点，则 C^3 类卵形线上至少存在四个顶点. 又到处是 $\rho \geqslant 0$, 或是 $\rho \leqslant 0$ 的简单闭曲线必是凸的(→凸集).

【空间曲线】 将 E^3 内的 C^3 类曲线弧 C 用典范参数表示为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)\ (s \in [a, b])$. 沿 C 选取 Frenet 标架，Frenet 公式用

$$\boldsymbol{e}_1' = \rho_1 \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = -\rho_1 \boldsymbol{e}_1 + \rho_2 \boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_3' = -\rho_2 \boldsymbol{e}_2$$

表示. $1/\rho_1$ 叫作**曲率半径**, $1/\rho_2$ 叫作**挠率半径** (radius of torsion). 通过曲线上点 $\boldsymbol{x}(s_0)$ 的三条直线 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(s_0) + t\boldsymbol{e}_1$, $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(s_0) + t\boldsymbol{e}_2$, $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(s_0) + t\boldsymbol{e}_3$ 分别叫作在 $\boldsymbol{x}(s_0)$ 的**切线** (tangent line)、**主法线** (principal normal)、**副法线**(binormal). 通过点 $\boldsymbol{x}(s_0)$ 的三个平面 $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(s_0) + t\boldsymbol{e}_2 + \bar{t}\boldsymbol{e}_3$, $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(s_0) + t\boldsymbol{e}_3 + \bar{t}\boldsymbol{e}_1$, $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(s_0) + t\boldsymbol{e}_1 + \bar{t}\boldsymbol{e}_2$ 分别叫作**法平面** (normal plane)、**从切平面**(rectifying plane)、**密切平面**(osculating plane). 对 C^ω 类曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$, 在一点处以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 为坐标向量，对 $\boldsymbol{x}(s)$ 作 Taylor 展开，用 Frenet 公式代入它的各项，则可导出 (**Bouquet 公式**)

$$x_1 = (s - s_0) - (\rho_1(s_0)/6)(s - s_0)^3 + \cdots$$

$$x_2 = (\rho_1(s_0)/2)(s-s_0)^2 + (\rho_1'(s_0)/6)(s-s_0)^3 + \cdots$$

$$x_3 = (\rho_1(s_0)\rho_2(s_0)/6)(s-s_0)^3 + \cdots.$$

由这个公式，可利用 ρ_1, ρ_2 来判断曲线的大致形状. 曲线与密切平面在切点处比其它任何平面都有较高次的切触. C 的密切平面全体以一个可展面为包络面†，它与 C 的切线运动所成的曲面一致. 所以叫作**切线曲面**(tangent surface). C 叫作这个曲面的**脊线** (line of regression). 从切面族也以一个可展面为包络面，叫作 C 的**伸长曲面** (rectifying surface)，C 是它上面的测地线. 法平面的全体以锥面为包络面或以其它曲线 $\bar{C}$ 的切线曲面为包络面.

当空间曲线的自然方程有特殊的形式时，曲线的形状比较简单，$\rho_1(s)$=常数，$\rho_2(s)$=常数，它是与某个直圆柱的母线交成定角的曲线，叫作**常螺旋线** (ordinary helix). 比较一般的有形式 ρ_1/ρ_2=常数，它在各点的切线是一个与定方向成定角的曲线，叫作**一般螺旋线** (general helix) 或**定倾曲线**(curve of constant inclination). 满足 $a\rho_1 + b\rho_2 = c$ 的曲线叫作 **Bertrand 曲线** (Bertrand's curve). 对于这样的曲线 C，存在着与其对应的曲线 $\bar{C}$，在对应点处，两曲线的主法线一致. 反之，这个性质也是曲线成为 Bertrand 曲线的充分条件. 具有与此类似性质的曲线，是存在着曲线 $\bar{C}$ 在对应点处 C 的主法线与 $\bar{C}$ 的副法线一致. 这样的曲线叫作 **Mannheim 曲线** (Mannheim's curve). 还有，在对应点上 C 和 $\bar{C}$ 的切线平行，这种对应叫作 **Combescure 对应** (Combescure's correspondence).

以上主要是就空间曲线的局部性质所作的论述，对于空间曲线，也和平面曲线的情形一样，有一些关于大范围形状的定理，对于长度为 L 的简单空间曲线 C，$K = \int_0^L \rho_1(s)ds$ 叫作**全曲率**(total curvature). 简单空间闭曲线 C 的全曲率不能小于 2π，等于 2π 的情形只能是曲线 C 为平面凸曲线的情形(W. Fenchel). 在 E^3 内将原点固定，对于空间曲线 C 上各点处的单位切向量，引以原点为始点，长度为 1 的平行向量，则它们的终点在单位球面上画出一条曲线 $\bar{C}$. $\bar{C}$ 叫作 C 的**切线标形**(indicatrix of tangent). C 与 $\bar{C}$ 间的这种对应叫作切线的**球面表示** (spherical representation). 闭曲线 C 的全曲率等于切线标形 $\bar{C}$ 的长度. 因此，$K = \oint_C d\theta$，即全曲率是切线沿闭曲线 C 移动一周所扫过的角的总和.

【超曲面论】 设(M, f)为 $n-1$ 维 $C^r(r \geqslant 1)$类流形 M 的浸入，利用 E^n 的内积可定义超曲面 M 上的正定二次微分形式 g 为

$$g_x(X, X) = (f_*(X), f_*(X)), \quad X \in M_x.$$

M 由于 Riemann 度量† g 的引进成为 Riemann 流形†. g 叫作 (M, f) 的**第一基本微分形式** (first fundamental differential form). 在 M 的 x 处，取 E^n 的正规正交系 $\{e_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$，$e_i \in f_*(M_x)$ $(i = 1, \cdots, n-1)$，将正交标架 $(x, e_1, \cdots, e_n)$的全体用 $\mathscr{O}_f(M)$ 表示. $\mathscr{O}_f(M)$ 是具有自然射影 π_f 与微分结构的 M 上的主纤维丛，再令移向主纤维丛 $\mathscr{O}(n)$ 内的自然浸入为 $\hat{f}: \hat{f}(x, e_1, \cdots, e_n) = (f(x), e_1, \cdots, e_n)$. 如果 $\hat{f}^*$ 将 $\mathscr{O}(n)$ 上的微分形式 ω, Ω 诱导到 $\mathscr{O}_f(M)$ 上，得到 $\theta = \hat{f}^*(\theta)$, $\Theta = \hat{f}^*(\Omega)$, E^n 的结构方程也随之改变成为 $d\theta = \Theta \wedge \theta$, $d\Theta = (-1/2)\Theta \wedge \Theta$. 设 $\theta^i = \hat{f}^*(\omega^i)$, $\Theta^{ij} = \hat{f}^*(\Omega^{ij})$，则 $\theta^n = 0$, θ^i, $\Theta^{ij}(i, j < n)$ 仅依赖于(M, f)的第一基本微分形式. 若有 M 的两个浸入 f_1, f_2，它们按 E^n 的适当运动 α 可以表示为 $f_1 = \alpha \circ f_2$ 的充分必要条件是：存在主纤维丛 $\mathscr{O}_{f_1}(M)$, $\mathscr{O}_{f_2}(M)$ 之间的微分同胚 φ，使 $\theta_{f_1} = \varphi^*(\theta_{f_2})$, $\Theta_{f_1} = \varphi^*(\Theta_{f_2})$. 设 M 是已定向的，则在 E^n 内垂直于 $f^*(M_x)$ 的单位向量场确定从 M 到单位球面上的映射，叫作 M 的**球面表示** (spherical representation). 将 M 的单位法线场看作向量函数，由 df 和 dN 的对称积

$$-(df, dN)(X, Y) = (1/2)[(df(X), dN(Y)) + (df(Y), dN(X))],$$

可以定义(M, f)的**第二基本微分形式** (second fundamental differential form).

在 M 上诱导出相同的第一、第二基本微分

形式的两个浸入为 f_1，f_2，可由 E^n 的适当运动 α 写成 $f_1=\alpha\circ f_2$，反之也成立．这叫作**曲面论的基本定理**（fundamental theorem of the theory of surface）．

【E^3 的曲面论】（→公式 4 I）曲面局部地可用参数表示，即 $x_i=x_i(u_\alpha)$ $(i=1,\cdots,n;\ \alpha=1,\cdots,m)$．在三维的情形，用向量式 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u,v)$ 表示，第一基本微分形式用 $E(du)^2+2F\,du\,dv+G(dv)^2$，第二基本微分形式用 $P(du)^2+2Q\,du\,dv+R(dv)^2$ 表示．它们也可用张量分析的记法来描述．用参数 $u^\alpha(\alpha=1,2)$，第一基本微分形式可以写为 $g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$；第二基本微分形式可以写为 $H_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$（总和记号∑按 Einstein 约定† 省略）．$g_{\alpha\beta}$ 叫作**第一基本量**(first fundamental quantity)，$H_{\alpha\beta}$ 叫作**第二基本量**．

在与参数 (u_0,v_0) 对应的曲面上的点 $p_0=\boldsymbol{x}(u_0,v_0)$ 处与 $u=u_0$，$v=v_0$ 对应的曲面上的曲线分别叫作 u 曲线和 v 曲线，在曲面上取标架 $(\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{N})$，这里 $\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$ 是通过 p_0 的 u 曲线和 v 曲线的切向量 $\partial\boldsymbol{x}/\partial u$，$\partial\boldsymbol{x}/\partial v$，$\boldsymbol{N}$ 是在 p_0 处的单位法向量．这样的标架叫作 **Gauss 标架**(Gauss' frame)．Gauss 标架不限定是正交标架，但它与参数 (u,v) 相关联而且是很有用的．通过点 p_0 由 $\boldsymbol{x}_u$，$\boldsymbol{x}_v$ 张成的平面叫作曲面在点 p_0 的**切平面**（tangent plane)．第二基本微分形式的系数 $P(u,v)$，$Q(u,v)$，$R(u,v)$，可由 $P=(-\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{N}_u)$，$Q=(-\boldsymbol{x}_u,\boldsymbol{N}_v)$，$R=(-\boldsymbol{x}_v,\boldsymbol{N}_v)$ $(\boldsymbol{N}_u=\partial\boldsymbol{N}/\partial u,\ \boldsymbol{N}_v=\partial\boldsymbol{N}/\partial v)$给出．

在曲面上一点处，关于 Gauss 标架的切平面上的点，它的坐标设为(X_u,Y_v)，则由 $PX_u^2+2QX_uY_v+RY_v^2=\varepsilon$（$\varepsilon$ 是适当的实数)定义的二次曲线叫作 **Dupin 标形**(Dupin's indicatrix)．当标形是椭圆、双曲线时，曲面上的点分别叫作**椭圆点**(elliptic point)、**双曲点**(hyperbolic point)．如图 3，图 4 所示，前者表示该点邻近的点都在切平面的同侧，后者是在两侧的．双曲点的邻近点构成马鞍形，叫作**鞍点**(saddle point)．既不是椭圆的又不是双曲的点叫作**抛物点**（parabolic point)，这时 $PR-Q^2=0$．如果在 P，Q，R 中有不为 0 的，则如图 5 所示，曲面上该点的邻近点也在切平面同一侧．曲面上点 p 的切平面上的向量(X,Y)满足 $PX^2+2QXY+RY^2=0$ 时，则该向量的方向叫作**渐近方向**（asymptotic direction)．当 p 是椭圆点时，这样的方向不能作为实直线存在，它是在切平面上由标形定义的二次曲线的渐近方向†．曲面上的曲线 C，当 C 上各点处的切线恒为该曲面的渐近方向时，C 叫作**渐近曲线**(asymptotic curve)．

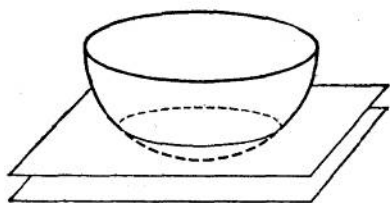


图 3　椭圆点

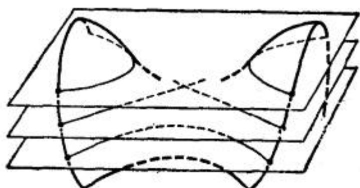


图 4　双曲点

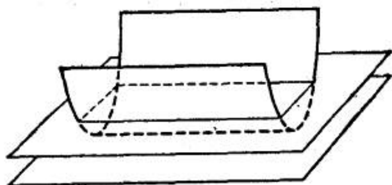


图 5　抛物点

通过曲面上点 p 的曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(u(t),v(t))$ 作为空间曲线，它的曲率 ρ 是

$$\rho\cos\theta=\frac{Pdu^2+2Qdudv+Rdv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}$$

（θ 是曲面的法线与曲线的主法线的夹角)．通过 C^2 类曲面上点 p 的 C^2 类曲线 C 的曲率中心这样确定：曲线在该点的切线与曲面的法线所确定的平面将曲面截成的截口曲线为 C^*，C^* 的曲率中心到 C 在 p 处密切平面上的正投影(**Meusnier 定理**（Meusnier's theorem))，就是

C的曲率中心．C^*在该点的曲率，叫作这个切线方向的**法曲率**（normal curvature）．因为在一点的法曲率可以看作单位圆上的连续函数，所以它存在取最大值与最小值的方向，这个方向可用

$$\begin{vmatrix} E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \\ P\,du + Q\,dv & Q\,du + R\,dv \end{vmatrix} = 0$$

给出．仅当这个二次方程非退化时，它的两个根才确定两个方向，这两个方向叫作曲面在该点的**主曲率方向**（direction of principal curvature）．若在曲面上曲线C的各点，C的切线常与各点的主曲率方向一致，则C叫作**曲率线**（line of curvature）．（所有曲率线都是圆的曲面叫作 **Dupin 四次圆纹曲面**(Dupin's cyclide).）与两个主曲率方向对应的两个法曲率可用满足二次方程

$$\left(\frac{1}{R}\right)^2 - \frac{ER + GP - 2FQ}{EG - F^2}\,\frac{1}{R} + \frac{PR - Q^2}{EG - F^2} = 0$$

的$\frac{1}{R}$的值给出．它们叫作**主曲率**（principal curvature），它们的倒数叫作**主曲率半径**（radius of principal curvature）．两个主曲率$\rho_i = \frac{1}{R_i}$ $(i = 1, 2)$的算术平均$H = (\rho_1 + \rho_2)/2$叫作**平均曲率**（mean curvature）或 **S. Germain 曲率**（S. Germain's curvature），积$K = \rho_1 \cdot \rho_2$叫作**全曲率**(total curvature)或 **Gauss 曲率**(Gaussian curvature)．它们的表示式是：

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{ER + GP - 2FQ}{EG - F^2},$$

$$K = \frac{PR - Q^2}{EG - F^2}.$$

曲面上的点p是椭圆点、双曲点和抛物点，分别等价于在点p处$K > 0, K < 0, K = 0$．第二基本微分形式与第一基本微分形式成比例的点叫作**脐点**(umbilical point)．第二基本微分形式为 0 的点叫作**平坦点**（flat point）．对于仅由脐点所构成的曲面，比值$(P(du)^2 + 2\,Q\,du dv + R(dv)^2)/(E\,(du)^2 + 2\,F\,du dv + G\,(dv)^2)$为常数，这样的曲面是球面片．仅由平坦点所构成的曲面是平面或它的一部分．对于球面，H和K都是常数，对于平面则都是 0．如果用上述曲面的球面表示，则 Gauss 曲率具有如下的意义．设分别用A, A^*表示曲面上由闭曲线围成的面积[†]，当闭曲线收缩为一点时，A^*/A的极限等于K.

第一基本微分形式$g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$的系数矩阵$(g_{\alpha\beta})$的逆矩阵用$(g^{\alpha\beta})$表示．$g^{11} = G/(EG - F^2)$, $g^{12} = g^{21} = -F/(EG - F^2)$, $g^{22} = E/(EG - F^2)$，由它们所确定的第一、二种 **Christoffel 符号**(Christoffel's symbol）分别是

$$[\beta\gamma, \alpha] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha}\right),$$

$$\left\{{}^{\ \alpha}_{\beta\gamma}\right\} = g^{\alpha\delta}[\beta\gamma, \delta],$$

设曲面的向量式为$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u_1, u_2)$, $\boldsymbol{x}_\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u^\alpha}$, $\boldsymbol{x}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}_\alpha}{\partial u^\beta}$, Gauss 标架为$(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{N})$，则

$$\boldsymbol{x}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \boldsymbol{x}_\gamma + H_{\alpha\beta}\boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N}_\alpha = -g^{\gamma\beta}H_{\beta\alpha}\boldsymbol{x}_\gamma$$

成立．前者叫作 **Gauss 公式**，后者叫作 **Weingarten 公式**．将它们看作偏微分方程组，其可积条件如下：若引进曲率张量[†]，它的分量为

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial}{\partial u^\beta}\begin{Bmatrix} \delta \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u^\gamma}\begin{Bmatrix} \delta \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta \\ \sigma\beta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta \\ \sigma\gamma \end{Bmatrix},$$

则

$$R^\delta_{\alpha\beta\gamma} = H_{\alpha\gamma}H^\delta_\beta - H_{\alpha\beta}H^\delta_\gamma, \quad H^\delta_\gamma = g^{\alpha\delta}H_{\gamma\alpha},$$

$$\frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \frac{\partial H_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} + \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}H_{\sigma\gamma} - \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix}H_{\sigma\beta} = 0.$$

前者叫 **Gauss 方程**，后者叫 **Codazzi-Mainardi 方程**．对此，**Bonnet 基本定理**如下：如果在$\boldsymbol{R}^2$的单连通[†]区域D上给出了C^2类正定对称矩阵$(g_{\alpha\beta})$与C^1类对称矩阵$(H_{\alpha\beta})$，它们都是函数矩阵，且满足 Gauss 方程及 Codazzi-Mainardi 方程，则存在以$(g_{\alpha\beta})$为第一基本微分形式系数，$(H_{\alpha\beta})$为第二基本微分形式系数的曲面$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u_1, u_2)$．再者对于$D$内的任意点，在$E^3$内有任意点与之对应，并且可任意取曲面上的 Gauss 标架，使满足$(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta) = g_{\alpha\beta}$．当这样的

Gauss 标架确定后，曲面片不但存在且唯一地确定.

将第一基本微分形式作为 Riemann 度量的 Riemann几何，叫作曲面上的几何(→Riemann 流形).

两个曲面间的微分同胚，当保持曲线的长度不变时，叫作**等距对应**(isometric mapping). 这个情况和第一基本量在各对应点都相等是等价的. 这时说这两个曲面是互相**等距的**(isometric). 由 Gauss 方程可知，全曲率 $K = R_{1212}/g$ 仅依赖于第一基本量，所以 K 是在等距对应下保持不变的量 (**Gauss 基本定理** (拉 Gauss' theorema egregium)).

沿着曲面上曲线 $u^\alpha = u^\alpha(t)$ 定义向量 $\lambda^\alpha(t)\boldsymbol{x}_\alpha$，当该向量沿该曲线的共变微分† 为 0，即

$$\delta\lambda^\alpha/dt = d\lambda^\alpha/dt + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \lambda^\beta du^\gamma/dt = 0$$

时，称该向量在 Levi-Civita 意义下沿这条曲线**平行**(parallel). 沿已知曲线平行的向量，长度是一定的，且两个平行向量所成的角沿曲线也不变. 沿曲面上曲线 C 选取两个满足 $g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha_{(a)}\lambda^\beta_{(b)} = \delta_{ab}$ 的平行向量场 $\lambda^\alpha_{(a)}$, $\lambda^\beta_{(b)}$, C 的切向量由 $du^\alpha/dt = \lambda^\alpha_{(a)}v^a(t)$ 确定. 另外，取一个二维平面和它上面的正交坐标，则常微分方程组 $dx^a/dt = C^a_{(a)}v^a(t)$ ($C^a_a = \lambda^a_{(a)}(p_0)$) 的积分曲线 $\bar{C}$ 叫作 C 的**展开**(development) (→联络).

设 C^2 类曲面上的 C^2 类曲线 C 的曲率为 ρ，曲线 C 的副法线与曲面的法线所成的角为 α，则 $\rho_g = \rho\cos\sigma$ 是曲面上的几何量，叫作曲线在该点的**测地曲率**(geodesic curvature)，测地曲率为 0 的曲线叫作**测地线**(geodesic curve). 它的微分方程由

$$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} \frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds} = 0$$

给出. 测地线的展开是直线(→Riemann 流形).

考虑曲面上由有限个 C^2 类曲线弧相连接而成的简单闭曲线 C，它围成单连通有界的区域 D，如图 6，设在各弧连接点上的外角为 α_i ($i = 1, \cdots, m$)，则

$$\int_C \rho_g ds + \sum_{i=1}^m \alpha_i + \iint_D K d\sigma = 2\pi,$$

成立. 它叫作 **Gauss-Bonnet 公式**. 特别是，当曲线弧都是测地线时，则

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i + \iint_D K\, d\sigma = 2\pi.$$

它是 Euclid 几何中"三角形内角和为 π"，"球面三角形的面积与球面角盈成比例" 等命题的推广. 又由这个定理可知，在定向的闭曲面上，$\iint K d\sigma = 2\pi\chi$ 成立 (χ 表示曲面的 Euler 示性数†)，$\iint K d\sigma$ 叫作**总曲率**(integral curvature).

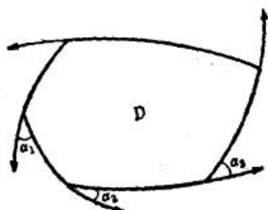


图　6

【E^3的特殊曲面】 平面 π 上的曲线 C 绕 π 上的直线 l 旋转时，l 叫作**旋转轴**(axis of rotation)，C 叫作**母线**(generating line)，这时旋转所成的曲面叫作**旋转曲面**(surface of revolution). 以 x_3 为轴的旋转曲面可用 $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, $x_3 = \varphi(r)$ 表示，它的第一基本微分形式为 $(1+(\varphi')^2)(dr)^2 + r^2(d\theta)^2$. 旋转曲面被含轴 l 的半平面所截得的截线叫作**子午线**(meridian). 当子午线是与轴平行或与轴相交的直线时，旋转曲面分别为**圆柱面**(circular cylinder)，**圆锥面**(circular conic). 子午线是圆周时的曲面叫作**环面**(torus).

平均曲率到处是零，即 $H = 0$ 的 C^2 类曲面叫作**极小曲面**(minimal surface). 在 $C^\cdot$ 类曲面中，以已知闭曲线为边界，并有相对最小面积的是解析曲面，且 $H = 0$. 又如果曲面是 C^2 类的，且到处 $H = 0$，则是解析的 (→Plateau 问题). 以悬链线为母线的旋转曲面，它的方程是 $x_1^2 + x_2^2 = a(e^{x_3/a} + e^{-x_3/a})/2$. 这种曲面叫作**悬链面**(catenoid). 悬链面是极小曲面，反之，是极小曲

面的旋转曲面只有悬链面. 又对于 Delaunay 的曲线†绕底线旋转所得的曲面,H 是常数($\neq 0$). 反之, 具有这种性质的曲面也只限于这样的曲面. $K=$ 常数的曲面叫作**常曲率曲面** (surface of constant curvature),它是二维常曲率 Riemann 空间.非 Euclid 平面可用常曲率曲面表示(→非 Euclid 几何学 [微分几何学的考察]). 具有同一常数的两个常数曲率曲面 (在局部上) 是互相等距的. 常曲率曲面有很多种, 就是成旋转曲面的也有数种. 对它们可以分类, 负的常曲率曲面中最简单的是**伪球面** (pseudo-sphere).它是曳物线† $x_1=a\cos\varphi$, $x_3=a\log\tan(\varphi/2+\pi/4)-a\sin\varphi(-\pi/2<\varphi<\pi/2)$绕 x_3 轴旋转所成的曲面.

由单参数直线族作成的曲面叫作**直纹曲面** (ruled surface). 例如, 单叶双曲面, 双曲抛物面,圆柱面, 圆锥面等, 前二者都可看作由两种方式构成的直纹曲面. 构成直纹曲面的动直线叫作**母线** (generating line). 通过空间闭曲线 C 的各点, 且与某定直线平行的直线作成的曲面叫作以 C 为**底线**(base line)的**柱面** (cylindrical surface). 由 C 的各点与定点 0 连结的直线作成的曲面, 叫作以 0 为顶点的**锥面** (conical surface), 柱面、锥面都是直纹曲面,并且到处 $K=0$. 对于直纹曲面, 一般地 $K\leqslant 0$. 特别是, $H\neq 0$, 到处都是 $K=0$ 曲面叫作**可展曲面** (developable surface). 可展曲面只有柱面、锥面和切线曲面三种. 还存在不可展的直纹曲面, 例如单叶双曲面, 双曲抛物面就是不可展的. 不可展的直纹曲面一般叫作**斜曲面** (skew surface). 与一条定直线 l 直交, 而且由按一定规律运动的直线所画出的直纹曲面, 叫作**正劈锥曲面**(right conoid).如果取 l 为 x_3 轴,它可表示为 $x_1=u\cos v$, $x_2=u\sin v$, $x_3=f(v)$. 曲线 C 以一定的角速度旋转同时沿直线 l 的方向作前进运动所成的曲面叫作**螺旋面**(helicoidal surface). 将 l 取为 x_3 轴, 螺旋面可表示为 $x_1=u\cos v$, $x_2=u\sin v$, $x_3=f(u)+kv$ (k 是常数). 但这时 C 的方程为 $x_3=f(x_1)$. 特别是 C 与 l 直交时的曲面 ($f(u)=0$) 叫作**正螺旋面** (right helicoid, ordinary helicoid).正螺旋面是直纹曲面,同时也是极小曲面. 反之,直纹曲面又是极小曲面的, 只有正螺旋面. 曲线 C 是曳物线的螺旋面叫作 **Dini 曲面**. Dini 曲面是负的常曲率曲面. 对于曲面 S 的各点 p, 在它的法线上取主曲率中心 $q_i(i=1,2)$. 如果 p 在曲面上变动, 则 $q_i(i=1,2)$ 分别画出一个曲面,它们叫作曲面 S 的**中心曲面**(centre surface). 如果原曲面 S 是球面,则中心曲面只是一个点, 如果 S 是旋转曲面, 则中心曲面之一退化为旋转轴, 而另一个又成一个旋转曲面. 对于一般的 S, 沿 S 的曲率线移动时,它的法线描画出一个可展曲面, 而中心曲面是这些可展曲面的脊线的轨迹.

含参数 t 的曲面族$\{S_t\}$的方程可写成$F(x_1, x_2, x_3, t)=0$, 如果有不属于这个族的曲面 E, 在 E 的各点, E 总与某个 S_t 相切 (即 E 与 S_t 有同一切平面时),则 E 叫作曲面族 $\{S_t\}$ 的**包络面** (enveloping surface). E 的方程可由 $F(x_1, x_2, x_3, t)=0$ 与 $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)=0$ 消去 t 得到. 一般地, 如果由 $F=0, \frac{\partial F}{\partial t}=0$ 消去 t 后得到的方程为 $\varphi(x_1, x_2, x_3)=0$, 则 $\varphi=0$ 所确定的曲面是 $\{S_t\}$ 的包络面或是 S_t 的奇异点的轨迹. $\{S_t\}$ 的包络面 E 与 S_{t_0} 的交线 C_{t_0} 由方程$F(t_0)=0$, $(\partial F/\partial t)(t_0)=0$ 所表示. C_{t_0} 叫作$\{S_t\}$的**特征曲线** (characteristic curve). $\{C_t\}$ 是包络面 E 上的曲线族,所以它在 E 上具有包络线 F,这个 F 叫作 $\{S_t\}$ 的**脊线**(line of regression). F 的方程可由 $F=0$, $\partial F/\partial t=0$ 和 $\partial^2F/\partial t^2=0$ 消去 t 得出. 特别是平面族的包络面是可展曲面, 它的特征曲线都是直线, 脊线与切线曲面的脊线一致.

在两个曲面间的微分同胚下, 对应点的第一基本微分形式对于各点都成比例时, 这种对应叫作**保形对应** (conformal correspondence). 如果比例系数为常数, 则叫作**相似对应** (similar correspondence). 解析曲面在局部范围内与平面成保形对应,即作适当的参数变换,可使第一基

本微分形式的形状为 $A(\xi,\eta)((d\xi)^2+(d\eta)^2)$. 这样的参数叫作**等温参数**(isothermal parameter). 由于等温参数的存在可以推得两解析曲面是局部保形的. 在以上的讨论中，解析条件不是必要的([11]). 若两个曲面间的 C^2 类微分同胚，测地线互相对应时，则称两者成**测地对应**(geodesic correspondence). 与平面成局部测地对应的只有常曲率曲面. 在测地对应下，在两个曲面的联络系数间，用那种在对应点具有相同值的参数来表示，则有

$$\overline{\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}}=\left\{\begin{matrix}\alpha\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\}+\delta^\alpha_\beta A_\gamma+\delta^\alpha_\gamma A_\beta$$

的关系.

在 E^3 的子流形† 中与球面同胚的图形，把 E^3 分为两个区域，属于不同区域的两点，不能用和曲面不相交的折线连结. 又两个区域的一方，它全由与其中一点具有有界距离的点构成，叫它作内部. 曲面上或内部的两点所连结的线段，恒由属于曲面上或内部的点构成的话，这种曲面叫作**凸闭曲面**或**卵形面** (ovaloid).

卵形面的 Gauss 曲率 K 决不能是负数，反之，如果 C^4 类具有任意亏格† 的闭曲面(可嵌入 E^3)，若 $K=$ 常数，则是球面 (Liebmann 定理). $K>0$ 的闭曲面是卵形面. 我们已知，闭曲面上至少有一点使 $K>0$ (J. Hadamard). 如果在 K 为正数的某个区域中，不存在脐点，将两个主曲率看作该区域上的连续函数，则在该区域的内部，它们决不能取得最大值或最小值 (D. Hilbert). 设 $K>0$ 的闭曲面的两个主曲率为 k_1, k_2，如果有点 p，在 p 处 k_1 取最大值，k_2 取最小值同时成立，则这样的闭曲面是球面 (H. Hopf). 又 $K>0$，$H=$ 常数的闭曲面也是球面 (H. Liebmann). 再者，$K>0$ 的闭曲面中，如果有单调递减函数 f，使两个主曲率有 $k_2=f(k_1)$ 关系，则这样的闭曲面也是球面 (А. Д. Александров, S. S. Chern (陈省身)).

从这些定理中，去掉 $K>0$ 的条件，"只对于定向闭曲面，上述定理是否成立?" 这样的问题叫作 H. Hopf 问题. 关于这个问题，有 Euler 示性数为 0 的定向 C^3 类闭曲面中，$H=$ 常数的曲面是球面 (H. Hopf). 当两个主曲率 k_1, $k_2(k_1\geqslant k_2)$ 间有关系 $W(k_1,k_2)=0$ 时，这样的曲面叫作 **Weingarten 曲面**(Weingarten's surface)，或叫 **W 曲面** (W-surface). 当定义W曲面的函数 W，关于 k_1, k_2 对称时，叫作**对称W曲面** (symmetric W-surface). Hopf 问题对于 W 曲面或对称W曲面，有著名的结果.

在等距对应下，K 是不变的. 因而球面在等距对应下仍变为球面. 这个事实，表现为球面具有**刚性** (rigidity). 一般地，如果两个卵形面在等距对应下对应，则它们可用运动使之重合 **Cohn-Vossen 定理**(Cohn-Vossen's theorem). 从球面上去掉一个小圆片后则可使之扭曲 ([8]).

关于卵形曲面上是否存在闭测地线的问题有 G. D. Birkhoff 指出的结果: 在 C^3 类卵形面上至少存在三条闭测地线. 又知道所有测地线都是闭测地线的，但又不是球面的旋转曲面是存在的(→大范围变分法).

对于亏格为 $p(p\geqslant 2)$ 的双曲非 Euclid 紧空间†，其中存在到处稠密的测地线(H. Hopf). 关于在这种曲面上测地线流的遍历性→遍历理论，常微分方程定性理论.

【曲面的奇异点】 E^3 内的曲面 S 在一点 p_0 的邻域内由 C^r 类函数 f 表示为 $\mathfrak{x}=\mathfrak{f}(u,v)$，并且 $(\partial\mathfrak{f}/\partial u)_{p_0}$, $(\partial\mathfrak{f}/\partial v)_{p_0}$ 是线性无关的向量时，点 p_0 叫作曲面 S 的**正则点**(regular point). S 上不是正则点的点叫作 S 的**奇异点** (singular point). 特别是，当取适当的参数 (u,v)，如果 $(\partial\mathfrak{f}/\partial u)_{p_0}=0$ 而 $(\partial\mathfrak{f}/\partial v)_{p_0}$, $(\partial^2\mathfrak{f}/\partial u^2)_{p_0}$, $(\partial^2\mathfrak{f}/\partial u\partial v)_{p_0}$ 线性无关时，奇异点 p_0 叫作**半正则点** (semiregular point). 一般地，曲面在奇异点 p_0 的邻域，形状极为复杂，但是有: 1) 由 f (它的 r 阶导数也考虑在内)的微小变形，可使 p_0 成为正则点，或是半正则点; 2) 如果 p_0 是 S 的半正则点，则可适当选取 (u,v) 以及 E^3 的点 p_0 邻域的 C^r 类曲线坐标(在原点 p_0 的邻域)，将 S 表示为 $x_1=u^2$, $x_2=v$, $x_3=uv$ 的形式(H. Whitney [16]) (高维的情形也可以考虑，例如 Whitney

[17]. →嵌入问题).

【E^n 中超曲面的 Gauss 曲率】 设 E^n 内的超曲面为 (M, f)，M 是定向的，将 M 的球面表示看作 M 上取向量值的函数，则应用它的微分 $N_*: M_x \to (S^{n-1})_{N(x)}$ 由 $(N_*(X), N_*(X))$ 所得到的 M 上的二次微分形式叫作 (M, f) 的**第三基本微分形式** (third fundamental differential form). 设在各 M_x，$(S^{n-1})_{N(x)}$ 由 $(n-1)$ 次交代张量所构成的空间分别用 $\Lambda^{n-1}(M_x)$，$\Lambda^{n-1}(S^{n-1}_{N(x)})$ 表示，它们都是一维空间而且具有从 M 上的第一、第三基本微分形式诱导出的自然度量. 如果给 M 以定向，M_x，$S^{n-1}_{N(x)}$ 也取自然基底，则从 N_* 诱导出的 $\Lambda^{n-1}(M_x) \to \Lambda^{n-1}(S^{n-1}_{N(x)})$ 映射具有量 $K(x)$ 为其表现，因而确定了数量场 K. K 依赖于 M 的方向，叫它作 (M, f) 的 **Gauss 曲率** (Gauss' curvature). 因为 $\theta^n = 0$，得 $0 = d\theta^n = \sum_{\alpha<n} \Theta^{n\alpha} \wedge \theta^\alpha$，从而确定矩阵 $(A_{\alpha\beta})$，它满足 $\Theta^{n\alpha} = A_{\alpha\beta}\theta^\beta$，$A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}(\alpha, \beta < n)$，并且 $|A_{\alpha\beta}| K =$.

令紧且可定向的 C^3 类流形 M 的浸入为 (M, f)，1) $f(M)$ 是凸超曲面；2) 由法线场决定的球面表示的映射度[†]为 ± 1，Gauss 曲率是非正的或非负的；这两个命题是等价命题 (Chern (陈)-R. K. Lashof). 因此，紧且可定向的 M 它的浸入的 Gauss 曲率如果是正数，则 $f(M)$ 是超凸曲面.

在 m 维子流形 $(1 < m < n-1)$ 的情形下，可类似的定义第一基本微分形式，但相当的第二基本微分形式则有 $n-m$ 个，它们可以作流为 Riemann 形的子流形来研究(→Riemann 流形).

【参】 [1] W. Blaschke Vorlesungen über Differentialgeometrie I, Spinger, 1924 (Chelsea, 1967); [2] A. Duschek-W. Mayer, Lehrbuch der Differentialgeometrie I, Teubner, 1930; [3] L. P. Eisenhart, An introducon to differential geometry, Princeton Univ. Press, 1940; 修订版 1947; [4] 矢野健太郎，微分幾何学，朝倉，1949; [5] 大槻富之助，微分幾何学，同演習，朝倉，1961; [6] 窪田忠彦，微分幾何学，岩波，1940; [7] 佐佐木重夫，微分幾何学，共立出版，1958; [8] 佐佐木重夫，微分幾何学——大域的考察を中心に，至文堂，1958; [9] 岩堀長慶，ベクトル解析，裳華房，1960; [10] E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile, Gauthier-Villars, 1937; [11] L. Bers, Riemann surfaces, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1957—1958; [12] S. Sternberg, Lectures on differential geometry, Prentice-Hall, 1964; [13] А. Д. Александров, Внутренная геометрия выпуклых поверхностей, Гостехиздат, 1949 (中译本：А. Д. 亚历山大罗夫，凸曲面内蕴几何，科学出版社，1962); [14] S. S. Chern (陈省身), Topics in differential geometry, Lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1951; [15] H. Hodf, Zur Differential Geometrie geschlossener Flächen in Euklidischen Raum, Convegno Internazionale di Geometria Differenziale. Italy (1953), 45—54 (Cremona, 1954); [16] H. Whitney, The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space, Ann. of Math., (2) **45** (1944), 247—293; [17] H. Whitney, Singularities of mappings of Euclidean spaces, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Universidad Nacional Autonoma de México and UNESCO 1958), 285—301; [18] T. J. Willmore. An introduction. to differential geometry, Clarendon Press, 1959; [19] N. J. Hicks, Notes on differential geometry, van Nostrand, 1964; [20] D. Laugwitz, Differential and Riemannian geometry, Academic Press, 1965; [21] B. O'Neill, Elementary differential geometry, Academic Press, 1966; [22] J. J. Stoker, Differential geometry, John Wiley, 1969.

齿轮 [英 gear 法 engrenage 德 Getriebe 俄 зубчатая передача 日 歯車] 在空间取两条直线，分别以它们为轴作旋转曲面，并使旋转曲面具有适当的凹凸形状，由它们凹凸面间的啮合，在两个轴间连续地传递确定的旋转运动，这种简单机械叫作**齿轮**. 旋转曲面叫作**齿节面** (pitch surface)，啮合的凹凸面叫作**齿面** (tooth surface). 关于齿面的啮合，主要研究线接触的情形. 又除特殊用途的情形外，一般是绕两个轴旋转的角速度比是一定的. 以下仅叙述线接触并且是角速度一定的情形. 关于点接触以及角速度比不是常数的情况→[2].

【啮合条件】 在正交标架[†] $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ 下，设以两条定直线 l_1, l_2 为轴，分别以定角速度(向量) $\boldsymbol{\omega}_1$，$\boldsymbol{\omega}_2$ 旋转的齿轮为 1,2. 齿轮 1,2 的齿面为 Γ_1, Γ_2，在时刻 t 下沿着以 r 为参数的曲线 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, r)$ 相啮合. 以下用字母 λ 表示 1 或 2，在轴 l_λ 上取定点 O_λ，关于在齿轮 λ 上附着的正交标架为 $(O_\lambda, \boldsymbol{i}_\lambda(t), \boldsymbol{j}_\lambda(t), \boldsymbol{k}_\lambda(t))$ 上述的接触线用 $\boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{i}_\lambda(t)x_\lambda(t, r) + \boldsymbol{j}_\lambda(t) \cdot y_\lambda(t, r) + \boldsymbol{k}_\lambda(t)z_\lambda(t, r)$ 表示. 设 $\overrightarrow{OO_\lambda} = \boldsymbol{e}_\lambda$，则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_\lambda + \boldsymbol{e}_\lambda$. 以 t, r 作为参数，$x =$

$x_\lambda(t, r)$, $y = y_\lambda(t, r)$, $z = z_\lambda(t, \gamma)$表示齿面Γ_λ，若用简单记号 $\boldsymbol{x}_{\lambda t} = \boldsymbol{i}_\lambda(\partial x_\lambda/\partial t) + \boldsymbol{j}_\lambda(\partial y_\lambda/\partial t) + \boldsymbol{k}_\lambda(\partial z_\lambda/\partial t)$，只要限定 $\boldsymbol{x}_{\lambda t} \times \boldsymbol{x}_r$ 这个值不是 0，它就给出两个齿面 Γ_λ 上点 x 处的法线方向．但 $\boldsymbol{x}_r = \partial \boldsymbol{x}/\partial r = \partial(\boldsymbol{x}_\lambda + \boldsymbol{e}_\lambda)/\partial r = \boldsymbol{i}_\lambda(\partial x_\lambda/\partial r) + \boldsymbol{j}_\lambda(\partial y_\lambda/\partial r) + \boldsymbol{k}_\lambda(\partial z_\lambda/\partial r)$．故 $\boldsymbol{x}_{\lambda t} = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{v}_\lambda$（$\boldsymbol{v}_\lambda$ 是点 $\boldsymbol{x}$ 处的角速度 $\boldsymbol{\omega}_\lambda$ 所生的线速度）．又满足 $\boldsymbol{v}_\lambda = \boldsymbol{\omega}_\lambda \times \boldsymbol{x}_\lambda$, $\boldsymbol{x}_{\lambda t} \times \boldsymbol{x}_r = 0$ 这样的点 $\boldsymbol{x}$ 是齿面 Γ_λ 上的奇异点，换句话说，它是以 t, r 为参数，接触线的轨迹面 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, r)$上点 $\boldsymbol{x}$ 处的法线与齿轮轴 l_λ 相交或平行的点([4]).以下不考虑这样的点.这样，两个齿面 Γ_1, Γ_2 在公共点 $\boldsymbol{x}$ 啮合的条件是$(\boldsymbol{x}_{2t} \times \boldsymbol{x}_r) \times (\boldsymbol{x}_{1t} \times \boldsymbol{x}_r) = 0$ 或 $[\boldsymbol{x}_{2t}, \boldsymbol{x}_{1t}, \boldsymbol{x}_r] = 0$．如果 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$（$\boldsymbol{w}$ 是齿轮 2 对于齿轮 1 在点 $\boldsymbol{x}$ 的相对速度)，则 $(\boldsymbol{x}_{\lambda t} \times \boldsymbol{x}_r) \cdot \boldsymbol{w} = 0$．即如果将一个齿面在点 $\boldsymbol{x}$ 的法线单位向量记为 $\boldsymbol{\sigma}$，则 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ 或是 $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}_1$.

因为，$\boldsymbol{x}_{1t} \times \boldsymbol{x}_r - \boldsymbol{x}_{2t} \times \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}_r$，所以满足 $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}_r = 0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 也满足啮合条件．现将齿轮轴 l_1, l_2 的公垂线与 l_λ 的交点改记为 O_λ，把坐标原点O取在公垂线 O_1O_2 上，并使 $\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_2) = \boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_1)(\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)$，则得到相对速度 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} + h\boldsymbol{\omega}$，这里 $h = [\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{e}]/\boldsymbol{\omega}^2$, $\overrightarrow{O_1O_2} = \boldsymbol{e}$([7])．这样，齿轮 2对于齿轮 1 的相对运动就是，以对两个齿轮轴的公垂线(通过点 O)相垂直的直线为轴的扭转运动．这个扭转运动的轴叫作**瞬时轴**(instantaneous axis)．所谓**准齿节** (reduced pitch)$h = 0$ 的情形，只限于轴平行 $(\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2) = 0$ 或轴相交 ($\boldsymbol{e} = 0$) 的情况．因而，特别是在轴平行或轴相交的情形下，对于瞬时轴上的点有 $\boldsymbol{w} = 0$，故满足啮合条件．关于在整个接触线上都满足条件 $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}_r = 0$ 的齿轮→[7].

以下研究 $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}_r \neq 0$ 的情形．这时，啮合条件采取其它形式，得到 $\boldsymbol{x}_{\lambda t} \times \boldsymbol{x}_r = -b_\lambda \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}_r$, $(b_\lambda \neq 0)$ 或 $\boldsymbol{x}_{\lambda t} = -b_\lambda \boldsymbol{w} + a\boldsymbol{x}_t$, $\boldsymbol{x}_t = b_2\boldsymbol{v}_1 - b_1\boldsymbol{v}_2 + a\boldsymbol{x}_r(b_2 - b_1 = 1)$.

【滑线，轨线】 时刻 t 的啮合点 (t, r) 到时刻 $t + dt$ 成为啮合点 $(t + dt,\ r + dr)$，将齿面 Γ_λ 及接触线的轨迹面上的向量分别记成 $d_\lambda \boldsymbol{x}_\lambda$, $d\boldsymbol{x}$，则 $d_\lambda \boldsymbol{x}_\lambda = \boldsymbol{x}_{\lambda t}\,dt + \boldsymbol{x}_r\,dr = -b_\lambda \boldsymbol{w}\,dt + (a\,dt + dr)\boldsymbol{x}_r$, $d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_t dt + \boldsymbol{x}_r dr = (b_2\boldsymbol{v}_1 - b_1\boldsymbol{v}_2)dt + (a\,dt + dr)\boldsymbol{x}_r$．齿面 Γ_λ 上的曲线 $a\,dt + dr = 0$ 叫作**滑线**（德 Gleitkurve)，在接触线的轨迹面上满足 $a\,dt + dr = 0$ 的曲线叫作**轨线** (trajectory)．在前述接触线轨迹面的方程中，改变参数 r，可使 r 为一定的曲线表示轨线．这样，齿面上的 t 曲线就成为滑线，有 $\boldsymbol{x}_{1t} = b_1\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{x}_{2t} = -b_2\boldsymbol{w}$ $(b_2 - b_1 = 1)$．因此相应同一 r 值的两条 t 曲线常在一公共点$\boldsymbol{x}$处相切，切点的轨迹就是接触线轨迹面上的 t 曲线，即某一条轨线．对于轨线有 $\boldsymbol{x}_t = b_2\boldsymbol{v}_1 - b_1\boldsymbol{v}_2$ 成立.

齿面Γ_λ上的滑线的线素为 $ds_\lambda = -b_\lambda\sqrt{\boldsymbol{w}^2} \cdot dt$, $(ds_2 - ds_1)/ds_\lambda$ 叫作齿面 Γ_λ 的**滑率**(specific sliding)．$1/b_\lambda$ 就是齿面 Γ_λ 的滑率.

滑线上点 $\boldsymbol{x}$ 处的公共单位切向量为 $\boldsymbol{w}/\sqrt{\boldsymbol{w}^2}$，用它可求出滑线的曲率，进而可以求出齿面 Γ_λ 上的点 $\boldsymbol{x}$ 处沿相对速度方向的法曲率 $1/\rho_\lambda$，有 $1/\rho_\lambda = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q}/b_\lambda \boldsymbol{w}^2 + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{\sigma}]/w^2$，这里$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{v}_2$．因此，在两个齿面的啮合点 $\boldsymbol{x}$ 上，对于相对速度方向的相对曲率是 $1/\rho_2 - 1/\rho_1 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q}/b_1b_2\boldsymbol{w}^2$.在两个齿面的啮合点 $\boldsymbol{x}$ 上，对接触线垂直方向的相对曲率是：

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} &= \operatorname{cosec}^2\theta\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right)\\ &= \boldsymbol{x}_r^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q})/b_1b_2(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}_r)^2\\ &= \boldsymbol{x}_r^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q})/(\boldsymbol{x}_{2t} \times \boldsymbol{x}_r) \cdot (\boldsymbol{x}_{1t} \times \boldsymbol{x}_r),\end{aligned}$$

这里θ为接触线与相对速度所成的角．最后这一形式对于 $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{x}_r = 0$的情形也能适用([3]，[5]，[7]).

【啮合极限点】 如果考虑两个具体的齿面，则有主动与从动的区别．即随齿轮 1 是否是主动的，而有

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}_2/R_2 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}_1/R_1 =$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}_\lambda) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{q})\boldsymbol{x}_r^2/(\boldsymbol{x}_{2t} \times \boldsymbol{x}_r) \cdot (\boldsymbol{x}_{1t} \times \boldsymbol{x}_r) \gtreqless 0.$$

这样除奇异点外要使所考虑的齿面啮合，在接触线上所产生的啮合极限点都能从满足条件

$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}_2=0$，或 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}=0$ 的点求出．在满足 $\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{q}=0$ 的啮合点 $\boldsymbol{x}$ 处的齿面法线是 Wildhaber 的**极限法线**（limit normal）（[5]，[6]，[7]）．

【轴平行或轴相交的情形】 当轴平行（$\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2=0$）时，对于过啮合点 $\boldsymbol{x}$ 的轨线和滑线在点 $\boldsymbol{x}$ 处的切向量，分别记作 $\boldsymbol{x}_t$ 和 $\boldsymbol{x}_{\lambda t}$，有 $\boldsymbol{x}_t\cdot\boldsymbol{\omega}_\lambda=0$，$\boldsymbol{x}_{\lambda t}\cdot\boldsymbol{\omega}_\lambda=0$，这些轨线和滑线在过点 $\boldsymbol{x}$ 且垂直于齿轮轴的平面上．对于轴相交（即 $\boldsymbol{e}=0$），有 $\boldsymbol{x}_t\cdot\boldsymbol{x}=0$，$\boldsymbol{x}_{\lambda t}\cdot\boldsymbol{x}=0$，过点 $\boldsymbol{x}$ 的轨线和滑线在以轴的交点为中心且过点 $\boldsymbol{x}$ 的球面上．这就是轴平行、轴相交情形下齿轮啮合的问题，可以分别作为平面或球面上问题来处理的缘故．这时轨线和滑线分别是**接触点的轨迹**（path of contact）和**齿形曲线**（tooth curve）．又，对这两种情形，由于两个齿轮的相对运动瞬时轴上的点都满足啮合条件，所以通常规定接触线的轨迹面通过瞬时轴．齿节面是以齿轮的轴为轴，瞬时轴为母线的圆柱面或圆锥面．

【异面轴的情形】 将过啮合点 $\boldsymbol{x}$ 的轨线、滑线对分别记作 C，C_1，C_2，以齿轮轴 l_λ 为轴，使滑线 C_λ 绕 l_λ 旋转所得的旋转曲面为 D_λ，则 D_1，D_2 沿轨线 C 相切，它们在点 $\boldsymbol{x}$ 处的公共法线是沿 $\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{v}_1$ 给出的方向，是与两个齿轮轴都相交的直线．一般地，异面轴齿轮可看作以旋转曲面 D_1，D_2 作为齿节面，以滑线作为**齿迹**（tooth trace）的齿轮，但在所考虑的点 $\boldsymbol{x}$ 上与 D_λ 相切．以齿轮轴为轴，以圆锥面为齿节面，这样得到的一对齿轮叫作**斜齿轮**（hypoid gear）（[3]，[4]，[6]，[8]）．

【参】 [1] G. B. Grant, A treatise on gear wheels, Philadelphia, 第十二版, 1909; [2] 渡辺茂, 歯車歯形論, コロナ社, 1949; [3] 高橋幸一, ハイポイドギヤの歯当りに関する研究, 井上印刷所, 横浜, 1960; [4] E. Stübler, Über hyperboloidiche Verzahnung, Z. Angew. Math. Mech., 2(1922), 429—446; [5] 谷村正義, 定回転比歯車に就て, 第1報, 日本機械学会論文集, 5(1939), 184—190; [6] E. Wildhaber, Basic relationship of hypoid gears I, II, Amer. Machinist, 90 (1946), 108—111, 130—133; [7] 荻野修作, 一般歯車のかみ合に関する研究, すべり率0の食違軸歯車, 日本機械学会論文集, 30 (1964), 379—388; [8] J. Cappelle, Théorie et calcul des engrenages hypoïds, Donod, Paris, 1949.

Riemann 流形 [英 Riemannian manifold 法 variété riemannienne 德 Riemannsche Mannigfaltigkeit 俄 риманово многообразие 日 リーマン多様体] 【Riemann 度量】 如果在 C^r 类微分流形 M 上给定 C^{r-1} 类 Riemann 度量† g（$1\leqslant r\leqslant\omega$），则（$M$，$g$）或简记为 M 叫作 C^r 类 **Riemann 流形**或 **Riemann 空间**（Riemannian space）（→微分流形）．g 是 C^{r-1} 类（0，2）型张量场†，g 叫作 M 的**基本张量**（fundamental tensor）．在 M 的各点 p，g 的值 g_p 在切空间† T_p 上确定内积（正定的）$g_p(X,Y)$，$(X,Y\in T_p)$．由于 g_p 的关系可以把 T_p 看作度量线性空间或 Euclid 空间 $E^n(n=\dim M)$，在这种空间里所定义的各种概念，可以移到 T_p 以至于 M 上去（例如：切向量 L 的长度为 $\|L\|=\|L\|_{g,p}=g_p(L,L)^{1/2}$；在 M 的子流形 N 的点 p 处 N 的**法向量**（normal vector），可以自然地定义为 $T_p(M)$ 的子空间 $T_p(N)$ 上关于 g_p 的正交补空间的元；一次微分形式可以看作切向量场等等）．在 M 上存在 Riemann 度量的充分必要条件是 M 为仿紧的．关于 Euclid 空间 E^n 的正交坐标系 (x^i)，用 $\sum_{i=1}^{n}dx^i\otimes dx^i$ 表示的张量是 Riemann 度量．

以后不特别声明，总认为 M 是 C^∞ 类并且是连通的．所谓曲线 $x:[a,b]\to M$ 是 **D^∞ 类的**（class D^∞）分段光滑曲线，就是说：x 在 $[a,b]$ 中连续，并可将 $[a,b]$ 分割为有限个闭区间 $[t_{i-1},t_i]$，限制 $x|[t_{i-1},t_i]$ 是 C^∞ 类的浸入†．关于这样的曲线 x 的长度 $\|x\|$，可用 $\int_a^b\|x'(t)\|dt$ 来定义（其中 $x'(t)$ 是 x 的切向量，并几乎对所有的 t 都有定义）．$\|x\|$ 与参数选取无关．典范参数†的存在以及定向的概念等等，都和 $M=E^n$ 时一样（→曲线和曲面的微分几何学）．对于 M 的两点 p，q，用连结 p，q 的所有 D^∞ 类曲线 x，长度的下限 $d(p,q)$ 确定函数 $d:M\times M\to[0,\infty)$．d 叫作 M 的距离†，以它为距离函数可以定义 M 上的拓扑，这个拓扑与 M 原有的拓扑相同．

对于(实、复)椭圆空间，双曲空间（→非 Euclid 几何学），实际存在唯一的 Riemann 流形结构，而且 d 就是空间的距离函数.

如果存在微分流形N到 Riemann 流形(M, g) 的浸入 φ，由还原† 的办法可在 N 上定义 Riemann 度量 φ^*g ($\| L \|_{\varphi^*g} = \| d\varphi(L) \|_g$)（例：$M$的子流形和覆盖流形†由自然映射也可以成为 Riemann 流形）. 当 $M = E^3$, $\dim N = 2$, N是M的二维子流形时，φ^*g 是 N 的第一基本形式†. 设φ是微分同胚，且在N上给出 Riemann 度量 h，如果 $\varphi^*g = h$，则 (N, h) 与 (M, g)是**等距的** (isometric)，φ 叫作**等距映射** (isometry). 从M到M上的等距映射(等距变换)的全体 $I(M)$ 构成群. 映射 $\phi: N \to M$ 为等距的充分必要条件是距离 $d_N(p, q) = d_M(\phi(p), \phi(q))$, $(p, q \in N)$. 特别：$I(E^n)$ 就是合同变换群†.

如果流形 M 是 Riemann 流形 (M_1, g_1)和(M_2, g_2) 的直积，则 $(M, \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2)$ (π_α 是从M到 M_α 的射影，$\alpha = 1, 2$) 叫作 M_1, M_2 的 **Riemann 积** (Riemannian product).

在M的切 n 标架丛 F 中，关于 g 的正规正交基的全体 $B = B_g(M)$是 F 的 (C^∞ 类) $O(n)$ 子丛，称之为M的**正交(切 n)标架丛** (orthogonal frame bundle). 因此，可以得到集合 {F 的 $O(n)$ 子丛}与集合{M的 Riemann 度量}之间的一一对应.

【Riemann 联络】 对正交标架丛 B，存在唯一的使挠率张量†为 0 的线性联络†. 称之为 **Riemann 联络** (Riemannian connection) 或叫 **Levi-Civita 联络** (Levi-Civita connection)（→联络 [Riemann 联络]）. 它的共变微分†算子用∇表示(→联络，张量分析)（对于切向量 X，∇_X 能作用于任意的张量场T上，T只要定义在具有切向量为X的子流形上即可）. 对于基本张量 g，$\nabla g = 0$. 这个联络的联络形式† 可用B上的 n^2 个一次微分形式 $(\omega_j^i)_{1 \leq i,j \leq n}$ 来表示 (但 $\omega_i^j + \omega_j^i = 0$). 设 $(\omega^i)_{1 \leq i \leq n}$ 是标准一次微分形式†，则 (ω^i) 和 $(\omega_i^j)_{1 \leq i < j \leq n}$ 并在一起，在 B 上给出绝对平行性（即在各个点它们线性无关）. 在另外的 Riemann 流形 $N(\dim N = \dim M)$ 的正交标架丛 B_N 上，设同样地有微分形式为 (θ^i), (θ_i^j). 如果存在等距映射 $\phi: M \to N$，而微分 $d\phi$ 是从 $B = B_M$ 到 B_N 的微分同胚，则有 $(d\phi)^*(\theta^i) = \omega^i$, $(d\phi)^*(\theta_i^j) = \omega_i^j$ 成立. 反之，如果有微分同胚 $\Psi: B_M \to B_N$. 且满足：$\Psi^*(\theta^i) = \omega^i$, $\Psi^*(\theta_i^j) = \omega_i^j$，若 M 是可定向的†，则存在等距映射 $\phi: M \to N$，使得在B的一个连通分支 B_0 上 $d\phi = \Psi$ 成立. 如果已选定一 B_0，则ϕ是唯一的. 在这种意义下，M的等距映射的存在就归结为B保持绝对平行性(包括基 ω^i, ω_i^j 的顺序)的微分同胚存在.

根据线性联络的一般理论，由 Riemann 联络唯一确定M上的以 $E^n = I(E^n)/O(n)$ 为纤维† 的 Cartan 联络†. 称之为 **Euclid 联络** (Euclidean connection). 其结果是，把各切空间 $T_p(M)$ 看作 Euclid 空间 E_p^n，对 D^∞ 类曲线 $x: [a, b] \to M$ 和 $t \in [a, b]$，存在一个满足下列条件的从 $E_{x(t)}$ 到 $E_{x(a)}$ 的等距映射 $I_{x,t}$ ($I_{x,b}$ 用 I_x 表示)：1) 如果 x 是二曲线 y, z 的组合，则 $I_x = I_y \circ I_z$. 2) 可微性：如果 x 在 t_0 是 C^∞ 类，则 $t \to I_{x,t}$ 在 t_0 处也是 C^∞ 类的. 3) I_x 与 x 的方向有关，但与参数的取法无关. 所谓 x 的**展开** (development) $\bar{x}$ 是指由 $\bar{x}(t) = I_{x,t}(x(t))$ 定义的 $E_{x(a)}^n$ 内的曲线，$\|\bar{x}\| = \|x\|$.（有时也把 I_x 叫作沿 x 的展开.）根据展开的概念，可把 E^n 中的曲线理论(→曲线和曲面的微分几何学)移到M上.（例如：$\bar{x}$ 是线段，x 或 $x([a, b])$叫作**测地线弧**(geodesic arc)(→联络 [坐标表示]);又如 Frenet 公式†也可以自然地形成并得到证明）. I_x 的旋转部分 I_x^R (是 I_x 和把 $I_x(x(b))$ 移到 $x(a)$ 的 E_p^n 的平行移动的合成)，可看作从度量线性空间 $T_{x(b)}$ 到 $T_{x(a)}$ 的同构. I_x^R 可推广为 $T_{x(b)}$ 上的张量代数† $\mathfrak{T}(T_{x(b)})$ 到 $\mathfrak{T}(T_{x(a)})$ 的同构，将它也用 I_x^R 表示. I_x^R 叫作沿 x 的**平行移动** (parallel displacement). 如果K是M上的张量场，则有 $\nabla_{x'(a)}K = [dI_{x,t}^R(K(x(t)))/dt]_{t=a}$. 特别是，$\nabla K = 0$ 的充分必要条件是：对于所有的 x 有 $I_x^R(K(x(b))) = K(x(a))$ 成立. 这时说K是**平行的**

(parallel).

【测地线】 若 M 的曲线 x 的任意部分弧 $x|[a, b]$是测地线弧，则 x (或 x 的象)叫作**测地线**(geodesic). 测地线具有下列特性. 对$x(a)$有正数 ε，若 $t_1 \leqslant a \leqslant t_2$ 且 $t_2 - t_1 < \varepsilon$，则 $\|x|[t_1, t_2]\| = d(x(t_1), x(t_2))$，即 x 是局部的短程线. 测地线 x 用坐标表示时，可由 $(x^i(t), x^{i\prime}(t))$ 的标准型常微分方程(→联络[坐标表示]) 给出，所以把任意切向量 L 作为初始向量的测地线(除参数外)局部地唯一存在. x 是 C^∞ 类的. 如果取弧长作为 x 的参数 (即 $\|x'\| = 1$)，则测地线 x 也是具有 x' 沿 x 的部分弧平行这样特征的曲线，如果M紧，则M上至少存在 3 条闭测地线 ($n \geqslant 2$). 测地线与M的拓扑有密切的关系(→大范围变分法).

将M的子流形 S 的**法丛** (normal bundle)，(S 上各点的法向量全体构成 S 上的可微线性丛)用 $N(S)$ 表示. $N(S)$ 也包含 S 作为零向量的全体. 在 $N(S)$ 中存在 S 的邻域 U 和 C^∞ 类映射 $\mathrm{Exp}_S: U \to M$，且具有下列性质: 如果 $L \in U$，则存在以 L 为初始切向量的 M 上的测地线 x，$\|x\| = \|L\|$，x 的终点是 $\mathrm{Exp}_S(L)$. 设 U_S 是这种 U 中最大的，则 $\mathrm{Exp}_S: U_S \to M$，由 S 唯一确定. Exp_S 叫作在 S 上的**指数映射** (exponential mapping). 对于 $L \in U_S$，若 Exp_S (函数矩阵) 的秩小于 n，则 L 或 $\mathrm{Exp}_S(L)$ 叫作测地线 $S \to \mathrm{Exp}_S L$ ($0 \in S$, $SL \in U_S$) 上 S 的**焦点** (focal point). 当 S 紧时，则 S 在 $N(S)$ 中有具下列性质的开邻域 V_S. 1) $V_S \subset U_S$，2) 若 $L \in V_S$，则 $\|L\| = d(\mathrm{Exp}_S(L), S)$ (但右边是点 $\mathrm{Exp}_S(L)$ 与点 S 距离的下限); 3) 限制 $\mathrm{Exp}_S | V_S$ 是嵌入，它的象 $\mathrm{Exp}_S(V_S)$ 是 S 的**管状邻域** (tubular neighbourhood). 特别是当 S 是一点 p 时，$N(\{p\})$ 与切空间 $T_p(M)$ 一致，点 p 的焦点叫作 p 的**共轭点** (conjugate point) 它可作为 Jacobi 场† 的零点 (→大范围变分法). $S = \{p\}$ 时，V_S 可用 V_p 表示. 根据 T_p 的正规正交基，如果把 T_p 与 $\boldsymbol{R}^n$ (或 E^n) 看作相同的，则$(\mathrm{Exp}_p)^{-1}$ 是在 $\mathrm{Exp}_p(V_p)$ 上定义的坐标映射，叫作**正规坐标**(normal coordinates). $\mathrm{Exp}_p(V_p)$ 并含有具下列性质的点 p 的邻域 W_p，对 W_p 的任意两点 q, r 存在测地弧 x，$\|x\| = d(q, r)$，x 完全含于 W_p 中，且由 q, r 唯一确定，具有这样性质的 W_p 叫作 p 的**凸邻域** (convex neighbourhood). 满足下列等价的五个命题的 (M, g) 叫作**完备的** (complete): 1) M 关于距离 d 在它所确定的一致的拓扑中是完备的†; 2) M 关于 d 的有界闭子集是紧的; 3) 存在满足 $U_S = N(S)$ 的紧子流形; 4) 对所有紧子流形 S，有 $U_S = N(S)$; 5) M的 Riemann 联络作为线性联络是完备的. 如果M完备，则对于任意点 p，Exp_p 是从 T_p 到M上的映射，对M的任意两点 q, r，可用 $d(q, r) = \|x\|$ 这样的测地线弧来连结. 在仿紧 (paracompact) 流形中，存在完备的 Riemann 度量.

【曲率】 M的正交标架从 B 上的一次微分形式 (ω^i, ω^j_i) 它们给出了(绝对) 平行性的结构方程†是 $d\omega^i = \sum_j \omega^i_j \wedge \omega^j$，$d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j$，其中($\Omega^i_j$)叫**曲率形式** (curvature form)，它可以用叫作**曲率张量** (curvature tensor) 的M上的(1, 3)型张量场 R (→张量分析，联络)来表示. 这就是说，如果关于M的切空间 T_p 的正规正交基 $b \in B$，它的曲率张量的分量为 R^i_{jkl}，则对于 b 有 $\Omega^i_j = \left(\frac{1}{2}\right)\sum R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l$.

设M的切空间 T_p 的 2 维子空间 P 的正规正交基是 (X, Y)，X 与 $R(X, Y)Y$ 的内积 $K_p(P)$，与基 (X, Y) 无关而由 P 来确定. (但 $R(X, Y)Z$ 关于 T_p 的基的第 i 个分量是$\sum R^i_{jkl} Z^j X^k Y^l$)，$K_p$ 是曲面 $\mathrm{Exp}_p(V_p \cap P)$ 的 Gauss 曲率†. 称之为 P 的**截面曲率** (sectional curvature) 也叫 **Riemann 曲率** (Riemannian curvature). 曲率张量 R 由点 p 以及 P 的函数 $K_p(P)$ 唯一确定. 若 $\dim M \geqslant 3$ 以及对于 M 上各个点 p，$K_p(P)$ 与 P 的选取方式无关地取定值 M_p 时，则 M_p 是与 p 无关的常数 (F. Schur). 当 $K_p(P)$ 为常数 K 时，M 叫**常曲率空间** (space of constant curvature). 若 $\nabla R = 0$，则叫作**局部对称空间**(locally symmetric space)(→对称 Riemann

空间). 这些空间的 Riemann 度量，就局部来说，除常倍数以外，由曲率张量 R 唯一确定. 如果常曲率空间是完备且单连通的，根据 K 为 0，为正或为负，它们分别与 E^n、实椭圆空间(即它是通用覆盖 Riemann 流形的球面)或实双曲空间是等距的. 紧正值常曲率空间，即以球面作为普遍覆盖 Riemann 流形的 Riemann 流形，已由 J. A. Wolf 完全确定并作了分类. 完备的单连通的局部对称空间是对称空间†. 由 $R_{ij}=-\sum_k R^k_{ijk}$ 能定义 **Ricci 张量** (Ricci tensor) R_{ij}. 在各点 p 上由(R_{ij})确定 T_p 上的二次形式设为 Q，对长度为 1 的向量 $L(\in T_p)$ 对应的值为 $Q(L)$，它是在所有含 L 的截面(T_p 的二维子空间) P 上，$K_p(P)$ 的平均值，称 $Q(L)$ 为在点 p 沿 L 方向的 **Ricci 曲率** (Ricci curvature) 或叫**平均曲率** (mean curvature). 对在点 p 的所有单位向量 L，$Q(L)$ 的平均值 R 叫作在点 p 的**数量曲率** (scalar curvature) (→张量分析). 设 T_p 的正规正交基为 (X_i)，除数值系数外，$Q(L)=\sum_i g_p(R(X_i, L)L, X_i)$，数量曲率可用 $R=\sum_i Q(X_i)$ 表示. 如果 Ricci 张量是基本张量的数量倍数，则这样的空间称为 **Einstein 空间** (Einstein space) (当 $n\geqslant 3$ 时，数量为常数). 若 M 是 Kähler 流形†，将 P 限制于复平面(在殆复结构†下不变的平面)，则这样的 $K(P)$ 叫作**全纯** (holomorphic) **截面曲率**. 全纯截面曲率为常数的空间，就局部来说，和复 Euclid 空间、椭圆空间或双曲空间†之一等距.

曲率张量 R 的性质与流形 M 的性质之间有密切关系. 现在举两三个例子. 当(在 M 上到处) 截面曲率 $K\leqslant 0$ 时，对于任意的 $p\in M$，则 Exp_p 是浸入，如果 M 是完备的，则 Exp_p 是从 T_p 到 M 上的覆盖映射. 若 M 完备而且 K 的下限为正，则 M 紧，因而 M 的基本群是有限群 (→大范围变分法). 又当 M 紧且 Ricci 张量是正定时，则一维 Betti 数†为 0 (→调和积分). 另外也与示性类†有关系. 例如，当 M 为偶数($=n$)维的、紧的而且可定向时，$a_nK_{(n)}\omega$ 在 M 上的积分是 M 的 Euler-Poincaré 示性数† (**Gauss-Bonnet 公式**). 此处 $a_n=n!/(2^n\pi^{n/2}(n/2)!)$，$\omega$ 是 M 的体积元，$K_{(n)}$ 的定义如下：对于一个正偶数 s，$K_{(s)}$ 是 M 的所有切空间 T_p 的所有 s 维子空间 P 上的实值函数，设 P 的一个正规正交基为 $(X_1, \cdots, X_s)$，则 $K_s(P)$ 可由下式表示

$$K_{(s)}(P)=b_s\sum\varepsilon_{i_1\cdots i_s}\varepsilon_{j_1\cdots j_s}\langle R_p(X_{i_1}, X_{i_2})X_{j_1}, X_{j_2}\rangle\cdots\langle R_p(X_{i_{s-1}}, X_{i_s})X_{j_{s-1}}, X_{j_s}\rangle.$$

这里，$b_s=(-1)^{s/2}/(2^{s/2}s!)$，总和 $\sum$ 遍取满足 $\{i_1, \cdots, i_s\}, \{j_1, \cdots, j_s\}\subset\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全体，$\varepsilon_{i_1\cdots i_s}$ 是 $\{i_1, \cdots, i_s\}$ 的符号 $\prod_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant s}(i_\beta-i_\alpha)$，$\langle,\rangle$ 是 T_p 上用 g_p 定义的内积，R_p 是张量 R 在 p 处的值，$R_p(X_i, X_j)X_k$ 是在本段开始时已定义过的记法，特别是 $K_{(2)}=K$. 又若 $K_{(s)}$ 在紧且可定向的 M 上，对某个 s 是常数，则 M 的第 k 个 Понтрягин 类†，对所有 $k\geqslant s/2$ 为 0.

【完整群】 固定 M 上的点 p. 只考虑以点 p 为始点也为终点的 D^∞ 类闭曲线的方向而不考虑它的参数，这样闭曲线全体的集合记为 Ω_p. $H=\{I_x | x\in\Omega_p\}$ 是 $I(T_p)$ (看作 $T_p=E^n$) 的子群，H 与 p 的选取无关. H 叫作 M 的**完整群** (holonomy group) (→联络). $x\to I_x$ 是从 Ω_p 到 H 的同态，限制在同伦 0 的闭曲线的象 H_0 称为 M 的**限制完整群** (restricted holonomy group). 设 H, H_0 的旋转部分是 h，h_0，它们分别叫作 M 的**齐次** (homogeneous) **完整群**以及**限制齐次** (restricted homogeneous) **完整群**. h 是 T_p 的正交群 $O(n)$ 的子群，h_0 是 h 的连通分支，是紧 Lie 群†. h_0 的 Lie 代数†是由 $\{I_x(R_{x(b)}(X, Y)) | x:[a, b]\to M$ 是 D^∞ 类曲线，$x(a)=p$，$X, Y\in I_{x(b)}\}$ 所张成的 (R (X, Y) 是由曲率张量 R 确定的线性空间 $T_{x(b)}$ 的自同态，这已定义过).

如果 $M=E^n$，则 $H=\{e\}$ (e 是单位元). 当 $h=\{e\}$，$h_0=\{e\}$ 时，则分别称 M 为**平坦** (flat) 的以及**局部平坦的** (locally flat) (→

联络 [联络形式]). 所谓局部平坦就是局部地与 E^n 等距. 如果M完备,而且H(在 E^n 的变换群下)有固定点(不动点),则M与 E^n 等距. 任意有限旋转群 h 是某个局部平坦紧 Riemann 流形M的齐次完整群.

关于 T_p 的线性群 h,可将T_p唯一地分解为互相正交的、不可约的、对 h 不变的子空间 $V_{(i)}$ $(i=1,\cdots,r)$及对 h 不变的向量全体$V_{(0)}(\dim V_{(0)}\geqslant 0)$的直和 $T_p=V_{(0)}\oplus V_{(1)}\oplus\cdots\oplus V_{(r)}$. h(或 h_0)在 T_p 上不可约时,则称M是**不可约的** (irreducible). 当M完备并单连通 (从而 $h=h_0$) 时, M是满足 $V_{(\alpha)}=T_p(M_{(\alpha)})$ 的闭子空间 $M_{(\alpha)}$ $(\alpha=0,1,\cdots,r)$ 的 Riemann 积. 这个分解 $M=\prod M_{(\alpha)}$是由M唯一确定,称之为M的 **de Rham 分解**(de Rham decomposition). 这时, h 是一些闭子群 $h_{(\alpha)}$ 的直积,每个 $h_{(\alpha)}$ 可作为单位映射作用于各个 $V_{(\beta)}(\beta\neq\alpha)$ 上, 并且可看作是 $M_{(\alpha)}$ 的齐次完整群. 如果 h_0 是不可约的, M不是局部对称空间, 则 h_0 可迁地†作用在 T_p 的单位球上. 这样的连通紧 Lie 群仅有几种, 例如, 当 n 为偶数时, 如果 h_0 是酉群† (unitary group) $U(n/2)$, 则 h 可迁地作用于单位球上. h 含于 $U(n/2)$ 内的充分必要条件是: M具有(复结构†) Kähler 流形的结构.

h 自然作用于 T_p 的张量代数† $\mathfrak{T}(T_p)$ 上. 如果M上的张量场A是平行的,则A_p对于 h 不变. 反之, 如果 $\mathfrak{T}(T_p)$ 的元 A_0 对于 h 不变, 则在M上存在唯一的平行张量场A,满足 $A_p=A_0$. 正交标架从B约化†为 h 丛.

【等距变换群】 M的等距变换全体的群 $I(M)$, 由紧开拓扑† 成为 Lie 变换群†. 现在把M的正交标架丛B的一个元 b_0 看作固定的,则 $I(M)$ 的任意元φ的微分 $d\varphi$ 便成为B的变换. 由 $\varphi\to d\varphi(b_0)$所定义的从$I(M)$到B的映射β是 $I(M)$ 流形的嵌入. 如果β是满射的, 则由结构方程显然可知M是常曲率空间,并且M等于 E^n、实双曲空间†、实椭圆空间†(以及球面)之一. β的象构成B的子丛的充分必要条件是: $I(M)$ 是可迁的, 如果β的象含有 h 丛,则M是对称空间. 如果M紧,且 $I(M)$ 是可迁的, 则β的象含于 h 丛内. 如果 $I(M)$ 对于M可迁, 则M完备,而且任意点的迷向群†是紧的,而且M成为$I(M)$的齐性空间†. 反之, 由 Lie 群G的紧子群K所得到的齐性空间 $M=G/K$ 具有对于G不变的 Riemann 度量. 一般地, $I(M)$的元使一切可由 Riemann 度量 g 唯一确定的对象如 Riemann 联络、它的曲率张量 R、测地线全体等等, 都保持不变, 且与 ∇ 和 Laplace-Beltrami 算子† Δ 等可换. 如果M紧且可定向, 则 $I(M)$ 的连通分支 $I_0(M)$ 使各调和微分形式†不变, 并且当M完备单连通时, 由 de Rham 分解显然可知 $I_0(M)$ 也可直积分解. $I(M)$ 的 Lie 代数的元可以看作M上的向量场 X. X叫作M的**无穷小运动** (infinitesimal motion). 无穷小运动X满足方程 $L_X g=0$, 即 $\nabla_{X_i}\xi_j+\nabla_{X_j}\xi_i=0$ (这里 L_X 是对于X的 Lie 导数† ξ_i 是向量场X关于基 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的共变分量†), 称之为 **Killing 微分方程** (Killing's differential equation). Killing 微分方程的解X叫作 **Killing 向量场** (Killing vector field). Killing 向量场的全体构成有限维 ($\leqslant\dim B$) 的 Lie 代数. 当M完备时,它与 $I(M)$ 的 Lie 代数一致. 如果M是紧的且 Ricci 张量为负定的, 则 $I(M)$ 是离散的.

在M的变换下使测地线全体不变的 (射影变换) 全体为 $P(M)$, 以及使在各切空间定义的角不变的(保形变换)全体为 $C(M)$, 利用适当的拓扑可使它们都成为含有 $I(M)$ 的 Lie 变换群. 例如, 当M完备且 Ricci 张量为平行场时,除$M=E^n,S^n$情形外,有 $P(M)=I(M)$成立. 对于 $C(M)$也大致一样.

【浸入和嵌入】 从 (M,g) 到 (M',g') 中的浸入 (嵌入) φ 定义为M到 M' 中的浸入 (嵌入),且使 $\varphi^*g'=g$. 要使φ存在,首先必须满足微分拓扑的条件(→嵌入问题,微分拓扑学). 当 M' 是 Euclid 空间时,关于φ的存在问题,例如,已知有下列结果. M可嵌入 $E^{n(3n+11)(n+1)/2}$, 如果M紧, 则M可嵌入 $E^{n(3n+11)/2}$. (如果M是 C^1 类 Riemann 流形, 则M可嵌入 E^{2n+1}, 如果 M又是紧的, 则可嵌入 E^{2n}. 如果 M 是 C^ω 类

的，则 M 局部地可嵌入 $E^{n(n+1)/2}$.）由 M 可嵌入的 Euclid 空间的最小维数 m 与 n 的差 $m-n$ 叫作 M 的**类数**（class number）．紧且平坦的流形 M 的类数不小于 n．2维实双曲空间的类数比1大．关于嵌入 $\varphi:M\to M'$（除去由 $I(M), I(M')$ 的元引起的变换以外）的唯一性问题，例如，当 $n=2$，$M'=E^3$ 时，使 $\varphi(M)$ 为凸曲面的嵌入 φ 是唯一的．（M 与 S^2 微分同胚且 $K>0$ 时，则存在这样的 φ.）

以下，设 φ 是嵌入，把 M 看作为 M' 的子流形．对于 M 上的向量场 X, Y，设 $\nabla'_X Y=\nabla_X Y+\Omega(X, Y)$（$\nabla'$ 是关于 g' 的共变微分）．则 $\nabla_X Y$，$\Omega(X, Y)$ 分别是在 M 上各点 p 的 $\nabla'_X Y$ 的切分量（$\in T_p(M)$）和法分量（$\in N_p(M)$），Ω 是取值于 $N_p(M)$ 的 M 上的(0,2)型对称张量．Ω 叫作 M 的（或 φ 的）**第二基本形式**（second fundamental form）．对于点 $p\in M$，$\sum_i \Omega(X_i, X_i)$ 与 $T_p(M)$ 的正规正交基 (X_i) 的选取无关，与它相对应的映射叫作**平均曲率**（mean curvature）．E^3 中曲面上微分几何的其它概念可以同样地推广（→曲线和曲面的微分几何学）．若在 M 的点 p 处 $\Omega=0$，则称 M 在 p 是**测地的**（geodesic），如果 M 在各点都是测地的，则 M 叫作**全测地的**（totally geodesic）．为使 M 是全测地的充分必要条件为：M 的所有测地线也是 M' 的测地线（当通过 p 的 M 的所有测地线都是 M' 的测地线时，也说 M 在 p 是测地的）．对于在 M' 的各点 p，令 $T_p(M')$ 的各超平面为 P，以 P 为切空间的全测地超曲面存在的条件是当且仅当 M' 是常曲率空间．如果 L_1, L_2, L_3, L_4 是 $T_p(M)$ 的四个任意元，则有 $\langle R'(L_1, L_2)L_3, L_4\rangle=\langle R(L_1, L_2)L_3, L_4\rangle+\langle\Omega(L_1, L_3), \Omega(L_2, L_4)\rangle-\langle\Omega(L_2, L_3), \Omega(L_1, L_4)\rangle$（$R'$ 是 M' 的曲率张量）成立（它是 Gauss 方程† 和 Codazzi-Mainardi 方程†的一部分，其余部分是 Ω 的共变微分和 R' 及 Ω 的一些关系式，共变微分是以 M' 的 Riemann 联络诱导的†联络而作的微分，但就方程的全部来讲，它表示使 $\varphi:M\to M'$ 满足条件 $g=\varphi^*\cdot g'$ 的映射所应适合的偏微分方程组的可积条件．→[1]）．再对于所有的 $Y\in T_p(M)$，设 $m(p)$ 是使 $\Omega(X, Y)=0$ 的 $X\in T_p(M)$ 的全体的余维数，设 $m=\max\{m(p)\,|\,p\in M\}$，当 M 紧且 M' 为 Euclid 空间时，则 $m=n$.

【参】［1］L. P. Eisenhart, Riemannian geometry, Princeton, 1949;　［2］S. Kobayashi（小林昭七）-K. Nomizu（野水克己）, Foundatons of differential geometry I, Interscience, 1963;［3］佐佐木重夫，リーマン幾何学，現代数学講座，共立出版，1956(中译本：黎曼几何，科学出版社，1964).

大范围变分法［英 calculus of variations in the large　法 calcul de variation global　德 Variationsrechnung im Grossen　俄 вариационное исчисление в целом　日 大域変分法］若已给拓扑空间 X 及其上的连续函数 f，则称定义了变分问题 (X, f)．**大范围变分法**是对于给出的变分问题 (X, f)，以函数 f 的性质和拓扑空间 X 的性质之间的关系作为研究对象的分支．在一般情形下，函数 f 的性质可由 f 在临界点处的性质集中地表现出来．在应用上重要的变分问题是：1）与微分流形 M 上的可微函数 f 有关的问题，2）与由道路构成的空间 Ω 上的能量函数 E 有关的问题．特别是，2）的理论是以 Riemann 空间的测地线理论，因而以普通的变分法为其解析基础的（→变分法）．1），2）的理论是由 H. Poincaré([1]) 和 G. D. Birkhoff([2]) 创始的，M. Morse 将这些理论发展成为今天这样的形式（[4]）．近年来，Morse 理论被进一步推广和精密化，并应用于微分拓扑学、微分几何学而得到各种重要的结果．

【流形上函数的临界点】 n 维微分流形† M 上点 p 的切空间用 T_p 表示．设以后提到的流形都是 C^∞ 类微分流形，f 是 M 上的可微实函数．当在 M 的点 p 上，f 的微分 $f_*: T_p\to \boldsymbol{R}_{f(p)}$ 为零时，点叫作 f 的**临界点**（critical point）．如果在点 p 的邻域中选取局部坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$，那么 p 是 f 的临界点就意味着

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p)=\frac{\partial f}{\partial x^2}(p)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x^n}(p)=0.$$

这时，实数 $f(p)$ 叫作 f 的**临界值**(critical value)．当矩阵 $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j(p))$ 可逆时，则称临界点 p 是**非退化的** (non-degenerate)，当矩阵不是可逆时，则称它是**退化的** (degenerate)．这个定义与坐标系的选取无关．把矩阵 $(\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j(p))$ 叫作 f 的 **Hesse 矩阵**(Hessian)．f 的 Hesse 矩阵的退化阶数† 以及指数 (负的固有值的个数) 分别叫作点 p 的**退化阶数** (nullity) 以及**指数** (index)．在指数为 0 的非退化临界点上 f 为极小，在指数为 n 的非退化临界点上 f 为极大．当点 p 是 f 的指数为 λ 的非退化临界点时，适当选取以 p 为原点的局部坐标系 $(y^1, \cdots, y^n)$，则在它的邻域中，f 可写作如下形式

$$f(y) = f(p) - (y^1)^2 - \cdots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \cdots + (y^n)^2.$$

为看出流形是怎样构成的，考虑安装环柄的操作†．设 M 是具有边界 ∂M 的紧流形，D^s 是 s 维的圆盘，$g:(\partial D^s) \times D^{n-s} \to \partial M$ 是嵌入†，则 $X(M; g; s)$ 是在 M 与 $D^s \times D^{n-s}$ 的不相交的并集中，把在 g 下对应的点看作是相同的，然后由适当的操作引入微分结构所成的微分流形．同样的，当 $g_i:(\partial D_i^{s_i}) \times D_i^{n-s_i} \to \partial M$ $(i=1, \cdots, k)$ 是嵌入映射，且它们的象无公共点时，可定义环柄 $X(M; g_1, \cdots, g_k; s_1, \cdots, s_k)$(S. Smale [13])．

设 f 是流形 M 上的可微实函数，a 为正数，令 $M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M \mid f(p) \leqslant a\}$．这时，$M$ 以及 M^a 的拓扑有下列的基本性质(J. Milnor [15])．1) 设 M 是紧流形，f 是在 M 上定义的可微函数，使得除在 $f^{-1}(c)$ 上含有 k 个指数为 s_i 的非退化临界点 $p_i (i = 1, \cdots, k)$ 外在 $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 上不含其它临界点．这时，对于适当的嵌入映射 f_i，集合 $M^{c+\varepsilon}$ 与 $X(M^{c-\varepsilon}; f_1, \cdots, f_k; s_1, \cdots, s_k)$ 微分同胚†．2) 在所有紧流形 M 上，存在不含退化临界点的可微函数．结合 1) 和 2)，可知所有紧流形与在圆盘上逐次安装环柄所得到的流形是微分同胚的．

对于同伦型†，下列 3)，4) 是易知的．3) 设 c 是实数，$f^{-1}(c)$ 具有以 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ 为指数的 k 个非退化临界点 $p_1, \cdots, p_k$，假定 $f^{-1}[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ 是紧的，且除 $p_1, \cdots, p_k$ 以外不含临界点．这时，对于任意充分小的正数 ε，集合 $M^{c+\varepsilon}$ 与在集合 $M^{c-\varepsilon}$ 上加上 λ_1 维胞腔† $e^{\lambda_1}, \cdots, \lambda_k$ 维胞腔 e^{λ_k} 的集合 $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \cdots \cup e^{\lambda_k}$ 具有相同的同伦型．4) 设 f 不含退化临界点，且每个 M^a 是紧的．这时，M 与对于指数为 λ 的每一个临界点各具有一个 λ 维胞腔的 CW 复形† 有相同的同伦型．

又，5) Morse 不等式成立．设 M 是紧流形，f 是 M 上只含非退化临界点的可微函数．令 M_λ 是 M 上 f 的指数为 λ 的临界点的个数，R_λ 是 M 的 λ 维 Betti 数†．这时有下列不等式成立：

$$M_0 \geqslant R_0,$$
$$M_1 - M_0 \geqslant R_1 - R_0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$M_i - M_{i-1} + \cdots + (-1)^i M_0 \geqslant R_i - R_{i-1} + \cdots + (-1)^i R_0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$M_n - M_{n-1} + \cdots + (-1)^n M_0 = R_n - R_{n-1} + \cdots + (-1)^n R_0.$$

特别是，对于所有的 k，有 $M_k \geqslant R_k$ 成立．把它们叫作 **Morse 不等式**．

利用这些结果，Smale 得到在现代的微分拓扑中的最重要成果之一，肯定地解决了高维 Poincaré 猜想(→微分拓扑学) ([13])．

【测地线】 设 Riemann 流形† M 上的曲线为 $\gamma = \gamma(t)$，如果 γ 的切向量场 $\gamma'(t) = d\gamma/dt$ 关于 M 的 Riemann 联络 (→Riemann 流形) 平行，则曲线 γ 叫作测地线†．测地线可以刻划为这样的曲线，其每段充分小的弧都是其两端点间的最短线．测地线在不论是局部的还是大范围的微分几何中，都起着重要的作用．在具有坐标 $u^1, \cdots, u^n$ 的坐标邻域中，测地线 $\gamma = \gamma(t) = (u^1(t), \cdots, u^n(t))$ 是微分方程

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\{ {k \atop ij} \right\} \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \cdots, n$$

的解曲线．这里 $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ 是 Christoffel 符号†．因此，如果给出始点和始方向，则测地线唯一确

定．假定测地线 $\gamma=\gamma(t)$ 满足条件 $\gamma(0)=q$，$\gamma'(0)=v$，且 $\gamma(1)$ 存在．如果点 $\gamma(1)$ 用 $\exp_q v$ 表示，则测地线 γ 可由 $\gamma(t)=\exp_q tv$ 表示．$\exp_q$ 是把 T_q 原点的充分小的邻域映到 M 上 q 的邻域的微分同胚．映射 $\exp_q$ 叫作在点 q 的**指数映射**(exponential mapping)．若 M 是完备的[†]，$\exp_q$ 在 T_q 全体上有意义，则存在连接 M 上任意两点的短程测地线 (H. Hopf-W. Rinow)．

以后在本项目中如不特别说明，所谓曲线都意味着是分段可微曲线．设连接 M 上两点 p，q 的曲线为 γ．如果选取 γ 的适当的邻域 U，在 U 内连接 p，q 的任意曲线的长度不短于 γ 的长度，则曲线 γ 叫作连接 p，q 的**相对短程线**(relative minimal curve)．如果 γ 是相对短程线，则 γ 是测地线，反之并不一定正确．

当沿测地线 γ 的向量场 Y 满足 Jacobi 微分方程

$$Y''+R(\gamma',Y)\gamma'=0$$

时，则该向量场叫作沿 γ 的 **Jacobi 场** (Jacobi field)．这里 Y' 是 Y 沿 γ' 方向的共变微分[†]，R 表示 M 的曲率张量[†]．如果存在沿 γ 不恒为 0 的 Jacobi 场，它在点 p 和 q 处为 0，则称点 q 是点 p 沿 γ 的**共轭点**(conjugate point)．在点 p 与 q 为 0 的沿 γ 的 Jacobi 场全体所构成的线性空间的维数叫作共轭点 q 的**重数**(multiplicity)．在测地线 $\gamma=\widehat{pq}$ 的内部如果含有端点 p 的共轭点，则 γ 不是连接 p，q 的相对短程线．反之，如果 $\gamma=\widehat{pq}$ 不含端点 p 的共轭点，则 γ 是连接 p，q 的相对短程线．在测地线 $\gamma=\widehat{pq}$ 上即使不含共轭点对，在 M 全体上 γ 也不一定是连接 p，q 的短程测地线． 可是这时在 γ 上存在满足下列条件的点 p^*：对于 γ 的部分弧 $\widehat{pp^*}$ 上的任意点 r，弧 $\widehat{pr}$ 在 M 上是连接 r，p 的短程测地线．从 p^* 到 p 的邻近弧 $\widehat{pp^*}$ 上的点都具有这种性质．在从 p 向一方延伸的测地线 γ 上，具有这种性质且沿 γ 最远的点 p^*，叫作 γ 上 p 的**极小点** (minimum point, cut point)．

关于测地线的短程性质如下．如果已给出 M 的紧子集 K，则存在具有下列性质的数 $\delta>0$：对于在 K 上距离小于 δ 的任意两点，只有一条连结它们的短程测地线．因而测地线就连续地决定于它的端点，这样的 δ 叫作 K 的**基本弧长** (elementary length)．

关于 M 的曲率、共轭点以及极小点的分布，已知有下列性质(关于1)，2)→[15])．1)当 M 的截面曲率[†]到处为 0 或负时，在 M 的所有测地线上不存在始点的共轭点．而且，当 M 完备且单连通时，则在 M 的所有测地线上不存在始点的极小点．因而，连接 M 的任意两点仅有一条(短程)测地线．这时 M 与 Euclid 空间是微分同胚的(J. Hadamard, E. Cartan)． 2) M 的 Ricci 曲率[†]到处都不小于正数 k 时，在 M 上长度大于 $\pi/\sqrt{k}$ 的所有测地线内部，都存在始点的共轭点以及极小点(S.B.Myers)．3) M 完备、单连通而且截面曲率 K 到处取值于区间 $[k,l]$ $\left(\frac{l}{4}<k\leqslant K\leqslant l\right)$ 时，则沿 M 的所有测地线，始点的共轭点以及极小点不能在区间 $[0,\pi/\sqrt{l}]$ 中出现，但必在区间 $[\pi/\sqrt{l},\ \pi/\sqrt{k}]$ 中出现．因此，对于 M 上距离小于 $\pi/\sqrt{l}$ 的任意两点仅有一条连结它们的短程测地线 (W. Klingenberg [10], B. A. Топоногов [17])．若 M 为偶数维，且其截面曲率 K 处处满足不等式 $0<k\leqslant K\leqslant l$，则可得出同样结果(W. Klingenberg [20])．

关于正曲率 Riemann 流形的拓扑结构，利用 3) 可导出下面的**球面定理**(sphere theorem)：如果 Riemann 流形 M 是完备的，单连通的且其截面曲率到处取值于 $(c/4, c]$，则 M 与球面同胚．这里 c 是正常数 (H. E. Rauch, Klingenberg [10])．

从 M 上一点 p 引出的测地线 γ，有的在 M 上描画后又返回到 p．这时，如果在 p 点 γ 的初始切线方向与返回 p 时 γ 的终末切线方向一致，则 γ 叫作**闭测地线** (closed geodesic)．

关于 Riemann 流形上闭测地线的存在以及它的个数，有下列已知定理：1) 对于紧Riemann 流形，至少存在一条闭测地线 (A. I. Fet, R. Olivier [12] [21])． 2) 对于与 n 维球面同胚的 Riemann 流形，设 $n=2^k+s\ (0\leqslant s<2^k)$，则至少存在 $2n-s-1$ 条闭测地线．又，如

果把每条闭测地线的相重数也计算在内，则它的数目至少是 $n(n+1)/2$ (С. И. Альбер [9], Morse [4]).

最近 Klingenberg 从对于与任一阶数为 1 的紧型对称 Riemann 空间†同胚的 Riemann 流形中得到和 2) 相应的结果 ([18], [21]). 对于具有标准 Riemann 度量的阶数为 1 的紧型对称 Riemann 空间(→对称 Riemann 空间)中所有测地线都是长度一定的闭测地线. 但其逆定理不成立,但"所有测地线都是长度一定的单一闭测地线那种 Riemann 流形，与阶数为 1 的紧型对称 Riemann 空间，具有相同的整系数的上同调环†" (R. Bott [7]).

【道路空间的变分】 设M是微分流形. p, q 是M的两点(不一定不同),映射 $\omega:[0,1]\to M$是从p到q的曲线. 在M上以p为始点，q为终点的曲线全体的集合用 $\Omega(M;p;q)$ 表示或简记为 Ω. 所谓曲线ω上Ω的切空间意味着它是由沿 ω, $W(0)=0$ 且 $W(1)=0$ 的分段可微向量场W全体所构成的线性空间,用 Ω_ω表示. 所谓固定ω端点时ω的**变分** (variation) 是对于某正数 ε，具有下列性质的映射 $\bar{\alpha}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega$: 1) $\bar{\alpha}(0)=\omega$; 2) 适当分割$[0,1]$区间 $0=t_0<t_1<\cdots<t_k=1$, 则由 $\alpha(u,t)=\bar{\alpha}(u)(t)$ 定义的连续映射 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1]\to M$ 在所有 $(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{i-1},t_i]$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 上是可微的; 3) 对于所有的 $u\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ 有 $\alpha(u,0)=p$, $\alpha(u,1)=q$成立. 一般地，若把上面定义中 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 换为 $\boldsymbol{R}^n$ 中原点的邻域U,则α叫作ω的具有n个参数的变分.

其次，假定M是 Riemann 流形. T_p 的元(切向量) v 的长度用 $\|v\|$ 表示. 对于 $\omega\in\Omega$, 从a到b $(0\leqslant a<b\leqslant 1)$ 的 $\omega=\omega(t)$ 的**能量** (energy) 定义为

$$E_a^b(\omega)=\int_a^b\left\|\frac{d\omega}{dt}\right\|^2dt,$$

E_0^1 记为 E. 另一方面,从a到b的ω的弧长可由

$$L_a^b(\omega)=\int_a^b\left\|\frac{d\omega}{dt}\right\|dt$$

给出. 对于上面二者之间有不等式 $(L_a^b)^2\leqslant(b-a)E_a^b$ 成立.

现在设M是完备的，M的两点 p, q 间的距离为 d. 这时能量函数 $E:\Omega(M;p,q)\to\boldsymbol{R}$ 是仅在从p到q的短程测地线上取最小值 d^2. 设 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\Omega$ 是 ω 的变分，$W_t=\frac{\partial\alpha}{\partial u}(0,t)=\alpha_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)(0,t)$ 是由α所诱导出的变分向量场. 又设 $V_t=d\omega/dt$, $A_t=(d\omega/dt)'$ 以及 $\Delta_tV=V_{t+}-V_{t-}$. 这里 Δ_tV 除有限个t的值外都是 0. 这时，**第一变分公式** (first variation formula)

$$\frac{1}{2}\left.\frac{dE(\alpha(u))}{du}\right|_{u=0}=-\sum_{t\in(0,1)}\langle W_t,\Delta_tV\rangle-\int_0^1\langle W_t,A_t\rangle dt$$

成立. 这里 $\langle,\rangle$ 是 Riemann 度量的内积. 从这个公式容易看出，仅仅在ω是函数E的临界点时,ω才是测地线.

设 $\gamma:[0,1]\to M$ 是测地线. 如果已给定 $W_1,W_2\in\Omega_\gamma$, U是 $\boldsymbol{R}^2$ 上原点的邻域，考虑具有两个参数的变分 $\alpha:U\times[0,1]\to M$. 这里,设α满足 $\alpha(0,0,t)=\gamma(t)$, $\frac{\partial\alpha}{\partial u_1}(0,0,t)=W_1(t)$, $\frac{\partial\alpha}{\partial u_2}(0,0,t)=W_2(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$. 这时 **Hesse 泛函** (Hessian) $E_{**}(W_1,W_2)$可定义如下:

$$E_{**}(W_1,W_2)=\left.\frac{\partial^2E(\bar{\alpha}(u_1,u_2))}{\partial u_1\,\partial u_2}\right|_{(0,0)},$$

这里 $\bar{\alpha}(u_1,u_2)\in\Omega$ 表示曲线 $\bar{\alpha}(u_1,u_2)(t)=\alpha(u_1,u_2,t)$. 这时，**第二变分公式** (second variation formula)

$$\frac{1}{2}E_{**}(W_1,W_2)=-\sum_{t\in(0,1)}\langle W_2(t),\Delta_tW_1'(t)\rangle-\int_0^1\langle W_2,W_1''+R(V,W_1)V\rangle\,dt$$

成立. 这里 $V=d\gamma/dt$, $\Delta_tW_1'=W_1'(t+0)-W_1'(t-0)$, Δ_tW_1' 除在 $(0,1)$ 中的有限个点外都是 0. 由此可知，当γ是从p到q的短程测地线时,则二次型 $E_{**}(W,W)$ 是正半定的.

Hesse 泛函 $E_{**}: \Omega_\gamma \times \Omega_\gamma \to \boldsymbol{R}$ 的**指数**(index)可定义为使 E_{**} 为负定的 Ω_γ 的子空间的最大维数。这时，有阐述 E_{**} 的指数与测地线 γ 上共轭点的分布之间关系的 **Morse 指数定理** (Morse's index theorem)：E_{**} 的指数 λ 等于 $\gamma(t)$ 沿测地线 γ 上 $\gamma(0)$ 的共轭点 $\gamma(t)$ $(0 < t < 1)$ 的个数. 这里共轭点的个数把相重数计算在内. 这个指数 λ 常为有限数 (Milnor [15]).

对于正数 c，令 $\Omega^c = E^{-1}([0,c])$. 下面通过有限维流形逼近 Ω^c 来考虑它的拓扑. 设 M 是连通的 Riemann 流形，p 和 q 是 M 的两点. 对于集合 $\Omega = \Omega(M; p, q)$ 引进拓扑如下. 设 ρ 是由 M 的 Riemann 度量所诱导出来的距离函数. 当给定具有弧长 $s(t), s'(t)$ 的 $\omega, \omega' \in \Omega$ 时，ω 与 ω' 的距离 $d(\omega, \omega')$ 定义为

$$\max_{0 \le t \le 1} \rho(\omega(t), \omega'(t)) + \left(\int_0^1 \left(\frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} at.$$

最后一项是为使能量函数 $E_0^1(\omega)$ 成为 Ω 上的实连续函数而附加的. 对于这个距离 d，Ω 就成为距离空间.

已知正数 c，设 $\Omega^c = E^{-1}([0, c])$，令 $\mathrm{Int}\Omega^c = E^{-1}([0, c))$，则 Ω^c 是 Ω 的闭子集，$\mathrm{Int}\Omega^c$ 是 Ω 的开子集. 现在构造 Ω^c 的有限维流形的逼近. 设区间 $[0,1]$ 的分割为 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$. $\Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ 是由满足下列条件的曲线 $\omega: [0,1] \to M$ 构成的 Ω 的子空间：1) $\omega(0) = p, \omega(1) = q$; 2) $\omega | [t_{i-1}, t_i]$ 对于各个 i 是短程测地线. 现在设 $\Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)^c = \Omega^c \cap \Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)$，$\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)^c = (\mathrm{Int}\Omega^c) \cap \Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)$. 设 M 是完备的Riemann 流形，c 是使 $\Omega^c \neq \varnothing$ 的正数. 对于 $[0,1]$ 的充分细分 $(t_0, t_1, \cdots, t_k)$，集合 $\mathrm{Int}\Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)^c$ 可自然地赋予有限维微分流形的结构如下，即设 $[0,1]$ 的充分细分为 $(t_0, t_1, \cdots, t_k)$，对于所有曲线 $\omega \in \Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)$，短程测地线 $\omega | [t_{i-1}, t_i]$ 由两端点唯一地连续确定. 把对应 $\omega \to (\omega(t_1), \cdots, \omega(t_{k-1}))$ 定义为从 $\mathrm{Int}\,\Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)^c$ 到 $n(k-1)$ 维直积空间 $M \times M \times \cdots \times M$ 的某个开子集的同胚. 由这个直积空间在 $\mathrm{Int}\,\Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ 上引入微分结构，为使记号简化，$\mathrm{Int}\,\Omega(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ 用 B 表示，能量函数 $E: \Omega \to \boldsymbol{R}$ 对 B 上的限制用 $E': B \to \boldsymbol{R}$ 表示. 这时函数 $E': B \to \boldsymbol{R}$ 是可微的. 又对于小于 c 的各正数 a，集合 $B^a = (E')^{-1}([0, a])$ 是紧的，它是对应集合 Ω^a 的形变收缩核†. E' 的临界点与 $\mathrm{Int}\,\Omega^c$ 里 E 的临界点恰好一致. 在所有这样临界点 γ 上，Hesse 泛函 E'_{**} 的指数 (退化阶数) 等于在 γ 上 E_{**} 的指数(退化阶数)(Milnor [15]).

这样，无穷维道路空间 $\mathrm{Int}\,\Omega^c$ 的同伦型可以从考查有限维流形 B 的同伦型而得到. 直接可以得到如下的关于 Ω^c 的基本性质：设 M 是完备的 Riemann 空间，M 的两点 p, q 沿长度小于 $\sqrt{a}$ 的任意测地线不共轭. 这时，Ω^a 具有有限 CW 复形的同伦型，它对于 E_{**} 有指数 λ 的 Ω^a 的各个测地线，就有一个 λ 维胞腔与它对应 (Milnor [15]).

现在，在从 p 到 q 的连续曲线 $\omega: [0, 1] \to M$ 全体的空间 Ω^* 中引进紧开拓扑†. 这时，自然映射 $\Omega \to \Omega^*$ 给出 Ω 与 Ω^* 的同伦等价†. 另一方面，已知 Ω^* 具有 CW 复形的同伦型. 由于 Ω 的任意紧子集包含在某一 Ω^a 中，取归纳极限†，可得如下的 **Morse 理论的基本定理** (fundamental theorem of Morse theory)：设 M 是完备的 Riemann 流形，p, q 是沿所有测地线互不共轭的 M 的两点. 这时，$\Omega(M; p, q)$ 具有可数 CW 复形的同伦型，它对于从 p 到 q 的 E_{**} 的指数为 λ 的所有测地线对应维数 λ 的胞腔 (Milnor [15]).

另一方面，设 p 是 M 的点，这时 M 上几乎所有的点 q，沿任意测地线与 p 都不共轭. 又对于 Ω 和 M 的同伦群，已知有 $\pi_i(M) = \pi_{i-1}(\Omega)$ $(i \geq 1)$ 的关系. 利用这些结果，Bott 发现典型群†的稳定同伦群†的周期性等重要结果 ([8]).

关于测地线的个数，当 M 是不可缩约†的完备 Riemann 流形时，连接 M 上不共轭的任意两点的测地线有无穷多条 (J.-P. Serre [6]).

现在对于 M 的两个互不相交子集 A, B，考虑从 A 的点出发到 B 的点终止的曲线 ω:

[0, 1] → M的全体 $\Omega_{A,B}$. 在本项中就 A, B 各为一点的情形已作了阐述，对一方为一点而另一方为一维以上的闭子流形，以及双方都是一维以上的情形，也可以同样地进行研究 (W. Ambrose [11], L. N. Patterson [14]). 这时的临界点对应于与双方闭子流形 A, B 正交的测地线.

最近由 R. S. Palais, Smale 等研究了无穷维流形上的大范围变分法. 证明了与有限维的情形相类似的 Morse 基本定理，对于非线性的 Dirichlet 问题也作了研究 (Palais [16]，志賀浩二[19]).

【范畴】 设M是紧流形. A是M的任意非空闭子集. 如果A可以由M的 n 个各为可缩闭子集的并集表示，而不能由 $n-1$ 个以下的这样闭子集的并集表示，则称A在 M 上的**范畴** (category) 为 n. 这时，紧流形M上的任意可微函数的临界点的个数至少等于M的范畴 (Л. Люстерник-Л. Шнирельман [3], H. Seifert and W. Threlfall [5]).

【参】 [1] H. Poincaré, Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes, Trans. Amer. Math. Soc., **6**(1905), 237—274; [2] G. D. Birkhoff, Dynamical systems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1927; [3] L. A. Lusternik (Л. А. Люстерник)-L. Schnirelmann, Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1934; [4] M. Morse, Calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1934; [5] H. Seifert- W. Threlfall, Variationsrechnung im Grossen, Teubner, 1938; [6] J.-P. Serre, Homologie singulière des espace fibrés, applications, Ann. of Math., **54** (1951), 425—505; [7] R.Bott, On manifolds all of whose geodesics are closed, Ann. of Math., **60** (1954) 375—382; [8] R. Bott, The stable homotopy groups of the classical groups, Ann. of Math., **70** (1959), 313—337; [9] С. И. Альбер, О перидической задаче вариационного исчисления в целом, Успехи Мат. Наук, 12, No. **4** (1957) 57—124; [10] W. Klingenberg, Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positive Krümmung, Comment. Math. Helv., **35** (1961) 47—54; [11] W. Ambrose, The index theorem in Riemannian geometry, Ann. of Math., **73** (1961) 49—86; [12] R. Olivier, Die Existenz geschlossener Geodätisher auf kompakten Mannigfaltigkeiten, Comment. Math. Helv., **35** (1961), 146—152; [13] S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math., **74** (1961), 391—406; [14] L. N. Patterson, On the index theorem, Amer. J. Math., **85** (1963), 271—297; [15] J. Milnor, Morse theory, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, **51**, 1963; [16] R. S. Palais, Morse theory on Hilbert manifolds Topology, **2** (1963), 299—340; [17] В. А. Топоногов, Оценка длины замкнутой геодезической в компактном римановом пространстве положительной, Докл. Акад. Наук СССР, **154** (1964) 1047—1049; [18] W. Klingenberg, On the number of closed geodesics on a Riemannian manifold, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 279—282; [19] 志賀浩二,可微分多様体論の最近の話題から,幾何学分科会特別講演集, 1964, P. 40—52; [20] W. Klingenberg, Contributions to Riemannian geometry in the large, Ann. of Math., (2) **69** (1959), 654—666; [21] W. Klingenberg, The theorem of the three closed geodesics, Bull. Amer. Math. Soc., **71** (1965), 601—605; [22] R. L. Bishop-R. J. Crittenden, Geometry of manifolds, Academic Press, 1964; [23] R. Hermann, Differential geometry and the calculus of variations, Academic Press, 1968; [24] M. Morse-S. S. Cairns, Critical point theory in global analysis and differential topology, Academic Press, 1969; [25] D. Gromoll-W. Klingenberg-W. Meyer, Riemannsche Geometrie in Grossen, Lecture notes in math. 55, Springer, 1968.

Finsler 空间 [英 Finsler space 法 espace de Finsler 德 Finslerscher Raum 俄 пространство финслера 日 フィンスラー空間]. 【定义】 设 n 维微分流形$^\dagger M$的切丛†为$T(M)$，$T(M)$的元用M的点 x 和在该点的切向量† y 的组(x, y)表示. 如果M的局部坐标系†为 $(x^1, \cdots, x^n)$，对于 M 的点 $x=(x^1, \cdots, x^n)$ 和在 x 的切向量 $y=\sum y^i\partial/\partial x^i$ 的组 (x, y)，把 $(x^1, \cdots, x^n, y^1, \cdots, y^n)=(x^i, y^i)$看作这个组的坐标，则得到 $T(M)$的局部坐标系. 在 $T(M)$上定义的连续实函数 $L(x, y)$ 满足下列条件时，把它叫作M的 **Finsler 度量** (Finsler metric). 1) $L(x, y)$对 $y\neq 0$ 可微; 2) $L(x, \lambda y)=|\lambda|\cdot L(x,y)$,对于 $T(M)$的所有元(x, y)和实数 λ 成立; 3) 令$(1/2)\partial^2 L(x,y)^2/\partial y^i\partial y^j=g_{ij}(x,y)$时,矩阵 $(g_{ij}(x, y))$ 是正定的. 给出 Finsler 度量的流形M叫作 **Finsler 空间**. 为使流形M具有 Finslar 度量,其充分必要条件是 M 为仿紧†的. $F(x,y)=L(x,y)^2$叫作 Finslar 空间的**基本形式** (fundamental form). 特别是当 $F(x, y)$ 是 $(y^1, \cdots, y^n)$ 的二次形式时，$L(x, y)$ 是 Riemann 度量†,记作 $F(x,y)=\sum_{i,j} g_{ij}(x)y^iy^j$.

因此，Finsler 空间是 Riemann 空间的充分必要条件是 g_{ij} 不含 y. $g_{ij}(x, y)$ 叫作 Finsler 空间的**基本张量**.

这样，Finsler 度量就是 Riemann 度量的推广. 以这样一般化的度量为基础来讨论流形，已由 B. Riemann 考虑过，但是他说：研究流形，用 Riemann 度量更为适当，因为利用 Finsler 度量"只能得到非几何的结果"([7]). 对于 Finsler 度量作系统的研究，把普通的空间曲线论、曲面论的许多概念和定理一般化的是 P. Finsler 作出的([5]).

【Finsler 度量】 在 Finsler 空间里，曲线 $x = x(t)(a \leqslant t \leqslant b)$ 的长度可由 $\int_a^b L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt$ 给出. 因此，Finsler 空间的测地线†，当然可作为变分†问题 $\delta\int L\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt = 0$ 的平稳曲线†来定义，它的微分方程可由下式给出：

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \sum_{j,k} \gamma^i_{jk}\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0.$$

其中，若 $(g_{ij}(x, y))$ 的逆矩阵为 $(g^{ij}(x, y))$ 时，$\gamma^i_{jk}(x, y)$ 是由

$$\gamma^i_{jk}(x, y) = \frac{1}{2}\sum_a g^{ia}\left(\frac{\partial g_{aj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ak}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^a}\right)$$

给出. 即所谓的 Christoffel 符号†.

Finsler 空间的两点间的距离与 Riemann 空间相同，用连接两点的弧长的下限来定义. Riemann 空间作为距离空间的许多性质，几乎都可以原样地推广到 Finsler 空间去. 由 Finsler 度量确定的距离所定义的拓扑结构与流形的拓扑结构是一致的，如 M 作为距离空间是完备†的与测地线可无限地延长，以及 M 的有界集合是紧的，这三种说法是等价的. 又当 M 完备时，连结两点的最短测地线必存在.

在从 M 到 M 本身的微分同胚 φ 下，使任意两点间距离不变的充分必要条件是，φ 在 $T(M)$ 上诱导出的变换使度量 $L(x, y)$ 不变. 这样的变换叫作 Finsler 空间的等距变换†. 等距变换的全体在紧的开拓扑†结构下构成最多是 $n(n+1)/2$ 维的 Lie 变换群†. 如果 Finsler 空间允许有高于 $(n(n-1)+2)/2$ 维的等距变换群，那么它就是常曲率† Riemann 空间([8]).

【联络理论】 Finsler 空间与 Riemann 空间的最大差别在于联络†理论. 在 Riemann 空间，由基本张量作成的 Christoffel 符号是联络系数，但在 Finsler 空间，由它的基本张量得到的 Christoffel 符号 $\gamma^i_{jk}(x, y)$ 并不规定联络. 那是因为基本张量 g_{ij} 一般地不仅依赖于 M 的点，而且还依赖于在该点的切向量方向.

一般地，在 Finsler 空间考虑张量时，与其在 M 上进行探讨不如在它的切丛† $T(M)$ 上进行考虑较为方便. 即设 M 的切 n 标架丛为 P，由 $T(M)$ 到 M 的自然射影为 $p: T(M) \to M$. 令 P 在 $T(M)$ 上诱导而得的主纤维丛†是 $Q = p^{-1}(P)$. Q 的相伴纤维丛†的元叫作张量 在这种意义下，Finsler 基本张量 g_{ij} 是二阶的共变张量场. 因而，作为联络自然的就是主纤维丛 Q 上的联络. E. Cartan 就从这种观点出发对 Finsler 空间定义了联络([3]). 即指出 Q 的联络与 Finsler 度量相关的几个条件. 由此提出，设基本张量 g_{ij} 的共变微分为 0，则可由基本张量唯一确定一个联络.

根据由 Cartan 引进的联络概念，Finsler 空间理论几乎可与 Riemann 空间平行地展开，因此重要的研究相继出现. O. Varga (1941) 应用密切 Riemann 空间的概念成功地简单导出了 Cartan 联络. 又，S. S. Chern (陈省身)(1943) 应用微分形式，对包含 Cartan 联络的一般 Euclid 联络作了研究. H. Rund (1950) 注意到 Finsler 空间的切空间是赋范空间†，得到和 Cartan 的概念不同的许多概念. 然而，就联络理论而言，两种理论并没有本质上的不同. 根据 Cartan 联络，可得出三种曲率张量，所以曲率的理论，比 Riemann 空间的情形复杂得多. L. Auslander (1955) 用在 Finsler 空间 M 切丛局部截面†上由 Finsler 度量可导入 Riemann 度量的事实，把 J. L. Synge 和 S. B. Myers 对 Riemann 空间的曲率和拓扑的研究推广到 Finsler 空间([2]). A. Lichnérowicz 从满足 $L(x, y) = 1$ 的切丛的子丛上的积分出发，把 Riemann 空间的 Gauss-Bonnet 公式†推广到 Finsler 空间([6]).

M. H. Akbar-Zadeh 应用纤维丛理论研究了完整群†和变换群([1]).

对于 Finsler 空间的联络的研究,除 Cartan 以外,还有许多人,但不少人对联络的考虑方法与主丛的联络这样现代的联络理论不相符合的情况似乎不少. J. H. Taylor (1925) 与 Synge (1925) 定义了沿曲线给出的向量的共变微分. L. Berwald (1926) 从**一般道路几何** (general geometry of paths) 的观点出发定义了联络. 满足流形上的微分方程,

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}+2G^i\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=0$$

的曲线,叫作**道路** (path),研究这种性质的理论为一般道路几何.这种理论由 O. Veblen, T. Y. Thomas 开始, J. Douglas 将它推广成上述形式. Berwald 的联络,是以基本张量的共变微分不等于 0 为其特征的.

Finsler 空间是具有线素†的度量空间,作为它的对偶的概念,是给出**面积元素** (areal elements) 的度量空间,已被 Cartan 研究过([4]). 这样空间叫作 **Cartan 空间**(Cartan space). 把它们更一般化所得到的**高阶线素空间** (space of line elements of higher order)或**河口空间**(Kawaguchi space) 是由河口商次(1937)研究过的.

【参】 [1] M. H. Akbar-Zadeh, Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) **80** (1963), 1—79; [2] L. Auslander, On curvature in Finsler geometry, Trans. Amer. Math. Soc., **79** (1955), 378—388; [3] E. Cartan, Les espaces de Finsler, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1934; [4] E. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1933; [5] P. Finsler, Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen, dissertation, Göttingen, 1918; [6] A. Lichnérowicz, Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale, Comment. Math. Helv., **22** (1949) 271—301; [7] B. Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Habilitationsschrift 1854; [8] H. C. Wang (王宪钟), On Finsler spaces with completely integrable equations of Killing, J London Math. Soc., **22** (1947), 5—9; [9] H. Rund, The differential geometry of Finsler spaces, Springer, 1959.

各种空间的微分几何学 [英 differential geometry in miscellaneous spaces 法 géométrie différentielle dans les espaces divers 德 Differentialgeometrie in verschiedener Räumen 俄 дифференциальная геометрия различных пространств 日 いろいろな空間の微分幾何学]

【动标架法】 在这一项里,讨论 Lie 变换群† G 作用下一般空间 (微分流形) V 内的 m 维曲面(子流形)论 (Theory of surfaces).

首先设 r 维 Lie 群† G 可迁地†作用于空间 G_* 上, G_* 的各点的迷向群†只由 G 的单位元作成, 这时 G_* 叫作 G 的**群流形** (group manifold). G_* 的元叫作**标架** (frame). 如果指定一个标架 $f_0\in G_*$, 对于变换 $a\in G$, 使标架 $af_0\in G^*$ 与之对应, 在这个映射下 G 与 G_* 成微分同胚. 设 G_* 上的一次微分形式在 G 的变换下不变的全体为 $I(G)$, 则 $I(G)$ 构成 r 维线性空间, 它是 G 的 Lie 代数† $\mathfrak{g}$ 的对偶空间. $I(G)$ 的一组基 $\{\omega_\lambda\}$ $(1\leqslant\lambda\leqslant r)$ 叫作 G 的**相对分量** (relative components). 这时,**结构方程** (equation of structure) 是

$$d\omega_\lambda=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{r}c_{\lambda\mu\nu}\omega_\mu\wedge\omega_\nu,$$

其中 $c_{\lambda\mu\nu}$ 是 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的结构常数†.

其次, 设 Lie 变换群 G 作用在某一空间 E 上, 在 G 可迁的作用下, 对 G 不变的 E 的子流形叫作**轨道** (orbit). 通过各点 $y\in E$ 的轨道是唯一确定的. 在 E 内各条轨道上指定的参数 $k_j(1\leqslant j\leqslant t)$ 叫作 E 的**基本不变量**(fundamental invariant), E 上的任何的 G 下不变量都是它们的函数.设轨道 M 上一点 y_0 的迷向群为 $H(\subset G)$, 在微分同胚 $\varphi:M\to G/H$, $\varphi(ay_0)=aH$ $(a\in G)$ 下, M 与齐性空间† G/H 可看作是同一的, 另外由射影 $\tau:G_*\to M$, $\tau(af_0)=ay_0(a\in G)$ 可确定一主纤维丛† (G_*,M,H,τ). 点 $y\in M$ 上的纤维† H_y 由右平移†成为群 H 的群流形, 叫作 y 上的**标架族** (family of frames), 它的元叫作 y 上的标架,群 H 的局部坐标 $\theta_\mu(1\leqslant\mu\leqslant s)$ 叫作**第二参数** (second parameter). 它们可用来作为指定标架族 H_y 内各个标架的参数. 当群 H 不连通时,取它的最大连通子群 H^0, 作 M 的覆盖流形† $\widetilde{M}=G/H^0$. 对于 M 的每个元 y, 有它上面 $\widetilde{M}$ 的元 $\tilde{y}$ 叫作**有向元**(oriented element)

与之对应. 现在设对于E内的轨道$M = G/H$, 群H是连通的, 则各点 $y \in M$ 上的标架族 H_y 可作群流形 G_* 上完全可积的全微分方程组,

$$\pi_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r - s, \quad \pi_i \in I(G)$$

的积分流形[†]给出. 这里, π_i 是线性无关的,它们叫作M的**水平分量**(horizontal component). 并且是G的相对分量 ω_λ 的线性组合,其系数一般可取作基本不变量 k_i 的函数. 为了简单起见,对于群G的相对分量 $\{\omega_\lambda\}$, 将水平分量 π_i 和分量$\omega_\alpha\{r - s < \alpha \leqslant r\}$都取作线性无关的,其余的 s 个分量 $\omega_\alpha \in I(G)$ 叫作**第二分量** (second component). 第二参数的微分 $d\theta_\mu$ 是它们的线性组合. 又,如果取E上的局部坐标$\{x_\sigma\}(1 \leqslant \sigma \leqslant n)$,则微分 dx_σ 是基本不变量的微分dk_i及水平分量 π_i 的线性组合.

设G是作用在空间V上的 Lie 变换群. 如果过一点 $x \in V$ 的两个m维曲面 W_1, W_2 在点x成p阶切触时, 就把 W_1 和 W_2 看作是等价的,等价的类叫作在点x的p阶**切触元素** (contact element). 把空间V所有点的p阶切触元素全体记为 E_p. 由于p阶切触元素同时也确定了一个 $p-1$ 阶切触元素, 如果把这种对应记为 $\psi: E_p \to E_{p-1}$, 则得到了序列

$$V = E_0 \xleftarrow{\psi} E_1 \leftarrow \cdots \leftarrow E_{p-1} \xleftarrow{\psi} E_p \leftarrow \cdots,$$

其中, 0 阶切触元素可看作 V 的一点. 由于空间V上的变换诱导出E_p上的变换,所以G也可作为 E_p 上的变换群, 这种变换与映射 ψ 是可换的. 为了简单,将空间E_p的基本不变量k_j叫作p阶基本不变量. 以下用同样的写法, 在p阶基本不变量 $k_j(1 \leqslant j \leqslant t_p)$ 内, 把 $p-1$ 阶基本不变量 $k_i\ (1 \leqslant i \leqslant t_{p-1})$ 作为它的一部分而包含进去. 附加的 $t_p - t_{p-1}$ 个不变量 k_α $(t_{p-1} \leqslant \alpha \leqslant t_p)$ 叫作 **p阶不变量** (invariant of order p). 同样可设, p阶标架族 $H_y^p(y \in E_p)$含于 $p-1$ 阶标架族 $H_z^{p-1}(z = \psi y \in E_{p-1})$ 之中. 如有必要, 可定义 p 阶切触元素的**方向** (orientation),以使标架族 H_y^p 成为连通的. 再者,在p阶水平分量 $\pi_j(1 \leqslant j \leqslant r - s_p)$ 内,可把 $p-1$ 阶水平分量 $\pi_i(1 \leqslant i \leqslant r - s_{p-1})$ 取在它的部分中. 附加的 $s_{p-1} - s_p$ 个分量 $\pi_\alpha(r - s_{p-1} \leqslant \alpha \leqslant r - s)$ 叫作 **p阶主分量** (principal component of order p).

现在, 设W是空间V内的m维曲面. 在曲面W上各点确定p阶切触元素($p \geqslant 0$),它们可用p阶标架族与p阶及p阶以下的不变量的值来表示.如果取曲面W上的局部坐标 $\{u_i\}(1 \leqslant i \leqslant m)$,则微分 du_i 可用m个线性无关的微分形式 $\pi_i(1 \leqslant i \leqslant m)$的线性组合表示. 这里,$\pi_i$是$V$的基本不变量的微分与$V$的轨道的水平分量的适当线性组合, 它们叫作 W 的**基底分量** (basic component). 设将曲面 W 上的p阶标架族全体记作 $F^p(W)$,则它们依赖于m个参数 u_i 与 s_p 个p阶第二参数 θ_μ. 在空间 $F^p(W)$ 内, 不大于 $p-1$ 阶的不变量的微分以及不大于 $p-1$ 阶的主分量都是基底分量的线性组合, 它们的系数是不大于p阶的不变量的函数.故此, p阶不变量的微分以及p阶主分量都是基底分量的线性组合

$$dk_\alpha = h_{\alpha 1}\pi_1 + \cdots + h_{\alpha m}\pi_m,$$
$$t_{p-1} < \alpha \leqslant t_p,$$
$$\pi_\alpha = b_{\alpha 1}\pi_1 + \cdots + b_{\alpha m}\pi_m,$$
$$r - s_{p-1} < \alpha \leqslant r - s_p,$$

但它们的系数 $h_{\alpha i}, b_{\alpha i}$ 是不大于p阶的不变量, 一般是p阶第二参数θ_μ的函数. 这些系数叫作 **p 阶系数** (coefficient of order p). 设将一个p阶标架族移于其本身的G的子群为 Γ_p, 并设以p阶系数 $(h_{\alpha i}, b_{\alpha i})$ 为坐标的空间为 D_p, 则 Γ_p 在 D_p 上作为变换群而起作用, 若已知曲面W上不大于p阶切触元素, 则可以归纳地求得$p+1$次切触元素.为此,只须在以Γ_p为变换群的空间D_p内,取一个尽可能简单的子空间 C_p,使它与D_p内各轨道仅仅交于一个点即可. 这时, 在 C_p 上的点与p阶第二参数的值相对应的标架就是p阶标架, 而与在 C_p 上各点相对应的参数是$p+1$阶不变量. 限制于 C_p 上的p阶系数是$p+1$阶或$p+1$阶以下的不变量的函数,且与p阶的第二参数无关. 这样,由这个定义, $p+1$阶标架以及不大于 $p+1$ 阶的不变量, 可以决定曲面W上的p阶切触元素以及它们的微分,一般,后者可用于表示$p+1$阶切触

元素.

上述的办法,即在 D_p 中选择一合适的子空间 C_p,以得到关于"$p+1$ 阶"信息的方法,就是所谓**动标架法** (method of moving frames). 但是,在曲面 W 上的特殊点,用一般的方法求 $p+1$ 阶标架是不可能或是不确定的. 事实上,有这样的曲面,在它上面的所有点都发生不可能或不确定的情况. 因而相应于不同的曲面就应当运用适当的动标架法. 实际上,在应用动标架法的过程中,有更快且更实用的办法. 即,作用于空间 D_p 上的群 Γ_p 的无穷小变换 (δh_{ai}, δb_{ai}) 可表示为 p 阶第二分量的线性组合,这个表示式可利用群 G 的结构方程容易导出来. 群 Γ_{p+1} 是使子空间 C_p 的各点不动的 Γ_p 的子群,它的无穷小变换是 $\delta h_{ai}=0$, $\delta b_{ai}=0$. 由 dk_a 和 π_a 的方程可以立即求出 $p+1$ 阶的第二分量.另外,各阶数的主分量满足群 G 的结构方程的条件,对 $m\geqslant 2$ 的情形,实质就是讨论(m维)曲面存在的条件.

对于曲面 W,如果逐次地求较高阶数的标架族及不变量,最后会达到如下的阶数 q:即 $q+1$ 阶标架族与 q 阶标架族是相同的,且 $q+1$ 阶不变量可表示为 q 阶和 q 阶以下不变量的函数. 在这种情形下各 $q+j$ ($j\geqslant 1$) 阶标架族全相同,如果将 $q+j$ 阶不变量看作 q 阶和 q 阶以下不变量的函数时,这些 $q+j$ 阶不变量是它们的第 $j-1$ 阶偏导数. 这样的 q 阶标架就叫作 **Frenet 标架** (Frenet frame). 曲面上的**微分不变量** (differentail invariant)是基底分量以及各阶的不变量组成的微分形式.

特别是,若群 G 是空间 V 上的解析变换群,两个 m 维曲面 W_1, W_2 是解析曲面时,W_1 与 W_2 在 G 的变换下可重合的条件是,它们属于同一种类,而且不大于 $q+1$ 阶的不变量间的函数关系式也相同. 这些关系式叫作曲面的**自然方程** (natural equation). 由自然方程来确定曲面,从这种观点讨论曲面的办法叫作**自然几何** (natural geometry),又,用 Frenet 标架可作出曲面的**简化公式** (reduction formula). 就是把曲面方程表示为含有各阶不变量的幂级数形式.

以后,为了方便,把 V 的元叫作点,把 W 叫作曲面. 但是,对于适用这种理论的许多实例中,为了配合几何内容,也可以给它们以另外的名称. 例如,V 的元也可以叫作直线,W 也可叫作直线簇. 对于以同一个群为变换群的两个空间 V_1, V_2 的曲面理论,可以得出关于它们的相互关系和类似的许多结论. 另外,在一般曲面上,独立不变量有特别函数关系的是**特殊曲面** (special surface). 又有保持某种微分不变量的**曲面形变** (deformation of surface) 问题. 对于具体的空间,除了曲线论和超曲面论以外,一般 m 维曲面论困难较大. 又,应用张量分析†也可以处理曲面论. 利用动标架法以及张量分析的曲面论,已发展成为联络†理论.

【射影微分几何学】 从属于射影变换群†下的微分几何就是**射影微分几何学** (projective differential geometry),从 J. G. Darboux 的著名的曲面论中多处可以看到它的萌芽,作系统研究的有 H. G. H. Halphen, E. J. Wilczynski 和 G. Fubini. 后由 E. Cartan, E. Čech, E. Bompiani 和蟹谷乘養等人,大大向前推进了这个理论.

现在,就三维空间的曲面 S 来讨论,对于 S 的动点 $A(u^1,u^2)$ (此处,u^1, u^2 是 S 的参数),以 A 为原点,在 S 上点 A 处的切平面上取定 A_1, A_2, A_3 作标架† $[A, A_1, A_2, A_3]$ (但 $|A, A_1, A_2, A_3|=1$),这样的标架族叫作**一阶标架族** (family of frames of order 1),一阶标架的微分用

$$dA_\alpha=\sum_{\beta=0}^{3}\omega_\alpha^\beta A_\beta,\quad \alpha=0,1,2,3\quad A_0=A$$

表示,ω_α^β 是由决定原点 A 的两个参数(主参数)与决定 A 的伴随一阶标架族的 10 个参数(第二参数)组成的 Pfaff 形式. 这时 $\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0$, $\omega_0^3=0$. 现在,如果把 ω_0^1, ω_0^2 改写为 ω^1, ω^2, 则它们彼此无关,而且是仅依赖于主参数的 Pfaff 形式. 设关于一阶标架的非齐次坐标† z^1, z^2, z^3, 在原点的邻域内,S 可以表示如下:

$z^3=\sum_{r=2}^{\infty}f_r$, f_r 是关于 z_1, z_2 的 r 次齐次式.

若设 $f_2=(a_0(z^1)^2+2a_1z^1z^2+a_2(z^2)^2)/2$，由射影变换群的结构方程†$d\omega_\alpha^\beta=\sum_{\sigma=0}^{3}\omega_\alpha^\sigma\wedge\omega_\sigma^\beta$，必须 $\omega_1^3=a_0\omega^1+a_1\omega^2$，$\omega_2^3=a_1\omega^1+a_2\omega^2$. 设 $\varphi_2=a_0(\omega^1)^2+2a_1\omega^1\omega^2+a_2(\omega^2)^2$，由 $\varphi_2=0$ 定义的 S 上的曲线叫作**渐近曲线**(asymptotic curve). 它的切线叫作**渐近切线** (asymptotic tangent)，在这条曲线的各点上 S 的切平面和曲线常成二阶切触，一般地，过 S 的各个点存在两条渐近切线. 在点A的渐近切线的方程可由$z^3=0$，$f_2=0$ 给出. 如果 S 上有这样的点，在该点的两条渐近线重合，这种点叫作**抛物点** (parabolic point)，如果 S 上所有的点都是抛物点，则 S 是可展曲面†. 如果发生了这种情况，必须另作讨论.

在一阶标架族中，出现 $a_0=a_2=0$，$a_1=1$ 的叫作**二阶标架** (frame of order 2). 对于这种标架，直线 $\overline{AA_1}$，$\overline{AA_2}$ 是在 A 点的渐近切线. 对于这个标架，如果 $f_3=-(b_0(z^1)^3+3b_1(z^1)^2\cdot z^2+3b_2z^1(z^2)^2+b_3(z^2)^3)/3$，则 $\omega_1^2=b_0\omega^1+b_1\omega^2$，$-\omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2-\omega_3^3=2(b_1\omega^1+b_2\omega^2)$，$\omega_2^1=b_2\omega^1+b_3\omega^2$，关于二阶标架，方程 $z^3=z^1\cdot z^2-z^3(b_1z^1+b_2z_2+pz^3)$($p$ 是任意数)表示的二次曲面叫作在 A 处的 **Darboux 二次曲面** (Darboux's quadric). 它是 S 的切触二次曲面中在射影意义下特别有趣的一种. 如果在 S 上有一条曲线，在它的各点恒与 Darboux 二次曲面成为三阶切触，这样的曲线叫作 **Darboux 曲线**(Darboux's curve)，它的切线叫作 **Darboux 切线** (Darboux's tangent)，这样切线的方程可由 $z^3=0$，$b_0(z^1)^3+b_3(z^2)^3=0$ 给出.

现在把直纹曲面†除外，即 $b_0b_3\neq 0$，因而，把二阶标架再用 $b_1=b_2=0$，$b_0=b_3=1$特殊化后所得到的标架叫作**三阶标架**，对此，若 $f_4=-(c_0(z^1)^4+4c_1(z^1)^3z^2+6(c_2-1)(z^1z^2)^2+4c_3z^1(z^2)^3+c_4(z^2)^4)/12$，则 $\omega_0^0-2\omega_1^1+\omega_2^2=c_0\omega^1+c_1\omega^2$，$\omega_3^2-\omega_1^0=c_1\omega^1+c_2\omega^2$，$\omega_3^1-\omega_2^0=c_2\omega^1+c_3\omega^2$，$\omega_0^0+\omega_1^1-2\omega_2^2=c_3\omega^1+c_4\omega^2$. 对于这种标架族，$((\omega^1)^3+(\omega^2)^3)/2\omega^1\omega^2$ 是 S 上邻近两点的伴随不变量，叫作**射影线素** (projective line element). 对于这个标架，二直线 $\overline{AA_3}$，$\overline{A_1A_2}$ 关于在 A 的 Darboux 二次曲面是**配极** (polar) 的.

在三阶标架中，出现 $c_1=c_2=c_3=0$ 的，叫作**四阶标架**，这时存在 λ,μ,ν,ρ，使 $\omega_1^0=\lambda\omega^1+\mu\omega^2$，$\omega_2^0=\nu\omega^1+\rho\omega^2$，$\omega_3^0=\rho\omega^1+\lambda\omega^2$ 因此，设 $c_0=-3a$，$c_4=-3b$，则有

$$(\omega_\alpha^\beta)=\begin{pmatrix}\tau_0^0 & \omega^1 & \omega^2 & 0\\ \omega_1^0 & \tau_1^1 & \omega^1 & \omega^2\\ \omega_2^0 & \omega^2 & -\tau_1^1 & \omega^1\\ \omega_3^0 & \omega_2^0 & \omega_1^0 & -\tau_0^0\end{pmatrix},$$

此处 $\tau_0^0=-(3/2)(a\omega^1+b\omega^2)$，$\tau_1^1=(1/2)\cdot(a\omega^1+b\omega^2)$. 所以，四阶标架在 S 的各点是确定的. 它就是 S 的 Frenet 标架，叫作**正规标架** (normal frame). 又，不变量 a,b,λ,μ,ν,ρ 叫作 S 的**基本微分不变量** (fundamental differential invariant). 正规标架的二直线 $\overline{AA_3}$，$\overline{A_1A_2}$ 分别叫作第一种和第二种 **Wilczynski 棱** (directrix of Wilczynski). 对于正规标架，S 可表示为

$$z^3=z^1z^2-((z^1)^3+(z^2)^3)/3+(a(z^1)^4+b(z^2)^4)/4+(z^1z^2)^2/2+\cdots.$$

两个曲面 S，$\bar{S}$ 在射影意义下相同的充分必要条件是有正规标架，此标架具有相同的 ω^1，ω^2 和 6 个基本微分不变量. 又对于任意给定的 a,b,λ,μ,ν,ρ，以其为基本量的曲面 S 并不存在. 它们之间必须有某些关系才行([6]).

又标架并不需简化到正规标架，在一阶标架族中，只要 $\overline{AA_3}$，$\overline{A_1A_2}$ 关于在 A 的 Darboux 曲面满足配极的条件，这样的标架叫作 **Darboux 标架** (Darboux frame). 对此，就可以展开有趣的曲面论([8]).

设两个曲面 S，$\bar{S}$ 间成某种点对应，对于 S 的一点 A 令 $\bar{S}$ 上的对应点为 $\bar{A}$. 用适当的射影变换可使 A 移动到 $\bar{A}$，而且 S 的象在 $\bar{A}$ 与 $\bar{S}$ 成二阶切触，这样的点对应叫作**射影变形** (projective deformation). 为使两个曲面间存在射影变形，其充分必要条件是具有相同的射影线素([6]). 又直纹曲面只能和直纹曲面成射影变形. 对于任意给出的曲面 S，要找出由 S 射影变形得出的但又与 S 不同的曲面，一般是不可能

的.为使它可能必须满足某种条件([6],[8]).

下面,设三维空间 P^3 的直线的 Plücker 坐标†是 $p^{01}, p^{02}, p^{03}, p^{12}, p^{13}, p^{23}$, 则恒等式

$$p^{01}p^{23} - p^{02}p^{13} + p^{03}p^{12} = 0$$

成立. 这个连比和直线是一一对应的. 现在将 p^{ij} 看作5维射影空间 P^5 的齐次坐标,上面的关系式表示 P^5 内的二次超曲面 Q.因而 Q 上的点与 P^3 的直线间成一一对应. 作为 Q 上曲线的象是 ∞^1 条直线全体,即直纹曲面,作为 Q 与 P^5 的二、三维曲面相交图形对应的象是 ∞^{II}, ∞^{III} 条直线全体,分别叫作**线汇** (congruence of lines)和**线丛** (complex of lines). 特别是,当这种二、三维曲面是二、三维平面时,相交图形的象分别叫作**线性线汇** (linear congruence) 及**线性线丛** (linear complex). 这样, 借助于 P^5 的曲面论, 可开展线汇、线丛的理论研究([2],[6],[8]). 这在射影微分几何中也占有重要地位.

以上,就曲面论作了叙述,关于曲线论([2],[4],[6])及高维空间的超曲面论([7]),也可得到种种结果.

【仿射微分几何学】 在空间的点或点集具有的微分几何性质中,以对仿射变换群†不变的性质为对象的几何,叫作一般仿射微分几何.从属于仿射变换群的子群,即等积仿射变换†群

$$\bar{x}_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, \cdots, n,$$
$$\det(a_{ij}) = 1$$

的对象构成**仿射微分几何学** (affine differential geometry). 对此, 附有方向的闭超曲面所围成的体积不改变. 对于这种几何应用动标架法是有效的.

现在,考虑平面曲线 $C: A = A(t)$,在 C 的各点 A,以 A 为原点,附以由 A 引出的两个向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ (但 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 围成的平行四边形的面积为1),这样构成标架族为 $\{A, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$,它叫作 **0 阶标架** (frame of order 0). 它的微分可由

$$dA = \sum_{r=1}^{2} \omega^r \boldsymbol{e}_r, \ d\boldsymbol{e}_r = \sum_{s=1}^{2} \omega_r^s \boldsymbol{e}_s \quad r = 1, 2,$$
$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0$$

给出, **一阶, 二阶, 三阶标架**分别以 $\omega^2 = 0$; $\omega^2 = 0$, $\omega_1^2 = \omega^1$ 和 $\omega^2 = 0$, $\omega_1^2 = \omega^1$, $\omega_1^1 = 0$ 为特征, 所以, 三阶标架对 C 的各点是确定的,它就是 Frenet 标架†. 由 $d\sigma$ 表示 ω_1, 它叫作**仿射线素** (affine arc element). 设 $\omega_2^1 = -\kappa d\sigma$, κ 叫作**仿射曲率** (affine curvature). 这时, Frenet 公式可由

$$dA = d\sigma \boldsymbol{e}_1, \quad d\boldsymbol{e}_1 = d\sigma \boldsymbol{e}_2, \quad d\boldsymbol{e}_2 = -\kappa d\sigma \boldsymbol{e}_1$$

给出. 关于这个标架, C 可用

$$y = x^2/2 + \kappa x^4/8 + (d\kappa/d\sigma)x^5/40 + \cdots$$

表示. 又 $d\sigma$, κ 可解析地表示为

$$d\sigma = |dA, d^2A|^{1/3}, \ \kappa = |d^2A/d\sigma^2, d^3A/d\sigma^3|,$$

但 $|MN|$ 是由 M, N 的坐标作成的行列式. σ 叫作**仿射弧长**(affine arc length), Frenet 标架中 $\boldsymbol{e}_2$ 所在的直线叫作**仿射法线**(affine normal). 它是 C 在 A 的密切抛物线的直径. κ 为常数的曲线是圆锥曲线, κ 为正数时是椭圆,负数时是双曲线, 0 时是抛物线. 在仿射几何中,抛物线起着 Euclid 几何中直线的作用.

对于空间曲线、曲面,有更多的结果([1]),关于前者,有**仿射长度** (affine length), **仿射曲率** (affine curvature), **仿射挠率** (affine torsion), **仿射主法线** (affine principal normal), **仿射副法线**(affine binormal)等和 Euclid 几何有同样的结果. 仿射变换群处在射影变换群与合同变换群之间的地位和两者都有类似的一面, 曲面论与射影微分几何有相近的一面 ([1]). 再来考虑空间闭曲线 C 所围成的仿射面积的变分, 其中取极值的曲面叫作**仿射极小曲面**(affine minimal surface). 它具有种种仿射的特性 ([1]). 又, W. Blaschke 等, 对于曲线、曲面的大范围性质曾导出许多结果.

【保形微分几何学】 对于保形几何 (→保形几何学)讨论它的微分几何性质,设 S^n 是 n 维保形空间†,对于它的一点 A_0,伴随以 A_0 为原点的 $n+2$ 超球面坐标†的标架 $\mathfrak{R}[A_0, A_1, \cdots, A_n, A_\infty]$. 这时超球面 A, B 的内积†用 $A \cdot B$ 表示,则

$$A_\alpha \cdot B_\beta = g_{\alpha\beta},$$
$$\alpha, \beta = 0, 1, \cdots, n, \infty,$$

但

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n; \quad g_{ij} = g_{ji}.$$

设 z^α 是关于 $\mathfrak{R}$ 的齐次坐标，S^n 的 Möbius 变换†以下列各式为特征：

$\bar{z}^\alpha = c^\alpha_\beta z^\beta$, 但 $g_{\alpha\beta} c^\alpha_\sigma c^\beta_\tau = g_{\sigma\tau}$, $|c^\alpha_\beta| \neq 0$,
在 S^n 的各点，伴随以这样的标架族，它的微分可用

$$dA_\alpha = \sum_{\beta=0,1}^{n,\infty} \omega^\beta_\alpha A_\beta,$$

但

$$(\omega^\beta_\alpha) = \begin{pmatrix} \omega^0_0 & \omega^j_0 & 0 \\ \sum g_{ik}\omega^k_\infty & \omega^j_i & \sum g_{ik}\omega^k_0 \\ 0 & \omega^j_\infty & -\omega^0_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\sum(g_{ik}\omega^k_j + g_{jk}\omega^k_i) = dg_{ij}$$

规定出来．在 ω 中，线性无关的共有 $(n+1)\cdot(n+2)/2$ 个，它就是 Möbius 变换群中参数的个数．这个变换群的结构方程†是

$$d\omega^\beta_\alpha = \sum \omega^\sigma_\alpha \wedge \omega^\beta_\sigma. \quad (2)$$

保形微分几何学(conformal differential geometry)就是对满足(1)，(2)的 Pfaff 形式 ω^β_α 的研究．

现在考虑变换 $c: \sum z^\alpha A_\alpha \to \sum z^\alpha(A_\alpha + dA_\alpha)$. 1) 若除 ω^0_0 外，其余的都是 0，则通过 A_0，A_∞ 的所有圆都不变，任意的点 P 可移到点 $\bar{P}$ 上去，$\bar{P}$ 是由 A_0，A_∞，P 确定的圆上 P 的邻近点，但交比 $(P, \bar{P}; A_0, A_\infty)$ 是一定的．这样的变换叫作以 A_0，A_∞ 为中心的**相似扩大**(homothety)．2) 若除 ω^j_0，$\omega^\infty_i = \sum g_{ik}\omega^k_0$ 外其余都是 0，则在 A_∞ 与一个定方向相切的所有圆变为本身，过 A_∞ 与这些圆直交的超球面仍变为这样的超球面．这种变换叫作以 A_∞ 为中心的**伸缩**(elation)．3) 若除 $\omega^0_i = \sum g_{ik}\omega^k_\infty$，$\omega^j_\infty$ 以外其余都是 0，则这种变换是以 A_0 为中心的伸缩． 4) 若除 ω^j_i 以外其余都是 0，这是把 A_∞ 看作无穷远点，以 A_0 为中心的无穷小旋转．因此，任意的无穷小 Möbius 变换可以分解为以上四种情形．

对于 S^n 的曲线论、超曲面论，也可以由 A_0 的伴随标架族作出 Frenet 标架†来讨论．例如，关于 S^3 内的曲线，Frenet 公式可由

$$(\omega^\beta_\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & d\sigma & 0 & 0 & 0 \\ \kappa d\sigma & 0 & 0 & 0 & d\sigma \\ -d\sigma & 0 & 0 & \tau d\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\tau d\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \kappa d\sigma & -d\sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

给出．其中，$d\sigma$，κ，τ 分别叫作曲线的**保形线素**(conformal arc element)、**保形曲率**(conformal curvature)和**保形挠率**(conformal torsion)．关于保形变形(conformal deformation)也可得出种种结果([5])．

又，Laguerre 微分几何是将保形微分几何中的点换为直线、角换成距离，在某种意义下成立的对偶结果．

【切触流形】 考虑一个具有 1-形式 η，并且 $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ 的$(2n+1)$维微分流形 M^{2n+1}，这里 $d\eta$ 是 η 的外微分，$\wedge$ 表示外乘法(对于在接触变换，方程(2)左边的 1-形式是符合这个条件)．这样的流形叫作具有**切触形式**(contact form) η 的**切触流形**(contact manifold)．切触流形 M^{2n+1} 的切丛的结构群可简化为 $U(n) \times 1$，这里 $U(n)$ 是酉群，因此，每个切触流形是可定向的．在 Euclid 空间 E^{2n+2} 内的单位球 S^{2n+1} 和 $(n+1)$ 维 Riemann 流形 M^{n+1} 的切球丛是简单的典型例子，两者都具有自然的切触形式 (S. S. Chern (陈省身) [10])．每个三维紧的可定向微分流形是切触流形([15])．

如果微分流形 M^{2n+1} 容许一个(1,1)型张量场 φ 及一个向量场 ξ 和一个 1-形式 η，使得

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1 \quad (1)$$

这时，它就叫作**殆切触流形**(almost contact manifold)．这里 X 是 M^{2n+1} 上的任意向量场，并且三数组(φ, ξ, η)叫作**殆切触结构**(almost contact structure)．(1) 式意味着 $\varphi\xi = 0$ 和 $\eta(\varphi X) = 0$ (S. Sasaki (佐佐木重夫) [15], I)．殆切触流形 M^{2n+1}的切丛的结构群可简化为 $U(n) \times 1$．实际上 J. W. Gray [11]曾把这个性质作为他对殆切触结构的定义．对于 M^{2n+1} 上每一对向量 X 和 Y，令

$$N(X, Y) = [X, Y] + \varphi[\varphi X, Y]$$

$$+ \varphi[X, \varphi Y] - [\varphi X, \varphi Y]$$
$$- \{X \cdot \eta(Y) - Y \cdot \eta(X)\}\xi,$$

这里[,]是 Poisson 括号,这时,N是 M^{2n+1} 上(1,2)型的张量场,它叫作殆切触结构(φ, ξ, η)的**挠率张量** (torsion tensor),这时,N在 M^{2n+1} 上恒等于 0 时,我们说这个殆切触结构是**正规的**(normal).

M^{2n+1} 上的殆切触结构(φ, ξ, η)自然地诱导出在 $M^{2n+1} \times R$ (关于 $M^{2n+1} \times S^1$)上的殆复结构 J,它是复结构的充分必要条件是:(φ, ξ, η) 是正规的. 对于两个殆切触流形的乘积空间也有类似的结果[14](森本).

如果 M^{2n+1} 是具有结构张量(φ, ξ, η)的殆切触流形,我们就能找到一个正定 Riemann 度量 g,对于每一对向量X和 Y,使得

$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ 成立. 那么向量场(φ, ξ, η, g)就叫作**殆切触度量结构** (almost contact metric structure).

当 M^{2n+1} 是具有切触形式 η 的切触流形时,便存在唯一的一个向量场 ξ,它对于任一向量场 X,满足 $d\eta(X, \xi) = 0, \eta(\xi) = 1$,于是我们可以找到一个(1,1)型的张量场 φ 和一个正定度量张量 g,使得 (i) 对于任一对向量场 X 和 Y 都满足 $d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$, (ii) ($\varphi, \xi, \eta, g$)是一个殆切触度量结构,这样由切触形式 η 确定的殆切触结构叫作**切触度量结构**(contact metric structure). 具有正规切触结构的微分流形叫**正规切触 Riemann 流形** (normal contact Riemannian manifold). Brieskorn 流形的例子就是除标准球 S^{2n+1} 外,它包括所有特种 $2n+1$ 球,即紧且可定向的平行化流形. 殆切触流形根据由 ξ 确定的叶状结构是否是正则的而分为正则的或非正则的. 紧正则切触流形是辛流形上的主圆丛,它容有一个正规切触度量结构的充分必要条件是,底流形为Hodge流形 (Boothby, Wang (王宪钟)[9],畠山[12]).

在有上述定义结构的流形上,关于拓扑和微分几何的许多论述已由 S. Tanno (丹野修吉), S. Tachibana (立花俊一), S. I. Goldberg 和其他人所发表.

【参】 [1] W. Blaschke, Vorlesungen über Differential geometrie, II 1923, III 1929, Springer; [2] G. Bol, Projektive Differentialgeometrie I, II, Vandenhoeck & Ruprecht, 1950; [3] E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus, Gauthier-Villars, 1951; [4] E. Cartan, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Gauthier-Villars, 1937; [5] P. C. Delens, Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme, Gauthier-Villars, 1927; [6] G. Fubini-E. Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Gauthier-Villars, 1931; [7] J. Kanitani (蟹谷乘養) Géométrie différentielle projective des hypersurfaces, Mem. of Ryojun Coll. of Eng., 1931; [8] 蟹谷乘養,射影微分幾何学,岩波講座数学, 1933, [9] W. M. Boothby-H. C. Wang (王宪钟),On contact manifolds, Ann. of Math., (2) **68** (1958), 721—734; [10] S. S. Chern (陈省身), Pseudo-groupes continus infinis, Coll. intern. du CNRS, Geom. Diff., Strasbourg (1953), 119—135; [11] J. W. Gray, Some global properties of contact structure, Ann. of Math., (2) **69** (1959), 421—450; [12] Y. Hatakeyama (畠山洋二), Some notes on differentiable manifolds with almost contact structure, Tôhoku Math. J., (2) **15** (1963), 176—181; [13] J. Martinet, Formes de contact sur les variétés de dimension 3. Proc. Liverpool Singularities Symposium II (1971), 142—163; [14] A. Morimoto (森本明彦), On normal almost contact structures, J. Math. Soc, Japan, **15** (1963), 420—436; [15] S. Sasaki (佐佐木重夫), On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I. Tôhoku Math. J., (2) **12** (1960), 459—476. II (with Y. Hatakeyama), ibid., (2) **13** (1961), 281—294; [16] 苏步青,射影曲线概论,中国科学院出版, 1954; [17] 苏步青,射影曲面概论,上海科学技术出版社, 1964.

复流形 [英 complex manifold 法 variété complexe 德 komplexe Mannigfaltigkeit 俄 комплексное многообразие 日 複素多様体]. 【定义】 Hausdorff 拓扑空间X具有开覆盖 $\{U_i\}$,对于各个 U_i 给出从 U_i 到 n 维复空间 $\boldsymbol{C}^n$ 的开集上的同胚 φ_i. 当 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 时,映射 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$: $\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ 满足双全纯条件($\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$以及它的逆映射用 $\boldsymbol{C}^n$ 的坐标函数表示时是全纯函数[†]),则X叫作**复 n 维复流形**. 对于在X的开集U上定义的复函数 f,当 $\varphi_i(U \cap U_i)$ 上函数 $f \circ \varphi_i^{-1}$ 对于各个 i 都是全纯函数时, f 叫作U上的**全纯函数** (holomorphic function (或**解析函数**)). 设映射 φ_i 在 U_i 上用 $\boldsymbol{C}^n$ 的坐标表示为 $\varphi_i(p) = (z^1(p), \cdots, z^n(p))$,各 z^α 是 U_i 上的全纯函数. $(z^1, \cdots, z^n)$称为 U_i上的**复解析的**(或**全纯**)**局部坐标系**(holomor-

phic local coordinate system). 对于两个复流形 X, Y,所谓映射 $\varphi: Y \to X$ 是全纯的(或解析的),就是指对X的任意开集 U,以及U上的任意全纯函数 f,常使 $\varphi \circ f$ 在 $\varphi^{-1}(U) \subset Y$ 上全纯. 如果映射 $\varphi: Y \to X$ 是双射的,φ 与 φ^{-1} 都是全纯的,则称在映射φ下复流形X和Y是**同构的** (isomorphic).

与 C^∞ 类微分流形†类似地可定义解析子流形、全纯切向量、全纯向量场、全纯微分形式等概念. 又与多元函数论类似地可定义复流形上的**亚纯函数** (meromorphic function) (→解析空间).

设X是复流形, $p \in X$. 取以 p 为中心的复解析局部坐标系之一为 $(z^1, \cdots, z^n)$ $(z^\alpha(p) = 0)$. 设在点 p 的邻域定义的全纯函数是 $(z^1, \cdots, z^n)$ 的全纯函数,则它可表示为以 p 为中心的绝对收敛的$(z^1, \cdots, z^n)$的幂级数.如果用 $\Omega = \Omega(X)$ 表示X上全纯函数的芽的层†,则在X上点 p 处 Ω 的**茎**† (stalk) Ω_p 与在原点收敛的 n 变数 $z^1, \cdots, z^n$ 的幂级数全体构成的局部环†同构. 在点 p, $(\partial/\partial z^1)_p, \cdots, (\partial/\partial z^n)_p$ 构成点 p 的全纯切向量空间的基. 又在 p 的邻域中定义的 k 次全纯微分形式 α 可表示为 $\alpha = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_k}$, 各系数函数 $f_{i_1\cdots i_k}$ 是全纯的.

【殆复结构】 设X是复流形,用$\{U_i, \varphi_i\}_{i \in I}$表示覆盖$X$的解析局部坐标系,设 $\varphi_i = (z_i^1 \cdots, z_i^n)$. 如果把 z_i^α 分成实部 x_i^α, 虚部 y_i^α 来表示,则

$$z_i^\alpha = x_i^\alpha + \sqrt{-1}\, y_i^\alpha,$$

而 x_i^α, y_i^α 是在X的开邻域 U_i 定义的实函数, 并且若映射 $\phi_i: U_i \to \boldsymbol{R}^{2n}$, 由 $\phi_i(p) = (x_i^1(p), y_i^1(p), \cdots, x_i^n(p), y_i^n(p))$ 定义, 则 ϕ_i 给出从 U_i 到 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 的开集的同胚. $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ 在X上给出微分流形的结构, 而且是实解析的. 这样在复 n 维复流形上自然地引进实 $2n$ 维微分流形的结构. 在X的各点 p 具有形如$(x^1, y^1, \cdots, x^n, y^n)$的实坐标系,但 $(\cdots, z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1} \cdot y^\alpha, \cdots)$ 是复解析坐标系.在X上点 p 的实切向量空间以$(\partial/\partial x^1)_p, (\partial/\partial y^1)_p, \cdots, (\partial/\partial x^n)_p, (\partial/\partial y^n)_p$ 为基底, 如果现在把 J_p 定义为 $(\partial/\partial x^\alpha)_p \to (\partial/\partial y^\alpha)_p, (\partial/\partial y^\alpha)_p \to -(\partial/\partial x^\alpha)_p$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$,则 $J_p^2 = -1$, 而且 J_p 与 p 点的复解析坐标系取法无关. 如果把 J_p 看作$(1,1)$型张量, 则X上的$(1,1)$型张量场 J 叫作由复流形X所诱导的殆复结构的张量场.

一般地在实微分流形X上可给出$(1,1)$型张量场 J, 且满足 $J^2 = -1$ 时 (J 可看作向量场的线性变换), 则称X具有**殆复结构** (almost complex structure), X 叫作**殆复流形**(almost complex manifold). 这时对于X上的反变向量场 x, y,设

$$S(x, y) = -[x, y] + [J(x), J(y)] - J([J(x) \cdot y]) - J([x, J(y)]),$$

则S是$(1,2)$型张量场. S叫作 **Nijenhuis张量** (Nijenhuis' tensor).殆复结构 J 可从某复流形的结构导出的充分必要条件是 J 的Nijenhuis张量 S 恒为0 ([3],[10]). 又 $2n$ 维微分流形X具有殆复结构的条件是当且仅当X的切 $2n$ 标架从的结构群 $GL(2n, \boldsymbol{R})$ 可约化†为 $GL(n, \boldsymbol{C})$. 又殆复流形是可定向的.

【微分形式的型】 设 X 是复流形, $(z^1, \cdots, z^n)$是点 p 邻域的复解析坐标, $z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1}\, y^\alpha$ $(\alpha = 1, \cdots, n)$. 对于在点 p 的实切向量空间 $T_p(X)$ 复化后的复切向量空间 $T_p(X) \otimes \boldsymbol{C}$, 用

$$(\partial/\partial z^\alpha)_p = (1/2)\{(\partial/\partial x^\alpha)_p - \sqrt{-1}(\partial/\partial y^\alpha)_p\},$$

$$(\partial/\partial \bar{z}^\alpha)_p = (1/2)\{(\partial/\partial x^\alpha)_p + \sqrt{-1}(\partial/\partial y^\alpha)_p\}$$

来定义 $\partial/\partial z^\alpha$, $\partial/\partial \bar{z}^\alpha$. 容易看出对于全纯函数 $\partial/\partial z^\alpha$ 的值与前面定义的全纯切向量 $\partial/\partial z^\alpha$ 的值相等. 函数 f 在点 p 全纯的充分必要条件是 $(\partial/\partial \bar{z}^\alpha) f = 0$ $(\alpha = 1, 2, \cdots, n)$. $T_p(X) \otimes \boldsymbol{C}$ 等于由 $\{\partial/\partial z^1, \cdots, \partial/\partial z^n\}$ 张成的空间与由 $\{\partial/\partial \bar{z}^1, \cdots, \partial/\partial \bar{z}^n\}$ 张成空间的直和, 这种分解与解析坐标的取法无关. 前一空间的元叫作$(1,0)$型切向量, 后一空间的元叫$(0,1)$型切向量. 同样,复化后的一次微分形式的空间也可分解为由 $\{dz^1, \cdots, dz^n\}$ 和 $\{d\bar{z}^1, \cdots, d\bar{z}^n\}$ 所张成空间的直和,这里 $dz^\alpha = dx^\alpha +$

$\sqrt{-1}\,dy^a$, $d\bar{z}^a = dx^a - \sqrt{-1}\,dy^a$. 前者叫$(1,0)$型,后者叫$(0,1)$型. 由此可知,任意次数的复微分形式可分解为$(r,s)$型的直和. **$(r,s)$型的微分形式**(differential form of type (r,s))具有基底 $dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}$ $(1\leqslant \alpha_1<\cdots<\alpha_r\leqslant n,\ 1\leqslant\beta_1<\cdots<\beta_s\leqslant n)$,这种分解与解析坐标系$(z^1,\cdots,z^n)$的取法无关,在$X$全体上有意义. 下面考虑复微分形式.

【d'' 上同调群】 对于X上的(r,s)型微分形式ω, $d\omega$可分解为$(r+1,s)$型微分形式和$(r,s+1)$型微分形式,前者记作$d'\omega$,后者记作$d''\omega$. 对于算子d', d''有$d=d'+d''$, $(d')^2=0$, $(d'')^2=0$, $d'd''+d''d'=0$成立. 如果用局部坐标系$(z^1,\cdots,z^n)$表示,对于$\omega=f dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}$,则有

$$d'\omega=\sum_{\gamma}\frac{\partial f}{\partial z^{\gamma}}dz^{\gamma}\wedge dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s},$$

$$d''\omega=(-1)^r\sum_{\gamma}\frac{\partial f}{\partial\bar{z}^{\gamma}}dz^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dz^{\alpha_r}\wedge d\bar{z}^{\gamma}\wedge d\bar{z}^{\beta_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{\beta_s}.$$

又k次微分形式ω是全纯微分形式的充分必要条件是ω为$(k,0)$型,且$d''\omega=0$.

对于算子d''有下面的 **Dolbeault 引理**成立. 引理: 设ω是点p的邻域U上的微分形式,且$d''\omega=0$,则存在含于U的点p的邻域V和V上的微分形式θ,在V上$\omega=d''\theta$.

在X上,以$A^{(r,s)}$表示(r,s)型微分形式的芽的层†, Ω^p表示p次全纯微分形式的芽的层,设$\Gamma(X,A^{(r,s)})$是在X上$A^{(r,s)}$的截面† 全体, $\Gamma(X,A^{(r,s)})$也就是X上的(r,s)型微分形式. $\sum_i\Gamma(X,A^{(p,i)})$关于算子$d''$构成上链复形. 这个复形的上同调群叫作 **$d''$ 上同调群**或叫作 **Dolbeault 上同调群** (Dolbeault cohomology group),它的q维上同调群写作$H^{p,q}(A,d'')$. 从 Dolbeault 引理易知 $0\to\Omega^p\to A^{(p,0)}\xrightarrow{d''}A^{(p,1)}\to\cdots$成为层的正合序列†. 由此得到 **Dolbeault 定理**:

$$H^q(X,\Omega^p)\cong H^{p,q}(A,d''),$$

上式左边是以层Ω^p为系数的上同调群.

更一般地,对于复流形X上复解析向量丛† E,在X上取值于E的微分形式全体也可定义d''上同调群,它与在E中取值的全纯微分形式的芽的层的上同调群同构(→调和积分).

【解析凝聚层】 复流形的结构由它上面全纯函数的芽的层† Ω所确定. Ω是(环的)凝聚层(**冈定理**[11]). Ω模的层叫作**解析层** (analytic sheaf). 凝聚的解析层叫作**解析凝聚层** (analytic coherent sheaf). X的许多性质都可以用解析凝聚层和它的上同调群的术语来叙述(例子将在本项中出现) (→Riemann-Roch 型定理).

识别复流形上的一个解析层是否凝聚这很重要,关于这方面除上述冈定理之外,还有 **Cartan 定理**: 复流形的解析子集的理想层是凝聚的([3]) (所谓X的解析子集Y是X的闭子集,在它的每个点处有适当的邻域U, $U\cap Y$成为U的有限个全纯函数的公共零点); **Grauert 定理**: 设$\pi: X\to Y$是复流形之间的正常解析映射† (即Y的紧子集的原象也是紧的),如果F是X上的解析凝聚层,则它的象† $\Pi_q(F)(q=0,1,2,\cdots)$,也是凝聚层([4]) (这个定理对于解析空间也成立; →解析空间); 等等.

对于 Stein 流形† X上的解析凝聚层F,有 **Stein 流形的基本定理 A**: $H^0(X,F)$在X的各个点x上生成茎(stalk) F_x(作为Ω_X模). **基本定理 B**: $H^q(X,F)=0$ $(q>0)$. 反之, Stein 流形可由性质"对于Ω的理想解析凝聚层F有$H^1(X,F)=0$"来刻划([11]). 对于紧复流形, $H^q(X,F)$是有限维复线性空间. 当X是其它复流形Y的开子流形,如果它的闭包是紧的,则随X的边界的各种性质(凸性或凹性),对某范围内的q,则$H^q(X,F)$是有限维的([12],[1]).

设E是n维复流形X上的解析(全纯)向量丛†,当E^*是E的对偶向量丛时,则$H^q(X,\Omega^p(E))$和$H^{n-q}_*(X,\Omega^{n-p}(E^*))$(在适合下列条件下)作为拓扑线性空间互成对偶. 这里H_*表示具有紧支集的上同调群. 对偶性可由表示两

者的元的微分形式的外积在 X 上的积分来给出. 如果 $\dim H^q(X, \Omega^p(E)) < \infty$, 则上述条件成立. 如果 X 本身是紧的,则 H 与 H_* 没有区别,对偶性当然成立 (**Serre 对偶定理**[13]).

【紧复流形】 在紧连通的复流形 X 上, 除常数以外的全纯函数不存在 (根据全纯函数最大值原理†). X 上亚纯函数全体构成域 $K(X)$, 它是在复数域 $\boldsymbol{C}$ 上有限生成的,它的超越次数 d 不超过复维数 n. $K(X)$ 的元的函数无关性和代数的无关性等价([15]).当 $n=1$ 时, X 是紧的 Riemann 面,如古典代数函数论所指出的, $K(X)$ 是单变量的代数函数域, X 是射影的代数流形. 当 $n=2$ 时, $d=2, 1$ 或 0, 每种情况都能具体实现. $d=2$ 时, X 是射影空间的代数曲面(**周炜良-小平定理**). $d=1$ 时,则有代数曲线 Δ 和从 X 到 Δ 的全纯映射 $\varphi: X \to \Delta$ 使得 $K(\Delta)$ 与 $K(X)$ 在 φ^* 下同构, 对于 $x \in \Delta, \varphi^{-1}(x)$ (除有限个 x 外)是椭圆曲线. 小平对于紧复数曲面(包括 $d=0$ 在内的情形)进行了深入的研究([5]).

在紧复流形 X 上, 由余维数是 1 的不可约解析子集全体所生成的自由 Abel 群叫作 X 的**因子群** (divisor group), 它的元叫作 X 的**因子** (divisor). 余维数是 1 的解析子集 Y 的理想层 $\mathfrak{I}(Y)$ 是 Ω 的主理想凝聚层. 对于 $D=\sum a_\alpha Y_\alpha$, 主分式理想层 $\mathfrak{I}(D)=\prod_\alpha \mathfrak{I}(Y_\alpha)^{a_\alpha}$ 叫作 D 的理想层. 非 0 的主分式理想凝聚层全体与因子群一一对应. $K(X)$ 的元 $f(\neq 0)$ 生成主理想层, 因而确定一个因子,把它记作 (f). 如果因子群由定义 "$D=\sum a_\alpha Y_\alpha \succ 0 \Leftrightarrow \forall a_\alpha \geqslant 0$" 确定序,则此因子群成为有序群†. 对于因子 D 设 $L(D)=\{f \in K(X) \mid f \neq 0, (f)+D \succ 0\} \cup \{0\}$, 则 $L(D)$ 为有限维的 $\boldsymbol{C}$ 模. 这个模是 $K(X)$ 的"易处理子集", 它能表现出 D 的解析性质这一点是很有意义的. 所谓 Riemann-Roch 定理†(→Riemann-Roch 型定理) 就是由其它因素来确定 $L(D)$ 的维数. 现在举出用 $L(D)$ 表示出 D 的性质的一个例子: 如果 $K(X) \ni F \neq 0, (F)=D-D'$, 则称 D 与 D' **线性等价** (linearly equivalent), 这是比同调† 更精细的等价关系. 如果 D 与 D' 线性等价, 根据 $L(D) \ni f \leftrightarrow f F \in L(D')$, 则 $L(D)$ 与 $L(D')$ 同构,因此, $\dim L(D)=\dim L(D')$ (仅由同调关系不一定得出这个结果).

一般地,具有纤维 $\boldsymbol{C}$, 结构群 $\boldsymbol{C}^*$ 的解析向量从叫作**复线丛** (complex line bundle). 对于因子 D 的理想层 $\mathfrak{I}(D)$, 如果取 X 的适当开覆盖 $\{U_i\}$, 则对各 U_i 的点 x 存在生成 $\mathfrak{I}(D)_x$ 的截面 $\Gamma(U_i \cdot \mathfrak{I}(D))$ 的元 R_i. $g_{ik}=R_i/R_k$ 是在 $U_i \cap U_k$ 上决不为 0 的全纯函数. 因此,以 $\{g_{ik}\}$ 为坐标变换†, 由**因子 D 决定的复线丛** (complex line bundle determined by D) 是确定的,用 $[D]$ 来表示. 易于看出, 实际上 $[D]$ 与 U_i 和 R_i 的取法无关. 而 $[D]$ 仅由 D 的线性等价类所决定. 如果 $[D]$ 的全纯截面的芽的层用 $\Omega([D])$ 表示, 则由关系 $H^0(X, \Omega([D])) \ni \varphi=[\varphi_i] \leftrightarrow f=\varphi_i/R_i=\varphi_k/R_k \in L[D]$, 可知两个模同构. 对于射影空间内的代数簇, 任意复线丛都可由因子生成(即为 $[D]$)([6]), 对于一般的紧复流形, 不一定是这样. 但在复流形理论中, 复线丛的重要性,首先在于关系 $L(D) \cong H^0(X, \Omega([D]))$ 它使得"有极的"可以用"全纯的"来代换.

复射影空间 $\boldsymbol{P}^N$ 的解析子流形 X 是代数簇 (**周(炜良)定理**[2]). 设由 $\boldsymbol{P}^N$ 的一般超平面对 X 的截面为 Y, 则 Y 是 X 的因子,复线丛 $[Y]$ 的 chern (陈)类†与 X 上标准 Hodge 度量相对应 (→Kähler 流形). 如果 $[Y]$ 可用与开覆盖 $\{U_i\}$ 有关的坐标变换 $\{g_{ik}\}$ 给出, 则对于 X 上凝聚解析层 F, 层 $F(n)$ 可定义如下: 设 F_i 是 F 在 U_i 上的限制, 在 $U_i \cap U_k$ 中把 F_i 与 F_k 用关系 $f_i \sim f_k \Leftrightarrow f_i=g_{ki}^n f_k$ 来连结在一起, 则可得到与 F 局部同构的解析凝聚层, 把它写成 $F(n)$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, 在定义式的右边 f_i, f_k 都看作是原来 F 的元). 关于 $F(n)$ 有下述定理成立: 对于 F, 则存在整数 n_0, 如果 $n \geqslant n_0$, 则有**射影代数簇的基本定理 A**: 在 X 的各点 x, $\Gamma(F(n))$ 生成 F_x (作为 Ω_x 模); **基本定理 B**: 对于 $q>0$, 有 $H^q(X, F(n))=0$, ([12]). 这结果意味着, 如果在 Y 上允许有阶

数充分高的"极"，则F有充分多个大范围的截面，而且高阶上同调群为零.

在$\boldsymbol{P}^N$内的代数簇X上，有全纯函数的芽的层Ω（作为复流形的构造层†）和全纯有理函数的芽的层$\mathcal{O}$（局部环的层即代数簇的结构层），因此，有解析凝聚层和代数凝聚层两种概念. 实际上从它们导出的上同调理论是同构的. 即对于代数凝聚层F，设$\tilde{F}=F\otimes_{\mathcal{O}}\Omega$，则它是解析凝聚层，且对应$F\rightarrow\tilde{F}$给出代数凝聚层全体与解析凝聚层全体之间的一一对应. 因此，上同调群也同构. 换言之，只要是关于凝聚层用上同调术语所表达的性质，对于射影代数流形的解析理论和代数理论之间没有什么区别（[14]）.

【复结构的变形】 为了研究在已知C^∞类流形X上引入的各种复结构，我们考虑**复结构的变形**(deformation of complex analytic structures)（[7]）. $\mathscr{V}$，M是C^∞类流形，设有从$\mathscr{V}$到M的C^∞类映射$\tilde{\omega}$，$\tilde{\omega}$的 Jacobi 矩阵的秩常为$m=\dim M$，对于M上各点有适当的邻域U，使$\tilde{\omega}^{-1}(U)$与$X\times U$成微分同胚的†（diffeomorphic)，且由这个对应把$V_t=\tilde{\omega}^{-1}(t)$，$(t\in U)$映射到$X\times t$上. 设各$V_t(t\in M)$都具有复流形结构，如果在$\mathscr{V}$上取如下的局部坐标系，则$(\mathscr{V},M,\tilde{\omega})$（或简记作$\mathscr{V}$）叫作在微分流形$X$中引入**复结构的$C^\infty$类变形族**(differentiable family of complex structures). 关于局部坐标系的条件：存在$\mathscr{V}$的开覆盖$\{\mathscr{U}_j\}$和$\mathscr{U}_j$上的函数$(z_j^1,\cdots,z_j^n,t_j^1,\cdots,t_j^m)$（$z_j^\alpha$是复数值，$t_j^\lambda$是实数值），1）$(\mathrm{Re}z_j^\alpha,\mathrm{Im}z_j^\alpha,t_j^\lambda)$是$\mathscr{U}_j$的$C^\infty$类局部坐标系；2）$(t_j^\lambda)$是$\tilde{\omega}(\mathscr{U}_j)$上$M$的局部坐标系在$\tilde{\omega}^*$下的象；3）当$t$固定时，$(z_j^\alpha)$是复流形$V_t$上的全纯的局部坐标系.

$\mathscr{V}$，M是复流形，$\tilde{\omega}$是全纯映射，当在$\mathscr{V}$上的全纯坐标中取上述意下的坐标(z_j,t_j)（但t_j也是复数值）时，$(\mathscr{V},M,\tilde{\omega})$叫作**复解析变形族**(analytic family of complex structures). 当M连通时，对于$t,t'\in M$，则称V_t与$V_{t'}$互为**变形**(deformation). 并且把M叫作这个变形族的参数空间.

对于C^∞类（复解析的）变形族$\tilde{\omega}:\mathscr{V}\rightarrow M$，有$C^\infty$类（全纯的）映射$\varphi:\mathscr{V}\rightarrow V_0$，对于各个$t\in M$，当$V_t$对$V_0$上的映射是$C^\infty$类同构（双全纯(biregular)）时，则$\mathscr{V}$叫作$C^\infty$类（全纯的）**平凡的**(trivial) 变形族. 但 0 是M的一个定点.

上述局部坐标系(z_j,t_j)之间的关系在$\mathscr{U}_j\cap\mathscr{U}_k$中有以下的形式，$z_j^\alpha=g_{jk}^\alpha(z_k,t_k)$，$t_j^\lambda=h_{jk}^\lambda(t_k)$，且$g_{jk}^\alpha$对于$z_k$是全纯的，$g_{jk}^\alpha$，$h_{jk}^\lambda$对于所有变数是$C^\infty$类的（对复解析变形族是全纯的）. 对于$M$上切向量场$v$在$\tilde{\omega}(u_k)$中的表现$v=\sum\limits_\mu v_k^\mu(\partial/\partial t_k^\mu)$，如果$\theta_{jk}^\alpha=v(g_{jk}^\alpha)=\sum\limits_\mu v_k^\mu(\partial g_{jk}^\alpha/\partial t_k^\mu)$，$\theta_{jk}=\sum\limits_\alpha\theta_{jk}^\alpha(\partial/\partial z_j^\alpha)$，将$t$固定，在$\mathscr{U}_j\cap\mathscr{U}_k\cap V_t$上$\theta_{jk}$是全纯切向量场. 关于$V_t$的覆盖$\{\mathscr{U}_j\cap V_t\}$使$\mathscr{U}_j\cap\mathscr{U}_k\cap V_t$上的$\theta_{jk}$与之对应，则它是在$V_t$的全纯切向量场所构成的层$\Theta_t$上取值的 1 次上闭链. 由这个上闭链所确定的上同调类记作$\rho_t(v)\in H^1(V_t,\Theta_t)$，叫作在$t$处的**无穷小变形**(infinitesimal deformation). $\rho_t(v)$仅由v在t的值所确定. 对于平凡的变形族$\rho_t(v)=0$，在一般情形下，$\rho_t(v)$可理解为沿着v给出V_t的复结构变化的标准.

对于复 1 维流形，即 Riemann 面†的情形，它的变形状态，作为闭 Riemann 面的模型的理论已经相当清楚，关于 2 维以上的复流形，它的变形状态，一般是比较复杂的，这是因为对某些解析向量丛的变形族（定义见后）$\mathscr{E}\rightarrow\mathscr{V}\rightarrow M$，$\dim H^q(V_t,\Omega(E_t))$关于$t$有不连续的现象有关. 也有$\dim H^q(V_t,\Omega(E_t))$关于$t$成为上半连续的. 关于变形的一般结果是：1）如果$H^1(V_0,\Theta_0)=0$，则以$V_0$为 1 个元的变形族是局部平凡的（Fröhlicher-Nijenhuis 定理）；2）对于变形族$\mathscr{V}$，$\dim H^1(V_t,\Theta_t)$是与t无关的常数，不论在哪个点$t\in M$，如果ρ_t为 0 映射，则$\mathscr{V}$是局部平凡的；3）当$H^2(V_0,\Theta_0)=0$，$\dim H^1(V_t,\Theta_t)=m$时，取$\boldsymbol{C}^m$的原点的充分小邻域为M，存在解析变形族$\tilde{\omega}:\mathscr{V}\rightarrow M$且$\tilde{\omega}^{-1}(0)=V_0$，$\rho_t$在$M$的各点$t$为双射，这时$\mathscr{V}$

在M的各点为**解析完备的**(analytically complete)([8]). 这里,所谓变形族 $\mathscr{V} \to M$, 在 $t \in M$ 为 C^∞类(解析的)完备的,是指对于任意 C^∞ 类(解析的)变形族 $\mathscr{W} \to N$ 下,对 $W_{s_0} = V_t$ 有从 s_0 的邻域 N' 到M内的 C^∞ 类(全纯的)映射 h, 使 $W_s = V_{h(s)}$ $(s \in N')$; 4) 推广变形族的定义, 考虑含有奇点的解析集合作为参数空间的解析变形族,则对于任意紧复流形 V,存在以V为1个元,在各元上都完备的变形族([9]).

有时也在附加条件下来考虑变形族. 例如当考虑一个固定的复流形的子流形族时, 可用处理复结构的变形族的同样方法处理. 又在变形族 $\tilde{\omega}:\mathscr{V} \to M$ 上有纤维丛 $\mathscr{B} \to \mathscr{V}$, 它的纤维和结构群是复解析的,对固定的 $t \in M$ 时,如果限制在它上面的部分 $B_t \to V_t$ 是复解析纤维丛,则说 $\mathscr{B} \to \mathscr{V} \to M$ 是**纤维丛的变形族**(family of fiber bundles). 例如,已知 Kähler 流形† V的 Picard 簇† $\mathfrak{P}$ 可以理解为复结构的平凡变形族 $V \times \mathfrak{P}$ 上的某种复线丛的变形族,其参数空间,可以引进自然的复结构([6]).

【广义单项变换】 设在复流形X上有Ω的理想解析凝聚层 $\mathfrak{A} \neq 0$. 如果 $\mathfrak{A}$ 的元的共同零点集为 Y, 则Y是X的解析子集. 适当选取X的开集 U, 则 $\Gamma(U, \mathfrak{A})$的元 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$,使在$U$的各点 x 上, 这些函数(的芽)生成 $\mathfrak{A}_x$. 于是从 $U - U \cap Y$ 到 P^{m-1} 的全纯映射 $x \to (\varphi_1(x);\cdots,\varphi_m(x))$的图象为 W', W' 在 $U \times P^{m-1}$ 的闭包为 W.W一般是含有奇异点的解析空间†, 它和U的生成元 $\{\varphi_i\}$ 的选取无关,由U和 $\mathfrak{A}$ 所确定. 因而把 X 用这样的一组U来覆盖, 从此作出对应的 W, 它们成为一个解析空间 $\tilde{X}$, 并且确定全纯映射(射影) $p:\tilde{X} \to X$. 这个 $\tilde{X}$ 叫作X由 $\mathfrak{A}$ 引起的**广义单项变换** (generalized monoidal transform). 如果 $\mathfrak{A}$ 是Y的理想层, 则从X改变为 $\tilde{X}$ 的过程叫作以Y为中心的**单项变换** (monoidal transformation). 又当Y是一点时, 则叫作**局部二次变换** (locally quadratic transformation)或叫作 **σ 过程** (σ-process). 当Y本身是解析子流形时,则变换后的$\tilde{X}$也是流形. 当Y含奇点,或是一般变换时,$\tilde{X}$将是相当复杂的(→解析空间).

【复流形的小平维数】 设 X_1 和 X_2 是复簇, $\psi:X_1 \to X_2$ 是亚纯映射, $G \subset X_1 \times X_2$ 是它的图象.如果射影 $\mathrm{pr}_2:G \to X_2$ 也是固有变形, 则ψ叫作双亚纯映射(→解析空间). 对于一个 n 维紧复流形 V,我们定义V的**小平维数** $\kappa(V)$ (或**标准维数** (canonical dimension)) 如下 (飯高茂[27]): 设K是V的标准丛和 $N_0 = \{m > 0, m \in \mathbf{Z} | P_m(V) = \dim_C H^0(V, \Omega(mK)) > 0\}$. 如果 N_0 不空,设d是 N_0 的最大公因数,则存在一个正整数 m_0,正数 α, β 和非负整数 κ,对于 $m \geqslant m_0$,有下列不等式:$\alpha m^\kappa \leqslant P_{md}(V) \leqslant \beta m^\kappa$, 而 $m \gg 0$. 我们确定 $\kappa = \kappa(V)$. 如果 N_0 为空集, 我们定义 $\kappa(V) = -\infty$. $\kappa(V)$ 是V的一个双亚纯不变量, 取下列数值之一: $-\infty$, $0, 1, \cdots n = \dim V$. 如果 $\kappa(V)$是正的,则存在一个复流形的纤维空间 $f:V^* \to W$, 使得(1) V^* 双亚纯等价于 V, (2) W是维数为 $\kappa(V)$ 的非奇射影族,(3) f 是一个满射和正常解析映射,(4)任意一般纤维 $V^*_w = f^{-1}(w)(w \in W)$ 是不可约的, (5) $\kappa(V^*_w) = 0$. 而且这样的纤维空间在双亚纯等价下是唯一的 ([27, 34]). 注意, 小平维数在一般情形下不是变形的不变量 (中村郁[32]).

【解析曲面】 下面曲面表示二维紧复流形. 解析曲面S上的例外曲线和(相对的)极小模型等,是关于双亚纯映射来定义的,这类似于代数曲面的相应的概念(→代数曲面). 设 $C \subset S$ 是一个S上不可约曲线, 则存在亚纯映射 φ 把S映到另一个曲面 S' 上,使得 $\varphi(C)$ 是一个点且 φ 诱导出同构 $S - C \cong S' - \varphi(C)$ 的充分必要条件是 $C^2 = -1$ 和C是非奇有理曲线 (Grauert [23]). 当且仅当S不是直纹曲面时, S具有极小模型 (小平[17]). 非正则数 $q = h^{0,1}$, 几何亏格 p_g, i 亏格 P_i 等等, 也和代数曲面同样地来确定.注意, 一般地, $h^{0,1} \neq h^{1,0}$. Riemann-Roch 定理和 M. Noether 公式对解析曲面也同样成立 (Atiyah 和 Singer; →Riemann-Roch 型定理).我们把$K(V)$(在V上的亚纯函数域) 在 $\boldsymbol{C}$ 上的超越度称为 S 的**代数维数**,

用 $a(S)$ 表示.

【曲面的分类】 小平用数值不变量对于解析曲面进行了分类,而把 Enriques 对代数曲面的分类作为它的特例([5, 17]).**椭圆曲面**是这样的曲面：存在由它到代数曲线 Δ 上的满全纯映射 φ,使得对于 Δ 上的一般点 p,$\varphi^{-1}(p)$是不可约非奇异椭圆曲线.如果 $a(S)=1$ 或 $\kappa(S)=1$,则 S 具有唯一的椭圆曲面的结构. S 上使 φ 的秩不是极大的那些点的象，是一个 Δ 的有限子集 $\{a_1, \cdots, a_r\}$,设 t 是 Δ 上点 a 附近的局部坐标，$t_i(a_i)=0$. 我们把由 $\{t_i\circ\varphi=0\}$ 定义的 S 上的因子称为 φ 的奇异纤维. 关于椭圆曲面的奇异纤维的结构及构造已由小平完全给出([5]).一般类型的椭圆曲面是具有小平维数 1 的一个曲面. 如果 $\kappa(S)=2$,则 S 是射影代数曲面,称之为**一般型曲面**(surface of general type). 如果 $a(S)=0$,则在 S 上存在有限条不可约曲线. **Hopf 曲面**是具有万有覆盖 $C^2-(0,0)$ 的曲面. 如果曲面 S 同胚于 $S^1\times S^3$, 则 S 是 Hopf 曲面. 设 $b_\nu(S)$ 是 S 的 ν 维 Betti 数. 如果 $a(S)=0$, $b_1(S)=1$, $b_2(S)=0$, 且 S 包含一条曲线,则 S 是一个 Hopf 曲面(小平[17]). VII_0 型曲面是具有 $b_1(S)=1$ 的极小曲面 S. 井上正久构造两族 $b_2=0$ 的 VII_0 型新曲面，其中不含有曲线 (1972)，这些曲面以 $\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{C}$ 为它的万有覆盖,其中 $\boldsymbol{H}$ 是上半平面. 他还造出 $b_2>0$ 的 VII_0 型曲面类. 它与 Hilbert 模型曲面的尖性奇点的解有关.**Enriques 曲面**是以 $K3$ 曲面作为非分支双重覆盖的曲面 (→代数曲面). 每个 Enriques 曲面是一个具有 $q=p_g=0$ 的代数椭圆曲面. 一个**超椭圆面**,它具有 $q=1$ 和 $12K\sim 0$. 一个超椭圆曲面具有 Abel 曲面作为它的非分支的覆盖,且是在椭圆曲线上的一个椭圆纤维丛. 极小曲面的分类如表 1 (→[35]). 这些不变量之间有下列关系：设 b^+,(b^-) 是在 $H^2(S, \boldsymbol{R})$ 上的相交矩阵的正(负)特征值(重数计算在内)的个数，c_i 是 S 的第 i 个 Chern (陈)类,则

(1) $b^+-b^-=\frac{1}{3}(c_1^2-2c_2)$ (**Hirzebruch signature 定理**);

(2) 如果 b_1 是偶数,则 $q=h^{1,0}=\frac{1}{2}b_1$ 和 $b^+=2p_g+1$;

(3) 如果 b_1 是奇数, 则 $q=h^{1,0}+1=\frac{1}{2}(b_1+1)$ 和 $b^+=2p_g$.

表 1 极小曲面的分类

κ	p_g	P_{12}	q	b_1	结构
2		>0			一般型的代数曲面
1					一般型的椭圆曲面
0	1	1	2	4	复环面
	1	1	2	3	具有平凡标准丛的椭圆曲面
	0	1	1	2	超椭圆曲面
	0	1	1	1	属于 VII 类的椭圆曲面
	1	1	0	0	$K3$ 曲面
	0	1	0	0	Enriques 曲面
$-\infty$	0	0	0	0	有理曲面
			≥ 1	$2q$	亏格为 q 的直纹曲面
			1	1	VII 类曲面

【Kähler 条件】 每个一维 Betti 数为偶数的曲面都是一个代数曲面的变形 (Kodaira (小平)[5]). 这样的 S 存在 Kähler 度量,除非 S 是具有 $a(S)=0$ 的 $K3$ 曲面的变形(Miyaoka (宫岡) [31]). 每个一维 Betti 数为奇数的任意椭圆曲面,都具有仿射结构(井上).

【一般型曲面】 如果 S 是极小曲面, 则 S 是一般型曲面,当且仅当 $P_2(S)>0$ 和 $c_1^2(S)>0$. 我们用 Φ_m 表示由完全线性系 $|mK|$ 所确定的有理映射. 因此,对于 $m\geq 5$, Φ_m 是双有理的, 如果 S 是极小曲面, 则 Φ_m 还是一个射 (morphism).关于 $m\leq 4$, Φ_m 一般不是双有理的,至于 Φ_m 的双有理性由小平, Bombieri 和宫岡([22, 30,31]),得到下列结果：(1)如果 $m\geq 5$,则它的象 $\Phi_m(S)$是标准的. (2) 如果 $c_1^2\geq 2$,则 Φ_4 是双有理的. (3)对于 $m\geq 3$, Φ_m 是双有理的, 除非在下列三种情形(i) $c_1^2=1$, $p_g=2$, $m=3$ 和 4,这里 $\Phi_3(S)$是一个 4 级有理直纹曲面 Σ_2, 它嵌入于 $\boldsymbol{P}^5$ 且 $\Phi_4(S)$ 是 $\boldsymbol{P}^8$ 中的二次锥面;

(ii) $c_1^2=2$, $p_g=3$, $m=3$,这里 $\Phi_3(S)=\boldsymbol{P}^7$ 由 Veronese 嵌入而嵌入于 $\boldsymbol{P}^9$; (iii)一些具有 $c_1^2=2, p_g=0$, $n=3$的曲面. (4)如果 $c_1^2\geqslant 0$, $p_g\geqslant 6$, Φ_2是双有理的当且仅当 S 在非异曲线上无纤维空间结构，这个纤维结构是以亏格为 2 的非异曲线作为一般纤维的.

【曲面的变形】 曲面的重亏格是变形不变量.表 1 中每个类关于变形是封闭的([26]).椭圆曲面的变形在前面已经研究过，关于某些一般类型的曲面的大范围变形,例如 $\boldsymbol{P}^3$ 中的二次曲面已完全得到证明如 [24, 25].

【参】 [1] A. Andreotti-H.Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France, **90** (1962), 193—259; [2] W. L. Chow (周炜良), On compact complex analytic varieties, Amer. J. Math., **71** (1949), 893—914; [3] A. Fröhlicher, Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen, Math. Ann., **129** (1955), 50—95; [4] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume Komplexer Strukturen, Publ. Math. Inst. HES, **5** (1960); [5] K. Kodaira (小平邦彦), On compact analytic surfaces, Ann. of Math., I, **71** (1960), 111—152, II, **77** (1963), 563—626; III, **78** (1963), 1—40; [6] K. Kodaira (小平邦彦)-D. C. Spencer, Two papers in Proc. Nat. c. AcadSci. USA, **39** (1953), 868—877; [7] K. Kodaira (小平邦彦), On deformations of complex analytic structures I, II, Ann. of Math., **67** (1958), 328—466, III, **71** (1960), 43—76; [8] K. Kodaira (小平邦彦) -L. Nirenberg-D. C. Spencer, On the existence of deformations of complex analytic structures, Ann. of Math., **68** (1958). 450—459; [9] M. Kuranishi (倉西正武), On the locally omplete families of complex analytic structures, Ann. of Math., **75** (1962), 536—577; [10] A. Newlander-L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. of Math., **65** (1957), 391—404; [11]. Séminaires H. Cartan, 1951—52; [12] Séminaires H. Cartan, 1953—54; [13] J.-P. Serre, Un théorème de dualité, Comment. Math. Helv., **29** (1955). 9—26; [14] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrieanalytique, Ann. Inst. Fourier, **6** (1955—56), 1—42; [15] C. L. Siegel, Meromorphe Funktionen auf kompacten analytischen Mannigfaltigkeiten, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., (1955), 71—77; [16] F. E. Othmer, Elementarer Beweis des Hauptsatzes über meromorphe Funktionenkörper, Math. Ann., **141** (1960), 99—106; [17] K. Kodaira (小平邦彦), On the structure of compact complex analytic surfaces, Amer. J. Math., I, **86** (1964), 751—798, II, **88** (1966), 682—721; III, IV, **90** (1968), 56—83, 1048—1066; [18] M. Kuranishi (倉西正武), New proof for the existence of locally complete families of complex structures, Proc. Conference on Complex Analysis, Minneapolis, 1964 (Springer, 1965, P. 142—154); [19] K. Yano (矢野健太郎), Differential geomry eton complex and almost complex spaces, Macmillan, 1965; [20] S. S. Chern (陈省身), Complex manifolds, Lecture notes, Univ. of Chicago, 1955—1956; [21] S. S. Chern (陈省身), Complex manifolds without potential theory, van Nostrand, 1967; [22] E. Bombieri, Canonical models of surfaces of general type, Publ. Math. Inst. HES, no. 42, 1973, P. 171—219; [23] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann., **146** (1962), 331—368; [24] E. Horikawa, (堀川穎二), On deformations of quintic surfaces, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 377—379; [25] E. Horikawa, (堀川穎二), On the number of moduli of certain algebraic surfaces of general type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **22** (1975), 67—78; [26] S. Iitaka (飯高茂), Deformations of compact complex surfaces: I, in Global analysis, ed. D. C. Spencer and S. Iyanaga, Princeton Univ. Press (1969), P. 267—272; II, III, J. Math. Soc. Japan, **22** (1970), 247—261, and **23** (1971), 692—705; [27] S. Iitaka, (飯高茂), On D-dimensions of algebraic varieties, J. Math. Soc. Japan, **23** (1971), 356—373; [28] M. Inoue (井上政久), On surfaces of class VII_0, Inventiones Math., **24** (1974), 269—310; [29] A. Kas, Deformation of elliptic surfaces, Thesis, Stanford Univ., 1966; [30] K. Kodaira (小平邦彦), Pluricanonical system of algebraic surfaces of general type, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 170—192; [31] Y. Miyaoka (宮岡洋一), Kähler metrics on elliptic surfaces, Proc. Japan Acad., **50** (1974), 533—536; [32] I. Nakamura (中村郁), On classification of parallelisable manifolds and small deformations, J. Differential Geometry, **10** (1975), 85—112; [33] И. Р. Шафаревич, Алгебраические поверхности, Труды Математического института имени В. А. Стеклова, LXXV, 1967; [34] K. Ueno (上野健爾), Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture notes in math. 439, Springer, 1975; [35] K. Uneo (上野健爾), Introduction to classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, classification of algebraic varieties and compact complex manifolds, Proceedings 1974, Lecture notes in math. 412, Springer, 1974, P. 288—332.

Kähler 流形 [英 Kähler manifold 法 variété kählerienne 德 Kählersche Mannigfaltigkeit 俄 многообразие Кэлеря 日 ケーラー多様体]

【定义】 设 X 是复 n 维的复流形[†],它与在 X 上定义殆复结构[†]的(1,1)型张量场 J 对应 (→复流形).如果把 J 看作是从向量场到向量场的线性变换,则 $J^2=-1$. 当 X 上的 C^∞ 类 Riemann 度量 g 满足条件: $g(x\cdot y)=g(Jx, Jy)$ (x, y 是 X 上的向量场)时, g 叫作 X 的 **Hermite 度量** (Hermitian metric). 这时如果 $\Omega(x, y)=g(Jx, y)$, 则 Ω 是二阶交代张量场，因而它是

二次微分形式. Ω 叫作 Hermite 度量 g 对应的**基本形式**(fundamental form). 当 $d\Omega=0$ 时,所给出的 Hermite 度量 g 叫作 **Kähler 度量**(Kähler metric),而 X 叫作 **Kähler 流形.**

设 X 的复解析局部坐标之一为 $(z^1,\cdots,z^n)$,则在这个坐标邻域上 g 表示为 $g=\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}dz^\alpha d\bar{z}^\beta$, 矩阵$\{g_{\alpha\beta}\}$是正定 Hermite 矩阵. 反之,在 X 的各个解析的坐标邻域上,满足上述条件的二阶对称张量场 g 定义为 X 上的 Hermite 度量. 这时,基本形式为 $\Omega=(\sqrt{-1}/2)\sum g_{\alpha\beta}dz^\alpha\wedge d\bar{z}^\beta$.

对于 Kähler 流形 X, 有下列性质成立. 1) 对于 X 的任意点 p, 在它适当的邻域中存在 C^∞ 类实函数 ϕ, 使得 $g_{\alpha\beta}=\partial^2\phi/\partial z^\alpha\partial\bar{z}^\beta$. 2) 对于任意点 p, 在该点上较弱意义下的测地坐标†可以从解析坐标(的实部与虚部)中选取(坐标系 $(x^1,\cdots,x^n)$ 在点 p 是所谓较弱意义下的测地坐标是 $[\nabla_{\partial/\partial x^i}(\partial/\partial x^j)]_p=0$, $(i,j=1,\cdots,n)$ 成立→张量分析). 这些性质每个都具有 Kähler 度量的特征. 性质 1) 作为 Kähler 度量的定义是由 Kähler 引进的,但实际使用它的首先是 W. V. D. Hodge ([4]).

【Kähler 流形上的调和微分形式】 (→调和积分)在复 n 维紧复流形 X 上定义 Hermite 度量, 考虑复值微分形式. 把关于实值微分形式的算子 d 和 $*$ 可扩张到复线性, 实值微分形式的内积可扩张到 Hermite 内积 $(\varphi,\psi)=\int_X\varphi\wedge\overline{*\psi}$. d 的共轭算子 δ 也是复线性的,对于 $d=d'+d''$, 有 $\delta=\delta'+\delta''$, δ' 是 d' 的共轭算子, δ'' 是 d'' 的共轭算子. 且有 $\delta'=(-1)*d''*$, $\delta''=(-1)*d'*$ 成立. 定义算子 L 为 $L\varphi=\Omega\wedge\varphi$, 定义算子 Λ 为 L 的共轭算子. 对于 p 次微分形式, 有 $\Lambda=(-1)^p*L*$. 当 $\Lambda\varphi=0$ 时,则称 φ 是**原始的**(primitive). 关于算子 L 和 Λ 可举出的主要性质有: 3) $\Lambda\cdot\varphi^p=0$ 当且仅当 $L^q\varphi=0$ $(q=\max(n-p+1,0))$. 4) 对于 $\Lambda\cdot\varphi=0$, 如果 φ 是 (r,s) 型的,则对所有的 $0\leqslant q\leqslant n-p$ 有 $*L^q\varphi=\{(-1)^{p(p+1)/2}\times(\sqrt{-1})^{r-s}q!/(n-p-q)!\}\cdot L^{n-p-q}\varphi$(这里 $p=r+s$). 5) p 次微分形式 φ 只能唯一分解为 $\varphi=\varphi_0+L\varphi_1+\cdots+L^r\varphi_r$ ($r=[p/2]$, φ_i 是原始的). (这些公式是由 Hodge ([4]), Weil ([9]) 提出的.)

以上性质 3)—5) 对于任意的 Hermite 度量都成立,但是对于 Kähler 度量,还有下列关系:

$$Ld-dL=0,\quad \Lambda d'-d'\Lambda=\sqrt{-1}\,\delta'',$$
$$\Lambda d''-d''\Lambda=-\sqrt{-1}\,\delta'.$$

由此,更有

$$\Delta L=L\Delta,\quad \Delta\Lambda=\Lambda\Delta,$$
$$d'\delta''+\delta''d'=0,\quad d''\delta'+\delta'd''=0,$$
$$\Delta=2(d'\delta'+\delta'd')=2(d''\delta''+\delta''d'').$$

这里 Δ 是 Laplace-Beltrami 算子, $\Delta=d\delta+\delta d$. Green 算子 G 对 d',d'',δ',δ'' 中的任何一个都是可交换的. 因此,关于 Kähler 度量有下列性质成立: 6) 与 p 次 C^∞ 类微分形式的空间 $L_p(X)$ 的直和分解 $L_p(X)=\sum_{r+s=p}L_{r,s}(X)$ ($L_{r,s}(X)$ 是 (r,s) 型微分形式的空间)相应的有调和 p 微分形式的空间的直和分解 $H_p(X)=\sum_{r+s=p}H_{r,s}(X)$ ($H_{r,s}(X)$ 是 (r,s) 调和型微分形式的空间). 7) 设 $A=d''\delta''+\delta''d''$, 则 $\Delta\varphi=0$ 与 $A\varphi=0$ 等价. 映射到调和微分形式空间的射影算子 H 是上链复形† $\left(\sum_p L_p(X),d\right)$ 的同伦算子†, 同时也是上链复形 $\left(\sum_s L_{r,s}(X),d''\right)$ 和 $\left(\sum_r L_{r,s}(X),d'\right)$ 的同伦算子. 8) 与性质 4) 对应的分解, 对于调和微分形式也成立. 9) 基本微分形式 Ω 的外积的幂 $\Omega^r(r=0,1,\cdots,n)$ 是调和微分形式. 10) 第一种微分形式(到处全纯的微分形式)是调和微分形式.

【紧 Kähler 流形的性质】 紧 Kähler 流形 X 的复系数 p 次 de Rham 上同调群†与满足 $r+s=p$ 的所有 (r,s) 型 Dolbeault 上同调群†(→复流形)的直和自然地同构. 设 X 的 p 维 Betti 数为 b_p, $h^{r,s}=\dim_C H^s(X,\Omega^r)$, 则

$b_p = \sum_{r+s=p} h^{r,s}$. 如果 φ 是调和的,则 $\bar{\varphi}$ 也是调和的,所以 $h^{r,s} = h^{s,r}$. 因此,当 p 是奇数时,则 b_p 是偶数. 这就是"闭 Riemann 面的一维 Betti 数为偶数"的推广. 作为 9) 的推论是,当 p 是偶数时,则 $b_p \geq 1$. 而且,如果把 X 的不可约(复数)r 维解析子集的正实系数线性组合看作 $2r$ 维闭链时,它在 X 上决不能同调于 0,这个结论可从 Ω^r 在这个闭链上的积分得出.

对于紧 Kähler 流形 X,可定义如下的复环面(complex torus) $\mathfrak{A}$: 存在从 X 到 $\mathfrak{A}$ 的全纯映射 λ,使得 i) $\mathfrak{A}$ 作为群由 $\lambda(X)$ 所生成; ii) 从 X 到任意复环面 T 的任意全纯映射 μ 可分解成 $\mu = \alpha \circ \lambda + c$,这里 α 是从 $\mathfrak{A}$ 到 T 的复解析的同态映射,c 是 T 的定点,这个 $\mathfrak{A}$ 叫作 X 的 **Albanese 簇**(Albanese variety).另一方面,在 X 上的复线丛†中,那些在拓扑上构成直积纤维丛的部分,它在解析意义下的等价类的集作为纤维丛的变形族(→复流形)可以引进自然的复结构,于是构成复环面 $\mathfrak{P}$. $\mathfrak{P}$ 叫作 X 的 **Picard 簇**(Picard variety). $\mathfrak{P}, \mathfrak{A}$ 也可以分别从 $H^1(X,\boldsymbol{R})$, $H^{2n-1}(X,\boldsymbol{R})$ 借助于调和微分形式来构成,它们是相互对偶的复环面. 当 X 是 Hodge 流形(后叙)时,则 $\mathfrak{P}, \mathfrak{A}$ 是 Abel 簇(→Abel 簇,[10]).

紧 Kähler 流形的微小变形†仍是 Kähler 流形(Kähler 度量关于参数可取 C^∞ 类 [6]). 然而 Kähler 流形(在变形族的意义下)的极限并不一定是 Kähler 流形,这样的例子已由广中平祐给出([3]).

【Hodge 流形】 Kähler 流形最重要的例子是复射影空间内的代数簇. 在 n 维复射影空间 $P^N(\boldsymbol{C})$ 中取一组齐次坐标 $(\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_N)$,在 $\zeta_k \neq 0$ 的部分,令 $z^1 = \zeta_0/\zeta_k, \cdots, z^k = \zeta_{k-1}/\zeta_k, z^{k+1} = \zeta_{k+1}/\zeta_k, \cdots, z^N = \zeta_N/\zeta_k$,则 $(z^1, \cdots, z^N)$ 就是解析的局部坐标. 设 $\phi_k = (1/2\pi)\log\left(1 + \sum_j |z^j|^2\right)$, $g_{\alpha\bar\beta} = \partial^2\phi/\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta$,则 $ds^2 = \sum g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha d\bar z^\beta$ 与 k 无关,并给出 $P^N(\boldsymbol{C})$ 的 Kähler 度量,称之为 $P^N(\boldsymbol{C})$ 的标准 Kähler 度量. 11) 设 P^N 的超平面为 $\mathfrak{H}$,则基本形式 Ω 在二维闭链 Z 上的积分 $\int_Z \Omega$ 等于 Z 与 $\mathfrak{H}$ 的交†的 Kronecker 指数† $KI(Z, \mathfrak{H})$. 因此,12) Ω 在整系数闭链上的积分(周期)是整数. 即 Ω 与 $H^2(X, \boldsymbol{R})$ 中整系数上闭链的上同调类相对应. 由 P^N 在其解析子流形 X(根据周(炜良)定理†,它是代数簇)上所诱导的度量,上述12)也成立. 如果用 X 与 $\mathfrak{H}$ 的交 Y 代替超平面 $\mathfrak{H}$, 11) 仍成立. 与此相关的上述性质 8) 相当于用调和微分形式来表示射影代数簇的拓扑的 Lefschetz 定理([7],[4]).

一般地,在紧复流形 X 上,如果存在具有上述性质 12) 的 Kähler 度量,这样的 Kähler 度量叫作 **Hodge型**(或叫**约束型**(restricted type))的,而 X 叫作 **Hodge 簇** (Hodge variety). **小平定理**: Hodge 簇可双全纯地嵌入于适当的复射影空间中([5]). 在证明中要用到复流形的二次变换†的性质和上同调群的致零定理.

对于闭 Riemann 面,即一维紧复流形 $\mathfrak{R}$, Hermite 度量都是 Kähler 度量. 特别是全体积为 1 的度量是 Hodge 型.因而 $\mathfrak{R}$ 与射影空间的代数曲线同构. 这是利用小平定理导出在闭 Riemann 面上存在亚纯函数的一个证明. 复环面 $T = \boldsymbol{C}^n/D$ (D 是秩数为 $2n$ 的离散子群)可表示为射影代数簇的条件是 Riemann 矩阵† 条件,也就是在 T 上可引进 Hodge 型度量的条件.

【例,其他】 关于具有 Kähler 度量的紧复流形的微分几何,对它的解析变换群和等距变换†群作过研究.例如:设 X 是具有 Kähler 度量的 n 维紧复流形,这时,构成 X 的等距变换的 Lie 群至多是 $n^2 + 2n$ 维,并且只当 $X = P^n(\boldsymbol{C})$ 时,才能达到这个维数([8]).

非代数的紧 Kähler 流形的最重要的例子,是复环面. 如果复环面不是 Hodge 型的,则它不是(Weil 的意义下的)抽象代数簇†.

作为非紧 Kähler 流形的例子,对于 $\boldsymbol{C}^n$ 内的有界域从 Bergman 核函数† $K(z, \xi)$ 可导出 Kähler 度量: $ds^2 = \sum_{\alpha,\beta}(\partial^2 \log K(z,\bar z)/\partial z^\alpha \partial \bar z^\beta)$

$dz^{\alpha}d\bar{z}^{\beta}$. 这个度量在区域的解析自同构对应下不变，因而很有意义. 一般地，对于 Stein 流形†可以导入完备的 Kähler 度量(这个结果及其逆可参见[2]).

作为非 Kähler 的紧复流形的例子,在上面已经举出的広中的例子,它是(在 Weil 的意义下的)抽象代数簇而不是 Kähler 流形. Hopf 流形也不是 Kähler 流形. 所谓 **Hopf 流形** (Hopf manifold) 是 $W = \boldsymbol{C}^2 - (0,0)$ 关于由解析变换 $g: W \ni (z, w) \to (2z, 2w) \in W$ 生成的变换群所得到的商空间.

【参】 [1] 秋月康夫, 調和積分論, 岩波, 上 1955, 下 1956; [2] H. Grauert, Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollständige Kählersche Metrik, Math. Ann., **131** (1956), 38—75; [3] H. Hironaka(広中平祐),An example of a non-kählerian complex analytic deformation of kählerian complex structures, Ann. of Math., **75** (1962), 190—208; [4] W. V. D. Hodge, The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge Univ. Press, 第二版 1952; [5] K. Kodaira (小平邦彦), On Kählerian manifold of restricted type (An intrinsic characterization of algebraic varieties), Ann. of Math., **60** (1954), 28—48; [6] K. Kodaira (小平邦彦)-D. C. Spencer, On deformations of complex analytic structures III, Ann. of Math., **71** (1960), 43—76; [7] S. Lefschetz, L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, 1924; [8] A. Lichnerowicz, Géométrie des groupes de transformations, Dunod, 1958; [9] A. Weil, Introduction à l'étude des variétés kählériennes, Hermann, 1958; [10] A. Weil, On Picard varieties, Amer. J. Math., **74**(1952), 865—894.

调和积分 [英 harmonic integral 法 intégrale harmonique 德 harmonisches Integral 俄 гармонический интеграл 日 調和積分] de Rham 定理†指出微分流形†的实系数上同调群与微分形式全体关于外微分算子 d 的上链复形†的上同调群同构,上同调群的每个元可由闭微分形式†的一个类来表示，为了用一个确定的微分形式来表示一个上同调类，我们考虑**调和微分形式** (harmonic forms). 调和微分形式的理论是以函数论中的微分和它的积分 (Abel 积分) 的理论为模型而产生的,因此,称之为**调和积分**论. 关于这一项目的全面论述可参见[1],[4].

【定义】 设 X 是已定向的 C^∞ 类微分流形，且具有 C^∞ 类 Riemann 度量† ds^2. 对于 X 上的 p 次微分形式 φ，定义 X 上的 $n-p$ 次微分形式 $*\varphi$ 如下 ($n = \dim X$). X 的体积元素† 用 dv 表示,在 X 的开集 U 中取一次微分形式的基 $\omega_1, \cdots, \omega_n$，使得 $ds^2 = \sum_i \omega_i^2$, $dv = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$，则 φ 在 U 上可表示为 $\varphi = (1/p!)\sum \varphi_{i_1\cdots i_p}\cdot\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_p}$. 对此,令

$$*\varphi = (1/(n-p)!)\sum(*\varphi)_{i_1\cdots i_{n-p}}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_{n-p}},$$

其中 $(*\varphi)_{i_1\cdots i_{n-p}} = (1/p!)\sum\delta^{12\cdots n}_{i_1'\cdots i_p' i_1\cdots i_{n-p}}\varphi_{i_1'\cdots i_p'}$，则$*\varphi$ 与 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 的取法无关，而是由 φ 所确定的在 U 上的 $n-p$ 次微分形式. 由于 X 被上述开集所覆盖，所以可把 $*$ 定义为 p 次微分形式映射为 $n-p$ 次微分形式的线性映射. 关于局部坐标 $(x^1,\cdots,x^n)$,设 $ds^2 = \sum g_{jk}dx^j dx^k$，利用张量记法可表示为 $\varphi = (1/p!)\varphi_{i_1\cdots i_p}\cdot dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$，则有

$$*\varphi = (1/(n-p)!)(*\varphi)_{i_1\cdots i_{n-p}}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{n-p}},$$

其中

$$(*\varphi)_{i_1\cdots i_{n-p}} = \sqrt{g}\,\delta^{12\cdots n}_{k_1\cdots k_p i_1\cdots i_{n-p}}\cdot\varphi^{k_1\cdots k_p}$$
$$(g = \det(g_{ij})).$$

对于两个 p 次微分形式 φ,ψ,把内积写作 $(\varphi,\psi) = \int_X \varphi\wedge*\psi$，此式当右边收敛时有意义，特别是当 φ，ψ 二者中的任一个具有紧支集† 时,它是有意义的. (φ,ψ) 是对称且正定的双线性函数.

对于外微分算子 d，(在 p 次微分形式上) 令 $\delta = (-1)^{np+n+1}*d*$，则 d 与 δ 关于上述内积是相互**共轭的** (conjugate). 即 φ,ψ 二者中的任何一个具有紧支集时,则 $(d\varphi,\psi) = (\varphi,\delta\psi)$ 成立 (Stokes 定理†). $\Delta = d\delta + \delta d$ 叫作 **Laplace-Beltrami 算子** (Laplace-Beltrami operator)，它是自伴随椭圆型微分算子†. 在这些算子之间有如下关系成立:

$$** = (-1)^{p(n-p)},\quad dd = 0,\quad \delta\delta = 0,$$
$$*\Delta = \Delta*,\quad *\delta = (-1)^p d*,$$
$$\delta* = (-1)^{n-p+1}*d \text{ (作用于 } p \text{ 次微分形式时).}$$

当微分形式 φ 同时满足 $d\varphi = 0$ 以及 $\delta\varphi =$

0时，则称 φ 是**调和的** (harmonic). 这时当然 $\Delta\varphi=0$. 因为 Δ 是椭圆型算子，所以方程 $\Delta\varphi=\mu$ 的弱解† φ，在 μ 是 C^∞ 类的领域中它本身也是 C^∞ 类的，这个弱解就是通常意义下的解. 因而如果 φ(作为微分方程的弱解)是调和的，则 φ 是 C^∞ 类的.

【在紧流形上的调和微分形式】 X 是紧流形，如果 $\Delta\varphi=0$，则 φ 是调和的. 这是因为从 $(\varphi,\Delta\varphi)=(d\varphi,d\varphi)+(\delta\varphi,\delta\varphi)=0$ 而得到 $d\varphi=\delta\varphi=0$ 的缘故，用 $L_p(X)$ 表示 X 上的 p 次 C^∞ 类微分形式所构成的线性空间由内积 (φ,ψ) 使之完备化，完备化的空间用 $\mathfrak{L}_p(X)$ 表示，即 $\mathfrak{L}_p(X)$ 是可测的由平方可积的 p 次微分形式所构成的 Hilbert 空间. $\mathfrak{H}_p(X)=\{\varphi\in\mathfrak{L}_p(X)\mid\Delta\varphi=0$ (在弱意义下)$\}$ 是 $\mathfrak{L}_p(X)$ 中的有限维子空间，$\mathfrak{H}_p(X)$ 在 $\mathfrak{L}_p(X)$ 内是闭合的，$\mathfrak{L}_p(X)\to\mathfrak{H}_p(X)$ 的射影算子† H 是具有 C^∞ 类的核的积分算子†. 在 $\mathfrak{L}_p(X)$ 中 $\mathfrak{H}_p(X)$ 的正交补空间由算子 Δ 映射到它本身，且于其上存在 Δ 的逆算子 G，G 是 Hilbert 空间的连续算子，它把 C^∞ 类微分形式映到 C^∞ 类微分形式上. 如果在 $\mathfrak{H}_p(X)$ 上令 $G=0$，则 G 可推广成从 $\mathfrak{L}_p(X)$ 到 $\mathfrak{L}_p(X)$ 的算子，称之为 **Green 算子** (Green's operator). G 同 d，δ 是可交换的，有关系式 $GH=HG=0$，$H+\Delta G=I$ (恒等映射)成立. 对于 $L_p(X)$ 的元 φ，应用上述关系则得 $\varphi=H\varphi+G\delta d\varphi+d\delta G\varphi$. 它表示 H 是上链复形† $\left(\sum_p L_p(X),d\right)$ 上的同伦算子†. 因而 X 的 de Rham 上同调群的各个上同调类中含有且仅含有一个调和微分形式，上同调类可由它来代表. 但调和微分形式的积不一定是调和的，因此，在讨论上同调的环结构时，调和微分形式不一定是最方便的. 最后，G 除在 $X\times X$ 中的对角线集外，可由具有 C^∞ 核的积分算子给出.

【非紧流形的情形】 当 X 不是紧流形时，将 $L_p(X)$ 取为具有紧支集的 p 次 C^∞ 类微分形式所构成的空间，它的完备化空间记为 $\mathfrak{L}_p(X)$. 设 $dL_{p-1}(X)$，$\delta L_{p+1}(X)$ 在 $\mathfrak{L}_p(X)$ 中的闭包分别记为 $\mathfrak{B}_p(X)$，$\mathfrak{B}_p^*(X)$，在 $\mathfrak{L}_p(X)$ 内 $\mathfrak{B}_p(X)$，$\mathfrak{B}_p^*(X)$ 的正交补空间分别为 $\mathfrak{Z}_p^*(X)$，$\mathfrak{Z}_p(X)$. 这时 $\mathfrak{Z}_p(X)\cap\mathfrak{Z}^*(X)=\mathfrak{H}_p(X)$ 是平方可积的调和微分形式全体所构成的子空间，且 $\mathfrak{L}_p(X)$ 可直和分解为 $\mathfrak{L}_p(X)=\mathfrak{B}_p(X)+\mathfrak{B}_p^*(X)+\mathfrak{H}_p(X)$. 而且在这分解中，$C^\infty$ 类微分形式的任何分量都是 C^∞ 类的.

当 X 是另一个流形 Y 的开子流形时，$\bar{X}$ 是紧的，当 $\partial X=\bar{X}-X$ 是 Y 的闭子流形时，上述的理论无非是对应于边界条件"∂X 上有 $\varphi=0$"的广义位势理论. 对应于其它边界条件就有不同的 Hilbert 空间的分解问题.

【在复流形上的推广】 当 X 是复流形时，考虑复值微分形式. p 次微分形式的空间 $L_p(X)$ 可分解为 (r,s) 型微分形式的空间 $L_{r,s}(X)$ 的直和，外微分算子† d 可分解为 $(1,0)$ 型的(即将 $L_{r,s}(X)$ 映射到 $L_{r+1,s}(X)$) d' 和 $(0,1)$ 型的 d'' 之和：$d=d'+d''$. 如果在 X 上给出全纯向量丛 E，对于 d'' 所作用的，在 E 上取值的微分形式，则有推广的 Dolbeault 定理†成立. 设 X 是紧的，在 X 上导入 Hermite 度量†，在 E 上也定义 Hermite 内积. 选取开覆盖 $\{U_i\}$，使得在它的各个开集上 E 可表示为直积 $U_i\times\boldsymbol{C}^q$，且在 U_i 上 E 的点用 (x,ξ_i) 表示. 这里 $x\in U_i$，$\xi_i\in\boldsymbol{C}^q$，q 是纤维的维数. 当 $x\in U_i\cap U_k$ 时(关于 U_i 表示的)点 (x,ξ_i) 与(关于 U_k 表示的)点 (x,ξ_k)，当且仅当 $\xi_i=g_{ik}(x)\xi_k$ 时是相同的. 这里 g_{ik} 是 $U_i\cap U_k\to GL(q,\boldsymbol{C})$ 的全纯映射，对于 $U_i\cap U_k\cap U_l$ 有 $g_{ik}g_{kl}=g_{il}$ 成立. 在 E 上取值的微分形式 φ 可从 U_i 上的 $\boldsymbol{C}^q$ 中取值，而且在 $U_i\cap U_k$ 上满足 $\varphi_i(x)=g_{ik}(X)\varphi_k(x)$ 的微分形式组 $\{\varphi_i\}$ 给出. 如果在 U_i 上以 C^∞ 类函数为分量的正定 Hermite 矩阵 h_i，使得在 $U_i\cap U_k$ 上满足 ${}^t g_{ik}h_i\bar{g}_{ik}=h_k$，则 ${}^t\xi_i h_i\bar{\xi}_i$ 给出在 E 的各纤维上定义的 Hermite 内积. 对于在 E 上取值的微分形式 φ,ψ，设 $(\varphi,\psi)=\int_X\sum_{\alpha\beta}h_{i\alpha\beta}\varphi_i^\alpha\wedge*\overline{\psi_i^\beta}$ (φ_i^α $(\alpha=1,\cdots,q)$ 表示 φ_i 的分量)，由此，在 (r,s) 型 C^∞ 类微分形式的空间 $L_{r,s}(E,X)$ 中导进 Hermite 内积. 设 d'' 关于

这个内积的伴随微分算子为 ϑ，令 $A = d''\vartheta + \vartheta d''$，则 A 是自伴随椭圆型微分算子，对此，关于调和微分形式的主要结论成立，即 (r, s) 型调和微分形式空间 $\mathfrak{H}_{r,s}(E, X)$ 是有限维的，在 $L_{r,s}(E, X)$ 的完备化空间 $\mathfrak{L}_{r,s}(E, X)$ 里有连续线性算子 G，并有 $1 = H + AG$，$HG = GH = 0$，$d''G = Gd''$，$\vartheta G = G\vartheta$ 等关系. 这里，H 表示 $\mathfrak{L} \longmapsto \mathfrak{H}$ 的射影算子，它是具有 C^∞ 类的核的积分算子. G 也使 C^∞ 类微分形式映到 C^∞ 类微分形式，所以 H 是上链复形 $\left(\sum_s L_{r,s}(E, X), d''\right)$ 上的同伦算子，Dolbeault 上同调群[†]（d'' 上同调群）的元素可用唯一确定的调和微分形式来表示. →Kähler 流形.

【其它的推广】 流形 X 即使不是 C^∞ 类的，而是 C_1^1 的，调和微分形式的理论也可推广（[3]）. 所谓 X 是 C_1^1 的，意味着可取得这样一组局部坐标系，使其转移函数的导数满足 Lipschitz 条件[†].

如果 X 是实解析的，另方面 Riemann 度量也是实解析的，则调和微分形式也是实解析的. 利用这一事实可把具有解析 Riemann 度量的紧流形实解析地嵌入于 Euclid 空间中（P. Bidal, G. de Rham，这个结果现在已经包括在 C. B. Morrey 和 H. Grauert 的定理中）.

如果 X 是复解析的，也可考虑具有奇异性的调和微分形式的理论（[5]，[9]）. 可以把它看作是古典的第二种微分、第三种微分理论的推广，关于这方面的探讨流动形[†] 的想法是有用的.

【上同调的致零定理】 为确定算子 Δ 与 Riemann 度量的关系，存在这样的情形，根据度量性质可得出除 0 以外不存在某些次数的调和微分形式的结论. 这就意味着与流形相应的维数的上同调群为零，所以在应用上很重要. 这种条件已被表达为度量的曲率的性质，它开始于 S. Bochner（[6]）.

现在指出致零定理的一种形式：在 n 维紧复流形 X 上有复线丛 B，它的 Chern（陈）类[†]可用 $(1,1)$ 型的实闭微分形式 $w = \sqrt{-1}\sum a_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ 表示，如果 Hermite 矩阵 $(a_{\alpha\beta})$ 在 X 的各个点上是正定的，则对于 $p + q > n$ 有 $H^q(X, \Omega^p(B)) = 0$. 这时 $ds^2 = 2\sum a_{\alpha\beta} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$ 给出 X 的 Hodge 度量.

【参】 [1] 秋月康夫，調和積分論，岩波，上 1955，下 1956；[2] W. L. Baily, The decomposition theorem for V-manifolds, Amer. J. Math., **78** (1956), 862—888; [3] C. B. Morrey-J. Eells, A variational method in the theory of harmonic integrals I, Ann. of Math., **63** (1956), 91—127; [4] G. de Rham, Variétés différentiables, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1955; [5] G. de Rham-K. Kodaira,（小平邦彦）, Harmonic integrals, Mimeographed note, The Institute for Advanced Study, Princeton, 1950; [6] K. Yano（矢野健太郎）-S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1953; [7] S. I. Goldberg, Curvature and homology, Academic Press, 1962; [8] W. V. D. Hodge, The theory and applications of harmonic integrals, Cambridge Univ. Press, 第二版，1952; [9] K. Kodaira（小平邦彦）, Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory), Ann. of Math., (2) **50** (1949), 587—665.

八、代 数 几 何 学

代数几何 〔英 algebraic geometry 法 géométrie algébrique 德 algebraische Geometrie 俄 алгебраическая геометрия 日 代数幾何学〕**代数几何**是关于高维空间中由若干个代数方程所确定的点集和从这些点集通过一定的构造方式导出的对象即代数簇†的数学. 从观点上说，它是多变量代数函数域†的几何理论，也与从一般复流形†来刻划代数簇有关. 进而它通过自守函数†、不定方程†等和数论深刻地结合起来. 从方法上说，则和交换环论及同调代数有着密切的联系.

在讨论代数簇的局部性质时，是在仿射空间中来考虑，而在考察大范围的性质时，通常是在射影空间中来考虑. 这时，关于射影变换†、双正则的†双有理变换†和双有理变换的不变量(性质)分别称为射影不变量†、**相对不变量**(relative invariant)和**绝对不变量**(absolute invariant). 射影不变量的研究属于射影几何，当然，射影几何的方法在代数几何中也是重要的. 而在研究代数簇的分类等问题时，则要用到相对不变量和绝对不变量的概念.

通常设点的坐标属于一个确定的域 K. 当 K 为复数域时，称为古典情形，这时可把代数簇看作复解析流形†，而用偏微分方程、Θ 函数†等解析方法（亦称超越方法）和拓扑方法来研究；代数几何就是通过这些研究发展起来的. 然而，为了研究有理映射†，或代数簇的代数系†，还必须考虑基域不是代数闭域†情形的理论. 另外，为了谋求代数几何在数论方面的应用，就希望在特征为 p 的域上来考虑. 为此，最好把基域 K 设得尽可能一般些，在今天的代数几何中，要求尽量排除连续性而用纯代数方法来讨论.

【历史】 在初等解析几何中，二次曲线(面)已是很清楚的了，其次就是关于三次、四次…等情形的研究，它们原来是属于解析几何(或射影几何)的，那时，还不能用代数几何的名称. 关于由低次曲线族来构造代数曲线的研究，或者关于直线上的 m-n 对应的一般情形的研究，大概是从 M. Chasles 开始的. 然而堪称划时代的事件则是 B. Riemann 的代数函数论(→代数函数)的出现(1857). 在分析或者射影几何中，作为射影不变量的次数是代数曲线(面)最基本的量，而 Riemann 则是把能够互相双有理地变换的曲线汇集成为一个族，也就是说，用双有理变换代替射影变换作为研究的基础. 这就是所谓 Riemann 面†的思想，并且得到了作为它的示性数的亏格†的概念. 亏格就是最早得到的绝对不变量.

Riemann 方法的依据是利用 Dirichlet 原理†的 Abel 积分†的理论，而且是在假定任何代数曲线都能够消解为不带奇点情形的基础上来讨论的. 因此，在他以后从各方面出现了用非超越方法来重新建立更为严密的理论的尝试. M. Noether 试图用几何方法来建立这种理论. 他应用 Cremona 变换†证明了任意平面代数曲线都能够双有理地变换为除了二次结点外没有其他奇点的代数曲线，从而巩固了 Riemann 的基础. 并且，他对这一领域中最为重要的 Riemann-Roch 定理†做出了贡献，即阐明了这个定理的基本条件. 他对于空间曲线和曲面的研究也是值得注意的. J. Plücker 则利用几何的语言引进亏格的概念，他还研究了线几何，提出了所谓 Plücker 坐标†. A. Cayley 和 A. Brill 也做了类似的研究，提出了 Cayley 型. 这是 B. L. van der Waerden 和周炜良的配型†(周坐标)的原形.

十九世纪九十年代，意大利学派兴起，继承了 M. Noether 的传统，在代数曲面方面发展了所谓代数几何的(algebro-geometric)方法，并且发现了许多新的事实. 在这一学派的主要人物当中，著名的有 G. Castelnuovo, F. Enriques 和

F. Severi. 另一方面是在法国，由 H. Poincaré, E. Picard 开创了两个变量的代数函数论，以后 S. Lefschetz 深入研究了复代数曲面的理论([4],[5]). 法国学派和意大利学派的这些理论，虽然很难说是十分严密的，但是非常富有启发性.

与此相反，非常严密而且形式上一般化了的代数曲线理论，主要是在德国用纯代数方法进行研究. R. Dedekind-H. Weber 把单变量代数函数域和数论平行地进行了研究. K. Hensel 把类似幂级数展开的 p-adic 展开引进了数论. 进而 E. Noether (M. Noether 的女儿) 把 E. Lasker 和 F. S. Macaulay 的形式多项式理想的研究抽象化，在她的影响之下，出现了 F. K. Schmidt 等人的抽象域上的算术代数几何.

同样是在 E. Noether 的影响之下，van der Waerden 应用抽象理想论来奠定代数几何的新基础([1]，本世纪三十年代). 他首先引进了一般点† 和特定化† 的概念，严格地定义了射影空间中的相重数†. 然后严密地证明了古典的 **Bézout 定理**: “n 维射影空间内的 l 次 r 维代数簇 M 和 m 次 $n-r$ 维代数簇 N 的交点，如果不是无限个，那么一定是 lm 个”. 关于相交重数的问题，到四十年代，由 C. Chevalley 和 A. Weil 再次提了出来. Chevalley 完美地发展并且应用了 W. Krull 创始的局部环的理想论，他引进了拓扑概念并应用于相交问题. 这一方向，以后由 P. Samuel、永田雅宜和 J.-P. Serre 等人作了进一步的发展.

Weil 在把相交理论奠基于抽象域上的同时，把几何思想引进抽象代数的理论之中([6]). 由此，他把 H. Hasse 等人开创的单变量代数函数理论的算术化推广到多变量情形，从而开辟了一个新方向. Weil 根据他的相交理论，在抽象域的情形下重新建立 Severi 的代数对应理论，并成功地证明了关于同余 ζ 函数† 的相应的 Riemann 猜想†. 他把古典的 Abel 簇理论纯代数地建立起来，包括特征 p 的情形在内.

另外，O. Zariski 在三十年代，把 Krull 的广义赋值† 论应用到代数几何，特别是双有理变换上，他从这方面来奠定代数几何的基础，并且做出了实质性的贡献. 他证明了所谓 Zariski 主要定理†: “如果双有理对应在正规的† 点 P(→代数簇)处不是正则的，那么 P 的象的各个分支的维数 $\geqslant 1$”，由此阐明了双有理对应的性质. 对于奇点的消解† 问题 (Riemann 的立足点!) 即“射影空间中任意不可约代数簇都能够双有理地变换为射影空间内的不带奇点的代数簇”，他给出了关于特征为 0 的情形下维数 $\leqslant 3$ 的证明. 这个问题，对于特征为 0 的情形下的一般维数，在 1964 年也由広中平祐完全解决了([11]).

以上说的是由代数方法所引起的发展，此外，借助分析方法也取得了很大进展. 把 Riemann 面† 和 Riemann 流形† 的概念统一起来，形成了复解析流形† 的概念，G. de Rham 证明了用拓扑方式引进的同调和微分形式的上同调之间的对偶原理，W. V. D. Hodge 进而发展了调和积分† 论等，这些都是 Riemann 理论的发展. 在单变量情形，紧 Riemann 面总可从某个射影代数曲线导出，然而在多变量情形却没有这样简单的关系. Weil 的一般完备抽象代数簇的概念可以看成是紧复流形的类似. 能够嵌入射影空间内的紧复解析簇一定是代数簇 (周定理†)，那么一个紧复解析流形能与一个嵌入射影空间的代数簇双正则、双有理等价的充分必要条件是什么呢? 小平邦彦证明了这个条件是它为 Hodge 簇†. 作为相伴于代数曲线的 Jacobi 簇† 的理论 (→ 代数曲线) 的推广，井草準一和 Weil 利用调和积分理论的结果，建立了相伴于高维代数流形的 Picard 簇† 和 Albanese 簇† (→代数簇)的理论，因而澄清了意大利学派的理论中许多含糊不清之处. 后来，松阪輝久、周炜良、S. Lang 等人把这些理论推广到了任意特征的情形. 特征为 p 时的对偶定理 (→ Abel 簇) 则是由西三重雄和 P. Cartier 证明的.

在小平的理论中，已经用到层† 的概念(→层). Serre 则摹仿上面所说的复解析流形，把抽象代数簇定义为环式空间†(→ 代数簇)，并且，他

把代数簇看作具有 Zariski 拓扑†的拓扑空间，建立了代数凝聚层†的理论，阐明了算术亏格†等古典不变量都是上同调量(→代数簇).

A. Grothendieck 基于结构层中容许幂零元而且坐标环取成具有单位元的一般交换环，定义了比代数簇远为一般的概型†概念. 使用幂零元就可以把分析中的逐次逼近法搬过来，再应用上同调理论，Grothendieck 得到了包括 Zariski 主要定理在内的许多结果.

F. Hirzebruch 应用层的语言和 A. Borel 及 R. Thom 的拓扑成果，把 Riemann-Roch 定理推广到高维复流形上([7]). 之后，Grothendieck 又进一步把它推广，在抽象域上证明了更广的结果. 其基本思想成了K理论†的基础.

全体亏格为 $g(g \geqslant 2)$ 的代数曲线所成的簇，能够用 $3g-3$ 维代数簇来参数化(但当 $g=0$ 时是用 0 维的，而 $g=1$ 时，则是用 1 维的). 这个问题，Riemann 以来就作为参模†问题考虑过，但是直到近年来才得到了严密的证明. 当特征任意时，M. Deuring 对于 $g=1$ 的情形，井草对于 $g=2$ 的情形先后作了精密的论证. 对于一般的 g 的情形，D. Mumford 给出了一般的解答，不过他是立足于 Grothendieck 的概型理论之上的. 关于解析情形下高维流形的参模，小平-D. C. Spencer 发展了复结构的变形†的理论(→复流形). 而在抽象流形方面则有松阪的研究.

关于簇的直积概念，经 Grothendieck 从函子理论的角度以纤维积的形式把它推广，起了更为基本的作用. 可以认为概型的纤维积包括了相交理论和簇的特定化理论. 从函子的表示理论的观点出发，能够构成完全新的 Picard 簇理论等等. 至于概型，不仅对于域上的代数几何，而且对于环、特别是整数环$\boldsymbol{Z}$上的代数几何(由数论的要求引起的)也是通用的，从而给出了一种自然的统一.

关于应用到数论方面的情况，虽然 J. W. S. Cassels 等人关于亏格为 1 的代数曲线的有理点的研究是重要的，但是当亏格大于 1 时，就连 Mordell 猜想†(→不定方程)也还没有解决.

【参】 [1] B. L. van der Waerden, Einführung in die algebraischen Geometrie, Springer, 1939; [2] G. Castelnuovo, "Sulle funzioni Abeliane" Memorie scelte, Zanichelli, Bologna, 1937; [3] F. Enriques, Memorie scelte di geometria, Zanichelli, I, 1956; II, 1959; III, 1966; [4] E. Picard-G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, 2 vols, Gauthier-Villars, 1897, 1906; [5] S. Lefschetz, L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, 1924; [6] A. Weil, Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1946; [7] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Erg. d. Math., Springer, 1956, 第三版, 1966; [8] A. Grothendieck, The cohomology theory of abstract algebraic varieties, Proc. Internat. Congr. Math., Cambridge Univ. Press, 1958, p. 103—118; [9] A. Grothendieck, Eléments de géométrie algébrique, Publ. Math. Inst. HES, no. 4, 1960; no. 8, 1961; no. 11, 1961; no. 17, 1963; no. 20, 1964; no. 24, 1965; no. 28, 1966; no. 32, 1967; [10] K. Kodaira (小平邦彦), Some results in the transcendental theory of algebraic varieties, Ann. of Math., **59** (1954), 86—134; [11] H. Hironaka (広中平祐), Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., **79** (1964), 109—326. 此外→代数簇的[参].

代数曲线 [英 algebraic curve 法 courbe algébrique 德 algebraische Kurve 俄 алгебраическая кривая 日 代数曲線] 一维代数簇†称为**代数曲线**. 关于代数曲线的解析理论 → 代数函数. 代数曲线的理论可以大致分为两个方面，即看作射影空间内的簇的几何观点和看作代数函数域理论的代数观点(→代数簇，Abel 簇). 特别是后者，由于有限次代数数域和有限域上的单变量代数函数域之间具有某种很强的类似性，所以也包括了把代数数论的主要结果推广到代数函数域上的研究(→ζ函数，复数乘法论). 这里主要叙述把它看作簇的几何学方面，以下用$\boldsymbol{K}$表示万有域†.

【平面代数曲线】 设 X, Y 为平面的坐标. 令 X, Y 的 m 次多项式 $f(X, Y)$ 等于 0 所得的曲线 $C: f(X, Y)=0$，称为 m 次**平面代数曲线** (plane algebraic curve). m 称为 C 的**阶** (order). 设将 $f(X/Z, Y/Z)$ 的分母去掉后所得的 m 次齐次多项式(即 $Z^m f(X/Z, Y/Z)$)为 $F(X, Y, Z)$，则 $F(X, Y, Z)=0$ 就是在 C 上添加某些无穷远点后所成的射影平面上的 m 次代数曲线. 如果多项式 $f(X, Y)$ 不可约，C 就称为不可约的. 以下在射影平面中考虑，且在本

节中设 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$. 如果 m 次曲线和 n 次曲线二者没有共同的不可约分支，那么它们的交点个数（重数计算在内）等于 mn (**Bézout 定理**).

不可约代数曲线 C 的点 $P=(a,b)$ 称为 r **重点** (r-ple point),如果把 $f(X+a,\ Y+b)$ 看作X,Y的多项式时最低次项是 r 次的. 在 r 重点处能够引 r 条切线（重数计算在内). 当 $r>1$ 时，r 重点称为C的**奇点** (singular point, multiple point). 如果**二重点** (double point) P 处的两条切线不同，则称此点为二次**结点** (node, ordinary double point). 例: $X^3+Y^3-3XY=0$ 上的原点. 一般地说,不可约代数曲线 C，经过有限次以奇点为中心的局部二次变换†,可以双有理地变换为非奇异代数曲线. 如果施行一次以奇点 P 为中心的局部二次变换就能将 P 变成一个单点，则称 P 为**尖点** (cusp). 例: $Y^2-X^3=0$ 上的原点. 在平面曲线情形,施行有限次形如 $(X:Y:Z)\to(YZ:ZX:XY)$ 的 Cremona 变换†(射影平面的二次变换†),就可使 C 的所有奇点仅为二次结点.

如果不可约平面代数曲线 C 不是直线，设 C 的各点处的切线为 $uX+vY+wZ=0$, 那么全体以 (u,v,w) 为齐次坐标的点组成不可约平面曲线 C'. 称 C' 为 C 的**对偶曲线** (dual curve). C' 的阶 m' 称为 C 的**级**(class). m' 等于从平面上的一点引到 C 的切线的个数（重数计算在内). C' 的对偶曲线就是 C. C 上的单点 P 处的切线与 C 高次相切时，称 P 为 C 的**拐点** (point of inflection). 拐点对应于 C' 的奇点(尖点). 当 C 可由 $F(X_0,X_1,X_2)=0$ 定义时，设 $H(X)=\det|F_{ij}|$, 而 $F_{ij}(X)=\partial^2F/\partial X_i\partial X_j$ $(i,j=0,1,2)$, 于是由 $H(X)=0$ 定义的平面代数曲线称为 C 的 **Hesse 曲线** (Hessian). 设 P 不是 C 的奇点，那么 P 为 C 的拐点的充分必要条件是，P 为 C 与 C 的 Hesse 曲线的一个交点. 如果不可约 m 次曲线 C 的奇点只有 ν 个二次结点和 γ 个二次尖点,那么 C 的有效亏格(见后) π 由 $\pi=(m-1)(m-2)/2-\nu-\gamma$ 给出. 再者, C 的级 m' 和拐点个数 γ' (适当计算重数)分别由 $m'=m(m-1)-2\nu-3\gamma$, $\gamma'=3m(m-1)-6\nu-8\gamma$ 给出. 以上三个公式都称为 **Plücker 公式**.

例如，非奇异的不可约平面三次曲线 C 是椭圆曲线 $(\pi=1)$ 而 $m'=6$, $\gamma'=9$. 这九个拐点具有这样的性质: 在连结任意两个拐点的直线上，都还有另一个拐点. 再者，在 C 上的任意一点 P 能够引 C 的四条切线，它们的非调和比† λ 由 C 唯一决定，而与 P 的选取方法无关. 并且 λ 对于双有理变换也是不变的（C 的绝对不变量†). 有一个奇点的平面三次曲线都是有理曲线(→曲线).

关于三维射影空间内代数曲线的分类，M. Noether 给出了一张庞大的表([5]).

【基本概念】 设 Γ 为非奇异的不可约代数曲线. 由 Γ 上有限个点所作的形式整系数线性组合 $\mathfrak{a}=\sum n_iP_i$, 称为 Γ 的**除子**(divisor), $\sum n_i=n$ 称为除子 $\mathfrak{a}$ 的**次数** (degree)（记为 $\deg\mathfrak{a}$). 如果除子 $\mathfrak{a}=\sum n_iP_i$ 中，对于不同的指标 i 和 j 皆有 $P_i\neq P_j$, 则称为 $\mathfrak{a}$ 的**约化表示式**. 如果除子 $\mathfrak{a}$ 的约化表示式中出现的系数皆 $\geqslant 0$, 则称 $\mathfrak{a}$ 为**正除子** (positive divisor) 或**整除子** (integral divisor)（记作 $\mathfrak{a}>0$). Γ 的全体除子构成的加法群记作 $G(\Gamma)$, 次数为 0 的除子构成的子群记作 $G_0(\Gamma)$. 设 P 为 Γ 上的一个点，Γ 的函数域 $\boldsymbol{K}(\Gamma)$ 中在 P 处正则的元的全体构成赋值环† $\mathfrak{O}_P$. $\mathfrak{O}_P$ 的极大理想† $\mathfrak{m}_P$ 的生成元 t 称为 P 处的**局部参数** (local parameter). 设 v_P 是由 $\mathfrak{O}_P$ 所定义的 $\boldsymbol{K}(\Gamma)$ 的正规赋值†, 那么 $v_P(f)$ 就称为 f 在 P 处的**阶** (order). 使 $v_P(f)>0$ 的点 P 称为 f 的**零点** (zero point), 使 $v_P(f)<0$ 的点 P 称为 f 的**极点** (pole). 函数 f 所决定的除子 $\sum v_P(f)P$ 用 (f) 表示,称为**函数 f 的除子**(divisor of a function f). 函数 f 的除子的集合构成 G_0 的一个子群 G_l. G_l 中的除子称为与 0 线性等价†的除子或**主除子** (principal divisor), 记作 $\mathfrak{a}\sim 0$.

设 $\mathfrak{a}$ 为任一除子，与 $\mathfrak{a}$ 线性等价的正除子 $\mathfrak{b}$ (即 $\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\sim 0$ 的除子)的集合记作 $|\mathfrak{a}|$, 称为由 $\mathfrak{a}$ 定义的**完备线性系** (complete linear system).

现在，置 $L(\mathfrak{a})=\{f\in \boldsymbol{K}(\Gamma)|(f)+\mathfrak{a}>0\}$，那么 $L(\mathfrak{a})$ 是 $\boldsymbol{K}$ 上的有限维线性空间，并且 $L(\mathfrak{a})$ 的一维子空间和 $|\mathfrak{a}|$ 的元一一对应．设 $l(\mathfrak{a})$ 是 $L(\mathfrak{a})$ 作为线性空间的维数，则 $l(\mathfrak{a})-1$ 称为线性系 $|\mathfrak{a}|$ 的**维数**（dimension），记作 $\dim|\mathfrak{a}|$．对于任意除子 $\mathfrak{a}$，整数 $\deg\mathfrak{a}-\dim|\mathfrak{a}|\geqslant 0$ 而且有界，设它的上确界为 g，称 g 为 Γ 的**亏格**（genus）．若置 $g-\deg\mathfrak{a}+\dim|\mathfrak{a}|=i(\mathfrak{a})$，则有 $i(\mathfrak{a})\geqslant 0$，称它为 $\mathfrak{a}$ 的**特殊指数**（speciality index）．

现在，设 ω 为 Γ 上的一个微分形式[†]，P 为 Γ 上的点，t 为 P 处的局部参数，把 ω 写成 $\omega=f dt$ 时，置 $v_P(\omega)=v_P(f)$．这时，$(\omega)=\sum v_P(\omega)P$ 确定 Γ 的一个除子，并且它作为 G/G_l 中的元是唯一确定的．这种除子称为**微分除子**（differential divisor）或**典范除子**（canonical divisor），记作 $\mathfrak{k}$．指数 $i(\mathfrak{a})$ 等于使 $(\omega)>\mathfrak{a}$ 的线性无关微分形式 ω 的个数，$i(\mathfrak{a})=l(\mathfrak{k}-\mathfrak{a})$，等式 $l(\mathfrak{a})=\deg\mathfrak{a}-g+1+i(\mathfrak{a})$ 成立．称这个等式为 **Riemann-Roch 定理**．并且 $l(\mathfrak{k})=g$，$\deg\mathfrak{k}=2g-2$ 两式成立．

当 Γ 具有奇点时，存在与 Γ 双有理等价且非奇异的曲线 $\tilde{\Gamma}$，并且除同构之外 $\tilde{\Gamma}$ 是唯一确定的．$\tilde{\Gamma}$ 的亏格称为 Γ 的**有效亏格**（effective genus）．特别地，$g=0$ 的曲线称为**有理曲线**（rational curve, unicursal curve），$g=1$ 的曲线称为**椭圆曲线**（elliptic curve）．

设 k 为万有域 $\boldsymbol{K}$ 的子域且为曲线 Γ 的一个定义域．用 $\bar{k}$ 表 k（在 $\boldsymbol{K}$ 内）的代数闭包．那么，Γ 的除子 $\mathfrak{a}=\sum_{i=1}^{t} n_i P_i$ 称为 **k 有理素除子**（prime rational divisor over k），如果它满足下面三个条件：i) $\mathfrak{a}$ 在 $\bar{k}/k$ 的任意自同构之下不变；ii) 对于任意 j，存在 $\bar{k}/k$ 的适当的自同构 σ_j，使 $P_j=P_1^{\sigma_j}$；iii) $n_1=\cdots=n_t=[k(P_1):k]_i$．$k$ 有理素除子生成 $G(\Gamma)$ 的一个子群，称它的元为 **k 有理除子**（rational divisor over k）．设 $k(\Gamma)$ 为 $\boldsymbol{K}(\Gamma)$ 中以 k 为定义域的函数的集合，那么 $k(\Gamma)$ 是 $\boldsymbol{K}(\Gamma)$ 的子域，并且 $k(\Gamma)\otimes_k\boldsymbol{K}=\boldsymbol{K}(\Gamma)$．$k(\Gamma)$ 称为 Γ 在 **k 上的函数域**（function field over k）．设 $\mathfrak{a}$ 是 k 有理素除子，P 是它的一个点，那么 $\mathfrak{O}_P\cap k(\Gamma)$ 是 $k(\Gamma)$ 的赋值环，它由 $\mathfrak{a}$ 唯一决定而与 P 的选取方法无关，称它为 $k(\Gamma)$ 的由 $\mathfrak{a}$ 决定的赋值环．

【代数函数域】 设 k 为任意一个域，K 为 k 的纯超越扩张 $k(x)$ 的一个有限可分扩域，且 k 在 K 内是极大代数的．这时，称 K 为 k 上的一个**单变量代数函数域**（algebraic function field of dimension 1）．K 的指数赋值[†]中使 k 的元的值为 0 的赋值总是离散的，它的等价类称为 K/k 的**素除子**（prime divisor）．由素除子生成的 Abel 群（通常用乘法群表示）的元称为 K/k 的**除子**（divisor）．设素除子 P 的赋值环为 R_P，其极大理想为 M_P，那么素除子 P 的**次数**（degree）定义为 $\deg P=[(R_P/M_P):k]$．在前面叙述过的曲线上的理论中，将"点"换成"素除子"，将"曲线 Γ 上的"换成"函数域 K/k 的"，将"$\boldsymbol{K}(\Gamma)$"换成"K"，将"$\boldsymbol{K}$"换成"k"，就能够对 K/k 展开类似于非奇异曲线的理论．这样得到的亏格称为**单变量代数函数域 K/k 的亏格**（genus of an algebraic function field of dimension 1）．

设 K/k 为给定的单变量代数函数域，满足 $k(\Gamma)\cong K$ 的在 k 上定义的代数曲线 Γ 称为 K/k 的一个**模型**（model）．因为 K 中存在两个元 x,y 使 $K=k(x,y)$，所以若设 $f(X,Y)$ 为满足 $f(x,y)=0$ 的 k 上的不可约多项式，则由 $f(X,Y)=0$ 定义的平面代数曲线 C 就是 K/k 的一个模型．在 K/k 的模型中，存在一个在 k 上为正规的[†]代数曲线 Γ_0，且除了 k 上的双正则、双有理同构外，Γ_0 是唯一确定的（当 k 为复数域时，Γ_0 就是 K 的 Riemann 面）．这个唯一性是曲线特有的性质，而二维以上的情形则不然．当 Γ_0 没有奇点时（例如特征为 0 或 k 为完全域时就是如此），K/k 的理论和 Γ_0 的理论实质上是相同的．特别是，函数域的亏格和 Γ_0 的亏格是相等的．然而当 Γ_0 具有奇点时，一般说函数域的亏格大于 Γ_0 的亏格．

如果 K/k 的亏格为 0，那么可取平面二次曲线作为 Γ_0．进而若 K 具有 k 上的一次素除子，则 K 为有理函数域 $k(x)$，并且可取射影直线作为 Γ_0．亏格为 1 的代数函数域称为**椭圆函**

数域 (elliptic function field). 如果 K/k 的亏格为 1 且有 k 上的一次素除子, 则可取平面三次曲线作为模型. 进一步, 如果万有域的特征 $\neq 2$, 那么形如 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ 的平面三次曲线就是一个模型, 称为关于椭圆曲线的 **Weierstrass 标准形式** (Weierstrass' canonical form). 数 $j = (g_2^3 - 27g_3^2)^{-1} \cdot g_2^3 (\neq 0)$ 是 Γ_0 的双有理不变量(绝对不变量), 且有等式

$$j = (4/27)(\lambda^2 - \lambda + 1)^3\lambda^{-2}(\lambda - 1)^{-2}$$

成立.

设 k 为特征 $\neq 2$ 的域, $P_m(x)$ 为无重根的 m 次多项式. 由 $y^2 = P_m(x)$ 定义的平面代数曲线或与它双有理等价的曲线称为**超椭圆曲线** (hyperelliptic curve), 它的函数域称为**超椭圆函数域** (hyperelliptic function field). 它的亏格等于 $(m-1)/2$ 的整数部分. 亏格为 2 的函数域都是超椭圆的, 当亏格 $\geqslant 3$ 时则不然. 超椭圆函数域具有对应于二次扩域 $k(x,y)/k(x)$ 的二阶自同构. 一般地, 设 Γ 为亏格为 g 的代数曲线, G 为 Γ 的自同构群. 若 $g \geqslant 2$, 则 G 为有限群, 若 $g \geqslant 3$, 则对于"一般的" Γ 皆有 $G = \{1\}$. 亏格 $g(\geqslant 2)$ 的曲线的参模簇是 $3g-3$ 维的, 而超椭圆曲线的参模簇是 $2g-1$ 维的 (后面叙述).

【Jacobi 簇】 设 Γ 为非奇异代数曲线, 则具有下面性质 i)—iv) 的群簇† J 称为 Γ 的 **Jacobi 簇** (Jacobi variety) (以下取定一个代数闭域 k 作为 Γ 和 J 的共同定义域†). i) 存在从 $G_0(\Gamma)/G_l(\Gamma)$ 到 J 的(作为群的)同构 Φ. ii) 这个 Φ 在以下意义下是连续的: 设 $\bar{\mathfrak{a}}$ 和 $\bar{\mathfrak{b}}$ 为 G_0/G_l 中的两个元, 如果选取 $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}}$ 的适当代表元 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, 若 $\mathfrak{b}$ 是 $\mathfrak{a}$ 在域 $K(\supset k)$ 上的特定化†, 则 $\Phi(\bar{\mathfrak{b}})$ 也是 $\Phi(\bar{\mathfrak{a}})$ 在 K 上的特定化. iii) 若 $\bar{\mathfrak{a}}$ 的代表元能取为 $K(\supset k)$ 有理除子 (这样的 $\bar{\mathfrak{a}}$ 称为 K 有理除子类), 则 $\Phi(\bar{\mathfrak{a}})$ 为 K 有理点. iv) 设 ξ 为 J 的任意一点, 那么存在 $k(\xi)$ 有理除子类 $\bar{\mathfrak{a}}$ 满足 $\Phi(\bar{\mathfrak{a}}) = \xi$. 满足上面条件的群簇一定是完备的, 因而 J 是 Abel 簇†. 这个 Abel 簇除同构对应外是唯一确定的. A. Weil 首先在特征为任意的域上代数地构造了 Jacobi 簇([7]). (关于用解析方法的构造→代数函数.)

设 P 为 Γ 在 k 上的一般点†, P_0 为一个 k 有理点 (就是说由一点所成的除子 P_0 是 k 有理素除子), 那么由 $\varphi(P) = \Phi(P - P_0)$ 可定义一个从 Γ 到 J 的有理变换 φ. φ 给出 Γ 和 $\varphi(\Gamma)$ 之间的一个同构, 而且它除了 J 上的平移外是唯一确定的, 称为 Γ 的**典范函数** (canonical function). J 的维数等于 Γ 的亏格 g. 当 $P_1, \cdots, P_g$ 为 Γ 在 k 上的独立一般点时, J 在 k 上的函数域和 $k(P_1, \cdots, P_g)_s$ 同构. 这里 $k(P_1, \cdots, P_g)_s$ 是在 $k(P_1, \cdots, P_g)$ 的 $g!$ 个自同构置换 $(P_1, \cdots, P_g) \to (P_{\alpha_1}, \cdots, P_{\alpha_g})$ 下不变的子域. 由上面的定义, Γ 的 Jacobi 簇是 Γ 的 Picard 簇†, 同时也是 Γ 的 Albanese 簇† (→Abel 簇). 因此, 对于从 Γ 到 Abel 簇 A 的任意有理映射 f, 存在唯一的从 J 到 A 的同态 λ, 满足 $f = \lambda \circ \varphi + \text{const}$. 这个 λ 称为 f 的**线性扩张** (linear extension).

设 Θ 为 J 中可写成形状为 $\varphi(P_1) + \cdots + \varphi(P_{g-1})$ 的点的集合, 那么 Θ 是 J 的一个余维数为 1 的不可约子簇, 称为 J 的**典范除子** (canonical divisor). 指定极化† Θ 后, J 称为**典范极化 Jacobi 簇** (canonically polarized Jacobian variety). 设 Γ 和 Γ' 为双有理等价的曲线, 那么它们的典范极化 Jacobi 簇 J 和 J' 互相同构. 反之, 如果典范极化 Jacobi 簇 J 和 J' 同构, 那么 Γ 和 Γ' 双有理等价 (**Torelli 定理**). 设 r 为满足 $1 \leqslant r \leqslant g$ 的整数, W_r 为 J 中可写成形状为 $\varphi(P_1) + \cdots + \varphi(P_r)$ 的点的集合 ($W_1 = \varphi(\Gamma)$, $W_{g-1} = \Theta, W_g = J$), 则在数值等价†的意义下, 有 $\Theta^{(r)} = r! W_{g-r}$, $\deg \Theta^{(g)} = g!$ 成立. 这里 $\Theta^{(r)}$ 表示与 Θ 数值等价的 r 个除子取交所得的闭链的类. 上述除子 Θ 的存在乃是 Jacobi 簇的特征性质, 就是说, 设 A 是 n 维 Abel 簇, X 是它的余维数为 1 的不可约子簇, 满足 $(X^{(n)}) = n!$, 且有 1 维正闭链 C 使得 $X^{(n-1)} = (n-1)!C$, 则 C 是一条非奇异不可约代数曲线, A 是 C 的 Jacobi 簇, X 是对应于 C 的典范除子([10]). 在古典情形, 除子 Θ 就是由一个 Θ 函数定义的 J 的除子.

设Γ为非奇异代数曲线，ω为Γ上的微分，如果$(\omega)>0$，则ω称为**第一种微分** (differential form of the first kind). 设Ω是Γ的各点处正则微分的芽的层，那么第一种微分就是$H^0(\Gamma,\Omega)$的元，反之亦然．设$\mathfrak{k}$为任意一个典范除子，则由于$H^0(\Gamma,\Omega)$和$L(\mathfrak{k})$自然地同构，所以线性无关的第一种微分的个数等于Γ的亏格g. 微分的残数和古典情形一样地定义．具有非0残数的微分称为**第三种微分** (differential form of the third kind). 对于任意微分ω，**残数定理** (theorem of residue) $\sum_P \mathrm{Res}_P\omega=0$ 对于任意特征的域上的代数曲线也都成立．对于Γ的每个点P，如果存在函数f_P，使$\omega-df_P$在P处正则，则这样的微分ω称为**第二种微分** (differential form of the second kind). 第二种微分构成$\boldsymbol{K}$上的线性空间G_2，显然，由第一种微分所构成的线性空间G_1是它的子空间．按照$\boldsymbol{K}$的特征为0或$p(>0)$，商空间G_2/G_1的维数分别为$2g$和g.

特征为p的域上的代数几何中特有的算子是 **Cartier 算子** (Cartier operator). 设L为Γ在完全域k上的函数域，t为L在k上的一个分离元[†]，那么$1,t,\cdots,t^{p-1}$构成L/L^p的p基，并且任意微分ω可以唯一地表成$\omega=(f_0^p+tf_1^p+\cdots+t^{p-1}f_{p-1}^p)dt$，这里$f_i$为$L$中的元．这时记$C\omega=f_{p-1}dt$，$C$就称为 Cartier 算子，它与分离元$t$的选择无关．如果$\omega$为第一种微分，则$C\omega$也为第一种微分，因而对于$G_1$的基$\omega_1,\cdots,\omega_g$，由$C\omega_i=\sum_{j=1}^{g}a_{ij}\omega_j$ $(1\leqslant i\leqslant g)$，就有$L$上的一个矩阵$A=(a_{ij})$与之对应．这个$(g,g)$型矩阵$A$和$\Gamma$的 **Hasse-Witt 矩阵** (Hasse-Witt matrix) 是相同的．由变换$S^{-p}AS$所决定的矩阵A的类是Γ的双有理不变量，它在特征为p的代数函数域的非分歧p次循环扩域的理论中起着重要的作用．

【广义 Jacobi 簇】 把对于非奇异曲线Γ所展开的理论推广到具有奇点的曲线上来，例如，M. Noether 和 F. Severi 等人都做过尝试，然而成功地发展了一般代数理论的则是 M. Rosenlicht (→[4]).

设Γ为任意代数曲线，$P_1,\cdots,P_s$为Γ的奇点，$\mathfrak{O}_{P_i}$为P_i的局部环[†] ($\boldsymbol{K}(\Gamma)$中在P_i处正则的元的全体)，$\mathfrak{O}=\bigcap_{i=1}^{s}\mathfrak{O}_{P_i}$. 由$\Gamma'=\Gamma-\{P_1\cup\cdots\cup P_s\}$的点生成的自由 Abel 群$\bar{G}(\Gamma)$的元称为$\Gamma$的除子．设$\mathfrak{a}$是一个$\Gamma$除子，置$\bar{L}(\mathfrak{a})=\{f\mid f\in\mathfrak{O},(f)+\mathfrak{a}>0\}$，那么$\bar{L}(\mathfrak{a})$为$\boldsymbol{K}$上的有限维线性空间．设其维数为$\bar{l}(\mathfrak{a})$，并设$\overline{\dim}|\mathfrak{a}|=\bar{l}(\mathfrak{a})-1$. 这时，和没有奇点的情形相同，对于所有除子$\mathfrak{a}$，$\deg(\mathfrak{a})-\overline{\dim}|\mathfrak{a}|$的上确界$\pi(\geqslant 0)$称为$\Gamma$的$\mathfrak{O}$**亏格** ($\mathfrak{O}$-genus). 记$\bar{i}(\mathfrak{a})=\pi-\deg(\mathfrak{a})-\overline{\dim}|\mathfrak{a}|$，称它为$\mathfrak{a}$的$\mathfrak{O}$**特殊指数** ($\mathfrak{O}$-speciality index). 另一方面，设C为和Γ双有理等价且为非奇异曲线，并设C的点中对应于Γ的奇点的那些点为$Q_1,\cdots,Q_t$. 如果函数域$\boldsymbol{K}(\Gamma)$的微分ω对于$\mathfrak{O}$的任意元f皆有$\sum_{i=1}^{t}\mathrm{Res}_{Q_i}f\omega=0$，就称它为$\Gamma$的$\mathfrak{O}$**微分** ($\mathfrak{O}$-differential)，于是，$\bar{i}(\mathfrak{a})$就等于在$\Gamma'$中使$(\omega)>\mathfrak{a}$的线性无关的$\mathfrak{O}$微分$\omega$的个数．它们之间有等式$\bar{l}(\mathfrak{a})=\deg\mathfrak{a}-\pi+1+\bar{i}(\mathfrak{a})$成立，称它为**广义 Riemann-Roch 定理**. 特别是，在Γ'中处处正则的$\mathfrak{O}$微分称为第一种$\mathfrak{O}$微分，线性无关的第一种$\mathfrak{O}$微分的个数等于$\mathfrak{O}$亏格π. 再者，设Γ的有效亏格($=C$的亏格)为g，则$\pi-g=\delta$等于$\dim_k(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O})$，这里$\bar{\mathfrak{O}}$表示$\mathfrak{O}$在$\boldsymbol{K}(\Gamma)$中的整闭包．全体$\mathfrak{O}$微分虽然构成一个$\mathfrak{O}$模，但它的秩不一定是1. 所以所谓典范除子一般说是不存在的．设$\mathfrak{c}$为$\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$的前导子[†]，关于由$\mathfrak{c}$定义的$\Gamma$除子的次数$d$，一般有$\delta+1<d\leqslant 2\delta$成立．并且，$d=2\delta$成立当且仅当$\mathfrak{O}$微分构成秩为1的$\mathfrak{O}$模．例如，当$\Gamma$是非奇异曲面上的曲线或$\Gamma$能表成$n$维射影空间内$n-1$个超曲面的交时，就有$d=2\delta$成立．

所谓Γ的两个除子$\mathfrak{a}$和$\mathfrak{b}$ **$\mathfrak{O}$线性等价于0** ($\mathfrak{O}$-linearly equivalent to zero)，是指存在$\mathfrak{O}$的可逆元f，使$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}=(f)$. 对于与0 $\mathfrak{O}$线性等价的Γ除子所构成的$\overline{G(\Gamma)}$子群$\bar{G}_l(\Gamma)$，满足和

对于非奇异曲线同样的条件 i)—iv) 的群簇 $J_{\mathfrak{D}}$，称为 Γ 的**广义 Jacobi 簇** (generalized Jacobi variety)．广义 Jacobi 簇一般不是完备的．设 J 为 C 的 Jacobi 簇，那么 Γ 的广义 Jacobi 簇 $J_{\mathfrak{D}}$ 是由连通线性代数群† $I_{\mathfrak{D}}$ 产生的 J 的扩张．代数曲线 Γ 的函数域的 Abel 扩张，都可用 Γ 的广义 Jacobi 簇的同种†映射导出([4])．这对讨论单变量函数域上的类域论给出了一种重要的方法(→类域论)．没有奇点的曲线理论就是在上面的讨论中令 $\mathfrak{D} = \boldsymbol{K}(\Gamma)$ 的情形．

特别地设 Γ 包含于 n 维射影空间之中，$\mathfrak{p}$ 为 $k[X_0, X_1, \cdots, X_n]$ 中定义 Γ 的理想．用 $\chi(\mathfrak{p}, m)$ 表示 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 的 m 次齐次式中模 $\mathfrak{p}$ 线性无关的个数，那么对于充分大的 m，$\chi(\mathfrak{p}, m)$ 是关于 m 的多项式，称为齐次理想 $\mathfrak{p}$ (或者 Γ) 的 **Hilbert 多项式** (Hilbert polynomial)．若把它的常数项记为 $1 - p_a(\Gamma)$，则 $p_a(\Gamma)$ 称为 Γ 的**算术亏格** (arithmetic genus)．当 Γ 为不可约代数曲线时，$p_a(\Gamma)$ 等于 Γ 的 $\mathfrak{D}$ 亏格．特别是，当 Γ 为平面 d 次代数曲线时，$p_a(\Gamma)$ 等于 $(1/2)(d-1)(d-2)$．

【和层理论的关系】 设 Γ 为不可约代数曲线，$\mathfrak{D}_P$ 为 Γ 的点 P 的局部环，那么 $\mathscr{O}_\Gamma = \bigcup_{P\in\Gamma} \mathfrak{D}_P$ 构成 Γ 上的代数凝聚层†，称为 Γ 的构造层†．这时，Γ 的算术亏格 π 等于 $\dim_K H^1(\Gamma, \mathscr{O})$．再设 $\mathfrak{a}$ 为 Γ 的除子，$\mathscr{O}_\Gamma(\mathfrak{a})$ 为满足下述条件的有理函数 f 的芽的层†：$(f) + \mathfrak{a} > 0$，且对 Γ 的每个奇点 Q，$f \in \mathfrak{D}_Q$，则 $\mathfrak{a}$ 的特殊指数 $\bar{i}(\mathfrak{a})$ 等于 $\dim_K H^1(\Gamma, \mathscr{O}_\Gamma(\mathfrak{a}))$，$\bar{l}(\mathfrak{a})$ 等于 $\dim_K H^0(\Gamma, \mathscr{O}_\Gamma(\mathfrak{a}))$．特别是，当 Γ 没有奇点时，Riemann-Roch 定理可以由 Serre 对偶定理† (→代数簇) $H^1(\Gamma, \mathscr{O}_\Gamma(\mathfrak{a})) = H^0(\Gamma, \mathscr{O}_\Gamma(\mathfrak{k} - \mathfrak{a}))$ ($\mathfrak{k}$ 为典范除子)自然地导出．

【代数对应】 设 Γ 为非奇异代数曲线，则 $\Gamma \times \Gamma$ 的除子称为 Γ 的**代数对应** (algebraic correspondence) (→[6], [7])．Γ 的代数对应中，和形如 $\mathfrak{a} \times \Gamma + \Gamma \times \mathfrak{b}$ 的除子线性等价的除子构成子群 G_0，由 G_0 决定的商群 $G(\Gamma \times \Gamma)/G_0$ 称为 Γ 的**代数对应类群** (group of classes of algebraic correspondences)，记作 $\mathscr{C}(\Gamma)$，这里 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 是 Γ 的除子．如果 $X \in G_0$，则记作 $X \equiv 0$．设 X 为 Γ 的一个代数对应，k 为 Γ 的定义域而 X 在 k 上是有理的，P 为 Γ 在 k 上的一般点，那么 $X(P) = pr_2((P \times \Gamma) \cdot X)$ 是 $k(P)$ 有理除子．现在，设 X_1 和 X_2 是两个代数对应，X_1 和 X_2 的合成 $X_1 \circ X_2$ 定义如下：当右边有意义时，$(X_1 \circ X_2)(P) = X_1(X_2(P))$．合成的确定只与 X_1 和 X_2 的类有关而与 X_1 及 X_2 的选取无关，这样就在 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 中定义了一个乘法．对于这个乘法，$\mathscr{C}(\Gamma)$ 成为一个环，称为 Γ 的**代数对应环** (correspondence ring)．Γ 的代数对应环和 Γ 的 Jacobi 簇 J 的自同态环 $\mathscr{A}$ 在下面给出的对应之下是同构的．在上面的符号中，$X(P)$ 由 $G_l(\Gamma)$ 决定的类仅依赖于由≡所产生的 X 的类，所以令 $\phi(P) = \varphi(X(P))$，就得到从 Γ 到 J 的一个有理对应 ϕ．这个 ϕ 在 J 上的线性扩张 λ 是对应于 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 的元 X 的 J 的自同态．对应 $X \to \lambda$ 就给出 $\mathscr{C}(\Gamma)$ 和 $\mathscr{A}$ 的一个同构．现在，若置 $\mathscr{A}_0 = \mathscr{A} \otimes \boldsymbol{Q}$，则 $\mathscr{A}_0$ 具有称为**对合** (involution) 的二阶自同构 ι．再者，设 l 是不等于特征 p 的任意素数，那么 $\mathscr{A}_0$ 具有一个用 $(2g, 2g)$ 型 l-adic 整数矩阵给出的一一表示．这个表示的迹† σ 具有这样的性质：若 $\beta \neq 0$，则 $\sigma(\beta_0\beta^\iota) > 0$ (Castelnuovo 引理)．由此可知，$\mathscr{A}_0$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 上的有限秩代数，$\mathscr{A}$ 为有限生成的 Abel 群．利用这个事实，Weil 解决了非奇异曲线上同余 ζ 函数的 Riemann 猜想(→ζ 函数)．

【覆盖曲线】 设 Γ 和 C 是两条非奇异曲线，并给了从 Γ 到 C 的有理对应 π．这时，$\boldsymbol{K}(C)$ 可以看作 $\boldsymbol{K}(\Gamma)$ 的子域，特别是，当 $\boldsymbol{K}(\Gamma)$ 是 $\boldsymbol{K}(C)$ 的有限可分扩域时，Γ 就称为 C 的**覆盖曲线** (covering)，$[\boldsymbol{K}(\Gamma):\boldsymbol{K}(C)] = n$ 称为**覆盖次数** (degree of covering)．设 P 为 Γ 的点，令 $\pi(P) = Q$．设 P 和 Q 在 Γ 及 C 上的局部参数分别为 t 和 s，则 $\nu_P(ds/dt)$ 称为 p 的**微分指数** (differential exponent)，记作 m_P．由于 m_P 在 Γ 的有限个点以外皆为 0，所以 $\Sigma m_P P$ 给出 Γ 的除子，称它为**分歧除子** (branch divisor)．分歧除子

为 0 的覆盖，称为**非分歧覆盖**（unramified covering）．设 $g(\Gamma)$ 和 $g(C)$ 分别为 Γ 和 C 的亏格，$\mathfrak{a}$ 为分歧除子，则有公式 $2g(\Gamma)-2=n(2g(C)-2)+\deg\mathfrak{a}$．称为 **Riemann-Hurwitz 公式**．由此可知，有理曲线没有恒等覆盖以外的非分歧覆盖，并且，Γ 能为其自身的非分歧覆盖当且仅当 Γ 为椭圆曲线．

【参模理论】 设 $\mathfrak{S}$ 是亏格为 g 的非奇异不可约代数曲线 Γ 的集合．$\mathfrak{S}$ 中在万有域上互相同构的元认为是等价的，用 H 表示这个等价关系．如果由 H 决定的等价类 $\mathfrak{S}/H$ 具有代数簇结构，那么这个簇 M_g 就称为亏格 g 的**参模簇**（variety of moduli）．由于亏格 0 的代数曲线互相同构，所以 M_0 就退化为一个点．当 $g=1$ 时，设 $y^2=4x^3-g_2x-g_3$ 为椭圆曲线 Γ 的 Weierstrass 标准形式，那么由双有理不变量 j 所决定的 Γ 的等价类是唯一确定的，而 M_1 的函数域就是在素域 k_0 上添加 j 所得到的域 $k_0(j)$．当万有域是复数域及 $g\geqslant 2$ 时，O. Teichmüller 构造了 $M_g\to$ 代数函数．这里只叙述一下 W. L. Baily 的结果（[9]）．现在，设 H_n 为 (n,n) 型复对称矩阵 $Z=X+iY$（X,Y 为实矩阵）所成的集合，其中 $Y>0$（正定的†矩阵）．再设 Γ_n 为 $2n$ 阶的整系数酉辛群 $S_p(n,\boldsymbol{Z})\cap S_p(n)$．那么 Γ_n 的元 $\gamma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 基于 $\gamma Z=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ 不连续地作用在 H_n 上．设其商空间为 V_n，则 V_n 的点和 n 维正规极化 Abel 簇的等价类一一对应．用 E 表示对应于典范极化 Jacobi 簇的点所成的子集．存在 V_n 的紧化 V_n^*，使得 V_n^* 具有正规射影代数簇的结构（佐武一郎），E 在 V_n^* 中的闭包 I 是 V_n^* 的 $3n-3$ 维（$n>1$）子代数簇，并且 E 是 I 的关于 Zariski 拓扑†的开子集．由于典范极化 Jacobi 簇的同构类和非奇异代数曲线的同构类一一对应，所以上面的 E 就是亏格 n 的曲线的参模簇．

再者，D. Mumford 把参模理论作为某种函子的可表示性问题来处理，证明了它的存在性．此外，松阪輝久证明了这样的论断：由非奇异的亏格为 g 的代数曲线的变形†所得到的所有曲线所成的集合，构成泛代数族，由它的同构类所成的商空间成为 Q 簇，而参模簇是作为 Q 簇来构成的．

【参】 [1] 岩沢健吉，代数函数論，岩波，1952；[2] F. Severi, Vorlesungen über algebraische Geometrie, Teubner, 1921; [3] H. F. Baker, Principles of geometry, Vol. 5, Analytical principles of the theory of curves, Cambridge Univ. Press, 1933; [4] J.-P. Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1959; [5] M. Noether, Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven, Berlin, 1883（也参考 J. Reine Angew. Math., **93** (1882), 271—318）; [6] A. Weil, Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1948; [7] A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1948; [8] A. Weil, Zum Beweis des Torellischen Satzes, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen (1957), 33—53; [9] W. L. Baily, On the moduli of Jacobian varieties, Ann. of Math., **71** (1960), 303—314; [10] T. Matsusaka（松阪輝久）, On a characterization of a Jacobian variety, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto, **82** (1959), 1—19; [11] T. Matsusaka（松阪輝久）, Theory of Q-varieties, Publ. Math. Soc. Japan, 1964; [12] D. Mumford, Geometric invariant theory, Erg. d. Math., Springer, 1965; [13] R. J. Walker, Algebraic curves, Princeton, 1949（中译本：R. J. 瓦克，代数曲线，科学出版社，1958）; [14] W. Fulton, Algebraic curves, Benjamin, 1969; [15] A. Seidenberg, Elements of the theory of algebraic curves, Addison-Wesley, 1968.

代数曲面

代数曲面 [英 algebraic surface 法 surface algébrique 德 algebraische Fläche 俄 алгебраическая поверхность 日 代数曲面] 二维代数簇称为**代数曲面**．

【历史】 代数曲面的历史开始于两个变量代数函数论的研究．由于可以把单变量代数函数理论作为 Riemann 面上的有理函数理论来处理，从而发展成了完美的理论体系；同样，为了研究由三个复变量的不可约多项式 $P(x,y,z)=0$ 所定义的两个变量代数函数的实质，而把它作为代数曲面上的有理函数来处理，就是必要的了．H. Poincaré, E. Picard 等人很早就着眼于这一点，他们研究了代数曲面的拓扑结构，并以此为武器展开了代数曲面上的 Abel 积分（也称为 Picard 积分）理论．这一传统后来由 S. Lefschetz 进一步做了光辉的发展．另一方面，M. Noether 和意大利学派的几何学家 F. Enriques, G. Castelnuovo 和 F. Severi 等人则把主要力量

放在作为簇的代数曲面的研究上。特别是意大利学派的人们早就注意到代数曲面的非正则数所具有的重要性，并深入研究了它的几何性质，他们在二十世纪前半期，大体上完成了把代数曲面的理论统一成为一个巨大的理论体系的工作。虽然在他们所得到的深刻结果中还有一些未被严格证明，但是后来由于奠定了代数几何的基础和导入了现代的方法，代数曲面的理论也就完整而严密了。在这个现代化过程中，最有贡献的是 O. Zariski 和小平邦彦。

寻求与给定的代数曲面双有理等价的非奇异代数曲面的问题，是这个领域中最基本的问题之一。这个问题，在复数域上，有意大利学派的证明和 R. J. Walker (Ann. of Math., **36** (1935)) 的函数论的证明，而 Zariski (Ann. of Math., **40** (1936)) 则在特征为 0 的域上给出了基于赋值†论的纯代数的证明，进而，S. Abhyankar (1956) 完成了关于特征为 p 的情形的证明。今后，除非特别说明，总假定代数曲面是置于射影空间中的，而且没有奇点。再者，记万有域为 $\boldsymbol{K}$，F 的函数域为 $\boldsymbol{K}(F)$。

【除子和线性系】 设 $f_0, f_1, \cdots, f_n$ 为代数曲面 F 的线性系† Σ 的定义模†关于 $\boldsymbol{K}$ 的基；对于 F 的点 P，使 n 维射影空间内的一般点 $Q = (f_0(P), f_1(P), \cdots, f_n(P))$ 与之对应的映射 $\varphi(\Sigma)$，是从 F 到射影代数簇 $F' = \phi(\Sigma)(F)$ 的有理映射†。设 H 是 F' 的超平面截面，则 Σ 的变化分量†可表成 $\phi(\Sigma)^{-1}(H)$。如果 F' 的维数为 2，那么 Σ 的变化分量的一般元(称它为 Σ 的一般元)是不可约的。当 F' 的维数为 1 时，虽然 Σ 的一般元不一定是不可约的，但是这时它能够表成属于一个一维不可约代数族†的除子之和。这就是 **Bertini 定理**。

当 Σ 的维数 $\geqslant 1$ 时，Σ 的两个一般元 C 和 C' 的交叉积 $C \cdot C'$ 中**可变点** (variable point) 的次数称为 Σ 的**有效次数** (effective degree)。当 C 和 C' 为 F 的两个除子时，所谓 **Kronecker 指数** (Kronecker index) $I(C \cdot C')$ 是由分别与 C 和 C' 线性等价且没有公共分支的除子 D 和 D' 的交叉积 $D \cdot D'$ 的次数† $\deg(D \cdot D')$ 来定义的。特别是，记 $I(C \cdot C)$ 为 (C^2)，称它为 C 的**假次数** (virtual degree)。如果 D 为非退化除子†，那么 $(D^2) > 0$，而且，对于 F 上的任意代数曲线 E 有 $I(D \cdot E) > 0$，且其逆也成立([6])。设 Σ 为 $r(\geqslant 1)$ 维不可约线性系，C 为其一般元。这时，Σ 中异于 C 的元 C' 和 C 的交叉积的集合构成 C 上的线性系，其维数为 $r-1$。称它为 Σ 在 C 上的**迹**(trace)，记作 $Tr_C\Sigma$。一般地说，即使 Σ 是完备的，$Tr_C\Sigma$ 也不一定是完备的。$\dim|Tr_C\Sigma| - \dim Tr_C\Sigma$ 称为 Σ 的**亏数** (deficiency)，用 $\delta(\Sigma)$ 表示。$|D|$ 的亏数特别地用 $\delta(D)$ 表示。

当 x 为 F 的点时，用 $\mathfrak{O}_x$ 表示 x 的局部环，于是 $\mathscr{O}_F = \bigcup_{x \in F} \mathfrak{O}_x$ 构成 F 上的代数凝聚层†，称为 F 的构造层†。设 D 为 F 的任意除子，用 $\mathscr{O}_F(D)$ 表示满足 $(f) > -D$ 的函数的芽的层，$H^0(F, \mathscr{O}_F(D))$ 就是完备线性系 $|D|$ 的一个定义模。D 是正除子的充分必要条件是，$\mathscr{O}_F(-D)$ 构成 $\mathscr{O}_F$ 的理想层。它的商 $\mathscr{O}_F/\mathscr{O}_F(-D)$ 记为 $\mathscr{O}_D$，当 D 为素除子†时，$\mathscr{O}_D$ 和作为代数曲线的 D 的构造层是一致的(→ 代数曲线)。一般地，当 $\mathscr{F}$ 为 F 上的层时，定义 $\chi(F, \mathscr{F}) = \sum_{q=0}^{2}(-1)^q \dim_k H^q(F, \mathscr{F})$。特别是，把 $\chi(F, \mathscr{O}_F)$ 记作 $\chi(F)$，称 $\chi(F) - 1 = p_a(F)$ 为**曲面 $\boldsymbol{F}$ 的算术亏格** (arithmetic genus of a surface)。($\chi(F)$ 有时也称为 F 的算术亏格。)再者，记 $\chi_F(D) = \chi(F) - \chi(F, \mathscr{O}_F(-D))$，称 $1 - \chi_F(D) = p_a(D)$ 为**除子 $\boldsymbol{D}$ 的算术亏格** (arithmetic genus of a divisor)。如果 D 为素除子，那么 $p_a(D)$ 和代数曲线 D 的算术亏格相等(→ 代数曲线)。我们有 $\chi(D_1 + D_2) + I(D_1 \cdot D_2) = \chi(D_1) + \chi(D_2)$ 成立。特别是，$p_a(-D) = (D^2) + 2 - p_a(D)$。

【Riemann-Roch 定理】 因为代数曲面 F 上的二次外微分形式构成 $\boldsymbol{K}(F)$ 上的一维线性空间，所以所有二次外微分形式所决定的除子相互线性等价。这个等价类称为**典范除子类** (canonical divisor class)，属于这个类的除子称为典

范除子 (canonical divisor), 以后用K表示. 设D为F的除子. 用$\Omega^2(D)$表示满足$(\omega) > -D$的二次外微分形式ω的芽的层(置$\Omega^2(0) = \Omega^2$, $\Omega^0 = \mathcal{O}_F$), 那么根据 Serre 对偶定理†, $H^p(F, \Omega_F^q(D))$和$H^{2-p}(F, \Omega_F^{2-q}(-D))$互相对偶同构. 并且,由于$\Omega^2(-D)$和$\mathcal{O}_F(K-D)$同构, 就得到同构对应 $H^p(F, \mathcal{O}_F(D)) \cong H^{2-p}(F, \mathcal{O}_F(K-D))$. 如果使用这些同构把$\chi_F(-D) = \chi(F) - \chi(F, \mathcal{O}_F(D))$重新写一下, 就得到等式 $l(D) + l(K-D) = p_a(F) + p_a(-D) + h^1(D)$. 这里 $h^1(D) = \dim_k H^1(F, \mathcal{O}_F(D))$称为$D$的**过剩数**(superabundance), $l(K-D) = i(D)$称为D的**特殊指数** (speciality index), $h^1(D) - i(D)$称为D的**非正则数** (irregularity). 它们之间的不等式 $\dim|D| \geq (D^2) - p_a(D) + p_a(F) + 1 - i(D)$称为 **Riemann-Roch 定理**. $|K+D|$称为D的**伴随线性系** (adjoint linear system), 当D为素除子时, $Tr_D|K+D|$就成为D的典范除子,从而$p_a(D) - 1 = I(D \cdot (K+D))/2$. 由于最后这个关系式对于任意除子$D$都成立, 所以 Riemann-Roch 不等式也可写成 $\dim|C| \geq p_a(F) + l(D \cdot (D-K))/2 - i(D)$.

再者, 对$h^1(D)$作了进一步详细研究的小平的结果和把$\chi_F(F, \mathcal{O}_F(D))$作为$D$的上同调类†及$F$的陈类†的多项式来表示的 F. Hirzebruch 的结果, 都称为 Riemann-Roch 定理(→Riemann-Roch 型定理). M. Noether 的公式 $12(p_a + 1) = (K^2) + c_2$ (这里 c_2 = 第二陈类 = Euler 示性数) 是 Hirzebruch 结果的最简单情形.

【代数曲面的不变量】 除去已经定义的F的算术亏格外,还可以对F定义各种不变量.

置$h^{q,p} = \dim_k H^p(F, \Omega_F^q)$. $h^{2,0}$等于线性无关的二次全纯微分的个数, 称为F的**几何亏格** (geometric genus) 或者**曲面亏格**(德 Flächengeschlecht), 通常用p_g表示. 又因为$h^{0,1}$给出F上的不可约线性系Σ的亏数$\delta(\Sigma)$的最大值, 所以称它为F的**最大亏数** (maximal deficiency). 特别是, 对于使$h^1(C) = 0$的素除子C, 有$\delta(C) = h^{0,1}$成立. 在历史上, $h^{0,1}$曾被称作F的**非正则数**. 这起因于在F的算术亏格$p_a(F) = p_g - h^{0,1}$中, 把p_g看作主要项, 而把$h^{0,1}$看作它的补正项. 然而对高维代数簇进行研究的结果表明,把$h^{0,1}$看作补正项是不自然的, 所以现在是把F的 Picard 簇的维数q称为F的非正则数†(→代数簇). 在复流形的情形,一般地有$h^{p,q} = h^{q,p}$ (Serre 对偶定理), 特别地, 因为$q = h^{0,1} = h^{1,0}$, 所以它等于F上线性无关的一阶 Abel 积分的个数,并且也等于F的一维 Betti 数的一半. 然而对于特征p的代数簇来说, 这些数却未必相等. 例如, J.-P. Serre 给出了$h^{0,1} \neq h^{1,0}$的例子, 井草準一给出了$q < h^{0,1} = h^{1,0}$的例子. 当K为典范除子时,置$l(iK) = P_i$, 称为F的 ***i* 亏格** (i-genus) (特别地 $P_1 = p_g$). $P_i (i = 2, 3, \cdots)$ 总称为**多亏格**(拉 plurigenera). 若$P_n = 0$, 则对于n的因子d有$P_d = 0$.

上面引入的数 $p_a(F) = h^{0,2} - h^{0,1}$, $p_g(F) = h^{0,2}, h^{2,0}, h^{1,0}, h^{0,1}, P_i (i = 2, 3, \cdots) (P_1 = p_g)$等等,对于和$F$双有理等价的非奇异曲面$F'$来说也取同一数值,这就是说,这些数是$F$的绝对不变量†. 然而$h^{1,1}$不是绝对不变量. 特别是, 对于$p_g = 0$的曲面的研究, i亏格P_i起着重要的作用. 例如(任意特征的情形), **有理曲面** (rational surface) 即$K(F)$为两变量有理函数域的曲面,有$q = 0$, $P_n = 0$ $(n > 0)$, 反之,满足$q = P_2 = 0$的任一非奇异曲面是有理曲面 (Castelnuovo, 小平, Zariski). 再者,对于**直纹曲面** (ruled surface) 即$K(F)$为单变量代数函数域的纯超越扩张的曲面,有$P_n = 0 (n > 0)$, 而直纹曲面可用 $P_{12} = 0$ (从而 $p_g = P_2 = P_4 = P_6 = 0$) 来刻划 (Enriques-小平-Mumford). 作为上面有理曲面的刻划的推论, Zariski 严格地证明了 Castelnuovo 的定理: 设L为代数闭域k上两变量有理函数域$k(x, y)$的子域且包含k, 如果$k(x, y)$在L上为可分代数的,那么L是k上的两变量有理函数域.

作为另一类不变量, 有**线性亏格** (linear genus) $p^{(1)}$. 当和F双有理等价的极小模型(后面给出) F_0存在时,它表示F_0的典范除子K的

算术亏格：$p^{(1)}=(K^2)+1$.

【代数族的特征线性系】 曾经成为意大利学派关于代数曲面研究的中心课题之一的是，证明非正则数 q 和最大亏数 $h^{0,1}$ 相等. 为此，Severi 引进了代数族的特征线性系这个概念. 设 Σ 为 F 上的正除子的不可约代数族，其维数为 r，并设它的一般元 C 没有奇点. 当 Σ 的其它元 C' 沿着 Σ 的一维子族 Σ_1 无限接近于 C 时，交叉积 $C\cdot C'$ 就接近于 C 上次数 $n=(C^2)$ 的除子. 这样得到的除子的集合，称为 Σ 在 C 上的**特征集** (characteristic set). 特征集构成 $r-1$ 维的线性系，且包含 $Tr_C|C|$ 为其子系. 称它为 Σ 的**特征线性系** (characteristic linear system). 关于代数族 Σ 的维数，总有不等式 $r\leqslant\dim|C|+q$ 成立，特别是，已经知道，满足 $h^1(C)=0$ 而且包含有 ∞^q 不同线性系的代数族是存在的. 对于这样的代数族，上面式子中的等号成立，因而总有 $q\leqslant h^{0,1}$ 成立；进一步，如果特征线性系是完备的，则 $q=h^{0,1}$ 成立. Severi 所给出的关于特征线性系的完备性的证明，除了特殊情形 (例如 $p_g=0$ 时) 以外是不正确的，后来对于复代数簇给出了完全的证明 (小平- D. C. Spencer [4]). 在特征为 $p(>0)$ 时，一般说特征线性系不是完备的 (井草的例子)，而在 $p_g=0$ 时则是完备的 (中井喜和). 近来 D. Mumford 应用 Picard 概型 (Picard scheme) 理论，证明了特征线性系是完备的充分必要条件是 F 的 Picard 概型是约化的.

【代数曲面的双有理变换】 设 $F, F', \cdots$ 等等表示互相双有理等价且非奇异的完备代数曲面. 设 $T:F\to F'$ 为双有理变换. 如果 T 在 F 上处处正则，则称 F **支配** (dominate) F'，用 $F\geqslant F'$ 表示. 再者，如果 T 不是双正则的，则记作 $F>F'$，而称 T^{-1} 为**反正则变换** (anti-regular transformation). 如果 $F>F'$，那么 $h^{1,1}(F)>h^{1,1}(F')$ 成立. 当使 $F>F'$ 的 F' 不存在时，称 F 为**相对极小模型** (relatively minimal model)；如果对于和 F 双有理等价的所有 F' 都有 $F'\geqslant F$ 成立，则称 F 为**极小模型** (minimal model). 对于任意代数曲面 F，和 F 双有理等价的相对极小模型总是存在的，但极小模型却不一定存在. 极小模型存在的充分必要条件是，F 不是直纹曲面 (Castelnuovo-Enriques-Zariski 定理).

设 F 为代数曲面，P 为 F 的点，由通过 P 的所有二次超曲面与 F 相交所成的线性系定义的双有理变换 Φ，称为以 P 为中心的**局部二次变换** (locally quadratic transformation). 这是一个反正则变换，P 是唯一的基本点. 设 E 为点 P 的全变换†，则有 $(E^2)=-1$, $p_a(E)=0$. 曲面的反正则变换可以写成有限个局部二次变换的乘积 ([8], [10]).

对于双有理变换 $T:F\to F'$，设 P' 为 F' 的单点，则点 P' 的由 T^{-1} 所决定的全变换 E 称为 F 的**例外曲线** (exceptional curve). 特别是，当 T 在 E 的所有点处都正则时，则称为第一种例外曲线；当不论怎样的 T 也不能在 E 的所有点处正则时，就称为第二种例外曲线. F 为相对极小模型的充分必要条件是它不具有第一种例外曲线；而 F 为极小模型的充分必要条件是它不具有例外曲线.

【代数曲面的例子】 对于三维射影空间 P^3 中的 (非奇异) m 次曲面来说，有 $p_a=p_g=(m-1)(m-2)(m-3)/6$. 二次曲面、三次曲面都是有理曲面，而二次曲面和两条射影直线的直积 $P^1\times P^1$ 双正则同构. 在三次曲面上有 27 条射影直线，它们是第一种例外曲线. 在射影平面 P^2 上取一般位置的六个点，考虑过这六个点的平面三次曲线的全体所构成的三维线性系，就得到 P^3 内的一个三次曲面. 这时，六点的全变换、连结六点中的两点所得十五条直线的固有变换†和通过六点中的五个点所得六条二次曲线的固有变换就组成三次曲面上的二十七条直线. P^3 内的四次以上的曲面，由于 $p_g>0$，所以既不是有理曲面，也不是直纹曲面，而为极小模型. 对于四次曲面来说，由于典范除子为 0，所以全体多亏格 $P_1(=p_g)$, P_2, P_3, $\cdots$ 都等于 1，且具有各种明显的性质. 例如，某类四次曲面以离散无限群为其自同构群、和四次曲面同胚的紧复流形称为 ***K*3 曲面** ($K3$

surface)．它可以用一维 Betti 数 $b_1=0$ 且第一陈类' $c_1=0$ 这一性质来刻划．因此，代数曲面为 $K3$ 曲面可以用 $q=0, p_g=P_2=p^{(1)}=1$ 来刻划．全体 $K3$ 曲面构成二十维的族，其中代数曲面划分成可数个十九维的族．

以上是对于非奇异曲面来说的，而 P^3 中的四次曲面最多能有十六个二重点．具有十六个二重点的四次曲面称为 **Kummer 曲面** (Kummer surface)．它可由二维 Abel 簇对于 $u\to -u$ 这样的二阶自同构（作为曲面的）的商簇而得到．对于 Kummer 曲面，有 $q=0, p_g=1$．与 Kummer 曲面双有理等价的极小非奇曲面是 $K3$ 曲面．

作为代数曲面论的其它题材，还有关于用双有理等价来分类的问题，有理曲面和直纹曲面的相对极小模型的分类问题，零维闭链的等价类理论以及参模理论等等的研究．

【参】［1］H. F. Baker, Principles of geometry, vol. 6, Introduction to the theory of algebraic surfaces and higher loci, Cambridge Univ. Press, 1933;［2］M. Baldassarri, Algebraic varieties, Erg. d. Math., Springer, 1956;［3］F. Enriques, Le superficie algebriche, Zanichelli, Bologna, 1949;［4］K. Kodaira（小平邦彦）-D. C. Spencer, A theorem of completeness of characteristic systems of complete continuous systems, Amer. J. Math., 81 (1959), 477—500;［5］D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Lecture note, Harvard Univ., 1964; Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1966;［6］Y. Nakai（中井喜和）, Non-degenerate divisors on an algebraic surface, J. Sci. Hiroshima Univ., 24 (1960), 1—6;［7］O. Zariski, Algebraic surfaces, Erg. d. Math., Springer, 1935; 第二版, 1971;［8］O. Zariski, Introduction to the problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces, Publ. Math. Soc. Japan, 1958;［9］E. Pascal, Repetorium der höheren Mathematik, 第二版, II_2, Teubner, 1922; [10] И. Р. Шафаревич, Алгебраические поверхности, Труды Мат. ин-та Стеклова, 75 (1965); [11] K. Kodaira（小平邦彦）, On compact complex analytic surfaces I, II, III, Ann. of Math., 71 (1960), 111—152, 77 (1963), 563—626, 78 (1963), 1—40; [12] M. Nagata（永田雅宜）, On rational surfaces I, II, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto 32 (1960), 351—370, 33 (1961), 271—293; [13] J. G. Semple-L. Roth, Introduction to algebraic geometry, Clarendon Press, 1949; [14] E. Picard-G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes, I, II, Gauthier-Villars, 1897, 1906; [15] H. W. E. Jung, Algebraische Flächen, Helwing, 1925.

代数簇　［英 algebraic variety　法 variété algébrique　德 algebraische Mannigfaltigkeit　俄 алгебраическое многообразие　日 代数多様体］

【仿射代数簇，射影代数簇】　取定一个域 k．k 上 n 维仿射空间 k^n 中的子集，如果它能作为一组（有限个或无限个）系数属于 k 的 n 元多项式 $F_i(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的公共零点的集合，则称它为一个**仿射代数簇** (affine algebraic variety)．同样，k 上 n 维射影空间 $P^n(k)$ 的子集，如果它能作为若干个系数属于 k 的齐次多项式 $G_i(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$ 的公共零点的集合，则称它为一个**射影代数簇** (projective algebraic variety)．按常理来说，说到代数簇就是指这二者之一而言，不过它们只是今天的代数簇的原形．以下把它简称为簇．

设 V 是仿射簇，$k[X]=k[X_1,\cdots,X_n]$ 中在 V 的每个点上皆为 0 的多项式的全体构成 $k[X]$ 的一个理想 $I(V)$．用 A_V 表示剩余类环 $k[X]/I(V)$，称为 V 的**坐标环** (coordinate ring) 或**仿射环** (affine ring)．A_V 可以看作是 V 上的能表成坐标的多项式的 k 值函数所作成的环．同样，当 V 是射影簇时，用 $I(V)$ 表示 $k[Y]=k[Y_0,\cdots,Y_n]$ 中在 V 的每个点上皆为 0 的齐次多项式的全体所生成的齐次理想，$A_V=k[Y]/I(V)$ 称为 V 的**齐次坐标环** (homogeneous coordinate ring)．

如果簇 V 能表成两个真子簇的并，则称 V 是**可约的** (reducible) 否则称为**不可约的** (irreducible)．V 的极大不可约子簇称为 V 的**不可约分支** (irreducible component)．任意一个簇都可以唯一地表示成有限个不可约分支的并．V 是不可约的等价于 $I(V)$ 是素理想'．当 V 不可约时，在 V 为仿射簇的情形，整环 A_V 的商域称为 V 的**函数域** (function field)；在 V 为射影簇的情形，则 A_V 的商域中的零次齐次元所构成的子域称为 V 的函数域；两种情形下的函数域都用 $k(V)$ 表示．$k(V)$ 的元称为 V 上的有理函数或者简单地称为函数．$k(V)$ 是 k 上的有限生成域．$k(V)$ 在 k 上的超越次数称为 V 的**维数** (dimension)．如果 V 可约，则 V 的不可约分支的维数的最大值称为 V 的维数．当在不可约簇 V 中考虑时，其子簇 W 的**余维数** (codimension)

定义为 $\dim V - \dim W$. 仿射空间或射影空间内纯余维数为一的簇 V 能够由一个方程来定义,这时 V 称为**超曲面** (hypersurface). 当 $P^n(k)$ 中的 r 维不可约簇 V 的理想 $I(V)$ 能由 $n-r$ 个齐次多项式生成时,称 V 为一个**完全交叉簇** (complete intersection). 完全交叉簇在许多方面具有较简单的性质,然而重要的非完全交叉簇也很多,例如二维以上的 Abel 簇[†]都不是完全交叉簇.

簇 V 的任意个子簇的交或者有限个子簇的并还是子簇. 于是把子簇作为闭集就在 V 中引入了一个拓扑,这个拓扑称为 V 的 **Zariski 拓扑** (Zariski topology). 当 k 为复数域时, V 也可认为是解析空间[†],比起后一种意义下的拓扑(称为"普通拓扑")来说, Zariski 拓扑要弱得多. 以下除非特别说明,簇的拓扑均认为是 Zariski 拓扑. 关于不可约簇 V 的点(或者以 V 的元作为参数的某个集合 M 的元)的某个性质,如果在 V 的一个关于 Zariski 拓扑的非空开集上成立,则称该性质对于 V 的几乎所有的点(M 的几乎所有的元)成立.

设 U 和 V 分别为包含于 k^n 和 k^m 中的仿射簇,则积集 $U\times V$ 是包含于 k^{n+m} 中的仿射簇,称它为 U 和 V 的**积代数簇** (product algebraic variety) 或**直积** (direct product). 这里必须注意,积代数簇的 Zariski 拓扑比 U 和 V 的拓扑的直积要强. 若 k 为代数闭域,则当 U 和 V 不可约时, $U\times V$ 也是不可约的.

当 k 为代数闭域时,对于 $k[X]$ 的任意素理想 $\mathfrak{P}$, 设 $\mathfrak{P}$ 的零点集为 V, 则有 $\mathfrak{P}=I(V)$ 成立 (Hilbert 零点定理[†], → 多项式环). 从而 $k[X]$ 中的素理想和 k^n 中的不可约簇一一对应. 特别是, $k[X]$ 的极大理想和 k^n 的点对应. 同样, $k[Y]$ 中不同于 $\sum_{i=0}^{n} Y_i k[Y]$ 的齐次素理想和 $P^n(k)$ 中的不可约簇一一对应.

既然涉及到高次代数方程,如果不假定域 k 为代数闭域,就不能期望有简单的理论. 因此在一般情形下,取包含 k 的一个代数闭域 K, 而把 k^n 中的簇看成由同样的方程在 K^n 中所定义的簇的一部分是方便而基本的方法. 今后假定 k 为代数闭域. 当簇 V 所决定的 $k[X]$ 或者 $k[Y]$ 的理想 $I(V)$ 能够由系数在 k 的子域 k' 中的多项式生成时,则称 V 可**定义在 k' 上** (defined over k'),或称 k' 是 V 的一个**定义域** (field of definition). 任意一个簇都有最小的定义域,它是素域上的有限生成域. A. Weil 的观点是,把 k 取作一个固定的在素域上有无限超越次数的代数闭域. 这时称 k 为**万有域** (universal domain). V 中坐标皆属于 $k'(\subset k)$ 的点称为 V 的 **k' 有理点** (k'-rational point).

【一般点和特定化】 设域 K_1 和 K_2 都包含同一个域 L, 再设 $(x)\in K_1^n$, $(y)\in K_2^n$. 我们说点 (y) 是点 (x) 在 L 上的**特定化** (specialization), 如果满足 $f(x)=0$ 的所有 $f(X)\in L[X_1,\cdots,X_n]$ 都满足 $f(y)=0$, 我们用符号 $(x)\xrightarrow[L]{}(y)$ 来表示 (y) 是 (x) 在 L 上的特定化. 换句话说,这就是存在从整环 $L[x_1,\cdots,x_n]$ 到 $L[y_1,\cdots,y_n]$ 的同态,它使 L 的元皆不动而将 x_i 映为 y_i. 设 k 为万有域, V 为 k^n 中的不可约簇, $k'(\subset k)$ 为 V 的定义域且在素域上具有有限超越次数,那么在 V 上存在(一般不是唯一的)点 (x), 使得 V 中所有的点都是 (x) 在 k' 上的特定化. 这样的点称为 V 在 k' 上的**一般点** (generic point). 环 $k'[x]$ 和 $k'[X]/I(V)\cap k'[X]$ 在 k' 上是同构的. (有些作者用 generic point 来指前面所定义的"几乎所有的点".)

【局部环】 对于仿射簇 V 及其不可约子簇 W, A_V 中在 W 上恒等于零的元所成的集合 $\mathfrak{P}_W$ 是 A_V 的素理想. A_V 关于 $\mathfrak{P}_W$ 的商环[†]用 $\mathfrak{O}_{V,W}$ 或 $\mathfrak{O}_W$ 表示,称为 W 在 V 上的**局部环** (local ring) 或 V 在 W 处的局部环. 为了简单起见,设 V 是不可约的. 于是, $\mathfrak{O}_W$ 就是 V 的函数域 $k(V)$ 的子环 $\{f/g \mid f,g\in A_V, g\notin\mathfrak{P}_W\}$, 并且, $\mathfrak{O}_W$ 模极大理想 $\mathfrak{P}_W\mathfrak{O}_W$ 所得的剩余类域可和 $k(W)$ 等同起来. 当 V 上的函数 $\varphi(\in k(V))$ 属于 $\mathfrak{O}_W$ 时,就说 φ 在子簇 W 上是**正则的** (regular). 对于给定的 φ, V 中使 φ 为正则的那些点的集合是关于 Zariski 拓扑的开集. 在射影簇的情形,由 A_V 关于 $\mathfrak{P}_W$ 的商环中的零次齐次元所成的子环定

义为 $\mathfrak{O}_W$.

对于簇V的开集U，在U的每个点处皆正则的U上的k值函数，称为U上的**正则函数**(regular function)，由它们所构成的环用A_U表示. 由于对于U能有A_U与之对应，所以就得到V上的一个环层$\mathcal{O}_V$，它在点x的茎$(\mathcal{O}_V)_x$就是局部环$\mathfrak{O}_{V,x}$. $\mathcal{O}_V$称为V的**正则函数的芽的层**(sheaf of germs of regular function)或V的**构造层**(structure sheaf)(→层).

【代数簇的定义】 考虑由拓扑空间V和从V到k的函数的芽的层的子层$\mathcal{O}$所组成的偶$(V,\mathcal{O})$. 当V能用有限个开集(U_i)覆盖,并且每个$(U_i,\mathcal{O}|U_i)$与一个仿射簇V_i同构(就是说存在从U_i到V_i的同胚,它将$\mathcal{O}|U_i$变换为V_i的构造层)时,$(V,\mathcal{O})$就称为域k上的**前代数簇**(prealgebraic variety)，而$\mathcal{O}$就称为它的**构造层**. 通常将$(V,\mathcal{O})$简单地用V表示.

前代数簇之间的**正则映射**(regular mapping)，指的是连续映射$g:V\to V'$,使得对于任意的$x\in V$和$\varphi\in\mathcal{O}_{V,g(x)}$，皆有$\varphi\circ g\in\mathcal{O}_{V,x}$成立. 若$g$为同胚而且$g^{-1}$也为正则，则称$g$为**双正则映射**(biregular mapping). 前代数簇X和Y的直积集$X\times Y$局部地是仿射簇的直积，因而具有前代数簇的结构. 当对角映射$X\to X\times X$的象在$X\times X$的(作为积簇的)拓扑中是闭集时(分离条件)，称X为**代数簇**(J.-P. Serre 的定义). 这个分离条件对应于Hausdoff分离公理†. 设W是代数簇V的一个局部闭集,即一个开集和一个闭集的交,则对于$P\in W$,把$\mathcal{O}_{V,P}$的函数在W上诱导出的函数的芽作为在P处的正则函数的芽,W也构成一个代数簇. k^n和$P^n(k)$的局部闭子簇分别称为**拟仿射代数簇**(quasi-affine algebraic variety)和**拟射影代数簇**(quasi-projective algebraic variety). 开始时叙述过的不可约性、局部环等概念可照样推广到一般代数簇上. 今后省略'代数'二字而把它简单地称为簇.

Weil把万有域k上的不可约仿射簇简单地叫做簇,而把有限个簇(或簇的开集)利用双正则映射拚在一起来定义跟 Serre 意义下的不可约代数簇等价的概念,称为**抽象代数簇**(abstract algebraic variety)([1]).

【概型】 设A为具有单位元1的交换环，A的素理想($\neq(1)$)的集合记作 **Spec(A)**,称为A的**谱**(spectrum). 对于A的任意子集$\mathfrak{a}$，用$V(\mathfrak{a})$表示包含$\mathfrak{a}$的素理想所成的集合. 我们在 Spec(A) 上定义一个拓扑,它的闭集就是$V(\mathfrak{a})$,这个拓扑也称为 Spec(A)的 **Zariski 拓扑**(Zariski topology). 对于A的元f,开集$D(f)=\mathrm{Spec}(A)-V(f)$称为基本开集. 基本开集构成 Spec($A$) 上的 Zariski 拓扑的一个基. 闭点的集合无非就是A的极大理想的集合. 对于 Spec(A) 的每个点$\mathfrak{P}$赋以商环$A_{\mathfrak{P}}$，就得到 Spec(A) 上的一个环层$\tilde{A}$. 我们有等式$\Gamma(D(f),\tilde{A})=A_f$，这里$A_f$是由乘闭系$\{f^n|n\geqslant 0\}$所得的商环†.特别是,我们有$\Gamma(\mathrm{Spec}(A),\tilde{A})=A$，把 Spec($A$) 看作以$\tilde{A}$为构造层的局部环式空间†，Spec($A$) 就称为一个**仿射概型**(affine scheme).

如果一个局部环式空间X局部地同构于一个仿射概型,就称它为一个**概型**(scheme). **概型的射**(morphism of schemes)定义为它们之间作为局部环式空间的射. 这样我们就得到一个范畴†,它的对象是概型,我们用(Sch)来表示这个范畴. 给定一个射$f:X\to\mathrm{Spec}(A)$等价于给定一个环同态$\Gamma(f):A\to\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. 因此，仿射概型的范畴(它是(Sch)的一个全子范畴†)逆变地等价于交换环的范畴. 如果存在给定概型的射$f:X\to S$，则X称为一个 ***S* 概型**(S-scheme)或 ***S* 上的概型**(scheme over S)，f称为**结构射**(structure morphism)，S称为**底概型**(base scheme). 对于两个S概型$f:X\to S$，$g:Y\to S$，S概型的射定义为概型的满足$f=g\circ h$的射$h:X\to Y$. 这样我们就得到S概型的范畴，记作(Sch/S). Spec($\boldsymbol{Z}$)是(Sch)中唯一的终对象,因此(Sch)也就是$(\mathrm{Sch}/\mathrm{Spec}(\boldsymbol{Z}))$.

在(Sch)中总存在纤维积. 实际上，在仿射S概型$X=\mathrm{Spec}(B)$，$Y=\mathrm{Spec}(C)$(其中$S=\mathrm{Spec}(A)$)的情形，我们有$X\times_S Y=\mathrm{Spec}(B\otimes_A C)$；而在一般情形，我们是把仿射

概型的纤维积拼在一起来构成 $X\times_S Y$.

射 $f:X\to S$ 称为**分离的** (separated), 如果对角射 $\Delta_{X/S}:X\to X\times_S X$ 的象是闭的. 我们也说X在S上是分离的或X是一个**分离S概型** (separated S-scheme). 称概型X是分离的, 如果它是在 Spec($\boldsymbol{Z}$) 上分离的,所有仿射概型都是分离的.

如果K为域,则 Spec(K) 就是仅有一个点的空间而附以K作为构造层的茎. 对于概型X的一个点x, 用$k(x)$表示$\mathcal{O}_{X,x}$的剩余类域.对于$f\in\mathcal{O}_{X,x}$, 我们把f在$k(x)$中的剩余类称作f在x处的值,记作$f(x)$. 我们有一个自然射 i_x:Spec($k(x)$)$\to X$, 它的象是$\{x\}$. 更一般地,我们把域K的谱 Spec(K)到X的一个射i称作X的值在K中的一个点. 这样的一个点是由X的一点x和$k(x)$到K中的一个嵌入所决定的. X的一个点,如果它的值在一个代数闭域中,就称它为一个**几何点** (geometric point). 对于射$f:X\to S$和S中的一个点s, 纤维积 $X\times_S$Spec($k(s)$) 称为f在S上的**纤维** (fiber), 记作$f^{-1}(s)$. 对于几何点 Spec(K)$\to S$, $X\times_S$ Spec(K) 称为**几何纤维** (geometric fiber).

概型X称为**约化的** (reduced), 如果X的每个点的局部环都没有幂零元. 一个概型称为**不可约的** (irreducible), 如果它的基拓扑空间不是两个真闭子集的并. 一个概型称为**整的** (integral), 如果它是约化的并且是不可约的.整概型的每个局部环都是整环†. 如果概型X有一个仿射开覆盖$\{U_i=$ Spec(A_i)$\}$, 其中每个A_i都是 Noether 环,则称X是**局部 Noether 概型** (locally Noetherian scheme). 一个局部 Noether 概型,如果它的基拓扑空间是(拟)紧†的,则称为 **Noether 概型** (Noetherian scheme).

射$f:X\to Y=$Spec(A) 称为**局部有限型的** (locally of finite type) (**有限型的** (of finite type)), 如果存在Y的一个仿射开覆盖(有限仿射开覆盖)$\{U_i=$ Spec(A_i)$\}$, 其中每个A_i是有限生成的A代数. 一般的射$f:X\to Y$称为**局部有限型的** (locally of finite type) (**有限型的** (of finite type)), 如果存在Y的一个仿射开覆盖$\{V_i\}$, 使得f的每个限制$f^{-1}(V_i)\to V_i$都是局部有限型的 (有限型的). 如果 $f:X\to Y$是(局部)有限型的,我们就称X在Y上是(局部)有限型的.

在域K上 (即在 Spec(K) 上) 为有限型的概型称为K上的一个**代数概型** (algebraic scheme). 约化分离的代数K概型的范畴 (作为(Sch/K)的一个全子范畴)和K上代数簇把正则映射作为射的范畴之间存在一个自然等价†. 因此,今后我们把这两个范畴等同起来. 有时,说到代数簇就是指不可约的约化代数概型. 对于代数簇的研究来说, 非代数概型也是一个重要的工具. 例如, 对于概型X中的一点x, 存在一个典范同态 j_x:Spec($\mathcal{O}_{X,x}$)$\to X$, 它将 Spec($\mathcal{O}_{X,x}$) 的唯一的闭点映到x. 如果对于代数K概型X, Y和两个点$x\in X$, $y\in Y$, 存在一个K同构$\mathcal{O}_{X,x}\cong\mathcal{O}_{Y,y}$, 那么$x$和$y$各有一个适当的邻域,它们在$K$上同构.

关于簇的许多概念,例如,维数,一般点,特定化等, 能够借助交换环的理论自然地推广到概型上.

概型的射$f:X\to Y$称为**固有的** (proper), 如果它满足下面两个条件: (1) f是分离的而且是有限型的, (2) 对于每个概型T和每个射$T\to Y$, 通过"底变换"从f得到的射$X\times_Y T\to T$是闭映射. 我们也说X是一个固有Y概型或X在Y上是固有的. 固有代数K概型称为**完备的** (complete). 射影簇都是完备的;而在K上只有零维的仿射簇才是完备的. 每个代数簇皆可嵌入一个完备簇中(永田雅宜).

概型的射$f:X\to Y$称为**仿射的** (affine), 如果Y中每个仿射开子集在f之下的逆象也是一个仿射概型.

概型的射$f:X\to Y$称为**有限的** (finite), 如果它是有限型的, 并且存在Y的一个仿射开覆盖$\{U_i=$Spec(A_i)$\}$,使得$f^{-1}(U_i)=$Spec(B_i), 这里B_i在A_i上是整的†. 对于一个局部 Noether 概型Y和概型的射$f:X\to Y$, 下面三个条件是等价的: (i) f是有限的; (ii) f是仿射的和固有的; (iii) f是固有的,并且f的每个纤维

是有限集．对于 Noether 概型的一个有限满射 $f:X\to Y$，X 为仿射概型当且仅当 Y 为仿射概型．

概型的射 $f:X\to Y$ 称为**平坦的**（flat），如果对于每个点 $x\in X$，$\mathscr{O}_{X,x}$ 是一个平坦 $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$ 模．进一步，如果 f 是满的，那么 f 称为**一一平坦的**（faithfully flat）．设 $g:Y'\to Y$ 是局部 Noether 概型的一个有限型的一一平坦射，$f:X\to Y$ 是概型的一个射，那么对于射的许多重要性质来说，f 具有这些性质当且仅当还原（Pull back）$f_{Y'}:X\times_Y Y'\to Y'$ 具有这些性质（下降理论）．

【单点，奇点】 设 V 是代数簇，P 是 V 的一个点．如果局部环 $\mathfrak{O}_P$ 是正则局部环[†]，则称 P 在 V 上是**单的**（simple）或称 V 在 P 处是**非奇异的**（nonsingular）或**光滑的**（smooth）．这也可以叙述如下：因为是在 V 的邻域内考虑，所以可假设 V 是 k^n 中的仿射簇．如果 V 中包含点 P 的不可约分支只有一个，设其维数为 r，而且能够取 $I(V)$ 中的 $n-r$ 个多项式 $F_i(X)$，使其 Jacobi 矩阵 $(\partial F_i/\partial X_j)_{(X)=P}$ 的秩为 $n-r$，则称 P 为**单点**（simple point）．不是单点的点称为 V 的**奇点**（singular point）或**重点**（multiple point）．V 上的奇点的集合(称它为 V 的**奇轨迹**（singular locus））是 V 的真闭子集．没有奇点的簇称为**光滑的**（smooth）或**非奇异的**（nonsingular）．当 $\mathfrak{O}_P$ 为正规环[†]时，称 P 在 V 内是**正规的**（normal）．单点都是正规点．V 的单点集和正规点集都是非空开集．当 V 不可约而且它的每个点都是正规点时，称 V 是**正规代数簇**（normal algebraic variety）．正规簇的奇点所成的集合的余维数 $\geqslant 2$．对于不可约代数簇 V，由正规簇 V' 和使 V 的每个点的原象都是有限集的完备正则映射 $f:V'\to V$ 所组成的对 (V',f)，除去双正则同构外是唯一确定的．V' 称为 V 的**导出正规模型**（derived normal model）或**正规化**（normalization）．对于不可约子簇，也可利用局部环同样地定义单性和正规性．

局部环的重要性表现为下面的事实：设 V 和 W 都是代数簇，$P\in V$，$Q\in W$．如果 $\mathfrak{O}_{V,P}\cong\mathfrak{O}_{W,Q}$，那么 P 的适当邻域和 Q 的适当邻域双正则同构．这个事实，在适当的有限性条件之下也能够推广到概型上．

局部 Noether 概型的射 $f:X\to Y$ 称为**光滑的**（smooth），如果 f 是平坦的而且是局部有限型的，并且 f 的几何纤维都是非奇异的．关于 Noether 环 R，相对维数为 r（这里指的是一般纤维的维数）的仿射射 $f:X=\mathrm{Spec}\,(R[X_1,\cdots,X_{r+s}]/(f_1,\cdots,f_s))\to Y=\mathrm{Spec}\,(R)$ 的光滑性，相当于这样一个条件，即在 X 的每个点 x 处，$((\partial f_i/\partial X_j)(x))$ 的秩等于 s．

对于局部 Noether 概型的局部有限型的射 $f:X\to Y$，下面三个条件是等价的：(i) f 是光滑的且 f 的每个纤维是离散集；(ii) f 是平坦的且 f 在 $\mathrm{Spec}\,(K)$ 上的每个几何纤维是与 K 同构的域的谱的并；(iii) f 是平坦的且 f 在每个 $y\in Y$ 上的纤维是 $k(y)$ 的一些有限可分的[†]扩域的谱的并．这些条件对于 X 都是局部的．如果一个射 f 满足这些等价条件，我们就说 f 是 étale 或 X 在 Y 上是 étale．射 $f:X=\mathrm{Spec}(R[X_1,\cdots,X_n]/(f_1,\cdots,f_n))\to Y=\mathrm{Spec}(R)$ 是 étale 当且仅当，对所有 $x\in X$ 有 $\det((\partial f_i/\partial X_j)(x))\neq 0$．因此，étale 射对应于解析范畴中的局部同构．对于满 étale 射 $f:X\to Y$，许多重要的几何性质（约化性，整性，正规性，非奇异性等等）在 X 上成立，当且仅当它们在 Y 上成立(下降理论)．

【维数定理】 设 V 是不可约簇，U 和 W 是 V 的不可约子簇．若 $U\cap W$ 的一个不可约分支在 V 上是单的，则其维数 $\geqslant \dim U+\dim W-\dim V$．如果这里的等号成立，则这样的分支就称为 $U\cap W$ 的**固有分支**（proper component）．如果 V 上的单分支都是固有分支，那么称 U 和 W 在 V 上**固有相交**（proper intersect）．$P^n(k)$ 中的任意两个子簇 U 和 W，如果满足 $\dim U+\dim W\geqslant n$，则必相交．给定 $P^n(k)$ 内的一个不可约 r 维簇 V，那么 $P^n(k)$ 内的任一在“一般位置”上的 $n-r$ 维线性空间 L 和 V 的交点个数是一定的，与 L 的选取无关．这个数称为 V 的**次数**（degree），记作 $\deg V$．

【群簇】 当代数簇G具有群的结构并且对于(x, y)使xy^{-1}与之对应的映射$G \times G \to G$为正则映射时，称G为代数群†．代数群都是拟射影簇(周炜良)．若G是不可约的，则称G为**群簇**(group variety)．完备的群簇称为Abel簇†．(详细情况→代数群，Abel 簇．)设G为概型S上的一个概型，而S上的射$G \times_S G \to G$, $G \to G$, $S \to G$满足相当于群的乘积、逆元、单位元的公理关系，则称G为(S上的)**群概型**(group scheme)．G作为点集并不成为群，然而对于S上的任意概型T，从T到G的射的集合$G(T) = \mathrm{Hom}_S(T, G)$却成为群(→范畴和函子)．在$S = \mathrm{Spec}\,(k)$上的群概型$G$为代数群概型的情形，若$k$的特征为0，则$G$必为约化的，这时，$k$上的代数群概型实质上就和代数群一样；但若特征为$p$，则存在非约化的代数群概型．

【有理映射】 设$f: V \to V'$为簇的正则映射，如果V不是完备的，那么$f(V)$在V'内未必是闭的．$f(V)$的闭包称为V的**闭象**(closed image)．真正的象$f(V)$包含闭象的一个非空开集．

设V, W是不可约簇．$V \times W$的闭子集T称为V和W的**代数对应**(algebraic correspondence)．设点$P \in V$, $Q \in W$，当$P \times Q \in T$时，就说P和Q通过T互相对应．当T不可约而且射影$T \to V$的闭象为V时，可把函数域$k(V)$看作$k(T)$的一个子域．这里如果$k(V) = k(T)$，则称T为从V到W的**有理映射**(rational mapping)．进一步，如果对于W也满足同样的条件，则称T为**双有理映射**(birational mapping)、**双有理对应**(birational correspondence)或**双有理变换**(birational transformation)．这时有$k(V) = k(W)$．如果将正则映射和它的图象T等同起来，它就是一种有理映射．设W_1为T到W的闭象，那么$k(W_1)$可看作$k(T) = k(V)$的子域．当$k(V)$在$k(W_1)$上为可分生成时(或者纯不可分时)，就称T为**可分的**(separable)(或者**纯不可分的**(purely inseparable))．

设T为从V到W的有理映射，V'和W'分别为V和W的不可约子簇．当T有不可约子簇T'而其射影的闭象分别为V'和W'时，就说V'和W'通过T互相对应．通过T对应于V'的W的那些不可约子簇的并是闭集，称为V'通过T的**固有变换**(proper transform)，用$T[V']$表示．注意，即使$V' \supset V''$，也不一定有$T[V'] \supset T[V'']$．W的点中对应于V'的点的那些点的全体用$T\{V'\}$表示，称为V'的**全变换**(total transform)．当把$k(T)$与$k(V)$等同起来时，一般地有$\mathcal{O}_{T,T'} \supseteq \mathcal{O}_{V,V'}$；如果这里的等号成立，则称$T$沿$V'$是**正则的**(regular)(或者有定义的)．这时，W'是仅有的一个对应于V'的不可约子簇．如果V'在V上是单纯的而且余维数为1，那么T沿V'必为正则的．V中使T为正则的那些点的集合U是非空开集，T在U上的限制决定从U到W的一个正则映射．有理映射也可定义为在V的开集上定义的正则映射的图象的闭包．

【双有理对应】 由于有理对应的研究可以归结为双有理对应$T \to V$的逆对应的研究，所以最好还是研究双有理对应．关于这一点有下面的**Zariski 主要定理**(Zariski's main theorem)：设双有理对应$S: X \to Y$的逆对应$S^{-1}: Y \to X$为正则映射，并且X沿其不可约子簇X'是正规的．如果$S[X']$有不可约分支Y'使$\dim X' \geqslant \dim Y'$，那么$S$沿$X'$是正则的．因此，当$T: V \to W$为有理映射而$P$为$V$的正规点时，若$T[P]$含有孤立点，则$T$在$P$处是正则的．

对于完备不可约簇之间的双有理对应$T: V \to W$，使$\dim T[V'] > \dim V'$的子簇$V' \subset V$称为关于T是**基本的**(fundamental)．若V'为点、曲线等，则称V'是关于T的**基本点**(fundamental point)、**基本曲线**(fundamental curve)等．具有基本点的双有理变换的最古典的例子，恐怕就是由$(x_0 : x_1 : x_2) \to (x_1x_2 : x_2x_0 : x_0x_1)$给出的射影平面的**二次变换**(quadratic transformation)T．这时$T^2 =$恒等映射，如果设$P_1 = (1:0:0)$, $P_2 = (0:1:0)$, $P_3 = (0:0:1)$，那么直线$x_i = 0$对应P_i，于是P_i就是关于T的基本点．

射影平面(或者一般地$P^n(k)$)到其自身的双有理变换，称为**Cremona 变换**(Cremona

transformation).

设V是k上的完备非奇异簇,它称为(k上的)**相对极小模型** (relatively minimal model),如果V到k上的一个完备非奇异的V'的每个双有理正则映射$T:V \to V'$是一个同构. 它称为**极小的** (minimal) (**绝对极小的** (absolutely minimal)), 如果k上非奇异的V'到V的每个双有理(有理)映射$T:V' \to V$是正则的. 所有完备非奇异曲线和 Abel 簇都是绝对极小的. 对于每个代数曲面S,都存在双有理地等价于S的一个相对极小模型(→代数曲面).

有理簇. k上的不可约代数簇V,如果它的函数域在k上是纯超越的,就称为一个有理簇[†]. 代数闭域上的完备光滑曲面S是有理的当且仅当 $p_2(S) = q(S) = 0$ (Castelnuovo-Zariski 判别准则, → 代数曲面). 对于高维有理簇,至今尚未有好的判别准则([78]).

如果V的函数域有一个有限代数扩张且这个扩张在k上是纯超越的,则称 V 是**单有理的** (unirational). 单有理曲线实际上就是有理曲线. 更一般地,如果k上曲线C的函数域$k(C)$包含于k上的一个有限生成且纯超越的域之中,那么C就是有理的 (**Lüroth 定理**). 根据上面的判别准则,特征为 0 的代数闭域上的单有理曲面是有理的;但在特征为p的情形,则存在不是有理的单有理曲面. 甚至在特征为 0 时,也存在非有理的单有理三维簇; 例如$\boldsymbol{P}^4$中所有光滑三次超曲面(C. H. Clemens 和 P. A. Griffith[63], J. P. Murre[72])和$\boldsymbol{P}^4$中的某些光滑四次超曲面 (B. A. Исковский 和 Ю. И. Манин [67]).

【单项变换】 设V是不可约簇,$\mathscr{I}$是$\mathscr{O}_V$的理想层. 设U是V的任意仿射开集,A是U的坐标环,则$\mathscr{I}|U$由A的一个理想$\mathfrak{a}$所决定. 设$a_0, a_1, \cdots, a_m$为$\mathfrak{a}$的一组生成元. 设U'为对于$P \in U$使$(a_0(P):a_1(P):\cdots:a_m(P))$与之对应的一个从$U$到$P^m(k)$的有理映射的图象,那么$U'$除正则同构外仅由$U$和$\mathfrak{a}$唯一确定. 在$V$的每个点的仿射邻域内都施行这样的手续,再把它们拼在一起,就得到一个双有理变换$T:V \to V'$,并且除双正则同构外,它是由$\mathscr{I}$唯一确定的. 称T为V的由$\mathscr{I}$所产生的**单项变换** (monoidal transformation, monoidal dilatation, blowing-up). $T^{-1}:V' \to V$是正则的,并且,若W是层$\mathscr{O}_V/\mathscr{I}$的支集,则$T$在$V - W$内是正则的. $T\{W\}$在V'内的余维数为 1. 特别是,如果W是V的子簇而$\mathscr{I}$是在W上为 0 的函数的芽所成的层,那么T就称为V的以W为中心的**单项变换**(monoidal transformation).这时,如果W的每个点不论在V内还是在W内都是单的,就有$T[W] = T\{W\}$,并且,$T[W]$具有以W为底空间,以 $\dim V - \dim W - 1$ 维的射影空间为纤维,以射影变换群为结构群的代数纤维丛[†]的结构. 以一点为中心的单项变换称为**局部二次变换** (locally quadratic transformation).

【奇点的消解】 对于任意一个不可约簇V,找出与它双有理等价的非奇异射影簇V'的问题,称为**奇点的消解** (resolution of singularities) 问题. 当特征为 0 时,维数$\leqslant 3$的情形是由 O. Zariski (1944) 证明的,而关于一般维数的情形,则是由広中平祐 (Ann. of Math., **79** (1964)) 证明的,当特征为p时, S. Abhyankar 于 1956 年证明了关于维数为 2 的情形,他在 1966 年又证明了关于维数为 3 而$p \neq 2, 3, 5$的情形.広中的结果更精确地说就是: 设K为任一特征为 0 的域,V为K上的约化代数概型,那么存在K上的代数概型V_i和K上的射的有限序列$V_r \to V_{r-1} \to \cdots \to V_1 \to V_0 = V$, 满足下面的条件: 1) V_r不带奇点; 2) $V_{i+1} \to V_i$是一个以V_i的闭子概型D_i为中心的单项变换的逆; 3) D_i的点在V_i中是奇点但在D_i中却是单点,并且V_i沿D_i是**正规平坦的** (normally flat). 这里,概型V沿子概型W是正规平坦的是指,设$\mathscr{I}$为由W定义的$\mathscr{O}_V$的理想层,则对于W的每个点x和每个整数$p \geqslant 0$, $\mathscr{I}_x^p/\mathscr{I}_x^{p+1}$是$\mathscr{O}_{W,x} = \mathscr{O}_{V,x}/\mathscr{I}_x$上的自由模.

【闭链和除子】 设V是不可约簇. V的那些在V上为单的r维不可约子簇的全体用$\mathfrak{B}_r$表示,以此为基的自由 Abel 群用$\mathfrak{Z}_r(V)$表示,$\mathfrak{Z}_r(V)$的元称为V上的r维**闭链** (cycle) 或者

r 闭链 (r-cycle). 当 r 闭链 A 和 B 写成 $A=\sum n_iA_i$ 和 $B=\sum m_iA_i$ ($A_i\in\mathfrak{B}_r$, $A_i\neq A_j$, $i\neq j$) 时，如果对于所有 i 皆有 $n_i\geqslant m_i$，则记作 $A\geqslant B$. 如果 $A\geqslant 0$，则称 A 为正闭链. 对于零维闭链 $A=\sum n_iA_i$，记 $\sum n_i=\deg(A)$，称为 A 的**次数** (degree).

余维数为一的闭链称为**除子**(divisor). 设 V 是 d 维的，如果 $W\in\mathfrak{B}_{d-1}$，那么局部环 $\mathfrak{O}_{V,W}$ 为离散赋值环[†]. 它所确定的正规化赋值用 $v_W(\ )$ 表示. 对于函数 $f\in k(V)$，如果 $v_W(f)=n>0$，则称 W 为 f 的 n 阶**零点** (zero)，如果 $n<0$，则称 W 为 f 的 $-n$ 阶**极点**(pole). 常数 0 以外的 f 在 V 上至多具有有限个零点和极点. W 取遍 f 的所有零点时的和 $\sum v_W(f)W$ 用 $(f)_0$ 表示，并置 $(f^{-1})_0=(f)_\infty$, $(f)=(f)_0-(f)_\infty$. $(f)_0$, $(f)_\infty$ 和 (f) 分别称为 f 的**零除子** (zero divisor)，f 的**极除子** (pole divisor) 和 **f 的除子** (divisor of f). (f) 等于取遍所有 $W\in\mathfrak{B}_{d-1}$ 之和 $\sum v_W(f)W$，并且有 $(fg)=(f)+(g)$. 如果 V 是完备的，且 V 的奇点集的余维数 >1，那么 $(f)_\infty=0$ (或者 $(f)_0=0$) 当且仅当 f 为常数.

对于除子 D_1 和 D_2，如果有函数 $0\neq f\in k(V)$ 使得 $D_1-D_2=(f)$，则称 D_1 和 D_2 **线性等价或一次等价** (linear equivalent)，记作 $D_1\sim D_2$. 除子 D 所属的线性等价类用 $\mathrm{cl}(D)$ 表示. 在 V 的每个点的一个邻域内 ~ 0 的除子称为 V 的 **Cartier 除子** (Cartier divisor) (Cartier 除子有时简称为除子). 如果 V 没有奇点，那么任意除子都是 Cartier 除子. 如果 V 的除子 D 在开集 U 上能写成 $D=(f)$，则称 f 是 D 在 U 上的**局部方程** (local equation). 设 V' 是正规簇，$T:V'\to V$ 是有理映射，并设它的闭象不包含在 V 的 Cartier 除子 D 之中. 那么，由于即使从 V' 中除去 V' 的一个余维数 >1 的闭集 W'，T 也确定一个正则映射 $\varphi:V'-W'\to V$，所以将 D 的局部方程和 φ 合成就决定了 $V'-W'$ 上的一个 Cartier 除子. 取它在 V' 中的闭包，所得 V' 的除子定义为 $T^{-1}(D)$.

【除子和线性系】 设 V 是完备的不可约簇. 设 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 为 V 的函数域 $k(V)$ 的元，D 是满足 $(f_i)+D>0$ 的一个除子. 对于 k 中不全为 0 的元的组 $(a_0,\cdots,a_n)$，能表成 $(\sum a_if_i)+D$ 的正除子的集合 $\sum$ 称为**线性系** (linear system)，线性空间 $kf_0+kf_1+\cdots+kf_n$ 称为 $\sum$ 的**定义模** (defining module). 线性系 $\sum$ 中的任意两个除子彼此线性等价. 当与 $\sum$ 的元线性等价的正除子均属于 $\sum$ 时，则称 $\sum$ 为**完备线性系** (complete linear system). 包含线性系 $\sum$ 的完备线性系存在而且是唯一确定的，用 $|\sum|$ 表示之. $\sum$ 的全体元的共同的除子 D_0 称为 $\sum$ 的**固定分量** (fixed component)，从 $\sum$ 的各个元减去 D_0 后的除子称为 $\sum$ 的**可变分量** (variable component). 线性系 $\sum$ 的全体可变分量的公共点称为 $\sum$ 的**基点** (base point). 不具有固定分量而且它的一般成员是不可约的线性系，称为**不可约的** (irreducible)，否则称为**可约的** (reducible). 线性系 $\sum$ 的定义模的维数用 $l(\sum)$ 表示，称 $l(\sum)-1$ 为 $\sum$ 的**维数** (dimension)，记作 $\dim\sum$. 特别是，一维线性系称为**线性束** (linear pencil).

线性系的定义模除了 k 同构之外是唯一确定的，设 L 为一个定义模，并设 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 为 L 的一个线性无关基. 对于 V 的点 P，令 n 维射影空间的点 $Q=(f_0(P),f_1(P),\cdots,f_n(P))$ 与之对应，就定义了一个从 V 到另一个簇 V' 的有理映射 $\Phi(\sum)$. $\Phi(\sum)$ 在 $\sum$ 的基点以外是正则的，并且 $\sum$ 的基点就是 $\phi(\sum)$ 的基本点. $\Phi(\sum)$ 称为由线性系 $\sum$ 确定的有理映射. 特别是，当 $\Phi(\sum)$ 是双正则变换时，则称 $\sum$ 为**极丰富** (ample 或 very ample) 线性系. 设 D 是一个除子，与 D 线性等价的所有正除子(如果存在的话)的集合是一个线性系，称为由 D 决定的完备线性系，用 $|D|$ 表示. 通常把 $l(|D|)$ 记作 $l(D)$. 如果完备线性系 $|D|$ 为丰富的，那么除子 D 称为**极丰富除子** (ample divisor 或 very ample divisor)，如果对于充分大的正整数 m，mD 是极丰富的，则称 D 为**非退化除子或丰富除子** (non-degenerate divisor 或 ample divisor).

【微分形式】 设 V 是 n 维不可约簇. $\mathfrak{K}=$

$k(V)$是它的函数域. $\mathfrak{K}$在k上的**微分**(derivation)指的是k线性映射$D:\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}$,满足$D(fg)=D(f)g+fD(g)$. 设全体微分的集合为$\mathfrak{D}^*$,那么$\mathfrak{D}^*$是$\mathfrak{K}$上的$n$维线性空间. 设$\mathfrak{D}$为$\mathfrak{D}^*$在$\mathfrak{K}$上的对偶空间†. 就是说,对于$f\in\mathfrak{K}$, $D\in\mathfrak{D}^*$,根据$\langle df, D\rangle=D(f)$来定义$df\in\mathfrak{D}$. 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为下面意义下的$\mathfrak{K}$在$k$上的可分超越基. 就是说,$x_1, x_2, \cdots, x_n$在$k$上代数无关,并且$\mathfrak{K}$是$k(x_1,x_2,\cdots,x_n)$上的可分的†代数扩张(若$k$为完全域†,则可分超越基是存在的). 那么,$dx_1, \cdots, dx_n$构成$\mathfrak{D}$在$\mathfrak{K}$上的一组基. $\mathfrak{D}$在$\mathfrak{K}$上的Grassmann代数†中的r次齐次元,称为V上的(或函数域$\mathfrak{K}$的)**r次微分形式**(differential form of degree r). 特别是,n次微分形式的集合就是由$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$在$\mathfrak{K}$上张成的一维线性空间.

$\mathfrak{K}$中的n个函数所成的组$f_1, \cdots, f_n$为V的开集U上的一组**局部单值化坐标**(local uniformizing coordinates)是指,对于每个$P\in U$, $f_1-f_1(P), \cdots, f_n-f_n(P)$构成局部环$\mathfrak{O}_P$的一个正则参数系†. 此时$f_1, \cdots, f_n$构成$\mathfrak{K}$的一个可分超越基. 对于单点$P$来说,在$P$的适当的邻域上局部单值化坐标是存在的. V上的一个r次微分形式ω用微分$df_1, \cdots, df_n$表成$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\varphi_{(i)}df_{i_1}\wedge\cdots\wedge df_{i_r}$时,如果系数$\varphi_{(i)}$在$U(\ni P)$上皆正则,那么就说$\omega$在点$P$处是**正则的**(regular).

当V是没有奇点的完备簇时,在V上处处正则的微分形式称为**第一种微分**(differential of the first kind). 它由域$\mathfrak{K}$所决定,而不依赖于V的模型的选取方法. k上线性无关的n次第一种微分的个数用p_g表示,称为V的**几何亏格**(geometric genus).

设V是完备正规簇,W是V的一个余维数为1的不可约子簇,P是W上的一点,且是V的一个单点. V上的r次微分形式ω用P的局部单值化坐标的微分表示时,由赋值$v_W(\ )$所确定所有系数的值中的最小值,记为$v_W(\omega)$,它仅由ω和W所确定. 由ω可定义V上的除子$(\omega)=\sum_W v_W(\omega)W$,称为微分形式$\omega$的除子. n次微分形式的除子称为V的**典范除子**(canonical divisor),通常用K表示. 典范除子构成一个线性等价类.

Albanese 簇. Picard 簇. 设V是一个簇. 于是我们可以构造一个对(A, f),其中A是一个Abel簇,称为V的**Albanese 簇**(Albanese variety),f是一个有理映射$f:V\to A$(称为典范映射),使得:(i)f的象生成A,即对于充分大的n, f本身重复n次的和$F:V^n\to A$一般地是满射;(ii)对于V到Abel簇B的每个有理映射$g:V\to B$,存在同态$h:A\to B$和点$b\in B$,使$g=h\cdot f+b$. Albanese簇除同构外是唯一确定的,f除了平移外也是确定的.

在$k=\boldsymbol{C}$的情形,如果V是完备且无奇点的不可约簇,q是V上一次第一种微分的线性空间的维数,$\omega_1, \cdots, \omega_q$是它的一组基,那么,$V$的一维Betti数†$B_1$等于$2q$. 设$\gamma_1, \cdots, \gamma_{2q}$为Betti群†的一组基. 令$\alpha_{ji}=\int_{\gamma_j}\omega_i$, $\alpha_j=(\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jq})$. $\boldsymbol{C}^q$中的周期向量$\alpha_j(1\leqslant j\leqslant 2q)$在$\boldsymbol{R}$上线性无关. 设$\Gamma$是由$(\alpha_j)$生成的$\boldsymbol{C}^q$的离散子群,则$\boldsymbol{C}^q/\Gamma$构成Abel簇. 这就是$V$的Albanese簇. 设$P$是$V$上的动点,$Q$是定点,那么由$P\to\left(\int_Q^P\omega_1, \cdots, \int_Q^P\omega_q\right)(\mathrm{mod}\,\Gamma)$所确定的映射就是典范映射. 在抽象域上,则是用$V$到Abel簇的正则映射来代替第一种积分.

设V是完备正规簇,U是V的单点集,D是V上的一个除子. 当存在非奇异代数曲线C和$U\times C$上的除子Γ以及C的两个点P, Q,通过射$\varphi_P:U\to U\times P\to U\times C$和$\varphi_Q:U\to U\times Q\to U\times C$, D能表示成$D=\varphi_P^{-1}(\Gamma)-\varphi_Q^{-1}(\Gamma)$时,则称$D$**代数等价于零**(algebraically equivalent to 0). 设V上全体除子所成的群为$\mathfrak{G}(V)$,代数等价于零的除子所成的群为$\mathfrak{G}_a(V)$,线性等价于零的除子所成的群为$\mathfrak{G}_l(V)$. 可以用标准方法在$\mathfrak{G}_a(V)/\mathfrak{G}_l(V)$中引入Abel簇结构,称它为$V$的**Picard 簇**(Pi-

card variety). V 的 Picard 簇的维数 q 称为 V 的**非正则数** (number of irregularity). 若 $q=0$, 则称 V 是正则的.

V 的 Albanese 簇和 Picard 簇是同种的†, 并且彼此是对方的 Picard 簇. 用 Cartier 除子代替 V 的除子, 也能建立类似的理论. Cartier 除子的线性等价类的群和 $H^1(V, \mathcal{O}_V^*)$ (这里 $\mathcal{O}_V^*$ 是 $\mathcal{O}_V$ 的可逆元所构成的乘法群的层) 能看作等同, 根据这种看法, 对于概型† 也能够考虑 Picard 概型的理论.

Neron-Severi 群. 设 V 是完备正规簇. 分别用 $\mathfrak{G}(V)$, $\mathfrak{G}_n(V)$ 和 $\mathfrak{G}_a(V)$ 表示 V 的除子所成的群、数值等价于零的除子所成的群和代数等价于零的除子所成的群. 商群 $NS(V)=\mathfrak{G}(V)/\mathfrak{G}_a(V)$ 是有限生成的 [69, 74], 称为 V 的 **Neron-Severi 群** (Neron-Severi group). 我们把 $NS(V)$ 的秩称为 V 的 **Picard 数** (Picard number), 用 $\rho(V)$ 表示. 在 V 是 $k=\mathbf{C}$ 上的非奇异射影簇的情形, 我们有不等式 $\rho(V) \leqslant h^{1,1}(V)(=\dim_{\mathbf{C}} H^1(V, \Omega_V^1))$, 并且 **Lefschetz 数** (Lefschetz number) $B_2(V)-\rho(V)$ 是双有理不变量 (这里 $B_2(V)$ 是 V 的二维 Betti 数) [20]. 然而对于正特征的情形, 上面的不等式一般说不成立 [43].

$NS(V)$ 的挠部是 $\mathfrak{G}_n(V)/\mathfrak{G}_a(V)$ (松阪辉久). 这个事实不能推广到高余维的闭链上 [23].

【上同调论】 设 $(X, \mathcal{O})$ 为环式空间†. X 上的 $\mathcal{O}$ 模 (的层) F 称为**拟凝聚的** (quasi-coherent), 如果对于 X 的任意点 x, 存在 x 的开邻域 U 和自由 $\mathcal{O}|U$ 模 M 和 N 的同态 $f: M \to N$, 使 $F|U$ 为 f 的余核†, 也就是说, 局部地存在正合序列† $M \to N \to F|U \to 0$. F 称为**有限型的** (of finite type), 如果 F 能够局部地由有限个截面作为 $\mathcal{O}$ 模而生成. F 具有**有限表示** (finite representation), 指的是局部地存在正合序列 $\mathcal{O}^p \to \mathcal{O}^q \to F \to 0$ (p, q 为自然数, 从整体来看并不要求它们是固定的). F 是**凝聚的** (coherent), 是指满足下面两个条件: i) F 是有限型的; ii) 对于 X 的任意开集 U 和任意自然数 n 及任意同态 $f: \mathcal{O}^n|U \to F|U$, $\ker f$ 也是有限型的. 显然, 凝聚 $\Longrightarrow$ 有限表示 $\Longrightarrow$ 拟凝聚且为有限型. 在 $\mathcal{O}$ 模的范畴中, 由凝聚层构成的全子范畴对于层的大部分运算都是封闭的. 如果 $\mathcal{O}$ 本身作为 $\mathcal{O}$ 模是凝聚的, 就称 $\mathcal{O}$ 为环凝聚层. 这时关于 $\mathcal{O}$ 模的凝聚性和有限表示是一致的.

若设 V 是代数簇, 则 $\mathcal{O}_V$ 是环凝聚层. $\mathcal{O}_V$ 模凝聚层称为**代数凝聚层** (algebraic coherent sheaf). 局部 Noether 概型 (即具有由 Noether 环† 的谱† 构成的开覆盖的概型) 的构造层也是环凝聚层.

如果 V 是仿射簇, 或者是仿射概型 $\mathrm{Spec}(A)$, 那么 V 上的拟凝聚层 F 可由其大范围的截面来生成. F 和 $\Gamma(V, F)$ 的对应使 V 上的拟凝聚层的范畴和环 A 上的模的范畴之间等价; 如果 A 是 Noether 环, 则凝聚层和有限型 A 模对应. 并且, 对于任意拟凝聚层, 有 $H^q(V, F)=0\ (q>0)$ 成立.

设 V 是代数簇或者概型, 如果 $\mathfrak{U}=(U_\lambda)$ 是由 V 的仿射开集所成的覆盖, F 是拟凝聚的 $\mathcal{O}_V$ 模, 那么 $H^q(V, F)$ 和 Čech 上同调 $H^q(\mathfrak{U}, F)$ 标准同构. 如果 V 是 d 维簇, 那么 V 的上同调维数† $\leqslant d$. 这就是说, 对于任意群 Abel 的层 F, 有 $H^q(V, F)=0\ (q>d)$.

对于概型 X, 我们定义**上同调维数** (cohomological dimension) $\mathrm{cd}(X)$ 为满足下述条件的最大整数 q: 对于 X 上的一个拟凝聚 $\mathcal{O}_X$ 模 F, 有 $H^q(X, F) \neq 0$ [27]. 上同调维数 $\mathrm{cd}(X)$ 不超过 X 的维数. 如果 X 是仿射概型, 则 $\mathrm{cd}(X)=0$. 在 X 为 Noether 概型的假定下, 逆命题也成立 (Serre 判别准则). 对于 n 维代数概型 X, $\mathrm{cd}(X)=n$ 当且仅当 X 为完备的 (S. L. Kleiman).

设 X, Y 是簇 (或局部 Noether 概型), $f: X \to Y$ 是完备正则映射 (完备射). 如果 F 是 $\mathcal{O}_X$ 模的凝聚层, 那么已经证明, 对于 $q \geqslant 0$, $R^q f_*(F)$ (→同调代数) 是 $\mathcal{O}_Y$ 模的凝聚层. 这里如果考虑 Y 为一点的情形, 则得到下面的定理: 对于完备代数簇 X 上的凝聚层 F, $H^q(X,$

F）是域 k 上的有限维线性空间.

设 V 是代数簇，F 是 V 上秩为 n 的局部自由 $\mathscr{O}_V$ 模（即局部地 $\cong \mathscr{O}_V^n$ 的 $\mathscr{O}_V$ 模）．若取 V 的一个开覆盖 (U_i) 和同构 $\varphi_i: F|U_i \cong \mathscr{O}_V^n|U_i$，则 $g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 是从 $U_i \cap U_j$ 到 $GL(n, k)$ 的正则映射，即所谓 F 的坐标变换．如果用同样的坐标变换定义 V 上的一个向量丛[†] B（纤维为 k^n），那么 F 可看作 B 的截面的芽的层 $S(B)$．我们可以通过典范同态 $GL(n, k) \to PGL(n-1, k)$ 构造 V 上的一个射影丛 $\boldsymbol{P}(F)$（称它为相伴于 F）．（注意，在 [12] 中，$\boldsymbol{P}(F)$ 定义为具有坐标变换 ${}^t g_{ij}^{-1}$ 的一个射影丛，也即在我们的意义下相伴于 E 的对偶的射影丛.）这个使 $\boldsymbol{P}(F)$ 相伴于局部自由 $\mathscr{O}_V$ 模 F 的过程可推广到任意的概型.

$p: \boldsymbol{P}(E) \to S$ 的一个闭（局部闭）S 子概型 $f: X \to S$ 称为 **S 上的射影概型**（projective scheme over S）（**拟射影概型**（quasiprojective scheme）），或者称 f 为**射影射**（projective morphism）（**拟射影射**（quasiprojective morphism））．射影射是正常的．域 k 上的约化射影概型就是 k 上的射影簇．我们可以利用分次环[†]以类似于仿射概型的方法来发展射影概型的理论.

秩为 1 的局部自由 $\mathscr{O}_V$ 模的层称为**可逆层**（invertible sheaf）．在古典情形，可逆层不外乎是复线丛[†].

设 V 是射影簇，$(y_0, y_1, \cdots, y_n)$ 是 V 的点的齐次坐标，设 U_i 是由 $y_i \neq 0$ 所定义的 V 的开集．设 $\mathscr{O}(n)$ 是由坐标变换 $g_{ij} = (y_j/y_i)^n$ 所给出的 V 上的可逆层，而设它与 $\mathscr{O}_V$ 模 F 在 $\mathscr{O}_V$ 上的张量积 $F \otimes \mathscr{O}(n)$ 为 $F(n)$，那么 $F(n+m) = F(n) \otimes \mathscr{O}(m)$．当 F 为凝聚层时，下面的 **Serre 定理**成立：存在由 F 所决定的整数 $m(F)$，对于 $n \geq m(F)$，I）每个点 $x \in V$ 处的茎 $F(n)_x$ 由 $\Gamma(V, F(n))$ 生成；II）$H^q(V, F(n)) = 0\ (q > 0)$.

设 V 的维数为 r，对于代数凝聚层 F，置 $\chi(F) = \sum_{q=0}^{r} (-1)^q \dim H^q(V, F)$，那么对于正合序列 $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$，有 $\chi(F) = \chi(F') + \chi(F'')$．$\chi(F(n))$ 是关于 n 的多项式，它的次数等于 F 的支集（使 $F_x \neq 0$ 的点 $x \in V$ 的集合）的维数．这个多项式称为 F 的 **Hilbert 特征函数**（Hilbert characteristic function）．根据 Serre 定理中的 II），当 n 充分大时，有 $\chi(F(n)) = \dim H^0(V, F(n))$．如果 $F = \mathscr{O}_V$，那么对于充分大的 n，这个值等于 V 的齐次坐标环的 n 次齐次部分作为 k 模的维数.

一般地，对于 r 维完备不可约簇 V，置 $\chi(V) = \chi(\mathscr{O}_V) = \sum_{q=0}^{r} (-1)^q h^{0,q}$（$h^{0,q} = \dim H^q(V, \mathscr{O}_V)$），称为 V 的**算术亏格**（arithmetic genus）．在古典情形，是用 $p_a(V) = (-1)^r(\chi(V) - 1) = h^{0,r} - h^{0,r-1} + \cdots \pm h^{0,1}$ 代替 $\chi(V)$，也曾称为算术亏格．当 V 是非奇异代数曲线时，$p_a(V)$ 就是通常的亏格．如果 V 是射影簇，那么 $\mathscr{O}_V$ 的 Hilbert 特征函数的常数项为 $\chi(V)$，最高次项的系数为 $(\deg V)/r!$.

设 V 是正规簇，D 是 V 的一个除子，对于 $x \in V$，设 $L(D)_x$ 是在 x 的某个邻域上使 $(f) + D \geq 0$ 的 $f \in k(V)$ 的集合，这就得到 V 上的一个代数凝聚层 $L(D)$，且有 $\dim H^0(V, L(D)) = l(D)$．如果 V 还是完备的，那么置 $\chi_V(D) = \chi(V) - \chi(L(-D))$，称为 D 的**假算术亏格**（virtual arithmetic genus）．在古典的定义中则是用 $p_a(D) = (-1)^{r-1}(\chi_V(D) - 1)$．当 D 是没有重分支的正除子时，则 $\chi_V(D)$ 和把 D 看作簇时的算术亏格是一致的．一般地，对于除子的代数等价，$\chi_V(D)$ 是不变的.

若 D 是 Cartier 除子，$L(D)$ 是可逆层，则对于两个 Cartier 除子 D_1, D_2，有 $L(D_1 + D_2) = L(D_1) \otimes L(D_2)$，且 D_1 和 D_2 线性等价当且仅当 $L(D_1) \cong L(D_2)$．设 V 是完备簇，则对于一个 s 维不可约子簇 W，我们由下述性质定义相交数 $(D^s \cdot W)$:

$$\chi(\mathscr{O}_W \otimes L(D)^{\otimes n}) = ((D^s \cdot W)/s!)n^s + n \text{ 的低次项}.$$

此时我们有关于丰富性的下述**中井-Moishezon 准则**（Nakai-Moishezon criterion）：设 V 是代数闭域上的一个完备簇，D 是 V 上的一个 Cartier

除子．于是D为丰富的当且仅当对于每个任意维$s>0$的不可约子簇W有$(D^s\cdot W)>0$．

设V是非奇异不可约簇，用Ω^p表示V上的正则p次微分形式的芽的层$(\Omega^0=\mathcal{O}_V)$．当V完备时，用$h^{p,q}$表示$\dim H^q(V,\Omega^p)$．

Serre 对偶定理(Serre's duality theorem)：设V是r维非奇异射影簇，B是V上的代数向量丛，B^*是B的对偶向量丛，B和B^*的截面的芽的层分别用$\mathscr{B}$和$\mathscr{B}^*$表示，则有 i) $H^r(V,\Omega^r)$和k标准同构；ii) $H^q(V,\mathscr{B})$和$H^{r-q}(V,\mathscr{B}^*\otimes\Omega^r)$通过它们到$H^r(V,\Omega^r)\cong k$的上积而成为彼此对偶的线性空间．

因此，例如$H^q(V,\Omega^p)$和$H^{r-q}(V,\Omega^{r-p})$是彼此对偶的，从而$h^{p,q}=h^{r-p,r-q}$．

当域k的特征为0时，根据复共轭性进一步有$h^{p,q}=h^{q,p}$(→调和积分)成立；然而当特征为p时，却有这种对称性不成立的例子．一般地说，$h^{p,q}$是相对不变量†，不是绝对不变量†，但是$h^{p,0}$作为p次第一种微分形式所构成的线性空间的维数却是绝对不变量．因此在特征为0的情形，$h^{0,p}$和$\chi(V)$都是绝对不变量．当特征为p时，$h^{0,q}$的绝对不变性只对$\dim V\leqslant 2$的情形有了证明．

【一般相交理论】 设V是n维不可约簇，A和B分别是V的r维和s维不可约子簇，C是$A\cap B$的一个固有分支．这时，我们能够定义A和B在V上沿C的**相交重数**(intersection multiplicity) $i(A\cdot B,C;V)$，它具有许多符合几何直观的性质．特别是，它在双正则映射之下是不变的．当A和B在V上固有相交时，设$A\cap B$的固有分支为$C_1,\cdots,C_N$，用$A\cdot B=\sum_\nu i(A\cdot B,C_\nu;V)C_\nu$来定义一个$r+s-n$闭链$A\cdot B$，称为$A$和$B$的**交叉积**(intersection-product)．当r闭链$X=\sum_\alpha n_\alpha X_\alpha$的每个分支$X_\alpha$和$s$闭链$Y=\sum_\beta m_\beta Y_\beta$的每个分支$Y_\beta$在$V$上固有相交时，我们令$X\cdot Y=\sum_\alpha\sum_\beta n_\alpha m_\beta X_\alpha\cdot Y_\beta$，那么结合律$(X\cdot Y)\cdot Z=X\cdot(Y\cdot Z)$成立．设$X_1$和$X_2$都是$r$闭链，如果对于和$X_1$及$X_2$都固有相交的每个$n-r$闭链$Y$都满足$\deg(X_1\cdot Y)=\deg(X_2\cdot Y)$，就称$X_1$和$X_2$**数值等价**(numerically equivalent)．

相交理论是代数几何学中最基本的理论，也就是说，能够在这个理论之上构成其它的理论．

【Chow(周炜良)环】 设U和T都是非奇异不可约簇．如果Z是$U\times T$的一个闭链，而对于T的每个点t都能够定义$Z\cdot(U\times t)$，则置$Z\cdot(U\times t)=X(t)\times t$，就得到$U$的一个以$T$中的点作为参数的闭链族$\{X(t)\}$．这样的族称为闭链的**代数族**(algebraic family)．当闭链X_1和X_2的差等于同一代数族中的两个闭链的差时，就说X_1和X_2**代数等价**(algebraically equivalent)．特别是，当X_1-X_2能够表成以仿射直线k的点作为参数的代数族中两个闭链的差时，就称X_1和X_2**有理等价**(rationally equivalent)．代数等价于0的闭链和有理等价于0的闭链分别构成$\mathfrak{Z}(U)$的子群$\mathfrak{Z}_a(U)$和$\mathfrak{Z}_{rat}(U)$．对于除子来说，有理等价和线性等价是一致的．

设V也是非奇异不可约簇，$f:V\to U$是正则映射．对于V的不可约子簇W，设$f(W)$的闭包为W'，如果$\dim W>\dim W'$，则置$f_{\mathfrak{Z}}(W)=0$，如果$\dim W=\dim W'$，而f诱导出的正则映射$W\to W'$的次数$[k(W):k(W')]=m$，则置$f_{\mathfrak{Z}}(W)=mW'$．把这个映射$f_{\mathfrak{Z}}$线性地扩张到$\mathfrak{Z}(V)$上，则得到模同态$f_{\mathfrak{Z}}:\mathfrak{Z}(V)\to\mathfrak{Z}(V)$．如果$f$是完备的，那么$f_{\mathfrak{Z}}$诱导出从$\mathfrak{Z}(V)/\mathfrak{Z}_{rat}(V)=A(V)$到$A(U)$的一个模同态$f_*$．

设U和V都是非奇异不可约射影簇，$f:V\to U$是正则映射，Γ是f的图象．如果$Y\in\mathfrak{Z}(U)$而$\Gamma\cdot(V\times Y)$可定义，则把$\Gamma\cdot(V\times Y)$在双正则映射$\Gamma\to V$之下的象记作$f_{\mathfrak{Z}}^*(Y)$．如果移到闭链的有理等价类群$A(U)=\mathfrak{Z}(U)/\mathfrak{Z}_{rat}(U)$上，由于每个类中都有$f_{\mathfrak{Z}}^*$在其上能够定义的闭链，所以我们能够定义$f^*:A(U)\to A(V)$．对于$x,y\in A(U)$，利用对角射$\Delta^*:U\to U\times U$定义$x\cdot y=\Delta^*(x\times y)$，那么

$A(U)$就成为环. 用余维数来引入次数,就成为分次环†. 这个环称为U的**周环**(Chow ring). $f^*: A(U)\to A(V)$是环同态. 当f为完备时,有$f_*(y\cdot f^*(x))=f_*(y)\cdot x(x\in A(U),y\in A(V))$成立.

零闭链. 设V是特征为0的不可数代数闭域(例如$\boldsymbol{C}$)上的一个非奇异的不可约射影簇. 用$A_0(V)$表示V的次数为0的零闭链模有理等价的类所成的群. 称$A_0(V)$是有限维的,如果对于某个n,将$(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n)$映为$\sum a_i-\sum b_i$的映射$V^n\times V^n\to A_0(V)$是满射. 如果$A_0(V)$是有限维的,那么从$V\to \mathrm{Alb}(V)$诱导出来的典范映射$A_0(V)\to\mathrm{Alb}(V)$是双射(A. A. Роитман). 如果对某个$p>1$有$h^{p,0}(V)>0$,那么$A_0(V)$不是有限维的(Mumford, Роитман). 在曲面的情形,我们有关于$A_0(V)$是有限维的几个等价条件(M. P. Murthy 和 R. G. Swan).

【Chow(周炜良)坐标】 考虑不可约簇V和W之间的不可约代数对应T. 设T到V和W的射影的闭象分别为V'和W',设它们的维数分别为a和c. 取V',W'的一般点P,Q,设P到W的全变换为$T\{P\}$,Q到V的全变换为$T\{Q\}$. 设$T\{P\}$和$T\{Q\}$的维数分别为b和d,那么有$a+b=c+d$. 这里等式两边都等于T的维数. 称此性质为**常数计数原理**(德 Prinzip der Konstantenabzählung).

这个简单的原理有广泛的应用. 例如,设V是射影空间$P^n(k)$中的r维不可约簇,并设$\sum_{j=0}^{n}u_{ij}X_j=0\ (0\leqslant i\leqslant r)$是$r+1$个超平面$H_i$的方程. $V\cap(H_0\cap\cdots\cap H_r)$非空的条件定义了$V$和以$u_{ij}$为坐标的多重射影空间$W=P^n(k)\times\cdots\times P^n(k)$之间的一个不可约代数对应$T=\{(x,u)\,|\,x\in V,\sum u_{ij}x_j=0\}$. 在这种情形下,用上面的符号,有$a=r$, $b=(n-1)(r+1)$, $d=0$, 所以有$c=n(r+1)-1$. 这就是说,在这种情形下,W'在W内的余维数为1,因而能只用一个方程$F(u_{ij})=0$来定义. 这个形式F就是V的 B. L. van der Waerden 和周炜良的**配型**(associated form). F是关于每个$(u_{i0},\cdots,u_{in})$的d次齐次式($d=\deg V$),且对指标i是对称的. 更一般地,取$P^n(k)$的r维d次正闭链$X=\sum n_\alpha V_\alpha$ ($d=\sum n_\alpha \deg V_\alpha$),则每个$V_\alpha$的配型$F_\alpha$的乘积$\Pi F_\alpha^{n_\alpha}$称为$X$的配型,把配型的系数按一定的顺序排列起来,把它们看作(射影空间的点的)齐次坐标,就称为X的**周坐标**(Chow coordinates). 这是 Plücker 坐标的一个自然推广. 当给定r, d和射影簇$U(\subset P^n(k))$时,$P^n(k)$的r维d次而且包含在U中的正闭链的周坐标的集合,构成一个射影簇,称为**周簇**(Chow variety).

和周簇类似的有 **Hilbert 概型**(Hilbert scheme). $P^n(k)=S$的闭子概型和$\mathcal{O}_S$的理想凝聚层$\mathscr{I}$一一对应,后者也和$k[Y_0,\cdots,Y_n]$的齐次理想的等价类一一对应,这里两个理想定义为等价的,如果它们除了低次齐次部分外是相同的. 这就在具有相同 Hilbert 特征函数的$\mathscr{I}$的集合中引入适当维数的射影空间的闭子概型结构. 这个概型称为 Hilbert 概型. 周簇和 Hilbert 概型说明,射影几何方法在代数几何中也是重要的.

【代数几何和复解析几何】 $k=\boldsymbol{C}$情形下的代数簇称为**复代数簇**(complex algebraic variety). 复代数簇V具有复解析流形的结构,或者(在有奇点的情形)具有解析空间†的结构. 如果用$\mathcal{O}^h_{V,x}$表示在点$x(\in V)$处全纯的函数的芽的环,那么有$\mathcal{O}_{V,x}\subset\mathcal{O}^h_{V,x}$,并且两边的完备化†是一致的. 如果$x$是$V$的单点,则$\mathcal{O}^h_{V,x}$是收敛幂级数环,并且它的完备化就是形式幂级数环. $\mathcal{O}^h_{V,x}$的素理想的完备化仍为素理想(永田雅宜). 因此,V在x的邻域内的解析性态,可以通过$\mathcal{O}_{V,x}$的完备化来代数地研究. 再者,如果V是完备的,那么V上的解析凝聚层和代数凝聚层一一对应. 因此,用凝聚层概念所叙述的命题,不论解析地还是代数地,都得到同样的结果(Serre)(→复流形).

【代数簇的拓扑和孤立奇点】 定义在$\boldsymbol{R}$(或$\boldsymbol{C}$)上的每个代数簇能够用实解析胞腔来三角剖分([7]). 设V是定义在$\boldsymbol{C}$上的一个非

奇异连通代数簇.

对于 $\boldsymbol{C}$ 的一个代数自同构 σ，我们可以通过让 σ 作用在 V 的开仿射覆盖的定义方程组的系数上来定义 V^σ. V 和 V^σ 不一定同胚，甚至不一定有相同的伦型[4]. Grothendieck [11] 证明了，存在一个谱序列† $E_1^{p,q}=H^p(V,\Omega_V^q)\Rightarrow H^{p+q}(V,\boldsymbol{C})$，称为 **Hodge 谱序列** (Hodge spectral sequence). 这个谱序列能够用纯代数方法来定义，并且能把 $H^{p+q}(V,\boldsymbol{C})$ 看作 V 的 de Rham 复形 $\{\Gamma(V,\Omega_V),d\}$ 的超上同调. 如果 V 是射影的，那么 V 带有一个 Kähler 度量，而且根据调和积分† 理论，Hodge 谱序列是退化的，并且 $E_1^{p,q}$ 和 $E_1^{q,p}$ 的复共轭 $\boldsymbol{C}$ 同构 (→[Hodge理论]).如果 V 是完备的,情况也是如此.

关于非奇异射影曲面的拓扑，Lefschetz 用所谓的 Lefschetz 束的方法作了研究. 对于定义在 $\boldsymbol{C}$ 上的一个 n 维射影非奇异簇 V，按照定义，V 的 **Lefschetz 束** (Lefschetz pencil) $\{W_t\}_{t\in\boldsymbol{P}^1}$ 是由 V 的超平面截面 W_t 所成的一个线束，使得 (i) 对于所有的 $t\in U=\boldsymbol{P}^1_{\boldsymbol{C}}-\{t_1,t_2,\cdots,t_d\}$，$W_t$ 是非奇异的; (ii) 每个 W_{t_i} 只有一个奇点而且是一个寻常二重点; (iii) $W_0\cap W_\infty$ 是非奇异的，这里我们设 $0,\infty\in U$. 通过 V 的一个超平面高次重复把 V 嵌入 $\boldsymbol{P}^N$，并且取 $\boldsymbol{P}^N$ 中超平面的一个一般线束 $\{H_t\}$，那么 $\{W_t=H_t\cap V\}$ 就是 V 的一个 Lefschetz 束. 通过沿 $W_0\cap W_\infty$ 来对 V 进行单项变换，我们就得到一个光滑簇 $\tilde{V}$ 和一个满射 $\pi:\tilde{V}\to\boldsymbol{P}^1$. 令 $W=\pi^{-1}(0)$，$\pi_U=\pi|\pi^{-1}(U)$，那么 $R^p\pi_{U*}\boldsymbol{Q}$ 是附于单演表示 $\varphi_p:\pi_1(U,0)\to GL(H^p(W,\boldsymbol{Q}))$ 的一个局部系. 如果 $p\neq n-1$，则 φ_p 是平凡的. 对于每个点 t_i，对应 $H^{n-1}(W,\boldsymbol{Q})$ 的一个闭链 δ_i，称为**消没闭链** (vanishing cycle)，使得: 如果 γ_i 是基于 0 围绕 t_i (反时钟方向) 一周的闭路，那么对于每个 $x\in H^{n-1}(W,\boldsymbol{Q})$，有 $\varphi_p(\gamma_i)(x)=x\pm\langle x,\delta_i\rangle\delta_i$，这里 $\langle\ \ \rangle$ 是 $H^{n-1}(W,\boldsymbol{Q})$ 的相交配对. $\varphi_p(\gamma_i)$ 称为 **Picard-Lefschetz 变换** (Picard-Lefschetz transformation). Lefschetz 的主要结果重述如下. (1) (**弱 Lefschetz 定理** (weak Lefschetz theorem)).对于 $0\leqslant i\leqslant n-2$，自然同态 $H^{2n-i}(V,\boldsymbol{Q})\to H^{2n-i-2}(W,\boldsymbol{Q})$ 是同构;而对于 $i=n-1$，是单的;或者等价地说，对于 $0\leqslant i\leqslant n-1$, $H_i(V,W,\boldsymbol{Q})=0$. (2) (**强Lefschetz 定理** (strong Lefschetz theorem)). 设 ξ 是对应于超平面截面 W 的 $H^2(V,\boldsymbol{Q})$ 的上同调类，并设 $L:H^*(V,\boldsymbol{Q})\to H^{*+2}(V,\boldsymbol{Q})$ 是由跟 ξ 的上积所定义的同态. 那么对于每个 $i\leqslant n$, $L^{n-i}:H^i(V,\boldsymbol{Q})\to H^{2n-i}(V,\boldsymbol{Q})$ 是一个同构. 对于带整系数的上同调,弱 Lefschetz 定理成立. 实际上，$V-W$ 具有实 n 维有限 CW 复形的伦型,并且对于 $r<n$，有 $\pi_r(V,W)=0$ [60]. 强 Lefschetz 定理等价于这样一个命题,即 $H^{n-1}(W,\boldsymbol{Q})$ 是由消没闭链 δ_i 张成的向量空间和由不变闭链 (即 $\varphi_{n-1}(\gamma_i)x=x$, $i=1,\cdots,d$) 张成的向量空间的直和. Lefschetz 原来对这个命题的证明是不完全的，并且还没有直接的拓扑证明. (2) 的超越方法的证明是应用调和积分理论给出的. Lefschetz 束的一种说法是，复流形 X 到圆盘 $D=\{Z||Z|<\varepsilon\}$ 上的一个固有射 $f:X\to D$ 使得 $f^*=f|f^{-1}(D^*)$ 在 $f^{-1}(D^*)$ 的每个点处有极大的秩，这里 $D^*=D-\{0\}$. 取定一个点 $s\in D^*$. 将 $\pi_1(D^*,s)$ 作用在 $H^k(W,\boldsymbol{Z})$ 上，$W=f^{-1}(s)$，我们就有一个表示 $\varphi_k:\pi_1(D^*,s)\to GL(H^k(W,\boldsymbol{Z}))$. 对于基于 s 绕 0 一周的闭路 γ，Picard-Lefschetz 变换 $\varphi_k(\gamma)$ 本质上是幂单的(即对某个整数 m，$\varphi_k(\gamma)^m$ 是幂单的).

对于定义在特征为 $p>0$ 的域 k 上的非奇异射影簇来说,上面的 Lefschetz 定理对于 l-adic 上同调 ($l\neq p$) 成立 [12 (*SGA7*), 65]. 利用定义在 k 上的代数簇的有限 étale 覆盖理论，我们能够定义**代数基本群** (algebraic fundamental group)和**代数同伦群** (algebraic homotopy groups)，当 $k=\boldsymbol{C}$ 时，它们分别是拓扑基本群和拓扑同调群的射影有限完备化 [12 (*SGA* 1), 17, 75]. 设 (X,x) 是具有孤立奇点 x 的复解析空间的一个芽. (X,x) 总是可代数化的，就是说，解析局部环 $\mathscr{O}_{X,x}$ 的完备化 $\hat{\mathscr{O}}_{X,x}$ 同构于定义在 $\boldsymbol{C}$ 上的一个代数簇的闭点的局部环的完备化 [15]. 将 (X,x) 嵌入 $(\boldsymbol{C}^m,0)$，设 $S_\varepsilon(D)$ 为

$\boldsymbol{C}^m$ 中以 0 为中心以 ε 为半径的球面(开球).如果 ε 充分小，那么 $K = X \cap S_\varepsilon$ 是一个紧定向微分流形. 对于 $\dim X = 2$，K 和一个二维球面 S^2 同胚当且仅当，X 在 x 处是光滑的 [46]. 设 (X, x) 是一个具有奇点的超曲面,定义方程为 $f = 0$. $\varphi(z) = f(z)/|f(z)|$ 定义了一个可微纤维丛 $\varphi: S_\varepsilon - K \to S^1$，称为 **Milnor 纤维化** (Milnor fibration). 每个纤维 $F_\theta = \varphi^{-1}(e^{i\theta})$ 均可平行化,且具有 μ 个 n 维球面的把 $S^n \vee \cdots \vee S^n$ 的伦型，并且 K 是 $(n-2)$ 连通的，这里 $n = \dim X$. 进一步，对于充分小的 $|c| \neq 0$，$f^{-1}(c) \cap D_\varepsilon$ 与 F 微分同胚([71]).数 μ 称为 (X, x) 的 **Milnor 数** (Milnor number). 如果 $\dim X = 1$，则 (S_ε, K) 是 S^3 中的一个连环;进一步,如果 K 是连通的，则 (S_ε, K) 是一个多重环面纽结(K. Brauner [58]). 设 $(X, 0)$ 由方程 $f(z) = z_1^{a_1} + z_2^{a_2} + \cdots + z_{n+1}^{a_{n+1}}$ 所定义,这里 $a_i \geq 2$, $i = 1, 2, \cdots, n+1$. 对于小的数 ε，置 $\Sigma(a_1, \cdots, a_{n+1}) = X \cap S_\varepsilon$. 于是 $\Sigma(a_1, \cdots, a_{n+1})$ 和 S^{2n-1} 同胚，当且仅当 $\Delta(1) = \Pi(1 - \omega_1\omega_2\cdots\omega_{n+1}) = \pm 1$，这里每个 ω_i 取遍 1 以外的所有 a_i 次单位根. 对于任意奇整数 $p \geq 7$ 和任意一个成为一个可平行化流形的边界的怪球面 Σ^p，存在整数 $a_i \geq 2$, $i = 1, \cdots, n+1 = (p+3)/2$，使得 Σ^p 和 $\Sigma(a_1, \cdots, a_{n+1})$ 微分同胚 [61]. 例如,流形 $\Sigma(2,2,2,3,6k-1)$, $k = 1, \cdots, 28$，组成 28 个不同的怪 7 维球面.

【Hodge 理论】 设 $H_{\boldsymbol{R}}$ 是一个包含格 $H_{\boldsymbol{Z}}$ 的有限维实向量空间，并设 $H = H_{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{C}$ 是它的复化. H(或 $H_{\boldsymbol{R}}$)上的一个权为 m 的 **Hodge 结构** (Hodge structure) 定义为一个直和分解 $H = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}$, $\overline{H}^{p,q} \cong H^{q,p}$，这里 $H^{p,q}$ 是复向量子空间,上面加"—"表示复共轭. 如果 H 和 H' 分别具有权为 m 和 m' 的 Hodge 结构，那么, $H \otimes H'$, $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{C}}(H, H')$, $\wedge^p H$ 和 H^* 分别具有权为 $m + m'$, $m' - m$, pm 和 $-m$ 的 Hodge 结构.对于一个权为 m 的 Hodge 结构 H, $F^pH = \bigoplus_{k \geq p} H^{k,m-k}$, $p = 0, 1, \cdots, m$，诱导出一个递减过滤. 设 H 是权为 m 的 Hodge 结构，Q 是 H 上的一个双线性型. 如果下面的三个条件满足，就说 Hodge 结构 H 由 Q 所极化: (i) Q 是定义在 $\boldsymbol{Q}$ 上的,且当 m 是偶(奇)数时, Q 是对称(斜对称)的. (ii) $Q(H^{p,q}, \overline{H}^{p',q'}) = 0$，除非 $p = p'$, $q = q'$. (iii) 对于非零的 $v \in H^{p,q}$, $(\sqrt{-1})^{p-q}Q(v, \bar{v}) > 0$. 设 V 是紧 Kähler 流形，那么 $H = H^n(V, \boldsymbol{C})$ 带有由 (p, q) 型分解诱导出的 Hodge 结构 (→ Kähler 流形). 如果 V 是一个紧复流形而且是同样维数的紧 Kähler 流形的一个全纯映射的象,情况也是这样.进一步，如果 V 是射影的，那么 Hodge-Riemann 双线性关系在 H 的由全体本原上同调类所构成的子空间 P 上定义一个自然极化.

设 V 是定义在 $\boldsymbol{C}$ 上的一个光滑代数簇，而 W 是一个复流形，并设 $\varphi: V \to W$ 是具有连通纤维的射影光滑射. 那么 $\boldsymbol{H} = R^m\varphi_*\boldsymbol{C}$ 是 W 上的一个具有平坦联络 ∇ 的平坦向量丛. ∇ 常被称为 **Gauss-Манин 联络** (Gauss-Manin connection)，并且,如果 W 也是代数的，那么 ∇ 也可以用代数的方式来定义.

对于每个纤维 $V_s = \varphi^{-1}(s)$, $s \in W$，过滤 $F^pH^m(V_s, \boldsymbol{C}) = \bigoplus_{k \geq p} H^{k,m-k}(V_s)$ 诱导出一个复子丛 $\boldsymbol{F}^p$，并且联络 ∇ 具有性质 $\nabla(\mathscr{O}(\boldsymbol{F}^p)) \subset \mathscr{O}(\boldsymbol{F}^{p-1} \otimes \boldsymbol{T}^*)$，这里 $\boldsymbol{T}$ 是 W 的切丛. 进一步，如果 W 是代数的，那么 ∇ 是具有 $\overline{W}$ 上的正则奇点的一个微分方程,这里 $\overline{W}$ 是 W 的一个光滑的紧化，使得 $\overline{W} - W$ 是有正规交叉的一个除子. 如果我们考虑 $\boldsymbol{H}$ 的由所有本原上同调类组成的子丛 $\boldsymbol{P}$，那么在每个纤维上的极化诱导出 $\boldsymbol{P}$ 上的一个 Hermite 伪度量. 关于 $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{F}^p$ 的曲率，Griffiths 做了研究 [24]. 存在关于极化 Hodge 结构的一个分类空间 D，并且存在从 W 的万有覆盖 $\widetilde{W}$ 到 D 内的一个全纯映射，通常叫做周期映射. D 不一定是有界对称域，但具有一些有趣的性质 [22, 25]. 在某些情形，关于适当的离散子群 Γ, D/Γ 是极化代数簇的参模空间(例如,曲线，Abel 簇).

P. Deligne [64] 把 Hodge 理论推广到抽象代数簇 (更一般地，$\boldsymbol{C}$ 上的有限型的概型)上. 最简单的情形是光滑非完备代数簇 X 的

Hodge 理论. 根据永田的嵌入定理，存在一个完备代数簇 $\bar{X}$，使得 $Y = \bar{X} - X$ 是一个子簇. 借助于広中的消解定理，我们可以设 $\bar{X}$ 是非奇异的，而 Y 是具有正规交叉的除子. 设 $\Omega_{\bar{X}}^1\langle Y\rangle$ 是沿 Y 有对数极点的亚纯一次形式的芽的层，就是说，它局部地可以写成 $\sum_{i=1}^{k} a_i(x)(dx_i/x_i) + \sum_{j=k+1}^{n} a_j(x)dx_j$，这里 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 X 中以 $p \in Y$ 为中心的局部坐标系，使得 $x_1 \cdots x_k = 0$ 是 Y 的一个局部方程，并且 $a_i(x), a_j(x)$ 在 p 点是全纯的. 利用复形 $\{\Omega_{\bar{X}}^{\bullet}\langle Y\rangle = \wedge^p \Omega_{\bar{X}}^1\langle Y\rangle, d\}$ 和一个适当的过滤，Deligne 证明了 $H = H^m(X, \boldsymbol{C})$ 具有一个混合 Hodge 结构，并且这个结构与 $\bar{X}$ 的选取无关. H 的混合 Hodge 结构由两个有限过滤组成，即定义在 $\boldsymbol{Q}$ 上的加权过滤 $0 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset W_n \subset \cdots \subset H$，和使得 F^p 在 W_n/W_{n-1} 上诱导出一个权为 n 的 Hodge 结构的 Hodge 过滤 $0 \subset \cdots \subset F^p \subset F^{p+1} \subset \cdots \subset H$. 作为一个推论，他证明了沿 Y 有对数极点的 $\bar{X}$ 上的亚纯 p 形式（即 $\Omega_{\bar{X}}^p(Y)$ 的一个截面）在 X 上是 d 闭的，并且 $\omega = 0$ 当且仅当 $\omega|_X$ 在 $H^p(X, \boldsymbol{C})$ 中为零. $H^m(X, \boldsymbol{C})$ 上的混合 Hodge 结构理论有一个重要应用：设 V 和 W 是光滑代数簇，并设 $\varphi: V \to W$ 是光滑射影射. 如果 $\bar{V}$ 是 V 的一个光滑紧化，那么标准同态 $H^m(\bar{V}, \boldsymbol{Q}) \to H^0(W, R^m\varphi_*\boldsymbol{Q})$ 是满的. 取定一点 $s \in W$，$\pi_1(W, s)$ 作用在 $H^m(V_s, \boldsymbol{Q})$ 上. 那么这个作用是半单的.

【变形，参模，代数空间】 在本节中，为简单起见，设 k 是代数闭域. 设 X 是 k 上的一个代数概型. 以 s_0 为基点的、在 k 上的**连通概型 S 上的 X 的一个变形** (deformation of X over a connected scheme S) 由下面两部分组成：(1) 平坦而且是有限型的射 $p: \mathfrak{X} \to S$. 如果 $\mathfrak{X}$ 是完备的，那么 p 还是固有的. (2) 一个闭点 $x_0 \in S$，使得纤维 $\mathfrak{X} \times_S k(s_0)$ 与 X 同构. 对于任意闭点 $s \in S$，纤维 $X_s = \mathfrak{X} \times_S k(s)$ 就称为 X 的一个**变形** (deformation). 如果 X 是光滑而且完备的，我们进一步设 p 是光滑的. 同样，我们能够定义极化代数流形的变形，X 在 k 上代数概型 Y 内的嵌入变形，具有孤立奇点的仿射概型的变形，以及 k 上一个固定代数概型上的向量丛的变形. 这种理论有两个方面，即局部理论和整体理论.

设 $(R, \mathfrak{m})$ 是完备 Noether 局部环，$R/\mathfrak{m} = k$. 令 $R_n = R/\mathfrak{m}^n$. X 的一个形式变形 X_R 是一个序列 $\{X_n\}$，使得 (i) X_n 是 X 在 $\mathrm{Spec}(R_n)$ 上的一个变形，(ii) 对任意的 n，存在一个相容的同构序列 $X_n \otimes_{R_n} R_{n-1} \simeq X_{n-1}$. 设 (FLA/k) 是有限维交换局部 k 代数的范畴. 变形的局部理论就是关于 (FLA/k) 到 (Set) 的共变函子 F 的研究，这里，对于 $A \in (FLA/k)$，$F(A)$ 是 X 在 $\mathrm{Spec}(A)$ 上的变形的同构类的集合. 这种函子一般说既不是可表示的，也不是射影可表示的（即存在 X 的形式变形 X_R 使得 $F(A) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(R, A)$）. 但是在关于 F 的适当条件之下，F 具有壳 R. 就是说，存在 X 的一个形式变形 X_R 和一个自然变换 $j: G \to F$，这里 $G(A) = \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(R, A)$，使得 j 是形式光滑的（即对于 (FLA/k) 中的任意满射 $A' \to A$，$G(A') \to G(A) \otimes_{F(A)} F(A')$ 是满的）. 形式变形 X_R 称为 X 的一个万有的变形. 壳 R 除了非标准同构外是唯一的. 变形函子 F 具有壳 R，如果 X 是 (i) k 上的完备代数概型，或 (ii) 带孤立奇点的仿射概型，或 (iii) k 上的极化代数簇，或 (iv) k 上的完备代数概型上的向量丛. 如果存在 X 在 k 上概型 S 上关于基点 s_0 的变形 $\pi: \mathfrak{X} \to S$，使得 $R = \hat{\mathcal{O}}_{S, s_0}$，$X_n \cong \mathfrak{X} \otimes R_n$，那么形式变形 $\{\pi_n: X_n \to \mathrm{Spec}(R_n)\}$ 就称为可代数化的. M. Artin 研究了万有的变形的可代数化性质. 由于 S 为概型这一假设限制过严，Artin 引进了代数空间的概念，并且考虑了在代数空间的范畴中的可代数化性 [14, 16]. 对于完备代数簇，万有的变形不一定是可代数化的，因而我们需要考虑极化代数簇的变形. 具有一个孤立奇点的仿射簇的万有的变形在代数空间的范畴中是可代数化的. 对于整体理论，我们需要射影性假设，而且这种理论本质上归结为 Hilbert 概型（或周簇）理论. 参模问题被看作是关于 X 的变形的所有同构类的集合 M 的研究. 通常我们考虑

极化簇的参模．在许多情形下，参模空间可以通过下面的等价关系作为 Hilbert 概型的某个(局部闭)子集H的商空间来得到：$s \sim s' \in H$当且仅当作为极化簇，有$X_s \simeq X_{s'}$，这里$\pi: \mathfrak{X} \to H$，$\pi^{-1}(s) = X_s$（松阪[41]）．这个等价关系常常是由一个可约代数群G的作用诱导出来的．设可约代数群G作用在一个代数k概型Z上．G不变射$f: Z \to Y$（即对于G在Y上的平凡作用，f是一个G等价射）称为一个**几何商**（geometric quotient），如果(1) f是一个仿射的满射且$f_*(\mathcal{O}_Z)^G = \mathcal{O}_Y$，(2)若$X$是$Z$的一个$G$稳定闭子集，则$f(X)$在$Y$中是闭的，(3)对于$x_1, x_2 \in Z$，$f(x_1) = f(x_2)$当且仅当$x_1$和$x_2$的$G$轨道相同．设$G$是一个可约代数群，$\chi: G \to \mathrm{Aut}(V)$是$k$上的一个有限维向量空间上的一个有理表示，$v_0 \neq 0$是一个$G$不变点，于是存在$V$上的一个次数$\geqslant 1$的$G$不变齐次多项式$F$，使得$F(v_0) \neq 0$（Haboush [66]）．因此，如果可约代数群G作用在代数k仿射概型$\mathrm{Spec}(A)$上，那么不变环A^G是有限生成的k代数；再者，如果$\mathrm{Spec}(A)$中任意G轨道都是闭的，那么自然射$\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A^G)$是一个几何商[51]．对于带有可约群$G$的作用的$k$上拟射影概型$Z$，我们需要稳定点的概念[47]．$Z$的稳定点所成的子集，由$Z$的$G$稳定开子概型$Z'$的全体几何点组成，并且存在几何商$f: Z' \to Y$，这里$Y$是拟射影的（Mumford [47]，Sechadri [81]，Haboush [66]）．用这种方式，Mumford 证明了非奇异完备不可约代数曲线和极化 Abel 簇的粗参模概型的存在性．但是在一般情形下，稳定点的分析是很困难的，而且需要推广概型的范畴使得较容易地得到一个几何商．松阪引进了Q簇的概念[40]．M. Artin 引进了代数空间的概念，它是Q簇的一个特殊情形．**代数空间**（algebraic space）X由一个仿射概型U和一个闭子概型$R \subset U \times U$组成，使得(1) R是一个等价关系，(2)射影$p_i: R \to U$ $(i = 1, 2)$都是 étale．（通常把它记作$R \rightrightarrows U \to X$．）仿射概型$V$到代数空间$X$的一个射$g: V \to X$，由一个闭子概型$W \subset U \times V$所构成，使得(1)射影$W \to V$是 étale 且是满的，(2) $U \times U \times Y$的两个闭子概型$R \times_U W$和$W \times_V W$相同．设$S \rightrightarrows V \to Y$是一个代数空间．$\mathrm{Hom}(Y, X)$定义作$\mathrm{Hom}(V, X) \rightrightarrows \mathrm{Hom}(S, X)$的核．如果$Y$是仿射概型，则由于 étale 下降原理，$\mathrm{Hom}(Y, X)$的这个定义与前面的定义等价．于是代数空间构成一个范畴，它包含了概型的范畴．我们能够定义代数空间的结构层并建立上同调理论．关于概型的许多重要概念和定理，可以推广到代数空间上．每个代数空间有一个稠密开子集，它是一个仿射概型．群代数空间是一个群概型．设$k = \mathbf{C}$．如果一个代数群G正常地作用在一个代数k概型上而有一个有限稳定子群，那么商空间作为代数空间是存在的．在这方面，Popp 证明了作为代数空间的一般型代数曲面的参模空间的存在性（→ 代数曲面，还有[76]）．再者，$\mathbf{C}$上每个有限型的分离代数空间X带有一个自然的解析空间的结构X^{an}．如果存在从分离代数空间X到解析空间Y上的正常修正满射$f: X^{an} \to Y$，那么Y具有代数空间的结构，并且f成为代数空间的射(Artin [14])．对于任意代数闭域k，Artin 引进了形式代数空间和形式收缩的概念，并且得到了和代数空间类似的结果．不可约紧复解析空间X，如果它的代数维数等于$\dim X$，则称为 **Мойшезон 空间**（Moishezon space）．作为上面定理的一个推论，每个 Мойшезон 空间X带有代数空间的结构M，使得$X \cong M^{an}$．

【形式概型】 设A是一个环，为简单起见，我们设它是 Noether 环，并设I是A的一个理想．取$\{I^n\}_{n>0}$作为0的基本邻域系，我们就能对A引进一个拓扑环的结构，称为 **I-adic 拓扑**（I-adic topology）．A关于I-adic 拓扑的完备化同构于射影极限$\hat{A} = \varprojlim_{n>0} A/I^n$（这里$A/I^n$看作离散拓扑环），称为 **$A$ 沿 I 的完备化**（completion of A along I）．如果A是 Noether 环，则$\hat{A}$也是 Noether 环．存在一个标准连续同态$i: A \to \hat{A}$，它的核由满足$a - 1 \in I$的零除子所构成（Krull 相交定理；→ 交换环）．如果i是同构，我们就称A关于I是**完备的**（complete）．

$\hat{A}$ 的拓扑就是 $\hat{I}$-adic 拓扑，这里 $\hat{I}=i(I)\hat{A}$，并且 $\hat{A}$ 关于 $\hat{I}$ 是完备的.

取一个 Noether 环 A，并且它关于 I 是完备的，我们把它沿 I 的完备化和 A 等同起来而把 A 看作一个 I-adic 拓扑环. 在 $\mathfrak{X}=V(I)\subset \mathrm{Spec}(A)$ 上，我们能够如下定义一个拓扑环的层 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$：对于 $\mathcal{D}(f)=D(f)\cap X, f\in A$，$\Gamma(\mathcal{D}(f),\mathcal{O}_X)=\varprojlim_{n>0} A_f/I^nA_f$. 我们把 $(\mathfrak{X},\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ 称为 A 的**形式谱**(formal spectrum)，记作 $\mathrm{Spf}(A)$. I 称为 $\mathrm{Spf}(A)$ 的一个**定义理想**(defining ideal). (局部 Noether) **形式概型** (formal scheme) 定义为一个拓扑局部环式空间并且它局部地同构于一个 (Noether 环的) 形式谱. 如果我们用拓扑局部环式空间的范畴中的那些射来定义两个形式概型之间的射，那么形式概型就构成一个范畴.

对于分别有定义理想 I 和 J 的两个形式谱 $\mathrm{Spf}(A)$ 和 $\mathrm{Spf}(B)$，在形式概型的范畴中，直积 $\mathrm{Spf}(A)\times\mathrm{Spf}(B)$ 是 $A\otimes B$ 沿 $I\otimes B+A\otimes J$ 的完备化的形式谱. 可以类似地构造形式概型的纤维积. 形式概型 $\mathfrak{X}$ 称为**分离的**(separated)，如果对角射 $\Delta_{\mathfrak{X}}:\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$ 的象是闭的.

对于有理想 I 的一个环 A，形式谱 $\mathrm{Spf}(\hat{A})$ (具有定义理想 $\hat{I}$) 称为 **Spec(A)沿 $V(I)$ 的完备化** (completion of $\mathrm{Spec}(A)$ along $V(I)$). 同样，对于概型 X 和闭子概型 X'，我们能够定义 **X 沿 X' 的完备化** (completion of X along X') $X_{|X'}$. 分离概型的每个完备化都是分离的. 对于 X 上的凝聚层 F，可以定义 **F 沿 X' 的完备化 $F_{|X'}$** (completion $F_{|X'}$ along X')，在 X 是局部 Noether 概型的假设下，$F_{|X'}$ 也是凝聚的.

这样，我们可以用类似于讨论概型的方式来发展形式概型的理论，称它为"**形式几何**"(formal geometry) (关于更一般的定义和进一步的讨论，参看 [10, 31]). 粗略地说，$X_{|X'}$ 上的函数是关于 X' 的法方向的形式 Taylor 级数，它的系数都是 X' 上的正则函数. 形式完备化方法能使我们在代数几何中引进"解析的"或"无穷小的"方法. 这里，我们叙述许多重要定理中的两条定理. (1)**固有射的基本定理**(the fundamental theorem of proper mapping)：设 $f:X\to Y$ 是局部 Noether 概型之间的一个固有射，Y' 是 Y 的一个闭子概型，$X'=X\times_Y Y'$ 是 Y' 的逆象. 用 $\hat{X},\hat{Y}$ 表示 X 和 Y 分别沿 X' 和 Y' 的完备化. 我们有形式概型之间的诱导固有射 $\hat{f}:\hat{X}\to\hat{Y}$. 于是，对于 X 上的每个凝聚 $\mathcal{O}_X$ 模 F，有典范同构 $(R^nf_*(F))_{|Y'}\cong R^n\hat{f}_*(F_{|X'})$, $n\geqslant 0$. 这个定理可以用来证明 **Zariski 连通性定理** (Zariski's connectedness theorem)：对于局部 Noether 概型之间满足 $f_*(\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_Y$ 的固有射 $f:X\to Y$，我们有：对于 $y\in Y$，f 的每个纤维 $f^{-1}(y)$ 是连通的，并且是非空的. (2) 我们用和 (1) 中同样的符号，进一步设 A 是一个 Noether 环且关于理想 I 是完备的，设 $Y=\mathrm{Spec}(A)$ 且 $Y'=V(I)$. 那么对应 $F\to F_{|X'}$ 给出具有 Y 上真支集的凝聚 $\mathcal{O}_X$ 模的范畴和具有 $\hat{Y}$ 上真支集的凝聚 $\mathcal{O}_{\hat{X}}$ 模的范畴之间的一个等价. 这个定理在代数簇的变形†理论中起着重要的作用.

【参】 [1] A. Weil, Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 第二版, 1962; [2] A. Weil, On Picard varieties, Amer. J. Math., **74** (1952), 865—894; [3] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math., (2) **61** (1955), 197—278; [4] J.-P. Serre, Exemple de variété projectives conjuguées non homéomorphes, C. R. Acad. Sci. Paris, **258** (1964), 4194—4196; [5] Séminaire H. Cartan et C. Chevalley, Géométrie algébrique, Ecole Norm. Sup., 1955—1956; [6] Séminaire C. Chevalley, Anneaux de Chow et applications, Ecole Norm. Sup., 1958; [7] C. Chevalley, Fondements de la géométrie algébrique, Secrétariat Mathématique, 1958; [8] C. Chevalley, Sur la théorie de la variété de Picard, Amer. J. Math., **82** (1960), 435—490; [9] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Inst. H. Poincaré, Univ. Paris, 1962; [10] A. Grothendieck, Eléments de géométrie algébriques, Publ. Math. Inst. HES, I. Le langage des schémas, no. 4, 1960 (A. Grothendieck-J. A. Dieudonné, Springer, 1971); II. Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes, no. 8, 1961; III. Etude cohomologique des faisceaux cohérents, no. 11, 1961, no. 17, 1963; IV. Etude locale des schémas et des morphismes des schémas, no. 20, 1964, no. 24, 1965, no. 28, 1966, no. 32, 1967; [11] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. Inst. HES, no. 29, 1966, p. 351—359; [12] Cited as SGA. A. Grothendieck and others, Séminaire de géométrie algébrique: SGA 1, Revêtements étales et groupe fondamental, Lecture notes in math. 224, Springer, 1971; SGA2, Cohomologie locale des faisceaux et théorémes de Lefschetz locaux et globaux, North-Holland, 1962; SGA3 (with M. Dema-

zure), Schémas en groupes I, II, III, Lecture notes in math. 151, 152, 153, Springer, 1970; SGA 4 (with M. Artin and J. L. Verdier), Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Lecture notes in math. 269, 270, 305, Springer, 1972—1973; SGA 5, Cohomologie l-adique et fonctions L; SGA6, Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, Lecture notes in math. 225, Springer, 1971; SGA 7, Groupes de monodromie en géométrie algébrique, pt. I, Lecture notes in math. 288; pt. II (by P. Deligne and N. Katz), 340, Springer, 1972—1973; [13] S. S. Abhyankar, Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press, 1966; [14] M. Artin, Algebraization of formal moduli I, Global analysis, Univ. of Tokyo Press and Princeton Univ. Press (1969), 21—71; II, Ann. of Math., (2) **91** (1970), 83—135; [15] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. Inst. HES, no. 36, 1969, p. 23—58; [16] M. Artin, Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques, Les Presses de l'Université de Montréal, 1973; [17] M. Artin-B. Mazur, Etale Homotopy, Lecture notes in math. 100, Springer, 1969; [18] M. Artin-D. Mumford, Some elementary examples of unirational varieties which are not rational, Proc. London Math. Soc., (3) **25** (1972), 75—95; [19] M. F. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc., (3) **7** (1957), 414—452; [20] W. V. D. Hodge-M. F. Atiyah, Integrals of the second kind on an algebraic variety, Ann. of Math., (2) **62** (1955), 5—91; [21] J. Dieudonné, Fondements de la géométrie algébrique moderne, Advances in Math., **3** (1969), 322—413; [22] P. A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds; summary of main results and discussion of open problems, Bull. Amer. Math. Soc., **76** (1970), 228—296; [23] P. A. Griffiths, On the periods of certain rational integrals I, II, Ann. of Math., (2) **90** (1969), 460—495, 498—541; [24] P. A. Griffiths, Periods of integrals on algebraic manifolds III, Publ. Math. Inst. HES, no. 38, 1970, p. 125—180; [25] P. A. Griffiths-W. Schmid, Recent developments in Hodge theory: a discussion of techniques and results. Discrete subgroups of Lie groups and application to moduli, Oxford Univ. Press, 1975, p. 31—127; [26] R. Hartshorne, Residues and duality, Lecture notes in math. 20, Springer, 1966; [27] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture notes in math. 156, Springer, 1970; [28] R. Hartshorne, Introduction to algebraic geometry, Prentice-Hall, 1976; [29] H. Hironaka (広中平祐), Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math., (2) **79** (1964), 109—326; [30] H. Hironaka (広中平祐), Smoothing of algebraic cycles of small dimensions, Amer. J. Math., **90** (1968), 1—54; [31] H. Hironaka (広中平祐),-H. Matsumura (松村英之), Formal functions and formal embeddings, J. Math. Soc. Japan, **20** (1968), 52—82; [32] J. Igusa (井草準一), On Picard varieties attached to algebraic varieties, Amer. J. Math., **74** (1952), 1—22; [33] J. Igusa (井草準一), Arithmetic variety of moduli for genus two, Ann. of Math., (2) **72** (1960), 612—649; [34] K. Kodaira (小平邦彦), Some results in the transcendental theory of algebraic varieties, Ann. of Math., (2) **59** (1954), 86—134; [35] K. Kodaira (小平邦彦), On Kähler varieties of restricted type, Ann. of Math., (2) **60** (1954), 28—48; [36] K. Kodaira (小平邦彦), On compact analytic surfaces I, II, Ann. of Math., (2) **71** (1960), 111—152; **77** (1973), 563—626; [37] K. Kodaira (小平邦彦), On the structure of compact complex analytic surfaces I, II, III, IV, Amer. J. Math., **86** (1964), 751—798; **88** (1966), 682—721; **90** (1968), 53—83, 1048—1066; [38] T. Matsusaka (松阪輝久), Polarized varieties, fields of moduli and generalized Kummer varieties of polarized Abelian varieties, Amer. J. Math., **80** (1958), 45—82; [39] T. Matsusaka (松阪輝久), Algebraic deformations of polarized varieties, Nagoya Math. J., **31** (1968), 185—245; [40] T. Matsusaka (松阪輝久), Theory of Q-varieties, Publ. Math. Soc. Japan, no. 8, Tokyo, 1965; [41] T. Matsusaka (松阪輝久), Polarized varieties with a given Hilbert polynomial, Amer. J. Math., **94** (1972), 1027—1077; [42] Б. Г. Мойшезон, Критерий проекивности полных алгебраических абстрактных многообразий, Изв. Акад. Наук СССР, **28**(1964), 179—224; [43] D. Mumford, Pathologies of modular algebraic surfaces, Amer. J. Math., **83** (1961), 339—342; [44] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry, Amer. J. Math., **84** (1962), 642—648; [45] D. Mumford, Pathologies III, Amer. J. Math., **89** (1967), 94—104; [46] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. Math. Inst. HES, no. 9, 1961; [47] D. Mumford, Geometric invariant theory, Springer, 1965; [48] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1966; [49] M. Nagata (永田雅宜), A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains I, II, III, Amer. J. Math., **78** (1956), 76—116; **80** (1958), 382—420; **81** (1959), 401—435; [50] M. Nagata (永田雅宜), Imbedding of an abstract variety in a complete variety, J. Math Kyoto Univ., **2** (1962), 1—10; [51] M. Nagata (永田雅宜), Note on orbit spaces, Osaka Math. J., 14 (1962), 21—34; [52] F. Severi, Serie, sistemi, d'equivalenza corrispondenze algebrische sulle varietà algebrische I, Cremona, 1942; [53] F. Severi, Geometria dei sistemi algebrichi sopra una superficie e sopra una varietà algebrica II, III, Cremona, 1958, 1959; [54] O. Zariski, Foundations of a general theory of birational correspondences, Trans. Amer. Math. Soc., **53** (1943), 490—542; [55] O. Zariski, Theory and applications of holomorphic functions on algebraic varieties over arbitrary ground fields, Mem. Amer. Math. Soc., **5** (1951); [56] O. Zariski, Complete linear systems on normal varieties and a generalization of a lemma of Enriques-Severi, Ann. of Math., (2) **55** (1952), 552—592; [57] O. Zariski, Algebraic sheaf theory, Bull. Amer. Math. Soc., **62** (1956), 117—141; [58] O. Zariski, On the topology of algebroid singularities, Amer. J. Math., **54** (1932), 453—465; [59] O. Zariski, Studies in equisingularity I, II, III, Amer. J. Math., **87** (1965), 507—536; **87** (1965), 972—1006; **90** (1968), 961—1023; [60] A. Andreotti-T. Frankel, The second Lefschetz theorem on hyperplane

sections, Global Analysis, Univ. of Tokyo Press and Princeton Univ. Press, 1969; [61] E. Brieskorn, Beispiele, zur Differentialtopologie von Singularitäten, Inventiones Math., 2 (1966), 1—14; [62] W.-L. Chow (周炜良), On the projective embedding of homogeneous varieties, Algebraic geometry and topology, Princeton Univ. Press, 1957, p. 122—128; [63] C. H. Clemens-P.A. Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math., (2) **95** (1972), 281—356; [64] P. Deligne, Théorie de Hodge: I, Actes Congr. Intern. Math., 1970, Nice, Gauthier-Villars; II, III, Publ. Math. Inst. HES, no. 40, 1971, p. 5—57; no. 44, 1974; [65] P. Deligne, La conjecture de Weil I, Publ. Math. Inst. HES, no. 43, 1974, p. 273—307; [66] W. J. Haboush, Reductive groups are geometrically reductive, Ann. of Math., (2) **102** (1975), 67—183; [67] В. А. Исковский-Ю. И. Манин, Three dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem, Мат. Сб, **86** (1971), 140—166; [68] N. Katz, Nilpotent connections and the monodromy theorem; applications of a result of Turittin, Publ. Math. Inst. HES, no. 39, 1971, p. 175—232; [69] S. Lang-A. Néron, Rational points of Abelian varieties over function fields, Amer. J. Math., **81** (1959), 95—118; [70] S. Łojasiewicz, Triangulation of semianalytic sets, Ann. Scuola Norm. Pisa, **18** (1964), 449—474; [71] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1968; [72] J. P. Murre, Reduction of the proof of the non-rationality of Mumford, Compositio Math., **27** (1973), 63—82; [73] Y. Nakai, (中井喜和), A criterion of an ample sheaf on a projective scheme, Amer. J. Math., **85** (1963), 14—26; [74] A. Néron, Problèmes arithmétiques et géométriques attachés à la notion du rang d'une courbe algébrique, Bull. Soc. Math. France, **80** (1952), 101—166; [75] H. Popp, Fundamentalgruppen algebraischer Mannigfaltigkeiten, Lecture notes in math. 176, Springer, 1970; [76] H. Popp, On moduli of algebraic varieties II, Compositio Math., **28** (1974), 51—81; [77] A. A. Ройтман, Rational equivalence of zero cycles, Мат, сб., **89** (1972), 569—585; [78] L. Roth, Algebraic threefolds, Springer, 1955; [79] P. Samuel, Relations d'équivalence en géométrie algébrique, Proc. Intern. Congr., 1958, Edinburgh, Cambridge Univ. Press, p. 470—487; [80] M. Schlessinger, Functors on Artin rings, Trans. Amer. Math. Soc., **130** (1968), 208—222; [81] C.S. Sechadri. Quotient space modulo reductive algebraic groups, Ann. of Math., (2) **95** (1972), 511—556; [82] I. R. Šafarevič (И. Р. Шафаревич), Basic algebraic geometry, Springer, 1974; [83] A. H. Тюрин, Успехи Мат. Наук.; English translation, Five lectures on three-dimensional varieties, Russian Math. Surveys, **27**, no. 5 (1972), 1—53.

Abel 簇 [英 Abelian variety 法 variété abélienne 德 Abelsche Mannigfaltigkeit 俄 абелево многообразие 日 アーベル多様体] 【历史】 N. H. Abel 明确地把代数函数看作复变量函数，并且注意到椭圆积分 $u=\int^x \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$ ($f_4(x)$ 是 x 的一个四次多项式）的反函数即椭圆函数 $x=x(u)$ 的双周期性．而后，C. G. J. Jacobi 把椭圆函数 $x=x(u)$ 用 ϑ 级数具体地表示出来．椭圆函数不外乎是亏格为 1 的情形下的 Abel 函数，所以作为它的自然发展来说，对于超椭圆积分的反函数或更一般地对 Abel 积分的反函数进行考察，就是当然的了．Jacobi 研究了亏格为 2 的第一种超椭圆积分 $\int^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{f_6(x_1)}}$ 及 $\int^{x_2}\frac{x_2dx_2}{\sqrt{f_6(x_2)}}$ ($f_6(x)$ 是 x 的一个六次多项式)，得到了四重周期的多值函数；如果把上面各个积分分别换成两个积分的和

$$u_1=\int^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{f_6(x_1)}}+\int^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{f_6(x_2)}}$$

及

$$u_2=\int^{x_1}\frac{x_1dx_1}{\sqrt{f_6(x_1)}}+\int^{x_2}\frac{x_2dx_2}{\sqrt{f_6(x_2)}}$$

来考察，则发现 x_1 和 x_2 的对称函数 $s_1=x_1+x_2$ 与 $s_2=x_1x_2$ 都是 u_1, u_2 的四重周期的单值函数．他进而猜想，函数 s_1, s_2 可以用 u_1 和 u_2 的 ϑ 级数来表示，后来 J. G. Rosenhain 和 A. Göpel 证实了这一点．

把这些结果推广到亏格 $g\geqslant 1$ 的超椭圆积分上，进而推广到一般 Abel 积分上，就是所谓的 Jacobi 逆问题：设 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ 是亏格为 g 的代数曲线上的线性无关的微分，对于任意给定的复数向量 $(u_1,\cdots,u_g)$，求满足关系式

$$\sum_{j=1}^{g}\int^{P_j}\omega_i\equiv u_i\ (\text{mod 周期}),\ i=1,\cdots,g$$

的点组 $(P_1,\cdots,P_g)$，并且把它作为 $(u_1,\cdots,u_g)$ 的函数具体地表示出来．这个问题成了十九世纪后半叶数学家们注意的中心问题．一般地说，$(P_1,\cdots,P_g)$ 除了顺序以外是唯一确定的，所以，把这些点的坐标函数的对称式作为 $(u_1,\cdots,u_g)$ 的函数表示出来，进而把基本 Abel 函数作为 $(u_1,\cdots,u_g)$ 的函数表示出来，这也就是求解 Jacobi 的问题．实际上，B. Riemann 已经成功地把它们表示成 Θ 函数的有理

函数. 这样，Abel 函数理论的研究，就以 Jacobi 逆问题作为出发点.

Riemann 以后，H. Poincaré, G. Frobenius, E. Picard 等人越过了 Jacobi 逆问题，而对一般的多重周期函数进行了研究.进入本世纪后，随着多变量函数论和代数几何学的显著发展，更加认识到 Abel 函数和 Abel 簇理论的重要性. 意大利学派的代数几何学家，S. Lefschetz 及 C. L. Siegel 等人的研究是突出的. 近来，A. Weil 抛开了分析学而用纯代数方法成功地建立了 Abel 簇的理论([21]). 这不仅从代数几何学的角度看是重要的，而且对于代数几何在数论方面的应用，也具有极其重要的意义.

Abel 簇的理论，大致可分为代数理论和解析理论两个方面.

【代数理论】 当群簇†完备†时，群运算是可交换的；这样的群簇称为 **Abel 簇**. 如果 Abel 簇 A 的一个子簇 B 同时是 A 的一个子群，那么 B 自然也是一个 Abel 簇，称它为 A 的**子 Abel 簇** (Abelian subvariety). 一般地，当 A 的一个代数子集 $\mathfrak{B}$ 是 A 的一个子群时，那么，$\mathfrak{B}$ 中含有单位元的分支 B 是 A 的一个子 Abel 簇，并且 $\mathfrak{B}$ 是 B 及其有限个陪集的并. 如果 A 是在域 k 上定义的，那么 A 的任意子 Abel 簇可以定义在 k 的有限次可分扩域上 (W.-L. Chow (周炜良)定理). 如果 A 除单位元及 A 本身外没有其它的子 Abel 簇，则称 A 是**单的** (simple).

任意代数簇 V 到 Abel 簇的有理映射†，是在 V 的全体单点上定义的. 这就意味着 Abel 簇是所有和它双有理等价的代数簇中的**极小模型** (minimal model).

【同态】 如果 Abel 簇 A 到 Abel 簇 B 的一个有理映射 f 同时又是群的同态，则称 f 为 A 到 B 的一个**同态** (homomorphism). 设 F 为 A 到 B 的一个有理映射，那么，F 可以通过 A 到 B 的一个同态 F_0 和单位元的象 $F(0)$ 表示成 $F(x) = F_0(x) + F(0)\ (x \in A)$. 由此可知，代数簇的结构和它作为 Abel 簇的结构，本质上是唯一确定的. 当同态 f 是双有理映射时，称 f 是一个**同构** (isomorphism). 同构给出群的同构对应，但其逆不一定正确. 设 A 和 B 是维数相等的两个 Abel 簇，如果存在从 A 到 B 的满同态，那么这样的同态称为**同种** (isogeny)，并称 A 与 B 是**同种的** (isogenous). 这个关系是一个等价关系. 任意一个 Abel 簇和若干单 Abel 簇的直积是同种的.

Abel 簇 A 到 Abel 簇 B 的同态的全体记作 $\mathrm{Hom}(A, B)$. 对于 $\lambda \in \mathrm{Hom}(A, B)$ 有 $\lambda(A) = \nu(\lambda)B$ 时，称 $\nu(\lambda)$ 为 λ 的**阶** (order). 当 λ 是满射时，$\nu(\lambda) \neq 0$，并且 λ 的核 $\{t \in A \mid \lambda t = 0\}$ 构成一个阶至多为 $\nu(\lambda)$ 的有限群. $\mathrm{Hom}(A, B)$ 是具有限个生成元的自由加法群. 特别是，当 $A = B$ 时，$\mathrm{Hom}(A, B)$ 具有环的结构，称为 A 的**自同态环** (endomorphism ring)，记作 $\mathfrak{U}(A)$. 置 $\mathfrak{U}_0(A) = \mathfrak{U}(A) \otimes \boldsymbol{Q}$，即把 A 的系数域扩张到有理数域 $\boldsymbol{Q}$，那么，如果 $\mathfrak{U}(A)$ 是单的，则 $\mathfrak{U}_0(A)$ 是一个可除代数†，而在一般情形下，$\mathfrak{U}_0(A)$ 与可除代数上的若干全阵代数的直积同构. 因此，同态环是一个半单代数†. 特别当 A 的维数为一即 A 为椭圆曲线时，$\mathfrak{U}_0(A)$ 是熟知的：特征为 0 时，$\mathfrak{U}_0(A)$ 是有理数域或是一个虚二次域†；而特征 $p > 0$ 时，除上述两个域外，$\mathfrak{U}_0(A)$ 也可能是 $\boldsymbol{Q}$ 上的四元数体†.

设 k 是具有 q 个元的有限域. 一个代数整数称为对于 q 的 **Weil 数** (Weil number)，如果它的每个共轭具有绝对值 $\sqrt{q}$. 如果 A 是定义于 k 上且在 k 上为单的 Abel 簇，则如 Weil 所证明的，A 的 q 幂自同态 $x \to x^q$ 确定对于 q 的 Weil 数的一个共轭类 (→ζ 函数). 进一步，我们还有下面的分类定理 (J. Tate, T. Honda (本多波雄))：在 k 上的 k 单 Abel 簇的所有 k 同种类所成的集合与对于 q 的 Weil 数的所有共轭类所成的集合之间存在着一一对应. Tate 还确定了 $\boldsymbol{Q}$ 上的可除代数 $\mathfrak{U}_0(A)$ 的结构，它是用分解 q 幂自同态为素理想来描述的.

【除子】 Abel 簇 A 的全体除子†构成的加法群记作 $\mathfrak{G}$. 代数等价†于 0 的除子所成的集合 $\mathfrak{G}_a$ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个子群，并且商群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_a$ 是无挠群. 这就意味着数值等价†关系和代数等价†关系是一致的. 这个关系我们用≡表示. 由 A 的

一点 a 决定的平移 $T_a: A \ni x \to x + a$，就 A 作为簇来说是处处正则的双有理映射. A 的除子 X 在 T_a 之下的象记作 X_a. 除子 X 满足 $X \equiv 0$ 的充分必要条件是，对于 A 的所有点 a，X_a 与 X 线性等价. 再者，从商群 $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_a$ 到自同态环 $\mathfrak{U}(A)$ 的同构是存在的. Abel 簇 A 的 Albanese 簇†就是 A 本身，而 A 的 Picard 簇† $\hat{A}$ 则与 A 是同种的. 特别是，关于 Jacobi 簇† J 有 $\hat{J} = J$ 成立. $\hat{A}$ 的 Picard 簇 $\hat{\hat{A}}$ 和 A 本身是同构的(**对偶定理** (duality theorem)). 设 X 为 A 的一个除子，对于 A 的点 a，令以 $X_a - X$ 为代表的线性等价类与之对应，就得到一个同态 $\varphi_X: A \to \hat{A}$. 如果 $\varphi_X = 0$，那么 $X \equiv 0$；反之也成立. 当 φ_X 为满同态时，称 X 为**非退化除子** (non-degenerate divisor). 正除子 X 是非退化的充分必要条件是，存在适当的正整数 m_0，使当 $m \geqslant m_0$ 时 $|mX|$ 是极丰富†的. 这里 $|mX|$ 表示由除子 mX 确定的完备线性系†(→代数簇[除子和线性系]). 非退化的正除子总是存在的，因而 Abel 簇可以嵌入一个射影空间. 当给了 n 维 Abel 簇 A 的一个除子 X 时，可以适当选取 A 的点 $u_1, \cdots, u_n$，使交叉积† $X_{u_1} \cdot \cdots \cdot X_{u_n}$ 可定义. 用 $(X^{(n)})$ 表示 $X_{u_1} \cdot \cdots \cdot X_{u_n}$ 的次数. 如果 X 是非退化的正除子，那么 X 所确定的完备线性系†的定义模†的维数 $l(X)$ 等于 $(X^{(n)})/n!$ (Poincaré 定理). 对于 A 的任意一个除子 X，$\nu(\varphi_X)$ 等于 $(X^{(n)})/n!$ 的平方 (Frobenius 定理)，这里 $\nu(\varphi_X)$ 表示同态 φ_X 的阶.

【l-adic 坐标】 设 A 为 n 维 Abel 簇，则 A 中全体阶为给定素数 l 的幂的点组成一个子群，记作 $\mathfrak{G}_l(A)$. 当 l 与 A 的基域的特征不同时，$\mathfrak{G}_l(A)$ 与 $2n$ 个商群 $\boldsymbol{Q}_l/\boldsymbol{Z}_l$ 的直积同构，这里 $\boldsymbol{Q}_l$ 是 l-adic 数域，$\boldsymbol{Z}_l$ 是 l-adic 整数群. 这样的同构称为 $\mathfrak{G}_l(A)$ 的 ***l*-adic 坐标系** (l-adic coordinate system). 设 B 是 m 维 Abel 簇，λ 是 A 到 B 的一个同态，那么 λ 就诱导出 $\mathfrak{G}_l(A)$ 到 $\mathfrak{G}_l(B)$ 的一个同态. 由此可知，如果分别确定了 $\mathfrak{G}_l(A)$ 和 $\mathfrak{G}_l(B)$ 的 l-adic 坐标系，那么 λ 就可以用一个 $2m \times 2n$ 的 l-adic 整数矩阵 $M_l(\lambda)$ 来表示. $\lambda \to M_l(\lambda)$ 是 $\mathrm{Hom}(A, B)$ 的一个一一表示. $M_l(\lambda)$ 称为 λ 的 ***l*-adic 表示** (l-adic representation). 特别是，当 $A = B$ 时，上述表示就是自同态环 $\mathfrak{U}(A)$ 的一个一一表示，它可以自然地扩张成 $\mathfrak{U}_0(A)$ 的一个一一表示. $\mathfrak{U}_0(A)$ 中元 λ 的 l-adic 表示 $M_l(\lambda)$ 的特征多项式是有理系数多项式，它与素数 l 的选取无关. 我们把 $\mathrm{tr} M_l(\lambda)$ 记作 $\sigma(\lambda)$. 另外，如果 $\lambda \in \mathfrak{U}(A)$，那么 $\nu(\lambda)$ 等于 $\det M_l(\lambda)$.

设 λ 为 A 到 B 的一个同态，对于 B 的除子 Y，令 A 的除子 $\lambda^{-1}(Y)$ 与之对应，就得到 $\hat{B}$ 到 $\hat{A}$ 的一个同态. 把这个同态记作 ${}^t\lambda$. 设 X 是 A 的一个非退化除子，那么存在 $\hat{A}$ 到 A 的一个同态 β，满足 $\beta\varphi_X = \nu(\varphi_X)\delta$ (δ 为 A 的恒等映射). 我们把 $\mathrm{Hom}(\hat{A}, A) \otimes \boldsymbol{Q}$ 中的元 $(1/\nu(\varphi_X))\beta$ 记作 φ_X^{-1}. 设 X 为 A 的非退化正除子，那么对应 $\alpha \to \alpha'$ ($\alpha \in \mathfrak{U}_0(A)$, $\alpha' = \varphi_X^{-1} \cdot {}^t\alpha \cdot \varphi_X$) 是 $\mathfrak{U}_0(A)$ 的一个阶为 1 或 2 的对合自同构†. 如果 $\alpha \neq 0$，那么 $\sigma(\alpha'\alpha) > 0$ 成立. 这是人们所熟知的 **Castelnuovo 引理**. A. Weil 进一步发现，关于同余 ζ 函数†的 Riemann 猜想†和这个不等式有本质上的联系.

【微分形式】 对于 n 维 Abel 簇 A 上的微分形式 $\omega = \sum f_{(i)} du_{i_1} \wedge \cdots \wedge du_{i_r}$，设 T_a 为一平移，那么微分形式 $\sum (f_{(i)} \circ T_a) d(u_{i_1} \circ T_a) \wedge \cdots \wedge d(u_{i_r} \circ T_a)$ 是确定的，与 ω 的表示方法无关，我们把它记作 $\omega \circ T_a$. 如果对于 A 的所有点 a 皆有 $\omega \circ T_a = \omega$ 成立，则称 ω 是一个**不变微分形式** (invariant differential form). 第一种微分形式都是不变微分形式，反之亦真. 设 K 为万有域†，$K(A)$ 为 A 的函数域，那么全体一次不变微分形式构成 K 上的一个 n 维线性空间，它的基也是全体一次微分形式所构成的 $K(A)$ 上的线性空间的基. $K(A)$ 的一个微分 D，如果对于所有平移 T_a 皆满足 $(Df) \circ T_a = D(f \circ T_a)$ ($f \in K(A)$)，则称为**不变微分** (invariant derivation). 对于一次微分形式 $\omega = \sum f_i du_i$ 和微分 D，设 $\langle \omega, D \rangle = \sum f_i Du_i$，那么 $\langle \omega, D \rangle$ 是关于 ω 和 D 的一个双线性型. D 为不变微分的充分必要条件是，对于全体不变微分形式 ω，$\langle \omega, D \rangle$ 为一常数；而 ω 为不变微分形式的充分必要条件

是，对于全体不变微分 D，$\langle\omega, D\rangle$ 为一常数. 不变微分所构成的 K 上的线性空间和一次不变微分形式所构成的线性空间，关于双线性型 $\langle\omega, D\rangle$ 是相互对偶的.

设 Ω 为特征 $p>0$ 的万有域. 把 A 的点 x 在同构 $a\to a^p(a\in\Omega)$ 之下的象记作 x^p. 当 x 取遍 A 的全体点时，点 x^p 的集合自然成为一个 Abel 簇，记作 A^p. 对应 $\pi: x\to x^p(x\in A)$ 是 A 到 A^p 的一个同种. 设 B 是与 A 同种的一个 Abel 簇，λ 是 A 到 B 的一个同种，如果存在 B 到 A^p 的一个同种 μ 使得 $\pi=\mu\circ\lambda$，那么就说 λ 的高度为 1. 设 λ 是高度为 1 且满足 $\nu(\lambda)=p$ 的一个同种，那么通过 λ 可把 B 的函数域 $\Omega(B)$ 看作 A 的函数域 $\Omega(A)$ 的一个子域，这时，存在 $\Omega(A)$ 的不变微分 D，其常数域为 $\Omega(B)$，而且它除了差一个常数倍以外是唯一确定的. 并且有 $D^p=D$ 或者 $D^p=0$. 前者称为 (i_1) 型的，后者称为 (i_2) 型的. 阶为与 p 不同的素数的同种称为 (s_1) 型的，阶等于 p 的可分同种称为 (s_2) 型的. 任意一个同种都可以表示成若干个上述四类同种的一个乘积.

【极化 Abel 簇】 设 X 是 Abel 簇 A 的一个除子，对于适当选取的正整数 m 和 m'，满足 $mX\equiv m'X'$ 的全体除子 X' 所成的类记作 $\mathfrak{X}$. 当 $\mathfrak{X}$ 包含非退化正除子时，就说 $\mathfrak{X}$ 确定 A 上的一个**极化** (polarization). 指定了极化 $\mathfrak{X}$ 的 Abel 簇 $(A,\mathfrak{X})$，称为**极化 Abel 簇**(polarized Abelian variety). 特别是，如果 A 是 Jacobi 簇，且它的极化 $\mathfrak{X}$ 由一个 Θ 除子所决定，则我们称 $(A,\mathfrak{X})$ 是**标准极化 Jacobi 簇** (canonically polarized Jacobian variety). 当 A 的自同态 α 使极化 $\mathfrak{X}$ 不变时，即由 $\alpha^{-1}(X)$ 确定的类与 $\mathfrak{X}$ 一致时，称 α 为 $(A,\mathfrak{X})$ 的一个自同态. 特别是，如果 α 是 A 的一个自同构，则称 α 为 $(A,\mathfrak{X})$ 的一个自同构. 极化 Abel 簇的自同构群是有限群(松阪輝久). 特别是，标准极化 Jacobi 簇的自同构群是有限群，由此即可推出，亏格 $g\geqslant 2$ 的代数曲线的自同构群是有限群.

另一方面，一个非退化除子的代数等价类称为一个**非齐次极化** (inhomogeneous polarization). 上面的极化有时就称为齐次极化. 一个非齐次极化 X 唯一地决定一个同种 $\varphi_X: A\to\hat{A}$. 非齐次极化 Abel 簇的自同态可以类似地定义.

【解析理论】 取复数域作为万有域时，Abel 簇可以用解析方法来处理，而这种情形乃是一般 Abel 簇理论的原形. 设 $\boldsymbol{C}^n$ 为复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的一个 n 维线性空间. $\boldsymbol{C}^n$ 可以看作实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的一个 $2n$ 维线性空间 $\boldsymbol{R}^{2n}$，映射 $J: z\to\sqrt{-1}z(z\in\boldsymbol{C}^n)$ 是 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 的一个 $\boldsymbol{R}$ 线性自同构，并且 $J^2=-1$. 反之，如果对于 $\boldsymbol{R}$ 上的一个偶数维线性空间 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 给了这样的 J，令 $(a+\sqrt{-1}b)x=ax+bJx$ $(x\in\boldsymbol{R}^{2n}, a, b\in\boldsymbol{R})$，就使 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 成为 $\boldsymbol{C}$ 上的一个 n 维线性空间，这时，称 J 在 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中确定了一个**复结构** (complex structure). 带有 J 确定的复结构的空间记作 $\boldsymbol{C}^n=(\boldsymbol{R}^{2n}, J)$. 设 $\boldsymbol{\omega}_1,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{2n}$ 是 $\boldsymbol{C}^n=(\boldsymbol{R}^{2n}, J)$ 中在 $\boldsymbol{R}$ 上线性无关的 $2n$ 个点，则由它们生成的子群 $\boldsymbol{D}$ 是一个秩为 $2n$ 的格. 商群 $\boldsymbol{C}^n/\boldsymbol{D}$ 称为一个 n 维**复环面群** (complex torus)，记作 T^n. 取定 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个基，由此可确定它的复坐标，而把 $\boldsymbol{\omega}_1,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{2n}$ 作为 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 的基，则可确定它的实坐标. 设 $\boldsymbol{\omega}_i=(\omega_{1i},\cdots,\omega_{ni})$ $(i=1,\cdots,2n)$，称 n 行 $2n$ 列矩阵 $\Omega=(\omega_{ij})$ 为 T^n 的**周期矩阵** (period matrix). 设点 z 的复坐标为 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，实坐标为 $z=(x_1,\cdots,x_{2n})$，那么有 ${}^t(z_1,\cdots,z_n)=\Omega\cdot{}^t(x_1,\cdots,x_{2n})$ 成立. 再者，如果把线性变换 J 关于基 $\boldsymbol{\omega}_1,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{2n}$ 的表示矩阵也用 J 表示，那么有 $\sqrt{-1}\,\Omega=\Omega J$ 成立. 在拓扑意义下，T^n 和 $2n$ 个实一维圆的直积同胚，T^n 的 Poincaré 多项式† 可用 $(1+x)^{2n}$ 给出.

【Θ 函数】 如果 $\boldsymbol{C}^n=(\boldsymbol{R}^{2n}, J)$ 上(即 n 个复变量 $z_1,\cdots,z_n$)的全纯函数 $f(z)$ 对于每个 $d\in\boldsymbol{D}$ 都满足变换 $f(z+d)=f(z)\exp(\sum a_\alpha z_\alpha+c)$ $(a_\alpha, c\in\boldsymbol{C})$，则称它为一个属于周期系 $\boldsymbol{D}$ (或 $T^n=\boldsymbol{C}^n/\boldsymbol{D}$ 上)的 **Θ 函数** (theta function). 这里一次式 $\sum a_\alpha z_\alpha+c$ 是由 d 确定的. Θ 函数 f 的零点集确定 T^n 上的一个正解析除子，记作 (f). 反之，对于 T^n 上的一个正解析除子 X，存在 Θ 函数 f，使得 $(f)=X$. 如果由 $\boldsymbol{\omega}_1,\cdots,\boldsymbol{\omega}_{2n}$ 来确定 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中的实坐标 $x_1,\cdots,x_{2n}$，

那么存在 $2n$ 阶复数矩阵 A，A_0 和 $2n$ 维向量 b，使得对于任意 $2n$ 维整数向量 a，下面的变换公式成立：$f(x+a)=f(x)\exp(2\pi\sqrt{-1}({}^taAx+(1/2){}^taA_0a+{}^tba))$，$A\equiv A_0(\mathrm{mod}\boldsymbol{Z})$，${}^tA_0=A_0$。进一步设 $A-{}^tA=E$，那么 E 是整系数交错矩阵†，而 $S=EJ$ 是半正定对称矩阵。对于一般的 T^n 来说，Θ 函数未必存在，但当上述 E 存在时，则可知 Θ 函数是存在的。

当 Θ 函数 f 不能成为不超过 $n-1$ 个复变量的 Θ 函数时，称 f 为**非退化的** (non-degenerate)。如果 f 是非退化的，那么 $S=EJ$ 是正定矩阵；反之亦真。非退化 Θ 函数存在的情形是很重要的，这时，复环面群 T^n 具有 Abel 簇结构。反之，定义在复数域上的 Abel 簇和具有非退化 Θ 函数的复环面群双全纯等价。这样，复环面群 T^n 为 Abel 簇的充分必要条件是，存在整系数交错矩阵 E，使得 EJ 为正定对称矩阵。这个条件也可以叙述如下：存在整系数交错矩阵 E，使得 $\Omega{}^tE^{-1}{}^t\Omega=0$，$\sqrt{-1}\,\Omega{}^tE^{-1}{}^t\bar{\Omega}>0$（正定 Hermite 矩阵）。特别地，将满足这个条件的周期矩阵 Ω 称为 **Riemann 矩阵** (Riemann matrix)，将有理数矩阵 ${}^tE^{-1}$ 称为属于 Ω 的**主矩阵** (principal matrix)。

取定某个主矩阵，指定由它的正有理数倍所构成的主矩阵的类，也就是确定 Abel 簇的一个极化。设 X 为 $T^n=\boldsymbol{C}^n/\boldsymbol{D}$ 上的一个正除子，于是存在 Θ 函数 f 使 $(f)=X$，因而，除子 X 非退化是和 Θ 函数 f 非退化等价的，并且也和通过 f 所得到的交错矩阵 E 是正则矩阵†等价。设 ${}^tE^{-1}$ 为主矩阵，那么适当选取 $\boldsymbol{C}^n$ 的坐标系和 $\boldsymbol{D}$ 的生成元，可使 Riemann 矩阵和主矩阵分别有形状 $\Omega=(I_n, F)$ 和 $E=\begin{pmatrix}0&\Delta\\-\Delta&0\end{pmatrix}$，这里 I_n 为单位矩阵，Δ 为对角矩阵且其对角元素皆为 E 的初等因子†。这时 ΔF 是虚部为正定的对称矩阵，因而它是 n 次 Siegel 空间† $\mathfrak{S}_n$ 中的一个点。这样，对于由主矩阵 ${}^tE^{-1}$ 确定极化的 Abel 簇，令 $\mathfrak{S}_n$ 中的点与之对应，就可推出，由具有给定单除子的主矩阵确定极化的 Abel 簇的同构类和商空间 $\mathfrak{S}_n/\Gamma_n(\Delta)$ 中的点成一一对应。这里 $\Gamma_n(\Delta)$ 是与 n 次 Siegel 模群†可公度的†子群，并且不连续地作用于 $\mathfrak{S}_n$ 上。这时，Siegel 模函数†就给出极化 Abel 簇的（粗）参模空间。Abel 簇和代数曲线都是就参模空间来说了解得比较多的簇。

【Abel 函数】 属于同一周期系 $\boldsymbol{D}$ 并且服从同一变换的两个 Θ 函数的商是以 $\omega_1,\cdots,\omega_{2n}$ 为周期的处处全纯的函数。这样的函数称为 **Abel 函数** (Abelian function)。任意一个 Abel 函数都可以表成服从同一变换的两个 Θ 函数的商。属于同一周期系 $\boldsymbol{D}$ 的全体 Abel 函数构成一个域，称它为 **Abel 函数域** (Abelian function field)。如果把 Abel 函数看作 $T^n=\boldsymbol{C}^n/\boldsymbol{D}$ 上的有理函数，那么 Abel 函数域就是 Abel 簇的函数域。在这个意义下，Abel 簇的函数域也称作 Abel 函数域。

【同态】 设 $\boldsymbol{C}^{n_i}=(\boldsymbol{R}^{2n_i}, J_i)$ $(i=1,2)$ 是两个复线性空间，$\boldsymbol{R}$ 线性映射 $f:\boldsymbol{R}^{2n_1}\to\boldsymbol{R}^{2n_2}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 线性映射的充分必要条件是 $f\circ J_1=J_2\circ f$ 成立。设 D_i 为 $\boldsymbol{C}^{n_i}$ 的格群 $(i=1,2)$。如果 $\boldsymbol{C}$ 线性映射 $\Lambda:\boldsymbol{C}^{n_1}\to\boldsymbol{C}^{n_2}$ 满足条件 $\Lambda(\boldsymbol{D}_1)\subseteq\boldsymbol{D}_2$，那么 Λ 可诱导出 $T_1=\boldsymbol{C}^{n_1}/\boldsymbol{D}_1$ 到 $T_2=\boldsymbol{C}^{n_2}/\boldsymbol{D}_2$ 的一个复解析同态。反之，T_1 到 T_2 的任意一个复解析同态皆可这样得到。特别是，设 T_1 和 T_2 皆为 Abel 簇，$\Omega_1=(\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{2n_1}^{(1)})$ 和 $\Omega_2=(\omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{2n_2}^{(2)})$ 分别是它们的 Riemann 矩阵，再通过 $\omega_1^{(1)},\cdots,\omega_{2n_1}^{(1)}$；$\omega_1^{(2)},\cdots,\omega_{2n_2}^{(2)}$ 分别确定它们的实坐标，那么对于同态 $\lambda:T_1\to T_2$，可以得到它的复数矩阵表示 $W(\lambda)$ 和整数矩阵表示 $M(\lambda)$，并且有 $W(\lambda)\Omega_1=\Omega_2M(\lambda)$ 成立。反之，如果对于复数矩阵 W 存在满足上式的整数矩阵 M，那么 W 就给出 T_1 到 T_2 的一个同态。上面这个等式称为 **Hurwitz 关系式** (Hurwitz's relation)。在特征为一般的情形，l-adic 坐标系是对应于格群的概念，而 λ 的 l-adic 表示 $M_l(\lambda)$ 则是整数表示 $M(\lambda)$ 的抽象化。

【Abel 积分】 设 $\mathfrak{R}$ 是一个亏格 $g\geqslant 1$ 的紧 Riemann 面†（→代数函数），那么对于第一种和第二种 Abel 微分†之和 ω，它关于闭曲线 γ

的周期[†]仅仅依赖于 γ 的整系数同调类. $\mathfrak{R}$ 的全体第一种微分构成复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的一个 g 维线性空间，记作 $\mathfrak{D}_0$. 设 P_0 为 $\mathfrak{R}$ 的一个定点，P 为 $\mathfrak{R}$ 的任意点，对于 $\mathfrak{D}_0$ 的一组基 $\omega_1, \cdots, \omega_g$，我们用 $u(P)$ 表示 $\boldsymbol{C}^g$ 中的向量 $\left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, \cdots, \int_{P_0}^{P} \omega_g\right)$，这里假设全体分量的积分路线是相同的. 对应 $P \to u(P)$ 不是单值的，$u(P)$ 的值的差的全体和关于所有闭曲线 γ 的周期向量 $\left(\int_\gamma \omega_1, \cdots, \int_\gamma \omega_g\right)$ 组成的群 $\boldsymbol{D}$ 是相同的. 设 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{2g}$ 是成为 $\mathfrak{R}$ 的一维整系数同调群的基的一组闭曲线，如果将 g 行 $2g$ 列矩阵 (ω_{ij}) $\left(\omega_{ij} = \int_{\gamma_j} \omega_i\right)$ 记作 Ω，那么 Ω 的 $2g$ 个列向量在实数域上线性无关. 因为群 $\boldsymbol{D}$ 和 Ω 的列向量的全体整系数线性组合是相同的，所以 $\boldsymbol{D}$ 是一个秩为 $2g$ 的格群，并且 Ω 为 g 维复环面群 $T^g = \boldsymbol{C}^g/\boldsymbol{D}$ 的周期矩阵.

作为 Riemann 面 $\mathfrak{R}$ 的一维整系数同调群的一个基，我们可取 $\mathfrak{R}$ 的正截口[†] $\alpha_1, \cdots, \alpha_g, \alpha_{g+1}, \cdots, \alpha_{2g}$. 这时如果周期矩阵 (ω_{ij}) $\left(\omega_{ij} = \int_{\alpha_j} \omega_i\right)$ 仍用 Ω 表示，那么对于矩阵 $E = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ (I_g 为 g 阶单位矩阵)，有 $\Omega E^t\Omega = 0$ 和 $\sqrt{-1}\,\Omega E^t\bar{\Omega} > 0$ (正定 Hermite 矩阵)成立. 这就是说 E 是属于 Ω 的主矩阵. 上面两个式子分别称为 Riemann **周期关系式** (period relation) 和 Riemann **周期不等式** (period inequality). 进一步可以适当选取 $\mathfrak{D}_0$ 的基，使周期矩阵形如 $\Omega = (I_g, F)$，这里 g 阶方阵 F 是虚部为正定的对称矩阵. 关于全体有理整数向量 $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_g)$ 的无穷级数

$$\vartheta(u) = \sum_{\boldsymbol{m}} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\boldsymbol{m}^t u + (1/2)\boldsymbol{m}F^t\boldsymbol{m})), \quad u = (u_1, \cdots, u_g),$$

在 u 的有界范围内是绝对而且一致收敛的，因而它是 u 的全纯函数. 它是对应于主矩阵

$$E = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$$

的一个 Θ 函数，所以称为 **Riemann Θ 函数** (Riemann theta function). 因为 $\vartheta(u)$ 是非退化的 Θ 函数，所以 $T^g = \boldsymbol{C}^g/\boldsymbol{D}$ 具有 Abel 簇的结构，并且它就是把 Riemann 面 $\mathfrak{R}$ 看作代数曲线时的 Jacobi 簇. 作为 Θ 函数 $\vartheta(u)$ 的零点而得到的 T^g 上的除子就是典范除子[†].

对应 $P \to u(P)$ $(P \in \mathfrak{R})$ 确定 $\mathfrak{R}$ 到 $T^g = \boldsymbol{C}^g/\boldsymbol{D}$ 的一个单值映射 φ. 进一步设 $A = P_1 \cdots P_r/Q_1 \cdots Q_r$ 是任意一个 0 次除子，置

$$\varphi(A) = \sum_{i=1}^{r} \varphi(P_i) - \sum_{i=1}^{r} \varphi(Q_i).$$

这时，$\varphi(A)$ 就是 $T^g = \boldsymbol{C}^g/\boldsymbol{D}$ 中以 $\boldsymbol{C}^g$ 中的向量 $\left(\sum_{j=1}^{r}\int_{Q_j}^{P_j} \omega_1, \cdots, \sum_{j=1}^{r}\int_{Q_j}^{P_j} \omega_g\right)$ 为代表的点. 对应 $A \to \varphi(A)$ 给出 0 次除子群 $\mathfrak{G}_0$ 到 $T^g = \boldsymbol{C}^g/\boldsymbol{D}$ 上的一个同态，这个同态的核与主除子群 $\mathfrak{G}_l$ 是相同的. 这就是说，0 次除子 $A = P_1 \cdots P_r/Q_1 \cdots Q_r$ 是 $\mathfrak{R}$ 的某个解析函数的除子的充分必要条件是

$$\sum_{j=1}^{r}\int_{Q_j}^{P_j} \omega_i \equiv 0 (\operatorname{mod} \boldsymbol{D}), \quad i = 1, \cdots, g$$

成立 (**Abel 定理**). 这里如果适当选取积分路线，可以使上式中等号成立.

设 $P_1, \cdots, P_g$ 为 $\mathfrak{R}$ 上的 g 个定点，$(u_1, \cdots, u_g)$ 是 $\boldsymbol{C}^g$ 中任意给定的一个向量，那么寻求满足条件

$$\sum_{j=1}^{g}\int_{P_j}^{Q_j} \omega_i \equiv u_i (\operatorname{mod} D), \quad i = 1, \cdots, g$$

的 g 个点 $Q_1, \cdots, Q_g$ 的问题，称为 **Jacobi 逆问题** (德 Jacobische Umkehrproblem). 取一个 0 次除子 A 使 $(u_1, \cdots, u_g)$ 所在的模 D 的剩余类为 $\varphi(A)$. 那么，根据 Riemann-Roch 定理，存在除子 $Q_1 \cdots Q_g$，满足 $A \equiv Q_1 \cdots Q_g/P_1 \cdots P_g$ $(\operatorname{mod} \mathfrak{G}_l)$. 再根据 Abel 定理，可知这些 $Q_1, \cdots, Q_g$ 就是 Jacobi 逆问题的一个解. 对于一般的 $(u_1, \cdots, u_g)$ 来说，解都是唯一的. 也就是说，存在 $\boldsymbol{C}^g$ 上的一个 $g-2$ 维簇 $\mathfrak{X}$，当且仅当 $(u_1, \cdots, u_g)$ 不属于 $\mathfrak{X}$ 时，解 $Q_1, \cdots, Q_g$ 除顺序外是唯一确定的. 特别是，当 g 个定点都和点 P_0 (定义向量 $u(P)$ 的点) 相同时，$T^g =$

C^g/D 上由 $\tilde{\mathfrak{X}}$ 确定的子簇可以如下得出：设 $W_1 + \cdots + W_{2g-2}$ 为 $\mathfrak{R}$ 的一个典范除子†，并设 $c = \varphi(W_1) + \cdots + \varphi(W_{2g-2})$，那么当 $\mathfrak{R}$ 上的 $g-2$ 个点 $R_1, \cdots, R_{g-2}$ 独立地变动时所得点 $c - \varphi(R_1) - \cdots - \varphi(R_{g-2})$ 的轨迹就是所求的子簇.

【基本 Abel 函数】 设 z 为 $\mathfrak{R}$ 上的任意一个非常数亚纯函数，对于不属于 $\tilde{\mathfrak{X}}$ 的 $u = (u_1, \cdots, u_g)$ 来说，作为 Jacobi 逆问题的解的 g 个点 $Q_1, \cdots, Q_g$ 除顺序外是唯一确定的. 所以若设 z 的基本对称函数为

$$s_1(u; z) = \sum_{i=1}^{g} z(Q_i),$$

$$s_2(u; z) = \sum_{i<j} z(Q_i)z(Q_j), \cdots,$$

$$s_g(u; z) = \prod_{i=1}^{g} z(Q_i),$$

那么这些函数在 $g-2$ 维簇 $\tilde{\mathfrak{X}}$ 外都是可定义的. 并且，每个 $s_i(u; z)$ 都可以唯一地扩张成全空间 C^g 中的一个 Abel 函数，仍记作 $s_i(u; z)$. $s_1(u; z), \cdots, s_g(u; z)$ 称为从 z 得到的**基本 Abel 函数** (fundamental Abelian function).

设 K 为以 D 为周期系的 Abel 函数域，k 为 $\mathfrak{R}$ 的亚纯函数域. 那么 K 是复数域 C 上的一个 g 维代数函数域，并且有 $[K:C(s_1(u; z), \cdots, s_g(u; z))] = r^g$，这里 r 是函数 z 的次数，它等于 $[k:C(z)]$. 任取满足 $k = C(z, w)$ 的一个函数 w，设从 w 得到的基本 Abel 函数为 $s_1(u; w), \cdots, s_g(u; w)$，那么 $K = C(s_1(u;z), \cdots, s_g(u; z); s_1(u; w), \cdots, s_g(u; w))$.

基本 Abel 函数可以表示成 Riemann Θ 函数的有理式，因而任意 Abel 函数可以表示成 Riemann Θ 函数的有理式. 设 u, v 是 C^g 中的可变向量，那么 $s_i(u+v; z)$ 可以表示成 $s_1(u; z), \cdots, s_g(u; z); s_1(v; z), \cdots, s_g(v; z)$ 的代数函数. 也就是说，可以适当选取复系数多项式 $H_i(Z; X_1, \cdots, X_g; Y_1, \cdots, Y_g)$，使得 $H_i(s_i(u+v; z); s_1(u; z), \cdots, s_g(u; z); s_1(v; z), \cdots, s_g(v; z)) = 0$. 这个等式称为关于基本 Abel 函数 $s_i(u; z)$ 的**代数加法公式** (algebraic addition formula).

如同 Jacobi 簇的理论产生于第一种 Abel 积分的研究，相应于第二种和第三种 Abel 积分的理论的是广义 Jacobi 簇†的理论(→代数曲线).

关于 Abel 簇在数论中的应用，重要的有：以有限域作为系数域的多变量函数域的非分歧 Abel 扩张理论 (S. Lang)，Abel 簇上点的高度理论 (A. Weil, A. Néron, J. Tate)和推广到高维情形的复数乘法论 (→ 复数乘法论)等.

【一些新近的结果】 (1) **级结构，Abel 簇的参模**. 设 A 为 k 上的一个 g 维 Abel 簇，n 是一个正整数且不被 k 的特征所整除. A 上的一个**级 n 结构** (level n structure) 定义为 A 上 $2g$ 个点 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{2g}$ 的集合，而这些点构成 A 上 n 阶点的群的一个基.

设 $A(g, d, n; k)$ 是如下组成的一个三元组：(i) k 上的一个 g 维 Abel 簇 A，(ii) 一个非齐次极化 X 且有 $\nu(\varphi_X) = d^2$，(iii) A 的一个级 n 结构 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{2g}$；它们都是在同构意义下确定的. 类似地我们可以对于概型 S 上的 Abel 概型定义 $A(g, d, n; S)$. 对应 $S \to A(g, d, n; S)$ 定义一个函子 $\mathscr{A}(g, d, n)$. D. Mumford 证明了存在 Spec (Z) 上拟射影的粗参模概型† $\mathscr{A}(g, d, n)$，并且当 $n \geqslant 3$ 时它甚至是细的 ([6]). 他在证明中应用了 Hilbert 概型†和稳定点 (→ 代数簇) 的技巧. 其中关键性的一步是证明，对于代数闭域 k 上的一个 r 次嵌入 $\varphi: A \to P^m$ (即 $\varphi(A)$ 在 P^m 中的次数为 r) 和一个正整数 n，使得 char (k) 不整除 n 且 $n > \sqrt{(m+1)r}$，那么 $(P^m)^{n^{2g}}$ 中的点 $(\phi(x_i))^{i=1,\cdots,n^{2g}}$ 关于 $PGL(m)$ 的作用是稳定的，这里 x_i 是 A (具有任意阶数) 上的 n 阶点. Mumford 后来又给出了利用代数 Θ 常数来构造极化 Abel簇的参模的另一个方法 ([7]).

(2) **Néron 极小模型，好约化和稳定约化.** 设 R 是一个离散赋值环，其剩余域为 k，商域为 K. 对于 K 上的一个 Abel 簇 A，存在 $S=\mathrm{Spec}(R)$ 上为有限型的光滑群概型 $\mathscr{A}$，称为 A 的 **Néron 极小模型** (Néron minimal model)，使得对于每个在 S 上光滑的概型 S'，存在一个标准同构

$$\mathrm{Hom}_S(S', \mathscr{A}) \cong \mathrm{Hom}_K(S'_K, A),$$

这里 S'_K 是 S' 在 $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(R)$ 之下的还原 (Néron, M. Raynaud). 特别是我们有 $\mathscr{A}_K \cong A$. 用 A_0 表示 $\mathscr{A}$ 在 S 的闭点上的纤维.

如果 $\mathscr{A}$ 在 S 上是固有的, 我们就称 A 在 R 处有一个**好约化** (good reduction). 如果 A_0 中含有 0 的连通分支 A_0^0 没有 1 的幂根(或等价地说, A_0^0 是一个 Abel 簇通过代数环面的扩张), 我们就说, A 有一个**稳定约化** (stable reduction). 如果存在 K 的有限可分扩域 K', 连同 R 在 K' 上的一个开拓 R', 使得 $A \times_K K'$ 有一个好(稳定)约化, 我们就称 A 在 R 处有**潜在好(稳定)约化** (potential good (stable) reduction). 设 K_s 为 K 的一个可分闭包, $\bar{R}$ 是 R 在 K_s 上的一个开拓. 对于一个素数 $l \neq \mathrm{char}(k)$, 我们有一个标准同态 ρ: $\mathrm{Gal}(K_s/K) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{G}_l(A))$, 称为一个单演. 于是 A 有潜在好约化当且仅当, 惯性群† $I(\bar{R})$ 在 ρ 之下的象是一个有限群 (J.-P. Serre 和 Tate). K 上每个 Abel 簇 A 在 R 处有潜在稳定约化 (**稳定约化定理** (stable reduction theorem), A. Grothendieck [16]).

(3) **Θ 函数的分次环.** 如果 f 是一个具有周期系 $\boldsymbol{D}$ 的 Θ 函数, 那么对于每个正整数 n, f^n 也是 Θ 函数且具有同样的周期系. 我们用 S_n 表示具有同一周期系 $\boldsymbol{D}$ 并且和 f^n 服从同一变换规则的 Θ 函数所成的向量空间. 如果我们设 $(f) = X$, 那么 S_n 可以自然地看作 X 的完备线性系†的定义模†, 并且 S_n 的维数 $(= l(nX))$ 等于 Δ 的非零对角元的乘积 (Frobenius). 当 $g \in S_m$, $h \in S_n$ 时, $gh \in S_{m+n}$, 因此 $S = \bigoplus_{n \geq 0} S_n$ 是一个分次环, 而且是正规的和有限生成的. 对于 $m \geq 2$ 及 $n \geq 3$, 乘积映射 $S_m \times S_n \to S_{m+n}$ 是满射 (D. Mumford, 小泉正二). 如果 E 的初等因子能被一个 ≥ 4 的整数整除, 那么自然分次映射 $\boldsymbol{S}(S_1) \to S$(这里 $\boldsymbol{S}(S_1)$ 表示 S_1 上的对称代数†)的核, 对于充分大的次数来说, 可由二次关系(即二次部分)生成 (Mumford). 从几何意义来说, 就是, 如果 $X = (f)$ 且 $f \in S_1$ 是非退化的, 那么关于由 X 的完备线性系定义的射影嵌入 $i: T^n \to \boldsymbol{P}^N$, $i(T^n)$ 是 $\boldsymbol{P}^N$ 中包含 $i(T^n)$ 的二次曲面的交.

Mumford 发展了代数 Θ 函数的理论, 这项工作也是对于正特征情形讨论的 ([7]), 他并且在一般情形下证明了上述结果.

【参】 [1] H. Cartan, Séminaire sur la théorie des fonctions de plusieurs variables I—V, 1951—1952, Ecole Norm. Sup. Paris; [2] F. Conforto, Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie, Springer, 1956; [3] A. Krazer-W. Wirtinger, Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen, Enzykl. Math. Wiss., IIB7 (1920), 604—873; [4] J. Igusa (井草準一), Theta functions, Springer, 1972; [5] S. Lang, Abelian varieties, Interscience, 1959; [6] D. Mumford, Geometric invariant theory, Erg. Math., Springer, 1965; [7] D. Mumford, On the equations defining Abelian varieties I—III, Inventiones Math., I (1966), 287—354; II, III (1967), 75—135, 215—244; [8] D. Mumford, Varieties defined by quadratic equations, Questioni sulle variete algebraiche, Corsi dal C. I. M. E., Cremona, 1969, 31—94; [9] D. Mumford, Abelian varieties, Tata Inst. studies in math., Oxford Univ. Press, 1970; [10] A. Néron, Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, Publ. Math. Inst. HES, no. 21, 1964, p. 5—128; [11] W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II₂, Teubner, 1932; [12] M. Raynaud, Modèles de Néron, C. R. Acad. Sci. Paris, **262** (1966), 345—347; [13] B. Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, J. Reine Angew. Math., **54** (1857), 115—155; [14] J.-P. Serre, Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique p, Amer. J. Math., **80** (1958), 715—739; [15] J.-P. Serre-J. Tate, Good reduction of Abelian varieties, Ann. of Math., (2) **88** (1968), 492—517; [16] Séminaire de géométrie algébriques (SGA)7, Groupes de monodromie en géométrie algébrique, Lecture notes in math., 288, 340, Springer, 1972, 1973; [17] G. Shimura (志村五郎), Moduli and fibre systems of Abelian varieties, Ann. of Math., (2) **83** (1966), 294—338; [18] C. L. Siegel, Analytic functions of several complex variables, Lecture notes, Institute for Advanced Study, Princeton, 1948—1949; [19] J. Tate, Classes d'isogénie des variétés abéliennes sur un corps fini (d'après T. Honda), Séminaire Bourbaki, no. 352, Lecture notes in math. 179, Springer, 1968—1969; [20] A. Weil, Théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions thêta, Séminaire Bourbaki, no. 16, 1949, Benjamin; [21] A. Weil, Variétés abéliennes et courbes algébriques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1948; [22] A. Weil, Variétés kählériennes, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1958; [23] A. Weil, Généralisation des fonctions abéliennes, J. Math. Pures Appl., (9) **17** (1938), 47—87.

Riemann-Roch 型定理 [英 theorem of Riemann-Roch type 法 théorème de type Riemann-Roch 德 Theorem vom Riemann-Rochschen Typus 俄 теорема типа Римана-Роха 日 リ

ーマンーロッホ 型定理] Riemann-Roch 定理(以下简称 R. R. 定理)是古典的单变量代数函数论的中心结果. 设 X 为紧 Riemann 面†, $D=\sum m_iP_i$ 为 X 的一个除子†. X 上在点 P_i 处至多有 m_i 阶极点(如 $m_i<0$, 则至少有 $-m_i$ 阶零点)而在其他点处为全纯的亚纯函数 f 的全体加上常数 0 就形成一个有限维复线性空间 $L(D)$. R. R. 定理断言, $\dim L(D)=\deg D-g+1+r(D)$, 这里 g 为 X 的亏格†, $\deg D=\sum m_i$ 为 D 的次数, $r(D)$ 为正整数或 0. 设 K 为 X 的典范除子†, 则有 $r(D)=\dim L(K-D)$ (→代数函数, 代数曲线). 关于代数曲面的 R. R. 定理→代数曲面 [Riemann-Roch 定理]. 小平邦彦, F. Hirzebruch, A. Grothendieck, M. F. Atiyah-I. M. Singer 等人把这个重要定理成功地推广到多维紧复流形的情形.

考虑紧复流形 X 上的复线丛† B 及其全纯截面的芽的层 $\Omega(B)$. 当 B 可以由 X 的一个除子 D 决定时, 我们有 $H^0(X,\Omega(B))\cong L(D)$ (→复流形). 从而一般地, 对于 B 来说, 利用与 X 和 B 的性质有关的量来表示 $\dim_{\mathbf{C}} H^0(X,\Omega(B))$, 就可以说是 R. R. 定理. 它们经过多次推广, 形成了所谓 Riemann-Roch 型定理(本条中简称为 R. R. 型定理).

【Hirzebruch 的 R. R. 型定理】 设所用符号与前面的相同, 考虑

$$\chi(X,\Omega(B))=\sum_q(-1)^q\dim H^q(X,\Omega(B)),$$

这个量不仅对于 $\Omega(B)$ 能够定义, 而且对于任意解析凝聚层† $\mathscr{F}$ 也能够定义(在上式中用 $\mathscr{F}$ 代替 $\Omega(B)$), 并且在许多方面都表现出比较简单的性质. (例如, 若 $0\to\mathscr{F}'\to\mathscr{F}\to\mathscr{F}''\to 0$ 为正合序列, 则 $\chi(X,\mathscr{F})=\chi(X,\mathscr{F}')+\chi(X,\mathscr{F}'')$; 甚至当解析向量丛 F 关于参数连续地变化时, $\chi(X,\Omega(F))$ 也是不变的; 等等.) Hirzebruch 对于射影代数簇 X 及其上的解析向量丛 F, 给出了下面的定理: $\chi(X,\Omega(F))=T(X,F)$ ([3]). 称它为 **Hirzebruch 的 Riemann-Roch 型定理**. 这里 $T(X,F)$ 是关于 F 的所谓 **Todd 示性数** (Todd characteristic), 它的定义如下: 设 X 为复 n 维的, 把它的陈类† $c=1+c_1+\cdots+c_n$ (c_i 是 $2i$ 维上同调类) 形式地分解为 $\prod_{i=1}^n(1+\gamma_i)$. 就是说, 认为 $c_1,\cdots,c_n$ 是假想的二维上同调类 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$ 的初等对称式. 记 $T(X)=\prod_{i=1}^n\gamma_i/(1-e^{-\gamma_i})$, 那么由于它的展开式中的齐次项关于 γ_i 是对称的, 所以能够用 $c_1,\cdots,c_n$ 表示, 从而 $T(X)$ 是 X 的上同调环的元. 同样, 将纤维丛 F 的陈类分解为 $1+d_1+\cdots+d_q=\prod_{i=1}^q(1+\delta_i)$ (q 为 F 的纤维的维数), 记 $ch(F)=\sum_{i=1}^q e^{\delta_i}$. $ch(F)$ 也是 X 的上同调环的元, 称为 F 的陈特征标(→K 理论). 我们定义 $T(X,F)$ 为 $(ch(F)T(X))(X)$. 它是指在基本闭链 X 上取的值, 与上同调环的非 $2n$ 维的项无关. 当考虑 $n=1$ 而 $F=[D]$ (由除子 D 决定的复线丛) 时, 这个公式就给出古典的 R. R. 定理. 并且, 当 F 满足上同调的消没定理时, 就可得到 $\dim H^0(X,\Omega(F))$ 的一个估值.

1963 年, Atiyah 和 Singer 对于紧可定向微分流形上椭圆型微分算子的指数理论, 又提起了这个问题, 发表了包括对于任意紧复流形的 Hirzebruch 的 R. R. 型定理的证明在内的一般结果([1]).

【小平的研究】 另一方面, 在这些研究之前, 小平研究了紧**复曲面** (complex surface) (复二维复流形) 的 R. R. 定理, 给出了下面的公式, 并且应用到复曲面的分析上([5], →复流形): $\chi(X,\Omega(F+[D]))=(D^2)-\pi'(D)+1+(FD)+\chi(X,\Omega(F))$. 这里 X 为紧复曲面, F 和 D 分别为 X 上的复线丛和除子, $F+[D]$ 为在复线丛构成的群(由丛的张量积定义乘法)中 F 和 $[D]$ 的乘积. (FD) 指的是 F 和 $[D]$ 的陈类乘积在基本闭链 X 上取的值, (D^2) 也是同样地定义的. 进一步, 设 K 为 X 的典范丛(二次全纯微分所构成的纤维丛, 相当于典范除子的推广)时, 一般地规定 $\pi'(F)=(F^2)/2+(KF)/2+1$, 对于除子 D 则规定 $\pi'(D)=$

$\pi'([D])$. $\pi'(D)$ 称为 D 的**假亏格**（virtual genus），如果 D 是不可约的非奇异曲线，那么 $\pi'(D)$就是D的亏格. 小平的研究的特点在于，对于 $\dim H^q(X, \Omega(F+[D]))$ $(q=1,2)$，给出一个依据X和D的其它性质（解析的或拓扑的)的刻划,以便"具体地"求出 $\dim H^0(X, \Omega(F+[D]))$. 当$D$是(可约)曲线时，已经给出了这种刻划.

【Grothendieck 的 R. R. 型定理】 Grothendieck 却是采用完全新的观点来推广 Hirzebruch 的 R. R. 型定理的. 下面我们来看基于他的这种创见由 A. Borel 和 J.-P. Serre 所给出的关于他的观念的一种重新表述([2]).

在任意特征数的代数几何中考虑非奇异的**拟射影** (quasi-projective) **代数簇** X (→代数簇),就是说,X是(代数封闭的系数域上的)射影空间中的一个开集的闭子簇. X上的代数向量丛的全体等价类生成的自由 Abel 群,模由形如 $F-F'-F''$ 的元(这里设三者之间有正合序列 $0\to F'\to F\to F''\to 0$)所生成的子群所得的商群记为 $K(X)$. 如果取全体代数凝聚层†(的等价类)进行和上面同样的构造，就能得到 Abel 群 $K'(X)$. 通过 $F\to\mathcal{O}(F)$ (F 的正则截面的芽的层),可以证明$K(X)$和 $K'(X)$ 同构. $K(X)$ 中的加法能够从向量丛的 Whitney 和†诱导出来. 如果按照向量丛的张量积来定义乘法，那么 $K(X)$ 就具有环的结构. 若对于向量丛F定义它的陈类 $c(F)=1+c_1(F)+\cdots+c_q(F)$ (q 为F的纤维的维数)，则 $c(F)$ 属于X的周环† $A(X)$ (代数闭链的有理等价类所成的环，$c_i(F)$ 为其中余维数为 i 的元)，并且能够满足陈类应有的性质. 现在，和上面一样地定义 $ch(F)$,不过实际上，$c(F)$和$ch(F)$仅由F在 $K(X)$ 中的象所决定,而且 c 和 ch 都能扩张成从 $K(X)$ 到 $A(X)$ 的映射，并满足 $c(\xi+\eta)=c(\xi)c(\eta)$, $ch(\xi+\eta)=ch(\xi)+ch(\eta)$, $ch(\xi\eta)=ch(\xi)ch(\eta)$ $(\xi,\eta\in K(X))$. 设给定拟射影代数簇 X, Y 及它们间的固有射† $f:Y\to X$. 对此考虑诱导纤维丛的类，可得到 $f^!:K(X)\to K(Y)$,而对于Y上的凝聚层 $\mathscr{F}$ 使 $\sum(-1)^q(\mathscr{R}^q f)\mathscr{F}$ 与之对应，就可得到 $f_!:K(Y)\to K(X)$. 这里 $(\mathscr{R}^q f)\mathscr{F}$ 是由 f 决定的 $\mathscr{F}$ 的 q 次直接象†(因为 f 是固有的，所以它是凝聚层). 在周环之间也取代数闭链的逆象和直接象，就能定义 $f^*:A(X)\to A(Y)$ 和 $f_*:A(Y)\to A(X)$. 关于它们有下面的定理：如果 X, Y 为拟射影代数簇，$f:Y\to X$ 为固有射,那么 $f_*(ch(\xi)T(Y))=ch(f_!(\xi))T(X)$. 称它为 **Grothendieck 的 Riemann-Roch 型定理**. 在这个定理中,当X仅由一点组成时,就得到关于代数丛的 Hirzebruch 的 R. R. 型定理. 又因在复射影代数簇中，凝聚层的代数理论和解析理论是等价的，所以这个结果包括了 Hirzebruch 的 R. R. 型定理(→K 理论).

这样,根据 Grothendieck 的推广，R. R. 型定理就可采取这样的形式：通过固有射 $f:Y\to X$, $A(Y)$ 的子群 $R(Y)=\{ch(\xi)T(Y)|\xi\in K(Y)\}$ (它称为Y的 **Riemann-Roch 群** (Riemann-Roch group)) 能够映到 X 的相应的群 $R(X)$ 内. Atiyah 和 Hirzebruch 对于殆复流形和微分流形也做了这种形式的推广([2,6]). 取 $X=$(一点)，就可得出 $R(Y)$ 的元在基本闭链上取的值为整数这一结果.

【参】 [1] M. F. Atiyah-I. M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 422—433; [2] M. F. Atiyah-F. Hirzebruch, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., **65** (1959), 276—281; [3] M. F. Atiyah-G. B. Segal-I. M. Singer, The index of elliptic operators, Ann. of Math., (2) **87** (1968), 484—604 (I by Atiyah and Singer, II by Atiyah and Segal, III by Atiyah and Singer); [4] A. Borel-J.-P. Serre, Théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France, **86** (1958), 97—136; [5] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Erg. d. Math., Springer, 1956; Topological methods in algebraic geometry, Springer, 第三版, 1966; [6] F. Hirzebruch, Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds, Séminaire Bourbaki, no. 177, Paris, 1958—59; [7] K. Kodaira(小平邦彦),On compact analytic surfaces I, Ann. of Math., **71** (1961), 111—152; [8] K. Kodaira (小平邦彦),The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces, Amer. J. Math., **73** (1951), 813—875; [9] H. Cartan-L. Schwartz, Théorie d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique, Séminaire H. Cartan, Ecole Norm. Sup., 1963—64; [10] R. S. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Ann. of Math. Studies, no. 57, Princeton Univ. Press, 1965.

九、拓扑学(同调论、同伦论、纤维丛和微分拓扑学)

拓扑学 [英 topology 法 topologie 德 Topologie 俄 топология 日 位相幾何学] 在作为分析学基础的实数系和复数系中，和它们构成域†的代数系的性质一样，作为拓扑空间的性质也是很重要的. 仅仅从这一点，我们也可以看出拓扑的研究对于整个数学，特别是分析学和几何学起着基础的作用.

topology 这个词，有时表示"拓扑"，有时指研究有关拓扑的整个学科. 在日本则广泛地理解为与拓扑有关的研究领域，也称为拓扑数学(位相数学). **拓扑学**(位相幾何学)也是 topology 的一个译名，但比上述领域要窄，主要指研究图形的(或集合的)拓扑性质的学科. 例如，与二维球面同胚的多面体的顶点数、棱数与面数，分别以 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ 表示，恒有公式 $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ 成立(二维 Euler-Poincaré 公式†)，这种性质 R. Descartes 就已经知道. 这些是用明确形式表述的拓扑学的最初的定理. 1833 年，C. F. Gauss 用线积分定义了空间曲线的环绕数†. 1847 年，J. B. Listing 的 "Vorstudien zur Topologie" 一书出版了，这是最早出现 Topologie 这个词的文献.

十九世纪，B. Riemann 在函数论各方面的研究工作中都贯穿着拓扑学的思想. 其中关于紧曲面同胚问题(→曲面)的解决，对于代数函数论是有决定意义的. 当时也提出 n 维多面体的问题，E. Betti 研究了其同调群，他的方法在整个分析学中也认为是重要的. H. Poincaré 给复形的同调群†下了一般的定义([1])，而且证明了著名的 Poincaré 对偶定理†，还定义了基本群†. Poincaré 的方法是以多面体†为对象，利用把多面体单形剖分†所得到的复形†，来得到其拓扑性质，这就是**组合拓扑学** (combinatorial topology). 在 Poincaré 之后，本世纪二十年代，S. Lefschetz，J. W. Alexander 等人发展了同调理论(→同调群)，得到 H. Hopf 映射度的理论，Hopf 不变量†，Lefschetz 不动点定理†，Alexander 对偶定理等著名的结果.

其后，组合拓扑学的发展方向一分为二，一个方向是通过线性映射来研究多面体的组合结构. 这在 1940 年左右由 J. H. C. Whitehead, S. S. Cairns 等人所发展，特别是近年伴随微分拓扑学的发展，在组合拓扑学和微分拓扑学的关系方面出现显著的进展. 1960 年 J. Stallings, S. Smale, 1961 年 E. C. Zeeman 解决了广义 Poincaré 猜想†，1961 年 B. Mazur, J. Milnor 否定地解决了组合拓扑学的主猜想†.

另一个方向是随着同调论的发展，通过代数方法的应用而产生很大的进展，从而成为拓扑学的主流. 这方面称为**代数拓扑学** (algebraic topology). 这方面在 1940 年左右由 Alexander, A. H. Колмогоров 等人定义上同调群†，接着定义上同调环†，而使多面体的拓扑研究出现很大的进展. 这时，W. Hurewicz 定义了同伦群(→同伦群)，Whitehead 又把研究对象推广到 CW 复形†，并求出同伦等价等条件的代数刻划. CW 复形是现代代数拓扑学的主要对象. 1947 年左右，N. E. Steenrod 在障碍理论†中定义了 Sq 运算†，后来又大大发展，成为上同调运算理论，促使代数拓扑学产生重大变革. 1945 年 J. Leray，1951 年 J.-P. Serre 对纤维空间†引入了谱序列†这种代数方法，1954 年 H. Cartan, Serre 等人在重要的空间的上同调运算及同伦群等方面，都取得显著进展并一直延续至今.

另一方面，随着十九世纪七十年代 G. Cantor 创始一般集合论，研究了 Euclid 空间内的点集，引入了聚点†，开集†，闭集等概念. 这些概念逐渐抽象化，到二十世纪初，M. Fréchet, F. Hausdorff 等人得出了拓扑空间†的概念(→

拓扑空间),开创了**一般拓扑学** (general topology). 直接(而不是作为多面体)研究Euclid空间或拓扑空间中的一般的点集的拓扑性质的学科称为**点集拓扑学** (point set topology).这门学科在波兰特别发展,从本世纪二十年代起, S. Janiczewski, W. Sierpinski, S. Mazurkiewicz, C. Kuratowski 等人发表了许多成果. 其中 Janiczewski 的不可约连续统的理论是特别有趣的结果. 这方面还有 R. L. Moore, G. T. Whyburn, K. Menger 等人的贡献.

起初只以多面体为研究对象的组合拓扑学从二十年代末期起, 其方法已经推广到包括一般紧†空间为其对象. 这方面成果主要由 П. С Александров 所取得, 而 L. E. J. Brouwer 在 1911 年以来关于连续映射的研究是这种方法的先驱. 他用单形映射†来逼近连续映射,得到许多结果, Александров 把紧度量空间†作为多面体序列的极限而定义了其同调群. 1932 年 E. Čech 作为多面体的同调群的归纳极限†定义了更一般的空间的同调群, 同样定义了所谓 Čech 上同调群†,这标志着上同调群的产生. 作为紧空间的同调论, 1944 年 S. Eilenberg 定义了奇异(上)同调群†, 1945 年, 这些同调论在 Eilenberg-Steenrod 的公理系统之下统一起来.

微分流形的大范围理论,已经采用纤维丛†等拓扑方法, 1952 年 R. Thom 本质上使用上同调运算和同伦群得出 Thom 的基本定理, 1956 年, Milnor 证明 S^7 上有多种微分结构, 从而建立了所谓**微分拓扑学** (differential topology) 这门学科(→微分拓扑学). 这些拓扑学的分支在理论上全都密切相关, 并且正在迅速发展. 1959 年发表的 A. Grothendieck, M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, J. F. Adams 等人通过向量丛而构成的 K 群理论等也是很有用的概念 (→K 理论).

拓扑学中还有纽结理论(→纽结)这样特别有趣的分支, 它也进一步发展成为高维流形的合痕†及嵌入†问题, 形成组合拓扑学的一个分支.

以上所说的拓扑学是拓扑数学整体的基础,成为现在越来越重要的分支,随着与数学的其他分支的广泛交流, 对其他分支产生很大影响,可以期待将来会有更大的进展.

【参】 [1] H. Poincaré, Analysis situs, J. École Polytechnique, (2), 1(1895), 1—121, Oeuvres, Tome 6, 193—288; [2] P. S. Alexandroff-H. Hopf, Topologie I. Springer, 1935; [3] S. Lefschetz, Algebraic topology, Princeton, 1942; [4] S. Eilenberg-N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952; [5] J. Milnor, Lecture note on differential topology, Princeton Univ. Press, 1957; [6] M. K. Fort, Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall, 1962.

复形 [英 complex 法 complexe 德 Komplex 俄 комплекс 日 複体] 从历史上来看,复形是 H. Poincaré 为了用组合方法来研究流形†的拓扑而引进的概念 (→流形). 然而到如今,下面叙述的复形的定义已经一般化和抽象化, 而且在种种意义下使用. 下面对这些复形用不同的名称加以区别, 但是, 当不致含混时,通常仍然都简称为**复形**.

【Euclid 复形】 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^N$ 中的单形†的集合 $\mathfrak{K}=\{\Delta_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$, 当下列条件成立时, 称为 **Euclid 单纯复形或 Euclid 复形** (Euclidean (simplicial) complex, geometrical (simplicial) complex, rectilinear (simplicial) complex). 1) 当 $\Delta\in\mathfrak{K}$, Δ' 为 Δ 的面†时, $\Delta'\in\mathfrak{K}$; 2) 当 $\Delta_1,\Delta_2\in\mathfrak{K}$, $\Delta_1\cap\Delta_2\neq\varnothing$ 时, $\Delta_1\cap\Delta_2$ 是 Δ_1 及 Δ_2 的面; 3) 当 $\Delta\in\mathfrak{K}$, $x\in\Delta$ 时, 可选取 x 在 $\boldsymbol{R}^N$ 中的适当的邻域 U, 使得只有有限多个 $\Delta'\in\mathfrak{K}$, 满足 $U\cap\Delta'\neq\varnothing$. $\mathfrak{K}$ 中包含的零维单形称为 $\mathfrak{K}$ 的**顶点** (vertex). 在 $\mathfrak{K}$ 中包含的单形的维数的集合中,如果存在最大的数,这个数就称为 $\mathfrak{K}$ 的**维数** (dimension), 如果不存在最大的数,则 $\mathfrak{K}$ 的维数就是∞.

Euclid 单纯复形 $\mathfrak{K}$ 的子集 $\mathfrak{K}_0$ 称为 $\mathfrak{K}$ 的**子复形** (subcomplex), 如果 $\Delta\in\mathfrak{K}_0$, 则Δ的所有的面也属于 $\mathfrak{K}_0$. $\mathfrak{K}$ 中维数 $\leqslant r$ 的单形全体的集合构成$\mathfrak{K}$的子复形,称为 **r 骨架** (r-section, r-skeleton).

对于 Euclid 单纯复形 $\mathfrak{K}$, 由属于 $\mathfrak{K}$的单形的点集所成的并集是 $\boldsymbol{R}^N$ 的子集, 称为 **Euclid**

多面体 (Euclidean polyhedron), 用$|\mathfrak{K}|$表示.

Euclid 单纯复形 $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}'$, 如果满足下列条件,就称 $\mathfrak{K}'$ 为 $\mathfrak{K}$ 的**重分** (subdivision). 1) $|\mathfrak{K}| = |\mathfrak{K}'|$; 2) 如 $\Delta' \in \mathfrak{K}'$, 则存在 $\Delta \in \mathfrak{K}$ 使得 $\Delta' \subset \Delta$. 对于属于 $\mathfrak{K}$ 的单形的任意有限序列 $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \cdots \subset \Delta_r$ $(r \geqslant 0)$, 以这些单形的重心† 为顶点构造 r 维单形,这样的单形集合构成 Euclid 单纯复形,且是 $\mathfrak{K}$ 的重分,以 Sd $\mathfrak{K}$ 表示,称为 $\mathfrak{K}$ 的**重心重分** (barycentric subdivision).

对于 $|\mathfrak{K}|$ 的子集 A, 满足 $A \cap \Delta \neq \varnothing$ 的 $\mathfrak{K}$ 的单形 Δ 及其所有的面构成的子复形, 称为 A 在 $\mathfrak{K}$ 中的**星形** (star), 以 $St_{\mathfrak{K}}(A)$ 表示之. $\mathfrak{K}$ 中所有与 A 相交的单形的内部 (开单形†) 的并集称为 A 在 $\mathfrak{K}$ 中的**开星形** (open star), 以 $O_{\mathfrak{K}}(A)$ 表示之. $O_{\mathfrak{K}}(A)$ 是 $|\mathfrak{K}|$ 中的开集, 其闭包是 $|St_{\mathfrak{K}}(A)|$.

在 Euclid 单纯复形的定义中, 把单形都用凸胞腔† 来代替, 就得出 **Euclid 胞腔复形** (Euclidean cell complex, geometrical cell complex, rectilinear cell complex) 的概念. Euclid 单纯复形当然也是 Euclid 胞腔复形,对于 Euclid 胞腔复形 $\mathfrak{K}$, 属于 $\mathfrak{K}$ 的凸胞腔的并集也称为 **Euclid 多面体**,以$|\mathfrak{K}|$表示之. 对于 Euclid 胞腔复形, 顶点、维数、子复形、重分等概念也可像 Euclid 单纯复形那样来定义.

【单纯复形】 设 Euclid 单纯复形 $\mathfrak{K}$ 的所有顶点的集合为 K, 属于 $\mathfrak{K}$ 的每一个单形 Δ 的顶点构成 K 的子集 $\{v_0, v_1, \cdots, v_r\}$, 所有这种子集构成的族设为 Σ, 则下述 1), 2) 成立. 1) 如果 $s \in \Sigma$, 且 $s' \subset s (s' \neq \varnothing)$,则 $s' \in \Sigma$; 2) 对每个元素 $v \in K$, 只由 v 构成的集合 $\{v\}$ 也属于 Σ, 空集 $\varnothing$ 不属于 Σ. 一般来说, 对集合 K,如给出其有限子集族 Σ 满足上述条件 1), 2), 则 $K = (K, \Sigma)$ 称为**抽象单纯复形** (abstract simplicial complex) 或简称为**单纯复形** (simplicial complex). 属于 Σ 的子集 s 如果由 K 中 $n+1$ 个元素构成,则称 s 为 K 的 **n 维单形** (n-dimensional simplex),特别是,零维单形称为**顶点**. 当集合 K 的基数为有限时, 单纯复形 K 称为**有限的** (finite); 对于每个顶点 $v \in K$, 如果包含 v 的单形数目是有限的, 则 K 称为**局部有限的** (locally finite). 同样也可定义**可数的** (countable), **局部可数的** (locally countable) 单纯复形. 单纯复形的维数, r 骨架可以和 Euclid 复形的情形一样来定义.

对于单纯复形 K, K_0, 当下述条件成立时, K_0 称为 K 的**子复形**. 1) 作为集合, $K_0 \subset K$; 2) K_0 的单形也是 K 的单形.

设 K, L 为单纯复形, $\varphi: K \to L$ 为映射, 对于 K 的每一个单形 $s = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$, 如果 $\{\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)\}$ 也是 L 的一个单形的顶点,则 φ 称为**单形映射** (simplicial mapping). 此时, $\varphi(v_0), \varphi(v_1), \cdots, \varphi(v_n)$ 中也可以有相同的. 设单纯复形 K, L 之间存在一个双射 φ, 如果 φ, φ^{-1} 均为单形映射, 则 K 与 L 称为**同构** (isomorphic).

设 $x: K \to I$ 为从单纯复形 K 到闭区间 $I = [0, 1]$ 的函数. 所有满足下列条件的 x 的集合以 $|K|$ 表示. 1) 集合 $\{v \in K | x(v) \neq 0\}$ 是 K 的单形; 2) 对各 $v \in K$, 有 $x(v) \geqslant 0$ 且 $\sum_{v \in K} x(v) = 1$. 这时 $x(v)$ 称为点 $x \in |K|$ 关于 v 的**重心坐标** (barycentric coordinate). K 的顶点 v 可以看成就是 $|K|$ 中关于 v 的重心坐标为 1 的点, 称为 $|K|$ 的**顶点**. 且对于 K 的单形 $s = \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$, 所有满足 $x(v) = 0 (v \notin s)$ 的 $x (\in |K|)$ 的集合称为 $|K|$ 的**单形** (simplex), 以$|s|$表示之. 所有满足 $x(v_i) > 0 (i = 0, 1, \cdots, n)$ 的 $x (\in |s|)$ 的集合称为单形 $|s|$ 的**内部** (interior). 对于 $|K|$ 的两点 x, y, 如果用

$$d(x, y) = \left(\sum_{v \in K} (x(v) - y(v))^2\right)^{1/2}$$

定义距离, 则$|K|$就成为度量空间,但通常用下面 1), 2)定义比这个拓扑更强的拓扑†, 赋予这种拓扑的$|K|$称为单纯复形 K 的**多面体** (polyhedron). 1) 对于 K 的每个单形 s, $|s|$ 的拓扑和上述度量空间的拓扑一致; 2) $|K|$的子集 U 是开集,如果对于 K 的每个单形 s, $|s| \cap U$ 是$|s|$的开集. 多面体的拓扑和上述度量拓扑一致,

当且仅当K是局部有限的. 如果单纯复形K,L同构,则$|K|,|L|$同胚;如果K是由Euclid单纯复形$\mathfrak{K}$所决定的单纯复形,则$|K|$与$|\mathfrak{K}|$同胚.

设K,L为单纯复形,$f:|K|\to|L|$为映射. 如果对于K的每个单形$s=\{v_0,\cdots,v_n\}$,$f(v_0),\cdots,f(v_n)$属于$|L|$的同一单形,且当$x=\lambda_0v_0+\cdots+\lambda_nv_n$ ($\lambda_0+\cdots+\lambda_n=1$, $\lambda_i\geqslant 0$)时,$f(x)=\lambda_0f(v_0)+\cdots+\lambda_nf(v_n)$成立,则$f$称为**线性映射** (linear mapping). 特别是,由单形映射$\varphi:K\to L$所决定的线性映射称为**重心映射** (barycentric mapping),以$|\varphi|:|K|\to|L|$表示之,但当不致引起混淆时,也可以称之为**单形映射**,并且同样用φ表示. 对于单纯复形K,K',如果存在线性同胚映射$l:|K'|\to|K|$,则把$K'=(K,l)$称为K的**重分**,通过l把$|K|$,$|K'|$看成相同,$|K|=|K'|$成立. 同Euclid单纯复形的情形一样,可以定义单纯复形的**重心重分** SdK,且对于$|K|$的子集A,定义A在K中的**星形** $St_K(A)$及**开星形** $O_K(A)$. 映射$f:|K|\to|L|$称为**分段线性映射**(piecewise linear mapping),如果对于K的某一重分,f成为线性映射.

当已给集合X的覆盖† $\mathfrak{M}=\{M_v\}_{v\in K}$ (K是指标集),如果K的有限子集s满足$\bigcap_{v\in s}M_v\neq\varnothing$时,把$s$定义为单形,则$K$成为单纯复形,称为覆盖$\mathfrak{M}$的**网** (nerve). 设$\mathfrak{N}=\{N_w\}_{w\in L}$为$\mathfrak{M}$的加细†,对于每个$w\in L$,任取满足$N_w\subset M_v$的$v\in K$,如果由$\varphi(w)=v$定义映射$\varphi:L\to K$,则$\varphi$是单形映射.

当给定单纯复形$K,L(K\cap L=\varnothing)$时,在K和L的并集$K\cup L$中,把非空的有限子集s定义为单形,如果当$s\cap K$及$s\cap L$分别是K,L的单形或空集的话. 这样得到的单纯复形称为K和L的**联接** (join),以$K*L$表示之. 特别是当L是一点p时,则把$K*p$称为K的**锥** (cone).

如果在单纯复形K的顶点之间引入序关系† $\leqslant$,使得K的各单形的顶点集成为全序集†,则把K称为**有序单纯复形**(ordered simplicial complex). 对于有序单纯复形K,L,用下述1)—3)定义有序单纯复形$K\times L$,称为K与L的**Descartes积** (Cartesian product): 1) $K\times L$的顶点是K的顶点v与L的顶点w的对(v,w); 2) $K\times L$的顶点$(v_0,w_0),\cdots,(v_n,w_n)$满足$v_0\leqslant\cdots\leqslant v_n$, $w_0\leqslant\cdots\leqslant w_n$,且它们分别都是$K,L$的一个单形的顶点时,则是$K\times L$的单形; 3) 如果$v_1\leqslant v_2$且$w_1\leqslant w_2$,则$(v_1,w_1)\leqslant(v_2,w_2)$. 假如$K,L$中有一个是局部有限的,或$K,L$都是局部可数的,则$|K*L|$与拓扑空间的联接† $|K|*|L|$同胚,$|K\times L|$与拓扑空间的积空间$|K|\times|L|$同胚.

对于拓扑空间X,如果存在(局部有限的)单纯复形K和同胚$t:|K|\to X$,则把$T=(K,t)$称为X的**三角剖分** (triangulation)或**单形剖分** (simplicial decomposition). 给了拓扑空间X的三角剖分$T=(K,t)$之后,对于单纯复形K所定义的种种概念,也可以对于T来定义. 例如当K为局部有限时,T也称为**局部有限**的,K的单形s的像$t(|s|)$称为T的**单形**,对于K的重分(K',l),$T'=(K',t\circ l)$叫作T的**重分**. 当给定拓扑空间X_i的三角剖分$T_i=(K_i,t_i)$ $(i=1,2)$时,对于映射$f:X_1\to X_2$,如果$t_2^{-1}\circ f\circ t_1:|K_1|\to|K_2|$是单形映射,则$f$叫作关于$T_1$与$T_2$的**单形映射**. 关于三角剖分有下面两个著名的问题,特别2)称为组合拓扑学的**主猜想** (德Hauptvermutung). 1) 对给定的拓扑空间X,求X能否三角剖分的拓扑条件. 2) 如果拓扑空间X可三角剖分,对于其中两个三角剖分T_1,T_2,是否存在T_i的重分$T'_i=(K'_i,t'_i)$ $(i=1,2)$使得K'_1与K'_2同构. 虽然这两个问题至今尚未完全解决,但已知三维流形†总可三角剖分,且对三维流形主猜想成立 (R. H. Bing, E. E. Moise). J. Milnor证明主猜想一般不成立,但如X是任意维流形是否成立尚未解决. 又任意维微分流形†可三角剖分且对其C^r三角剖分† $(r\geqslant 1)$主猜想成立 (S. S. Cairns, J. H. C. Whitehead) (关于这些的文献 →[7]) (→流形).

设 X_1, X_2 是给定三角剖分 T_1, T_2 的拓扑空间，$f: X_1 \to X_2$ 为连续映射，$\varphi: X_1 \to X_2$ 是关于 T_1 与 T_2 的单形映射．如果对于 X_1 的每点 x, $\varphi(x)$ 包含在 T_2 的某个单形中，该单形的内部包含 $f(x)$，则 φ 称为 f 的**单形逼近**（simplicial approximation）．下述的存在定理称为**单形逼近定理**（theorem on simplicial approximation）：对于任意的连续映射 $f: X_1 \to X_2$，可取 T_1 的适当重分 T_1'，使得存在关于 T_1' 及 T_2 的单形映射 $\varphi: X_1 \to X_2$，而 φ 是 f 的单形逼近．当 T_1 是有限的三角剖分时，对于充分大的 n, T_1' 可以取作 $\mathrm{Sd}^n T$．此处 Sd^n 表示重复进行 n 回重心重分．连续映射与其单形逼近是同伦[†]的．

【半单纯复形】 i) 有序复形 $O(K)$．单纯复形 K 的容许重复的有序的顶点序列 $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$，其中 $v_0, v_1, \cdots, v_n$ 均包含在某个单形之中，这种序列全体的集合用 $O(K)_n$ 表示．对于每个整数 i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 定义映射 $\partial_i: O(K)_n \to O(K)_{n-1}$ 及 $s_i: O(K)_n \to O(K)_{n+1}$ 为 $\partial_i(v_0, \cdots, v_n) = (v_0, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n)$, $s_i(v_0, \cdots, v_n) = (v_0, \cdots, v_{i-1}, v_i, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_n)$．这时下面关系式成立：

(1) $$\begin{aligned} \partial_i \circ \partial_j &= \partial_{j-1} \circ \partial_i, \quad i < j; \\ s_i \circ s_j &= s_{j+1} \circ s_i, \quad i \leqslant j; \\ \partial_i \circ s_j &= s_{j-1} \circ \partial_i, \quad i < j; \\ \partial_i \circ s_j &= s_j \circ \partial_{i-1}, \quad i > j+1; \\ \partial_i \circ s_i &= \partial_{i+1} \circ s_i = \text{恒等映射}. \end{aligned}$$

ii) 奇异复形 $S(X)$．用 $\Delta(n)$ 表示 n 维 Euclid 单形，其顶点是给定坐标轴的 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的原点 $e_0 = (0, 0, \cdots, 0)$ 及每个坐标轴上的单位点 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$．拓扑空间 X 中的**奇异 n 单形**（singular n-simplex）是一连续映射 $T: \Delta(n) \to X$．用 $S(X)_n$ 表示所有连续映射 $T: \Delta(n) \to X$ 的集合．用点 $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$ 的重心坐标 $(\lambda_0, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ 来定义映射 $\partial_i: S(X)_n \to S(X)_{n-1}$ 及 $S_i: S(X)_n \to S(X)_{n+1}$ 为 $\partial_i T(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n-1}) = T(\lambda_0, \cdots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_i, \cdots, \lambda_{n-1})$，及 $s_i T(\lambda_0, \cdots, \lambda_{n+1}) = T(\lambda_0, \cdots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_{i+1}, \lambda_{i+2}, \cdots \lambda_{n+1})$ 时，则对 ∂_i, s_i 上述关系式 (1) 也成立．

iii) 半单纯复形．这些事实是定义单纯复形和拓扑空间的同调[†]的基础，(→同调群)．由此加以抽象化可得下述一般定义（S. Eilenberg-J. A. Zilber）：对于每个整数 n 及 $i(0 \leqslant i \leqslant n)$，当给定集合 K_n 及映射 $\partial_i: K_n \to K_{n-1}$, $s_i: K_n \to K_{n+1}$，且上述 ∂_i, s_i 的关系式(1)成立时，$K = (K_n, \partial_i, s_i)$ 称为**半单纯复形**（semi-simplicial complex）简称为 **s. s. 复形**（s. s. complex）．把 K_n 的元素称为 s. s. 复形 K 的 n 维**单形**，∂_i 称为**面算子**（face operator），s_i 称为**退化算子**（degeneracy operator）形如 $s_i\sigma(\sigma \in K_{n-1})$ 的单形称为**退化**（degenerate）．上述的 $O(K)_n$ 的元素称为 K 的**有序单形**（ordered simplex），$S(X)_n$ 的元素称为 X 的**奇异单形**（singular simplex）．它们全体所构成的 s. s. 复形分别称为**有序复形**（ordered complex）及**奇异复形**（singular complex），分别用 $O(K)$ 及 $S(X)$ 表示之．

设 K 为 s. s. 复形，$L_n \subset K_n (n \geqslant 0)$，如果对于每个 i，有 $\partial_i(L_n) \subset L_{n-1}$, $s_i(L_n) \subset L_{n+1}$，则 $L = (L_n, \partial_i | L_n, s_i | L_n)$ 成为 s. s. 复形，称为 s. s. 复形 K 的**子复形**．例如对于拓扑空间 X 的子空间 A，$S(A)$ 是 $S(X)$ 的子复形，对于有序单纯复形 K，满足 $v_0 \leqslant \cdots \leqslant v_n$ 的有序单形 $(v_0, \cdots, v_n)$ 全体的集合就是 $O(K)$ 的子复形（用 $O'(K)$ 表示）．设 K, L 为 s. s. 复形，对于映射序列 $f_n: K_n \to L_n (n \geqslant 0)$，如果 $\partial_i \circ f_{n+1} = f_n \circ \partial_i$, $s_i \circ f_n = f_{n+1} \circ s_i (0 \leqslant i \leqslant n)$ 成立，则 $f = \{f_n\}$ 称为从 K 到 L 的 **s. s. 映射**（s. s. mapping）．例如，拓扑空间之间的连续映射 $f: X \to Y$ 可通过 $S(f)\ T = f \circ T$ 定义 s. s. 映射 $S(f): S(X) \to S(Y)$．如果 s. s. 复形，K, L 之间存在双 s. s. 映射时 K 及 L 称为**同构**．对于 s. s. 复形 K, L，用下述 1), 2) 定义 s. s. 复形 $K \times L$，称为 K 与 L 的 **Descartes 积**：1) $(K \times L)_n = K_n \times L_n$；2) $\partial_i(\sigma, \tau) =$

$(\partial_i\sigma, \partial_i\tau)$, $s_i(\sigma, \tau) = (s_i\sigma, s_i\tau)$ $(\sigma \in K_n, \tau \in L_n)$. 对于有序单纯复形 K, L, $O'(K) \times O'(L)$ 与 $O'(K \times L)$ 同构,对于拓扑空间 X, Y, $S(X) \times S(Y)$ 与 $S(X \times Y)$ 同构.

已给 s. s. 复形 K, 造拓扑空间 $|K|$ 如下:赋予 K_n 以离散拓扑†,考虑积空间 $K_n \times \Delta^n$,令 $\bar{K} = \bigcup_{n \geq 0} K_n \times \Delta^n$. 再取 Δ^n 的顶点为 $p_0, \cdots, p_n$,定义单形映射 $\varepsilon^i: \Delta^{n-1} \to \Delta^n$, $\eta^i: \Delta^{n+1} \to \Delta^n$ 为 $\varepsilon^i(p_j) = p_j$ $(j < i)$, $\varepsilon^i(p_j) = p_{j+1}$ $(j \geq i)$; $\eta^i(p_j) = p_j (j \leq i)$, $\eta^i(p_j) = p_{j-1} (j > i)$. 在 $\bar{K}$ 的点之间引入由下述关系~生成的等价关系: $(\partial_i\sigma, y) \sim (\sigma, \varepsilon^i(y))(\sigma \in K_n, y \in \Delta^{n-1})$, $(s_i\sigma, y) \sim (\sigma, \eta^i(y))$ $(\sigma \in K_n, y \in \Delta^{n+1})$, 此处 $0 \leq i \leq n$. 以 $|K|$ 表示 $\bar{K}$ 在这个等价关系之下产生的商空间† $\bar{K}/\sim$, 称为 **s. s. 复形 K 的实现** (realization) (Milnor). 如果用 $|\sigma, y| \in |K|$ 来表示 $(\sigma, y) \in \bar{K}$ 的等价类, 则对于 s. s. 映射 $f: K \to L$, 定义连续映射 $|f|: |K| \to |L|$ 为 $|f|(|\sigma, y|) = |f(\sigma), y|$, 称之为 **s. s. 映射 f 的实现.**

对于拓扑空间 X, 如果把 K 取作 $S(X)$, 则下述条件成立: 对于 $\sigma_0, \cdots, \sigma_{k-1}, \sigma_{k+1}, \cdots, \sigma_{n+1} \in K_n$, 如果 $\partial_i\sigma_j = \partial_{j-1}\sigma_i (i < j, i, j \neq k)$ 成立,则存在 $\sigma \in K_{n+1}$ 使 $\partial_i\sigma = \sigma_i (i \neq k)$. 一般地, 满足这个条件的 s. s. 复形称为 **Kan 复形** (Kan complex). 若再有 $\partial_i\sigma = \partial_i\sigma' (\sigma, \sigma' \in K_n, i \neq k)$ 则 $\partial_k\sigma = \partial_k\sigma'$ 成立时, K 称为**极小复形** (minimal complex). 对于任意的 s. s. 复形 K, 存在极小子复形 M, 且所有的极小子复形彼此同构, 且 $|M|$ 为 $|K|$ 的形变收缩核†. 对于 Kan 复形, 能够定义同伦群†, 开展同伦论的研究([6]).

【胞腔复形】 设 V^n 为 n 维单位球体†, S^{n-1} 为 $(n-1)$ 维单位球面†, X 为 Hausdorff 空间, e 为 X 的子集, $\bar{e}$, $\dot{e}$ 分别为 e 在 X 中的闭包, 边缘. X 的子集 e 称为 n **维胞腔** (cell), 如存在相对同胚 $\varphi: (V^n, S^{n-1}) \to (\bar{e}, \dot{e})$, (即连续映射 $\varphi: V^n \to \bar{e}$, 使得 $\varphi(S^{n-1}) \subset \dot{e}$, 且 $\varphi: V^n - S^{n-1} \approx \bar{e} - \dot{e}$ (同胚), φ 称为其**示性映射** (characteristic mapping). 例如从 S^n 中除去一点 p 后, $S^n - \{p\}$ 就是 n 维胞腔. Hausdorff 空间 X 的胞腔的集合 $\{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$, 如满足下列条件称为 X 的**胞腔剖分** (cellular decomposition) 1) $e_\lambda \cap e_\mu = \varnothing$ $(\lambda \neq \mu)$; 2) $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda$; 3) 如果 e_λ 的维数是 $n+1$, 则 $\dot{e}_\lambda \subset X^n$, 这里 X^n 是维数 $\leq n$ 的 $e_\mu (\mu \in \Lambda)$ 全体的并集. 例如 S^n 可分解成 0 维及 n 维两个胞腔的胞腔剖分.

给定胞腔剖分的 Hausdorff 空间称为**胞腔复形** (cell complex), 其 0 维胞腔称为**顶点**, 上面条件中的 X^n 称为其 **n 骨架**. 胞腔复形 X **的维数**是 X 中的胞腔的维数集合中的最大数, 如果不存在最大数, 则 X 的维数是 ∞. X 的子集 A 称为 X 的**子复形**, 如果对于和 X 的子集 A 相交的 X 的胞腔 e, 有 $\bar{e} \subset A$ 成立, 则 A 以所有这种 e 的集合作为胞腔剖分而成为胞腔复形. 如胞腔复形 X 的胞腔数目有限时, X 称为**有限**的. 对于 X 的每个顶点 x, 如果存在 X 的有限子复形 A, 使 x 包含在 A 的内部†, 则 X 称为**局部有限**的. 同样可以定义**可数**、**局部可数**等等. 胞腔复形 X 的每个 n 胞腔 $(n \geq 0)$ 的闭包都与 V^n 同胚时, X 就称为**正则的** (regular). 从胞腔复形 X 到胞腔复形 Y 的连续映射 $f: X \to Y$, 满足 $f(X^n) \subset Y^n$ $(n = 0, 1, \cdots)$ 时称为**胞腔映射** (cellular mapping). 设 X, Y 为胞腔复形, 所有 $e_1 \times e_2 (e_1, e_2$ 分别是 X, Y 的胞腔) 的集合构成积空间 $X \times Y$ 的胞腔剖分, 这个胞腔复形叫作 X 和 Y 的**积复形** (product complex).

胞腔复形 X 如果满足下列条件 C) 时称为**闭包有限** (closure finite), 满足条件 W) 时称为具有**弱拓扑** (weak topology). C) 对于 X 的每个胞腔 e, X 中存在有限子复形包含 e 为胞腔. W) X 的子集 U 是开集当且仅当对于 X 的每个胞腔 e, $U \cap \bar{e}$ 是 $\bar{e}$ 的开集. 胞腔复形中重要的就是满足这两个条件的胞腔复形, 称为 **CW 复形** (CW complex), 其胞腔剖分叫作 **CW 剖分** (CW decomposition) (J. H. C. Whitehead). 有限的胞腔复形当然是 CW 复形, 局部有限的胞腔复形也是 CW 复形.

下面列举 CW 复形的主要性质([6],[8]): CW 复形是仿紧† 正规空间† 并且是局部可缩的†. CW 复形的子复形是闭集,其本身也是 CW 复形. 从 CW 复形 X 到拓扑空间的连续映射是连续的,如果对于 X 的每个胞腔 e, $f|\bar{e}$ 也是连续的. 对于 CW 复形之间任意的连续映射,存在与它同伦的胞腔映射(**胞腔逼近定理** (cellular approximation theorem)). CW 复形 X 及其子复形 A 的对 (X, A) 对于任意的拓扑空间具有同伦扩张性质†. 对于任意纤维空间† CW 复形具有覆盖同伦性质†. CW 复形 X, Y 的积复形不一定是 CW 复形,但 1) 如 X, Y 至少有一个是局部有限的, 或 X, Y 均为局部可数的, 则 $X \times Y$ 是 CW 复形; 2) 积空间 $X \times Y$ 与某个 CW 复形同伦等价†. 在 2) 中把积空间换成映射空间† Y^X 也可. CW 复形的覆盖空间† 具有 CW 剖分.

如果 K 为单纯复形,其多面体 $|K|$ 以其所有开单形为胞腔作为胞腔剖分而成为正则 CW 复形. 这时 K 的局部有限等条件和 CW 复形相对应的条件等价. 特别对于 Euclid 单纯复形,其 Euclid 多面体是局部有限 CW 复形. 对于 Euclid 胞腔复形,其 Euclid 多面体也是如此. 一般的多面体,可以具有 CW 剖分其胞腔数目比起单形剖分的单形数目少得多,从这一点来看, CW 复形比单纯复形更加方便. 对于任意的 CW 复形 X,存在与 X 同伦等价的多面体 $|K|$. 这时如果 X 是 n 维有限(可数) CW 复形, K 也可取作 n 维有限(可数)单纯复形. s. s. 复形 K 的实现 $|K|$ 具有 CW 剖分,使 K 的每个非退化单形一一对应于同维数的胞腔. 对于拓扑空间 X, 定义映射 $\rho: |S(X)| \to X$ 为 $\rho(|T, y|) = T(y)$ $(T \in S(X)_n,\ y \in \Delta^n)$,则 ρ 是弱同伦等价映射†. CW 复形 X, Y 同伦等价当且仅当 $S(X)$, $S(Y)$ 的极小子复形同构.

【参】 [1] H. Cartan, Sur la théorie de Kan, Séminaire H. Cartan, Paris, 1956—57; [2] S. Eilenberg-N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press, 1952; [3] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1958; [4] P. J. Hilton-S. Wylie, Homology theory, Cambridge Univ. Press, 1960; [5] 河田敬義編, 位相幾何学, 岩波, 1965; [6] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博, 位相幾何学 I, 岩波, 1967; [7] J. R. Munkres, Elementary differential topology, Princeton Univ. Press, 1961, 第二版 1966; [8] H. Schubert Topologie, Teubner, 1964; [9] J. P. May, Simplicial objects in algebraic topology, van Nostrand, 1967; [10] E. Curtis, Simplicial homotopy theory, Lecture notes, Aarhus, 1967; [11] E. H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

流形 [英 manifold 法 variété 德 Mannigfaltigkeit 俄 многообразие 日 多様体] n 维流形的概念,在 J. L. Lagrange 的力学中已经初见端倪. 十九世纪中期,已经知道 n 维 Euclid 空间是 n 个实变量的连续统(A. Cayley; H. G. Grassmann, 1844, 1861; L. Schläfli, 1852), 但是一般 n 维流形的概念是 B. Riemann 研究微分几何学时引进的 (1854), 他是用归纳法进行构造的. 正如曲线的运动形成曲面一样, n 维流形是把无限多个 $(n-1)$ 维流形按照一维流形方式放在一起而形成的. 流形的拓扑结构的研究与其局部理论的研究是同时开始的, Riemann, E. Betti, H. Poincaré 等人应用的是解析方法,但是, Poincaré 为了摆脱这种方法的困难与不利之处, 他把 n 维流形定义为一种连通的拓扑空间,其中每一点都具有和 n 维 Euclid 空间同胚的邻域(也称为 **Poincaré 流形** (Poincaré manifold)), 并对之进行研究, 从而开辟了组合拓扑学的道路.

【拓扑流形】 在 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,由 $x_1 \geqslant 0$ 定义的半空间用 H^n 表示. Hausdorff 空间 M,当每点 p 具有与 $\boldsymbol{R}^n$ 或 H^n 同胚的开邻域 $U(p)$ 时,称为 n 维**拓扑流形**(topological manifold). $U(p) \approx H^n$ (同胚) 的点 p 的全体 ∂M 称为流形 M 的**边缘** (boundary), 其补集 $M_0 = M - \partial M$ 称为 M 的**内部** (interior), $\partial M = \varnothing$ (空集)的流形称为**无边缘流形**(manifold without boundary, unbounded manifold), $\partial M \neq \varnothing$ 的流形称为**有边缘(或具边缘)流形** (manifold with boundary). n 维流形 M 的边缘 ∂M 是 $n-1$ 维无边缘流形. 紧的无边缘的连通流形称为**闭流形** (closed manifold), 非紧的无边缘的连通流形称为**开流形**(open manifold). 存在连通的但非

仿紧†的拓扑流形. 一维的这种流形称为**长直线**(long line). 下面所讲的流形都假定是连通且仿紧的,因而是具有可数开基,且可赋距离的流形.

流形M的边缘 $B=\partial M$,具有与 $B\times[0,1)$ 同胚的开邻域,其中 ∂M 与 $B\times(0)$ 对应 (M. Brown).为表示这性质,称B在M中**有领**(collared). 如果流形M的闭子集 N, 满足 1) 对于相对拓扑,其本身也是流形, 2) $\partial N=\partial M\cap N$, 则$N$称为$M$的**子流形** (submanifold). 特别是流形的(连通) 开集也称为**开子流形** (open submanifold). 对于 n 维无边缘流形M的 $n-1$ 维子流形 N, 如果在N的每点 p 存在 p 在M中的开邻域 U_p, 以及同胚 $f_p:U_p\approx\boldsymbol{R}^n$, 使得 $f_p(U_p\cap N)=\boldsymbol{R}^{n-1}\subset\boldsymbol{R}^n$, 则$N$称为在$M$中**局部平坦**(locally flat).

因为 n 维拓扑流形M的内部 M_0 的各点 p 具有与 $\boldsymbol{R}^n$ 同胚的开邻域 (**局部 Euclid 的**(locally Euclidean)),故在点 p 的(整系数)局部同调群† $H_i(p)=H_i(M_0,M_0-\{p\})$ 具有性质: $H_i(p)=0\ (i\neq n)$, $H_n(p)\cong\boldsymbol{Z}$(整数群). 令$M_0$的每点 p 对应于其局部同调群 $H_n(p)$, 就决定了 M_0 上的局部系数群† $\boldsymbol{G}(Z)=\{H_n(p)\mid p\in M_0\}$. 如果局部系数群是单的†,即 $\boldsymbol{G}(Z)$ 与 $M_0\times\boldsymbol{Z}$ 同构, 则 M 称为**可定向的** (orientable), 否则称为**不可定向的** (non-orientable). 二维球面 S^2 和实射影平面 P^2 分别是可定向和不可定向流形的例子. 在可定向的情形,标准截面 $s:M_0\to\boldsymbol{G}(Z)$ ($s(p)$ 为 $H_n(p)$ 的生成元)除符号外是确定的. 其中一个 s 称为M的**定向** (orientation), $-s$ 称为它的**反定向**(opposite orientation). 且组(M,s)称为**已定向流形**(oriented manifold). 这时M的定向 s 决定 (M_0的) 各点 p 的**局部定向** (local orientation) $s(p)$.

对于连通定向紧 n 维流形 M 的奇异同调群†, 有 $H_n(M,\partial M;Z)\cong\boldsymbol{Z}$ (对不可定向流形, $H_n(M,\partial M;Z_2)\cong\boldsymbol{Z}_2$), 其基本生成元 $\boldsymbol{m}$ 称为 $(M,\partial M)$ 的**基本同调类** (fundamental homology class). 对于定向流形, 基本同调类 $\boldsymbol{m}$ 通过切除同构定理† $H_n(M,\partial M)\cong H_n(M_0,M_0-\{p\})$ 对应于在 M_0 的点 p 的局部定向 $s(p)$.

已定向的紧 n 维流形M, 关于任意系数群的奇异(上)同调群 (→同调群) 之间有如下的 **Poincaré (-Lefschetz) 对偶定理**(Poincaré-Lefschetz duality theorem) 成立:

$$D:\ H^i(M)\cong H_{n-i}(M,\partial M),$$
$$H^i(M,\partial M)\cong H_{n-i}(M).$$

这个同构对应把 $u\in H^i(M)$ (或 $H^i(M,\partial M)$) 对应到 $D_u=u\cap m$ (与基本同调类 m 的卡积†). 对于不可定向流形,系数群用 $\boldsymbol{Z}_2$, 同样定理成立. 由于这种对偶性, 流形的以环为系数的同调群具有与上同调环同构的环结构, 称为**同调环**(homology ring). 这个情形下的同调类的积与古典的基于交概念的积一致. 从上述对偶性可推出可定向 n 维闭流形的 Betti 数†之间关系式 $b_r=b_{n-r}$ 成立,且 r 维挠群† 与 $n-r-1$ 维挠群同构.

对于 n 维球面 S^n 中的任意闭集 F, 下面的 **Alexander (-Понтрягин) 对偶定理**(Alexander-Pontrjagin duality theorem) 成立: $\widetilde{H}^i_C(F)\cong\widetilde{H}_{n-i-1}(S^n-F)\ (i\geqslant 0)$; 式中左端为 Čech 上同调群†,右端为奇异同调群, 均表为约化†形式且系数群为任意的. 作为这个定理的特殊情形, 可以得出 Jordan 曲线定理†, 即平面上的 Jordan 曲线把平面分成两个区域.

下面对于单形剖分的空间或多面体来叙述组合流形的概念.

【伪流形】 仿紧†多面体 $M=|K|$ 称为 n 维**伪流形**(pseudo-manifold), 如果其剖分(单纯)复形K满足下面三个条件: 1) K 的任意单形是 n 单形或某 n 单形的面; 2) 任意的 $n-1$ 维单形最多是两个 n 单形的面; 3) 对于同属于K的一个连通分支的任意两个 n 维单形 σ,τ, 存在 n 维单形的有限序列 $\sigma_0=\sigma,\sigma_1,\cdots,\sigma_s=\tau$, 使得相邻的 n 维单形 σ_i 及 σ_{i+1} 共有 $n-1$ 维面. 伪流形的剖分复形是局部有限的.

设K中的 $n-1$ 维单形, 以它为面的 n 维单形只有一个, 这种 $n-1$ 维单形及其面一起构成K的子复形 L, 则 L的多面体 $|L|$ 称为伪流形M的**边缘**(boundary),以 ∂M 表示之. 伪流

形的边缘不一定是伪流形.

n 维多面体 $|K|$(或胞腔复形†) 的点,如果具有与 $\boldsymbol{R}^n$ 或 H^n 同胚的开邻域, 则称为 $|K|$ 的**正则点**(regular point);如果没有这样的开邻域,则称为**奇点** (singular point). 没有奇点的伪流形是拓扑流形. n 维伪流形是 n 维多面体, 且其全部奇点的集合的维数 $\leqslant n-2$, 这个性质刻划了 n 维伪流形的特征.

n 维伪流形 $M=|K|$ 中两个已定向的 n 维单形 τ_1, τ_2, 如果共有 $n-1$ 维单形 σ 作为面,且在其关联数†之间 $[\tau_1,\sigma]=-[\tau_2,\sigma]$ 成立,则称为**协同定向的**(coherently oriented). 假如 M 的所有 n 维单形已定向,且两个相邻的 n 维单形均协同地定向,则称 M 为**定向的**(oriented) 伪流形. 对于定向紧 n 维连通伪流形 M, 所有协同定向的 n 维单形的形式和成为 M (mod ∂M)的整系数闭链,称为$(M,\partial M)$的**基本闭链** (fundamental cycle), 它的同调类的基本同调类生成 $H_n(M,\partial M;Z)\cong\boldsymbol{Z}$. 不可定向伪流形也可用 $\boldsymbol{Z}_2$ 为系数作同样的定义. 伪流形的可定向性与所有正则点所构成的拓扑流形的可定向性是一致的.

【组合流形与同调流形】 仿紧多面体 $M=|K|$ 如果它的剖分复形 K 的任意顶点的星形†与 n 维单形组合等价(即具有相互同构的重分), 则称为 n 维**组合流形** (combinatorial manifold), 组合流形是拓扑流形也是伪流形. 仿紧多面体 $M=|K|$, 如果对于它的任意点的局部同调群, $H_i(p)=0(i\neq n)$, $H_n(p)\cong\boldsymbol{Z}$ 或 0 成立, 则称为 n 维**同调流形** (homology manifold). 同调流形是伪流形. 所有满足 $H_n(p)=0$ 的点的集合 ∂M 称为 M 的**边缘**(boundary), 它与 M 作为伪流形时的边缘一致. 如果 n 维同调流形 M 的边缘也是 $n-1$ 维同调流形, 则 M 称为具有**正则边缘** (regular boundary).

现在我们定义对于具有正则边缘的 n 维同调流形 $M=|K|$ 的剖分 K 的对偶剖分. 首先, 以 $\sigma<\tau$ 表示 K 的单形 σ 是 τ 的面. K 的重心重分† K' 的顶点,按照定义,是 K 的单形的重心, K' 的每个 k 维单形 τ 与 K 的单形序列 $(\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_k)$ 一一对应,这单形序列满足 $\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_k$, 且 σ_i 的重心构成 τ 的顶点集合. 现在对于 K 的 r 维单形 σ^r, 考虑所有由 σ^r 开头且满足 $\sigma^r<\tau^{r+1}<\cdots<\tau^n$ 的单形序列 $(\sigma^r,\tau^{r+1},\cdots,\tau^n)$, 这种单形序列所对应的 K' 的 $n-r$ 维单形及其面构成 K' 的 $n-r$ 维单形及其面构成 K' 的 $n-r$ 维子复形 y^{n-r}, 称为 σ^r 的**对偶胞腔** (dual cell). 多面体 $|y^{n-r}|$ 包含于 σ^r 在 K 中的星形 $|St(\sigma^r)|$ 中,是可定向的伪流形,如果 σ^r 不在 $|K|$ 的边缘上,则其边缘 $\partial|y^{n-r}|$ 与 $n-r-1$ 维球面具有相同的同调群. 对于 K 的单形 σ^r 及其对偶胞腔 $y^{n-r}=D\sigma^r$, 有 $\partial|y^{n-r}|\cap|\sigma^r|=|y^{n-r}|\cap\partial|\sigma^r|=\varnothing$, $|y^{n-r}|\cap|\sigma^r|$ 是 σ^r 的重心, 它只由一点构成. 对偶胞腔的边缘也由若干个对偶胞腔构成,如果 $\sigma<\tau$,则 $D\tau<D\sigma$. 特别是 K 的 0 单形(即顶点) σ^0 的对偶胞腔 $y^n=D\sigma^0$ 与 σ^0 在 K' 中的星形 $St'(\sigma^0)$ 一致, 且 K 的 n 维单形 σ^n 的对偶胞腔就是 σ^n 的重心. 所有这种对偶胞腔给出同调流形 M 的胞腔剖分, 称为 M 的剖分 K 的**对偶(胞腔)剖分** (dual cellular subdivision). 这在证明同调流形的 Poincaré 对偶定理时要用到,它给出对偶性的几何意义.

设 n 维拓扑流形 M^n 的坐标邻域为 $\{U_i\}$, 从各 U_i 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集的拓扑映射为 h_i. 假如坐标变换 $h_i\circ h_j^{-1}:h_j(U_i\cap U_j)\to h_i(U_i\cap U_j)$ 是**分段线性的** (piecewise linear) (即关于 $\boldsymbol{R}^n$ 的标准三角剖分,对于 $h_j(U_i\cap U_j)$ 及 $h_i(U_i\cap U_j)$ 的适当重分, $h_i\circ h_j^{-1}$ 成为单形映射), 则 M^n 称为**分段线性流形** (piecewise-linear manifold, P. L. manifold). 分段线性流形可以三角剖分 (J. R. Stallings, Lectures on polyhedral topology, Lecture notes at Tata Institute 1968, J. F. P. Hudson, Piecewise linear topology, Mathematical lecture notes, Univ. of Chicago, 1966—1967). 因此分段线性流形等价于组合流形. E. C. Zeeman 定义了与组合流形概念类似的概念 polymanifold ([9]).

更一般的流形概念以及关于它们的对偶定理→[8].

虽然组合流形是同调流形, 但反过来同调

流形除一、二、三维外不一定是组合流形. 维数$\leqslant 3$的拓扑流形可以进行单形剖分成为组合流形, 且任意的单形剖分为组合等价 (T. Radó, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **11**(1935); C. D. Papakyriakopoulos-E. E. Moise, Ann. of Math., **56**(1952); R. H. Bing, Ann. of Math., **69**(1959)). 1969 年 Kirby, Siebenmann 及 Wall 证明存在不允许任何组合结构的六维拓扑流形, 以及对五维组合流形主猜想不成立 (R. Kirby and L. Siebenmann, Bull. Amer. Math. Soc., **75**(1969)).

C^r 微分流形†存在 C^r 剖分† K, 使之成为组合流形, 且这种剖分之间相互组合等价. 反过来关于组合流形的光滑化问题†有下列结果: 对于 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 的 n 维子流形 M, $p\in M$, ν 为通过 p 的 k 平面, 如果存在 p 在 M 中的邻域 U_p 使 U_p 上任意两点所连直线与 k 平面 ν 构成的角度均大于常数 $\varepsilon>0$, 则称 ν 在点 p 与M**横截** (transverse). 如在M的每点 p 给出与M横截的 k 平面 $\nu(p)$, 把点 p 对应于通过 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 的原点且与 k 平面 $\nu(p)$ 平行的 k 平面就得出映射 $\nu: M\to M_{n+k,k}$(Grassmann流形†). 如 ν 是连续映射,就把 k 平面族 $\{\nu(p)\}$ 或映射 ν 称为子流形M上的**横截(面)场** (transverse field). n 维组合流形 $M=|K|$可光滑化的充分必要条件是存在分段线性的†嵌入映射 $f: M\to\boldsymbol{R}^{n+k}$ 使得在 $f(M)$ 上存在横截(面)场. 且如果两个横截面场 $\nu_1,\nu_2: f(M)\to G_{n,k}$ 互相同伦, 则它们所决定的M上的微分结构互相同构 (S. S. Cairns, Ann. of Math., **41**(1940), J. H. C. Whitehead, Ann. of Math., **73**(1961)).

著名的 **Poincaré 猜想** (Poincaré conjecture) "单连通†的三维闭流形与三维球面同胚" 尽管经许多数学家非凡的努力,尚未得到解决. 这个猜想有下述 n 维拓广: 把与 n 维球面 S^n 具有相同的同伦型†的组合流形称为 n 维**同伦球面** (homotopy sphere). 所谓**广义 Poincaré 猜想** (generalized Poincaré conjecture) 是"n 维同伦球面与 S^n 同胚", 在 $n\geqslant 5$ 时已经得到肯定的解决(J. Stallings, Polyhedral homotopy spheres, Bull. Amer. Math. Soc., **66**(1960); E. Zeeman, Topology of 3-manifolds, Prentice-Hall, 1962. S. Smale, Ann of Math., **74**.(1961)).

【三维流形】 关于三维流形进行许多研究工作,其中我们举出下面几个结果:

1) **球面定理** (sphere theorem). 设M是三维定向流形, 如果 $\pi_2(M)\neq 0$, 则可把二维球面 S 分段线性地嵌入于M中. 其中 S 在M中不同伦于 0 (Papakyriakopoulos, Ann. of Math., **66** (1957); Whitehead, Bull. Amer. Math. Soc., **64** (1958)).

2) **Dehn 引理**. 三维流形M中有奇点的二维胞腔$^\dagger D$的边缘是简单多边形 C, 如果 C 在 D 中的某邻域不包含 D 的奇点, 则在M中存在无奇点的二维胞腔,其边缘为 C. 1910 年 M.Dehn 证明了这个引理, 但证明是不完全的. 1957 年 Papakyriakopoulos (Ann. of Math., **66**(1957)) 与本間竜雄 (Yokohama Math. J., **5**(1957)) 分别独立地证明了 Dehn 引理 (Whitehead-A. Šapiro, Bull. Amer. Math. Soc., **64** (1958)).

3) **闭路定理** (loop theorem). 设三维流形 M的边缘为 N. 取N的一个分支 N' 的开集 U 中的闭曲线 L, 使 L 在M中同伦于 0, 在N中不同伦于 0. 则存在U中的简单闭曲线 L^0, L^0 在M中同伦于 0, 在N中不同伦于 0 (Papakyriakopoulos, Proc. London Math. Soc., **7**(1957); Stallings, Ann. of Math., **72**(1960)).

4) J. Milnor (Amer. J. Math., **84**(1962)) 的三维流形的**唯一分解定理** (unique decomposition theorem). 以下设流形M都是连通的、已定向的、有单形剖分的、无边缘的三维流形, 且同胚都是分段线性的. 两个这样的流形 M, M' 相互以保定向的同胚互相映射时称为同构: $M\approx M'$. 二个流形 M, M', 各自去掉三维开胞腔, 然后把边缘看成同一, 所得的流形 $M\# M'$ 称为M和 M' 的**连通和** (connected sum). 和三维球面 S^3 不同构的流形 M 称为**非平凡的** (non-trivial). 非平凡的流形 P 称为**素的** (prime), 如果 P 不能分解为 $M_1\# M_2$ (其中 M_1 与 M_2 也是非平凡流形). 如果M中的所有二维球面都是

三维胞腔的边缘，则M称为**不可约** (irreducible) 流形. 于是应用球面定理可得下列定理：如果三维紧流形是非平凡的，则它与某些素流形P_1, P_2, $\cdots$, P_k 的连通和同构. $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 除掉顺序和同构以外唯一决定. 对于所有的不可约流形 M, $\pi_2(M)=0$ 成立. 反之，假如 Poincaré 猜想是对的，则 $\pi_2=0$ 的流形是不可约的.

关于三维流形更进一步的结果→[9].

【野生空间】 三维非闭流形的性质和三维闭流形差别很大. 例如，与三维开胞腔具有相同同伦型†的三维开流形中，存在与三维开胞腔不同胚的流形 U (M. H. A. Newman-Whitehead, Quart. J. Math., **8**(1937)). 构成这种例子需要无限回的操作，这样得到的一系列空间称为**野生的**(或病态的) (wild, pathological). 下面讲些有代表的例子.

继 L. Antoine 的研究(J. Math. Pures Appl., **8**(1921)) 之后，J. W. Alexander (Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **10**(1924)) 为了造 $n=2$ 时 Schönflies 问题†的反例，在三维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^3$ 的二维球面 S^2 中，构造 $\boldsymbol{R}^3-S^2$ 的有界区域不是单连通的即所谓 Alexander 角球 (horned sphere) (图 1). R. H. Fox-E. Artin (Ann. of Math., **49**(1948)) 应用纽结†理论得到类似的例子(图 2). Bing (Ann. of Math., **69**(1959)), B. J. Ball (Ann. of Math., **69**(1959)) 等人更进一步研究了这些结果. 对于上述的 Newman-Whitehead 流形 U，证明了U与直线 $\boldsymbol{R}^1$ 的积空间与四维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^4$ 同胚. R. L. Moore ([10]) 虽证明二维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^2$ 的以不分离 $\boldsymbol{R}^2$ 的连续统为元素的上半连续分解† 的商空间B是 $\boldsymbol{R}^2$，但 Bing 造出 $\boldsymbol{R}^3$ 同样的上半连续分解，其商空间不仅不和 $\boldsymbol{R}^3$ 同胚而且还不是流形 (Ann. of Math., **70**(1959)). 其商空间B有性质 $B\times\boldsymbol{R}^1\approx\boldsymbol{R}^4$. 此外 Bing (Fund. Math., **47**(1957)) 还证明野生闭曲面最多有可数个可以同时嵌入在 $\boldsymbol{R}^3$ 中，可是 Stallings (Ann. of Math., **72**(1960)) 却证明了有连续统的基数那么多野生的圆盘可以同时嵌入在 $\boldsymbol{R}^3$ 中 ([9]).

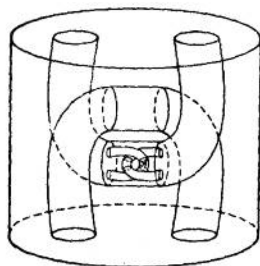


图 1

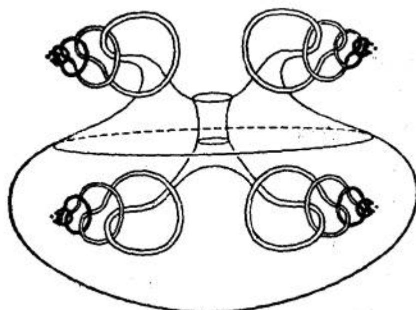


图 2

【参】 [1] F. Enriques, Prinzipien der Geometrie, Enzykl. der Math., III 1 A, 1907; [2] H. Weyl, Die Idee der Riemannsche Fläche, Teubner, 1913, 第三版 1955 (英译本: The concept of a Riemann surface, Addison-Wesley, 1964); [3] S. Lefschetz, Topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1930; [4] S. Lefschetz, Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1942; [5] S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton Univ. Press, 1949; [6] H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (Chelsea, 1965); [7] S. S. Cairns, Triangulated manifolds and differentiable manifolds (R. L. Wilder-W. L. Ayres, Lectures in topology, Univ. of Michigan, 1941), 143–157; [8] R. L. Wilder, Topology of manifolds, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1949; [9] M. K. Fort, Jr., Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall, 1962; [10] R. L. Moore, Foundations of point set theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., XIII, 1962; [11] J. Milnor, Microbundles and differentiable structures, Lecture notes, Princeton Univ., 1961; [12] D. Sullivan, On the Hauptvermutung for manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 598–600.

同调群 [英 homology group 法 groupe d'homologie 德 Homologiegruppe 俄 гомологическая группа 日 ホモロジー群] 【概念的历史】 如图 1 所示，设 γ_1, γ_1' 为环面 T 上的道

路，Δ是由 γ_1，γ_1' 包围的如图中所表示的定向的区域，则Δ的定向边缘可写作 $\gamma_1-\gamma_1'$，其中 $-\gamma_1'$ 表示沿着与 γ_1' 相反方向旋转的道路．这时就说 γ_1 与 γ_1' 在T上同调，记作 $\gamma_1\sim\gamma_1'$．更一般我们考虑T上有限条道路 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k$ 的整系数线性组合 $C=\sum c_i\gamma_i$，$C'=\sum c_i'\gamma_i$，当 $C-C'$ 是T上某个区域的边缘的整数倍时，记作 $C\sim C'$．当T为椭圆函数†的 Riemann 面时，如果其上第一类微分 wdz 在 C 上的积分定义为$\int_C wdz=\Sigma c_i\int_{\gamma i} wdz$，那么如果 $C\sim C'$，则 $\int_C wdz=\int_{C'} wdz$．显然T上任意闭道路同调于 γ_1 及 γ_2 的整系数的线性组合（例如 $\gamma_3\sim-2\gamma_2$）．因此 T 上的闭道路用等价关系$\sim$可分成等价类，这些等价类在加法运算下构成群．称之为T的一维同调群．由上可见，这个群是以 γ_1, γ_2 的等价类为生成元的自由 Abel 群．E. Betti（1870）通过同样的考察，对于任意的 n 维流形 M^n 都定义了 r 维同调群 $H_r(M^n)$ $(0\leqslant r\leqslant n)$．H. Poincaré 为了把 Betti 的概念严密化，引进了单纯复形和闭链的概念，并定义了同调群（1895）．这是最早在拓扑学中引入代数的或组合的方法．J. W. Alexander 证明了单纯复形K的同调群 $H_r(K)$的拓扑不变†性．也就是对于单纯复形K与 K'，如果多面体$|K|$与$|K'|$同胚，则其各维同调群 $H_r(K)$ 及 $H_r(K')$ 相互同构（**不变性定理**（theorem of invariance），Trans. Amer. Math. Soc., **16**(1915)）．因此同调群表现了多面体的拓扑性质而受到重视．同调群的概念得到了很大的发展．

从下面讲的可以看到，现在同调群可以取种种系数群，又能定义上同调环†及上同调运算†，从而对复形的几何学的性质能进行更精细的研究，同时研究的对象也扩充到 CW 复形，紧空间，从而同调群成为越来越重要的工具了．

【复形的同调群】 考虑 r 维单形† Δ 的顶点 $a_0, a_1, \cdots, a_r$ 的序列（图 2），如果两序列可通过偶置换互相变换，则规定它们等价，那么就有两个等价类．属于某一等价类的序列我们给

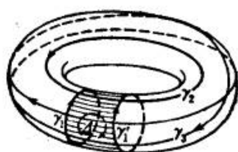


图 1

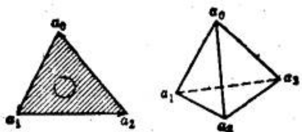


图 2

它正号，属于另外一等价类的序列给它负号．给定符号的单形称为**定向单形**或**有向单形**（oriented simplex）．如果序列 $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 属于正的等价类，则记作 $x^n=(a_0, a_1, \cdots, a_n)$，如果它属于负的等价类，则记作 $-x^n=(a_0, a_1, \cdots, a_n)$．定向单形 x^n, x^{n-1} 之间的**关联数**（incidence number）是整数 $[x^n:x^{n-1}]$ 定义如下：如果 x^{n-1} 不是 x^n 的单形时，则 $[x^n:x^{n-1}]=0$；如果 $x^n=(a_0, a_1, \cdots, a_n)$，$x^{n-1}=(a_0, \cdots, \hat{a}_i, \cdots, a_n)$（不含 a_i 的序列），则 $[x^n:x^{n-1}]=(-1)^i$．

设K为有限的 Euclid 单纯复形†，即K为有限个单形的集合，且 1）如果 $\Delta\in K$，且 Δ' 为Δ的面，则 $\Delta'\in K$，2）如果 $\Delta_1, \Delta_2\in K$，且 $\Delta_1\cap\Delta_2\neq\varnothing$，则 $\Delta_1\cap\Delta_2$ 是 Δ_1 及 Δ_2 的面．属于K的各单形规定了方向，设为 $\{x_1^r, \cdots, x_{\alpha_r}^r\}$ $(r=0, 1, \cdots, n)$．使每个 x_i^r 唯一对应于一整数 g_i，就得出线性组合

(1) $$C^r=g_1x_1^r+g_2x_2^r+\cdots+g_{\alpha_r}x_{\alpha_r}^r,$$

称为K的**整系数 r 链**（integral r-chain）．以后常简称为**链**．此处设 $g(-x^r)=(-g)x^r$，对于 $C_1^r=\sum_i g_ix_i^r$，$C_2^r=\sum_i h_ix_i^r$，$C_1^r+C_2^r=\sum_i(g_i+h_i)x_i^r$．特别对整数 m，定义 $mC^r=\Sigma(mg_i)x_i^r$．当所有 g_i 均为 0 时；称为**零链**（zero chain）表作 0．对于 x^r，$r-1$ 链 $\partial x^r=\sum_i[x^r:x_i^{r-1}]x_i^{r-1}$ 称为 **x^r 的边缘**（英 boundary 法 bord 德 Rand），即 $x^r=(a_0, a_1, \cdots, a_r)$ 的边缘是

$$\partial x^r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j (a_0, \cdots, a_{j-1}, a_{j+1}, \cdots, a_r).$$

一般对于(1)的 r 链 C^r,$(r-1)$ 链

$$\partial C^r = \sum_i g_i(\partial x_i^r) = \sum_j \left(\sum_i g_i[x_i^r : x_j^{r-1}] \right) x_j^{r-1}$$

称为 **C^r 的边缘**.

满足 $\partial Z^r = 0$ 的链 Z^r 称为 **r 闭链**或 **r 循环** (r-cycle). 由定义 $\partial(\partial x^r) = 0$ 成立,所以一般有 $\partial\partial C^r = 0$ 成立,也即边缘是闭链,称为**边缘闭链**(bounding cycle). 当 r 闭链 Z^r 是边缘闭链时,也即存在 $(r+1)$ 链 C^{r+1}, 使得 $\partial C^{r+1} = Z^r$ 时, Z^r 称为**同调** (homologous) 于 0, 记作 $Z^r \sim 0$. 如两个闭链 Z_1^r, Z_2^r,使 $Z_1^r - Z_2^r \sim 0$,则称 Z_1^r 与 Z_2^r **同调**,记作 $Z_1^r \sim Z_2^r$. 这个关系显然是等价关系. 对于一般的有限单纯复形 K, 上面的定义依然有效.

其次对于局部有限单纯复形 K, 使每个 r 维定向单形 x_i^r 分别对应于某个整数 g_i, 这些整数除了有限个以外都等于 0, 那么线性组合

$$C^r = \Sigma\, g_i x_i^r \text{ (有限和)}$$

称为K的**整系数 r 链** (integral r-chain). 整系数 r 链全体构成自由 Abel 群,其加法就是以系数的加法为加法. 因此可按照有限单纯复形的情形同样定义边缘、闭链、边缘闭链、同调等等.

【同调群】 单纯复形K 的所有整系数 r 链, 构成以 $\{x_i^r\}$ 为基的自由 Abel 群 $C_r(K)$. $C_r(K)$ 称为 K 的 (整系数) **r 链群** (r-chain group). 把 r 链 C^r 对应到它的边缘 ∂C^r 的映射 $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$是同态. ∂ 称为边缘算子. r 闭链全体 $Z_r(K)$ 及 r 边缘闭链全体 $B_r(K)$ 构成 $C_r(K)$ 的子群. $Z_r(K)$, $B_r(K)$ 分别叫作 K 的 **r 闭链群** (group of r-cycles) 及 **r 边缘闭链群** (group of r-bounding cycles). 若利用同态 ∂_r, 则 $Z_r(K) = \mathrm{Ker}\, \partial_r = \{C^r \in C_r(K) | \partial_r C^r = 0\}$ 及 $B_r(K) = \mathrm{Im}\, \partial_{r+1} = \{\partial_{r+1} C^{r+1} | C^{r+1} \in C_{r+1}(K)\}$. $B_r(K)$ 是 $Z_r(K)$ 的子群. $Z_r(K)$ 在同调这个等价关系下的等价类所构成的商群

$$H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$$

称为单纯复形 K 的 (整系数) r 维**同调群** (homology group) 或 **Betti 群** (Betti group). $H_r(K)$的元素看成 $Z_r(K)$ 的等价类时叫作**同调类** (homology class).

当给出单纯复形K到单纯复形 K' 的单形映射† $f: K \to K'$ 时, 定义同态 $f_\#: C_r(K) \to C_r(K')$ 如下: 对于K的定向单形$(a_0, \cdots, a_r)$, 如果 $f(a_0), \cdots, f(a_r)$ 均为 K' 的不同顶点, 则 $f_\#(a_0, \cdots, a_r)$ 就定义为 $(f(a_0), \cdots, f(a_r))$, 否则定义 $f_\#(a_0, \cdots, a_r)$ 为 0. 由于 $\partial \circ f_\# = f_\# \circ \partial$, 所以 $f_\#$ 把 $Z_r(K)$映到 $Z_r(K')$,把 $B_r(K)$ 映到 $B_r(K')$, 从而定义了**诱导同态** (induced homomorphism) $f_*: H_r(K) \to H_r(K')$.

【Betti 数,挠系数】 若K为有限单纯复形,则 $C_r(K)$ 为有限生成的自由 Abel 群. 从而 $H_r(K)$ 也是有限生成的 Abel 群,是自由 Abel 群 $B_r(K)$ 与有限 Abel 群 $T_r(K)$ 的直和. $B_r(K)$ 的秩† $p_r(K)$称为K的 r 维 **Betti 数**(Betti number) ($B_r(K)$ 也叫作 K 的 Betti 群). $T_r(K)$ 称为 K 的 r 维**挠群** (torsion group), 其不变式† t_i^r 称为 r 维**挠系数** (torsion coefficient).

例: 1) n 维球面† S^n: $H_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ (整数群), $H_r(S^n) = 0\ (0 < r < n)$, $H_0(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$. 2) 射影平面† P: $H_r(P) = 0 (r \geqslant 3)$, $H_2(P) = 0$, $H_1(P) \cong \boldsymbol{Z}_2$ (2 阶循环群),即正维数Betti数为 0, 一维挠系数为 2, 其余为 0. 3) 环面† T: $H_r(T) = 0\ (r \geqslant 3)$, $H_2(T) \cong \boldsymbol{Z}$, $H_1(T) \cong \boldsymbol{Z} + \boldsymbol{Z}$ (群的直和),各维挠系数均为 0.

对 $C_r(K)$ $(r = 0, 1, \cdots)$的基进行变换,能够定出一组基 $\{a_i^r, b_j^r, c_k^r, d_l^r, e_m^r\}$ 满足下列关系, 叫作 $C_r(K)$ 的**典范基** (canonical basis): $\{e_m^r\}$, $\{d_l^r\}$ 的个数分别等于 $\{a_i^{r-1}\}\{b_j^{r-1}\}$ 的个数,

$$\partial a_i^r = 0,\ \partial b_j^r = 0,\ \partial c_k^r = 0,$$

$$\partial d_i^r = t_i^{r-1} b_i^{r-1},\ \partial e_i^r = a_i^{r-1}.$$

此处 $\{c_k^r\}$ 的个数等于 r 维 Betti 数 $p_r(K)$, t_i^r 是 r 维挠系数. 且以 $p_r(K)$ 为系数, 以 t 为未定元的多项式 $P(t;K) = \sum_r p_r(K) t^r$ 称为 K 的 **Poincaré 多项式** (Poincaré polynomial).

【多面体的同调群】 考虑有限单纯复形K的多面体$|K|$,令 $H_r(|K|) = H_r(K)$,根据不变

性定理(见前) $H_r(|K|)$ 的决定不依赖于$|K|$的单形剖分的选取,是$|K|$的拓扑不变量,称为多面体$|K|$的**同调群**. Betti 数 $p_r(|K|)=p_r(K)$ 等等也是一样. 对于有限(Euclid)胞腔复形K,其多面体$|K|$的同调群 $H_r(|K|)$ 等等可通过K的适当的单形重分来定义.

【Euler 示性数】 设与球面同胚的二维有限多面体的顶点数、棱数、面数分别为 $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$,则有 $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=2$ 的关系成立,称之为 **Euler 的多面体定理** (Euler's theorem on polyhedra),这是拓扑学头一个重要结果 (L. Euler, 1752),据说 R. Descartes 已经得到了这个结果. 后来这个定理拓广到 n 维有限 (Euclid) 胞腔复形 K (Poincaré). 即: 设K的 r 维胞腔†数为 α_r, r 维 Betti 数为 $p_r(|K|)$, 则

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\alpha_r=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r p_r(|K|)$$
$$=P(-1;|K|)$$

(Euler-Poincaré 公式). 因为上式右边是多面体$|K|$的拓扑不变量†,所以用上式左边定义的 $\chi(K)$ 不依赖于 $|K|$ 的胞腔剖分的选取而唯一决定. 它也记作 $\chi(|K|)$, 叫作$|K|$的 **Euler 示性数** (Euler characteristic) 或 **Euler-Poincaré 示性数**. $\chi(K)$ 是表示 $|K|$ 的几何性质的重要不变量. 在微分流形†M上存在无奇点的连续向量场†的充分必要条件是$\chi(M)=0$. Lefschetz 数(→不动点定理)是 χ 的拓广.

【链复形的同调群】 上面对于单纯复形K的 r 链群 $C_r(K)$ $(r=0,1,\cdots)$ 所下的各种定义,对于一般的链复形†也可同样定义. 所谓**链复形**M(→链复形)就是序列(M_r,∂_r):

$$\cdots\to M_{r+1}\xrightarrow{\partial_{r+1}}M_r\xrightarrow{\partial_r}M_{r-1}\xrightarrow{\partial_{r-1}}M_{r-2}\to\cdots.$$

其中 M_r $(r=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是模,称为 r 链群, $\partial_r: M_r\to M_{r-1}$ $(r=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 是同态,称为边缘算子,且满足 $\partial_r\circ\partial_{r+1}=0$. 这时 $Z_r=\operatorname{Ker}\partial_r$, $B_r=\operatorname{Im}\partial_{r+1}$,均为 M_r 的子模,且 $Z_r\supset B_r$. 其商群 $H_r=Z_r/B_r$ $(r=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 叫作链复形M的同调群.

对于两个链复形 $M=(M_r,\partial_r)$及 $N=(N_r,\partial'_r)$,如果对每个 r, 存在同态 $f_r:M_r\to N_r$,使得 $\partial_{r+1}\circ f_{r+1}=f_r\circ\partial_{r+1}$成立,则 $\{f_r\}$ 称为由M到N的**链映射**. 由于 $f_r: Z_r(M)\to Z_r(N)$, $B_r(M)\to B_r(N)$, 故 f_r 诱导出同态 $f_*:H_r(M)\to H_r(N)$.

【相对同调群】 对于单纯复形K及其一个子复形 L, 造它们的 r 链群 $C_r(K)$, $C_r(L)$, 则 $C_r(L)$ 是 $C_r(K)$ 的子群,边缘算子 ∂_r 是从 $C_r(K)$ 到 $C_{r-1}(K)$, 从 $C_r(L)$ 到 $C_{r-1}(L)$ 的同态, 从而对于商群 $C_r(K,L)=C_r(K)/C_r(L)$ 确定 $\partial_r: C_r(K,L)\to C_{r-1}(K,L)$, 于是得出新的链复形 $(C_r(K,L),\partial_r)$. $C_r(K,L)$是以K中所有不属于L的 r 维单形 $\{x_i^r\}$ 为基所构成的自由 Abel 群,而边缘算子 ∂_r 由 $\partial_r x_i^r=\sum_j[x_i^r:x_j^{r-1}]\cdot x_j^{r-1}(\operatorname{mod}C_{r-1}(L))$来定义. 这个链复形的同调群 $H_r(K,L)$称为**相对同调群** (relative homology group)或K的**模 L** (modulo L) 同调群. 在这种情形下, r 闭链, r 边缘闭链也叫作"对 (K,L) 的"或"模 L"(相对) r 闭链, (相对) r 边缘闭链.

设单纯复形 K,K', $f:K\to K'$ 是单形映射, 对于K,K'的子复形 L,L', 满足 $f(L)\subset L'$. 这时记作 $f:(K,L)\to(K',L')$. f 诱导出同态 $C_r(K)\to C_r(K')$, $C_r(L)\to C_r(L')$, 从而得到同态 $f_\#: C_r(K,L)\to C_r(K',L')$, 且 $\partial\circ f_\#=f_\#\circ\partial$ 成立,由此诱导出同态 $f_*:H_r(K,L)\to H_r(K',L')$.

【带系数群的同调群】 设G为任意的 Abel 群. 例如实数的加法群 $\boldsymbol{R}$,有理数的加法群 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}_m$, $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$, 或域$K$等等. 造单纯复形$K$的整系数 r 链群 $C_r(K)$ 与G (在 $\boldsymbol{Z}$ 上) 的张量积† $C_r(K)\otimes G$, 记作 $C_r(K;G)$. 边缘算子 $\partial_r: C_r(K;G)\to C_{r-1}(K;G)$ 用 $C_r(K)$ 的边缘算子通过 $\partial_r=\partial_r\otimes 1_G$ 来定义,这样就得到链复形 $(C_r(K;G),\partial_r)$. 其同调群记作 $H_r(K;G)$,称为K的**以 G 为系数群的同调群**或K的 **G 系数同调群** (homology group with coefficient group G). 同样以 $C_r(K,L)$ 代 $C_r(K)$ 可以定义 **G 系数相对同调群** $H_r(K,L;G)$. 当G是单式环† R 上的模时,这些群也成为R模. 这些群

都由整系数同调群决定:

$$H_r(K, L; G) \cong H_r(K, L) \otimes G + \mathrm{Tor}(H_{r-1}(K, L), G).$$

这叫作**同调群的万有系数定理** (universal coefficient theorem) (→链复形). 特别对于特征 0 的域 k, $H_r(K, L; k) \cong H_r(K, L) \otimes k$, $p_r(K) = \dim_k H_r(K, k)$. 从而 K 的 Euler-Poincaré 示性数可表为

$$\chi(K) = \sum_r (-1)^r \dim_k H_r(K, k).$$

单纯复形 K 与 K' 的顶点附有一定次序做它们的积复形 $K \times K'$ 时,有下面直和分解成立:

$$H_r(K \times K'; G) \cong \sum_{p+q=r} H_p(K) \otimes H_q(K'; G) + \sum_{p+q=r-1} \mathrm{Tor}(H_p(K), H_q(K'; G))$$

(**Künneth 定理**). 特别对于域 k,

$$H_r(K \times K'; k) \cong \sum_{p+q=r} H_p(K; k) \otimes H_q(K'; k).$$

且 $f:(K, L) \to (K', L')$ 时, 由 $f_\# \otimes 1_G$: $C_r(K, L) \otimes G \to C_r(K', L') \otimes G$ 诱导出同态 f_*: $H_r(K, L; G) \to H_r(K', L'; G)$. 对于单纯复形 K 的子复形 L, M, 单射 $L \to K$ (包含映射)诱导出 $(L, L \cap M) \to (L \cup M, M)$. 由此得到 $H_r(L, L \cap M; G) \cong H_r(L \cup M, M; G)$ 叫作**切除同构** (excision isomorphism)

对于 K 的子复形 L, 由包含映射 $i: L \to K$ 及 $j:(K, \varnothing) \to (K, L)$ 得出同态 $i_*: H_r(L; G) \to H_r(K; G)$ 及 $j_*: H_r(K; G) \to H_r(K, L; G)$, 且定义**同调的边缘同态** (boundary homomorphism) $\partial_*: H_r(K, L; G) \to H_{r-1}(L; G)$ 为把闭链 $z \in C_r(K, L) \otimes G$ 对应为闭链 $i^{-1} \circ \partial \circ j^{-1}(z) \in C_{r-1}(L) \otimes G$. 它们之间有下述 (K, L) 的**同调正合序列** (homology exact sequence) 成立:

$$\cdots \to H_r(L; G) \xrightarrow{i_*} H_r(K; G) \xrightarrow{j_*} H_r(K, L; G) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(L; G) \to \cdots$$

(即 $\mathrm{Im}\, i_* = \mathrm{Ker}\, j_*$, $\mathrm{Im}\, j_* = \mathrm{Ker}\, \partial_*$, $\mathrm{Im}\, \partial_* = \mathrm{Ker}\, i_*$).

【上同调群】 对于任意 Abel 群 G, 由单纯复形 K 的 r 链群 $C_r(K)$, 定义以 G 为系数群的**上链群** $C^r(K; G) = \mathrm{Hom}(C_r(K); G)$ (同态群) 和**上边缘运算** $\delta = \mathrm{Hom}(\partial, 1): C^r(K; G) \to C^{r+1}(K; G)$ (即对于 $f^r \in C^r(K; G)$, $(\delta f^r)(x^{r+1}) = f^r(\partial x^{r+1}) = \sum_i [x^{r+1}: x_i^r] f^r(x_i^r)$), 从而定义 K 的以 G 为系数群的**上链复形** (cochain complex $(C^r(K; G), \delta)$: $\delta \circ \delta = 0$,

$$\cdots \to C^{r-1}(K; G) \xrightarrow{\delta} C^r(K; G) \xrightarrow{\delta} C^{r+1}(K; G) \to \cdots.$$

$f^r \in C^r(K; G)$ 叫作**上链** (cochain), 满足 $\delta f^r = 0$ 的上链 $f^r \in C^r(K; G)$ 叫作 ***r* 上闭链**或 ***r* 上循环** (r-cocycle), 满足 $f^r = \delta f^{r-1}$ 的 f^r 称为 ***r* 上边缘(闭链)** (r-coboundary). 由此定义**上闭链群** (group of cocycles) $Z^r(K; G) = \mathrm{Ker}\, \delta$, **上边缘群** (group of coboundaries) $B^r(K; G) = \mathrm{Im}\, \delta$, 以及**上同调群** (cohomology group) $H^r(K; G) = Z^r(K; G)/B^r(K; G)$. 特别当 $G = \boldsymbol{Z}$ 时记作 $H^r(K)$.

同样, 对于 K 的子复形 L, 由相对 r 链群 $C_r(K, L)$ 可定义 K 的模 L 的**相对上同调群** (relative cohomology group) $H^r(K, L; G)$. 在 $G = \boldsymbol{Z}$ 的情形, 由万有系数定理, 每个 $H_r(K, L)$ 均为有限生成的, 可表为自由 Abel 群 $\mathfrak{B}_r(K, L)$ 及有限群 $T_r(K, L)$ (挠群) 的直和时, 则每个 $H^r(K, L)$ 也是有限生成的, 若它同样表为自由 Abel 群 $\mathfrak{B}^r(K, L)$ 及有限群 $T^r(K, L)$ 的直和, 则 $\mathfrak{B}_r(K, L) \cong \mathfrak{B}^r(K, L)$, $T_{r-1}(K, L) \cong T^r(K, L)$ 成立. 一般情形下有(**上同调的万有系数定理**):

$$H^r(K, L; G) \cong \mathrm{Hom}(H_r(K, L); G) + \mathrm{Ext}(H_{r-1}(K, L); G).$$

特别如果 G 是特征 0 的域 k (的加法群), 则 $H^r(K, L; k) \cong \mathrm{Hom}(H_r(K, L), k)$.

单形映射 $f: (K, L) \to (K', L')$ 诱导出同态 $f^*: H^r(K', L'; G) \to H^r(K, L; G)$. 特别对于 K 的子复形 L, 有**上同调的正合序列** (cohomology exact sequence):

$$\cdots \to H^{r-1}(L; G) \xrightarrow{\partial^*} H^r(K, L; G) \xrightarrow{j^*} H^r(K; G) \xrightarrow{i^*} H^r(L; G) \to \cdots$$

此处 i^*, j^*, ∂^* 与同调的情形一样. ∂^* 称为**上(同调)边缘同态** (coboundary homomorphism).

当系数群为交换环R时对于上链 $f^r\in \mathrm{Hom}(C_r(K),R)$, $f^s\in \mathrm{Hom}(C_s(K),R)$, 若定义上链的上积† $f^r\smile f^s\in \mathrm{Hom}(C_{r+s}(K),R)$ 为 $(f^r\smile f^s)(a_0,\cdots,a_{r+s})=f^r(a_0,\cdots,a_r)f^s(a_r,\cdots,a_{r+s})$ ($(a_0,\cdots,a_{r+s})$为K的定向 $r+s$ 单形), 由此诱导出上同调群的上积, 从而使 $H^*(K;R)=\sum_r H^r(K;R)$ 成为环(→上同调环).

【半单纯复形的(上)同调】 设K为半单纯复形† (s. s. 复形). 即 $K=(K_r,\partial_i,s_i)$: 对每个整数r及$0\leqslant i\leqslant n$, 给出集合K_r及映射 $\partial_i:K_r\to K_{r-1}$, $s_i:K_{r-1}\to K_r$. $C_r(K)$是以K_r的元素为基的自由 Abel 群, 对于K_r的每一个元素σ_λ, 边缘算子∂定义为 $\partial\sigma_\lambda=\sum_{i=0}^{n}\partial_i\sigma_\lambda$, 一般, 对于 $C^r=\Sigma g_\lambda\sigma_\lambda$, 若令 $\partial C^r=\Sigma g_\lambda\partial\sigma_\lambda$, 则有 $\partial:C_r(K)\to C_{r-1}(K)$, 且 $\partial\circ\partial=0$. 这样定义了链复形 $C_*(K)=(C_r(K),\partial)$. 这时若 $D_r(K)$ 为 K_r 的所有r维退化单形生成的 $C_r(K)$ 的子群, 则 $D_*(K)=(D_r(K),\partial)$ 是 $C_*(K)$ 的子复形. $C_*(K)$称为 s. s. 复形K的链复形, 商链复形 $C_*(K)/D_*(K)$ 称为其**正规化** (normalization). 由 s. s. 复形K的链复形定义的同调群与由K的正规化链复形定义的同调群同构. 简称之为 s. s. 复形K的**同调群** $H_r(K)$. s. s. 映射† $f:K\to L$ 诱导K的(正规化)链复形到L的(正规化)链复形的链映射. 从而诱导出同态 $f_*:H_r(K)\to H_r(L)$. 并且, 由 s. s. 复形K, L的直积 $K\times L$ 的链复形 $C_*(K\times L)$ 所决定的同调群 $H_r(K\times L)$ 与链复形 $C_*(K)\otimes C_*(L)$ 的同调群同构.

由于单纯复形K所定义的有序复形† $O(K)$ 是 s. s. 复形, 故其链复形可以如上定义. 叫作K的**有序链复形** (ordered chain complex). 相对于此, 以前所述的链复形叫作K的**定向链复形或有向链复形** (oriented chain complex). K的有序链复形与K的有向链复形两者虽不同, 但它们定义的同调群 $H_r(K)$ 相互同构.

【拓扑空间的奇异(上)同调群】 拓扑空间的奇异(上)同调群是由 S. Lefschetz (Bull. Amer. Math. Soc., **39**(1933)) 及 S. Eilenberg (Ann of Math., **45**(1944)) 所引入, 现在在拓扑学中已广泛的使用着.

拓扑空间X的奇异单形†全体所构成的半单纯复形所决定的链复形为 $S(X)=\Sigma C_r(S(X))$ (→复形[半单纯复形]), 称为X的**奇异链复形** (singular chain complex). 对于拓扑空间对 (X,A) (即X及其子集A), $S(A)$ 是 $S(X)$ 的链子复形. 以任意的 Abel 群为系数群的(上)同调群

$$H_r(X,A;G)=H_r((S(X)/S(A))\otimes G)$$
$$H^r(X,A;G)=H^r(S(X)/S(A);G)$$

称为拓扑空间对 (X,A) 的以G为系数群的r维**奇异** (singular) **(上) 同调群**. 连续映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 把X的奇异r单形 $\sigma:\Delta(r)\to X$ 对应于Y的奇异r单形 $f\circ\sigma:\Delta(r)\to Y$ (映射的合成) 而定义了链映射 $f_\#:S(X)/S(A)\to S(Y)/S(B)$, 从而得到**诱导同态** (induced homomorphism):

$$f_*:H_r(X,A;G)\to H_r(Y,B;G),$$
$$f^*:H^r(Y,B;G)\to H^r(X,A;G).$$

把拓扑空间对 (X,A) 对应于 $H_r(X,A;G)$ ($H^r(X,A;G)$), 把连续映射f对应于 $f_*(f^*)$ 的这种对应就是从拓扑空间对及其间的连续映射所构成的范畴†到 Abel 群及同态所构成的范畴†的共变(反变)函子†(→范畴和函子).

对于拓扑空间对 (X,A), 由链复形的正合序列 $0\to S(A)\otimes G\to S(X)\otimes G\to(S(X)/S(A))\otimes G\to 0$ 可定义联络映射† $\partial_*:H_r(X,A;G)\to H_{r-1}(A;G)$, 称为**同调边缘同态** (boundary homomorphism). 它关于连续映射是自然的, 即对于连续映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$, 有 $\partial_*\circ f_*=(f|A)_*\circ\partial_*$ ($f|A:A\to B$ 是f的限制). 同样上链复形的正合序列 $0\leftarrow \mathrm{Hom}(S(A),G)\leftarrow \mathrm{Hom}(S(X),G)\leftarrow \mathrm{Hom}(S(X)/S(A),G)\leftarrow 0$ 定义联络映射 $\delta^*:H^{r-1}(A;G)\to H^r(X,A;G)$ 称为**上同调的上边缘同态** (coboundary homomorphism).

【奇异(上)同调群的基本性质】 1) **同伦定理** (homotopy theorem): 如果 $f\sim f':(X,A)\to$

(Y, B)(同伦†)，则 $f_* = f'_*: H_r(X, A; G) \to H_r(Y, B; G)$. II) **正合性定理** (exactness theorem)：单纯复形对 (K, L) 的同调群正合序列当把 (K, L) 换成拓扑空间对 (X, A) 仍是正合序列. III) **切除同构定理**(excision isomorphism theorem)： 当 U 为开集，且 $\bar{U} \subset \mathrm{Int}\, A$ 时，有 $i_*: H_r(X - U, A - U; G) \cong H_r(X, A; G)$(同构). 其中 i 为包含映射. IV)对于由一点构成的空间 P, $H_0(P; G) = G$, $H_r(P; G) = 0 (r \neq 0)$.

若 X 为弧连通†，则 $H_0(X) = \boldsymbol{Z}$. 由II)的正合序列一般可得 $X \supset A \supset B$ 的三元组(X, A, B)的**同调正合序列** $\cdots \to H_r(A, B; G) \xrightarrow{i_*} H_r(X, B; G) \xrightarrow{j_*} H_r(X, A; G) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(A, B; G) \to \cdots$. 由 I) 同伦等价†的拓扑空间对的同调群同构，对于可缩†成一点的空间 IV) 也成立. 例如对于 CW 复形† X 的子复形 X_1, X_2, III) 的切除同构成为 $i_*: H_r(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_r(X_1 \cup X_2, X_2)$. 当 (X, A) 具有同伦扩张性质†时(例如 CW 复形及其子复形)，对于到把 A 缩成一点 $*$ 的空间 X/A 的典范映射 $h: (X, A) \to (X/A, *)$，有 $h_*: H_r(X, A; G) \cong \tilde{H}_r(X/A; G)$. (此处 $\tilde{H}_r(X; G)$ 对于 $x_0 \in X$ 是 $H_r(X, x_0; G)$，称为 X 的**约化** (reduced) **同调群**，它满足 $\tilde{H}^r(X; G) = H_r(X; G) (r > 0)$, $H_0(X; G) = G + \tilde{H}_0(X; G)$.) 对于拓扑空间 X 的锥† CX 与双角锥† SX 以及典范映射 $h: (CX, X) \to (SX, *)$，合成 $\sigma_*: h_* \circ \partial_*^{-1}: \tilde{H}_r(X; G) \leftarrow H_{r+1}(CX, X; G) \to \tilde{H}_{r+1}(SX; G)$是同构，称为同调的**同纬同构**(suspension isomorphism). 因此对于 n 维球面 S^n，立即得到 $\tilde{H}_r(S^n) = 0\ (r \neq n)$, $H_n(S^n) = \boldsymbol{Z}$. 对于拓扑空间 X 及其子集合 X_1, X_2，如果通过包含映射诱导出 $H_*(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_*(X_1 \cup X_2, X_2)$ 成立(这时三元组 (X, X_1, X_2) 称为**固有的**(proper))，则下面 **Mayer-Vietoris 正合序列** (Mayer-Vietoris exact sequence) 成立：$\cdots \to H_r(X_1 \cap X_2; G) \to H_r(X_1; G) + H_r(X_2; G) \to H_r(X_1 \cup X_2; G) \to H_{r-1}(X_1 \cap X_2; G) \to \cdots$.

对于(奇异)上同调群，以上诸结果的对偶命题也成立. 且关于积空间 $X \times Y$, Künneth 定理成立，万有系数定理也成立.

【胞腔(上)同调群】 设 X 是 CW 复形，A 是其子复形，X^r 为所有 r 维以下的胞腔†所构成的 X 的子复形，令 $\bar{X}^r = A \cup X^r$. 设 $C_r(X, A; G) = H_r(\bar{X}^r, \bar{X}^{r-1}; G)$. 而 $\partial: C_r(X, A; G) \to C_{r-1}(X, A; G)$ 定义为三元组 $(\bar{X}^r, \bar{X}^{r-1}, \bar{X}^{r-2})$ 的正合序列中的同态 $\partial_*: H_r(\bar{X}^r, \bar{X}^{r-1}; G) \to H_{r-1}(\bar{X}^{r-1}, \bar{X}^{r-2}; G)$，则 $\partial \circ \partial = 0$，且得到链复形 $C_*(X, A; G) = \Sigma C_r(X, A; G)$. 其同调群 $H_r(C(X, A; G))$ 称为 (X, A) 的**胞腔同调群**(cellular homology group). 同样可以定义胞腔上同调群 $H^r(C^*(X, A; G))$，它们分别与 $H_r(X, A; G)$ 及 $H^r(X, A; G)$ 同构. 并且，$C_*(X, A; G) = C_*(X, A) \otimes G$, $C^*(X, A; G) = \mathrm{Hom}(C_*(X, A), G)$, $C_*(X, A)$ 的 r 链群 $C_r(X, A) = H_r(\bar{X}^r, \bar{X}^{r-1})$ 是以 X 中所有不属于 A 的 r 维胞腔为基的自由 Abel 群，在计算具体的 CW 复形的同调群中起作用. 且对于多面体 $|K|$，单纯复形 K 的(上)同调群与 CW 复形 $|K|$ 的胞腔(上)同调群等同，从而与奇异(上)同调群等同，由此也可以证明其不变性定理(见前).

【同调论的公理】 Eilenberg-N. E. Steenrod 把几个同调群的基本性质作为公理，对同调论进行刻划 ([11]). 即同调论是对于任意整数 $r \geq 0$ 及任意拓扑空间对(X, A)，给出 Abel 群 $H_r(X, A)$ 及同态 $\partial_*: H_r(X, A) \to H_{r-1}(A)$ $(= H_{r-1}(A, \varnothing))$且任意的连续映射 $f: (X, A) \to (Y, B)$ 都对应同态 $f_*: H_r(X, A) \to H_r(Y, B)$ 并满足下述公理：O) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, $1_* = 1$, $\partial_* \circ f_* = (f|A)_* \circ \partial_*$. I) **同伦公理**(homotopy axiom)：如果 $f \sim f'$，则 $f_* = f'_*$. II) **正合性公理** (exactness axiom)：$\cdots \to H_r(A) \xrightarrow{i_*} H_r(X) \xrightarrow{j_*} H_r(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{r-1}(A) \to \cdots$ 是正合序列. III) **切除公理** (excision axiom)：设 U 为开集，且 $\bar{U} \subset \mathrm{Int} A$，则 $i_*: H_r(X - U, A - U) \cong H_r(X, A)$. IV) **维数公理** (dimension axiom) 对

于由1点构成的空间 P, $H_r(P)=0(r\neq 0)$. $G=H_0(P)$ 称为这个同调论的系数群. 对于有限 CW 复形 X 及其子复形 A 的对 (X, A), $H_r(X, A)$ 由系数群唯一决定,与奇异同调群相同. 上同调论也可以用上述条件对偶地进行定义.

【局部系数(上)同调群】 对于拓扑空间 X 的每一点 x 给定互相同构的 Abel 群 G_x, 对于 X 上的任意道路† l 规定一个同构 $l^*: G_{l(0)}\cong G_{l(1)}$, 使得如果 l 与 l' (关于其公共的两端点)同伦,则 $l^*=l'^*$, 并且,如 $l(1)=m(0)$, 对于连结 l, m 的道路 $l\cdot m$, 有 $(l\cdot m)^*=m^*\circ l^*$ 成立. 这时就把 $\{G_x\}$ 称为 X 上**局部系数群**(local coefficient group). 例如同伦群†$\{\pi_n(X, x)\}$ 就是局部系数群. 设 X 为多面体 $|K|$, 对于 K 的每个 r 维定向单形 x_i^r, 固定 $|K|$ 的单形 $|x_i^r|$ 中的一点 y_i, 取 $g_i\in G_{y_i}$, $C_r(K;\{G_x\})$ 为形式有限和 $\sum_i g_i x_i^r$ 全体所构成的 Abel 群,定义同态 $\partial: C_r(K;\{G_x\})\to C_{r-1}(K;\{G_x\})$ 为 $\partial\sum_i g_i x_i^r=\sum_j\left(\sum_i [x_i^r: x_j^{r-1}] l_{ij}^*(g_i)\right)x_j^{r-1}$. 此处 l_{ij} 是 $|x_i^r|$ 中从 $y_i\in|x_i^r|$ 到 $y_j\in|x_j^{r-1}|$ 的道路. 此时 $\partial\circ\partial=0$ 成立,而得到链复形 $C(K;\{G_x\})=\Sigma C_r(K;\{G_x\})$, 其同调群记作 $H_r(|K|;\{G_x\})$. 称为 $|K|$ 的**以 $\{G_x\}$ 为局部系数群的同调群**或 **$\{G_x\}$ 局部系数同调群** (homology group with local coefficient group $\{G_x\}$). 同样在每个 x_i^r 上定义,在 G_{y_i} 上取值的映射 f^r 的全体 $C^r(K;\{G_x\})$ 以及用 $(\delta f^r)(x_j^{r+1})=\sum_i [x_j^{r+1}: x_i^r] l_{ij}^{*-1}(f^r(x_i^r))$ 定义的同态 $\delta: C^r(K;\{G_x\})\to C^{r+1}(K;\{G_x\})$ 构成上链复形. 从而可定义具有局部系数的上同调群 $H^r(|K|;\{G_x\})$. 同样可以定义具有局部系数的相对(上)同调群.

局部系数(上)同调群同样也可以对于奇异(上)同调群定义. 特别当局部系数群 $\{G_x\}$ 是**平凡**(trivial)时(例如当 X 是单连通时即是如此),关于局部系数 $\{G_x\}$ 的(上)同调群与以 G_x 为系数的通常的(上)同调群一致, 但一般情形下这并不成立. 局部系数(上)同调群用于障碍理论†、纤维空间的(上)同调、谱序列†理论等方面,它还进一步发展成为以层(→层)为系数的(上)同调群.

【局部同调群】 对于拓扑空间 X 的点 x, 同调群 $H_r(X, X-x; G)$ 称为点 x 的**局部同调群**(local homology group). 对于多面体 $|K|$ 的点 x, 设 $St(x)$ 是 K 的以 x 为顶点的星形†复形, $B(x)$ 为不含 x 的单形所构成的子复形, 则 $H_r(|K|, |K|-x; G)=H_r(St(x), B(x); G)$.

【各种同调群】 多面体的同调群在发展到拓扑空间的奇异同调群之前, 许多人已经推广到更一般的拓扑空间上去, 这种推广在拓扑学中反映出组合方法与集论方法的相关性, 成为拓扑学的一个重要阶段(→拓扑学).

对于紧度量空间 X, L. Vietoris (Math. Ann., **97**(1927)) 考虑以 X 的各点为顶点, 以距离比 $\varepsilon>0$ 小的有限点集作为单形所成的单纯复形 $K(\varepsilon)$(**ε 复形** (ε-complex)), 对于 $\varepsilon_n\to 0$ 的递减数列 $\{\varepsilon_n\}$, 定义闭链为序列 $z^r=\{z_n^r\}$, 满足 $z_n^r\in Z_r(K(\varepsilon))$, 且 $z_{n+1}^r \overset{\varepsilon_n}{\sim} z_n^r$ (意在 $C_r(K(\varepsilon_n))$ 中同调), 它的边缘对于 $\eta_n\to 0$ 的数列 $\{\eta_n\}$, 有 $z_n^r \overset{\eta_n}{\sim} 0$ 成立. 于是定义了 **Vietoris 同调群** (Vietoris homology group). 这种同调群对于局部紧空间发展成为 **Колмогоров-Alexander 同调群** (Kolmogorov-Alexander homology group) (A. N. Kolmogorov, C. R. Acad. Sci. Paris, **202** (1936); Alexander, Ann. of Math., **39** (1938)) 以及下述的 **Колмогоров-Spanier 上同调群** (Kolmogorov-Spanier cohomology group). 定义于 $r+1$ 个 X 的直积空间 X^{r+1}, 取值于 Abel 群 G 中的映射 ψ^r 全体为 C^r, 它在 G 的加法运算下也成为 Abel 群. 如果定义同态 $\delta: C^r\to C^{r+1}$ 为 $(\delta\psi^r)(x_0, \cdots, x_{r+1})=\sum_i(-1)^i\psi^r(x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_{r+1})$, 则 $\delta\circ\delta=0$. 如果 $\psi^r\in C^r$ 在 X^{r+1} 的对角线 $\{(x, \cdots, x)|x\in X\}$ 的某个邻域总是 0, 则定义 ψ^r 为局部零. 这种 ψ^r 构成 C^r 的子群 C_0^r, $\delta(C_0^r)\subset C_0^{r+1}$, 由此可得上链复形 $\Sigma C^r/C_0^r$, 其上同调群称为 Колмогоров-Spanier 上同调群 (H. Spanier, Ann.

of Math., **49**(1948)).

对于拓扑空间X的开覆盖† λ,μ, 如λ是μ的加细†(记作 $\lambda\succ\mu$), 通过把λ的元素对应于包含它的μ的元素,就得到单形映射† $\pi^{\lambda}_{\mu}:N(\lambda)\to N(\mu)$ ($N(\lambda)$ 是开覆盖λ的覆盖网†). П. Александров (Ann. of Math., **30**(1928)) 对紧度量空间X, 定义X的**射影同调群** (projective homology group) 如下: X的有限开覆盖全体作成有向族,取其中某个共尾的†子族 Λ_0, 使得对于$\lambda,\mu\in\Lambda_0(\lambda>\mu)$, π^{λ}_{μ}唯一决定. 这时链复形的系列 $\{C(N(\lambda)),\pi^{\lambda}_{\mu\#}\}$ 的极限群是链复形 $C(\Lambda_0)=\varprojlim\{C(N(\lambda),\pi^{\lambda}_{\mu\#}\}$,其同调群就是$X$的**射影同调群** (projective homology group). 这样定义的同调群由 E. Čech (Fund. Math., **19**(1932)) 推广到紧空间, 后来 C. H. Dowker (Ann. of Math., **49**(1948))又推广到一般的拓扑空间,如下节所述.

【Čech (上) 同调群】 设Λ为拓扑空间X的所有开覆盖构成的有向集. 对于X的子集合A与开覆盖 $\lambda\in\Lambda$, $\lambda\cap A=\{U\cap A|U\in\lambda\}$ 是A的开覆盖,覆盖网$N(\lambda\cap A)$看成为$N(\lambda)$的子复形,对于任意的系数群G,可以定义单纯复形的(上)同调群 $H_r(N(\lambda),N(\lambda\cap A);G)$ ($H^r(N(\lambda),N(\lambda\cap A);G)$). 对于 $\lambda,\mu\in\Lambda(\lambda\succ\mu)$ 虽然上面的单形映射 $\pi^{\lambda}_{\mu}:(N(\lambda),N(\lambda\cap A))\to(N(\mu),N(\mu\cap A))$ 并不唯一确定,但它所诱导的同态 $\pi^{\lambda}_{\mu*}:H_r(N(\lambda),N(\lambda\cap A);G)\to H_r(N(\mu),N(\mu\cap A);G)$, $\pi^{\lambda*}_{\mu}:H^r(N(\mu),N(\mu\cap A);G)\to H^r(N(\lambda),N(\lambda\cap A);G)$是唯一决定的, 其极限群

$$\check{H}_r(X,A;G)=\varprojlim\{H_r(N(\lambda),N(\lambda\cap A);G),\pi^{\lambda}_{\mu*}\},$$

$$\check{H}^r(X,A;G)=\varinjlim\{H^r(N(\lambda),N(\lambda\cap A);G),\pi^{\lambda*}_{\mu}\}$$

称为(X,A)的 **Čech (上) 同调群** (Čech (co) homology group). 当(X,A)为紧空间对时,Λ可取为有限开覆盖全体,当(X,A)为仿紧†空间对时,Λ可取为局部有限开覆盖全体,可以同样定义(上)同调群,并且和前面定义的同构.

当已给连续映射 $f:(X,A)\to(Y,B)$ 时, 对于Y的开覆盖λ', 利用X的开覆盖 $\{f^{-1}(U)\}_{U\in\lambda'}=f^{-1}\lambda'$以及自然的单形映射 $f_{\#}:N(f^{-1}\lambda')\to N(\lambda')$, 可定义诱导的同态 $f_*:\check{H}_r(X,A;G)\to\check{H}_r(Y,B;G)$, $f^*:\check{H}^r(Y,B;G)\to\check{H}^r(X,A;G)$. 并且用 $\partial_*:H_r(N(\lambda),N(\lambda\cap A);G)\to H_{r-1}(N(\lambda\cap A);G)$ 可定义边缘同态 $\partial_*:\check{H}_r(X,A;G)\to\check{H}_{r-1}(A;G)$. 也同样可以定义 $\delta^*:\check{H}^r(A;G)\to\check{H}^{r+1}(X,A;G)$.

关于 Čech(上)同调群除了同调群的正合性定理以外具有和奇异(上)同调群同样的性质. 同调群的 II) 的序列一般仅仅是二阶的, 即两个相邻的同态的合成为 0, 但当(X,A)是紧空间对或者系数群G是有限群或域时, 正合性定理也成立.

对于 Čech 同调群, 还有下述**连续性定理** (continuity theorem) 成立: $H_r(\varprojlim(X,A))\cong\varprojlim H_r(X,A)$. 此处$(X,A)$为紧空间对的序列$\{(X_\lambda,A_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$($\Lambda$为有向集), 当$\lambda\succ\mu$时,存在连续映射 $\pi^{\lambda}_{\mu}:(X_\lambda,A_\lambda)\to(X_\mu,A_\mu)$, 且 $\pi^{\lambda}_{\lambda}=1$, $\pi^{\lambda}_{\nu}=\pi^{\mu}_{\nu}\circ\pi^{\lambda}_{\mu}(\lambda\succ\mu\succ\nu)$ 成立, $\varprojlim(X,A)$是它的射影极限†. 上同调群也有同样的关系.

刻划 Čech 同调群的公理系统, 要在前面所述的同调论公理中把 II) 的正合性公理减弱为该序列阶数为二,再把连续性定理当作公理加进来. 这样的公理系对于紧空间, 同调群是唯一决定的. 并且对于紧空间, Čech 上同调群与 Колмогоров-Spanier 上同调群一致. 对于有限 CW 复形 Čech (上)同调群虽与奇异(上)同调群一致, 但对于紧空间, $\check{H}(X)$ 不一定和 $H(X)$ 一致.

【de Rham 上同调群】 微分流形M可以进行单形剖分,从而是拓扑多面体,这能够用解析的方法来定义(G. de Rham, 1931). 也就是利用M上的 C^∞ 微分形式,能够得到以实数为系数的上同调群和上同调环(→微分流形 [de Rham 上同调群]).

【以拓扑群为系数的(上)同调群】 上述各种同调群的系数群G也可以取作拓扑 Abel 群†来定义. 这时链群 C_r 也是拓扑群, 定义同调群为 $H_r=Z_r/\bar{B}_r$ ($\bar{B}_r$ 为 B_r 的闭包†), H_r 也

成为拓扑群. 如G是紧 Abel 群,则对于单纯复形K, $H_r(K;G)$, $H^r(K;G)$也是紧 Abel 群. 而G关于 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的特征标群† G^*是离散 Abel 群, $H_r(K;G)$ 与 $H^r(K;G^*)$以 Kronecker 积†为内积成为互相正交的群对,彼此互为对方的特征标群.

【第二种(上)同调群】 假定单纯复形K是局部有限的†,则由K的r维定向单形x_i^r与$g_i\in G$(系数群)作成的(无限)形式和$\sum_i g_i x_i^r$叫作(G上的)**无限链**(infinite chain),相对于无限链,以前的链称为**有限链**(finite chain). 由无限链作成的 Abel 群 $C_r^{\mathrm{II}}(K;G)$同有限链的情形完全一样地定义∂,而成为链复形,其同调群$H_r^{\mathrm{II}}(K;G)$称为K的**第二种同调群**(homology group of the second kind). 在所有x_i^r上定义的G值函数f^r,如果$f^r(x_i^r)$除了有限多个以外都是0,则称为**有限上链**(finite cochain). 这时由于δf^r也是有限上链,故有限上链全体$C_{\mathrm{II}}^r(K;G)$构成上链复形,其上同调群$H_{\mathrm{II}}^r(K;G)$称为K的**第二种上同调群**(cohomology group of the second kind).

对于拓扑空间X的奇异(上)同调群也可以考虑同样的概念. 考虑X的奇异r单形σ_i^r的无限链$C^r=\Sigma g_i\sigma_i^r$,对于X的任意紧集C,如果σ_i^r的支集†与C相交,则σ_i^r的系数g_i除了有限个均为0,那末利用这种链就可以用来定义X的**第二种奇异同调群** $H_r^{\mathrm{II}}(X;G)$. 对于X的奇异上链,如果存在某紧集C,当σ_i^r的支集与C不相交时,则在σ_i^r上取值0,那末利用这种奇异上链可以定义X的**第二种上同调群或紧上同调群**(compact cohomology group) $H_{\mathrm{II}}^r(X;G)$. 对于紧空间X,它们与通常的(上)同调群一致.当X为多面体$|K|$时,它们与$H_r^{\mathrm{II}}(K;G)$, $H_{\mathrm{II}}^r(K;G)$同构,对于有限多面体及其子复形对(X,A), $H_r(X,A;G)$, $H^r(X,A;G)$分别与$H_r^{\mathrm{II}}(X-A;G)$ $H_{\mathrm{II}}^r(X-A;G)$同构.

【广义同调论】 设X为有限 CW 复形†,A为其子复形. 所谓 CW 复形上的**广义同调群**(generalized homology group)是指对于任意整数$n\geqslant 0$与任意 CW 复形对(X,A)(其中$A\subset X$),给出模$H_n(X,A)$与同态$\partial:H_n(X,A)\to H_{n-1}(A)$,且任意胞腔映射$f:(X,A)\to(Y,B)$对应同态$f_*:H_n(X,A)\to H_n(Y,B)$,它所满足的公理是同调群的公理系统除了维数公理以外其他所有的公理 O)—III). **广义上同调群**的公理系统由上面公理对偶地给出. 广义上同调群的实例很多,最著名的是K理论(→K理论).

【参】 [1] 小松醇郎,初等位相幾何学,牡文社,1948; [2] 河田敬義-大口邦雄.位相幾何学,朝倉,1967; [3] 河田敬義編,位相幾何学,岩波,1965; [4] 大槻富之助,位相幾何学,至文堂,1965; [5] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博,位相幾何学,I,岩波,1967; [6] P. Alexandroff-H. Hopf, Topologie I, Springer, 1935 (Chelsea 1965); [7] H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (Chelsea, 1965); [8] S. Lefschetz, Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, 1942; [9] S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton, Univ, Press. 1949; [10] H. Cartan, Séminaire de topologie algébrique, 1948—49; [11] S. Eilenberg-N. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton Univ. Press 1952; [12] P. J. Hilton-S. Wylie, Homology theory, Cambridge, Univ. Press, 1960; [13] G. W. Whitehead, Generalized homology theories, Trans. Amer. Math. Soc., **102** (1962) 227—283; [14] E. H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

上同调环 [英 cohomology ring 法 anneau de cohomologie 德 Kohomologiering 俄 кольцо когомологии 日 コホモロジー環] 拓扑空间X的以 Abel 群G为系数的同调群$H_*(X;G)=\sum_n H_n(X;G)$和上同调群$H^*(X;G)=\sum_n H^n(X;G)$虽然可以用对偶的方法来定义,但与同调的情形不同,当G是单式交换环†R时,$H^*(X;R)$的元素之间可以定义乘积,使得$H^*(X;R)$成为分次代数†(P. Alexander, E. Čech, H. Whitney). 因此,上同调比同调有用得多. 且当X是流形†时,上同调类的积通过 Poincaré 对偶定理对应于同调类的交†. S. Lefschetz 和 N. E. Steenrod 是通过下面叙述的积空间的关系来下定义的.

【叉积与斜积】 当给定单式交换环R上的链复形†M和R模G时,我们用$H_*(M;G)$表示链复形$M\otimes G$的同调群†,用$H^*(M;G)$表示上

链复形† Hom (M, G)的上同调群†(→链复形，同调群)。此时，对于链复形M_i及模$G_i(i=1,2)$可以把链复形映射† α': $(M_1\otimes G_1)\otimes(M_2\otimes G_2)\to(M_1\otimes M_2)\otimes(G_1\otimes G_2)$及上链复形映射† α': $\mathrm{Hom}(M_1,G_1)\otimes\mathrm{Hom}(M_2,G_2)\to\mathrm{Hom}(M_1\otimes M_2, G_1\otimes G_2)$分别定义为$\alpha'((c_1\otimes g_1)\otimes(c_2\otimes g_2))=(c_1\otimes c_2)\otimes(g_1\otimes g_2)$及$(\alpha'(u_1\otimes u_2))(c_1\otimes c_2)=u_1(c_1)\otimes u_2(c_2)$ $(c_i\in M_i,\ g_i\in G_i,\ u_i\in\mathrm{Hom}(M_i, G_i))$，它们诱导出(分次模的) 0 次同态

$$\alpha: H_*(M_1;\ G_1)\otimes H_*(M_2;\ G_2)\to H_*(M_1\otimes M_2;\ G_1\otimes G_2)$$

$$\alpha: H^*(M_1;\ G_1)\otimes H^*(M_2;\ G_2)\to H^*(M_1\otimes M_2;\ G_1\otimes G_2).$$

还可定义上链映射β': $\mathrm{Hom}(M_1\otimes M_2, \mathrm{Hom}(G_1, G_2))\to\mathrm{Hom}(M_1\otimes G_1, \mathrm{Hom}(M_2, G_2))$及链映射$\beta'$: $M_1\otimes M_2\otimes\mathrm{Hom}(G_1, G_2)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M_1, G_1), M_2\otimes G_2)$分别为$((\beta' u)(c_1\otimes g_1))(c_2)=(u(c_1\otimes c_2))(g_1)$及$\beta'(c_1\otimes c_2\otimes h)(u_1)=c_2\otimes h(u_1(c_1))$ $(u\in\mathrm{Hom}(M_1\otimes M_2, \mathrm{Hom}(G_1, G_2)),\ h\in\mathrm{Hom}(G_1, G_2))$，它们诱导出 0 次同态:

$$\beta: H^*(M_1\otimes M_2;\ \mathrm{Hom}(G_1, G_2))\to \mathrm{Hom}(H_*(M_1;\ G_1), H^*(M_2;\ G_2)),$$

$$\beta: H_*(M_1\otimes M_2;\ \mathrm{Hom}(G_1, G_2))\to \mathrm{Hom}(H^*(M_1;\ G_1), H_*(M_2;\ G_2)).$$

可是，当M_i是定义拓扑空间及其子空间的对(X_i, A_i)的(上)同调群的链复形时，在许多情形下链复形$M_1\otimes M_2$的(上)同调群与积$(X_1, A_1)\times(X_2, A_2)=(X_1\times X_2, A_1\times X_2\cup X_1\times A_2)$的(上)同调群典范同构。例如，这对于拓扑空间$X$的奇异链复形†，CW 复形†及其子复形的对$(X,A)$的奇异链复形成立。因此，当已给模的同态$\eta: G_1\otimes G_2\to G_3$时，把$\eta$诱导的(上)同调群的同态与上述$\alpha$合成，就得到同态:

$$\times: H_p(X_1, A_1;\ G_1)\otimes H_q(X_2, A_2;\ G_2)\to H_{p+q}((X_1, A_1)\times(X_2, A_2);\ G_3)$$

$$\times: H^p(X_1, A_1;\ G_1)\otimes H^q(X_2, A_2;\ G_2)\to H^{p+q}((X_1, A_1)\times(X_2, A_2);\ G_3),$$

式中左边的元素$z_1\otimes z_2$，$w_1\otimes w_2$的像称为**叉积** (cross product)，记作$z_1\times z_2$，$w_1\times w_2$。且由$\eta: G_1\otimes G_2\to G_3$定义典范同态$G_1\to\mathrm{Hom}(G_2, G_3)$，由此诱导出的(上)同调群的同态与$\beta$($G_1$, G_2分别换成G_2, G_3)合成就得到同态:

$$/: H^n((X_1, A_1)\times(X_2, A_2);\ G_1)\to \mathrm{Hom}(H_p(X_1, A_1;\ G_2), H^{n-p}(X_2, A_2; G_3)),$$

$$\backslash: H_n((X_1, A_1)\times(X_2, A_2);\ G_1)\to \mathrm{Hom}(H^p(X_1, A_1;\ G_2), H_{n-p}(X_2, A_2; G_3)),$$

式中左边元素w, z的像在右边第一项中的元素z_1, w_1上所取的值w/z_1, $z\backslash w_1$称为**斜积** (slant product)。

叉积与斜积有下述性质(系数群略去不写): 1) 自然性。与由连续映射$f_i:(X_i, A_i)\to(Y_i, B_i)$ $(i=1, 2)$诱导出的(上)同调群的同态†相容。例如，对于上同调的叉积，下面的交换图示成立:

$$\begin{array}{ccc} H^p(Y_1,B_1)\otimes H^q(Y_2,B_2) & \xrightarrow{\times} & H^{p+q}((Y_1,B_1)\times(Y_2,B_2)) \\ \downarrow f_1^*\otimes f_2^* & & \downarrow (f_1\times f_2)^* \\ H^p(X_1,A_1)\otimes H^q(X_2,A_2) & \xrightarrow{\times} & H^{p+q}((X_1,A_1)\times(X_2,A_2)). \end{array}$$

2) 与(上)边缘同态†相容。例如对于\有如下两个交换图示成立:

$$\begin{array}{ccc} H_n((X_1, A_1)\times X_2) & \xrightarrow{\backslash} & \mathrm{Hom}(H^p(X_1, A_1), H_{n-p}(X_2)) \\ \downarrow \delta_* & & \downarrow \mathrm{Hom}(\delta^*, 1) \\ H_{n-1}(A_1\times X_2) & \xrightarrow{\backslash} & \mathrm{Hom}(H^{p-1}(A_1), H_{n-p}(X_2)), \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_n(X_1\times(X_2, A_2)) & \xrightarrow{\backslash} & \mathrm{Hom}(H^p(X_1), H_{n-p}(X_2, A_2)) \\ \downarrow \partial_* & & \downarrow \mathrm{Hom}(1, (-1)^p\partial_*) \\ H_{n-1}(X_1\times A_2) & \xrightarrow{\backslash} & \mathrm{Hom}(H^p(X_1), H_{n-p-1}(A_2)). \end{array}$$

【上积与卡积】 令上节中的X_1, X_2为$X_1=X_2=X$，设$d:(X, A_1\cup A_2)\to(X, A_1)\times(X, A_2)$为对角映射，即由$d(x)=(x, x)$ $(x\in X)$定义的连续映射。这时把上同调的叉积和由d诱导出的$d^*: H^{p+q}((X, A_1)\times(X, A_2); G_3)\to H^{p+q}(X, A_1\cup A_2; G_3)$合成，得到同态

$$\smile: H^p(X, A_1;\ G_1)\otimes H^q(X, A_2;\ G_2)\to H^{p+q}(X, A_1\cup A_2; G_3),$$

式中左边的元素$w_1\otimes w_2$的象$w_1\smile w_2$称为**上积** (cup product)。且由d诱导出的$d_*: H_n(X, A_1\cup A_2; G_3)\to H_n((X, A_1)\times(X, A_2);\ G_3)$与\合成就得到同态

$\frown: H_n(X, A_1 \cup A_2; G_1) \to$

$\mathrm{Hom}(H^p(X, A_1; G_2), H_{n-p}(X, A_2; G_3))$，左边的元素 z 的象在右边第一项的元素 w_1 上所取的值 $z \frown w_1$ 称为**卡积** (cap product).

和叉积的性质相对应，上积具有下述性质(系数群略去不写). 1)自然性. 对于连续映射 $f:(X, A_1, A_2) \to (Y, B_1, B_2)$ 与 $w_1 \in H^p(Y, B_1)$, $w_2 \in H^q(Y, B_2)$, $f^*(w_1 \smile w_2) = f^* w_1 \smile f^* w_2 \in H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2)$. 2) 设 $i: A \subset X$ 是包含映射,则对于 $w_1 \in H^{p-1}(A)$, $w_2 \in H^q(X)$, 有 $\delta^*(w_1 \smile i^* w_2) = \delta^* w_1 \smile w_2 \in H^{p+q}(X, A)$. 又对于 $w_1 \in H^p(X)$, $w_2 \in H^{q-1}(A)$, 有 $\delta^*(i^* w_1 \smile w_2) = (-1)^p w_1 \smile \delta^* w_2 \in H^{p+q}(X, A)$. 当给予同态 $G_1 \otimes G_2 \to G_3$ 时，这些性质与双线性一起刻划有限 CW 复形及其子复形的所有对之上定义的上积. 同样，对于卡积也有如下性质成立. 1) 对于 $z \in H_n(X, A_1 \cup A_2)$, $w_1 \in H^*(Y, B_1)$, 有 $f_*(z \frown f^* w_1) = f_* z \frown w_1 \in H_{n-p}(Y, B_2)$. 2) 对于 $z \in H_n(X, A)$ 及 $w \in H^p(A)$, 有 $i_*(\partial_* z \frown w) = z \frown \delta^* w \in H_{n-p-1}(X)$, 且对于 $z \in H_n(X, A)$, $w \in H^p(X)$, 有 $\partial_*(z \frown w) = (-1)^p \partial_* z \frown i^* w \in H_{n-p-1}(A)$. 且如果 $z \in H_p(X, A; G_1)$, $w \in H^p(X, A; G_2)$, 则 $z \frown w \in H_0(X; G_3)$, 而 $z \frown w$ 在由增广† 产生的映射 $H_0(X, G_3) \to G_3$ 下的象用 $\langle z, w \rangle$ 表示，称为 **Kronecker 指数** (Kronecker index).

【内积与外积】 根据定义，对于 $w_i \in H^*(X, A_i)$, $z \in H_*((X, A_1) \times (X, A_2))$, 有 $w_1 \smile w_2 = d^*(w_1 \times w_2)$, $z \frown w_1 = d_* z \backslash w_1$, 但另方面,当 $p_1:(X_1, A_1) \times X_2 \to (X_1, A_1)$, $p_2: X_1 \times (X_2, A_2) \to (X_2, A_2)$为射影时,对于 $w_i \in H^*(X_i, A_i)$, $z \in H_*((X_1, A_1) \times (X_2, A_2))$, 由于 $w_1 \times w_2 = p_1^* w_1 \smile p_2^* w_2$, $z \backslash w_1 = p_{2*}(z \frown p_1^* w_1)$,故×和$\smile$, \和$\frown$可以互相推出. 这样我们把×, \ 称为**外积** (external product), $\smile$, $\frown$称为**内积** (internal product).

设同调的叉积、斜积/是外积,而内积一般没有定义,但是,假如对于X给出连续的乘积μ: $X \times X \to X$, 由 μ 诱导的(上)同调群的同态,可以在×之后同×合成，或在/之前同/合成而得到同态$H_p(X; G_1) \otimes H_q(X; G_2) \to H_{p+q}(X; G_3)$, $H^n(X; G_1) \to \mathrm{Hom}(H_p(X; G_2), H^{n-p}(X; G_3))$, 从而定义了内积 (→Hopf 代数).

【上同调环】 设 $G_1 = G_2 = G_3$ 是基环 R, 同态 $G_1 \otimes G_2 \to G_3$ 由 R 的乘积给出，如果把 $((X_1, A_1) \times (X_2, A_2)) \times (X_3, A_3)$与$(X_1, A_1) \times ((X_2, A_2) \times (X_3, A_3))$, $(X_1, A_1) \times (X_2, A_2)$ 与 $(X_2, A_2) \times (X_1, A_1)$ 按典范同构视为同一,则对于 $w_1 \in H^p(X_1, A_1)$, $w_2 \in H^q(X_2, A_2)$, $w_3 \in H^r(X_3, A_3)$ 与 $z \in H_n((X_1, A_1) \times (X_2, A_2) \times (X_3, A_3))$, 有 $(w_1 \times w_2) \times w_3 = w_1 \times (w_2 \times w_3)$, $w_1 \times w_2 = (-1)^{pq} w_2 \times w_1$, $z \backslash (w_1 \times w_2) = (z \backslash w_1) \backslash w_2$ 成立，从而对于 $w_1 \in H^p(X, A_1)$, $w_2 \in H^q(X, A_2)$, $w_3 \in H^r(X, A_3)$ 与 $z \in H_n(X, A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, 有 $(w_1 \smile w_2) \smile w_3 = w_1 \smile (w_2 \smile w_3)$, $w_1 \smile w_2 = (-1)^{pq} w_2 \smile w_1$ 与 $z \frown (w_1 \smile w_2) = (z \frown w_1) \frown w_2$ 成立. 特别上同调群 $H^*(X, A; R) = \sum_n H^n(X, A; R)$ 是R上分次模，它以上积为乘法而成为R上(反)交换分次代数，称为(X, A)的以R为系数的**上同调环**或**上同调代数** (cohomology ring, cohomology algebra). 拓扑空间 X 的上同调环 $H^*(X; R)$ 具有幺元. 对于叉积有等式 $(w_1 \times v_1) \smile (w_2 \times v_2) = (-1)^{qr}(w_1 \smile w_2) \times (v_1 \smile v_2)$ ($w_1 \in H^p(X, A)$, $w_2 \in H^q(X, A)$, $v_1 \in H^r(Y, B)$, $v_2 \in H^s(Y, B)$) 成立. 如果 R 是域，则 $H^*((X, A) \times (Y, B); R)$ 与 $H^*(X, A; R) \otimes H^*(Y, B; R)$ 作为分次代数是同构的.

【奇异(上)同调群的情形】 叉积等定义中基本之点在于, $(X_1, A_1) \times (X_2, A_2)$ 的(上)同调群与 (X_i, A_i) 的链复形的张量积的(上)同调群是典范同构的,而对于奇异(上)同调群来说,这种同构是由下式定义的链等价†映射 $\nabla: S(X_1) \otimes S(X_2) \to S(X_1 \times X_2)$ 或 $\rho: S(X_1 \times X_2) \to S(X_1) \otimes S(X_2)$诱导出来的:

$$\nabla(T_1^p \otimes T_2^q) = \sum (-1)^{\varepsilon}(s_{j_q} \cdots s_{j_1} T_1^p \times s_{i_p} \cdots s_{i_1} T_2^q),$$

$$\rho(T_1^n \times T_2^n) = \sum_{i=0}^{n} \partial_{i+1} \cdots \partial_n T_1^n \otimes \partial_0 \cdots \partial_{i-1} T_2^n.$$

这里 T_i^k 是 X_i 的 k 维奇异单形†，$T_1^n \times T_2^n$: $\Delta^n \to X_1 \times X_2$ 表示由 $(T_1^n \times T_2^n)(y) = (T_1^n(y), T_2^n(y))$ $(y \in \Delta^n)$ 定义的 $X_1 \times X_2$ 的 n 维奇异单形，s_i, ∂_i 分别是退化算子†及面算子†. 且在 ∇ 式中，求和遍及所有满足 $i_1 < \cdots < i_p$, $j_1 < \cdots < j_q$ 的 $(0, 1, \cdots, p+q-1)$ 的置换 $(i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_q)$ 之上，ε 表示这置换的符号. 因此当给出同态 $\eta: G_1 \otimes G_2 \to G_3$ 时，通过前述的 α' 与 $\nabla \otimes \eta$ 或 $\mathrm{Hom}(\rho, \eta)$ 的合成，就定义了(上)链映射 $\times: (S(X_1) \otimes G_1) \otimes (S(X_2) \otimes G_2) \to S(X_1 \times X_2) \otimes G_3$, $\times: \mathrm{Hom}(S(X_1), G_1) \otimes \mathrm{Hom}(S(X_2), G_2) \to \mathrm{Hom}(S(X_1 \times X_2), G_3)$，由此诱导出(上)同调的叉积. 且当 $X_1 = X_2 = X$ 时，后一式的$\times$与由对角映射诱导出的上链映射 $d^{\#}: \mathrm{Hom}(S(X \times X), G_3) \to \mathrm{Hom}(S(X), G_3)$ 合成而得上链映射$\smile$: $\mathrm{Hom}(S(X), G_1) \otimes \mathrm{Hom}(S(X), G_2) \to \mathrm{Hom}(S(X), G_3)$，它诱导出上积. 当用这些(上)链映射定义(上)链的叉积 $c_1 \times c_2$, $u_1 \times u_2$, 上积 $u_1 \smile u_2$ 时，对于由连续映射诱导的(上)链映射 $f_{\#}$, $f^{\#}$ 有 $(f_1 \times f_2)_{\#}(c_1 \times c_2) = f_{1\#}c_1 \times f_{2\#}c_2, \cdots$ 成立，且对于(上)边缘算子† ∂, δ, 有 $\partial(c_1 \times c_2) = \partial c_1 \times c_2 + (-1)^p c_1 \times \partial c_2, \cdots$ 成立. 同样也可以定义(上)链的斜积 u/c_1, $c \backslash u_1$, 卡积 $c \frown u_1$, 且，$\cdots$, $f_{\#}c \frown u_1 = f_{\#}(c \frown f^{\#}u_1), \cdots, \partial(c \frown u_1) = (-1)^p(\partial c \frown u_1 - c \frown \delta u_1)$ 等公式成立. 对于X的 $p+q$ 维奇异单形 T 与 p 维上链 u_1, q 维上链 u_2 有下式成立:

$$(u_1 \smile u_2)(T) = u_1(\partial_{p+1} \cdots \partial_{p+q} T) \cdot u_2(\partial_0 \cdots \partial_{p-1} T),$$

$$g_1 T \frown u_2 = (g_1 \cdot u_2(\partial_{p+1} \cdots \partial_{p+q} T)) \partial_0 \cdots \partial_{p-1} T.$$

其中 $g_1 \cdot g_2 = \eta(g_1 \otimes g_2)$ $(g_i \in G_i)$. 这些是对于单纯复形的(上)链的上积、卡积的古典定义对于奇异(上)链的形式. 对于奇异上同调群，当 (X, A_1, A_2) 对于整系数同调群是固有的†，则能够定义上积 $w_1 \smile w_2$ $(w_i \in H^*(X, A_i; G_i))$，特别对于任意的拓扑空间及其子集的对$(X, A)$，可以定义上同调环 $H^*(X, A; R)$.

【拓扑流形上的交】 设 M^n 为紧连通的 n 维拓扑流形†，假定是可定向的(→流形). 设 M^n 的基本同调类†是 $b \in H_n(M^n; \boldsymbol{Z})$ ($\boldsymbol{Z}$ 为整系数加法群)，对于自然同态 $\boldsymbol{Z} \otimes G \to G$ 考虑卡积，就能够用 $b \frown D(z) = z$ $(z \in H_p(M^n; G))$ 定义同构 $D: H_p(M^n; G) \cong H^{n-p}(M^n; G)$ (Poincaré-Lefschetz 对偶定理†). 对于 $z_1 \in H_p(M^n; G_1)$, $z_2 \in H_q(M^n; G_2)$, 定义 $z_1 \cdot z_2 \in H_{p+q-n}(M^n; G_3)$ 为 $z_1 \cdot z_2 = z_1 \frown Dz_2$，即 $D(z_1 \cdot z_2) = Dz_1 \smile Dz_2$，称为同调类 z_1 和 z_2 的**交**(intersection). 特别当 $p+q=n$ 的情形，把交与由增广生成的映射 $\varepsilon: H_0(M^n; G) \to G$ 组合起来，就得 $(z_1, z_2) = \varepsilon(z_1 \cdot z_2)$，称为同调类 z_1 与 z_2 的**相交数**(intersection number). $(z_2, z_1) = (-1)^{pq}(z_1, z_2)$ 成立，也可以用 Kronecker 指数表为 $(z_1, z_2) = \langle z_1, Dz_2 \rangle$. 当 M^n 为组合流形†时，对于 M^n 的单形剖分†K 考虑其重心重分†K' 及对偶胞腔复形 K^*，则对于K的 p 维单形 E^p 与 K^* 的 q 维胞腔 E^q，作为 E^p 及 E^q 的点集的交就成为 K' 的 $p+q-n$ 维单形的并集，如果 E^p, E^q 已给定向，则它们的交的每个单形可以相应定向而考虑其代数和，这样对于K的 p 维链 c_1 与 K^* 的 q 维链 c_2 就定义了 K' 的 $p+q-n$ 维链 $c_1 \cdot c_2$ ([4],[5]). 这时，如果 z_1 由K的链 c_1 表示，z_2 由 K^* 的链 c_2 表示，则 $z_1 \cdot z_2$ 就由 $c_1 \cdot c_2$ 表示. 特别在 $p+q=n$ 的情形，相交数 (c_1, c_2) 可确定，等于 (z_1, z_2).

【参】[1] R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Actualités Sci. Ind., Hermann 1958; [2] P. J. Hilton-S. Wylie, Homology theory, Cambridge Univ. Press, 1960; [3] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博，位相幾何学 I，岩波，1967; [4] S. Lefschetz, Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1942; [5] 河田敬義編，位相幾何学，岩波，1965; [6] E. H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

上同调运算 [英 cohomology operation 法 opération cohomologique, 德 Kohomologieoperation 俄 когомологическая операция 日 コホモロジー作用素] 上同调运算是由 Л. С. Понтрягин 和 N. E. Steenrod 作为解决映射的同伦分类问题(→同伦)的工具而引进的. 后来在研究微分流形的示性类†、同伦型†问题、Hopf 不变量†、球面的同伦群†、球面上的切 r 标架†

场问题等方面成为拓扑学的代数研究的主要工具而被非常有效地使用着.

【一阶上同调运算】 设 A, B 为 Abel 群, $H^q(A, l; B)$ 是 Eilenberg-MacLane 空间† $K(A, l)$ 的以 B 为系数的 q 维上同调群†. 满足下列性质的 $\varphi=\varphi_z$ 称为与 $z\in H^q(A, l; B)$ 相伴的 (一阶) **上同调运算** ((primary) cohomology operation):

1) 对于连通拓扑空间 X, 确定其上同调群之间的映射 $\varphi: H^l(X; A)\to H^q(X; B)$, 这个映射不一定是加性的.

2) 对于任意的连续映射 $f: X\to Y$, $\varphi\circ f^*=f^*\circ\varphi$ 成立. 即下面图示是交换的:

$$\begin{array}{ccc} H^l(X;\ A) & \xrightarrow{\varphi} & H^q(X;\ B) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^l(Y;\ A) & \xrightarrow{\varphi} & H^q(Y;\ B), \end{array}$$

其中 f^* 是 f 所诱导出的上同调群的同态.

3) 设 $u\in H^l(A, l; A)$ 为基本上同调类 (→Eilenberg-MacLane 复形), 则 $\varphi_z(u)=z$.

作为上同调群通常用奇异上同调群†. 且作为空间 X, Y, 只考虑单纯复形并不失一般性. 则满足上述性质的上同调运算的存在性和唯一性可证明如下. 连续映射 $f: X\to K(A, l)$ 的同伦类† $[f]$ 与 $H^l(X; A)$ 的元素 x 通过 $f^*u=x$ 的关系一一对应. 对于 $x=f^*u\in H^l(X; A)$, 我们只要取 φ_z 的值为 $\varphi_z(x)=f^*z$ 就行了.

只满足性质 1), 2) 的上同调运算称为 $\{l, q; A, B\}$ 型的上同调运算, 其全体记作 $\mathcal{O}\{l, q; A, B\}$. 显然, 通过对应 $z\to\varphi_z$ 给出从 $H^q(A, l; B)$ 到 $\mathcal{O}\{l, q; A, B\}$ 的双射 ([2]). 且当 $H^q(A, l; B)=0$ 时, $\mathcal{O}\{l, q; A, B\}$ 只有恒等地映到 0 的运算. $H^q(A, l; B)=0$ 在下面的情形成立: 例如 $0<q<l$; $l=1<q$, $A=\boldsymbol{Z}$ (有理整数环); $l=2, q=2q'+1, A=\boldsymbol{Z}$; $l=2l'+1<q$, $A=\boldsymbol{Z}$, $B=\boldsymbol{Q}$ (有理数域); $A=$ 有限群, $B=\boldsymbol{Q}$ 等等.

上同调运算的演算定义如下: i) 设 φ_z, $\varphi_{z'}\in\mathcal{O}\{l, q; A, B\}$. 则上同调运算 φ_z, $\varphi_{z'}$ 的**和** $\varphi_z+\varphi_{z'}\in\mathcal{O}\{l, q; A, B\}$ 由 $\varphi_{z+z'}$ 来定义. 即对于 $x\in H^l(X; A)$, 有 $(\varphi_z+\varphi_{z'})(x)=\varphi_z(x)+\varphi_{z'}(x)$ 成立. ii) 设 $\varphi_z\in\mathcal{O}\{l, q; A, B\}$, $\varphi_{z'}\in\mathcal{O}\{l, q; A, B'\}$, 则上同调运算 φ_z 和 $\varphi_{z'}$ 的**上积** $\varphi_z\smile\varphi_{z'}\in\mathcal{O}\{l, q+q'; A, B\otimes B'\}$ 由 $\varphi_z\smile\varphi_{z'}$ 定义, 即对于 $x\in H^l(X; A)$, 有 $(\varphi_z\smile\varphi_{z'})(x)=\varphi_z(x)\smile\varphi_{z'}(x)$ 成立. iii) 设 $\varphi\in\mathcal{O}\{l, l'; A, A'\}$, $\varphi'\in\mathcal{O}\{l', l''; A', A''\}$, 则定义**合成** $\varphi'\circ\varphi\in\mathcal{O}\{l, l''; A, A''\}$ 如下: 对 $x\in H^l(X; A)$, $(\varphi'\circ\varphi)(x)=\varphi'(\varphi(x))$ 成立.

并且, 所有的上同调运算都可以用下面讲的基本的上同调运算I), II), III), III'), IV) 通过适当重复运用上述演算 i), ii), iii) 而构成.

I) 由模的同态 $\eta: A\to B$ 诱导出来的上同调群的同态 $\eta_*: H^l(X; A)\to H^l(X; B)$.

II) **Бокштейн 运算** (Bockstein operation). 即对应于模的正合序列† $0\to A\to A'\to A''\to 0$ 的边缘同态(→链复形) $\delta: H^l(X; A'')\to H^{l+1}(X; A)$. 特别对应于正合序列 $0\to\boldsymbol{Z}\xrightarrow{n}\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}_n\to 0$ ($\boldsymbol{Z}_n$ 表示 n 阶循环群 $\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z}$) 的 Бокштейн 运算, 常常写作 β_n, 或 $\frac{1}{n}\delta$, 或 Δ_n 等.

III) **Steenrod 运算** (Steenrod operation).

i) ***Sq* 运算** (Squaring operation). Sq 运算 $Sq^i (i=0, 1, 2, \cdots)$ 是对所有的 l 定义同态

$$Sq^i: H^l(X; \boldsymbol{Z}_2)\to H^{l+i}(X; \boldsymbol{Z}_2)$$

的上同调运算, 具有以下的性质:

III 1) $Sq^0x=x$

III 2) $Sq^ix=x^2=x\smile x$ ($\dim x=i$ 时)

III 3) $Sq^ix=0$ ($\dim x<i$ 时)

III 4) $Sq^i(x\smile y)=\sum_{j+k=i} Sq^jx\smile Sq^ky$ (H. Cartan-N. E. Steenrod)

III 5) Sq^i 与纤维丛相伴的谱序列†的超渡†可交换.

Sq^i 由满足性质 1) 2) 及 III 1), III 2), III 3), III 4), III 5) 的上同调运算系列来刻划 ([2], [5]). 还证明 Sq^i 之间有下述关系式成立.

III 6) $Sq^aSq^b\ (x)=\sum_c \binom{b-c-1}{a-2c}$

$Sq^{a+b-c}Sq^c(x)$(**Adem 公式**)，此处$\binom{k}{i}$是二项系数，当 $i>k$ 或 $0>i$ 时令$\binom{k}{i}=0$ (→公式 6 II).

ii) **$\mathscr{P}$ 运算**($\mathscr{P}$-operation, reduced power). $\mathscr{P}$ 运算 $\mathscr{P}_p^r$ (p 为奇素数，$r=0,1,2,\cdots$)是对所有的 q 定义同态

$$\mathscr{P}_p^r: H^l(X;\boldsymbol{Z}_p)\to H^{l+2r(p-1)}(X;\boldsymbol{Z}_p)$$

的上同调运算，具有如下性质：

III′ 1) $\mathscr{P}_p^0(x)=x$,

III′ 2) $\mathscr{P}_p^r(x)=x^p$ ($\dim x=2r$ 时),

III′ 3) $\mathscr{P}_p^r(x)=0$ ($\dim x<2r$ 时),

III′ 4) $\mathscr{P}_p^r(x\smile y)=\sum_{s+t=r}\mathscr{P}_p^s(x)\smile\mathscr{P}_p^t(y)$ (Cartan-Steenrod),

III′ 5) $\mathscr{P}_p^r$ 与超渡可交换.

$\mathscr{P}_p^r$ 由这些性质所刻划. 对于 $\mathscr{P}_p^r$ 也有 **Adem 公式**(→公式 6 II).

IV **Понтрягин 运算** (Pontrjagin operation). Понтрягин 运算 $\mathfrak{P}_p=\mathfrak{P}_{p,h}$ ($p=2$ 或奇素数，$h=1,2,\cdots$) 是对所有的偶数 l，定义映射

$$\mathfrak{P}_p: H^l(X;\boldsymbol{Z}_{p^h})\to H^{pl}(X;\boldsymbol{Z}_{p^{h+1}})$$

的上同调运算，具有以下性质：

IV 1) 如 $\eta:\boldsymbol{Z}_{p^{h+1}}\to\boldsymbol{Z}_{p^h}$ 是由 $\eta(1)=1$ 定义的同态，则 $\eta_*\mathfrak{P}_p x=x^p$,

IV 2) 如 $p:\boldsymbol{Z}_{p^h}\to\boldsymbol{Z}_{p^{h+1}}$ 是由 $p(1)=p$ 定义的同态，则 $\mathfrak{P}_p(x+y)=\mathfrak{P}_p(x)+\mathfrak{P}_p(y)+\sum_{0<i<p}\left(\binom{p}{i}\Big/p\right)p_*(x^i\smile y^{p-i})$,

IV 3) $\mathfrak{P}_p(x\smile y)=\mathfrak{P}_p(x)\smile\mathfrak{P}_p(y)$.

在理论上，决定上同调运算和决定所有上同调群 $H^q(A,l;B)$ 是等价的. H. Cartan 及 J.-P. Serre 决定了上同调环 $H^*(A,l;\boldsymbol{Z}_p)$，使得有可能决定整系数上同调群 $H^*(A,l;\boldsymbol{Z})$，从而对任意 B，证明了能够决定 $H^*(A,l;B)$ (Cartan). 例：设 $u\in H^2(\boldsymbol{Z}_2,2;\boldsymbol{Z}_2)$ 是基本上同调类，则 $H^4(\boldsymbol{Z}_2,2;\boldsymbol{Z}_4)\cong\boldsymbol{Z}_4$, $H^4(\boldsymbol{Z}_2,2;\boldsymbol{Z})=0$, $H^5(\boldsymbol{Z}_2,2;\boldsymbol{Z}_4)\cong\boldsymbol{Z}_4+\boldsymbol{Z}_2$, $H^5(\boldsymbol{Z}_2,2,\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}_4$ 分别对应于上同调运算 $\mu\mathfrak{P}_2$; 0; $\mu\eta_*\left(\frac{1}{4}\delta\right)\mathfrak{P}_2$ ($\mu=0,1,2,3$), $\lambda 2_* Sq^2Sq^1$ ($\lambda=0,1$); $\mu\left(\frac{1}{4}\delta\right)\mathfrak{P}_2$. 其中 $\eta:\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}_4$ 和 $2:\boldsymbol{Z}_2\to\boldsymbol{Z}_4$ 是分别用 $\eta(1)=1$ 及 $2(1)=2$ 定义的同态.

设 q 为固定的整数. 如果给出满足下列性质的上同调运算序列 $\varphi^l\in\mathscr{O}\{l,l+q;A,B\}$ ($l=0,1,2,\cdots$)，就称为 $\{A,B\}$ 型 q 维**稳定(一阶)上同调运算** (stable (primary) cohomology operation).

4) 设 $S:H^{l+1}(SX;A)\to H^l(X;A)$ 是同纬同态，则 $\varphi^l S=S\varphi^{l+1}$ 成立. 即图示

$$\begin{array}{ccc} H^l(X;A) & \xrightarrow{\varphi^l} & H^{l+q}(X;B)\\ \uparrow S & & \uparrow S\\ H^{l+1}(SX;A) & \xrightarrow{\varphi^{l+1}} & H^{l+q+1}(SX;B)\end{array}$$

是可交换的.

所有 $\{A,B\}$ 型稳定上同调运算的集合记作 $\mathscr{A}(A,B)$，当 $A=B$ 时，$\mathscr{A}(A,A)$ 由和及积定义的合成构成环. 特别当 $A=B=\boldsymbol{Z}_p$ (p 为素数)的情形，$\mathscr{A}(\boldsymbol{Z}_p,\boldsymbol{Z}_p)$ 是 $\boldsymbol{Z}_p$ 上的分次环†，而积一般不可交换，这个环称为 **Steenrod 代数**(Steenrod algebra)，记作 $\mathscr{A}(p)$. $\mathscr{A}(p)$ 是当 $p=2$ 时以 Sq^i 为生成元，当 $p>2$ 时以 β_p, $\mathscr{P}_p^r$ 为生成元，以 Adem 公式为关系式所成的代数. $\mathscr{A}(2)$ 作为分次模有基 $\{Sq^{i_1}Sq^{i_2}\cdots Sq^{i_k}\}$ (Sq^i 的次数为 i) 其中 $i_s\geqslant 2i_{s+1}$ ($s\geqslant 1$), $i_k\geqslant 1$. 这种有限的正整数列 $I=\{i_k,i_{k-1},\cdots,i_1\}$ 称为**容许列**(admissible series). $\mathscr{A}(2)$ 作为代数是由 $\{Sq^{2^k}\}$ 生成的. $p>2$ 的情形也一样，若 $\mathscr{P}_p^r$ 的次数为 $2r(p-1)$，β_p 的次数为 1，则 $\mathscr{A}(p)$ 具有基 $\{\beta_p^{\varepsilon_0}\mathscr{P}_p^{i_1}\beta^{\varepsilon_1}\cdots\mathscr{P}^{i_k}\beta^{\varepsilon_k}\}$，这里 $\varepsilon_i=0,1$, $i_m\geqslant pi_{m+1}+\varepsilon_m$ ($m\geqslant 1$). 这样的数列 $I=(i_k,\cdots,i_1)$ 称为**容许列**. $\mathscr{A}(p)$ 作为代数由 $\{\beta_p,\mathscr{P}^{p^k}\}$ 生成([5]).

【二阶上同调运算】 以下令 $H^\dagger(X)=\sum_{0<l}H^l(X;\boldsymbol{Z}_p)$ (p 为素数). 显然 $H^\dagger(X)$ 有左 $\mathscr{A}(p)$ 模结构. 设 C_s ($s=0,1$) 为自由分次左 $\mathscr{A}(p)$ 模，$d:C_1\to C_0$ 是保次的 $\mathscr{A}(p)$ 同态. 且给出 $z\in C_1$，使 $dz=0$. 这时满足下述性质的 $\Phi=\Phi_{(d,z)}$ 称为与 (d,z) 相伴的**稳定二阶上同调运算** (stable secondary cohomology operation). 下

面为方便起见把 C_s 的自由生成元取作 $c_{s,i}$($\dim c_{0,i}=m_i$, $\dim c_{1,j}=n_j$)，而 d 用 $dc_{1,j}=\sum_i a_{ji}c_{0,i}$ 定义，并设 $z=\sum_j b_jc_{1,j}$.

1) 所有满足 $\varepsilon d=0$ 且次数只提高 l 的 $\mathscr{A}(p)$ 同态 $\varepsilon:C_0\to H^+(X)$ 所构成的模设为 $D^l(d,X)$. 令 $\varepsilon(c_{0,i})=x_i$，我们可取 $D^l(d,X)=\left\{\varepsilon=\prod_i x_i\,\middle|\, x_i\in H^{l+m_i}(X),\ \sum_i a_{ji}x_i=0\right\}$. 其次设次数只提高 $l-1$ 的 $\mathscr{A}(p)$ 同态为 $\xi:C_1\to H^+(X)$，$z\in C_1$ 在 ξ 下的象 $\xi(z)$ 全体组成 $H^+(X)$ 的子模记作 $Q^l(z,X)$. 即 $Q^l(z,X)=\sum_j b_jH^{l+n_j-1}(X)$. 对任意拓扑空间 X，Φ 定义了映射

$$\Phi:D^l(d,X)\to H^+(X)/Q^l(z,X).$$

2) 对于任意的连续映射 $f:X\to Y$，$\Phi f^*=f^*\Phi$ 成立，即图示

$$\begin{array}{ccc} D^l(d,X) & \xrightarrow{\Phi} & H^+(X)/Q^l(z,X) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ D^l(d,Y) & \xrightarrow{\Phi} & H^+(X)/Q^l(z,Y) \end{array}$$

是可交换的.

3) 设 $S:H^+(SX)\to H^+(X)$ 为同纬同态. 此时，$\Phi S=S\Phi$ 成立. 即图示

$$\begin{array}{ccc} D^l(d,X) & \xrightarrow{\Phi} & H^+(X)/Q^l(z,X) \\ \uparrow S & & \uparrow S \\ D^{l+1}(Sd,SX) & \xrightarrow{\Phi} & H^+(SX)/Q^{l+1}(z,SX) \end{array}$$

是可交换的.

4) 当 $i:Y\to X$ 是单射时，设 $i^*\varepsilon=0$，即设 $\sum_i a_{ji}i^*x_i=0$，则存在次数只提高 l 的 $\mathscr{A}(p)$ 同态 $\eta:C_0\to H^+(X,Y)$，以及次数只提高 $l-1$ 的 $\mathscr{A}(p)$ 同态 $\zeta:C_1\to H^+(Y)$，使下列图示反交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^+(Y) & \xleftarrow{i^*} & H^+(X) & \xleftarrow{j^*} & H^+(X,Y) & \xleftarrow{\delta^*} & H^+(Y) & \xleftarrow{i^*} & H^+(X) \\ & & \uparrow & & \uparrow \eta & & \uparrow \zeta & & \\ & & \llcorner & \xrightarrow{\varepsilon} & C_0 & \xleftarrow{d} & C_1 & & \end{array}$$

对于任意这样的 η,ζ，$i^*\Phi(\varepsilon)\equiv\zeta(z)\ (\mathrm{mod}\ i^*Q(z,X))$ 成立. 此处 $\delta^*y=(-1)^{\dim y}\delta y$.

同一阶上同调运算的情形一样，可证明这种上同调运算的存在性 (J. F. Adams [4]). 同一阶上同调运算的情形不一样，与 (d,z) 相伴的稳定二阶上同调运算并不一定唯一. 任取二个与 (d,z) 相伴的二阶上同调运算 Φ,Φ'. 则存在适当的元素 $c=\sum_i a_ic_{0,i}\in C_0/dC_1$ ($a_i\in\mathscr{A}(p)$)，当 $\varphi(\varepsilon)=\sum_i a_ix_i$ 时，$\Phi'(\varepsilon)\equiv\varphi(\varepsilon)+\Phi(\varepsilon)\ (\mathrm{mod}\ Q^l(z,X))$ 成立. 例: 设 $p=2$. 对 $\nu\in\mathbf{Z}_2$，$a\in\mathscr{A}(2)$，规定 $1\cdot\nu=\nu$，$a\cdot\nu=0$ ($\dim a>0$)，则 $\mathbf{Z}_2$ 可看成左 $\mathscr{A}(2)$ 模. $\mathbf{Z}_2$ 在 $\mathscr{A}(2)$ 上的极小射影分解(→同调代数)

$$0\leftarrow\mathbf{Z}_2\xleftarrow{\varepsilon}C_0\xleftarrow{d_1}C_1\xleftarrow{d_2}C_2\leftarrow\cdots$$

已知([4])可作如下选取: $C_0=\mathscr{A}(2)$，C_1 为(左) $\mathscr{A}(2)$ 模，以 c_i ($i\geqslant 0$) 为自由生成元，且 $d_1c_i=Sq^{2^i}$，C_2 为(左) $\mathscr{A}(2)$ 模，以 c_{ij} ($0\leqslant i\leqslant j$, $j\neq i+1$) 为自由生成元，且 $d_2c_{ij}=Sq^{2^i}c_j+\sum_{0\leqslant k<j}b_kc_k$. 因 $d_1c_i=Sq^{2^i}$ 是 $\mathscr{A}(2)$ 的生成元，$0=d_1d_2c_{ij}=Sq^{2^i}Sq^{2^j}+\sum_{0\leqslant k<j}b_kSq^{2^k}$ 表示 $\mathscr{A}(2)$ 的关系式. 命 $C_1(j)$ 为 C_1 的 $\mathscr{A}(2)$ 子模，由 c_k ($0\leqslant k\leqslant j$) 生成，$d_1(j)$ 为 d_1 在 $C_1(j)$ 上的限制. 令 $z_{ij}=d_2c_{ij}$，$\Phi_{ij}=\Phi_{(d_1(j),z_{ij})}$. 则 Φ_{ij} 是上同调运算，定义于满足 $Sq^{2^k}x=0$ ($0\leqslant k\leqslant j$) 的 $x\in H^+(X)$ 上，取值于剩余模 $H^+(X)/Q_{ij}(X)$，其中 $Q_{ij}(X)=Sq^{2^i}H^+(X)+\sum_{0\leqslant k<j}b_kH^+(X)$. 特别 $\Phi_{0,0}:\mathrm{Ker}\,\beta_2\to H^+(X)/\mathrm{Im}\,\beta_2$ 就是由 $\frac{1}{2^2}\delta$ 定义的广义 Бокштейн 运算，而 $\Phi_{1,1}$ 与球面同伦群 $\pi_{n+2}(S^n)$ 有关，这点是由 J. Adem 首先发现的. 当 $k\geqslant 3$ 时，下面关系式成立:

$$Sq^{2^{k+1}}\equiv\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\\ j\neq i+1}}a_{ijk}\Phi_{ij}$$

$$\left(\mathrm{mod}\sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k\\ j\neq i+1}}a_{ijk}Q_{ij}(X)\right).$$

由此可证明: $\pi_{2n-1}(S^n)$ 具有 Hopf 不变量为 1 的元素只限于 $n=2,4,8$ (Adams[4]). $p>2$ 的情形也有同样的结果.

三阶以上的上同调运算还没有得到令人满意的理论.

【参】 [1] N. E. Steenrod, Product of cocycles and extension of mappings, Ann. of Math., **48**(1947), 290—320; [2] J.-P. Serre, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helv., **27**(1953), 198—232; [3] N. E. Steenrod-P. E. Thomas, Cohomology operations derived from cyclic groups, Comment. Math. Helv., **32**(1957—58), 129—152; [4] J. F. Adams, On the nonexistence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math., **72**(1960), 20—104; [5] N. E. Steenrod, Cohomology operations, Princeton Univ. Press, 1962; [6] J. F. Adams, On the structure and applications of the Steenrod algebra, Comment. Math. Helv., **32**(1958), 180—214; [7] R. E. Mosher-M. C. Tangora, Cohomology operations and applications in homotopy theory, Harper, 1968; [8] E. H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966.

Hopf 代数 [英 Hopf algebra 法 algèbre de Hopf 德 Hopfsche Algebra 俄 алгебра Гопфа 日 ホップ代数] 当讨论 Lie 群或者作为它的推广的H空间的同调以及上同调时，就得到 Hopf 代数的概念. 这方面的研究是由 H. Hopf 开始的 ([1]). 其基本结构定理是由 A. Borel 推广的([2]),并且出现了各种应用，Hopf 代数的理论是代数拓扑学的一个常用的工具.

【分次代数】 域k上的分次模 $A=\sum_{n\geq 0} A_n$ (A_n 是k模)，当每个 A_n 都为有限时，称为**局部有限的** (locally finite)，当给出同构 $\eta: k\cong A_0$ 时,称为**连通的** (connected). 若分次模 A, B 的张量积† 表现为 $A\otimes B=\sum_n (A\otimes B)_n$, $(A\otimes B)_n=\sum_p A_p\otimes B_{n-p}$, 则 $A\otimes B$ 也成为分次模. 令 $A^*=\sum A_n^*$ (A_n^* 是 A_n 的对偶模†)，称为A的**对偶**(dual). 若 A, B 是局部有限的,则 $A\otimes B$, A^* 也是局部有限的,且$(A\otimes B)^*=A^*\otimes B^*$, $A^{**}=A$ 成立. 若 A, B 是连通的，则 A^*, $A\otimes B$ 也是连通的.

对于分次模 A，当给出保持次数的线性映射 $\varphi: A\otimes A\to A$，或 $\psi: A\to A\otimes A$ 时,(A,φ) 称为**分次代数** (graded algebra) (或简称**代数**)，(A,ψ) 称为**对偶代数** (coalgebra)，φ 称为 (A,φ) 的**乘法** (multiplication)，ψ 称为 (A,ψ) 的**对偶乘法** (comultiplication) 或**对角映射** (diagonal mapping)，a, b 的**积** (product) 通常记作 $\varphi(a\otimes b)=ab$. $\psi(a)$ 称为 a 的对偶积. 乘法与对偶乘法是对偶运算，当A为局部有限时，若(A,φ)是代数，则 (A^*,φ^*)是对偶代数，反之也成立. 其中 φ^* 是φ的对偶映射. 在代数 (A,φ) 中，若 $\varphi(1\otimes\varphi)=\varphi(\varphi\otimes 1)$，则$\varphi$ 称为**结合的** (associative)，若 $\varphi T=\varphi$ (其中 $T(a\otimes b)=(-1)^{pq}b\otimes a(a\in A_p, b\in A_q)$)，则称为**交换的** (commutative). 结合的分次代数称为**分次环** (graded ring) 或**分次代数**. 与此对偶地，可定义对偶乘法是"结合的"或"交换的". 在对偶代数 (A,ψ) 中，设A是连通的且局部有限的,而通过η把k与A_0看作是相同的，则 $\psi(x)=1\otimes x+x\otimes 1+\sum_i x_i'\otimes x_i''(0<\deg x_i'<\deg x)$ 成立,与"在代数 (A^*,ψ^*) 中，k的 1 成为单位元"，二者是等价的. 这个性质称为"ψ 具有k的 1 为单位元". 对于代数 (A,φ), (B,φ'), 令 $\varphi''=(\varphi\otimes\varphi')\circ(1\otimes T\otimes 1): A\otimes B\otimes A\otimes B\to A\otimes B$，则 $(A\otimes B,\varphi'')$ 成为代数. 记作 $(A\otimes B,\varphi'')=(A,\varphi)\otimes(B,\varphi')$. 对偶地,定义对偶代数的张量积为对偶积.

【Hopf 代数】 为简单起见,以后令分次模A是连通的且局部有限. 在A中给出乘法φ与对偶乘法ψ, φ, ψ 都具有k的 1 为单位元，$\psi:(A,\varphi)\to(A,\varphi)\otimes(A,\varphi)$是代数同态时,$(A,\varphi,\psi)$ 称为 **Hopf 代数**. 这个最后的条件与 $\varphi:(A,\psi)\otimes(A,\psi)\to(A,\psi)$ 为对偶代数同态是等价的. (A^*,ψ^*,φ^*) 也成为 Hopf 代数. 称为 (A,φ,ψ) 的**对偶 Hopf 代数**(dual Hopf algebra).

【H 空间】 拓扑空间X的在域k上考虑的上同调群 $H^*(X)$，或同调群 $H_*(X)$，具有由对角映射 $d: X\to X\times X$ 导出的积(上积†) d^*，或对偶积 (卡积) d_*，成为交换且结合的代数，或对偶代数. 它们是互为对偶的 (→上同调环[上积与卡积]). 给出到有基点 x_0 的拓扑空间X的连续映射 $h: X\times X\to X$, $h\iota_i\simeq 1$ (同伦†) ($i=1,2$, $\iota_1(x)=(x,x_0)$, $\iota_2(x)=(x_0,x)$)

时，(X, h) 称为 **H空间** (H-space)．又 h 称为**乘法** (multiplication)，x_0 称为X的**同伦单位元** (homotopy unit)．通过 Künneth 同构导出 h 的对偶乘法 $h^*: H^*(X) \to H^*(X) \otimes H^*(X)$ (**Hopf 对偶乘法** (Hopf comultiplication)) 与乘法 h_*: $H_*(X) \otimes H_*(X) \to H_*(X)$ (**Понтрягин 乘法** (Pontrjagin multiplication))．当X是连通†的，$H_*(X)$ 为局部有限时，$(H^*(X), d^*, h^*)$，$(H_*(X), h_*, d_*)$成为互为对偶的 Hopf 代数．特别是，若 h 在同伦意义下是交换或结合的，则 h^* 及 h_* 是交换或结合的．拓扑群†、闭路空间†是同伦结合的H空间．

设 k 是特征为 p (0 或素数)的完全域†．仅由一个元 $a \in A_n$ 生成的具有可换且结合的乘法的 Hopf 代数 A，分为多项式环† $k[a]$ ($p \neq 2$ 时，n 是偶数)及其商环† $k[a]/(a^2)$ ($p \neq 2$ 时，n 是奇数)和 $k[a]/(a^{p^f})$ (仅在 $p \neq 0$ 时)三类，称为**初等 Hopf 代数** (elementary Hopf algebra)．完全域 k 上的连通的、局部有限的、具有交换且结合的乘法的 Hopf 代数，与初等 Hopf 代数的张量积作为分次代数是同构的 (Borel 定理) ([2])．特别是，紧†、连通 Lie 群的特征 0 的域上的上同调环，是由奇数维的元生成的 Grassmann 代数†([1])．

【Steenrod 代数】 $\boldsymbol{Z}_p$ 上的 Steenrod 代数† A_p 是由 Steenrod 运算† $Sq^i (p=2)$，$\mathscr{P}^i (p>2)$ 以及 Бокштейн 运算† $\Delta_p (p>2)$ 生成的，是以合成为乘法的、连通的、局部有限的、结合的分次代数(但不可换)，但由 $\phi(Sq^n) = \sum Sq^i \otimes Sq^{n-i}$，$\phi(\mathscr{P}^n) = \sum \mathscr{P}^i \otimes \mathscr{P}^{n-i}$，$\phi(\Delta_p) = 1 \otimes \Delta_p + \Delta_p \otimes 1$，作成具有可换且结合的对偶乘法的 Hopf 代数．A_p 的对偶 A_p^* 是具有交换且结合的乘法的 Hopf 代数，在此应用上面的 Borel 定理可研究 A_p 的性质([3])．

在具有结合乘法与对偶乘法的 Hopf 代数 (A, φ, ϕ) 中，令 $c(1) = 1$，$c(a) = -a - \sum a'_i \cdot c(a''_i)$ (但 $\phi(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1 + \sum a'_i \otimes a''_i$) 时，$c: A \to A$ 是满足 $c\varphi = \varphi(c \otimes c)T$ 的线性映射，称为 A 的**共轭映射** (conjugation mapping)．若乘法或对偶乘法是交换的，则满足 $c^2 = 1$，c 成为一一映射．这个 c 在研究 Steenrod 代数中很有用([3]，[4])．

【参】 [1] H. Hopf, Über die Topologie der Gruppen mannigfaltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen, Ann. of Math. **42**(1941), 3—61; [2] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts, Ann. of Math., **57**(1953), 115—207; [3] J. Milnor, The Steenrod algebra and its dual, Ann. of Math., **67**(1958), 150—171; [4] J. Milnor-J. C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math., **81**(1965), 211—264.

同伦 [英 homotopy 法 homotopie 德 Homotopie 俄 гомотопия 日 ホモトピー] 如果从拓扑空间† X 到拓扑空间 Y 的连续映射族 f_t: $X \to Y$ ($t \in I = \{t | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$) 对于 t 也连续，也就是由 $F(x, t) = f_t(x)$ ($x \in X$, $t \in I$) 定义的从乘积空间 $X \times I$ 到 Y 的映射 F 是连续的，则把 f_t 及 F 称为一个**同伦**．这时就说 f_0 和 f_1 是**同伦的** (英 homotopic 德 homotop)，记作 $f_0 \simeq f_1: X \to Y$ 或简记作 $f_0 \simeq f_1$．同伦关系 $\simeq$ 是等价关系，由此关系所区分的各类$[f]$称为 f 的**同伦类** (homotopy class) 或**映射类** (mapping class)．从X到Y的映射的同伦类全体称为**同伦集** (homotopy set)，用 $\pi(X; Y)$ 或 $[X; Y]$ 表示．对于连续映射 $f, g \in Y^X$，存在 Y^X 上的函数 γ 满足：若 $f \simeq g$，则 $\gamma(f) = \gamma(g)$ (即 $\pi(X; Y)$ 上的函数 γ)，这种 γ 称为**同伦不变量** (homotopy invariant)．当X由一点 $*$ 构成时，把 $\pi(*; Y)$ 写作 $\pi_0(Y)$．当所有的映射均互相同伦时，即只有一个同伦类时，则用 $\pi(X; Y) = 0$ 表示．$\pi_0(Y) = 0$ 则表示Y是弧连通†空间．

这些概念有下述的推广．设 A_i 及 B_i ($i = 1, 2, \cdots$) 分别是X及Y的子空间，满足 $f(A_i) \subset B_i$ ($i = 1, 2, \cdots$)的 $f \in Y^X$ 的全体写作 $Y^X(A_1, A_2, \cdots; B_1, B_2, \cdots)$．如果同伦 f_t 对每个 t，$f_t \in Y^X(A_i; B_i)$，则把 f_t 称为相对于 A_i，B_i 的(**限制**)**同伦** (restricted homotopy) 或者从空间组 $(X, A_1, A_2, \cdots)$ 到空间组 $(Y, B_1, B_2, \cdots)$ 的同伦．同样可以定义记号 $f_0 \simeq f_1: (X, A_1, A_2, \cdots) \to (Y, B_1, B_2, \cdots)$ 及同伦集 $\pi(X, A_1, A_2, \cdots; Y, B_1, B_2, \cdots)$．

对于 $f\in Y^X(A_i, B_i)$ 与 $g\in Z^Y(B_i, C_i)$ 的合成 $g\circ f\in Z^X(A_i; C_i)$，假如 $f\simeq f'$，$g\simeq g'$ 则 $g\circ f\simeq g'\circ f'$. 因此可以定义 $[f]=\alpha\in\pi(X, A_i; Y, B_i)$ 和 $[g]=\beta\in\pi(Y, B_i; Z, C_i)$ 的**合成**(composition) $\beta\circ\alpha=[g\circ f]\in\pi(X, A_i; Z, C_i)$. 且由 $g_*[f]=[g\circ f]=f^*[g]$ 诱导两个映射

$g_*:\pi(X, A_i; Y, B_i)\to\pi(X, A_i; Z, C_i)$,

$f^*:\pi(Y, B_i; Z, C_i)\to\pi(X, A_i; Z, C_i)$.

如果 $f\simeq f'$，则 $f^*=f'^*$，如果 $g\simeq g'$，则 $g_*=g'_*$. 且 $(g\circ f)_*=g_*\circ f_*$，$(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$，$h^*\circ g_*=g_*\circ h^*$ 成立. 其中 $h\in\pi(W, D_i; X, A_i)$.

对于拓扑空间规定它的一点 $*$ 为**基点**(base point)，只考虑把基点映到基点的连续映射，称之为**具有基点的拓扑空间的范畴**(category of topological spaces with base points)，其中同伦也取为基点 $*$ 映到基点 $*$ 的映射，这种同伦集用 $\pi(;)_0$ 或 $[X; Y]_0$ 表示. $\pi(X, A_i; Y, B_i)_0=\pi(X, A_i, *; Y, B_i, *)$. 与常值映射：$X\to *\in Y$ 同伦的映射 f 称为**零伦**(homotopic to zero, null-homotopic)，用 $f\simeq 0$ 表示. $\pi(;)_0=0$ 意即所有映射均零伦. 设 S^0 为两点所成的集合，如果 $\pi(X; S^0)_0=0$，则 X 弧连通†.

对于同伦 $f_t: X\to Y$，f_t 在 X 的子空间 A 上的限制如果是恒等映射，即 $f_t(a)=f_0(a)$ $(a\in A, t\in I)$，则称 f_0，f_1 **相对于 A 同伦**(homotopic relative to A)，记作 $f_0\simeq f_1(\mathrm{rel}\,A)$.

如果对于所有 t，同伦 $f_t: X\to Y$ 都是到 Y 中的同胚，则 f_t 称为**合痕**(isotopy)，称为 f_0 **合痕**(isotopic)于 f_1 (→纽结). 不赋予这个条件的原来意义的同伦有时称为**自由同伦**(free homotopy).

同伦类的研究是拓扑学的重要课题之一，从 L. E. J. Brouwer, H. Hopf, W. Hurewicz, K. Borsuk, Л. С. Понтрягин, S. Eilenberg 等人开始，研究工作一直不断地蓬勃开展，但是还遗留许多没有解决的问题.

【映射空间】 连续映射 $f: X\to Y$ 全体的集合记作 Y^X，其中引入紧开拓扑†后所成的拓扑空间称为映射空间†. 特别把 $Y^I(0,1; *, *)$ $(*\in Y)$ 记作 $\Omega(Y)=\Omega(Y, *)$，称为 Y 的**闭路空间**(loop space). Y^X 中的两点 f, g 可用 Y^X 中的道路†连结与 $f\simeq g: X\to Y$ 是等价的. 因此 $\pi_0(Y^X)=\pi(X; Y)$，$\pi_0(Y^X(A_i, B_i))=\pi(X, A_i; Y, B_i)$.

【收缩核】 设 A 是拓扑空间 X 的子集，如果存在 f，$f\in A^X$，使得 f 在 A 上的限制 $f|A$ 是 A 的恒等映射，则 A 称为 X 的**收缩核**(retract)，f 称为**保核收缩**(retraction). 如果 A 是 X 的收缩核，则从 A 到任意拓扑空间的连续映射均可扩张成 X 的连续映射. 如果 A 是其某一邻域 $U(A)$ 的收缩核，则 A 称为 X 的**邻域收缩核**(neighbourhood retract) 或 **NR**. 如果距离空间 A 嵌入†任何一个距离空间 X 的闭集 A_0，A_0 就成为 X 的收缩核或者邻域收缩核，那么就把 A 分别称为**绝对收缩核**: **AR** (absolute retract) (例如 n 维单形，n 维 Euclid 空间) 或者**绝对邻域收缩核**: **ANR** (absolute neighbourhood retract). 如果保核收缩 f 同伦于 X (或 $U(A)$) 的恒等映射，则 A 称为 X 的**形变收缩核**(deformation retract)(或**邻域形变收缩核**). 如果这个同伦又是相对于 A 的同伦，则 A 称为 X 的**强形变收缩核**(strong deformation retract). 特别当 X 的一点 x_0 是 X 的(强)形变收缩核时，则称 X 是**可缩**(contractible)成点 x_0 的. 例如，多面体 P，紧 n 维拓扑流形†是 ANR，P 的子多面体 P_0 是 P 的适当的邻域的强形变收缩核. 且对于 X 的各点 x，可取 x 的适当邻域 U，使 U 是可缩时，则 X 称为**局部可缩的**(locally contractible).

【扩张性质】 设 X, Y 为拓扑空间，$A\subset X$，$f_0, f_1\in Y^X$，$g_t: A\to Y$ 为 $g_i=f_i|A$ $(i=0, 1)$ 的同伦. "g_t 能扩张成 X 的同伦 f_t" 等价于 "由 $F(x, i)=f_i(x)$，$F(a, t)=g_t(a)$ 定义的 $F:(X\times 0)\cup(A\times I)\cup(X\times 1)\to Y$ 能够扩张到 $X\times I$". 因此，$f_0\simeq f_1$ 成立与否的问题可以改写为子集上定义的连续映射在什么情形下可连续地扩张到整个集上的问题. 对于空间对 (X, A) $(A\subset X)$，已给 A 到任意拓扑空间 Y 的任意同伦 $g_t: A\to Y$，以及连续映射 $f_0: X\to Y$，如果 $f_0|A=g_0$ 成立则存在同伦 $f_t: X\to Y$，使 $f_t|A=g_t$，我们就说 (X, A) 具有**同伦扩张**

性质 (homotopy extension property). 这个性质等价于 $(X\times 0)\cup(A\times I)$ 是 $(X\times I)$的收缩核. 例如, 绝对邻域收缩核的对 (X, A) (其中 A在X中是闭的), 以及 CW 复形†及其子复形的对 $P\supset P_0$ 都有这个性质. 设已给从拓扑空间 Y 的子空间B 到拓扑空间A的连续映射 $h: B\to A$, 在直和† $A\cup Y$ 中, 把 $b\in B$ 和 $h(b)\in A$ 看成同一,这样得到的同化空间†记作 $A\cup_h Y$, 称为由 h 得到的**接着空间** (attaching space). 如果 (Y, B) 具有同伦扩张性质, 则 $(Y\times X, B\times X)$, $(A\cup_h Y, A)$ 也有这个性质. 当A为由一点$*$构成时记作 $\{*\}\cup_h Y = Y/B$, 称为**把 B 收缩** (shrink, pinch, smash) **成一点的空间**. 当 $Y=B\times I$, $B=B\times 0$ 时, $A\cup_h(B\times I)$ 称为 h 的**映射柱** (mapping cylinder), $(A\cup_h(B\times I))/(B\times 1)$称为 h 的**映射锥**(mapping cone). $h: B\to\{*\}$ 的映射柱称为B上的**锥** (cone), h 的映射锥称为 B 的**双角锥** (suspension).

【同伦型】 对于拓扑空间组 (X, A_i) 及 (Y, B_i), 如果存在 $f\in Y^X(A_i; B_i)$, $g\in X^Y(B_i; A_i)$,且 $g\circ f$ 和 $f\circ g$ 分别同伦于(X,A_i)及(Y, B_i)的恒等映射,则称 (X, A_i) 及 (Y, B_i)具有相同**同伦型** (homotopy type) 或**同伦等价**(homotopy equivalent), 且这种 f 和 g 称为**同伦等价映射** (homotopy equivalence). 对于同伦等价映射 f, f_* 及 f^* 是双射. 因此,在同伦论中把具有相同同伦型的空间组看成是同等的. 当A是X的形变收缩核时, A和X具有相同同伦型, A到X的单射和X到A的保核收缩是同伦等价映射. 可缩的空间和一点具有相同同伦型. 具有相同同伦型的空间有同构的同伦群†, (上)同调群†. $f\in Y^X$ 的映射柱 $Z_f = Y\cup_f(X\times I)$, 因为Y是 Z_f的形变收缩核, 故 Z_f与Y具有相同同伦型. 由于这个同伦等价, f 可以换成 $X\times 1$ 到 Z_f的单射. 假如拓扑空间X对应某个量, 而同伦等价的拓扑空间对应相同的量, 则这个量称为**同伦型不变量** (homotopy type invariant). 同伦型不变量是拓扑不变量†. 例如对于 X, $\pi(X; Y)$ 是同伦型不变量. 如果映射$f: X\to Y$诱导出各弧连通分支†的同伦群†之间的同构, f 就叫作**弱同伦等价映射** (weak homotopy equivalence). 同伦等价映射是弱同伦等价映射. 反之, 如果 X, Y 均为 CW 复形†, 则弱同伦等价映射也是同伦等价映射 (J. H. C. Whitehead).

以下我们考虑具有基点的拓扑空间的范畴. 拓扑空间 A, B 的**约化联接** (reduced join) 是 $A\times B$ 中把子集 $A\vee B=(A\times\{*\})\cup(\{*\}\times B)$ 缩成一点所得的空间,记作$A\wedge B$. $A\wedge S^1$ 称为A的 **(约化) 双角锥** ((reduced) suspension), 记作 SA. 连续取 n 回双角锥得到 **n 重约化双角锥**(n-fold reduced suspension). $CA = A\wedge I(I=[0, 1])$ 称为**约化锥** (reduced cone) (I 的基点设为 1). 对于连续映射$f: X\to Y$,把 CX 的底 (X) 的点 $(x, 0)$ 与 $f(x)\in Y$ 看成同一后得到的空间称为 f 的**约化映射锥** (reduced mapping cone), 记作 $C_f = Y\cup_f CX$. 映射 $f: Y\to X$ 与 $f': Y'\to X'$ 的**约化联接** (reduced join) $f\wedge f'$ 是由乘积映射 $f\times f': Y\times Y'\to X\times X'$ 诱导出来的映射 $f\wedge f': Y\wedge Y'\to X\wedge X'$. 特别 $f: Y\to X$ 与 $1: S^1\to S^1$ (恒等映射) 的约化联接写成 $Sf = f\wedge 1$ 称为 f 的**同纬映射** (suspension).

【Puppe 的正合序列】 对于 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$, $g\circ f\simeq 0$ 等价于 g 可扩张成从 C_f 到 Z 的连续映射. 换言之,序列

$$\pi(C_f; Z)_0 \xrightarrow{i^*} \pi(Y; Z)_0 \xrightarrow{f^*} \pi(X; Z)_0$$

是正合的†,即 $\mathrm{Im}\, i^* = \mathrm{Ker}\, f^* = f^{*-1}(0)$ ($i: Y\to C_f$ 是典范单射, 0 是常值映射的同伦类). 这系列的左方可以接上 $\pi(C_i; Z)_0 \xrightarrow{i'^*}$ (i' 是 C_f 到 C_i 的单射), 同样可以继续接上, 使得这个正合序列向左方无限延伸. 如果 X, Y 满足适当的条件(例如, CW 复形), 则 C_i 与X的约化双角锥 SX 具有相同的同伦型, i'^* 就和 $p^*: \pi(SX; Z)_0\to\pi(C_i; Z)_0$ 等价, 这里 p^* 是由把Y缩成一点的映射 $p: C_f\to SX$ 诱导出来的, 并且C_p与 SY 具有相同同伦型, 单射 $i_0: SY\to C_p$ 与 f 的同纬映射 $Sf: SY\to SX$ 等价. 由此得到下面的 **Puppe 的正合序列** (Puppe exact sequence):

$$\cdots\xrightarrow{Sp^*}\pi(SC_f; Z)_0\xrightarrow{Si^*}\pi(SY; Z)_0\xrightarrow{Sf^*}\pi(SX; Z)_0$$

$\xrightarrow{p^*}\pi(C_f;Z)_0\xrightarrow{i^*}\pi(Y;Z)_0\xrightarrow{f^*}\pi(X;Z)_0$.
在 Puppe 的正合序列中，如果用 CW 复形 X 的子 CW 复形 A 到 X 的单射 i 代替 f，则 $C_i=X\cup CA$ 与把 CA 缩成一点所得的空间 $C_i/CA=X/A$ 同伦等价，于是得到如下形式的正合序列：

$$\cdots\xrightarrow{Si^*}\pi(SA;Z)_0\xrightarrow{\delta^*}\pi(X/A;Z)_0$$
$$\xrightarrow{p^*}\pi(X;Z)_0\xrightarrow{i^*}\pi(A;Z)_0.$$

对于连续映射 $f:X\to Y$，考虑 X 和道路空间 Y^I 的乘积空间 $X\times Y^I$ 的子空间 $E_f=\{(x,\varphi)|f(x)=\varphi(0)\}$. 把 X 与 $\{(x,\varphi_x)|\varphi_x(I)=x\}$ 看作同一的，则 X 是 E_f 的形变收缩核. 若令 $p_1(x,\varphi)=\varphi(1)$，则 (E_f,p_1,Y) 是纤维空间†. 纤维 $T_f=p_1^{-1}(*)$ 称为 f 的**映射载**(mapping track). 利用覆盖同伦性质†，可得正合序列

$$\pi(W;T_f)_0\xrightarrow{p_*}\pi(W;X)_0\xrightarrow{f_*}\pi(W;Y)_0,$$
其中 $p(x,\varphi)=x$. 这个序列可无限向左方延伸 $\cdots\to\pi(W;\Omega Y)_0\xrightarrow{(\Omega f)_*}\pi(W;\Omega X)_0\xrightarrow{i_*}\pi(W;T_f)_0\xrightarrow{p_*}$，其中 i 是闭路空间 $\Omega(Y)$ 到 T_f 的单射，$\Omega f:\Omega X\to\Omega Y$ 是由 f 定义的闭路的对应.

【构成群的同伦集合】 $\pi(X;Y)_0$ 当 $X=SX'$ 或 $Y=\Omega Y'$ (或更一般 Y 是同伦结合的具有同伦逆的 H 空间†)时构成群. 在后面这种情形下，闭路的积导出 $\pi(X;\Omega Y')_0$ 的积. SX 由 $X\times I$ 的子集 $(X\times\dot I)\cup(\{*\}\times I)$ (其中 $\dot I=\{0,1\}$) 缩成一点所构成. SX 的点用 $(x,t)(x\in X,t\in I)$ 表示，对于 $g:SX\to Y$，定义 $\Omega_0 g:X\to\Omega Y$ 为 $\Omega_0 g(x)(t)=g(x,t)$，考查它们的同伦类，就得到同构对应 $\Omega_0:\pi(SX;Y)_0\cong\pi(X,\Omega Y)_0$. $f_*:\pi(SX;Y)_0\to\pi(SX;Y')_0$ 与 $\Omega f_*:\pi(X,\Omega Y)_0\to\pi(X,\Omega Y')_0$ 等价；$h^*:\pi(X',\Omega Y)_0\to\pi(X;\Omega Y)_0$ 与 $Sh^*:\pi(SX';Y)_0\to\pi(SX;Y)_0$ 等价. 它们都是同态对应.

设 S^n 为 n 维球面，$\pi_n(X)=\pi(S^n;X)_0$ 是 n 维同伦群†. 令 $\pi^n(X)=\pi(X;S^n)_0$. 如果 X 是维数 $\leqslant 2n-2$ 的 CW 复形，则 $\pi^n(X)$ 是与 $\pi(X;\Omega S^{n+1})_0$ 同构的上同伦群†(→同伦群). 设 K_n 是 (π,n) 型的 Eilenberg-MacLane 空间†，则可以看做 $K_n=\Omega K_{n+1}$，对于 CW 复形的对 (X,A)，$\pi(X/A;K_n)_0$ 与上同调群 $H^n(X,A;\pi)$ 一致. 对于无限正交群 O (无限酉群 U) 的分类空间† $B_O(B_U)$，$\pi(X/A;B_O)$ ($\pi(X/A;B_U)$) 可看做 KO 群 $KO(X,A)$ (K 群 $K(X,A)$).

【Hopf 的分类定理】 若把从 n 维多面体† K^n 到 n 维球面 S^n 的连续映射 f 的同伦类对应于由 f 诱导出来的 n 维同调群的同态 $f_*:H_n(K^n;\boldsymbol{R}_1)\to H_n(S^n;\boldsymbol{R}_1)\cong\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$，就得到双射 $\pi(K^n;S^n)\to\mathrm{Hom}(H_n(K^n,\boldsymbol{R}_1),\boldsymbol{R}_1)$，称为 **Hopf 分类定理**(Hopf's classification theorem) (Hopf, Comment. Math. Helv., **5**(1933)). 这个定理有如下的推广：首先把 $\mathrm{Hom}(H_n(K^n,\boldsymbol{R}_1),\boldsymbol{R}_1)$ 换成 n 维整系数上同调群 $H^n(K^n,\boldsymbol{Z})$ (H. Whitney). 其次把 S^n 换成 $(n-1)$ 连通†，n 单纯†的拓扑空间 (Hurewicz)，再把 K^n 换成 $\dim(K-K_0)\leqslant n$ 的 CW 复形的对 (K,K_0)，Hopf 分类定理就推广为一一对应：$\pi(K,K_0;Y,*)\to H^n(K,K_0,\pi_n(Y))$. 设由 Hurewicz 同构† $H_n(Y)\to\pi_n(Y)$ 给出的 $H^n(Y;\pi_n(Y))=\mathrm{Hom}(H_n(Y),\pi_n(Y))$ 的元素为 u_n (称为 Y 的基本类)，则 $\{f\}\to f^*(u_n)$ 就给出上述的一一对应。

设 K_0 为多面体 K 的子多面体，为了使连续映射 $f:K_0\to S^n$ 能够扩张到 $K_0\cup K^{n+1}$ (K^{n+1} 是 K 的 $n+1$ 维骨架)，其充分必要条件是 $f_*(\mathrm{Ker}\,i_*)=0$ 成立 ($f_*:H_n(K_0;\boldsymbol{R}_1)\to H_n(S^n;\boldsymbol{R}_1)$，$i_*:H_n(K_0;\boldsymbol{R}_1)\to H_n(K;\boldsymbol{R}_1)$，$i:K_0\subset K$ 是单射)(对应于 Hopf 分类定理的 **Hopf 扩张定理**(Hopf's extension theorem)). 一般从多面体到拓扑空间的映射的分类问题和扩张问题的研究都要有效地应用障碍理论(→障碍理论).

【本质映射】 设 f 为紧空间 X 到 n 维球面 S^n 的映射，关于与 f 同伦的任意映射 g，有 $g(X)=S^n$ 成立时，f 称为**本质的** (essential) 映射，否则称为**非本质的** (inessential) 映射. 非本质映射与“同伦于常值映射”二者是等价的.

【参】 [1] P. Aleksandrov-H. Hopf. Topologie I, Springer, 1935 (Chelsea, 1965); [2] 河田敬義-大口邦雄，位相幾何学，朝倉，1967; [3] P. J. Hilton, An introduction to homotopy theory, Cambridge Univ. Press, 1953; [4] 小松醇郎-中岡稔-戸田宏，位相幾何学 I，II，現代数学講座，共立出版，1957; [5] S. T. Hu(胡世桢), Homotopy theory, Academic Press, 1959; [6] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博，位相幾何学，I 岩波，1967, [7] D. Puppe, Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I, Math. Z., **69**(1958), 299—344; [8] J. F. Adams, Stable homotopy theory, Lecture notes in math. **3**, Springer, 第三版，1969.

基本群 [英 fundamental group, 法 groupe fondamental 德 Fundamentalgruppe 俄 фундаментальная группа, 日 基本群] 从线段 $I=\{t|0\leqslant t\leqslant 1\}$ 到拓扑空间† Y 的连续映射† f 称为**道路** (path)，$f(0)$，$f(1)$ 分别称为 f 的**始点** (initial point) 和**终点** (terminal point). 特别适合 $f(0)=f(1)=y_0$ 的道路称为以 y_0 为基点的**闭路** (loop) 或**闭道路** (closed path). 对于道路 f，由 $\bar{f}(t)=f(1-t)$ 定义的道路 $\bar{f}$，称为 f 的**逆道路** (inverse path). 道路 f 的终点和道路 g 的始点一致时，定义道路 F 为：$F(t)=f(2t)$，当 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$，$F(t)=g(2t-1)$，当 $\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1$，$F$ 称为 f，g 的**积** (product)，或 f，g 的联结道路，以 $f\cdot g$ 表示. 关于 0，1 ($\in I$) 的同伦† (即固定 0 和 1 的同伦) 把道路分成等价类，f 的类用 $[f]$ 表示，可以定义其逆 $[f]^{-1}=[\bar{f}]$，和积 $[f]\cdot[g]=[f\cdot g]$. 特别以 y_0 为基点的闭路类的集合总可以定义积而构成群 $\pi_1(Y,y_0)$，这个群称为 (关于 y_0 的) Y 的**基本群**或 **Poincaré 群** (Poincaré group) (H. Poincaré, 1895). 如果 Y 是弧连通†的，对任意两点 y_0，y_1，总有 $\pi_1(Y,y_0)\cong\pi_1(Y,y_1)$ 成立，即这个群的结构与基点的取法无关. 把它简记为 $\pi_1(Y)$. 连续映射 $\varphi:(Y,y_0)\to(Y',y_0')$ 由 $\varphi_*[f]=[\varphi\circ f]$ 诱导出同态 $\varphi_*:\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(Y',y_0')$，且对于映射的结合 $\varphi'\circ\varphi$，满足 $(\varphi'\circ\varphi)_*=\varphi'_*\circ\varphi_*$. 因此 $\pi_1(Y)$ 是 Y 的拓扑不变量†. 当 $\pi_1(Y)$ 只由一个类 (常值道路的类) 构成时，Y 称为**单连通的** (simply connected). 例如，胞腔，球面 $S^n(n\geqslant 2)$ 都是单连通的. 著名的 Poincaré 猜想† 是"单连通的三维紧流形† 和三维球面同胚". **van Kampen 定理**：多面体 P 及其子多面体 P_1，P_2，当 $P_1\cap P_2$ 是弧连通且 $P=P_1\cup P_2$ 时，$\pi_1(P)$ 与 $\pi_1(P_1)$ 和 $\pi_1(P_2)$ 的融和积† 同构，融和积是 $\pi_1(P_1)$ 和 $\pi_1(P_2)$ 的自由积†，附加关系"$\pi_1(P_1\cap P_2)$ 的各元素在 $\pi_1(P_1)$ 与 $\pi_1(P_2)$ 的像等价" 所得的群. 积空间的基本群是每个空间基本群的直积. 有以任意群为基本群的 CW 复形†. 当 Y 是弧连通时，基本群 $\pi_1=\pi_1(Y)$ 的 Abel 化 $\pi_1/[\pi_1,\pi_1]$ 与一维整系数同调群† $H_1(Y)$ 同构. 例如圆周 S^1 及其直积 (环面群 I^n) 的基本群分别是无限循环群及秩为 n 的自由 Abel 群；一维 CW 复形的基本群是自由群；亏格† 为 p 的可定向二维闭曲面的基本群是具有 $2p$ 个生成元 $\{a_1,\cdots,a_p,b_1,\cdots,b_p\}$ 及 1 个关系式 $\prod_k a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}=1$ 的群. 基本群也可以如下定义：取圆周 S^1 上的固定点 x_0，连续映射 $f:(S^1,x_0)\to(Y,y_0)$ 的映射类的集合称为基本群.

拓广基本群的定义，用 I^n，S^n 分别取代 I，S^1，就得出 n 维同伦群(→同伦群，覆盖空间).

[参] [1] H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (Chelsea, 1965); [2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; [3] S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton Univ. Press, 1949; [4] W. S. Massey, Algebraic topology, an introduction, Harcourt, Brace & World, 1967.

覆盖空间 [英 covering space 法 espace de revêtement 德 Überlagerungsraum 俄 накрывающее пространство, пространство наложения 日 被覆空間] 从弧连通†拓扑空间 $\tilde{Y}$ 到拓扑空间 Y 上的连续映射 $p:\tilde{Y}\to Y$，满足下列条件 C) 时，称为**覆盖映射** (covering mapping)：C) 对 Y 的各点，都可适当选取其开邻域 V，使得 p 把 $p^{-1}(V)$ 的每个连通分支† 同胚地映射到 V 上.

如果存在这样的 p，$\tilde{Y}$ 就称为 Y 的**覆盖空间**，$(\tilde{Y},p,Y)$ 简称为**覆盖** (covering). 特别对于微分流形 Y，如果 $\tilde{Y}$ 是微分流形，且 p 是可微映射，则 $\tilde{Y}$ 称为 Y 的**覆盖(微分)流形** (covering (differentiable) manifold). (在 Riemann 面† 上，存在着 C) 不成立的点——分支点时，也可

以研究覆盖面† .这时，除掉了分支点以后的覆盖空间就是这种意义下的覆盖空间.)

对于Y的任意道路$w:I\to Y(I=[0,1])$，满足$p\circ\tilde{w}=w$的$\tilde{Y}$的道路$\tilde{w}:I\to\tilde{Y}$，当给定$\tilde{w}(1)\in p^{-1}(w(1))$时唯一确定. 因此，令$\tilde{w}(1)$对应于$\tilde{w}(0)$就得到一一映射$w_{\#}: p^{-1}(w(1))\approx p^{-1}(w(0))$. 从而对于每点$y\in Y$，$p^{-1}(y)$彼此相互之间存在着一一对应. $(\tilde{Y}, p, Y, p^{-1}(y_0))$是以具离散拓扑的$p^{-1}(y_0)$为纤维的局部平凡的纤维空间†. 如果$p^{-1}(y_0)$的基数为有限$n$时，$(\tilde{Y}, p, Y)$称为**$n$重覆盖**($n$-fold covering). 这时对于以$y_0$为基点的$Y$的闭路†$w:(I, \dot{I})\to(Y, y_0)$，$w_{\#}:p^{-1}(y_0)\approx p^{-1}(y_0)$是$n$个元素的置换†，因此通过对应$w\to w_{\#}$得到$Y$的基本群†$\pi_1(Y)=\pi_1(Y, y_0)$到$n$次对称群†$\mathfrak{S}_n$的同态，$\pi_1(Y)$的像成为某个$n$次置换群$\mathfrak{M}$. $\mathfrak{M}$称为这个n重覆盖的**单演群**(monodromy group).

两个覆盖$(\tilde{Y}_i, p_i, Y)(i=1,2)$称为**等价**(equivalent)，如果存在同胚$\varphi:\tilde{Y}_1\approx\tilde{Y}_2$，使$p_2\circ\varphi=p_1$. 这样的$\varphi$称为等价映射. 特别从覆盖$(\tilde{Y}, p, Y)$到自身的等价映射$\varphi:\tilde{Y}\approx\tilde{Y}$称为**覆盖变换**(covering transformation)，所有覆盖变换π以映射的合成为乘法构成群. π称为$\tilde{Y}$的**覆盖变换群** (covering transformation group). $(\tilde{Y}, p, Y)$称为**正则覆盖**(regular covering)，如果对于每点$y\in Y$与$\tilde{y}_1, \tilde{y}_2\in p^{-1}(y)$，存在(唯一的)覆盖变换把$\tilde{y}_1$变到$\tilde{y}_2$. 在这情形下，轨道空间†$\tilde{Y}/\pi$与$Y$同胚，$(\tilde{Y}, p, Y, \pi)$是主纤维丛†，且单演群$\mathfrak{M}$与$\pi$同构.

对于覆盖$(\tilde{Y}, p, Y)$，如果$\tilde{Y}$及Y是拓扑群，p是同态，就把$\tilde{Y}$称作Y的**覆盖群**(covering group). 这时$(\tilde{Y}, p, Y)$是正则覆盖，其覆盖变换群与$p^{-1}(e)$(e为Y的单位元)同构，且$p^{-1}(e)$是含在$\tilde{Y}$的中心的离散子群 (→拓扑群 [覆盖群]).

【万有覆盖空间】 覆盖的同伦群†之间有下面的关系成立：当$i\geqslant 2$时，$p_*:\pi_i(\tilde{Y})\cong\pi_i(Y)$是同构，$p_*:\pi_1(\tilde{Y})\to\pi_1(Y)$是单射，$\pi_1(Y)/p_*(\pi_1(\tilde{Y}))$与$p^{-1}(y_0)(y_0\in Y)$一一对应. 如果$\tilde{Y}$单连通†，就称$\tilde{Y}$为$Y$的**万有覆盖空间** (universal covering space)，且$\tilde{Y}$为Y的覆盖群时，称为**万有覆盖群** (universal covering group).

当Y为局部弧连通†时，$(\tilde{Y}, p, Y)$是正则覆盖的充分必要条件是$p_*(\pi_1(\tilde{Y}))$是$\pi_1(Y)$的正规子群，且Y的万有覆盖空间是Y的任意的覆盖空间的覆盖空间. 如果Y是拓扑群，任意的覆盖空间除同构外可唯一地定义积而构成覆盖群.

如果Y弧连通、局部弧连通，且局部单连通†，则下述的覆盖分类定理成立：Y的覆盖的等价类的集合与基本群$\pi_1(Y)$的子群的共轭类全体的集合一一对应，这个对应是把覆盖$(\tilde{Y}, p, Y)$对应于$p_*(\pi_1(\tilde{Y}))$的共轭子群类. 特别对于这种Y，存在万有覆盖空间$\tilde{Y}$(除同胚外是唯一的)，且如Y是拓扑群，则$\tilde{Y}$成为万有覆盖群(除同构外是唯一的). 现在定义$\tilde{Y}$如下：在以一点$y_0\in Y$为始点的道路空间†$\Omega(Y; y_0, Y)$中，定义两条道路$w_0, w_1:(I, 0)\to(Y, y_0)$等价，如果存在同伦†$w_t:(I, 0)\to(Y, y_0)$使$w_t(1)=w_0(1)(0\leqslant t\leqslant 1)$. 在此等价关系之下$\Omega(Y; y_0, Y)$的同化空间†设为$\tilde{Y}$，若$p:\tilde{Y}\to Y$是把道路对应于其终点的映射，则$(\tilde{Y}, p, Y)$是万有覆盖.

设$(\tilde{Y}, p, Y)$为正则覆盖，π为其覆盖变换群，则存在局部平凡的纤维空间†$(Y', q, B, \tilde{Y})$，使得Y'与Y具有相同的(上)同调群†，B为Eilenberg-MacLane 空间†$K(\pi, 1)$. 这纤维空间的(上)同调谱序列†就称为正则覆盖的(上)同调谱序列. 其E_∞是与奇异(上)同调群†$H(Y)$相伴的分次模，E_2是群π的(上)同调群†$H(\pi; H(\tilde{Y}))$ (π通过覆盖变换所诱导的同态作用在系数群$H(\tilde{Y})$上(→纤维空间)).

对于任意群π，存在正则覆盖(E_π, p, B_π)，以π为覆盖变换群，且E_π是可缩的†，B_π是Eilenberg-MacLane 空间$K(\pi, 1)$. 对于无限循环群$\boldsymbol{Z}$，$B_{\boldsymbol{Z}}$可取为S^1(一维球面)，对于有限循环群$\boldsymbol{Z}_k$，$B_{\boldsymbol{Z}_k}$可取为如下的无限维透镜空间.

【透镜空间】 设k为正整数，$l_1, \cdots, l_n$为与k互素的n个整数. 复$n+1$维线性空间$\boldsymbol{C}^{n+1}$中的单位球面$S^{2n+1}=\{(z_0, \cdots, z_n)\in$

$C^{n+1}||z_0|^2+\cdots+|z_n|^2=1\}$ 的旋转 γ 如下式定义：$\gamma(z_0,z_1,\cdots,z_n)=(z_0\exp 2\pi i/k, z_1\exp 2\pi l_1 i/k,\cdots,z_n\exp 2\pi l_n i/k)$. 这时 γ 生成循环群 Z_k，轨道空间 $S^{2n+1}/Z_k=L(k;l_1,\cdots,l_n)$ 称为**透镜空间** (lens space). 这是可定向的 $2n+1$ 维微分流形†. 令 $n=\infty$ 就定义了**无限维透镜空间** (infinite lens space) $L^\infty(k)=L(k;1,\cdots,1,\cdots)$. 无限维球面 S^∞ 是 $L^\infty(k)$ 的 k 重覆盖空间，$L^\infty(k)=B_{Z_k}=K(Z_k,1)$. 其上同调环† 如下:

i) 整系数情形: $H^{2i-1}(L^\infty(k))=0$, $H^{2i}(L^\infty(k))=Z_k\ (i>0)$, $2i$ 维和 $2j$ 维生成元的上积†是 $2(i+j)$ 维的生成元.

ii) $k=pk'$ (p 为素数) 情形: 当 $p\neq 2$ 或 $p=2$ 且 k' 是偶数时, $H^*(L^\infty(k);Z_p)=\wedge(e_1)\otimes Z_p[e_2]$; $p=2$ 且 k' 为奇数时, $H^*(L^\infty(k),Z_2)=Z_2[e_1]$, ($e_i$ 为 i 维元素). 此处 $\wedge$ 表示 Z_p 上的外积代数†, $Z_p[\ ]$ 表示 Z_p 上多项式环†.

两个透镜空间 $L(k;l_1,\cdots,l_n)$ 和 $L(k';l'_1,\cdots,l'_n)$ 同胚的必要条件是 $k=k'$ 且存在与 k 互素的整数 m, 使得

$$l_1\cdots l_n\equiv\pm m^{n+1}l'_1\cdots l'_n \pmod k$$

([4]). 当 $n=1$ 时, 这个条件是 $L(k;l_1)$ 与 $L(k';l'_1)$ 具有相同的同伦型†的充分必要条件([5]). 且 $L(k;l)$ 与 $L(k';l')$ 同胚的充分必要条件是 $k=k'$, $l\equiv\pm l'^{\pm1}\pmod k$. (充分性→[1], 必要性可从三维组合流形的主猜想†成立, 以及当多面体† $L(k;l)$ 与 $L(k';l')$ 具有同构的重分时上述条件中的公式成立([6])推出.)

【参】 [1] H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (Chelsea, 1965); [2] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; [3] S.-T. Hu (胡世桢), Homotopy theory, Academic Press, 1959; [4] S. Eilenberg-S. MacLane, Homology of spaces with operators II, Trans. Amer. Math. Soc., 65(1949), 49—99; [5] J. H. C. Whitehead, On incidence matrices, nuclei and homotopy types, Ann. of Math., 42(1941), 1197—1239; [6] K. Reidemeister, Homotopieringe und Linsenräume, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11(1935), 102—109; [7] 河田敬義-大口邦雄, 位相幾何学, 朝倉, 1967; [8] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博, 位相幾何学I, 岩波, 1967; [9] W. S. Massey, Algebraic topology; An introduction, Harcourt, Brace & World, 1967.

纽结 [英 knot 法 noeud 德 Knoten, 俄 узел 日 結び系] 已给两个互相同胚的拓扑空间 X_1, X_2, 以及它们中间的互相同胚的子集 A_1, A_2, 是否存在同胚 $f:X_1\to X_2$ 使得 $f(A_1)=A_2$? 这个问题一般称为**安置问题** (placement problem). 纽结问题是这个问题的特殊情形, 也就是三维 Euclid. 空间 R^3 中的简单闭曲线 K 称为**纽结**. 假如存在 R^3 的同胚使两个纽结 K_1 与 K_2 从一个映射到另一个, 则这两个纽结称为**等价** (equivalent). 也经常用三维球面 S^3 来代替 R^3. 用这个等价关系把纽结分类为**纽结型** (knot type).

取 R^3 的坐标系 (x,y,z), 用 $x^2+y^2=1$, $z=0$ 表示的纽结及其纽结型叫作**平凡的** (trivial)或者**不打结的**(unknotted), 不是这样的纽结就称为**打结的**(knotted). 可用 R^3 中的多边形来表示的纽结及其纽结型称为**驯顺的** (tame), 否则称为**野生的** (wild). 对于可用多边形表现的纽结 K, 我们可取 R^3 的平面及 R^3 到这平面的射影 $\mathfrak{P}$, 使得 i) $\mathfrak{P}K$ 的多重点只限于二重点且只有有限个; ii) K 的顶点的射影不是 $\mathfrak{P}K$ 的二重点, 这样就把 K 映到平面上只有有限个二重点的闭曲线. $\mathfrak{P}K$ 称为**纽结射影** (knot projection). 这时称 K 处于**正则位置** (regular position). 如果被投射平面是 $z=0$, K 中对应 $\mathfrak{P}K$ 的二重点的点在 z 方向坐标大的点称为**上交叉点** (overcrossing point), 坐标小的点称为**下交叉点** (undercrossing point). 按固定方向沿 K 移动进行纽结射影时, 如果纽结的上交叉点和下交叉点交互出现, 纽结就称为**交代的** (alternating).

对于空间 R^3 中的纽结 K_1 及 K_2, 假如存在 R^3 的合痕† $\{h_t\}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ (其中 $h_t:R^3\to R^3$ 都是不改变定向的同胚, h_0 是恒等映射), 使得 $h_1(K_1)=K_2$, 则 K_1, K_2 称为有相同的**合痕型** (isotopy type). 当 K_1 与 K_2 的合痕型相同, 则纽结 K_1 可以通过 R^3 的不改变定向的同胚映到 K_2, 反过来也一样. 从而 K_1 与 K_2 等价. 假如纽结 K 可以通过 R^3 的改变定向的同胚映到自身

则称为**双向的**(amphicheiral)．又如纽结K可用$\boldsymbol{R}^3$的不改变定向的同胚h映到自身，且$h|K$与K的定向相反，则K称为**可逆的**(invertible)．

驯顺的纽结K总是可定向曲面的边缘(H. Seifert, Math. Ann., **110**(1934))．这种曲面的亏格†的最小值称为K的**亏格**(genus)．C. D. Papakyriakopoulos 应用 Dehn 引理†及球面定理†证明$\pi_i(S^3-K)=0(i\geqslant 2)$，且只当$\pi_1(S^3-K)=\boldsymbol{Z}$时，$K$才是不打结的(Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **66**(1957))．

由下面所述的纽结型不变量可得到二重点的个数不超过9个时的纽结型的分类，称为 **Alexander-Briggs 的分类**(Alexander-Briggs classification)，在[1]中列出了表(→公式7)．

设两个纽结K_1,K_2，处于互不缠绕的位置，则它们可通过小弧的端点互相联结起来仍成一纽结，称之为纽结的结合(图1)．以这种结合为乘法，纽结型成为交换半群†．且任意的纽结型能够唯一表示成有限个素纽结型(即它不能表示为不打结的纽结型的积)的结合(H. Schubert, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss., **3**(1949))．

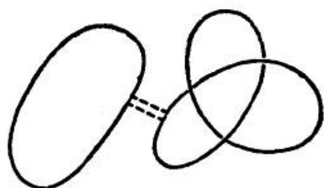


图　1

二十世纪三十年代之前，纽结理论主要是以美国的 J. W. Alexander 及德国的 K. Reidemeister, Seifert 为中心进行研究，在四十年代几乎没有什么进展．后来美国以 R. H. Fox 为中心进行研究([5])以及日本以寺阪英孝为中心，本間竜雄、樹下真一、村杉邦男等人作出了许多贡献(→[6])．

【纽结群】　设K为纽结，$\boldsymbol{R}^3-K$的基本群† $G=\pi_1(\boldsymbol{R}^3-K)$称为$K$的**纽结群**(knot group)．取用多边形表现的纽结K，造其正则射影．一般具有n个二重点，则K由n个下交叉点分成n个弧．任意给K一个定向，关于这个定向按左手系绕第i个弧一周的闭道路设为x_i．以$x_1,\cdots,x_n$为生成元，以每个二重点按图2决定关系r_j，则$G=(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_n)$就是$K$的纽结群．因为$r_1,\cdots,r_n$其中任何一个均可由其余$n-1$个得出，所以$G$可表示为$(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_{n-1})$，称为$G$的 **Wirtinger 表示**(Wirtinger presentation)．设G的换位子群†是G'，则G/G'是无限循环群$\boldsymbol{Z}$．纽结群是纽结型的不变量，但具有同构的纽结群的两个纽结并不一定等价．

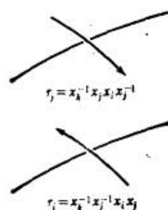


图　2

【Alexander 矩阵，Alexander 多项式】　设纽结K的纽结群G的 Wirtinger 表示为$(x_1,\cdots,x_n;r_1,\cdots,r_m)$，由记号$x_1,\cdots,x_n$所生成的自由群†为$F$，设$\varphi:F\to G$，$\psi:G\to H=G/G'$为射影．它们可分别扩张成整数群环之间的同态$\varphi:\boldsymbol{Z}[F]\to\boldsymbol{Z}[G]$及$\psi:\boldsymbol{Z}[G]\to\boldsymbol{Z}[H]$．这样一来，由同态$\psi\circ\varphi:\boldsymbol{Z}[F]\to\boldsymbol{Z}[H]$可得出$\boldsymbol{Z}[H]$的矩阵

$$\left(\frac{\partial(r_1,\cdots,r_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right)^{\psi\varphi}=\begin{pmatrix}\partial r_1/\partial x_1\cdots\partial r_1/\partial x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \partial r_m/\partial x_1\cdots\partial r_m/\partial x_n\end{pmatrix}^{\psi\cdot\varphi}.$$

其中$\partial r_i/\partial x_j$是$r_i$的**自由导数**(free derivative)，按下面的规则来计算：

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k}=\delta_{jk},\ \frac{\partial x_k^{-1}}{\partial x_k}=-x_k^{-1},$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_k}=\frac{\partial u}{\partial x_k}+u\frac{\partial v}{\partial x_k}$$

(Fox[6])．这个矩阵称为纽结K的 **Alexander 矩阵**(Alexander matrix)．由 Alexander 矩阵的$(n-1)$次子式所生成的$\boldsymbol{Z}[H]$的理想是主理

想，称为K的 Alexander 理想. 因为 $H \cong \boldsymbol{Z}$，故能用 mt^n $(m, n \in \boldsymbol{Z})$ 表示 $\boldsymbol{Z}[H]$ 的元素. K的 Alexander 主理想的生成元 $\Delta(t)$ 称为纽结K的 **Alexander 多项式** (Alexander polynomial). K的 Alexander 矩阵的初等因子，特别是 $\Delta(t)$ 是K的纽结型不变量. $\Delta(t)$ 除了差一个 $\pm t^k$ 的因子外，由K唯一决定，并且满足下列性质：1) $\Delta(1) = \pm 1$，2) $\Delta\left(\frac{1}{t}\right) = t^k\Delta(t)$. 反之满足上面 1), 2) 的任意整系数多项式是某个纽结的 Alexander 多项式. 例如图 3 中的**三叶纽结** (cloverleaf knot) K的纽结群是

$$G = (a, b;\ aba(bab)^{-1}),$$

K的 Alexander 矩阵是 $(1 - t + t^2, -1 + t - t^2)$，$K$的 Alexander 多项式是 $\Delta(t) = 1 - t + t^2$. 互为镜象的三叶纽结具有相同的纽结群，但其合痕型不相同 (M. Dehn, 1914).

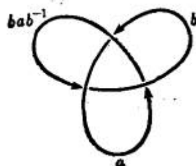


图 3

【纽结的覆盖空间】 对应于射影 $\psi: G \to \boldsymbol{Z}$ 与 $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}_g$ (g 阶循环群) 的合成 $G \to \boldsymbol{Z}_g$ 的核可得 $S^3 - K$ 上的 g 重覆盖空间† $\Sigma_g - \Lambda_g$. 把它与K适当的粘合可得在K上具有分歧点的 S^3 上的覆盖空间 Σ_g. 一维同调群 $H_1(\Sigma_g - \Lambda_g)$ 是 $H_1(\Sigma_g)$ 与 $\boldsymbol{Z}$ 两群的直和，$H_1(\Sigma_g)$ 的阶数 $\theta = \prod_{j=0}^{g-1} \Delta(\omega^j)$，式中 ω 是 1 的 g 次原根. 如果 $H_1(\Sigma_g)$ 是无限群，则 Σ_g 的 Betti 数† 是 $\Delta(t) = 0$ 的根的个数. 如果 $H_1(\Sigma_g)$ 是有限群，则 $\pi_1(\Sigma_g - \Lambda_g)$ 模其换位子群的商群与 $\boldsymbol{Z}$ 同构. 用和以前同样的办法对于 $\Sigma_g - \Lambda_g$，决定 Alexander 多项式 $\tilde{\Delta}(\tau)$，$\tilde{\Delta}(\tau) = \prod_{j=0}^{g-1} \Delta(\omega^j\tau)$，式中 $\tau = t^g$.

Seifert 更仔细地研究了覆盖空间 (Math. Ann., **110**(1934)) 如下. 他用可定向曲面 $\mathfrak{F}$ 张在亏格为 h 的纽结K上，取 $\mathfrak{F}$ 的正截口† $a_1, \cdots, a_{2h-1}, a_{2h}$，把 $\mathfrak{F}$ 变形成一个附着以 a_i 为中心的细带的圆盘，然后照图 4 那样把挠曲校直，右端的曲面称为 **Seifert 曲面** (Seifert surface). 在这样的 Seifert 曲面上，以 a_j 为中心的带穿过以 a_i 为中心的带的代数数目 (从左到右为正) 取为 v_{ij}，于是定义 $2h \times 2h$ 矩阵 $V = (v_{ij})$. 又 a_i 及 a_j 在 $\mathfrak{F}$ 中的交叉数 $I(a_i, a_j)$ 也构成 $2h \times 2h$ 矩阵 $I^* = (I(a_i, a_j))$. 令整系数矩阵 $\Gamma = VI^*$，且 $F(t) = I + (t-1)\Gamma$ (I 为单位矩阵)，则可证明K的 Alexander 多项式 $\Delta(t) = \det F(t)$.

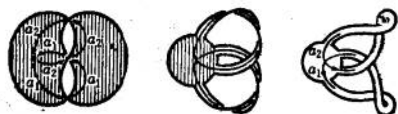


图 4

令 $F_g = \Gamma^g - (\Gamma - I)^g$，则 $2h \times 2h$ 矩阵 F_g 是 $H_1(\Sigma_g)$ 的关系矩阵. 且 Σ_g 是三维紧的可定向流形. $H_1(\Sigma_g)$ 的一维挠群† 的 **自环绕数** (self-linking coefficient) 可如下决定：设 a, b 为一维挠闭链，存在二维链 A 使其边缘为 ma，其中 m 是整数. 那么 a 与 b 的自环绕数就是 $L(a, b) \equiv \left(\frac{1}{m}\right) I(A, b) \pmod 1$.

把 $H_1(\Sigma_g)$ 的一维挠群表为素数幂阶循环群的直和，固定阶数 $p^c (p \neq 2)$，设 p^c 阶循环群的生成元为 $g_1, \cdots, g_r$. 作 r 阶整系数矩阵 $A = p^c(L(g_i, g_j))$，如果 $\det A \pmod p$ 是二次剩余†，则令 $((\det A)/p) = 1$，如果 $\det A \pmod p$ 是非二次剩余，则令 $((\det A)/p) = -1$，那么 $((\det A)/p)$ 这个数值是K的纽结型不变量，称为 **Seifert 不变量** (Seifert invariant).

在纽结K的射影图中，如图 5 所示划斜线的区域设为 $X_0, \cdots, X_n$ (X_0 代表无界的区域)，令 $e_{ij} = \Sigma\eta(C)$，C 表示 $\bar{X}_i$ 和 $\bar{X}_j$ 两闭区域相交的一个二重点，$\eta(C)$ 取 $+1$ 或 -1 如图 6 所示. 令 $\hat{f}(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i<j} e_{ij}(x_i -$

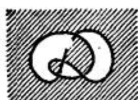


图 5

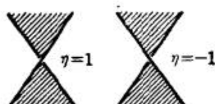


图 6

$x_j)^2$, $f(x_1, \cdots, x_n) = \hat{f}(0, x_1, \cdots, x_n)$, 称为和图 5 对应的二次形式 (L. Goeritz, 1933). 令 $a_{ij} = -e_{ij}(i \neq j)$, $a_{ii} = \sum_{j \neq i} e_{ij}$, 则 $\hat{f}(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j$. 纽结的 $g = 2$ 时, 矩阵 $A = (a_{ij})$ 就是 Σ_2 的一维同调群 $H_1(\Sigma_2)$ 的关系矩阵, 且 A^{-1}(mod 1) 表示自环绕数矩阵,能够有力地判定K的双向性.

由上可见, 凡是现在能够用图计算的纽结型不变量都可以用矩阵 Γ 求出来.

【辫】 **辫** (英 braid 法 tresse 德 Zopf) 的理论是研究纽结的辅助工具. n 次辫是如图 7 的图形,矩形 P 称为**辫框**,在 P 的一对对边 g_1, g_2 分别取等间隔的点列 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 及 $B_1, B_2, \cdots, B_n$. 设 $A_i \to B_{k_i}$ 是这两套点列之间的一个一一对应. 在空间内用无重点的折线 l_i 把 A_i 和 B_{k_i} 连结起来, 使 $l_i, l_j (i \neq j)$ 不相交,且 l_i 到 P 的平面上的射影 l'_i 落在 P 中 g_1 与 g_2 之间, 并且与 g_1, g_2 平行的任意直线 g 和每条 l'_j 只相交一次. 最后 l'_i, $l'_j(i \neq j)$ 的交点是有限个,而且每个交点的高度彼此不相同.

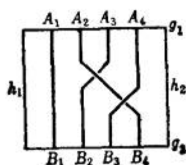


图 7

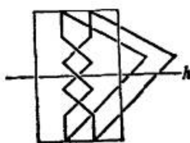


图 8

在 $\boldsymbol{R}^3$ 中的两条辫 $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ 称为**合痕** (isotopic) $\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}_2$, 如果存在 $\boldsymbol{R}^3$ 到自身上的映射,把 $\mathfrak{b}_1$ 映到 $\mathfrak{b}_2$, 且在包含 $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ 的大球的外面是恒等映射. 由这种合痕关系可把辫分成等价类.

在辫框之外取和 h_1, h_2 相垂直的直线 h. 象图 8 那样,把 A_i, B_i 用 Λ 形的折线通过框外连接得到的图形去掉框后就称为**闭辫** (closed braid). 一般来说,闭辫可以分成几个多边形(纽结),而任意的纽结能够变形成与之等价的闭辫.

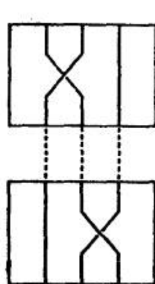


图 9

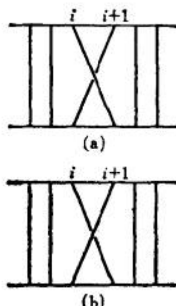


图 10

两条辫 $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ 的积 $\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2$ 可以如图 9 作出;在 $\mathfrak{b}_1$ 之下连接 $\mathfrak{b}_2$, 然后去掉连接的边得到. 显然, 如果 $\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}'_1$, $\mathfrak{b}_2 \approx \mathfrak{b}'_2$, 则 $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2 \approx \mathfrak{b}'_1\mathfrak{b}'_2$. 由此可定义 n 次辫的等价类之积为$[\mathfrak{b}_1][\mathfrak{b}_2] = [\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2]$. 由此定义, 所有的 $[\mathfrak{b}]$ 构成群 $\mathfrak{B}_n$, 称为 n 次**辫群** (braid group). 如图 10 (a) 所示, $\mathfrak{B}_n$ 由辫的等价类 $\sigma_i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 生成 (σ_i^{-1} 如图 10 (b) 所示). 为了看出这点,只要把 g 看成由 g_1 到 g_2 的运动就行了. 且 $\{\sigma_i\}$ 之间的基本关系† 是 $S_{ji} = 1$ (此处 $S_{ji} = \sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j\sigma_i$ ($|j - i| \geqslant 2$; $= \sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}\sigma_j^{-1}\sigma_i\sigma_j\sigma_i$($|i - j| = 1$)).

由于已给的辫决定 σ_i 的幂乘积, 所以 "判定两条辫等价的问题" 与 "判定两个幂乘积在 $\mathfrak{B}_n$ 中表示同一元素的问题" 即 $\mathfrak{B}_n$ 中的字的问题† 是等价的问题. 并且 "判定两条闭辫等价问题" 与 "$\mathfrak{B}_n$ 中的变换问题†" 是等价的问题 (→自由群).

辫的理论以及 $\mathfrak{B}_n$ 内字的问题的解决是由 E. Artin (Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1926) 所创始,并由 Artin (Ann. of Math., **48** (1947)) 及 F. Bohnenblust (Ann. of Math., **48** (1947)) 所发展. 其中后者的主要结果是通过对 $\mathfrak{B}_n$ 进行纯代数的,自由群论的研究给出 $\mathfrak{B}_n$ 的元素的标准型,以及把 $\mathfrak{B}_n$ 表现成某自由群的自同构† 群.

另外,三维 Euclid 空间中几个圆周相互缠

绕的方式或者图的安置问题也可以同样处理([7]).

【高维纽结】 纽结问题，即 $\boldsymbol{R}^3$ 中简单闭曲线的安置问题，可推广成 p 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^p$ (或 p 维球面 S^p) 中 q 维球面的安置问题.

下面只以组合流形†及其间的分段线性的拓扑映射为对象，对于其他范畴也可以得到类似的理论.

我们用 Δ^n 表示 n 维单形,但 Δ^n 取为 Δ^{n+1} 的面单形. 设 S^q 为 S^p 的子复形,(S^p, S^q) $(p>q)$ 称为 (p, q) **球对**(sphere pair). q 维胞腔 B^q 是 B^p 的子复形,当 B^q 的边缘 $\dot{B}^q$ 包含在 $\dot{B}^p$ 中时,(B^p, B^q) 称为 (p, q) **胞对** (ball pair). 两对 $X=(X^p, X^q)$, $Y=(Y^p, Y^q)$ 称为同胚(homeomorphic)，如果存在同胚 $h:X^p \to Y^p$, 使得 $h(X^q)=Y^q$. (p, q) 胞对,(p, q) 球对在这个等价关系下分成等价类. (p, q) 胞对 (B^p, B^q) 与标准对 $\Gamma^{p,q}=(\Delta^p, \Delta^q)$ 同胚时称为**不打结**(unknotted, flat). 又(p, q)球对(S^p, S^q)同胚于$(\partial\Delta^{p+1}, \partial\Delta^{q+1})$时称为不打结 (unknotted, flat). E. C. Zeeman 证明了当 $p-q \geqslant 3$ 时,(p, q)胞对和(p, q)球对都是不打结的 (Ann. of Math., **78**(1963)). J. Stallings 也得到了类似的结果 (Ann. of Math., **77** (1963)).

【参】 [1] K. Reidemeister, Knotentheorie, Erg. d. Math., Springer, 1932 (Chelsea, 1948); [2] H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (Chelsea, 1965); [3] 弥永昌吉, 自由群論, 岩波 1942; [4] H. Seifert-W. Threlfall, Old and new results on knots, Canad. J. Math., **2**(1950), 1—15; [5] R. H. Fox, Recent development of knot theory at Princeton, Proc. Internat. Congress, Cambridge, Mass., 1950, II, 453—457; [6] R. H. Crowell-R. H. Fox, Introduction to knot theory, Ginn, 1963 (有到 1966 年的详细文献表); [7] M. K. Fort, Jr., Topology of 3-manifolds and related topics, Prentice-Hall, 1962, 3. Knot theory; [8] 寺阪英孝, 結び目の理論, 数学, **12**(1960), 1—20.

映射度 [英 mapping degree 法 degré de transformation 德 Abbildungsgrad 俄 степень отображения 日 写像度] 【映射度】 设 Γ^n 及 M^n 为 n 维单纯复形(例如 n 维球面 S^n), $|\Gamma^n|$ 及 $|M^n|$ 为伪流形†, 具有由它们的基本闭链† ζ^n, z^n 所决定的定向. 连续映射 $f:|\Gamma^n| \to |M^n|$ 诱导出 n 维整系数同调群的同态 $f_*:H_n(\Gamma^n, \boldsymbol{Z}) \to H_n(M^n, \boldsymbol{Z})$. 由于 $H_n(\Gamma^n, \boldsymbol{Z})$ 及 $H_n(M^n, \boldsymbol{Z})$ 分别由 ζ^n, z^n 的同调类† $[\zeta^n]$, $[z^n]$ 生成, 所以由 $f_*([\zeta^n])=d_f[z^n]$ 决定一个整数 d_f, 称为连续映射 $f:|\Gamma^n| \to |M^n|$ 的**映射度**.

对于 $g:|\Gamma^n| \to |M^n|$, 如果 $f \sim g$(同伦†), 则 $d_f=d_g$. 如果 $f \sim 0$ (常值映射†), 则 $d_f=0$, 如果 f 是同胚,则 $d_f=\pm 1$. 特别当 $|\Gamma^n|=|M^n|$, f 是同胚, 且 $\zeta^n=z^n$ 时, 如果 $d_f=1$, 则 f 称为**保持定向映射** (orientation preserving mapping), 如果 $d_f=-1$, 则 f 称为**反转定向映射** (orientation reversing mapping).

特别对于单形映射 $\varphi:\Gamma^n \to M^n$, 令 $\zeta^n=\sum \sigma_i^n$, $z^n=\sum s_j^n$(σ_i^n, s_j^n 为 n 维单形), 设满足 $\varphi(\sigma_i^n)=+s_j^n$ 的 σ_i^n 有 p_j 个, 满足 $\varphi(\sigma_k^n)=-s_j^n$ 的 σ_k^n 有 q_j 个, 则 p_j-q_j 与 j 的选取无关,是一定值,其值等于 φ 的映射度 d_φ.

设 f, g 是由 n 维定向闭伪流形 Γ^n 到 n 维球面 $S^n(n \geqslant 1)$ 的两个连续映射, $f \sim g$(同伦)的充分必要条件是 $d_f=d_g$ (L. E. J. Brouwer 的**映射定理** (mapping theorem)). 由此推出球面 S^n 的 n 维同伦群 $\pi^n(S_n) \cong \boldsymbol{Z}$ (→同伦群).

【局部映射度】 设 M^n, N^n 为 n 维定向流形†, $f:M^n \to N^n$ 为连续映射. 设 M^n 的点 p 有一适当邻域 U, 使得对于 $U-\{p\}$的任何点 q, $f(p) \neq f(q)$, 则 f 诱导出 n 维整系数局部同调群†的同态 $f_*: H_n(U, U-\{p\}) \to H_n(N, N-\{f(p)\})$. 因此对于其典范同调类 u, v, 决定一整数 k, 使 $f_*(u)=kv$. k 称为映射 f 在点 p 的**局部映射度** (local degree of mapping). 如果 M^n, Γ^n 是闭伪流形, $f:M^n \to \Gamma^n$ 是连续映射, 则存在一点 $r \in \Gamma^n$, $f^{-1}(r)$ 是 M^n 的离散子集 $(p_1, \cdots, p_t)$, 且每点 p_i 均有邻域 U_i 满足上述条件. 如果 f 在 p_i 的局部映射度为 k_i, 则 $d_f=\sum k_i$.

【环绕数】 设 C_1, C_2 为三维空间中两条互不相交的连续†闭曲线, C. F. Gauss 用积分的形式给出一数 $\mathfrak{b}(C_1, C_2)$ 来表示 C_1, C_2 相互缠

绕的程度．设 $\mathfrak{x}_i = \mathfrak{x}_i(t_i)$ $(i = 1, 2)$ 是 C_1, C_2 的参数表示，$\mathfrak{x}_i(t_i)$ 是连续可微的，则

$$\mathfrak{v}(C_1, C_2) = -\frac{1}{4\pi}\int_{C_1}\int_{C_2}\frac{1}{|\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1|^3} \cdot \det\left(\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1, \frac{d\mathfrak{x}_1}{dt_1}, \frac{d\mathfrak{x}_2}{dt_2}\right) dt_1\, dt_2$$

是一个整数，表示从 C_1 来看 C_2 环绕的数目，称为 C_1, C_2 的**环绕数** (linking coefficient)．

更一般情形，设 M^n 是组合流形†，K 是 M^n 的胞腔剖分†，K^* 是 K 的对偶剖分†，z_1^r, z_2^s $(r+s=n-1)$ 分别是 K 及 K^* 的边缘闭链†．当 z_1^r 是链† C^{r+1} 的边缘时，交点数 $\mathrm{KI}(C^{r+1}, z_2^s)$ 与 C^{r+1} 的选法无关．这时就定义 z_1, z_2 的环绕数为 $\mathfrak{v}(z_1^r, z_2^s) = \mathrm{KI}(C^{r+1}, z_2^s)$．对于 M^n 的奇异边缘闭链† $\mathfrak{z}_1^r$, $\mathfrak{z}_2^s$ $(r+s=n-1)$ 用如上定义的 z_1^r, z_2^s 来逼近，也能定义**环绕数** $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}_1^r, \mathfrak{z}_2^s)$．$\mathfrak{v}(\mathfrak{z}_1^r, \mathfrak{z}_2^s)$ 对于 $\mathfrak{z}_1^r$, $\mathfrak{z}_2^s$ 是双线性的，且 $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}_1^r, \mathfrak{z}_2^s) = (-1)^{rs+1}\mathfrak{v}(\mathfrak{z}_2^s, \mathfrak{z}_1^r)$ 成立．图 1 的例中，左图环绕数为 1，右图环绕数为 2．如果 $\mathfrak{z}_1^r$ 在 $M^n - |\mathfrak{z}_2^s|$ 中同调于 0，则 $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}_1^r, \mathfrak{z}_2^s) = 0$ (图 2)．在 $M^n - |\mathfrak{z}_2^s|$ 中如 $\mathfrak{z}_1^r$, $\mathfrak{z}_1'^r$ 同调，则 $\mathfrak{v}(\mathfrak{z}_1^r, \mathfrak{z}_2^s) = \mathfrak{v}(\mathfrak{z}_1'^r, \mathfrak{z}_2^s)$．

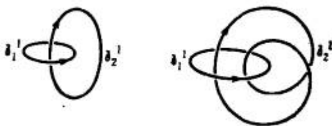


图 1

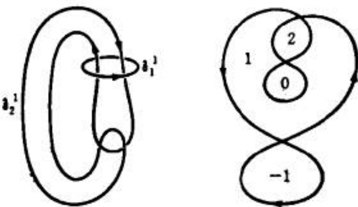


图 2　　图 3

【位数】 在 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 或一般 n 维流形 M^n 中，$\mathfrak{z}^{n-1}$ 为 $n-1$ 维奇异边缘闭链，o 是不属于 $|\mathfrak{z}^{n-1}|$ 的点，o 对于 $\mathfrak{z}^{n-1}$ 的**位数** (order) 由 $\mathrm{ord}\,(\mathfrak{z}^{n-1}, o) = \mathfrak{v}(\mathfrak{z}^{n-1}, o)$ 定义．即当 $\mathfrak{z}^{n-1}$ 是奇异复形 C^n 的边缘时，$\mathrm{ord}\,(\mathfrak{z}^{n-1}, o) = \mathrm{KI}\,(C^n, o)$．例如，在平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上，$\mathfrak{z}^1 = \{f(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1, f(0) = f(1)\}$ 是由连续函数表出的闭曲线，不在 $|\mathfrak{z}^1|$ 上的点 o 对于 $\mathfrak{z}^1$ 的位数等于环绕 o 的**旋转数** (rotation number)，即向量 $\overrightarrow{of(t)}$ 当 t 由 0 到 1 变动时，沿正的方向围绕点 o 转动多少圈．点 o 对于 $\mathfrak{z}^1$ 的位数在 $\mathfrak{z}^1$ 的补集的每个连通分支†上是一定的 (图 3)．反之，对于两条闭曲线 $\mathfrak{z}_0^1 = \{f_0(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ 及 $\mathfrak{z}_1^1 = \{f_1(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$，如果 $\rho(f_0(t), f_1(t)) < \rho(f_0(t), o)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ 成立，则 $\mathrm{ord}\,(\mathfrak{z}_0^1, o) = \mathrm{ord}\,(\mathfrak{z}_1^1, o)$ (**Rouché 定理**)．

【参】 [1] P. Alexandroff (Aleksandrov)-H. Hopf, Topologie I, Springer, 1935 (Chelsea, 1965); [2] H. Seifert-W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934 (Chelsea, 1968); [3] 南雲道夫，写像度と存在定理，河出，1948.

不动点定理 [英 fixed point theorem 法 théorème des points fixes 德 Fixpunktsatz 俄 теорема о неподвижной точке 日 不動点定理]

对于从空间 X 到 X 自身的映射 f，满足 $f(x) = x$ 的点 $x \in X$，称为 f 的**不动点** (fixed point)．在 X 是拓扑空间†，f 是连续映射†的情形，关于不动点的存在性已经得到各种定理．

【多面体的不动点定理】 1) Brouwer 不动点定理．设 X 为单形† $|\sigma^n|$，则任意的连续映射 $f: |\sigma^n| \to |\sigma^n|$ 至少具有一个不动点．称之为 **Brouwer 不动点定理** (Math. Ann., **69**(1910), **71**(1912))．

2) Lefschetz 不动点定理．设 f 为有限多面体† $|K|$ 映到自身的连续映射，$H_p(|K|)$ 为 $|K|$ 的 p 维整系数同调群†，$T_p(|K|)$ 为其挠子群†，令 $B_p(|K|) = H_p(|K|)/T_p(|K|)$．由 f 自然诱导出 $B_p(|K|)$ 的自同态 f_*，设其迹†为 α_p，则整数 $\Lambda_f = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \alpha_p$ 称为 f 的 **Lefschetz 数** (Lefschetz number)．对于 $g: |K| \to |K|$，如果 $f \simeq g$ (同伦†) 则 $\Lambda_f = \Lambda_g$．如果 $\Lambda_f \neq 0$，则 f 至少具有一个不动点．称之为 **Lefschetz 不动点定理** (Trans. Amer. Math. Soc., **28**(1926))．$\Lambda_f \neq 0$ 是不动点存在的充分条件，而非必要条件．Brouwer 不动点定理可

由这个定理立即推出．且如果 $f \simeq 1_{|K|}$（恒等映射），则 α_p 等于 $|K|$ 的 Betti 数，且 $\Lambda_f = \chi(|K|)$（Euler 示性数†）．因此，如果 $\chi(|K|) \neq 0$，$f \simeq 1_{|K|}$，则 f 至少具有一个不动点．

3）Lefschetz 数与不动点指数． 对于同维数†（有限）多面体 $|K|$ 及连续映射 $f: |K| \to |K|$，则可取连续映射 $g: |K| \to |K|$ 同伦于 f，且 g 只具有孤立不动点 $q_i (i = 1, \cdots, r)$，每个 q_i 是 K 的 n 维单形的内点．这时 f 在孤立不动点 q_i 的局部映射度† λ_i，称为 f 的**不动点指数**（fixed point index）．这时 $J_f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = (-1)^n \Lambda_f$．

4）连续向量场的奇点．设 F 为微分流形† X 上的连续向量场† $p \to x_p$，即使得 X 上每点 p 对应于 p 点的切向量 x_p．使得向量 $x_p = 0$ 的点 p 称为 F 的奇点†．X 上的连续向量场 F 以自然的方式诱导出从 X 到 X 的连续映射 f，且 $f \simeq 1_X$（恒等映射）．这时 F 的奇点对应于 f 的不动点．当 F 只具有孤立奇点 q 时，F 在 q 的奇点指数†等于 f 的不动点指数．所以当 X 紧时，则 X 上连续向量场 F 的奇点的指数之和等于 Euler 示性数 $\chi(X)$．特别是 X 上存在无奇点的连续向量场的充分必要条件是 $\chi(X) = 0$（**Hopf 定理**，Math. Ann., **96** (1927)）．

5）Poincaré-Birkhoff 不动点定理．在特殊的情形，既使 $\Lambda_f = 0$ 成立，加解析条件也能证明不动点存在．用平面上极坐标 (r, θ)，对于圆环 $X = \{(r, \theta) \alpha \leqslant r \leqslant \beta\}$ 及同胚 $f: X \to X$，i）在圆周 $r = \alpha$ 上，$f(\alpha, \theta) = (\alpha, g(\theta))$ $(g(\theta) < \theta)$；ii）在圆周 $r = \beta$ 上，$f(\beta, \theta) = (\beta, h(\theta))$ $(h(\theta) > \theta)$；iii）存在 X 上的连续函数 $\rho(r, \theta)$ 在 X 内部取正值且 $\iint_D \rho(r, \theta) dr d\theta = \iint_{f(D)} \rho(r, \theta)\, dr\, d\theta$（即在映射 f 下的 X 上的不变测度存在）．如果上述条件满足，则 f 至少具有两个不动点． 这个定理是 H. Poincaré 为了应用到限制三体问题†而作的猜想，后为 G. D. Birkhoff (1913) 所证明，因此叫作 **Poincaré-Birkhoff 不动点定理**或 **Poincaré 最后定理**（the last theorem of Poincaré）．

6）最近，M. F. Atiyah 和 R. Bott [6] 把 Lefschetz 不动点定理推广到包括椭圆复形（—K 理论）的情形，讨论紧微分流形及横截的微分映射．这个推广使得不动点定理应用到各种研究领域，例如下节所述的理论．

【无限维空间的不动点定理】 Birkhoff 及 O. D. Kellogg (Trans. Amer. Math. Soc., **23** (1922)) 把 Brouwer 不动点定理推广到函数空间的情形，并且应用于证明微分方程解的存在性．由此引进研究函数方程的一个新方法．J. P. Schauder (Studia Math., **2**(1930)) 得到定理"设 A 为 Banach 空间中的凸闭集，如果 A 在连续映射 T 下的象 $T(A)$ 是可数紧的†，且 $T(A) \subset A$，则 T 具有不动点．"这称为 **Schauder 不动点定理**．

A. Тихонов (Math. Ann., **111**(1935)) 推广了 Brouwer 的结果；证明了"设 R 为局部凸拓扑线性空间†，A 为 R 的紧凸集，在 A 上定义且在 A 中取值的连续映射 T 至少有一个不动点．"把这个 **Тихонов 不动点定理**应用于在 m 维 Euclid 空间 E^m 上定义并在 E^k 上取值（k 不一定等于 m）的连续函数所构成的函数空间 R，可用来证明微分方程解的存在定理．例如求满足初始条件 $y(x_0) = y_0$，$dy/dx = f(x, y)$ 的解，就不外乎求映射 $y \to F(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)) dt$ 的不动点 $y(t)$．我们就能用 Тихонов 定理来证明其存在性．在应用于函数方程方面，关于集合 A 及象 $T(A)$ 的假定，Schauder 不动点定理的形式比 Тихонов 定理更便于应用．

为了应用方便，把拓扑的术语用函数族的术语来表现有下列定理．"设 D 为 n 维 Euclid 空间的点集，$\mathfrak{F}$ 为 D 上的连续函数族，T 为把 $f \in \mathfrak{F}$ 对应到 $Tf \in \mathfrak{F}$ 的映射，满足下列条件：i）如果 $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}$，$0 < \lambda < 1$，则 $\lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2 \in \mathfrak{F}$；ii）设 $f_k \in \mathfrak{F}$，如果 D 上的函数列 $\{f_k\}$ 广义（即在任意紧集上）一致收敛于 f，则 $f \in \mathfrak{F}$；iii）设 $f_k \in \mathfrak{F}$，如果 D 上的函数列 $\{f_k\}$ 广义一致收敛于 f，则 D 上函数列 $\{Tf_k\}$ 也广义一致收敛

于 Tf; iv) $\mathfrak{F}$ 在 T 下的象 $T(\mathfrak{F})$ 是 D 上正规†函数族. 则存在 $f \in \mathfrak{F}$, 使 $f = Tf$.

更一般情形,拓扑线性空间 R 中,把 R 的点 x 对应于 R 的闭凸集 $T(x)$ 的映射 T,满足 $x \in T(x)$ 的点 x 叫作 T 的**不动点**. 映射 T 称为在 a **半连续**(semi-continuous),如果 $x_n \to a$, $y_n \in T(x_n)$, $y_n \to b$, 则 $b \in T(a)$. 有限维 Euclid 空间的有界闭凸集 K 到自身的半连续映射 T 如果满足 $T(x) \subset K$, 则不动点存在. 称之为**角谷不动点定理** (Duke Math. J., **8**(1941)). 樊𰋀把这个结果更进一步推广到局部凸线性拓扑空间的情形(Proc. Nat. Acad. Sci. USA., **38** (1952)).

【参】 [1] P. Alexandroff-H. Hopf, Topologie I, Springer, 1935 (Chelsea, 1965); [2] 福原満洲雄, 常微分方程式, 岩波全書, 1950; [3] 南雲道夫, 写像度と存在定理, 河出, 1948; [4] 福原満洲雄-佐藤徳意, 微分方程式論, 現代数学講座, 共立出版, 1956; [5] J. S. Cronin, Fixed points and topological degree in non-linear analysis, Amer. Math. Soc. Translation, 1964; [6] M. F. Atiyah and R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes I, II, Ann. of Math., (2) **86** (1967) 374—407; (2) **88**(1968), 451—491.

障碍理论 [英 theory of obstructions 法 théorie d'obstructions 德 Theorie der Hindernisse 俄 теория препятствия 日 障害の理論] 【发展史】 **障碍理论**的目的是用代数的方法来判定映射的可扩张性. 同伦论中的 L. Brouwer 映射定理†、Hopf 扩张定理†、分类定理†等古典结果虽也可看做是障碍理论的开端, 但随着同伦群、上同调群等概念的引进, 从 S. Eilenberg ([1])开始才有系统的障碍理论的论述. 其后, 小松醇郎, P. Olum ([2]) 把障害理论推广到映射,其映射到的空间不一定是 n 单纯的†. 与障碍理论密切相关的映射的同伦分类问题, 像从多面体到球面等特殊空间的映射, 在下列几种情形也顺次得到解决: $K^{n+1} \to S^n$ 的情形 (N. E. Steenrod [5]), $K^{n+2} \to S^n$ 的情形 (J. Adem [7]), $K^{n+k} \to Y$, $\pi_i(Y) = 0$ ($i < n$ 及 $n < i < n+k$) 的情形 (中岡稔); 其他还有 Л. С. Понтрягин, М. М. Постников, Eilenberg-S. MacLane ([10]) 等人的结果. 除了上述特殊情形以外, 一般在讨论高阶障碍时要遇到许多复杂和困难的地方,从而减少其效用. 尽管如此,障碍的思想是上同调运算(→上同调运算),示性类(→示性类)等现代拓扑学中重要概念的起因,因而有着十分重要的意义.

障碍的理论还在研究纤维丛(→纤维丛)的截面, 流形之间的微分同胚等方面有用, 并相应的发展成类似的理论 (M. W. Hirsch [11], [12], J. R. Munkres [13], A. Shapiro [14], →微分流形的拓扑学).

【Y 为 n 单纯的情形的一般理论】 从某个拓扑空间 X 到 Y 的两个映射(在本条中,以后均指连续映射) 能否同伦就归结成由这两个映射所作的从 X 与区间 $I = [0,1]$ 的积空间的部分空间到 Y 的映射能否扩张成整个积空间到 Y 的映射. 从而映射的分类问题与映射的扩张问题可以一并处理.

设 K 为多面体†, L 为 K 的子多面体, $\hat{K}^n = L \cup K^n$ 为 K 的 n 维骨架† K^n 与 L 的并,当给出从 L 到弧连通†空间 Y 的连续映射 f' 时,令所有把 f' 扩张成 $\hat{K}^n$ 到 Y 的连续映射的集合为 $\Phi^n(f')$, 而将它关于 L 分为同伦类†的集合设为 $\bar{\Phi}^n(f')$. 这些也有空集,但由于 Y 是弧连通的, $\bar{\Phi}^0(f')$ 只有一个元素构成, $\Phi^1(f')$ 非空. 设 f^n 是 $\Phi^n(f')$ 的一个元素,如果把 f^n 限制于 K 中已定向的 $n+1$ 维胞腔 σ^{n+1} 的边缘 $\dot{\sigma}^{n+1}$ 上, 则 $f^n: \dot{\sigma}^{n+1} \to Y$ 决定同伦群† $\pi_n(Y)$ 的一个元素 $c(f^n, \sigma^{n+1})$ (→同伦,同伦群). 它就是扩张 f^n 到 σ^{n+1} 内部的障碍的尺度. 对于 K 的每个 $n+1$ 胞腔 σ^{n+1}, 我们都给定 $c(f^n, \sigma^{n+1})$, 得到系数取在 $\pi_n(Y)$ 中的 $K - L$ 的一个 $n+1$ 维上闭链† $c^{n+1}(f^n)$,称为 f^n 的**障碍上闭链**(obstruction cocycle), 它是把 f^n 扩张到 $\hat{K}^{n+1}$ 时障碍的尺度. 也就是 f^n 能扩张到 $\hat{K}^{n+1}$ 的充分必要条件是 $c^{n+1}(f^n) = 0$. 显然对于 $\Phi^n(f')$ 每个元素, $c^{n+1}(f^n)$ 唯一决定. 对于 $\Phi^n(f')$ 的所有元素, $c^{n+1}(f^n)$ 的全体可看成是上闭链群 $Z^{n+1}(K, L; \pi_n(Y))$ 的子集, 记作 $\mathbf{o}^{n+1}(f')$. $\Phi^{n+1}(f')$ 非空的充分必要条件是 $\mathbf{o}^{n+1}(f')$ 包含 0.

【分离上链】 命 $K^\square = K \times I$, $L^\square = (K \times 0) \cup (L \times I) \cup (K \times 1)$. 如果给定二个映

射 $f_0, f_1: K \to Y$，其部分映射满足 $f_0|L = f_1|L$，就可自然定义 $F': L^\square \to Y$，使得 $\Phi^n(F')$ 的一个元素 F^n 就对应于连系 $f_0|K^{n-1}$ 与 $f_1|K^{n-1}$（相对于 L 的）一个同伦† h^{n-1}. 这样可得 $Z^{n+1}(K^\square, L^\square; \pi_n(Y))$ 的元素 $c^{n+1}(F^n)$. 但 $K^\square - L^\square$ 的链群与 $K - L$ 的低一维的链群是链群同构，所以 $Z^{n+1}(K^\square, L^\square; \pi_n(Y))$ 和 $Z^n(K, L; \pi_n(Y))$ 可看成同一. 在这个意义下，可认为 $c^{n+1}(F^n) \in Z^n(K, L; \pi_n(Y))$，把它写作 $d^n(f_0, h^{n-1}, f_1)$，称为**分离上闭链** (separation cocycle). 特别当 $f_0|\hat{K}^{n-1} = f_1|\hat{K}^{n-1}$ 时，可以自然地定义 $F^n: L^\square \cup (K^\square)^n \to Y$，分离上闭链可以简单地写为 $d^n(f_0, f_1)$. 对于 $\Phi^n(F')$ 的所有元素的分离上闭链全体的集合看成是 $Z^n(K, L; \pi_n(Y))$ 的子集合，记作 $\mathbf{o}^n(f_0, f_1)$. h^{n-1} 能够扩张成 $\hat{K}^n$ 上的同伦的充分必要条件是 $d^n(f_0, h^{n-1}, f_1) = 0$. $f_0|\hat{K}_n \simeq f_1|\hat{K}_n \text{rel } L$ 成立的充分必要条件是 $\mathbf{o}^n(f_0, f_1)$ 包含 0. 如果已给的不是 f_0, f_1 而是 $f_0^n, f_1^n: \hat{K}^n \to Y$，$f_0^n|L = f_1^n|L$，则 $\mathbf{o}^n(f_0, f_1)$ 的元素 $d^n(f_0^n, h^{n-1}, f_1^n)$ 是 $Z^n(\hat{K}^n, L; \pi_n(Y))$ 的元素，把它看作 $K - L$ 的上链时，不一定是上闭链. 在这个意义下，$d^n(f_0^n, h^{n-1}, f_1^n)$ 作为 $K - L$ 的上链称为**分离上链** (separation cochain, deformation cochain). 分离上链 $d^n(f_0^n, h^{n-1}, f_1^n)$ 的上边缘等于 $c^{n+1}(f_0^n) - c^{n+1}(f_1^n)$（可能差一符号）.

选定一个 $f_0^n \in \Phi^n(f')$，则对于 $K - L$ 中任意的以 $\pi_n(Y)$ 为系数的 n 维上链 d^n，可适当选取 $f_1^n \in \Phi^n(f')$，满足 $f_0^n|\hat{K}^{n-1} = f_1^n|\hat{K}^{n-1}$，使 $d^n = d^n(f_0^n, f_1^n)$ 成立（存在定理）.

因此，如果选定 $\bar{\Phi}^{n-1}(f')$ 的元素 f^{n-1}，其 n 维障碍上闭链为 0，则对于所有成为 f^{n-1} 的扩张的 $\Phi^n(f')$ 的元素 f^n，它们的障碍上闭链的全体成为 $\mathbf{o}^{n+1}(f')$ 的子集，而这个子集就是上闭链群 $Z^{n+1}(K, L; \pi_n(Y))$ 模上边缘群 $B^{n+1}(K, L; \pi_n(Y))$ 的一个傍集. 所以，使 $c^n(f^{n-1}) = 0$ 的 $\Phi^{n-1}(f')$ 的每一个元素 f^{n-1} 就对应于一个上同调类 $\bar{c}^{n+1}(f^{n-1}) \in H^{n+1}(K, L; \pi_n(Y))$，而 f^{n-1} 能扩张到 $\hat{K}^{n+1}$ 的充分必要条件是 $\bar{c}^{n+1}(f^{n-1}) = 0$（第一扩张定理）.

从分离上闭链的方式来说，满足 $d^{n-1}(f_0, h^{n-2}, f_1) = 0$ 的 $\hat{K}^{n-2}$ 上的同伦 h^{n-2} 就对应于 $\bar{d}^n(f_0, h^{n-2}, f_1) \in H^n(K, L; \pi_n(Y))$，而 h^{n-2} 能够扩张成 $\hat{K}^n$ 上的同伦的充分必要条件是 $\bar{d}^n(f_0, h^{n-2}, f_1) = 0$（第一同伦定理）.

$H^{n+1}(K, L; \pi_n(Y))$ 中对应 $\mathbf{o}^{n+1}(f')$ 的子集记做 $\mathbf{O}^{n+1}(f')$，称为把 f' **扩张**到 $n+1$ 维**的障碍** (obstruction to an extension). $H^n(K, L; \pi_n(Y))$ 中对应 $\mathbf{o}^n(f_0, f_1)$ 的子集 $\mathbf{O}^n(f_0, f_1)$ 叫作连系 f_0, f_1 的 n 维**同伦障碍** (obstruction to a homotopy). 显然 f' 扩张到 $\hat{K}^{n+1}$ 的条件是 $\mathbf{O}^{n+1}(f')$ 包含 0，而 f_0, f_1 相对于 L 的 n 维同伦的充分必要条件是 $\mathbf{O}^n(f_0, f_1)$ 包含 0.

【对于映射的不变性】 由连续映射 $\varphi: (K', L') \to (K, L)$ 诱导出上同调群的同态映射 φ^*: $H^{n+1}(K, L; \pi_n(Y)) \to H^{n+1}(K', L'; \pi_n(Y))$，$H^n(K, L; \pi_n(Y)) \to H^n(K', L'; \pi_n(Y))$. 这时，对于 $f': L \to Y$，

$$\mathbf{O}^{n+1}(f'\varphi) \supset \varphi^* \mathbf{O}^{n+1}(f')$$

成立，对于 $f_0, f_1: K \to Y$（但 $f_0|L = f_1|L$），

$$\mathbf{O}^n(f_0 \circ \varphi, f_1 \circ \varphi) \supset \varphi^* \mathbf{O}^n(f_0, f_1)$$

成立. 因而扩张的障碍以及同伦的障碍都是与 K, L 的剖分的取法无关的拓扑不变量.

【分离上闭链的加性】 设 $f_0, f_1, f_2: K \to Y$ 满足 $f_0|L = f_1|L = f_2|L$. 如果已给 h_{01}^{n-1}: $f_0|\hat{K}^{n-1} \simeq f_1|\hat{K}^{n-1} \text{rel } L$，$h_{12}^{n-1}: f_1|\hat{K}^{n-1} \simeq f_2|\hat{K}^{n-1} \text{rel } L$，则可把这两个同伦合成为 h_{02}^{n-1}: $f_0|\hat{K}^{n-1} \simeq f_2|\hat{K}^{n-1} \text{rel } L$. 显然

$$d^n(f_0, h_{01}^{n-1}, f_1) + d^n(f_1, h_{12}^{n-1}, f_2) = d^n(f_0, h_{02}^{n-1}, f_2)$$

成立. 并且把 h_{01}^{n-1} 的定向改变，得到由 $f_1|\hat{K}^{n-1}$ 到 $f_0|\hat{K}^{n-1}$ 的关于 L 的同伦 h_{10}^{n-1}，显然

$$d^n(f_1, h_{10}^{n-1}, f_0) = -d^n(f_0, h_{01}^{n-1}, f_1)$$

成立. 所以，$\mathbf{O}^n(f_0, f_0)$ 形成 $H^n(K, L; \pi_n(Y))$ 的一个子群，这个子群只由 $f_0|\hat{K}^{n-1}$ 相对于 L 的同伦类决定. 一般来说，如果 $\mathbf{O}^n(f_0, f_1)$ 不空，它就是 $H^n(K, L; \pi_n(Y))$ 模如上那样的子群 $\mathbf{O}^n(f_0, f_0)$ 的一个傍集. 由这个事实和分离上链的存在定理可得下面的结果:

假设 $\Phi^n(f')$ 不空，$\bar{\Phi}^n(f')$ 中成为 $\bar{\Phi}^{n-1}(f')$ 的某一元素的扩张的元素全体与 $H^n(\hat{K}^n, L; \pi_n(Y))$ 模 $\mathbf{O}^n(f_0^n, f_0^n)$ 的商群的元素一一对应，这

对应是使这种元素的一个代表元f_0^n与f_0^n到f^n的n维同伦障碍$\boldsymbol{O}^n(f_0^n, f^n)$相对应．$\bar{\Phi}^n(f')$中能够扩张到$\hat{K}^{n+1}$的所有元素的集合，如$f_0^n$扩张成$f_0^{n+1}$，与$H^n(\hat{K}^{n+1}, L; \pi_n(Y)) = H^n(K, L; \pi_n(Y))$模$\boldsymbol{O}^n(f_0^{n+1}, f_0^{n+1})$的商群的元素一一对应(第一分类定理)．

【第一障碍类】 设$H^{i+1}(K, L; \pi_i(Y)) = 0$，$H^i(K, L; \pi_i(Y)) = 0\ (0 < i < p)$，(例如$\pi_i(Y) = 0\ (i < p)$成立即可)．在这种情形下反复使用第一扩张定理及第一同伦定理，得知$\bar{\Phi}^i(f')\ (i < p)$全都只含一个元素，且$\boldsymbol{O}^{p+1}(f')$只由$H^{p+1}(K, L; \pi_p(Y))$的唯一元素$\bar{c}^{p+1}(f')$构成．这个元素称为$f'$的**第一障碍类**(primary obstruction)．f'能够扩张到$\hat{K}^{p+1}$的充分必要条件是$\bar{c}^{p+1}(f') = 0$(第二扩张定理)．假如，还有$H^{i+1}(K, L; \pi_i(Y)) = 0\ (i > p)$(例如当$\pi_i(Y) = 0\ (p < i \leqslant \dim(K - L))$时)，$f'$能够扩张到$K$的充分必要条件是$f'$的第一障碍类为0(第三扩张定理)．

与此相应，当$H^i(K, L; \pi_i(Y)) = 0\ (0 < i < p)$，$H^{i-1}(K, L; \pi_i(Y)) = 0\ (0 < i < p)$时，对于任意两个映射$f_0, f_1: K \to Y$，$f_0|L = f_1|L$，$\boldsymbol{O}^p(f_0, f_1)$只包含$H^p(K, L; \pi_p(Y))$的唯一元素$\bar{d}^p(f_0, f_1)$，叫作$f_0, f_1$的**第一差别类**(primary difference)．$f_0|\hat{K}^n \simeq f_1|\hat{K}^n$ rel L的充分必要条件是这个元素为0(第二同伦定理)．假如还有$H^i(K, L; \pi_i(Y)) = 0\ (i > p)$成立，则$f_0 \simeq f_1$ rel L的充分必要条件是第一差别类为0(第三同伦定理)．

现在假设第二扩张定理、第二同伦定理的条件都满足，则根据第一分类定理，$\Phi^n(f')$的所有元素与$H^n(\hat{K}^n, L; \pi_n(Y))$所有元素一一对应，这个对应是把$\bar{\Phi}^n(f')$中的元素的一个代表$f^n$对应于$f^n$与$f_0^n$之间的第一差别类(第二分类定理)．假设还满足第三扩张定理和第三同伦定理的条件，设$f_0: K \to Y$，$f' = f_0|L$，则f'的扩张f的相对于L的同伦类通过把f对应到$d^p(f, f_0)$而与$H^p(K, L; \pi_p(Y))$的元素一一对应(第三分类定理)．

【第二障碍】 为简单起见，设$\pi_i(Y) = 0\ (i < p$，及$p < i < q)$，假如$f': L \to Y$的第一障碍类$\bar{c}^{p+1}(f') \in H^{p+1}(K, L; \pi_p(Y))$为0，则能够定义$\boldsymbol{O}^{q+1}(f') \subset H^{q+1}(K, L; \pi_q(Y))$，称为$f'$的**第二障碍**(secondary obstruction)．特别在$Y = S^p$，$q = p + 1\ (p > 2)$的情形，$\boldsymbol{O}^{p+2}(f')$与$H^{p+2}(K, L; \boldsymbol{Z}_2)$模其子群$Sq^2(H^p(K, L; \boldsymbol{Z}))$的一个傍系相同，此处$Sq^2$表示Steenrod运算†(Steenrod [5])．如果在这个情形下，又$L \supset K^p$，则$\boldsymbol{O}^{p+2}(f')$归结为一个上同调类，由$Sq^2 f'^*(\sigma)$给出，其中σ是$H^p(S^p, \boldsymbol{Z})$的生成元([5])．并且，如果$\boldsymbol{O}^{p+2}(f') = [Sq^2 f'^*(\sigma)] = \{0\}$，则存在$f'$的适当的扩张$f: \hat{K}^{p+2} \to Y = S^p$．对于所有这样的$f$，其障碍上闭链全体定义**第三障碍**(tertiary obstruction)$\boldsymbol{O}^{p+3}(f')$．它与$H^{p+3}(K, L; \boldsymbol{Z}_2)$模其子群$Sq^2(H^{p+1}(K, L; \boldsymbol{Z}_2))$的某傍集相同，可用Adem的二阶上同调运算†$\Phi$表示为$\Phi(f'^*(\sigma))$([7])．

以上诸定理当K是CW复形时依然成立．

【参】 [1] S. Eilenberg, Cohomology and continuous mappings, Ann. of Math., **41**(1940), 231—251; [2] P. Olum, Obstructions to extensions and homotopies, Ann. of Math., **52**(1950), 1—50; [3] P. Olum, On mappings into spaces in which certain homotopy groups vanish, Ann. of Math., **57**(1953), 561—574; [4] N. E. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951; [5] N. E. Steenrod, Products of cocycles and extensions of mappings, Ann. of Math., **48**(1947), 290—320; [6] N. Shimada(島田信夫), Homotopy classification of mappings of a 4-dimensional complex into a 2-dimensional sphere, Nagoya Math. J., **5**(1953), 127—144; [7] J. Adem, The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **38**(1952), 720—726; [8] J. H. C. Whitehead, On the theory of obstructions, Ann. of Math., **54**(1951), 68—84; [9] M. Nakaoka(中岡稔), On homotopy classification and extension, Proc. Japan Acad., **29**(1953), 6—9; [10] S. Eilenberg-S. MacLane, Cohomology groups of Abelian groups and homotopy theory IV, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **38**(1952), 325—329; [11] M. W. Hirsch, Immersions of manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., **93**(1959), 242—276; [12] M. W. Hirsch, Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, Bull. Amer. Math. Soc., **69**(1963), 352—356; [13] J. R. Munkres, Obstructions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphisms, Ann. of Math., **72**(1960), 521—554; [14] A. Shapiro, Obstructions to the imbedding of a complex in a Euclidean space I, The first obstruction, Ann. of Math., **66**(1957), 256—269.

同伦群 [英 homotopy group 法 groupe d'homotopie, 德 Homotopiegruppe 俄 гомотопическая группа, 日 ホモトピー群] 利用同伦†的概念可以定义拓扑空间的基本群†，同伦群，上同伦群等拓扑不变的群，它们同(上)同调群一起是拓扑学的重要工具. 自从 1935 年 W. Hurewicz 最先定义了下述的同伦群 $\pi_n(X)$ 以来，同伦群的理论有着迅速的发展并获得广泛的应用.

【同伦群】 设 X 为具有基点 $*\in X$ 的拓扑空间. $I^n=\{t=(t_1, t_2, \cdots, t_n)\mid 0\leqslant t_1, t_2, \cdots, t_n\leqslant 1\}$ 为 n 维立方体，$\dot{I}^n$ 为其边缘，由所有连续映射 $f:(I^n, \dot{I}^n)\to(X,*)$ 构成的映射空间†记作 $\Omega^n(X,*)=X^{I^n}(\dot{I}^n,*)$，($n=1$ 时是闭路空间†)，其弧连通分支†即同伦类† $[f]$ 的全体记作 $\pi_n(X,*)$ 或单记作 $\pi_n(X)$(→同伦). 用同伦集†的记号写，就是 $\pi_n(X,*)=\pi(I^n, \dot{I}^n; X,*)$. 如果 $\Omega^n(X,*)$ 的基点 $*$ 取为常值映射，则 $\Omega^m(\Omega^n(X,*),*)=\Omega^{m+n}(X,*)$. 因此，$\pi_m(\Omega^n(X,*),*)=\pi_{m+n}(X,*)$. π_1 是基本群†. 所以，$\pi_n(X,*)=\pi_1(\Omega^{n-1}(X),*)$ 也成为群. 称为以 $*$ 为基点的 X 的 n 维**同伦群**. 同伦群的乘法也可以直接定义如下：对于 $f_1, f_2\in\Omega^n(X,*)$，如果定义 $f_1+f_2\in\Omega^n(X,*)$ 为

$$(f_1+f_2)(t)=f_1(2t_1,t_2,\cdots,t_n),\ 0\leqslant t_1\leqslant\frac{1}{2},$$

$$=f_2(2t_1-1,t_2,\cdots,t_n),\ \frac{1}{2}\leqslant t_1\leqslant 1$$

(图 1)，则 $[f_1]$ 与 $[f_2]$ 的积(和)就由 $[f_1+f_2]$ 给出. 群的单位元是常值映射(记为 0)的类，$[f]$ 的逆元是 $\bar{f}(t)=f(1-t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 所表示的类 $[\bar{f}]$. 以对应 $(f_1, f_2)\to f_1+f_2$ 为乘法，$\Omega^n(X,*)$ 就成为 H 空间†. 因为 H 空间的基本群是交换群，所以 $\pi_n(X,*)$ 在 $n\geqslant 2$ 时是 Abel 群.

令 $S^n=\{t=(t_1, \cdots, t_{n+1})\mid\Sigma t_i^2=1\}$ 为 n 维球面，取 $*=(1, 0, \cdots, 0)$ 为其基点. 设 $\phi_n:(I^n, \dot{I}^n)\to(S^n,*)$ 为连续映射，使得 $\phi_n: I^n-\dot{I}^n\to S^n-*$ 为同胚. 则对应 $\phi_n^*:\pi(S^n, X)_0\to\pi_n(X,*)$, $\phi_n^*[g]=[g\circ\phi_n]$ 是双射. 从而 $\pi(S^n, X)_0$ 也可以作为同伦群的定义.

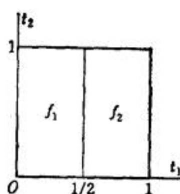


图 1

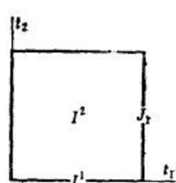


图 2

【相对同伦群】 设拓扑空间 X 及其子空间 A 共有基点 $*$. 把 I^n 中 $t_n=0$ 的面与 I^{n-1} 看作同一，设 J^{n-1} 为 $\dot{I}^n-I^{n-1}$ 的闭包† (图 2). 把连续映射 $f:(I^n, \dot{I}^n, J^{n-1})\to(X, A, *)$ 的同伦类的集合记作 $\pi_n(X, A, *)$. 如果把这样的 f 所作成的映射空间写作 $\Omega^n(X,A,*)$，则 $\pi_n(X, A, *)=\pi_0(\Omega^n(X, A, *))$. 因为 $\Omega^m(\Omega^n(X, A, *), *)$ 同胚于 $\Omega^{m+n}(X, A, *)$，所以 $\pi_m(\Omega^n(X, A, *), *)\cong\pi_{m+n}(X, A, *)$. 因此 $\pi_n(X, A, *)$ 当 $n\geqslant 2$ 时成为群，$n\geqslant 3$ 时成为 Abel 群. 这个群就称为 (X, A) 对于基点 $*$ 的 n 维**相对同伦群** (relative homotopy group)，或简称为 (X, A) 的 n 维同伦群. 同以前一样，也可以用 f_1+f_2 直接定义乘法. 由于 $\Omega^n(X, *, *)$ 与 $\Omega^n(X, *)$ 是同一个映射空间，故 $\pi_n(X, *, *)=\pi_n(X, *)$ 成立，从而同伦群可以当作相对同伦群的特殊情形来论述.

设 $g:(X, A, *)\to(Y, B, *)$ 是连续映射，由 $g_*[f]=[g\circ f]$ 得到对应 $g_*:\pi_n(X, A, *)\to\pi_n(Y, B, *)$，当 $n\geqslant 2$ 或 $n=1$, $A=*$ 时，g_* 是群的同态，称为由 g **诱导的同态** (induced homomorphism). 设 $E^n=\{t=(t_1, \cdots, t_n)\mid\Sigma t_i^2\leqslant 1\}$ 是 n 维单位胞腔，其边缘为 S^{n-1}. 利用适当的相对同胚 $\psi_n':(I^n, J^{n-1})\to(E^n,*)$, $\psi_n'(I^{n-1})=S^{n-1}$ 可得出一一对应 $\psi_n'^*:\pi(E^n, S^{n-1}; X, A)_0\to\pi_n(X, A, *)$. 通过 ψ_{n-1}, $\Omega^{n-1}(X, *)$ 与映射空间 $X^{S^{n-1}}(*, *)$ 同胚.

【同伦正合序列】 对于 $\alpha=[f]\in\pi_n(X, A, *)$，令 $\partial\alpha=[f\mid I^{n-1}]\in\pi_{n-1}(A, *)$，则得到同态 $\partial:\pi_n(X, A, *)\to\pi_{n-1}(A, *)$ $(n\geqslant 2)$，称为**同伦边缘同态** (homotopy boundary homomorphism). 对 (X, A) 的**同伦正合序列** (homotopy exact sequence) 就是下列包含同态 i_*, j_*

的正合序列:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A,*) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,*) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X,A,*) \xrightarrow{\partial} \cdots \to \pi_1(X,*) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X,A,*) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X),$$

其中 i_*, j_* 是由两个单射 $i:(A,*)\to(X,*)$ 及 $j:(X,*,*)\to(X,A,*)$ 诱导出来的. 满足 $X\supset A\supset B\ni *$ 的拓扑空间系称为**三元组**(triple). 在上述序列中,用 $(X,B,*)$, $(A,B,*)$ 分别取代其中的 $(X,*)$, $(A,*)$ 也得到一个正合序列 $(n\geqslant 1)$, 叫作三元组 (X,A,B) 的**同伦正合序列**.

积空间的同伦群 $\pi_n(A\times B)$ 同构于直和 $\pi_n(A)+\pi_n(B)$, 积空间的射影 $p(p'):A\times B\to A(B)$ 诱导出 $\pi_n(A\times B)$ 到直和因子 $\pi_n(A)$ $(\pi_n(B))$ 的射影. 这个射影 p 诱导出同构对应 $p_*:\pi_n(A\times B,B)\to\pi_n(A,*)$, 这是纤维空间 Hurewicz-Steenrod 同构定理†的特殊情形(→纤维空间). 令 $A\vee B=(A\times\{*\})\cup(\{*\}\times B)$, 我们得到直和分解 $\pi_n(A\vee B)\cong\pi_n(A)+\pi_n(B)+\pi_{n+1}(A\times B, A\vee B)$.

下面我们考虑固定的对 (X,A),而使基点 $*$ 变动. 对于 A 中以 $*=h(1)$ 为终点的道路 $h:I\to A$ 及 $\alpha\in\pi_n(X,A,*)$ $(\alpha=[f], f:(I^n,\dot I^n,J^{n-1})\to(X,A,*))$, 可以根据同伦扩张性质†造出同伦 $f_\theta(I^n,\dot I^n)\to(X,A)$ 使得 $f_\theta(J^{n-1})=h(\theta)$, $f_1=f$ 成立. 这时, f_0 的以 $*'=h(0)$ 为基点的同伦类,只由 α 及道路 h 的同伦类 ω 决定, 记作 $\alpha^\omega\in\pi_n(X,A,*')$. 对应 $\alpha\to\alpha^\omega$ 是群的同构,且 $(\alpha^\omega)^{\omega'}=\alpha^{\omega\omega'}$ 成立. 因此如果 A 是弧连通的,不管 $*$ 如何选取, $\pi_n(X,A,*)$ 均彼此同构, 可以记成 $\pi_n(X,A)$. 当 $*=*'$ 时, α^ω 就是 $\omega\in\pi_1(A,*)$ 在 $\alpha\in\pi_n(X,A,*)$ 上的作用. 对于 X 中的道路类 ω 与 $\alpha\in\pi_n(X,*)$, $\alpha^\omega\in\pi_n(X,*')$ 可以同样的定义,且具有相同的性质. 特别当 $\omega\in\pi_1(X,*)$ 时, $\alpha^\omega-\alpha$ 与 Whitehead 积† $[\omega,\alpha]$ 一致 ($n=1$ 时, $\alpha^\omega\cdot\alpha^{-1}=[\omega,\alpha]=\omega\alpha\omega^{-1}\alpha^{-1}$).

对(X,A),如果 X, A 是弧连通的且 $\pi_1(A)$ 在 $\pi_n(X,A)$ 上的作用是平凡的,则 (X,A) 称为 **n 单纯** (n-simple). 同样如 X 弧连通, 且 π_1 在 π_n 上的作用是平凡的, X 称为 **n 单纯的**. 例如 H 空间 X 及其子 H 空间 A 的对 (X,A) 是**单纯的** (simple), 也就是对于所有的 n, (X,A) 都是 n 单纯的. 拓扑空间 X 满足 $\pi_i(X)=0$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 时, 叫作 **n 连通** (n-connected). 0 连通也就是弧连通, 1 连通也就是单连通†. S^n 就是$(n-1)$连通的. 对 (X,A) 称为 **n 连通**, 如果 $\pi_0(A)=\pi_0(X)=\pi_i(X,A)=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. (E^n,S^{n-1}) $(n\geqslant 2)$ 就是 $(n-1)$ 连通的.

【三角组的同伦群】 拓扑空间 X 及其子空间 A, B, $A\cap B\ni *$ (基点)所成的组,以 $(X;A,B,*)$ 表示称为**三角组** (triad). 令 $\pi_n(X;A,B,*)=\pi_{n-1}(\Omega^1(X,B),\Omega^1(A,A\cap B),*)$ $(n\geqslant 2)$, 当 $n\geqslant 3$ 时构成群,当 $n\geqslant 4$ 时构成 Abel 群. $\pi_n(X;A,B,*)$ 称为**三角组的同伦群** (homotopy group of triad). 由对的同伦正合序列可得下列三角组的**同伦正合序列**:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_j(A,A\cap B,*) \xrightarrow{i_*} \pi_j(X,B,*) \xrightarrow{j_*} \pi_j(X;A,B,*) \xrightarrow{\partial} \pi_{j-1}(A,A\cap B,*) \xrightarrow{i_*} \cdots.$$

为简单起见,设 $A\cap B$ 为单连通, $X=\operatorname{Int}A\cup\operatorname{Int}B$ ($\operatorname{Int}A$ 为 A 的内部†), $(A,A\cap B)$ 是 m 连通的, $(B,A\cap B)$ 为 n 连通的,则$(X;A,B)$为 $(m+n)$连通的,即 $\pi_j(X;A,B,*)=0$ $(2\leqslant j\leqslant m+n)$ (Blakers-Massey 定理).

在此情形下,令 $U=X-A$, 因 i 为 U 的切除,当 $j<m+n$ 时, 有和同调群一样的切除公理†成立,即由包含映射 $i:(A,A\cap B)\to(X,B)$诱导出同构 $i_*:\pi_j(A,A\cap B,*)\cong\pi_j(X,B,*)$. 但是 $\pi_{m+n+1}(X;A,B,*)$ 与 $\pi_{m+1}(A,A\cap B)\otimes\pi_{n+1}(B,A\cap B)$ 同构.这表示同伦群的切除公理一般不成立. 这说明同伦群和同调群表现很不一样. 假如用纤维空间的 Hurewicz-Steenrod 同构定理(→纤维空间)来代替切除公理,我们能够和同调论一样,建立同伦论的公理化.

【Hurewicz 同构定理】 从 $\pi_n(X, A)$ 到 n 维整系数同调群 $H_n(X, A)$ 的 **Hurewicz 同态**(Hurewicz homomorphism) τ，定义为 $\tau([f]) = f_*(\varepsilon_n)$ (ε_n 是 $H_n(I^n, \dot{I}^n)$ 的生成元). **Hurewicz 同构定理**(Hurewicz isomorphism theorem)：设对 (X, A) 为 $(n-1)$ 连通且 n 单纯(例如当 $A=*$)，则 $H_i(X, A) = 0, (i < n)$，且 $\tau: \pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$ ($n = 1$ → 基本群). 设 X, Y 为单连通拓扑空间，$f: X \to Y$ 为连续映射，则下面两条件等价：1) $f_*: \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$ 当 $i < n$ 时是单射，当 $i \leqslant n$ 时是满射；2) 把 1) 中的同伦群 π_i 换成同调群 H_i(**Whitehead 定理**).

J.-P. Serre 把这些定理推广成下面的形式：Abel 群的族 $\mathscr{C}$ 如满足下列条件 I) 时叫作 **Abel 群类** (class of Abelian groups)，I) 对于 Abel 群的正合序列 $F \to G \to H$，如果 $F, H \in \mathscr{C}$，则 $G \in \mathscr{C}$. 进一步考虑下列条件：II 1) 对于任意的 Abel 群 F，如果 $G \in \mathscr{C}$，则 $G \otimes F \in \mathscr{C}$；II 2) 如果 $F, G \in \mathscr{C}$，则 $F \otimes G$, $\mathrm{Tor}(F, G) \in \mathscr{C}$；III) 如果 $G \in \mathscr{C}$，则其(群的)同调群 $H_i(G) \in \mathscr{C}$ ($i > 0$). 我们有 II 1)⇒II 2). 对于同态 $f: F \to G$，如果 $\mathrm{Ker} f \in \mathscr{C}$，则 f 叫作 $\mathscr{C}$ 单射，如果 $\mathrm{Coker} f = G/\mathrm{Im} f \in \mathscr{C}$，则 f 叫作 $\mathscr{C}$ 满射，如果 f 既是 $\mathscr{C}$ 单射又是 $\mathscr{C}$ 满射，f 就称为 **$\mathscr{C}$ 同构** ($\mathscr{C}$-isomorphism). 两个 Abel 群 G 与 G' 称为 $\mathscr{C}$ 同构，如果存在 $\mathscr{C}$ 同构 $f: F \to G$ 及 $f': F \to G'$. 特别当类 $\mathscr{C}_0$ 只由群 0 构成时，$\mathscr{C}_0$ 同构就是通常的同构. 所有元素的阶数有限且与某素数 p 互素的 Abel 群构成的类记作 $\mathscr{C}_p$，$\mathscr{C}_p$ 同构，…… 也说成是 **mod$p$ 同构** (mod p isomorphism)…. 设有限生成的 Abel 群的类为 $\mathscr{D}$. $\mathscr{C}_p$ 满足 II 1), III)；而 $\mathscr{D}$ 满足 II 2), III). **广义 Hurewicz 定理** (generalized Hurewicz theorem)：A) 设类 $\mathscr{C}$ 满足 II 1), III), (X, A) 是 2 连通，X, A 是单连通. 如果 $\pi_i(X, A) \in \mathscr{C}$ ($i < n$)，则 $H_i(X, A) \in \mathscr{C}$，且 $\tau: \pi_n(X, A) \to H_n(X, A)$ 是 $\mathscr{C}$ 同构. B) 设 $A = *$，满足 II 2), III) 的类 $\mathscr{C}$，对于单连通的 X 与 A) 同样的定理成立. 特别如果 X 单连通，其同调群均为有限生成($\in \mathscr{D}$)(例如单连通有限多面体)，则 X 的同伦群是有限生成. 并且作为定理 A) 的推论，关于 $\mathscr{C}$ 可得广义 J. H. C. Whitehead 定理，特别对于 $\mathscr{D} \cap \mathscr{C}_p$ 可得下面常用的定理："设 X, Y 是单连通且同调群是有限生成的，且 $f: X \to Y$，满足 $f_*\pi_2(X) = \pi_2(Y)$，则下列两条件等价：1) $f_*: \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$，当 $i < n$ 时是 mod p 同构，$i = n$ 时是 mod p 满射；2) $f_*: H_i(X; \boldsymbol{Z}_p) \to H_i(Y; \boldsymbol{Z}_p)$ 当 $i < n$ 时同构，当 $i = n$ 时是满射 ($\boldsymbol{Z}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$). 使用这类的想法得到的一套理论叫 **Serre 的 $\mathscr{C}$ 理论**(Serre's $\mathscr{C}$-theory) ([12]). 这个理论有效地应用了纤维空间的谱序列†，n 连通纤维空间†等概念 (→纤维空间).

一般计算同伦群的方法要用到各种正合序列，纤维空间，n 连通纤维空间的 (上) 同调，Постников 体系†等等. 给定任意群(更一般 Постников 体系)，存在 CW 复形以这些群(系)为其同伦群 (Постников 体系)(同伦群的实现定理). 对于任意的弧连通拓扑空间 X 存在拓扑空间 (X, n) 与连续映射 $p_n: (X, n+1) \to (X, n)$ ($n, = 1, 2, \cdots$) 使下面 1) 2) 两条件成立：1) $((X, n+1), p_n, (X, n))$ 是纤维空间，其纤维是 Eilenberg-MacLane 空间†；2) $(X, 1) = X$, $((X, n+1), p_1 \circ \cdots \circ p_n, X)$ 是 n 连通纤维空间. 通过计算 (X, n) 的(上)同调群来得出同伦群 $\pi_n(X) \cong H_n((X, n))$ 的方法称为**消灭法** (killing method).

【球面的同伦群】 同伦论的一个基本的空间就是球面 S^n，S^n 的同伦群是同伦论发展的基础，因而有了许多研究，但是到现在还没有完全决定出来.

S^n 是 $(n-1)$ 连通的，即 $\pi_i(S^n) = 0$ ($i < n$). 由 Brouwer 映射定理† 得出 $\pi_n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}$ (无限循环群). 从 S^1 的万有覆盖空间† 是可缩的可以推出 $\pi_i(S^1) = 0$ ($i > 1$). 设连续映射 $f: S^{2n-1} \to S^n$ 用单形映射† φ 来逼近，则 S^n 的 n 单形内部一点 $*$ 的原像 $\varphi^{-1}(*)$ 是 $n-1$ 维闭伪流形†，它通过适当的生成元 $\varepsilon \in H_{n-1}(\varphi^{-1}(*))$ 成为可定向†伪流形，利用边缘同构 $\partial: H_n(S^{2n-1}, \varphi^{-1}(*)) \cong H_{n-1}(\varphi^{-1}(*))$ 及同态 $\varphi_*: H_n(S^{2n-1}, \varphi^{-1}(*)) \to H_n(S^n, *)$ 可以决定一个整数 $\gamma(\varphi)$

使得 $\varphi_* \circ \partial^{-1}(\varepsilon) = \gamma(\varphi)\varepsilon_n$ (ε_n 是 S^n 的定向). $\gamma(\varphi)$ 与 φ 的取法无关,令 $\gamma(f) = \gamma(\varphi)$, 如果 $f \simeq g$, 则 $\gamma(f) = \gamma(g)$. $\gamma(f)$ 就称为 f 的 **Hopf 不变量** (Hopf invariant). H. Hopf 定义了 γ, 首先证明了 $\gamma: \pi_3(S^2) \cong \boldsymbol{Z}$ (1931), 继而证明当 n 为奇数时, $\gamma = 0$, n 为偶数时 $\gamma(\pi_{2n-1}(S^n)) \supset 2\boldsymbol{Z}$, $n = 4, 8$ 时, $\gamma(\pi_{2n-1}(S^n)) = \boldsymbol{Z}$ (1935). γ 为同态. H. Freudenthal 通过研究 $f: S^i \to S^n$ 及其同纬映射 $Sf: S^{i+1} \to S^{n+1}$ 的同伦类定义同态 $E: \pi_i(S^n) \to \pi_{i+1}(S^{n+1})$ 为 $E[f] = [Sf]$, 并且证明: 1) $i < 2n-1$ 时, E 是同构; 2) $i = 2n-1$ 时, E 是满射; 3) $i = 2n$ 时 E 的像 = γ 的核 (**Freudenthal 定理**), 并定出 $\pi_{n+1}(S^n) \cong \boldsymbol{Z}_2 (n \geqslant 3)$ (1937). 当 $n = 2, 4, 8$ 时, Hopf 给出的 $\gamma(f) = 1$ 的映射 $f: S^{2n-1} \to S^n$ (Hopf 映射†) 就成为以 S^{2n-1} 为全空间, 以 S^n 为底空间的纤维丛†的射影, 通过对应关系 $(\alpha, \beta) \to E_\alpha + f_*\beta$ 得出同构 $\pi_{i-1}(S^{n-1}) + \pi_i(S^{2n-1})$ (直和) $\cong \pi_i(S^n)$. 因此得出 $\pi_4(S^2) = \boldsymbol{Z}_2$. Л. С. Понтрягин 曾报告 $\pi_{n+2}(S^n) (n \geqslant 3)$ 是 0, 并且长年被信以为真, 后经 G. W. Whitehead 及 Понтрягин 用完全不同的方法证明 $\pi_{n+2}(S^n) = \boldsymbol{Z}_2$ (1949). G. W. Whitehead 还在 $i < 3n-3$ 范围内定义了**广义 Hopf 同态** (generalized Hopf homomorphism) $H: \pi_i(S^n) \to \pi_i(S^{2n-1})$, 后来 P. J. Hilton, Z. M. James 去掉了这个维数的限制. 通过 H, 知道大多数 $\pi_i(S^n)$ 不等于 0. Serre 得到下列的结果 (1951—1953): $\pi_{4m-1}(S^{2m})$ 是 $\boldsymbol{Z}$ 与有限群的直和, 这时除了 $i = n$ 及 $i = 4m-1$, $n = 2m$, $\pi_i(S^n)$ 是有限群. 当 p 为奇素数, n 为偶数时, $\pi_i(S^n)$ 与 $\pi_{i-1}(S^{n-1}) + \pi_i(S^{2n-1})$ $\mathscr{C}_p$ 同构. n 为奇数时, $\pi_{n+k}(S^n) \in \mathscr{C}_p$ $(k < 2p-3)$, $\pi_{n+2p-3}(S^n)$ 与 $\boldsymbol{Z}_p$ 是 $\mathscr{C}_p$ 同构. 当 $k = 3, 4, 5$, Serre 与戸田宏定出了 $\pi_{n+k}(S^n)$, 后 Serre 定出了 $k = 6, 7, 8$ 的情形. James 利用 S^n 的约化积空间†定义序列

$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_i(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{i+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{i+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i-1}(S^n) \to \cdots$$

并且证明当 n = 奇数时是正合序列, 当 n = 偶数时是 mod2 正合序列 (1953). 戸田应用这个正合序列及二次合成†定出 $\pi_{n+k}(S^n)$ 到 $k \leqslant 19$ ([6])(→公式 6 V).

根据 Freudenthal 的定理 1), 当 k 固定时, $\pi_{n+k}(S^n)$ $(n > k+1)$ 互相同构, 这叫作球面的 **k 次稳定同伦群** (stable homotopy group of k-stem), 记作 G_k. 对于 $k = 0, 1, 2, \cdots, 15, \cdots$, $G_k \cong \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_{24}, 0, 0, \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_{240}, \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_6, \boldsymbol{Z}_{504}, 0, \boldsymbol{Z}_3, \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_{480} + \boldsymbol{Z}_2, \cdots$. 为计算 G_k, n 连通纤维空间方法是有效的, 通过 Adams 谱序列 G_k 与 Steenrod 代数†的上同调有密切关系. G_k 的 p-成分决定到 $k < 2p^2(p-1) - 3$ (戸田). 设 $\pi_i(S^n; p)$ 是 $\pi_i(S^n)$ 的 p 成分, 为了研究这些**不稳定** (non-stable) $(i \geqslant 2n-1)$ 情形, 要利用上述的 Serre 的 mod p 直和分解 (n = 偶数), 当 n = 奇数时, 要用下面两个正合序列:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_i(S^n) \xrightarrow{E^2} \pi_{i+2}(S^{n+2}) \to \pi_i(\Omega^2(S^{n+2}), S_n) \xrightarrow{\partial} \cdots,$$

$$\cdots \to \pi_{i+3}(S^{pn+1}; p) \xrightarrow{\Delta} \pi_{i+1}(S^{pn-1}; p) \to \pi_i(\Omega^2(S^{n+1}), S^{n-1}; p) \to \pi_{i+2}(S^{pn+1}; p) \xrightarrow{\Delta} \cdots,$$

其中 $E^2 = E \circ E$, $\Delta E^2(\alpha) = p\alpha$ (→公式 6 V).

【典型群†的同伦群】 对于典型群 $U(n, \Lambda)$ (令 $= O(n)$ $(\Lambda = \boldsymbol{R})$; $= U(n)$ $(\Lambda = \boldsymbol{C})$; $= Sp(n)$ $(\Lambda = \boldsymbol{H})$) 及无限典型群† $U(\infty, \Lambda)$, 因为 $U(\infty, \Lambda) - U(n, \Lambda)$ 的胞腔的维数 $\geqslant \lambda(n+1) - 1$ ($\lambda = \dim_R \Lambda$ $(= 1, (\lambda = \boldsymbol{R}), = 2 (\lambda = \boldsymbol{C}), = 4 (\lambda = \boldsymbol{H}))$), 所以当 $k < \lambda(n+1) - 2$ 时, $\pi_k(U(n, \Lambda))$ 与 $\pi_k(U(\infty, \Lambda))$ 同构, 称之为典型群 (正交群†, 酉群†, 辛群†) 的 **k 次稳定同伦群**. 令 $\boldsymbol{O} = U(\infty, \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{U} = U(\infty, \boldsymbol{C})$, $\boldsymbol{Sp} = U(\infty, \boldsymbol{H})$. 典型群的稳定同伦群有周期性 $(k \geqslant 0)$:

$$\pi_k(\boldsymbol{U}) \cong \pi_{k+2}(\boldsymbol{U}) \cong \boldsymbol{Z}, \ k = \text{奇数}, \quad \cong 0, \ k = \text{偶数},$$

$$\pi_k(\boldsymbol{O}) \cong \pi_{k+4}(\boldsymbol{Sp}) \cong \pi_{k+8}(\boldsymbol{O}) \cong \boldsymbol{Z}, \ k \equiv 3, 7 \pmod 8; \quad \cong \boldsymbol{Z}_2, \ k \equiv 0, 1 \pmod 8; \quad \cong 0, \ k \not\equiv 0, 1, 3, 7 \pmod 8.$$

这称作 **Bott 的周期性定理** (Bott's periodicity theorem). 这些同构是由弱同伦等价映射†: $\boldsymbol{U}\to\Omega(B_U)$, $B_U\times\boldsymbol{Z}\to\Omega(\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{O}\to\Omega(B_O)$, $B_O\times\boldsymbol{Z}\to\Omega(\boldsymbol{U}/\boldsymbol{O})$, $\boldsymbol{U}/\boldsymbol{O}\to\Omega(\boldsymbol{Sp}/\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{Sp}/\boldsymbol{U}\to\Omega(\boldsymbol{Sp})$, $\boldsymbol{Sp}\to\Omega(B_{SP})$, $B_{SP}\times\boldsymbol{Z}\to\Omega(\boldsymbol{U}/\boldsymbol{Sp})$, $\boldsymbol{U}/\boldsymbol{Sp}\to\Omega(\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U})$, $\boldsymbol{O}/\boldsymbol{U}\to\Omega(\boldsymbol{O})$ 诱导出来. 且这个结果也可应用于非稳定的情形. 例如证明 $\pi_{2n}(U(n))$ 是阶数 $n!$ 的循环群(→公式 6V). 又 Lie 群 G 的二维同伦群 $\pi_2(G)$ 为 0.

设 $\alpha\in\pi_k(O(n))$, $\alpha=[f]$, $f:S^k\to O(n)$, 定义 $\bar{f}:S^k\times S^{n-1}\to S^{n-1}$ 为 $\bar{f}(x,y)=f(x)\cdot y$, 把 S^{k+n} 看成 $E^{k+1}\times E^n$ 的边缘 $(E^{k+1}\times S^{n-1})\cup(S^k\times E^n)$, 设 $S^{k+n}\to S^n$ 是扩张 $\bar{f}$ 的映射,分别把 $E^{k+1}\times S^{n-1}$ 及 $S^k\times E^n$ 映到 S^n 的上、下半球 (S^{n-1} 为赤道), 这个映射的同伦类记作 $J(\alpha)\in\pi_{n+k}(S^n)$. 由此得到的同态 $J:\pi_k(O(n))\to\pi_{n+k}(S^n)$ 称为 Hopf-Whitehead **J 同态** (J-homomorphism). 在稳定的情形 $J:\pi_k(\boldsymbol{O})\to G_k$, 当 $k\equiv 0,1 \pmod 8$ 时是单射, $k=4t-1$ 时, J 的象的阶数为 $|B_{2t}|/4t$ (B_{2t} 是 Bernoulli 数†) 的分母或分母的二倍 (J. F. Adams).

【上同伦群】 K. Borsuk 定义了 X 到 S^n 的映射类的和 (1936), E. Spanier 把由此得到的群命名为 Borsuk **上同伦群** (cohomology group), 并讨论了它与同伦群的对偶性及与上同调群的关系. 我们用 $\pi^n(X,A)=\pi(X,A;S^n,*)$ 表示 (X,A) 的上同伦群. 只有当 X/A 的维数 $<2n-1$ 的条件下, $\pi^n(X,A)$才构成群. 由 f,g: $X/A\to S^n$ 通过 $F(x)=(f(x),g(x))$ 得到一个映射 $F:X/A\to S^n\times S^n$, 则 F 与 X/A 到 $S^n\vee S^n$ 的映射同伦. 如果把 F 与折叠映射 $S^n\vee S^n\to S^n$ (满射)合成, 我们就得到一个映射, 它表示和 $[f]+[g]$. (→同伦).

【参】 [1] N. E. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951; [2] 河田敬義-大口邦雄,位相幾何学,朝倉, 1967; [3] P. J. Hilton, An introduction to homotopy theory, Cambridge Univ. Press, 1953; [4] 小松醇郎-中岡稔-戸田宏,位相幾何学 I, II, 共立出版, 1957; [5] S. T. Hu (胡世桢), Homotopy theory, Academic Press, 1959; [6] H. Toda(戸田宏), Composition methods in homotopy groups of spheres, Princeton Univ. Press, 1962; [7] H. Hopf, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimension, Fund. Math., **25**(1935) 427—440; [8] W. Hurewicz, Beiträge zur Topologie der Deformationen I—IV, Proc. Acad. Amsterdam, **38**(1935), 112—119, 521—528; **39**(1936), 117—126, 215—224; [9] H. Freudenthal, Über die Klassen der Sphärenabbildungen, Compositio Math., **5**(1937), 299—314; [10] G. W. Whitehead, A generalization of the Hopf invariants, Ann. of Math. **51**(1950), 192—237; [11] A. L. Blakers-W. S. Massey, The homotopy groups of a triad II, Ann. of Math., **55**(1952), 192—201; [12] J.-P. Serre, Groupes d'homotopie et classes des groupes abéliens, Ann. of Math., **58**(1953), 258—294; [13] R. Bott, The stable homotopy of the classical groups, Ann. of Math., **70**(1959), 313—337.

同伦运算 [英 homotopy operation 法 opération homotopique 德 Homotopieoperation 俄 гомотопический оператор 日 ホモトピー作用素]

设 X, Y, X', Y' 为拓扑空间. Φ 称为一个**同伦运算**,如果对于连续映射 $f\in Y^X$, Φ 使 f 对应一个同伦类 $\Phi(f)\in\pi(X';Y')$, 它是同伦不变量† (即 Φ 是从 $\pi(X;Y)$ 到 $\pi(X';Y')$ 的映射), 且 Φ 具有某种自然性(→同伦). 一般可把 Φ 看成是 $\pi(X_1;Y_1)\times\cdots\times\pi(X_r;Y_r)$ 到 $\pi(X';Y')$ 的映射. Φ 的**自然性** (naturality) 的意义是指: 考虑拓扑空间范畴† $\mathscr{C}$ (或其子范畴), 设 $Y=Y'$ 为$\mathscr{C}$中任意的对象†,固定 X, X'. 这时同伦运算 $\Phi_Y:\pi(X;Y)\to\pi(X';Y)$ 的自然性是指对于范畴$\mathscr{C}$的任意射† (连续映射) $g:Y\to Z$, 下列图表可交换:

$$\begin{array}{ccc}\pi(X;Y) & \xrightarrow{\Phi_Y} & \pi(X';Y)\\ \downarrow g_* & & \downarrow g_*\\ \pi(X;Z) & \xrightarrow{\Phi_Z} & \pi(X';Z),\end{array}$$

即 $g_*\circ\Phi_Y=\Phi_Z\circ g_*$ 成立. 同样,固定范畴$\mathscr{C}$的对象 Y, Y', 设 $X=X'$ 是$\mathscr{C}$的任意对象,同伦运算 $\Phi_X:\pi(X;Y)\to\pi(X;Y')$ 的自然性是指对于任意射 $h:W\to X$, $h^*\circ\Phi_X=\Phi_W\circ h^*$ 成立.

定理: 对于拓扑空间与连续映射的范畴 $\mathscr{C}$,同伦运算 $\Phi_Y:\pi(X;Y)\to\pi(X';Y)$与 $\pi(X';X)$ 的元素一一对应. 这个对应是使 $\alpha\in\pi(X';X)$ 与同伦运算 $\Phi(\beta)=\alpha\circ\beta$ $(\beta\in\pi(X;Y))$ 相对应. 同样, 同伦运算 $\Phi_X:\pi(X;Y)\to\pi(X;Y')$ 与 $\pi(Y;Y')$的元素一一对应. 这个定理在

多变量情形也成立，但要通过 $\pi(X'; X_1\vee X_2\vee\cdots)$ 或 $\pi(Y_1\times Y_2\times\cdots; Y')$ 来进行对应．上面的空间换成空间组，定理也成立．

【同伦群的同伦运算】 i) X, X' 为带基点的球面 S^n, S^p, Y, Y' 为带基点的拓扑空间的情形，这时同伦运算 $\Phi_Y:\pi_n(Y)\to\pi_p(Y)$ 称为 (n, p) 型．由上述定理，(n, p) 型同伦运算与球面同伦群† $\pi_p(S^n)$ 一一对应．

ii) 两变量 $(m, n; p)$ 型的同伦运算 $\Phi_Y:\pi_m(Y)\times\pi_n(Y)\to\pi_p(Y)$的例子有 Whitehead 积．把 $\alpha\in\pi_m(Y)$ 及 $\beta\in\pi_n(Y)$ 分别用 $f:(I^m,\dot I^m)\to(Y,*)$, $g:(I^n,\dot I^n)\to(Y,*)$来代表，由 $I^{m+n}=I^m\times I^n$ 的边缘 $\dot I^{m+n}=(I^m\times\dot I^n)\cup(\dot I^m\times I^n)$ 到 Y 的连续映射 F 定义为 $F(x, y)=f(x)$，当 $(x, y)\in I^m\times\dot I^n$, $F(x, y)=g(y)$ 当 $(x,y)\in\dot I^m\times I^n$．因为 $\dot I^{m+n}$ 与 S^{m+n-1} 同胚，通过适当的同胚，F 所表示的同伦类是 $\pi_{m+n-1}(Y)$ 的元素，称为 α 与 β 的 **Whitehead 积** (Whitehead product) 记作 $[\alpha,\beta]\in\pi_{m+n-1}(Y)$ (J. H. C. Whitehead, Ann. of Math., **42**(1941))．Whitehead 积是 $(m, n; m+n-1)$ 型同伦运算．

设 $\phi_m:(I^m,\dot I^m)\to(S^m,*)$ 是把 $\dot I^m$ 缩为一点的映射，定义 ϕ_m 与同样的 ϕ_n 的积映射为 $\phi_{m,n}: S^{m+n-1}\to S^m\vee S^n=(S^m\times\{*\})\cup(\{*\}\times S^n)$，设 S^m, S^n 到 $S^m\vee S^n$ 的自然单射的同伦类为 $\iota\in\pi_m(S^m\vee S^n)$ 及 $\iota'\in\pi_n(S^m\vee S^n)$，则 $\phi_{m,n}$ 的同伦类就是 $[\iota,\iota']$．G. W. Whitehead 证明：当 $1<p<m+n+\min(m,n)-3$ 时，直和分解 $\pi_p(S^m\vee S^n)=\iota_*\pi_p(S^m)+\iota'_*\pi_p(S^n)=[\iota,\iota']_*\pi_p(S^{m+n-1})$ ($\iota_*, \iota'_*, [\iota,\iota']_*$ 是单射) 成立．P. Hilton 推广到更一般的情形，证明 $p>1$ 时，$\pi_p(S^m\vee S^n)$ 是 $\iota_*, \iota'_*, [\iota,\iota']_*, [[\iota,\iota'],\iota]_*, [[\iota,\iota'],\iota']_*$ 等单射的象的直和．$(m, n; p)$ 型同伦运算与 $\pi_p(S^m\vee S^n)$ 的元素一一对应，因此可用合成及 Whitehead 积来表示．这同样对 $(m_1, m_2, \cdots, m_r; p)$ 型同伦运算也成立．Whitehead 积 $[\alpha,\beta]$ $(\alpha\in\pi_m(X), \beta\in\pi_n(X))$ $m>1$ $(n>1)$ 对于 α 及 β 分配律成立．且满足 $[\beta,\alpha]=(-1)^{mn}[\alpha,\beta]$ 及 $f_*[\alpha,\beta]=[f_*\alpha, f_*\beta]$($f: X\to Y$)．更设 $\gamma\in\pi_r(X)$，则下述 **Jacobi 恒等式** (Jacobi's identity) 成立：$(-1)^{mr}[[\alpha,\beta],\gamma]+(-1)^{mn}[[\beta,\gamma],\alpha]+(-1)^{rn}[[\gamma,\alpha],\beta]=0$ (中岡稔-戸田宏，上原博-W. S. Massey，张素诚，Hilton)．

【同纬映射及广义 Hopf 不变量】 $\alpha\in\pi(X; Y)_0$ 与 $\beta\in\pi(X'; Y')_0$ 的代表映射的约化联接†的类记作 $\alpha\wedge\beta\in\pi(X\wedge X'; Y\wedge Y')_0$，称为 α 与 β 的**约化联接** (reduced join)．当 $Y=Y'=S^1$, β 是 S^1 的恒等映射的类时，$\alpha\wedge\beta$ 是 α 的**同纬映射** (suspension) $S\alpha\in\pi(SX; SY)_0$ 是映射 f 的同纬映射† Sf 的类(一般 SX 表示X的同纬映射†的象)．同纬映射 $S\alpha$ 常常采用德文 Einhängung 的第一字母而记作 $E\alpha$．从 SY 的恒等映射 1 可造 $i=\Omega_0 1: Y\to\Omega SY$ 为 $i(y)(t)=(y, t)$, i 是单射．(一般 $\Omega(Y)$ 表示 Y 的闭路空间†.)这时 $i_*=\Omega_0\circ S:\pi(X; Y)_0\to\pi(SX; SY)_0\xrightarrow{\cong}\pi(X; \Omega SY)_0$ 成立，S 与 i_* 等价．在 k 个 Y 的积空间 $Y\times\cdots\times Y$ 的点之间引入等价关系 $(*, y_1, y_2, \cdots, y_{k-1})=(y_1, *, y_2, \cdots, y_{k-1})=\cdots=(y_1, \cdots, y_{k-1}, *)$，模这个等价关系所得的空间记作 Y_k．通过 $(y_1, \cdots, y_{k-1})\to(y_1, \cdots, y_{k-1}, *)$ 可得单射 $Y_{k-1}\to Y_k$，这一串映射的极限空间记作 $Y_\infty=\bigcup_k Y_k$，称为 Y 的**约化积空间** (reduced product space)．设 Y 为 CW 复形，其 0 维骨架†为 $*$，则 $i: Y=Y_1\to\Omega SY$ 可扩张成 $\bar i: Y_\infty\to\Omega SY$，而 $\bar i$ 是弱同伦等价†．如果 X 也是 CW 复形，则 $\Omega_0^{-1}\circ\bar i_*:\pi(X, Y_\infty)_0\to\pi(SX, SY)_0$ 是双射．把 Y_2 的子集 Y 缩成一点，则 $Y\wedge Y=Y_2/Y$．这个映射能够扩张成 $h: Y_\infty\to(Y\wedge Y)_\infty$ (I. M. James)．用上面双射代入 $h_*:\pi(X, Y_\infty)_0\to\pi(X, (Y\wedge Y)_\infty)_0$ 就得到对应 $H:\pi(SX, SY)_0\to\pi(SX, S(Y\wedge Y))_0$, $H(\alpha)$ 就称为 α 的**广义 Hopf 不变量** (generalized Hopf invariant)．当 $X=S^{2n-2}$, $Y=S^{n-1}$ 时，它就等同于 Hopf 不变量† $\gamma:\pi_{2n-1}(S^n)\to\mathbf{Z}$．一般有 $H\circ S=0$，且在各种条件下，$\xrightarrow{S}\xrightarrow{H}$ 的正合性成立 (→同伦群)．S 及合成满足 $S(\alpha\circ\beta)=S\alpha\circ S\beta$，且 H 满足 $H(\alpha\circ S\beta)=H(\alpha)\circ S\beta$．又 $H(S\alpha\circ\beta)=S(\alpha\wedge\alpha)\circ H(\beta)$．在条件 $i<3n-3$

下，关于 $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n(X)$，$\beta \in \pi_i(S^n)$，有 $(\alpha_1 + \alpha_2)\circ\beta = \alpha_1\circ\beta + \alpha_2\circ\beta + [\alpha_1,\alpha_2]\circ H(\beta)$ 成立 (G. W. Whitehead)．因此对合成来说，左分配律一般不成立，而右分配律总成立，当 $\beta = S\beta'$ 时左分配律成立．在球面的稳定同伦群† G_γ 之间可以定义合成 $\alpha\circ\beta \in G_{p+q}(\alpha \in G_p, \beta \in G_q)$ 且分配律成立，还有 $\beta\circ\alpha = (-1)^{pq}\alpha\circ\beta$．

如果 Y, Y' 是 Eilenberg-MacLane 空间†，B_O，B_U 等空间，就能得出上同调群 $H^n(;\Pi)$，KO 群，K 群等群之间的上同调运算†．典型的例子可举出：Steenrod 运算† Sq^i: $H^n(X;\boldsymbol{Z}_2) \to H^{n+i}(X;\boldsymbol{Z}_2)$，$\mathscr{P}^i: H^n(X;\boldsymbol{Z}_p) \to H^{n+2i(p-1)}(X;\boldsymbol{Z}_p)$，陈特征标† $ch^n: K(X) \to H^{2n}(X;\boldsymbol{Q})$ ($\boldsymbol{Q}$ 为有理数域)，Adams 运算† $\phi_i: KO(X) \to KO(X)(K(X) \to K(X))$，这些都是同态（→上同调运算，$K$ 理论）．

【二次合成】 设 $\gamma \in \pi(W;X)_0$，$\beta \in \pi(X;Y)_0$，$\alpha \in \pi(Y;Z)_0$，假定 $\alpha\circ\beta = 0$，$\beta\circ\gamma = 0$，在 Puppe 的正合序列†的交换图示

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{S\gamma^*} & \pi(SW;Y)_0 & \xrightarrow{p^*} & \pi(C_\gamma;Y)_0 & \xrightarrow{i^*} & \pi(X;Y)_0 & \xrightarrow{\gamma^*} \\ & \downarrow\alpha_* & & \downarrow\alpha_* & & \downarrow\alpha_* & \\ \xrightarrow{S\gamma^*} & \pi(SW;Z)_0 & \xrightarrow{p^*} & \pi(C_\gamma;Z)_0 & \xrightarrow{i^*} & \pi(X;Z)_0 & \xrightarrow{\gamma^*} \end{array}$$

中，把满足 $p^*(\bar{\beta}) \in \alpha_* i^{*-1}(\beta)$ 的元素 $\bar{\beta}$ 的集合记作 $\{\alpha,\beta,\gamma\}$，称为**二次合成** (secondary composition) 或**戸田括号** (Toda bracket)．$\{\alpha,\beta,\gamma\}$ 是模 $\alpha_*\pi(SW;Y)$ 与 $S\gamma^*\pi(SX;Z)$ 的一个剩余类．

二次合成的性质：1) 对于 α,β,γ 是线性的(当和有定义时)；2) $\alpha\circ\{\beta,\gamma,\delta\} = \{\alpha,\beta,\gamma\}\circ(-S\delta)$；3) $S\{\alpha,\beta,\gamma\} = -\{S\alpha,S\beta,S\gamma\}$；4) $\alpha\circ\{\beta,\gamma,\delta\} \equiv \{\alpha\circ\beta,\gamma,\delta\}$，$\{\alpha\circ\beta,\gamma,\delta\} \equiv \{\alpha,\beta\circ\gamma,\delta\}$，…；5) $\{\{\alpha,\beta,\gamma\},S\delta,S\varepsilon\} + \{\alpha,\{\beta,\gamma,\delta\},S\varepsilon\} + \{\alpha,\beta,\{\gamma,\delta,\varepsilon\}\} \equiv 0$．如果各空间 X, Y, Z 均为球面，则由 3)，对于球面的稳定同伦群 $G_\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\pi_{n+1}(S^n)$，能够定义二次合成 $\{\alpha,\beta,\gamma\} \in G_{p+q+r+1}/(\alpha\circ G_{q+r+1} + \gamma\circ G_{p+q+1})$．这时，下面两式成立：6) $\{\gamma,\beta,\alpha\} = (-1)^{pq+qr+rp+1}\{\alpha,\beta,\gamma\}$；7) $(-1)^{pr}\{\alpha,\beta,\gamma\} + (-1)^{qp}\{\beta,\gamma,\alpha\} + (-1)^{rq}\{\gamma,\alpha,\beta\} \equiv 0$．

【泛函运算】 设 Φ 为与 α 对应的运算，γ 为 f 的类，定义 $\Phi_f(\beta) = \{\alpha,\beta,\gamma\}$，则 Φ_f 叫作**泛函 Φ 运算** (functional Φ-operation)．当 Φ 为上同调运算时，就称为**泛函上同调运算** (functional cohomology operation)．当 β 满足 $f^*(\beta) = \Phi(\beta) = 0$ 时，可定义 Φ_f 决定到模 $\mathrm{Im}\,Sf^* + \mathrm{Im}\,\Phi$．当 $f: S^{n+k} \to S^n$，$k = 2i(p-1)-1$，在**泛函 $\mathscr{P}^i$ 运算** $\mathscr{P}^i_f$ 的作用下，$H^n(S^n;\mathbf{Z}_p)$ 的生成元 ε_n 的象设为 $H_p(f)\cdot\varepsilon_{n+k+1} \in H^{n+k+1}(S^{n+k+1};\mathbf{Z}_p)$，由此得出**模 p Hopf 不变量**或 **mod p Hopf 不变量** (mod p Hopf invariant) $H_p: \pi_{n+k}(S^n) \to \boldsymbol{Z}_p$ ($p = 2$ 时用 Sq^{2i})．下列各命题是相互等价的：i) mod 2 Hopf 不变量是非平凡的 ($H_2 \neq 0$)；ii) 存在 Hopf 不变量为 1 的映射 $S^{2k+1} \to S^{k+1}$；iii) S^k 是 H 空间；iv) $\pi_k(S^k)$ 的生成元 ι 的Whitehead 积 $[\iota,\iota] = 0$．$H_2 \neq 0$ 只限于 $k = 2, 4, 8$ 的情形 (J. Adams)．对于奇素数 p，$H_p \neq 0$ 只限于 $k = 2p-3$ 的情形 (A. L. Liulevicius，島田信夫-山ノ下常与)．

【参】 [1] P. J. Hilton, An introduction to homotopy theory, Cambridge Univ. Press, 1953; [2] 小松醇郎-中岡稔-戸田宏，位相幾何学 I, II, 共立出版，1957; [3] S. T. Hu(胡世桢), Homotopy theory, Academic Press, 1959; [4] H. Toda(戸田宏), Composition methods in homotopy groups of spheres, Princeton Univ. Press, 1962; [5] E. H. Spanier, Secondary operations on mappings and cohomology, Ann. of Math., **75**(1962), 260—282; [6] H. Hopf, Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedriger Dimension, Fund. Math., **25**(1935), 427—440; [7] H. Freudenthal, Über die Klassen der Sphärenabbildungen, Compositio Math., **5**(1937), 299—314; [8] G. W. Whitehead, A generalization of the Hopf invariant, Ann. of Math., **51**(1950), 192—237; [9] 张素诚，论雅各必恒等式，数学学报，**4**(1954), 3, 365—379.

Eilenberg-MacLane 复形 [英 Eilenberg-MacLane complex 法 complexe d'Eilenberg-MacLane 德 Eilenberg-MacLanesche Komplexe 俄 комплекс Эйленберга-Маклейна 日 アイレンバーグ・マックレイン複体] 弧连通†的拓扑空间 X 称为 **Eilenberg-MacLane 空间** (Eilenberg-MacLane space)，如果 X 的 i 维同伦群† $\pi_i(X)$，除了 $i = n(\geqslant 1)$ 外均为 0，而 $\pi_n(X)$ 同构于已

给的群 π（它在 $n \geqslant 2$ 时是交换群）．设 $S(X)$ 是 X 的奇异复形†，$M(X)$ 是 $S(X)$ 的极小复形†．这时 $M(X)$ 仅由 π 及 n 决定，是某个 Kan 复形†．这个复形称为 **Eilenberg-MacLane 复形**，记作 $K(\pi, n)$．也有不少人就用同样的记号表示原来的空间 X．这时 X 的奇异(上)同调群与 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{n})$ 的(上)同调群同构．

【$K(\pi, n)$】 设 $\Delta(q)$ 是 q 维单形 $\{0, 1, \cdots, q\}$，$K(\pi, n)$ 由 $K(\pi, n)_q = Z^n(\Delta(q); \pi)$，$\partial_i\sigma = \sigma\varepsilon_i$，$s_i\sigma = \sigma\eta_i$ 来定义．$K(\pi, n)$ 可用如下的归纳法构造出来．$K(\pi, 0)_q = \pi$，$K(\pi, n)_q = K(\pi, n-1)_{q-1} \times \cdots \times K(\pi, n-1)_0$．由以上对应，$K(\pi, n)$ 的 q 维单形 σ 用 $\sigma_r \in K(\pi, n-1)_r$ $(0 \leqslant r \leqslant q-1)$ 的序列 $\langle\sigma_{q-1}, \cdots, \sigma_0\rangle$ 表示时，$\partial_i\sigma$，$s_i\sigma$ 由 $\partial_j\sigma_r$，$s_j\sigma_r$ $(0 \leqslant j \leqslant r,\ 0 \leqslant r \leqslant q-1)$ 决定．这种造法称为 **W 构造**(W-construction)．S. Eilenberg-S. MacLane 用来求出 $K(\pi, n)$ 的以 G 为系数的同调群 $H_*(\pi, n; G)$ 的方法是 **W 构造**及**棒构造**(bar construction)（[1]）．后经 H. Cartan 将这个方法改进，用所谓 Cartan 构造的想法完全决定了 $K(\pi, n)$ 的（上）同调结构（→公式 6 III）．特别从 $K(\pi, n)_n \cong \pi$ 得出 $H^n(\pi, n; \pi) \cong \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$．在这个对应之下，恒等映射 $1: \pi \to \pi$ 所对应的 $K(\pi, n)$ 的上同调类称为**基本上同调类**(fundamental cohomology class)写作 $\boldsymbol{u}^n$．

设 X 为 CW 复形†，连续映射 $f: X \to K(\pi, n)$ 的同伦类† $[f]$ 与 $H^n(X; \pi)$ 的元素 x 在关系 $x = f^*\boldsymbol{u}^n$ 下是一一对应．即 $\pi(X; K(\pi, n)) \cong H^n(X; \pi)$（→同伦）．

【Постников 复形】 设空间 X 满足 $\pi_i(X) = 0$ $(i \neq m, n)$，$\pi_m(X) \cong \pi'$，$\pi_n(X) \cong \pi''$ $(0 < m < n)$，$\pi_1(X)$ 简单地作用于 $\pi_i(X)$ 上（→同伦群）．设空间 Y 满足 $\pi_i(Y) = 0$ $(i \neq m)$，$\pi_m(Y) \cong \pi'$；空间 Z 满足 $\pi_i(Z) = 0$ $(i \neq n+1)$，$\pi_{n+1}(Z) \cong \pi''$．由 Y 到 Z 的映射 f 从 Z 上可缩的† 纤维空间† EZ 导出 $f^{\#}EZ$．则 X 与 $f^{\#}EZ$ 具有相同的同伦型†．从而该同伦型由 π'，π'' 以及 $f^{\#}EZ$ 的示性类 $\tau_u^n = f^*\boldsymbol{u}^{n+1} \in H^{n+1}(\pi', m; \pi'')$ 决定．这个示性类叫作 **Eilenberg-Постников 不变量**(Eilenberg-Postnikov invariant)，通常用 $\boldsymbol{k}^{n+1}$ 表示．CW 复形 X' 的连续映射 $g: X' \to Y$ 可以提升成连续映射 $f: X' \to X$，使得 $p \circ f = g$ 当且仅当 $f^*k^{n+1} = 0$，此处 $p: X \to Y$ 是自然射影(→障碍理论)．

设 $k^{n+1} \in Z^{n+1}(K(\pi', m); \pi'')$ 为 $\boldsymbol{k}^{n+1}$ 的代表元，则 X 的极小复形和用下述方法定出的 Kan 复形 $K = K(\pi', m, k^{n+1}, \pi'', n)$ 同构．$K_q \cong K(\pi'', n)_q \times K(\pi', m)_q$．$K$ 的 q 维单形用一对元素 $\tau \times q$ 表示，$\tau \in K(\pi'', n)_q$ 及 $\sigma \in K(\pi', m)_q$，$\hat{\sigma}: \Delta(q) \to K(\pi', m)$ 是与 ∂_i，s_i 可交换的映射(→复形)，其中 $\hat{\sigma}(0, 1, \cdots, q) = \sigma$，$\hat{\sigma}^{\#}k^{n+1} = \langle\rho_{q-1}, \cdots, \rho_0\rangle \in Z^{n+1}(\Delta(q); \pi'') = K(\pi'', n+1)_q$ $(\rho_i \in K_i(\pi'', n)_i)$．$\partial_i$，$s_i$ 分别由 $\partial_0(\tau \times \sigma) = \rho_{q-1} \cdot \partial_0\tau \times s_i\sigma$，$\partial_i(\tau \times \sigma) = \partial_i\tau \times \partial_i\sigma$ $(i > 0)$，$s_i(\tau \times \sigma) = s_i\tau \times s_i\sigma$ 来定义．并且满足 $\pi_l(X) = 0$ $(l > n)$，$\pi_i(X) \cong \pi^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$ 的空间 X 的极小复形与由 $\pi^{(i)}$ 及用 $\boldsymbol{k}^{j+1}$ $(j < i)$ 和 $\pi^{(j)}$ $(j \leqslant i)$ 定义的某示性类 $\boldsymbol{k}^{i+1}$ 的某等价类所决定的 Kan 复形 $X_n = K(\pi^{(1)}, \boldsymbol{k}^3, \pi^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{k}^{n+1}, \pi^{(n)})$ 同构．一般来说，任意空间 X 的极小复形与由 $\pi_i(X) \cong \pi^{(i)}$ 及 $\boldsymbol{k}^{i+1} \in H^{i+1}(X_{i-1}; \pi^{(i)})$ 所决定的 Kan 复形 X_∞ 同构．这个复形 X_∞ 称为 **Постников 复形**(Postnikov complex)．

已给 $\pi^{(i)}$，$\boldsymbol{k}^{i+1}$ 时，计算 Постников 复形的同调群的有效方法以及群的结构等等，我们现在还一无所知．

【对称积】 设 X 为拓扑空间，$SP^n X$ 为 n 个 X 的**对称积**(symmetric product)（即 $X^n = X \times \cdots \times X$ 在 n 次对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的作用下的等价类 $X^n/\mathfrak{S}_n$）．设 $X^{(i)}$ 是满足 $\pi_j(X^{(i)}) = 0$ $(j \neq i)$，$\pi_i(X^{(i)}) \cong H_i(X)$ 的空间，则 $SP^\infty X$ 与 $\prod_i X^{(i)}$ 具有相同同伦型．特别有 $M(SP^\infty S^n) \cong K(\boldsymbol{Z}, n)$（[4]）．利用这个结果把上同调运算†的两个定义(即 N. E. Steenrod 用对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的定义和 Eilenberg 及 Serre 用 $K(\pi, n)$ 的定义)之间的关系搞清楚了(A. Dold，中村得之，1959)．另

外，关于 SP^nX 的上同调群还有中岡稔的研究工作（1957）.

【参】［1］ S. Eilenberg-S. MacLane, On the groups $H(\pi, n)$, I—III, Ann. of Math., **58**(1953), 55—106, **60** (1954), 49—139, 513—557; ［2］ J.-P. Serre, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helv., **27** (1953), 198—232; ［3］ H. Cartan, Séminaire de H. Cartan, 1954—55, Paris; ［4］ A. Dold-R. Thom, Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, Ann. of Math., **67** (1958), 239—281; ［5］ E. H. Spanier, Algebraic topology, McGraw-Hill, 1966; ［6］ A. Dold, Über die Steenrodschen Kohomologieoperationen, Ann. of Math., (2) **73** (1961), 258—294; ［7］ T. Nakamura (中村得之), On cohomology operations, Japan. J. Math., **33**(1963), 93—145; ［8］ M. Nakaoka (中岡稔), Decomposition theorem for homology groups of symmetric groups, Ann. of Math., (2) **71** (1960), 16—42.

Lie 群与齐性空间的拓扑［英 topology of Lie groups and homogeneous spaces　法 topologie des groupes de Lie et espaces homogènes　德 Topologie der Lieschen Gruppen und homogenen Räume　俄 топология группы Ли и однородного пространства　日 リー群と等質空間の位相］ 研究 Lie 群与齐性空间的拓扑时，特别要论及其(上)同调群† 及同伦群†. 把齐性空间表为 Lie 群 G 对于其闭子群 H 的商空间 G/H 时，$(G, G/H, H)$ 就成为以 G/H 为底空间，以 H 为纤维的纤维丛†. 从而可用纤维丛的同调论、同伦论（谱序列†，同伦序列的正合性等等）来研究. 我们已经知道 Stiefel 流形†，Grassmann 流形†，Kähler 齐性空间等的胞腔剖分†，这在同调和同伦中也起作用. 对于对称 Riemann 空间†，有应用不变微分形式论述实上同调环的理论([7])，有利用 Morse 理论的基本定理†把它的闭路空间†及其有关的齐性空间的同调与 G/H 的图式(diagram) 联系在一起的理论 ([4], [5]) 等等. 一方面 Lie 群本身也可以看成齐性空间的特殊情形或对称空间的特殊情形来研究，另一方面利用群的乘法也能进行种种研究（[10], [11], [12]）. 由于连通 Lie 群与其某个紧子群和 Euclid 空间的直积同胚（Cartan-Мальцев-岩沢定理†），Lie 群的拓扑通常只限于讨论紧群的情形.

【紧 Lie 群的同调】 设 G 为紧、连通 Lie 群. G 通过群的乘法 h 而成为 H 空间†，从而对于任意系数域 k，$H^*(G; k)$，$H_*(G; k)$ 成为互相对偶的 Hopf 代数†. $H^*(G; k)$ 作为分次代数†与初等 Hopf 代数的张量积†同构（→Hopf 代数）. 但因 G 是有限多面体†，故其张量积因子中不能出现多项式环†. 特别当 $k=\boldsymbol{R}$（实数域）时，$H^*(G; \boldsymbol{R}) \cong \wedge_{\boldsymbol{R}}(x_1, \cdots, x_l)$（具有奇数次生成元 $x_1, \cdots, x_l$ 的 $\boldsymbol{R}$ 上的 Grassmann 代数†）. 我们可以选取生成元 x_i 使得 $h^*(x_i) = 1 \otimes x_i + x_i \otimes 1$ $(1 \leqslant i \leqslant l)$ ([10]). 具有这个性质的 x_i 称为**本原的**（primitive）. 因此，$H^*(G; \boldsymbol{R})$ 的对偶乘法† h^* 是可交换的，从而乘法 h_* 也可交换，而且 Hopf 代数 $H_*(G; \boldsymbol{R})$ 也是与 x_i 相同次数的奇数次生成元 y_i 生成的 Grassmann 代数([12]). 当域 k 的特征 $\neq 0$ 时，h_* 一般是不可换的.

紧连通 Lie 群 G 的极大环面群的维数 r 是一定的. r 称为 G 的**秩**（rank）. G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的极大交换子代数是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数，其维数就等于 r. Lie 群 G 的秩与 $H^*(G; \boldsymbol{R})$ 的生成元的个数相等 ([7], [11]). E. Cartan 用不变微分形式讨论 $H^*(G; \boldsymbol{R})$([7])，这个方法后来产生出 Lie 代数的上同调理论. $H^*(G; \boldsymbol{R})$ 在群 G 的局部同构†下不变. 对于各种单群的局部同构类的 $H^*(G; \boldsymbol{R})$，典型紧单 Lie 群†的 $H^*(G; \boldsymbol{R})$ 是由 R. Brauer ([6]) 计算的，而例外紧单 Lie 群†的是由严志达 (C.-T. Yen [13]) 及 C. Chevalley ([9]) 计算的 (→公式 6 IV). 设 $H^*(G; \boldsymbol{R})$ 的生成元 x_i 的次数为 $2m_i-1$, $1 \leqslant i \leqslant l$，而且 $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_l$. 当 G 为单群时，$m_i + m_{l-i+1} =$ 常数 (Chevalley 对偶性). 这个性质可以不依赖于单群的分类来证明. 并且 m_i 还有种种群论意义.

对于所有的紧、单 Lie 群，$H^*(G; \boldsymbol{Z}_p)$ (p 为素数，$\boldsymbol{Z}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$) 作为分次代数已被 A. Borel, 荒木捷朗, P. Baum, W. Browder 定出来 (→公式 6 IV).

【分类空间†的上同调】 设 (E_G, B_G, G) 为紧、连通 Lie 群 G 的万有纤维丛†. 当 p 为素数

(或0)，G(的整系数上同调)不具有 p 挠群(或挠群)时，$H^*(G;\boldsymbol{Z}_p)=\wedge_{\boldsymbol{Z}_p}(x_1',\cdots,x_l')$(或 $H^*(G;\boldsymbol{Z})=\wedge_{\boldsymbol{Z}}(x_1',\cdots,x_l')$)是 Grassmann 代数，$\deg x_i'=2m_i-1\ (1\leqslant i\leqslant l)$ 生成元 x_i' 都可以选取为在万有纤维丛的谱序列中可超渡†的元素. 设其超渡的象为 $y_1,\cdots,y_l$，则 $\deg y_i=2m_i\ (1\leqslant i\leqslant l)$，且分类空间 B_G 的以 $\boldsymbol{Z}_p$(或 $\boldsymbol{Z}$)为系数的上同调是以 $y_1,\cdots,y_l$ 为生成元的多项式环. 设 T 为 G 的一个极大环面子群†. 若令 $B_T=E_G/T$，则 B_T 是 T 的分类空间，且 G 关于 T 的 Weyl 群† $W=N(T)/T$ 是在 B_T 上右平移†地作用. $H^*(T;\boldsymbol{Z})$ 不具有挠群，它是有 l 个 1 次生成元的 Grassmann 代数，从而 $H^*(B_T;\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}[u_1,\cdots,u_l]$，$\deg u_i=2$. 设 $H^*(B_T;\boldsymbol{Z})$ 中由 W-不变多项式构成的子环为 I_W. 令纤维丛 $(B_T,B_G,G/T)$ 的射影为 ρ，当 G 不具有 p 挠群(或挠群)时，则由 ρ 诱导的在 $\boldsymbol{Z}_p$(或 $\boldsymbol{Z}$) 上同调的映射 ρ^* 是单射†，且 $\rho^*:H^*(B_G;\boldsymbol{Z}_p)\cong I_W\otimes\boldsymbol{Z}_p$(或 $H^*(B_G;\boldsymbol{Z})\cong I_W$)成立([1]). 当 $p=0$ 时，关于 p 挠群的假定总是满足，所以对任意的群 G，$H^*(B_G;\boldsymbol{R})\cong I_W\otimes\boldsymbol{R}$ 成立，且 $m_1,\cdots,m_l$ 是 W 不变多项式环 I_W 的生成元的次数.

例 1) $G=U(n)$. $l=n$，且不具有挠群. W 作为生成元 $u_1,\cdots,u_n$ 的所有置换的群作用于 $H^*(B_T;\boldsymbol{Z})$ 上. 因此 I_W 的生成元就是 $u_1,\cdots,u_n$ 的基本对称多项式† $\sigma_1,\cdots,\sigma_n$. 设 $c_1,\cdots,c_n$ 是泛陈类†，则 $\rho^*(c_i)=\sigma_i$，且 $H^*(B_{U(n)};\boldsymbol{Z})=\boldsymbol{Z}[c_1,\cdots,c_n]$ 成立.

例 2) $G=SO(n)$. $l=[n/2]$，且 $p\neq 2$ 时，不具有 p 挠群. W 作用于 $H^*(B_T,\boldsymbol{Z})$ 上作为生成元 $u_1,\cdots,u_l$ 的所有置换以及下列变换生成的群：当 n 为奇数时，是使任意个生成元改变符号的变换，当 n 为偶数时，是使偶数个生成元改变符号的变换. 因此 I_W 的生成元，当 n 为奇数时，是 $u_1^2,\cdots,u_l^2$ 的基本对称多项式 $\sigma_1',\cdots,\sigma_l'$，$n$ 为偶数时是 $\sigma_1',\cdots\sigma_{l-1}'$ 及 $u_1\cdots u_l$. 设 $p_1,\cdots,p_l$ 为泛 Понтрягин 类†，当 n 为偶数时，设 χ 为泛 Euler-Poincaré 类†，则在整系数情形 $\rho^*(p_i)=\sigma_i'$，$\rho^*(\chi)=u_1\cdots u_l$. 设 p_i，χ 的系数取为 $\mathrm{mod}\,p$ 时分别为 $\bar{p}_i$、$\bar{\chi}$，则 $H^*(B_{SO(2l+1)};\boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_l]$，$H^*(B_{SO(2l)};\boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[\bar{p}_1,\cdots,\bar{p}_{l-1},\bar{\chi}]$ ($p=0$ 或 >2).

例 3) 当 $G=O(n)$ 时，用对角矩阵全体所构成的子群 Q 代替 T，对于 $\boldsymbol{Z}_2$ 上同调可与上面所说的相仿进行讨论. 因为 Q 与 $(\boldsymbol{Z}_2)^n$ 同构，故 $H^*(B_Q;\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[v_1,\cdots,v_n]$，$\deg v_i=1$，是多项式环，与 W 一样，$W_2=N(Q)/Q$ 在 B_Q 上右平移地作用，W_2 到 $H^*(B_Q;\boldsymbol{Z}_2)$ 的作用是 $v_1,\cdots,v_n$ 的所有置换所成的群. 设 I_{W_2} 是 $H^*(B_Q;\boldsymbol{Z}_2)$ 的 W_2 不变多项式作成的子环. I_{W_2} 是由 $v_1,\cdots,v_n$ 的基本对称多项式 $\sigma_1'',\cdots,\sigma_n''$ 生成的多项式环. 对于射影 $\rho_2:B_Q\to B_{O(n)}$，ρ_2^* 是 $\boldsymbol{Z}_2$ 上同调的单射，$\rho_2^*:H^*(B_{O(n)};\boldsymbol{Z}_2)\cong I_{W_2}$. 设泛 Stiefel-Whitney 类† 为 $w_1,\cdots,w_n$，则 $\rho_2^*(w_i)=\sigma_i''$，且 $H^*(B_{O(n)};\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[w_1,\cdots,w_n]$ ([2]) 成立.

【Grassmann 流形】 Grassmann 流形是 $\boldsymbol{R}^{n+m}$ 的 n 维子空间全体所成的流形 $M_{n+m,n}(\boldsymbol{R})$，或 n 维定向子空间全体所成的流形 $\widetilde{M}_{n+m,n}(\boldsymbol{R})$，或 $\boldsymbol{C}^{n+m}$ 的 n 维子空间全体所构成的流形 $M_{n+m,n}(\boldsymbol{C})$，它们可以分别表为商空间 $M_{n+m,n}(\boldsymbol{R})=O(n+m)/O(n)\times O(m)$，$\widetilde{M}_{n+m,n}(\boldsymbol{R})=SO(n+m)/SO(n)\times SO(m)$，$M_{n+m,n}(\boldsymbol{C})=U(n+m)/U(n)\times U(m)$. Grassmann 流形具有由 Schubert 簇†所作的胞腔剖分，用此可讨论 Grassmann 流形的上同调 (→示性类). $M_{n+m,n}(\boldsymbol{R})$，$\widetilde{M}_{n+m,n}(\boldsymbol{R})$ 不具有 $p\neq 2$ 的 p 挠群. $M_{n+m,n}(\boldsymbol{C})$ 不具有挠群. 因为它们分别是 $O(n)$，$SO(n)$，$U(n)$ 的 m，m，$2m+1$ 分类空间，所以它们的上同调与 $B_G(G=O(n),SO(n),U(n))$ 的上同调分别在维数 $<m$，$<m$，$\leqslant 2m$ 时同构，在低维时，成为由各种泛示性类生成的多项式环.

【齐性空间 G/U (G 的秩 $=U$ 的秩) 的上同调】 设 G 为紧、连通 Lie 群，U 为 G 的闭子群，G 与 U 的秩相等时，$H^*(G;\boldsymbol{R})$ 及 $H^*(U;\boldsymbol{R})$ 的生成元次数分别为 $2m_1-1,\cdots,2m_l-1$，及 $2n_1-1,\cdots,2n_l-1$，则对于齐性空间 G/U 的实 Poincaré 多项式† P_0，有 $P_0(G/U,t)$

$= \prod_i (1 - t^{2m_i})/(1 - t^{n_i})$ 成立(G. Hirsch 公式. H. Cartan-J-L. Koszul-J. Leray, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950). 当 $G, U, G/U$ 均不具有 p 挠群时,对于以 Z_p 为系数的 Poincaré 多项式有同样的公式成立([1]). U 为某环面群的中心化子†时, G/U 具有复解析的胞腔剖分([3]),从而不具有挠群. 这是 R. Bott-H. Samelson 应用 Morse 理论证明的([5])(→大范围变分法). 特别 $U = T$ 的情形,从很早就进行过种种的研究.

【紧 Lie 群的同伦群】 紧 Lie 群 G 的基本群† $\pi_1(G)$ 是 Abel 群. $\pi_2(G) = 0$ ([8]).在 G 上应用 Morse 理论时,变分完备性 (variational completeness) 成立,特别可得闭路空间 ΩG 不具有挠群,奇数维上同调为 0 ([4]). 因此,当 G 是非交换单群时, $\pi_3(G) \cong \boldsymbol{Z}$ 成立. 利用 G 的齐性空间的各种性质,纤维丛的同伦序列, $\boldsymbol{Z}_p$ 上同调的 Steenrod 运算†等等,对各单群的同伦群进行了种种研究,荒木捷朗等人对 $\pi_i(G)$ ($i \leqslant 13$) 进行了完全计算. 对于典型 Lie 群的稳定同伦群†, Bott 周期性定理†成立,这在 K 理论中也有应用(→同伦群, K 理论). 关于同伦群的结构→公式 6 VI.

Stiefel 流形的同伦群在用障碍上闭链†来定义示性类时要用到(→纤维丛)(→公式 6 VI).

【参】 [1] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., **57**(1953), 115—207; [2] A. Borel, La cohomologie mod 2 de certains espaces homogènes, Comment. Math. Helv., **27**(1953), 165—197; [3] A. Borel, Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., **40**(1954), 1147—1151; [4] R. Bott, An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France, **84** (1956), 251—282; [5] R. Bott-H. Samelson, Applications of the theory of *Morse to symmetric* spaces, Amer. J. Math., **80**(1958), 964—1029; [6] R. Brauer, Sur les invariants intégraux des variétés des groupes de Lie simples clos, C. R. Acad. Sci. Paris, **201**(1935), 419—421; [7] E. Cartan, Sur les invariants intégraux de certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques de ces espaces, Ann. Polon. Math., **8**(1929), 181—225; [8] E. Cartan, La topologie des groupes de Lie, Actualités *Sci. Ind.*, Hermann, 1936; [9] C. Chevalley, The Betti numbers of the exceptional Lie groups, Proc. Internat. Cong. Math., 1950, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1952, vol. 2, P. 21—24; [10] H. Hopf, Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen, Ann. of Math., **42**(1941), 22—52; [11] H. Hopf, Über den Rang geschlossener Lie'scher Gruppen, Comment. Math. Helv., **13**(1940—41), 119—143; [12] H. Samelson, Beiträge zur Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten, Ann. of Math., **42** (1941), 1091—1137; [13] Chih-Tah Yen (严志达), Sur les polynomes de Poincaré des groupes de Lie exceptionnels, C. R. Acad. Sci Paris, **228**(1949), 628—630.

纤维空间 [英 fibre space 法 espace fibré 德 Faserraum 俄 расслоенное пространство 日 ファイバー空間] J.-P. Serre 根据纤维丛†具有的覆盖同伦性质来定义纤维空间,并把 J. Leray 谱序列用于其(立方体的)奇异上同调群†([1]). 它对决定各种空间的(上)同调的结构以及同伦群等等极为有用,今天已成为拓扑学的基本概念之一.

【定义】 已给拓扑空间之间的连续映射 $p: E \to B$ 和拓扑空间 X 时,如果对于任意的连续映射 $f: X \to E$ 和满足 $p \circ f = g_0$ 的同伦† $g_t: X \to B$,存在同伦 $f_t: X \to E$ 使 $f_0 = f$, $p \circ f_t = g_t$ 成立,则称 p 对 X 有**覆盖同伦性质** (covering homotopy property). 如果 p 对任意立方体 $I^n = \{(x_1, \cdots, x_n) | 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$ ($n = 0, 1, \cdots$),覆盖同伦性质成立时(这时对任意 CW 复形†同样性质成立),组 (E, p, B) 就称为**纤维空间**, E 称为**全空间** (total space), p 称为**射影** (projection), B 称为**底空间** (base space), $F_b = p^{-1}(b)$ 称为 $b \in B$ 上的**纤维** (fibre).

已给拓扑空间 E, B, F 及连续映射 $p: E \to B$,对于每点 $b \in B$,如果存在 b 的开邻域 U 及同胚 $\varphi: U \times F \approx p^{-1}(U)$ 使 $p\varphi(b', y) = b'$ ($b' \in U, y \in F$),则组 (E, p, B, F) 称为**局部平凡的纤维空间** (locally trivial fibre space), E, p, B 的叫法同上, F 称为**纤维**. 这时, p 对于任意的仿紧†空间,有覆盖同伦性质,从而 (E, p, B) 是纤维空间. 且任意的纤维丛†显然是局部平凡的纤维空间.

【道路空间】 纤维空间另一个重要的例子是道路空间. 对于拓扑空间 X 的子集 A_0, A_1, X 的道路,即满足 $w(\varepsilon) \in A_\varepsilon$ ($\varepsilon = 0, 1$) 的连续

映射 $w: I \to X(I=[0,1])$的集合引入紧开拓扑†所成的拓扑空间 $\Omega(X; A_0, A_1)$ 称为**道路空间** (path space)．若定义 $p_\varepsilon: \Omega(X; A_0, A_1) \to A_\varepsilon$ 为 $p_\varepsilon(w)=w(\varepsilon)$，则 $(\Omega(X; A_0, A_1), p_\varepsilon, A_\varepsilon)$ 是纤维空间 $(\varepsilon=0,1)$．实际上，p_ε 对于任意的拓扑空间都具有覆盖同伦性质．特别若$A_0=X$，$A_1=*$（一点），则纤维空间$(\Omega(X; X,*), p_0, X)$ 的全空间是可缩的†，其纤维 $p_0^{-1}(*)=\Omega(X;*,*)=\Omega X$ 是X的以$*$为基点的闭路空间†．且对任意的连续映射 $f: Y\to X$，若令 $E_f=\{(y,w)\in Y\times\Omega(X; X, X) \mid f(y)=w(0)\}$，则 $Y\subset E_f$，且Y为 E_f 的形变收缩核†，但当 $p(y,w)=w(0)$ 时，有 (E_f, p, X) 是纤维空间，且 $f=p|Y$ 成立（这个 E_f 称为 f 的映射载†）．

【纤维空间的同伦群】 纤维空间中同伦群†之间有下述 **Hurewicz-Steenrod 同构定理** (Hurewicz-Steenrod isomorphism theorem) 成立：设 (E,p,B) 是纤维空间，基点 $*\in B$ 上的纤维是 $F=p^{-1}(*)$，则 $p_*: \pi_n(E,F)\cong\pi_n(B)$当 $n\geqslant 2$ 时是同构，$n=1$ 时是双射．因此下述纤维空间的**同伦正合序列** (homotopy exact sequence) 成立：

$$\cdots\to\pi_{n+1}(B)\xrightarrow{\Delta}\pi_n(F)\xrightarrow{i_*}\pi_n(E)\xrightarrow{p_*}\pi_n(B)\to\cdots.$$

对于任意的 CW 复形 Z 这序列还可推广成下面的具有基点的同伦集† $\pi(Z;)_0$ 的正合序列：

$$\cdots\to\pi(Z;\Omega B)_0\to\pi(Z;F)_0\xrightarrow{i_*}\pi(Z;E)_0\xrightarrow{p_*}\pi(Z;B)_0.$$

例 1) 当(E,p,B)具有**截面** (cross-section) 即存在连续映射 $f: B\to E$ 使 $p\circ f=1$ 时，或纤维 F 是 E 的收缩核†时，$\pi_n(E)\cong\pi_n(B)+\pi_n(F)$；当 F 在 E 中可缩时，$\pi_n(B)\cong\pi_n(E)+\pi_{n-1}(F)$ $(n\geqslant 2)$．

例 2) 如果纤维空间 (E,p,B) 中，B 为弧连通†，E 为 n 连通†，且 $p_*: \pi_i(E)\cong\pi_i(B)$ $(i>n)$成立时，则称 (E,p,B) 为 **n 连通纤维空间** (n-connective fibre space)．对于任意的弧连通的 B 与 n，这种空间存在．

例 3) 对于 CW 复形 X，存在拓扑空间 X_n，及连续映射 $f_n: X\to X_n$，$q_{n+1}: X_{n+1}\to X_n$ $(n=0,1,\cdots)$ 满足下面 i)—iv)：i) 如果X是m连通的，则 $X_n(0\leqslant n\leqslant m)$为一点；ii) $f_{n*}: \pi_i(X)\cong\pi_i(X_n)$ $(i\leqslant n)$；iii) (X_n, q_n, X_{n-1}) 是纤维空间，其纤维是 Eilenberg-MacLane 空间† $K(\pi_n(X), n)$；iv) $q_n\circ f_n$ 与 f_{n-1} 同伦†．这体系 $[X_n, f_n, q_n]$ 称为X的 **Постников 体系**(Postnikov system)．这也表示，在某种意义下，X可以分解为 Eilenberg-MacLane 空间．

【纤维空间的谱序列】 上同调性质主要从以下结果推出(同调性质也一样)．假定纤维空间 (E,p,B) 的底空间 B 是单连通†的，纤维 $F=p^{-1}(*)$ 是弧连通的，R 为主理想环†，则存在上同调谱序列†

$$\{E_r^{p,q}, d_r^{p,q}; E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}\},\quad r=0,1,\cdots,\infty$$

（即令 $E_r=\sum_{p,q}E_r^{p,q}$，$d_r=\sum_{p,q}d_r^{p,q}$，则 E_r 是 R 模†，d_r 为 R 线性映射，满足 $d_r\circ d_r=0$，且 $E_{r+1}^{p,q}=\operatorname{Ker} d_r^{p,q}/\operatorname{Im} d_r^{p-r,q+r-1}$，即 $H(E_r)=E_{r+1}$），满足下面 i)—v)．这个 $\{E_r^{p,q}\}$ 称为**纤维空间** (E, p, B) **的**（R 系数的奇异上同调的）**谱序列**(spectral sequence)．

i) 当 $p<0$ 或 $q<0$ 时，$E_r^{p,q}=0$，如果 $r>\max(p, q+1)$，则 $E_r^{p,q}=E_{r+1}^{p,q}=\cdots=E_\infty^{p,q}$．

ii) E_r中有乘积满足 $E_r^{p,q}\cdot E_r^{p'q'}\subset E_r^{p+p',q+q'}$．$d_r(u\cdot v)=(d_r u)\cdot v+(-1)^{p+q}u\cdot(d_r v)$ $(u\in E_r^{p,q})$．它诱导出的 $H(E_r)$ 中的乘积与 E_{r+1} 的乘积一致．

iii) E_∞ 是奇异上同调群 $H^*(E;R)$ 相伴的分次模，即 $H^n(E;R)=D^{0,n}\supset D^{1,n-1}\supset\cdots\supset D^{n,0}\supset D^{n+1,-1}=0$，且 $E_\infty^{p,q}=D^{p,q}/D^{p+1,q-1}$ 成立．且 $H^*(E;R)$ 的上积† $\smile$ 满足 $D^{p,q}\smile D^{p',q'}\subset D^{p+p',q+q'}$，由此诱导的积与 E_∞ 的积一致．

iv) $E_2^{p,q}=H^p(B; H^q(F;R))$，式中左边的积与右边的上积相对应．

v) $H^n(B;R)=E_2^{n,0}\to E_3^{n,0}\to\cdots\to E_{n+1}^{n,0}=E_\infty^{n,0}=D^{n,0}\subset H^n(E;R)$ 的合成与 p^* 一致；

$H^n(E; R)=D^{0,n} \to E_\infty^{0,n}=E_{n+2}^{0,n} \subset \cdots \subset E_3^{0,n} \subset E_2^{0,n} = H^n(F; R)$ 的合成与 $i^*(i: F \subset E)$ 一致（→都表示到商群的射影）. 在序列$H^{n-1}(F;R) \xrightarrow{\partial^*} H^n(E,F;R) \xleftarrow{p^*} H^n(B;R)$ 中，我们有 $\partial^{*-1}(\mathrm{Im}\,p^*) = E_n^{0,n-1}$, $\mathrm{Coim}\,p^* = E_n^{n,0}$, 且 $d_n: E_n^{0,n-1} \to E_n^{n,0}$ 与**超渡** (transgression) $\tau^* = p^{*-1} \circ \partial^*: \partial^{*-1}(\mathrm{Im}\,p^*) \to \mathrm{Coim}\,p^*$ 一致. $\partial^{*-1}(\mathrm{Im}\,p^*)$ 的每个元素都称为**超渡元素**.

在以下诸例中（如同以前一样假定 B 是单连通的，F 是弧连通的），由万有系数定理†，从条件 iv) 可推出 $E_2^{p,q} = H^p(B; R) \otimes H^q(F; R)$.

例 4) 对于 Poincaré 多项式† $P_E(t) = \sum_n b_n t^n (b_n = \dim_k H_n(E; k)$ (k 为域)），有 $P_E(t)= P_B(t) \cdot P_F(t) - (1+t)\varphi(t)$ 成立（此处 $\varphi(t)$ 为非负系数多项式）(Leray). 特别对于 Euler 示性数† $\chi(E) = P_E(-1)$，有 $\chi(E) = \chi(B) \cdot \chi(F)$ 成立. 还有，假如对每个 $n \geqslant 0$，$i_*: H_n(F; k) \to H_n(E; k)$是单一映射，则 $P_E(t) = P_B(t) \cdot P_F(t)$ 成立.

例 5) 同构定理. 如果 $H_n(B, R) = 0$ $(0<n<r)$，$H_n(F; R) = 0$ $(0<n<s)$，则当 $0<n<r+s$ 时，有 $p_*: H_n(E, F; R) \cong H_n(B; R)$，当 $n = r+s$ 时，p_* 是满射，我们有纤维空间的**同调正合序列** (homology exact sequence)；

$$\cdots \to H_n(F;R) \xrightarrow{i_*} H_n(E;R) \xrightarrow{p_*} H_n(B;R) \xrightarrow{\tau_*} H_{n-1}(F;R) \to \cdots,\ n<r+s$$

成立. 上同调也一样.

例 6) 设 $H^n(F;R) \cong H^n(S^r, R)$ (S^r 为 r 维球面，$r \geqslant 1$)，设 $\tilde{E}=M_p$ 为 p 的映射柱†，$\tilde{p}: \tilde{E} \to B$ 是由 p 定义的连续映射，则有 **Thom-Gysin 同构** (Thom-Gysin isomorphism) $\tilde{g}: H^{n-r-1}(B;R) \cong H^n(\tilde{E},E;R)$, $(n \geqslant 0)$ 成立，且 $\tilde{g}(\alpha) = \tilde{p}^*(\alpha) \cup \tilde{g}(1)$ (→微分流形的拓扑学 [Thom 复形]). 我们还有 **Gysin 正合序列** (Gysin exact sequence):

$$\cdots \to H^n(B;R) \xrightarrow{p^*} H^n(E;R) \to H^{n-r}(B;R) \xrightarrow{g} H^{n+1}(B;R) \to \cdots$$

成立，且 g 满足 $g(\alpha) = \alpha \cup \Omega = \Omega \cup \alpha$ ($\Omega = g(1) \in H^{r+1}(B; R)$). 并且 Ω 是 $H^r(F; R) \cong R$ 的生成元在超渡 τ^* 下的象，如果 r 为偶数，则 $2\Omega=0$.（这结果当 $r=0$, $R = \boldsymbol{Z}_2$ 时也成立.）

例 7) 设 $H^n(B; R) \cong H^n(S^r; R)$ $(r \geqslant 2)$，则 $H^{n-r}(F; R) \cong H^n(E, F; R)$ $(n \geqslant 0)$，且存在**王（宪钟）正合序列** (Wang exact sequence).

$$\cdots \to H^n(E;R) \xrightarrow{i^*} H^n(F;R) \xrightarrow{\theta} H^{n-r-1}(F;R) \to H^{n+1}(E;R) \to \cdots$$

其中 θ 满足 $\theta(\alpha \cup \beta) = \theta(\alpha) \cup \beta + (-1)^{n(r-1)} \alpha \cup \theta(\beta)$ $(\alpha, \beta \in H^n(F;R))$.

例 8) 设域 k 特征 $\neq 2$，如果 $H^n(E;k)=0$ $(n>0)$ 且环 $H^*(F;k)$ 由有限个奇数维的元素生成，则 $H^*(F;k) \cong \Lambda(x_1, \cdots, x_l)$（外积代数），$H^*(B;k) = k[y_1, \cdots, y_l]$, $y_i = \tau^*(x_i)$ (A. Borel).

【参】 [1] J.-P. Serre, Homologie singulière des espace fibrés, Ann. of Math., **54** [1951], 425—505; [2] S.-T. Hu (胡世桢), Homotopy theory, Academic Press, 1959; [3] A. Borel, Sur la cohomologie des espace fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., **57**(1953), 115—207; [4] 小松醇郎-中岡稔-戸田宏，位相幾何学 II，現代数学講座，共立出版，1957; [5] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博，位相幾何学 I，岩波，1967; [6] 静間良次-島田信夫-戸田宏，位相幾何学 II，岩波，近刊.

纤维丛 [英 fibre bundle 法 espace fibré 德 Faserbündel 俄 расслоение 日 ファイバー束]

E. Stiefel 考虑了以微分流形† 的每一点为原点的有限个线性独立向量场，引人流形的微分同胚†不变量 [2]. H. Whitney 把流形及以其上每一点为原点的线性独立的切向量组全体总括在一起而得到纤维丛的概念 ([3]). 陈省身认识到 E. Cartan 的联络†的几何学思想与纤维丛理论有密切的关系，从而把微分几何学推进到大范围的情形 ([4]). 除切丛以外，在 Lie 群†及齐性空间†，覆盖空间†及一般的（或 C^r 的、解析的）向量丛等许多方面都用到纤维丛理论.

纤维丛的同调结构的研究通过其谱序列†

的理论而得到发展．随着上同调运算†研究的进展，各种齐性空间的上同调结构及各种示性类†逐步明显地计算出来．且以有限 CW 复形† X 为底空间的向量丛的等价类全体所生成的群 $K(X)$ 是广义上同调群†，这种 K 理论（→ K 理论）正在进一步发展起来．

【定义】 组 $(E, p, B, F, G, U_\alpha, \varphi_\alpha)$，其中，$E, B, F$ 是拓扑空间，$p: E \to B$ 是连续映射，G 为有效†作用于 F 上的左拓扑变换群†，$\{U_\alpha\}(\alpha \in \Lambda)$ 为 B 的开覆盖†，$\varphi_\alpha: U_\alpha \times F \approx p^{-1}(U_\alpha)$ 为一族同胚．如果这样一组满足下列 i)—iii)，则称为**坐标丛**(coordinate bundle)：i) $p\varphi_\alpha(b, y) = b(b \in U_\alpha, y \in F)$；ii) 如果定义 $\varphi_{\alpha,b}: F \approx p^{-1}(b)(b \in U_\alpha)$ 为 $\varphi_{\alpha,b}(y) = \varphi_\alpha(b, y)$，则对于 $b \in U_\alpha \cap U_\beta$，有 $g_{\beta\alpha}(b) = \varphi_{\beta,b}^{-1} \circ \varphi_{\alpha,b} \in G$；iii) $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ 是连续映射．对于另一个坐标丛 $(E, p, B, F, G, U'_\mu, \varphi'_\mu)$，如果 $b \in U_\alpha \cap U'_\mu$ 时，由 $\bar{g}_{\mu\alpha}(b) = \varphi'^{-1}_{\mu,b} \circ \varphi_{\alpha,b} \in G$ 定义的 $\bar{g}_{\mu\alpha}: U_\alpha \cap U'_\mu \to G$ 是连续的，则称这两个坐标丛**等价**．坐标丛按这个等价关系划分成的等价类 $\xi = (E, p, B, F, G)$ 称为**纤维丛**或 **G 丛** (G-bundle)．对于纤维丛 ξ，E 称为**全空间** (total space) 或**丛空间** (bundle space)，p 称为**射影** (projection)，B 称为**底空间** (base space)，F 称为**纤维** (fibre)，G 称为**丛的群** (group of bundles) 或**结构群** (structure group)．且代表它的坐标丛中的 U_α 称为**坐标邻域** (coordinate neighbourhood)，φ_α 称为**坐标函数** (coordinate function)，$g_{\alpha\beta}$ 称为**坐标变换** (coordinate transformation) 或**变换函数** (transition function)．

对于具有相同的纤维及结构群的两个纤维丛 $\xi = (E, p, B, F, G)$，$\xi' = (E', p', B', F, G)$，如果存在连续映射 $\Psi: E \to E'$，满足下列 i) ii) 两条件，就称为 ξ 到 ξ' 的**丛映射** (bundle mapping)：i) 存在连续映射 $\psi: B \to B'$，$p' \circ \Psi = \psi \circ p$；ii) 设 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$，$\{V'_\mu, \varphi'_\mu\}$ 分别为 ξ，ξ' 的坐标邻域及坐标函数，则对于 $b \in U_\alpha \cap \psi^{-1}(V'_\mu)$，令 $\psi_{\mu\alpha}(b) = \varphi'^{-1}_{\mu,b'} \circ \Psi \circ \varphi_{\alpha,b} \in G$，$(b' = \psi(b))$，则 $\psi_{\mu\alpha}: U_\alpha \cap \psi^{-1}(V'_\mu) \to G$ 是连续的．这时如果 ψ 是同胚，则 Ψ 也是同胚，Ψ^{-1} 也是丛映射．

对于具有相同底空间、纤维及结构群的两个纤维丛 $\xi = (E, p, B, F, G)$，$\xi' = (E', p', B, F, G)$，如果存在丛映射 $\Psi: E \to E'$，使 i) 中的 $\psi: B \to B$ 是恒等映射，则纤维丛 ξ 及 ξ' 称为**等价** (equivalent)，记作 $\xi \equiv \xi'$．设 ξ, ξ' 的坐标邻域取为相同的 $\{U_\alpha\}$，坐标变换分别为 $g_{\beta\alpha}$ 及 $g'_{\beta\alpha}$ 时，则 $\xi \equiv \xi'$ 的充分必要条件是存在一族连续映射 $\lambda_\alpha: U_\alpha \to G$，使 $g'_{\beta\alpha}(b) = \lambda_\beta(b) \cdot g_{\beta\alpha}(b)\lambda_\alpha(b)^{-1}$ $(b \in U_\alpha \cap U_\beta)$ 成立．

纤维丛的坐标变换族 $\{g_{\beta\alpha}\}$ 满足 $g_{\gamma\beta}(b) g_{\beta\alpha}(b) = g_{\gamma\alpha}(b)$ $(b \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)$，反之，对于满足这条件的 $g_{\beta\alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \to G$ ($\{U_\alpha\}$ 是 B 的开覆盖)，以这种 $\{g_{\beta\alpha}\}$ 为坐标变换的族的 G 丛 (E, p, B, F, G) 在等价的意义下是唯一存在的．实际上，我们把参数集合 $\Lambda = \{\alpha\}$ 取为离散空间，子空间 $\tilde{E} = \{(b, y, \alpha) \mid b \in U_\alpha\} \subset B \times F \times \Lambda$ 中的两点 (b, y, α)，(b', y', β) 当 $b = b'$，$y' = g_{\beta\alpha}(b) \cdot y$ 时定义为等价，由此等价所得 $\tilde{E}$ 的商空间†取作 E，则把 p 定义为 $p\{(b, y, \alpha)\} = b$ 就行了．

【主纤维丛】 纤维丛 $\eta = (P, q, B, G, G)$ 中，如果 G 对 G 是左平移的作用时，就把 η 称为**主纤维丛**或简称为**主丛** (principal bundle)．也可以定义主丛为满足下列条件的纤维丛：G 为 P 的右拓扑变换群†，存在 B 的开覆盖 $\{U\}$ 及同胚 $\varphi: U \times G \approx q^{-1}(U)$ 满足 $q\varphi(b, g) = b$，$\varphi(b, g) \cdot g' = \varphi(b, gg')$ $(b \in U, g, g' \in G)$．且两个主纤维丛 $\eta = (P, q, B, G)$，$\eta' = (P', q', B', G)$ 之间的丛映射 $\Psi: P \to P'$ 可以定义为满足 $\Psi(x \cdot g) = \Psi(x) \cdot g$ 的连续映射．

【相伴纤维丛】 设 $\eta = (P, q, B, G)$ 为主纤维丛，F 为拓扑空间以 G 为有效的左拓扑变换群，通过 $(x, y) \cdot g = (x \cdot g, g^{-1} \cdot y)(x \in P, y \in F, g \in G)$，$G$ 也成为积空间 $P \times F$ 的右拓扑变换群．记其轨道空间为 $P \times_G F = (P \times F)/G$，如果定义连续映射 $p: P \times_G F \to B$ 为 $p\{(x, y)\} = q(x)$，则 $\eta \times_G F = \{P \times_G F, p, B, F, G\}$ 为纤维丛，$\eta \times_G F$ 称为以 F 为纤维的、与主丛 η **相伴的纤维丛** (associated fibre bundle)，且

对于纤维丛 $\xi=(E, p, B, F, G)$，满足 $\xi\equiv\eta\times_G F$ 的主纤维丛 η 称为与 ξ **相伴的主纤维丛** (associated principal bundle)。与 ξ 具有相同坐标变换的主纤维丛 η 是与 ξ 相伴的主纤维丛. 两纤维丛等价的充分必要条件是其相伴主纤维丛等价. 从而,对于主纤维丛 η，可把 $\eta\times_G F$ 作为纤维丛的定义.

【纤维丛的例子】 1) 积纤维丛.$(B\times F, p_1, B, F, G)$ (此处取 p_1 为积空间的射影，坐标邻域为 B，坐标函数为恒等映射 $B\times F=B\times F$) 称为**积纤维丛** (product bundle). 与积纤维丛等价的纤维丛称为**平凡的** (trivial) 纤维丛.

2) 覆盖空间† $(\tilde{Y}, p, Y)$ 是以具有离散拓扑的 $p^{-1}(y_0)$ $(y_0\in Y)$ 为纤维,以基本群† $\pi_1(Y, y_0)$ 的商群为结构群的纤维丛. 特别，正则† 覆盖空间是主纤维丛.

3) Hopf 纤维丛. Λ 表示实数域 $\boldsymbol{R}$，复数域 $\boldsymbol{C}$，或四元数体 $\boldsymbol{H}$. 令 $\lambda=\dim_R\Lambda$. 在 Λ 上的 $n+1$ 维线性空间† Λ^{n+1} 的子空间 $\Lambda^{n+1}-\{0\}$ (0 为原点) 中,两点 $(z_0, \cdots, z_n)$ 和 $(z_0', \cdots, z_n')$ 看作等价,如果存在 $z\in\Lambda$，使 $z_i=z_i'z (i=0, \cdots, n)$，$\Lambda^{n+1}-\{0\}$ 经这种等化后所得的商空间†记作 $P^n(\Lambda)$，称为 Λ 上的 n 维**射影空间** (projective space). 设 Λ^{n+1} 中的单位球面为 S_Λ^n $(=S^{\lambda(n+1)-1}$，$\lambda(n+1)-1$ 维球面),则 S_Λ^0 通过 Λ 的乘法看成 S_Λ^n 的拓扑变换群†,其轨道空间† S_Λ^n/S_Λ^0 就是 $P^n(\Lambda)$ 即可. 这样 $(S_\Lambda^n, q, P^n(\Lambda), S_\Lambda^0)$ (q 为射影)就是主纤维丛,称为 **Hopf 丛** (Hopf bundle, Hopf fibering). 当 $n=\infty$ 时，也可以得到 Hopf 丛. 特别当 $n=1$ 时，$P^1(\Lambda)$ 与 S^λ 同胚，Hopf 丛就成为主丛 $(S^{2\lambda-1}, q, S^\lambda, S^{\lambda-1})$ $(\lambda=1, 2, 4)$，当 $\lambda=8$ 时也可以用 Cayley 代数† 同样地定义，且丛的射影 $q: S^{2\lambda-1}\to S^\lambda$ $(\lambda=2, 4, 8)$ 就是 **Hopf 映射**(Hopf mapping).

4) 令 G 为拓扑群，H 为其闭子群. 设 $r: G\to G/H$ 为自然的射影，$r(g)=gH$. 假如存在元素 $r(H)\in G/H$ 的邻域 U 和连续映射 $f: U\to G$ 使 $r\circ f$ 为恒等映射,则称 H 在 G 中具有**局部截面** (local cross-section) f. 这时,对于 H 的闭子群 K，$(G/K, p, G/H, H/K, H/K_0)$ 就是纤维丛，当 K 为 H 的正规子群†时，它就成为主纤维丛 (p 为自然的射影 $gK\to gH$，K_0 为 K 中所包含的最大的 H 的正规子群). 且其相伴纤维丛是 $(G/K_0, p, G/H, H/K_0)$. 如果 G 为 Lie 群†，则其任意的闭子群 H 在 G 中都具有局部截面,故上述的纤维丛均可得到.

【向量丛】 拓扑空间 E，B 与连续映射 $p: E\to B$ 的组 $\xi=(E, p, B)$ 如果满足下述条件,就称为 n 维实**向量丛** (vector bundle): i) 对于每点 $b\in B$，$p^{-1}(b)$ 具有实向量空间结构; ii) 存在坐标邻域及坐标函数使得坐标丛的定义中的 i) 成立，坐标丛的 $F=\boldsymbol{R}^n$，且 ii) 中的 $\varphi_{\alpha,b}: \boldsymbol{R}^n\approx p^{-1}(b)$ 是向量空间的同构. 这时，对于 $b\in U_\alpha\cap U_\beta$，$g_{\beta\alpha}(b)=\varphi_{\beta,b}^{-1}\circ\varphi_{\alpha,b}: \boldsymbol{R}^n\approx\boldsymbol{R}^n$ 当作一般线性群† $GL(n, \boldsymbol{R})$ 的元素,则 n 维实向量丛就成为以 $\boldsymbol{R}^n$ 为纤维，$GL(n, \boldsymbol{R})$ 为结构群的纤维丛，且其逆也成立. 特别一维向量丛称为**线丛** (line bundle). 对于二个实向量丛 $\xi=(E, p, B)$，$\xi'=(E', p', B)$，如果 $E'\subset E$，$p'=p|E$，且对各点 $b\in B$，$p'^{-1}(b)$ 是 $p^{-1}(b)$ 的向量子空间,则 ξ' 称为 ξ 的**子丛** (subbundle).

设 $\xi_i (i=1, 2)$ 为同一底空间 B 上的 n_i 维向量丛，对于每点 $b\in B$，向量空间的直和 $p_1^{-1}(b)+p_2^{-1}(b)$ 的并集是 E，$p: E\to B$ 取为 $p(p_1^{-1}(b)+p_2^{-1}(b))=b$. 取 ξ_1 与 ξ_2 的共同的坐标邻域 U_α，通过它们的坐标函数 $\varphi_\alpha^i: U_\alpha\times\boldsymbol{R}^{n_i}\approx p_i^{-1}(U_\alpha)$ 定义 $\varphi_\alpha: U_\alpha\times\boldsymbol{R}^{n_1+n_2}\to\varphi^{-1}(U_\alpha)$ 为 $\varphi_\alpha(b, y)=(\varphi_{\alpha,b}^1+\varphi_{\alpha,b}^2)(y)$ $(y\in\boldsymbol{R}^{n_1+n_2}=\boldsymbol{R}^{n_1}+\boldsymbol{R}^{n_2})$. 对于 $U_\alpha\times\boldsymbol{R}^{n_1+n_2}$ 的开集 O，以 $\varphi_\alpha(O)$ 全体作为 E 的开基†，在 E 中引进拓扑. 这时 (E, p, B) 就成为 n_1+n_2 维实向量丛，称为 ξ_1 与 ξ_2 的 **Whitney 和** (Whitney sum)，以 $\xi_1\oplus\xi_2$ 表示. 完全同样，利用向量空间的张量积 $\boldsymbol{R}^{n_1}\otimes\boldsymbol{R}^{n_2}=\boldsymbol{R}^{n_1n_2}$，$p$ 重外积† $\Lambda^p\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}^{\binom{n}{p}}$ ($\boldsymbol{R}^n$ 中 p 向量的空间 $(\boldsymbol{R}^n)^{(p)}$) 及 $\mathrm{Hom}(\boldsymbol{R}^{n_1}, \boldsymbol{R}^{n_2})=\boldsymbol{R}^{n_1n_2}$ 可以分别定义向量丛的 n_1n_2 维**张量积** (tensor product) $\xi_1\otimes\xi_2$，

$\binom{n}{p}$维的**p重外幂**(p-fold exterior power) $\Lambda^p\xi$（或p向量丛 $\xi^{(p)}$）及n_1n_2维的 Hom (ξ_1, ξ_2)（最后情形，我们用 Hom $((\varphi^1_{\alpha,b})^{-1}, \varphi^2_{\alpha,b})$，而不用 Hom $(\varphi^1_{\alpha,b}, \varphi^2_{\alpha,b})$）. 设$\varepsilon_1$为一维平凡向量丛，Hom $(\xi, \varepsilon^1)=\xi^*$ 称为ξ的**对偶向量丛**（dual (vector) bundle）. 如用坐标变换，$\oplus$、$\otimes$、$\wedge^p$及ξ^*可分别通过矩阵的直和、Kronecker积†、p阶子行列式†的矩阵及转置矩阵†得出. 设ξ_2为ξ_1的子丛，利用$\boldsymbol{R}^{n_1}/\boldsymbol{R}^{n_2}=\boldsymbol{R}^{n_1-n_2}$同样可定义$n_1-n_2$维**商向量丛**(quotient bundle) ξ_1/ξ_2，且$\xi_2\oplus(\xi_1/\xi_2)$与ξ_1等价. 这些运算保持等价关系，除等价外，$\oplus$与$\otimes$可交换，并满足结合律及分配律. 且当底空间为有限维 CW 复形†时，对于任意的ξ，存在ξ'使$\xi\oplus\xi'$为平凡向量丛.

如果用复数域$\boldsymbol{C}$及四元数体$\boldsymbol{H}$代替实数域$\boldsymbol{R}$，同样可以定义**复向量丛**（complex vector bundle）及**四元向量丛**（quaternion vector bundle），并且可以定义它们之间的$\oplus$、$\otimes$等等运算.

5）切丛，张量丛. 设M为n维C^r微分流形†，在点$p\in M$的切空间†是$T_p(M)$，其全体为$T(M)=\bigcup_{p\in M}T_p(M)$，定义$\pi: T(M)\to M$为$\pi(T_p(M))=p$. 在$p$的坐标邻域†$U_p$，用局部坐标系†$(x_1,\cdots,x_n)$可把$\pi^{-1}(U_p)$的元素表为$\sum_{i=1}^{n} f_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，则$\pi^{-1}(U_p)$中可引入坐标系$(x_1,\cdots,x_n,f_1,\cdots,f_n)$，因此$T(M)$成为$C^{r-1}$流形. $\mathfrak{T}(M)=(T(M),\pi,M,\boldsymbol{R}^n,GL(n,\boldsymbol{R}))$就成为$n$维实向量丛. $\mathfrak{T}(M)$称为M的**切丛**或**切向量丛**（tangent bundle）. 其对偶丛$\mathfrak{T}^*(M)$称为**余切丛**或**余切向量丛**（cotangent bundle）. $\mathfrak{T}(M)\otimes\cdots\otimes\mathfrak{T}^*(M)\otimes\cdots$等一般称为$M$的**张量丛**（tensor bundle）. $\mathfrak{T}^*(M)$的n重外幂$\wedge^n\mathfrak{T}^*(M)$是一维向量丛(线丛)，称为$M$的**典范丛**（canonical bundle）.

如果M为复流形†，则$T(M)$也是复流形，$\mathfrak{T}(M)$是复向量丛. 因此上述种种向量丛也可以对复向量丛来定义.

6）r维切标架丛. 5）中M的r维切标架†的全体作成以M为底空间，$GL(n,\boldsymbol{R})$为结构群的纤维丛，称之为M的**r维切标架丛**（tangent r-frame bundle）.

【分类问题】 已知纤维丛$\xi=(E,p,B,F,G)$与连续映射$\phi: B'\to B$，考虑$E\times B'$的子空间$E'=\{(x,b')\in E\times B' \mid p(x)=\phi(b')\}$，设$p': E'\to B'$，$\Psi: E'\to E$是积空间的射影，则$\phi^{\#}\xi=(E',p',B',F,G)$是纤维丛，且$\Psi$是由$\phi^{\#}\xi$到$\xi$的丛映射. $\phi^{\#}\xi$称为由ϕ得到的ξ的**诱导丛**(induced bundle). 设ξ的坐标邻域族及坐标变换族是$\{U_\alpha\}$，$\{g_{\beta\alpha}\}$，则$\phi^{\#}\xi$的坐标邻域族及坐标变换族就是$\{\phi^{-1}(U_\alpha)\}$，$\{g_{\beta\alpha}\circ\phi\}$. 当已给由$\xi'$到$\xi$的丛映射$\Psi: E'\to E$时，如果$\phi: B'\to B$是其底空间的映射，则$\xi'\equiv\phi^{\#}\xi$. 如果$\xi_1\equiv\xi_2$，则$\phi^{\#}\xi_1\equiv\phi^{\#}\xi_2$. 对于连续映射$\phi': B''\to B'$，$(\phi\circ\phi')^{\#}\xi\equiv\phi'^{\#}(\phi^{\#}\xi)$；显然如果$\eta$是主丛，则$\phi^{\#}\eta$也是主丛，且$\phi^{\#}(\eta\times_G F)\equiv(\phi^{\#}\eta)\times_G F$. 如果$B'$是仿紧†空间，$\phi_1,\phi_2: B'\to B$是同伦†，则$\phi_1^{\#}\xi\equiv\phi_2^{\#}\xi$.

以拓扑群G为结构群的主纤维丛$\xi(n,G)=(E(n,G),p,B(n,G),G)$中，如果$E(n,G)$是$n$连通的†$(n\leqslant\infty)$，则$\xi(n,G)$称为$G$的**$n$万有纤维丛**，其底空间$B(n,G)$称为$G$的**$n$分类空间**，特别$\xi(\infty,G)=\xi_G=(E_G,p,B_G,G)$简称为$G$的**万有(纤维)丛**(universal bundle)，B_G称为G的**分类空间**（classifying space）. 这时下述的**分类定理**(classification theorem)成立：以$\dim B\leqslant n(\leqslant\infty)$的 CW 复形$B$为底空间的主$G$丛的等价类全体的集合与由$B$到$B(n,G)$的连续映射的同伦集†$\pi(B;B(n,G))$一一对应. 这个对应是把连续映射$\phi: B\to B(n,G)$对应成$\phi$所诱导的主纤维丛$\phi^{\#}\xi(n,G)$. 映射$\phi$称为纤维丛$\phi^{\#}\xi(n,G)$的**示性映射**（characteristic mapping）. 对于以G为有效地左拓扑变换群的拓扑空间F，令ϕ对应于$\phi^{\#}(\xi(n,G)\times_G F)$就得到以$B$为底空间，$F$为纤维的$G$丛等价类的集合与$\pi(B;B(n,G))$的一一对应.

已经证明，对应于任意的拓扑群G的万有

纤维丛的存在性. 特别当G是可数 CW 群(即G是拓扑群且是可数CW复形,其乘法与取逆元所对应的映射是胞腔映射)时,存在分类空间B_G是可数 CW 复形 (J. Milnor[6]). 下节中对应 Lie 群的万有纤维丛的例子是有用的. 并且对于G,是CW复形的B_G都具有相同的同伦型†.

【万有纤维丛的例子】 1) $O(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ 的情形. 令 Λ, λ 为纤维丛的例 3) 中的记号, $U(n, \Lambda)$ 分别表示正交群† $O(n)$, 酉群† $U(n)$, 辛群† $Sp(n)$. 因为 Stiefel 流形† $V_{m+n,m}(\Lambda) = U(m+n, \Lambda)/I_m \times U(n, \Lambda)$ (I_m 是 $U(m, \Lambda)$ 的单位元)是 $(\lambda(n+1)-2)$ 连通的,所以像例 4) 那样造出的以 Grassmann 流形† $M_{m+n,m}(\Lambda) = U(m+n, \Lambda)/U(m,\Lambda) \times U(n, \Lambda)$ 为底空间的主纤维丛 $\xi(\lambda(n+1)-2, U(m, \Lambda)) = (V_{m+n,m}(\Lambda), M_{m+n,m}(\Lambda), U(m,\Lambda))$ 就是 $U(m,\Lambda)$的$(\lambda(n+1)-2)$ 万有纤维丛.

2) $O(\infty)$, $U(\infty)$, $Sp(\infty)$ 的情形. 上面例子中 m, n 是∞时也成立. 由自然的包含关系 $U(n, \Lambda) \subset U(n+1, \Lambda)$ 得到的归纳极限†群 $U(\infty, \Lambda) = \bigcup_n U(n, \Lambda)$ 中引入弱拓扑 ($U(\infty, \Lambda)$ 的集合O是开集,如果每个 $O \cap U(n, \Lambda)$ 在 $U(n, \Lambda)$ 中是开集),就定义了**无限典型群** (infinite classical group) $U(\infty, \Lambda)$. 和有限的情形一样可以定义**无限 Stiefel 流形** (infinite Stiefel manifold) $V_{m+n,m}(\Lambda)$ 及**无限 Grassmann 流形** (infinite Grassmann manifold) $M_{m+n,m}(\Lambda)$ (m 或 $n=\infty$),并有 $M_{\infty,m}(\Lambda) = \bigcup_n M_{m+n,m}(\Lambda)$ 等成立. 这些都是 CW 复形, $V_{\infty,m}(\Lambda)$ ($m \leqslant \infty$) 是 ∞ 连通的. 虽然 $U(\infty, \Lambda)$ 并非 Lie 群,但当 $m, n \leqslant \infty$ 时,因 $U(m,\Lambda) \times U(n,\Lambda)$ 在 $U(m+n, \Lambda)$ 中具有局部截面([7]),故纤维丛的例 4) 能够应用. 因此 $U(m, \Lambda)$ 的万有纤维丛就是上面例 1) 中的n取为∞即可得到,而其分类空间 $B_{U(m,\Lambda)} = M_{\infty,m}(\Lambda)$ 是无限 Grassmann 流形. 把例 1) 中的m取为∞即可得 $U(\infty, \Lambda)$ 的 $(\lambda(n+1)-2)$ 万有纤维丛 ($n \leqslant \infty$).

3) $SO(m)$ 情形. 旋转群† $SO(m)$ 也是一样, $\xi(n-1; SO(m)) = (V_{m+n,m}(\boldsymbol{R}), p, \widetilde{M}_{m+n,m}, SO(m))$, $B_{SO(m)} = \widetilde{M}_{\infty,m}$, 此处 $\widetilde{M}_{m+n,m} = SO(m+n)/SO(m) \times SO(n)$ 是有向 Grassmann 流形. 并且对于任意紧 Lie 群 G, 取m使得 $G \subset O(m)$, 则 $\xi(n-1, G) = (V_{m+n,m}(\boldsymbol{R}), p, O(m+n)/G \times O(n), G)$; 对于任意的连通 Lie 群 G, 如果 G_1 为其最大紧子群,则 $\xi(n, G) = \xi(n, G_1) \times_{G_1} G$ (因 G/G_1 与 Euclid 空间同胚,这由下面的叙述可以得出).

【纤维丛的约化】 设G为拓扑群, H为其闭子群. 如果存在与G丛ξ等价的G丛,它具有取值于H的坐标变换族,则称ξ能够**约化** (reduce) 到结构群H. 对于主H丛 $\eta_0 = (P, q, B, H)$, 可定义其相伴 H 丛 $\eta_0 \times_H G = (P \times_H G, p, B, G)$, 其中$H$通过$G$中的乘法作用于纤维 G; 如果G到 $P \times_H G$ 的作用为 $\{(x, g)\} \cdot g' = \{(x, gg')\}$, 则 $\eta_0 \times_H G$ 就成为主G丛. 对于主G丛η, 如果存在主H丛 η_0, 使得 $\eta = \eta_0 \times_H G$ 成立,就称η能够**约化**到结构群H, η_0称为η的**约化丛** (reduced bundle). 显然, G丛ξ可约化到H与ξ的相伴主G丛能够约化到 H, 两者是等价的. 且如果 η_0 是η的约化丛,则 $\psi^{\#}\eta_0$ 也是 $\psi^{\#}\eta$ 的约化丛.

特别假定H在G中具有局部截面, G/H 是∞连通,那末,对于H的n万有纤维丛 $\xi(n,H)$, $\xi(n, H) \times_H G$ 是G的n万有纤维丛(用纤维空间†的同伦正合序列†可证明$E(n, H) \times_H G$ 是n连通的). 从而在上述 G, H 的假定之下,根据分类定理, CW 复形B上的任意G丛能够约化到结构群H, G丛的等价类的集合与H丛的等价类的集合一一对应.

1) 当且仅当G丛是平凡丛时,它能约化到结构群e(单位元). 如果 $2n$ 维 C^{∞} 微分流形 M具有殆复结构†,则切丛 $\mathfrak{T}(M)$ 可约化到结构群 $GL(n, \boldsymbol{C})$, 即 $\mathfrak{T}(M)$ 可以看成是n维复向量丛(→[向量丛]的5).

2) 由于 $GL(n, \boldsymbol{R}) \approx O(n) \times \boldsymbol{R}^{n(n+1)/2}$, $GL(n, \boldsymbol{C}) \approx U(n) \times \boldsymbol{R}^{n^2}$, n维实(复)向量丛可以看成是纤维为 $\boldsymbol{R}^n(\boldsymbol{C}^n)$ 的 $O(n)(U(n))$

丛.

【丛的同伦论及同调论】 由于纤维丛是局部平凡的纤维空间†，所以纤维空间（→纤维空间）的正合序列、谱序列等能够应用．例如 A. Borel, J.-P. Serre 等用来计算典型群的齐性空间的上同调结构.

1）示性类．对于G的分类空间 B_G，根据同伦正合序列†，有同构 $\pi_n(B_G)\cong\pi_{n-1}(G)$ 成立，因此，对于 n 维球面 S^n 上的纤维丛有下面的分类定理成立：以 S^n 为底空间的主G丛的等价类，从而以F为纤维的G丛的等价类与通过G的内自同构而来的G到 $\pi_{n-1}(G)$ 上的作用所得的等价类 $\pi_{n-1}(G)/\pi_0(G)$ 一一对应．这对应是把主G丛 $\eta=(P,q,S^n,G)$ 对应于η的**示性类**（characteristic class），它是生成元 $l_n\in\pi_n(S^n)$ 在 $\Delta:\pi_n(S^n)\cong\pi_n(P,G)\to\pi_{n-1}(G)$ 下的象 $\Delta(l_n)$ 所属的类．取主G丛 $\eta=(P,q,S^n,G)$ 的坐标邻域 U_1,U_2（U_1 是最后的坐标 $t_{n+1}>-\frac{1}{2}$，U_2 是 $t_{n+1}<\frac{1}{2}$ 所成的S^n的开集），则坐标变换 $g_{12}:U_1\cap U_2\to G$ 到赤道 S^{n-1} 的限制 $T=g_{12}|S^{n-1}$ 就代表η的示性类.

2）对于主纤维丛 $\eta=(SO(n+1),q,S^n,SO(n))$，上面的 $T:S^{n-1}\to SO(n)$可用矩阵给出：$T(t_1,\cdots,t_n)=(I_n-2(t_it_j))\begin{pmatrix}I_{n-1}&0\\0&-1\end{pmatrix}$，（$I_n$ 为 $n\times n$ 单位矩阵）．因此T与自然的射影 $q':SO(n)\to S^{n-1}$ 的合成 $q'\circ T:S^{n-1}\to S^{n-1}$ 的映射度†，当n为奇数时等于 0，当n为偶数时等于 2．由这个结果以及同伦正合序列，对于 $(n-1)$ 连通的实 Stiefel 流形 $V_{m+n,m}(\boldsymbol{R})$ 有下式成立：

$$\pi_n(V_{m+n,m}(\boldsymbol{R}))=\begin{cases}\boldsymbol{Z} & m=1 \text{ 或 } n=\text{偶数}\\ \boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z} & m>1,\text{且 } n=\text{奇数}.\end{cases}$$

3）球丛．纤维为n维球面 S^n 的 $O(n+1)$ 丛称为 **n球丛**（n-sphere bundle）．以球面 S^m 为底空间的n球丛的等价类的集合与 $\pi_{m-1}(O(n+1))/\pi_0(O(n+1))$ 一一对应．例如 S^m $(m\geqslant3)$ 上的 1 球丛，S^3 上的n球丛均为平凡丛．但 $\pi_3(O(4))\cong\pi_3(S^3\times S^3)\cong\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{Z}$，其生成元表为映射 $\rho,\sigma:S^3\to O(4)$，它们满足 $\rho(q)q'=qq'q^{-1}$，$\sigma(q)q'=qq'$（q,q' 为范数 $=1$ 的四元数†），且满足 $r(q)=q^{-1}$ 的 $r\in O(4)$ 的作用是 $r\rho r^{-1}=\rho$，$r\sigma r^{-1}=\rho\sigma^{-1}$．因此 $m\{\rho\}+n\{\sigma\}\in\pi_3(O(4))$ 即满足 $f_{m,n}(q)q'=q^{m+n}\cdot q'q^{-m}$ 的 $f_{m,n}:S^3\to O(4)$ 对应于 S^4 上的三球丛 $\xi_{m,n}$（m 为整数，n 为正整数），且这些 $\xi_{m,n}$ 就代表（除等价外）所有的 S^4 上的三球丛.

【截面问题】 纤维丛 $\xi=(E,p,B,F,G)$ 在 $B_0(\subset B)$ 上的截面 $f:B_0\to E$ 是指使 $p\circ f$ 是 B_0 的恒等映射的连续映射．整个B上的截面称为ξ的**截面**（cross-section）．ξ与积丛等价的充分必要条件是ξ的相伴主丛具有截面，更一般的有下述命题成立：设 $\eta=(P,q,B,G)$ 是主纤维丛，闭子群H在G上具有局部截面，则η可约化到结构群H的充分必要条件是以 G/H 为纤维的相伴纤维丛 $\eta\times_G(G/H)=(P/H,q',B,G/H)$ 具有截面.

这样问题变为截面的存在问题，当底空间B是多面体†时，可以考虑顺次把截面 $f_r:B^r\to E$ 扩张到r骨架† B^r 上去的方法．显然截面 f_0 存在．因为B的每个r单形† σ 是可缩的†，所以 $(p^{-1}(\sigma),p,\sigma,F)\equiv(\sigma\times F,p_1,\sigma,F)$，且存在丛映射 $\phi_\sigma:\sigma\times F\approx p^{-1}(\sigma)(p\circ\phi_\sigma=p_1)$．现在假定存在截面 $f_{r-1}:B^{r-1}\to E$，考虑映射 $h_{\dot\sigma}=p_2\circ\phi_\sigma^{-1}\circ(f_{r-1}|\dot\sigma):\dot\sigma\to F$（$p_2:\sigma\times F\to F$为射影，$\dot\sigma$ 为 σ 的边缘），如果存在 $h_{\dot\sigma}$ 的扩张 $h_\sigma:\sigma\to F$，那么由 $f_\sigma(b)=\phi_\sigma(b,h_\sigma(b))$ $(b\in\sigma)$ 可定义出扩张 $f_{r-1}|\dot\sigma$ 的截面 $f_\sigma:\sigma\to E$，从而扩张 f_{r-1} 的截面 $f_r:B^r\to E$ 可以通过 $f_r|\sigma=f_\sigma$，$f_r|B^{r-1}=f_{r-1}$ 定义出来．因为 $(\sigma,\dot\sigma)\approx(V^r,S^{r-1})$，例如，假使 $\pi_{r-1}(F)=0$，就存在 $h_{\dot\sigma}$ 的扩张 h_σ，截面 f_{r-1} 能够扩张到 f_r.

现在假定G丛 $\xi=(E,p,B,F,G)$ 中，B是弧连通†多面体，F是 $n-1$ 连通的†．由上所述，B的n维骨架 B^n 上的截面 $f:B^n\to E$ 存在．如果 $\pi_n(F)\neq0$，这个f就不能像上面一样扩张到 B^{n+1} 上，我们考虑表示这个障碍的量．假定F是n单纯†的，对于B上每一个 $n+1$ 维单形 σ，如上由f所决定的映射 $h_{\dot\sigma}$:

$\dot{\sigma} \to F$ 就定义了一个唯一的元素 $c(f)(\sigma) \in \pi_n(F)$，从而决定一个上链† $c(f) \in C^{n+1}(B; \pi_n(F))$，$f$ 能够扩张成 B^{n+1} 上的截面的充分必要条件就是 $c(f)=0$. 因此 B^{n+1} 上的截面存在的充分必要条件是对于 B^n 上的每个截面 f，$c(f)$ 的集合包含零上链；所以可把这个集合 $\{c(f)\}$ 看成表示障碍的度量.

对于任意的道路† $w: I \to B$，有 $w^{\#}\xi = (I \times F, p_1, I, F)$，由从映射 $\Omega: I \times F \to E$ ($p \circ \Omega = w \circ p_1$)的限制 $\Omega_\varepsilon = \Omega | \varepsilon \times F: F \approx p^{-1}(b_\varepsilon)$ ($b_\varepsilon = w(\varepsilon)$，$\varepsilon = 0, 1$) 定义同胚 $w_{\#} = \varphi_{0,b_0}^{-1} \circ \Omega_0 \circ \Omega_1^{-1} \circ \varphi_{1,b_1}: F \approx F$；此处 $\varphi_\varepsilon: U_\varepsilon \times F \approx p^{-1}(U_\varepsilon)$ 是坐标邻域 $U_\varepsilon \ni b_\varepsilon$ 的坐标函数。同胚 $w_{\#}$ 诱导出同构 $w_{\#}: \pi_n(F) \cong \pi_n(F)$，$\pi_n(F)$ 成为 B 上局部系数群†，上述的上链 $c(f)$ 成为具有局部系数 $\pi_n(F)$ 的上闭链†，称为 f 的**障碍上闭链** (obstruction cocycle). 且对于所有的截面 $f: B^n \to E$，障碍上闭链 $c(f)$ 全体的集合成为一个上同调类 $c^{n+1}(\xi) \in H^{n+1}(B; \pi_n(F))$ (局部系数)，$c^{n+1}(\xi)$ 称为 ξ 的截面扩张的**第一障碍类** (primary obstruction). $n+1$ 维骨架 B^{n+1} 上截面存在的充分必要条件是 $c^{n+1}(\xi)=0$. 当 B 是单连通†时局部系数群 $\pi_n(F)$ 是平凡的，除此之外，例如结构群 G 是连通时(这时 ξ 称为**可定向纤维丛** (orientable bundle))，$\pi_n(F)$ 也是平凡的，这时，$c^{n+1}(\xi)$ 就成为具有通常系数群的 $H^{n+1}(B; \pi_n(F))$ 的元素. 如果 $c^{n+1}(\xi)=0$，则 $\pi_i(F)=0$ ($n<i<m$) 时，同样可以考虑第二障碍 $c^{m+1}(\xi) \in H^{m+1}(B; \pi_m(F))$ (→障碍理论).

【Stiefel-Whitney 类】 设 $\xi = (E, p, B, F, O(n))$ 是弧连通多面体 B 上的 $O(n)$ 丛，ξ 的以 $(k-1)$ 连通的 Stiefel 流形 $V_{n,n-k}(\boldsymbol{R}) = O(n)/I_{n-k} \times O(k)$ 为纤维的相伴丛 $\xi^k = \xi \times_{O(n)} V_{n,n-k}$ 的第一障碍类 $W_{k+1}(\xi) = c^{k+1}(\xi^k) \in H^{k+1}(B; \pi_k(V_{n,n-k}))$ ($k=0,1,\cdots,n-1$) 称为 ξ 的 **Stiefel-Whitney 类** (Stiefel-Whitney class)，除了 $k=n-1$ 且 k 是奇数之外，我们有 $2W_{k+1}(\xi)=0$. 通常我们考虑的是以 $\boldsymbol{Z}_2$ 为系数的 $W_{k+1}(\xi) \in H^{k+1}(B; \boldsymbol{Z}_2)$. ξ 可定向也即 ξ 的结构群可约化为 $SO(n)$ 的充分必要条件是 $W_1(\xi)=0$. n 维**微分流形**†M 的 **Stiefel-Whitney 类** $W_{k+1}(M)$ 定义为其切丛 $\mathfrak{T}(M)$ (→[向量丛]的 5)) 的 Stiefel-Whitney 类. M 可定向与 $\mathfrak{T}(M)$ 可定向一样，其充分必要条件是 $W_1(M)=0$. $W_{k+1}(M)=0$ 是在 M 上存在 $n-k$ 个正交的单位切向量组的连续场的必要条件 (当 $k=n-1$ 时是充分必要条件). 且 $W_n(M)$ 是 M 的基本上同调类†的 $\chi(M)$ (Euler 示性数†)倍(→示性类 [Stiefel-Whitney 类]).

【陈类】 对于 $U(n)$ 丛 $\xi = (E, p, B, F, U(n))$，以 $2k$ 连通的 $V_{n,n-k}(\boldsymbol{C})$ 为纤维的相伴纤维丛 $\xi^k = \xi \times_{U(n)} V_{n,n-k}(\boldsymbol{C})$ 的第一障碍类 $C_{k+1}(\xi) = c^{2k+2}(\xi^k) \in H^{2k+2}(B; \boldsymbol{Z})$ ($k=0, 1, \cdots n-1$) 称为纤维丛 ξ 的**陈类** (Chern class). 由于 $U(n) \subset O(2n)$，我们把 ξ 考虑为 $O(2n)$ 丛，则有 $W_{2k+1}(\xi)=0$，$W_{2k}(\xi) = C_k(\xi)$ (mod 2). 实 $2n$ 维殆复流形 M 的**陈类** $C_{k+1}(M)$ 定义为其切丛 $\mathfrak{T}(M)$ (→[纤维丛的约化]的 1)) 的陈类(→示性类[陈类]).

【微丛】 对于拓扑空间及连续映射的组 $x: B \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} B$，在每点 $b \in B$，如果存在 b 的邻域 U，$i(U)$ 的邻域 V 以及同胚 $h: V \approx U \times \boldsymbol{R}^n$ 使得 $h \circ i = i_1$，$j|V = p_1 \circ h$ ($i_1: U \approx U \times 0 \subset U \times \boldsymbol{R}^n$，$p_1: U \times \boldsymbol{R}^n \to U$ 为射影)，则组 x 称为 B 上的 n 维**微丛** (microbundle). $\boldsymbol{R}^n$ 的保持原点不动的自同胚全体赋予紧开拓扑所成的拓扑群为 $H_0(n)$ 时，则 B 上的 n 维微丛的等价类自然的与以 B 为底空间，以 $\boldsymbol{R}^n$ 为纤维的 $H_0(n)$ 丛的等价类一一对应 ([10]). 且对于任意的拓扑流形†，可定义其上的切微丛，Milnor 用此概念证明了微分流形的切丛及 Понтрягин 类†不是拓扑不变量([9]).

【C^r 纤维丛，解析纤维丛】 纤维丛 $\xi = (E, p, B, F, G)$ 称为 **C^r 纤维丛** (fibre bundle of class C^r) ($r = 0, 1, \cdots, \infty, \omega$). 如果 E, B, F 为 C^r 微分流形†，G 为 Lie 群†，是 F 的 C^r 变换群，p 及坐标函数是 C^r 可微映射. 在此 C^0 丛表示普通的 G 丛，C^ω 丛表示**实解析纤维丛** (real analytic bundle). 同样可以通过复流形†、复 Lie

群†、正则函数†等概念定义(复)**解析纤维丛**(analytic bundle). 例如万有纤维丛$\xi(n-1, O(m))$,$\xi(2n, U(m))$(→[万有纤维丛的例子]的2)) 分别是实解析的及解析的主纤维丛,且C^{r+1}(或复)流形M的切丛$\mathfrak{T}(M)$(→[向量丛]的5))是C^r(或解析)向量丛. 它们作为C^r(或解析)向量丛,也能够定义 Whitney 和等等运算. 它们之间的等价关系也能由丛映射加上C^r可微性或正则性来定义. $C^r(r \leqslant \infty)$的情形与C^0的情形一样,能够通过到分类空间的C^r映射加以分类. 并且,C^r纤维丛上的C^r连络(→联络)也是一个重要的概念.

对于解析纤维丛,同样的分类只是对于某些限定的空间由小平邦彦、Serre、中野茂男([11])等得出的. 而 Stein 流形†上的解析纤维丛的分类归结为C^0纤维丛的分类(**岡潔原理**(Oka's principle),[12]),关于C^ω流形也有同样的结果([13]). 复解析连络(complex analytic connection, holomorphic connection)一般也不一定存在, M. F. Atiyah 已得出其存在的条件及其与陈类的关系([14]).

【参】 [1] N. E. Steenrod, The topology of fibre bundles, Princeton Univ. Press, 1951; [2] E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Comment. Math. Helv., **8**(1936), 3—51; [3] H. Whitney, Topological properties of differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., **43**(1937), 785—805; [4] S. S. Chern (陈省身), Some new viewpoints in differential geometry in the large, Bull. Amer. Math. Soc., **52**(1946), 1—30; [5] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraische Geometrie, Springer, 1956, 第三版, 1966; [6] J. W. Milnor, Construction of universal bundles II, Ann. of Math., **63**(1956), 430—436; [7] J. C. Moore, Espaces classifiants, Séminaire H. Cartan, **12** (1959/60), no, 5; [8] M. E. Mahowald, On obstruction theory in orientable fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc., **110**(1964), 315—349; [9] J. W. Milnor, Microbundles I, Topology, **3** (1964), 53—80; [10] J. Kister, Microbundles are fibre bundles, Bull. Amer. Math. Soc., **69**(1963), 854—857; [11] S. Nakano (中野茂男), On complex analytic vector bundles, J. Math. Soc. Japan, **7**(1955), 1—12; [12] H. Grauert, Analytische Faserung über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann., **135**(1958) 263—273; [13] K. Shiga (志賀浩二), Some aspects of real-analytic manifolds and differentiable manifolds, J. Math. Soc. Japan, **16**(1964), 128—142; [14] M. F. Atiyah, Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc., **85** (1957), 181—207; [15] 小松醇郎-中岡稔-菅原正博,位相幾何学I, 岩波, 1967; [16] 静間良次-島田信夫-戸田宏,位相幾何学II,岩波,近刊; [17] D. Husemoller, Fiber bundles, McGraw-Hill, 1966.

示性类 [英 characteristic class 法 classe caractéristique 德 charakteristische Klasse 俄 характеристический класс 日 特性類] 示性类的理论产生于下面的问题: 是否微分流形(→微分流形)上每点都存在r个线性独立切向量场即r维标架场?(E. Stiefel [5]). 现在,示性类作为一般向量丛结构的基本不变量具有不能缺少的重要性(→纤维丛, Lie 群和齐性空间的拓扑,嵌入问题).

【Stiefel-Whitney 类】 令$\xi=(E, B, \boldsymbol{R}^n)$为以仿紧† Hausdorff 空间$B$为底空间†, $\boldsymbol{R}^n$为纤维,正交群$O(n)$为结构群†的n维实向量丛†(以下简称为$\boldsymbol{R}^n$丛), 我们定义ξ的 **Stiefel-Whitney 类** (Stiefel-Whitney class)为底空间B的以$\boldsymbol{Z}_2=\boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}$为系数的上同调类$w_i(\xi)\in H^i(B, \boldsymbol{Z}_2)$ $(i=1,\cdots,n)$以及ξ的**全 Stiefel-Whitney 类** (total Stiefel-Whitney class) $w(\xi)=1+w_1(\xi)+w_2(\xi)+\cdots+w_n(\xi)\in H^*(B,\boldsymbol{Z}_2)$如下:首先在$n=1$的情形,$n$维实射影空间$P\boldsymbol{R}^n$的归纳极限$P\boldsymbol{R}^\infty=\varinjlim_{n\to\infty} P\boldsymbol{R}^n$称为**无限维实射影空间**(infinite dimensional projective space). 无限维实射影空间$P\boldsymbol{R}^\infty$上的非平凡线丛†γ_1是万有$\boldsymbol{R}^1$丛($O(1)$的万有纤维丛†), 任意的$\boldsymbol{R}^1$丛$\xi=(E,B,\boldsymbol{R}^1)$都和通过示性映射†$f_\xi: B\to P\boldsymbol{R}^\infty$由万有丛$\gamma_1$诱导出来的丛等价: $\xi\approx f_\xi^*\gamma_1$. 1维泛 Stiefel-Whitney 类$w_1(\gamma_1)$就定义为$H^1(P\boldsymbol{R}^\infty, \boldsymbol{Z}_2)$的生成元,并定义$w_1(\xi)=f_\xi^* w_1(\gamma_1)$. 下面对一般的$n$来定义. 已给$\boldsymbol{R}^n$丛$\xi=(E,B,\boldsymbol{R}^n)$,设伴随†$\xi$的主$O(n)$丛的全空间为$P$, 如果$Q_n\subset O(n)$为由对角矩阵生成的子群,则商空间$Y=P/Q_n$是主$Q_n$丛$\eta=(P, P/Q_n, Q_n)$的底空间. 设$\rho: Y\to B=P/O(n)$为自然射影,则由$\rho$诱导出来的$Y$上$\boldsymbol{R}^n$丛$\rho^*\xi$与$\eta$相伴,与$n$个线丛的 Whitney 和†等价([4]): $\rho^*\xi\approx\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$. 且此时上同调群的同态$\rho^*: H^*(B, \boldsymbol{Z}_2)\to H^*(Y,$

$\mathbf{Z}_2$) 是单射([1]). 因此通过关系式 $\rho^* w(\xi) = w(\xi_1) \cdots w(\xi_n)$, $\mathbf{R}^n$ 从 ξ 的全 Stiefel-Whitney 类 $w(\xi)$ 能够唯一决定. 以上定义的 $\mathbf{R}^n$ 从 ξ 的全 Stiefel-Whitney 类与丛映射可交换, 即 $w(f^*\xi) = f^* w(\xi)$ 成立(→纤维丛 [Stiefel-Whitney 类]). 分类空间† $BO(n)$ 上的万有 $\mathbf{R}^n$ 从 γ_n 的 Stiefel-Whitney 类 $w_i(\gamma_n) \in H^i(BO(n); \mathbf{Z}_2)$ 称为 i 维**泛 Stiefel-Whitney 类** (universal Stiefel-Whitney class). 对于向量丛的 Whitney 和, 有 $w(\xi \oplus \eta) = w(\xi) \cdot w(\eta)$ 成立.

$\mathbf{R}^n$ 从 ξ 可定向, 换句话说, ξ 具有 $SO(n)$ 丛结构的充分必要条件是 $w_1(\xi) = 0$. 对于定向 $\mathbf{R}^n$ 从 ξ, 与它相伴的 $(n-1)$ 维单位球面丛到全空间的截面 (cross-section) 的障碍类† $X_n(\xi) \in H^n(B, \mathbf{Z})$ 称为 ξ 的 **Euler-Poincaré 类** (Euler-Poincaré class). 特别 $SO(N)$ 的万有纤维丛的 Euler-Poincaré 类称为**泛 Euler-Poincaré 类** (universal Euler-Poincaré class). $X_n(\xi) \pmod 2$ 等于 $w_n(\xi)$, 如果 n 为奇数, 则 $2X_n(\xi) = 0$.

【陈(省身)类】 对于以仿紧空间 B 为底空间, $\mathbf{C}^n$ 为纤维, 酉群 $U(n)$ 为结构群的 n 维复向量丛 $\omega = (E, B, \mathbf{C}^n)$ (以下简称为 $\mathbf{C}^n$ 丛), 可以如前面那样定义 ω 的**陈类** (Chern class) 为上同调类 $c_i(\omega) \in H^{2i}(B, \mathbf{Z})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 以及其**全陈类** (total Chern class) $c(\omega) = 1 + c_1(\omega) + \cdots + c_n(\omega) \in H^*(B, \mathbf{Z})$ 如下: 在 $n = 1$ 的情形. 取复 Euclid 空间 $\mathbf{C}^n$ 的归纳极限——无限维复 Euclid 空间 $\mathbf{C}^\infty = \lim \mathbf{C}^n$ 的单位球面 S^∞, 设通过 $\mathbf{C}^\infty$ 的原点复直线全体所构成的**无限维复射影空间**为 $P\mathbf{C}^\infty$. 考虑由自然射影 $S^\infty \to P\mathbf{C}^\infty$ 所定义的泛主 $U(1)$ 丛 $(S^\infty, P\mathbf{C}^\infty, U(1))$, 设其相伴的万有 $\mathbf{C}^1$ 丛为 γ_1. 这时 1 维泛陈类 $c_1(\gamma_1) \in H^2(P\mathbf{C}^\infty, \mathbf{Z})$ 就定义为自然定向的闭链 $S^2 \approx P\mathbf{C}^1 \subset P\mathbf{C}^\infty$ 上取值 -1 的上同调类. 一般的 $\mathbf{C}^1$ 丛 $\xi = (E, B, \mathbf{C}^1)$ 因为可从 γ_1 通过示性映射 $f_\xi: B \to P\mathbf{C}^\infty$ 诱导出来, 我们就定义 $c_1(\xi) = f_\xi^* c_1(\gamma_1)$. 其次 $n > 1$ 的情形, 设和已给的 $\mathbf{C}^n$ 丛 $\xi = (E, B, \mathbf{C}^n)$ 相伴的主 $U(n)$ 丛的全空间是 P. $T_n \subset U(n)$ 是由对角矩阵作成的子群 (这是 $U(n)$ 的极大环面群), 考虑商空间 $Y = P/T_n$, 则 Y 是主 T_n 丛 $\eta = (P, P/T_n, T_n)$ 的底空间. 设 $\rho: Y \to B = P/U(n)$ 是自然射影, 则 Y 上的 $\mathbf{C}^n$ 丛 $\rho^*\xi$ 与 η 相伴, 且与 n 个复线丛的 Whitney 和等价: $\rho^*\xi \approx \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$. 且 $\rho^*: H^*(B, \mathbf{Z}) \to H^*(Y, \mathbf{Z})$ 是单射([1],[4]). 因此, 由关系式 $\rho^* c(\xi) = c(\xi_1), \cdots c(\xi_n)$, $\mathbf{C}^n$ 丛 ξ 的全陈类 $c(\xi)$ 能够唯一决定. 这样定义的陈类与丛映射可交换, $c(f^*\xi) = f^* c(\xi)$ 成立(→纤维丛 [陈类]). 分类空间 $BU(n)$ 上的万有 $\mathbf{C}^n$ 丛 γ_n 的陈类 $c_i(\gamma_n) \in H^{2i}(BU(n); \mathbf{Z})$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 称为**泛陈类** (universal Chern class). 对于复向量丛的 Whitney 和, 有 $c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta)$ 成立. 与结构群的自然嵌入 $U(n) \subset SO(2n)$ 相应, $\mathbf{C}^n$ 丛 ω 就对应于把 $\mathbf{C}^n$ 丛看成有自然定向的 $\mathbf{R}^{2n}$ 丛 $\omega_{\mathbf{R}}$, 那么就有 $c_i(\omega) \pmod 2 = w_{2i}(\omega_{\mathbf{R}})$, $w_{2i+1}(\omega_{\mathbf{R}}) = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, $c_n(\omega) = X_{2n}(\omega_{\mathbf{R}})$ 成立.

例: 与 Hopf 纤维丛† $(S^{2n+1}, P\mathbf{C}^n, U(1))$ 相伴的复线丛 γ_1^n 的示性映射 $P\mathbf{C}^n \to BU(1) = P\mathbf{C}^\infty$ 是自然的包含映射, $c(\gamma_1^n) = 1 - g_n$ ($g_n \in H^2(P\mathbf{C}^n, \mathbf{Z})$) 可表为用超平面 $P\mathbf{C}^{n-1}$ 实现的同调类的对偶上同调类. 反之由除子† $P\mathbf{C}^{n-1} \subset P\mathbf{C}^n$ 所决定的复线丛(→复流形) $\xi_1^n = \{P\mathbf{C}^{n-1}\}$, $c(\xi_1^n) = 1 + g_n$, ξ_1^n 与 γ_1^n 是互相对偶的. 且 n 维复射影空间 $P\mathbf{C}^n$ 的切丛 $\tau(P\mathbf{C}^n)$ 和平凡 $\mathbf{C}^1$ 丛 ε_1 的 Whitney 和 $\tau \oplus \varepsilon_1$ 与 $n+1$ 个 ξ_1^n 的 Whitney 和等价, 所以 $c(\tau(P\mathbf{C}^n)) = c(\xi_1^n \oplus \xi_1^n \oplus \cdots \oplus \xi_1^n) = (1 + g_n)^{n+1}$.

【Понтрягин 类】 相应于结构群的包含映射 $O(n) \subset U(n)$, 使 $\mathbf{R}^n$ 丛 ξ 与其复化的 $\mathbf{C}^n$ 丛 $\xi_{\mathbf{C}} = \xi \oplus \sqrt{-1}\,\xi$ 相对应, 我们把 $p_i(\xi) = (-1)^i c_{2i}(\xi_{\mathbf{C}})\ (\in H^{4i}(B, \mathbf{Z}))\left(i = 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 称为 $\mathbf{R}^n$ 丛 ξ 的 $4i$ 维 **Понтрягин 类** (Pontrjagin class) ([4]). 特别 $O(n)$ 的万有纤维丛的 Понтрягин 类称为**泛 Понтрягин 类** (universal Pontrjagin class). **全 Понтрягин 类** (total Pontrjagin class) $p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \cdots + p_{[\frac{n}{2}]}(\xi)$

如同前面一样定义。在此情形下有 $2c_{2i+1}(\xi_C)=0$，因此对于 Whitney 和，$p(\xi\oplus\eta)-p(\xi)\cdot p(\eta)$ 的阶数为 2。我们有 $p_i(\xi)\pmod 2=(w_{2i}(\xi))^2$，且对于定向 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 从 ξ，$p_n(\xi)=(X_{2n}(\xi))^2$ 成立。对于复向量丛 ω，$(-1)^k p_k(\omega_{\boldsymbol{R}})=\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i c_i(\omega)\cdot c_{2k-i}(\omega)$（设 $c_0(\omega)=1$）成立（[8]）。

以上所述的 Stiefel-Whitney 类、陈类、Понтрягин 类等总称为**示性类**。

【示性类的各种定义】 i) 公理化的定义：1) 对于以仿紧 Hausdorff 空间 B 为底空间的 $\boldsymbol{C}^n$ 从 ξ，定义陈类 $c_i(\xi)\in H^{2i}(B,\boldsymbol{Z})$ $(i\geqslant 0)$，满足 $c_0(\xi)=1$，$c_i(\xi)=0$ $(i>n)$。2) 对于全陈类 $c(\xi)=\sum_{i=0}^{\infty}c_i(\xi)$，$c(f^*\xi)=f^*c(\xi)$。3) 对于 Whitney 和，$c(\xi\oplus\eta)=c(\xi)\cdot c(\eta)$。4) 正规化条件：对于典范线丛 ξ_1^n，$c(\xi_1^n)=1+g_n$（→[陈类]的例）。能够证明满足上面四个条件的陈类的存在性及唯一性（[4]）。对于 Stiefel-Whitney 类可以同样的公理化。

ii) 用障碍类定义。底空间 B 是 CW 复形时，$\boldsymbol{C}^n$ 从 ξ 的陈类可定义如下：关于 $\boldsymbol{C}^n$ 的 Hermite 度量的标准正交 $n-q+1$ 标架全体所构成的复 Stiefel 流形† $V_{n,n-q+1}(\boldsymbol{C})=U(n)/I_{n-q+1}\times U(q-1)$ 是 $(2q-2)$ 连通的，$\pi_{2q-1}(V_{n,n-q+1}(\boldsymbol{C}))=\boldsymbol{Z}$。以 $V_{n,n-q+1}(\boldsymbol{C})$ 为纤维的与 ξ 相伴的纤维丛 ξ' 的截面的第一障碍类† $\in H^{2q}(B,\boldsymbol{Z})$ 与 ξ 的陈类 $c_q(\xi)$ 相等。对于 $\boldsymbol{R}^n$ 丛可以同样定义（→纤维丛）。

iii) 用 Schubert 闭链定义。对于 $\boldsymbol{C}^{n+N}$ 中的坐标系 $(z_1,\cdots,z_{n+N})$，由 $z_{k+1}=z_{k+2}=\cdots=z_{n+N}=0$ 定义的复子空间特别用 $\boldsymbol{C}^k$ 表示，固定子空间序列 $\boldsymbol{C}^1\subset\boldsymbol{C}^2\subset\cdots\subset\boldsymbol{C}^{n+N}$。通过 $\boldsymbol{C}^{n+N}$ 的原点的复 n 平面 X 的全体，构成复 Grassmann 流形† $M_{n+N,n}(\boldsymbol{C})$。它的元素 n 平面 X 和 X 中的向量 v 的组 (X,v) 的全体记作 $E(\gamma_n^N)$，那末以 $M_{n+N,n}(\boldsymbol{C})$ 为底空间，以 $E(\gamma_n^N)$ 为全空间就定义 $2N$ 万有复 n 维向量丛 γ_n^N，其射影是 $(X,v)\to X$。对于满足 $0\leqslant\omega(1)\leqslant\cdots\leqslant\omega(n)\leqslant N$ 的任意整数列 $\omega=(\omega(1),\cdots,\omega(n))$，对于所有 $i=1,2,\cdots,n$，满足 $\dim(X\cap\boldsymbol{C}^{i+\omega(i)})=i$，且 $\dim(X\cap\boldsymbol{C}^{i+\omega(i)-1})=i-1$ 的 n 平面 X 的全体构成的 $M_{n+N,n}(\boldsymbol{C})$ 的子集 e_ω 是实 $2\sum_{i=1}^{n}\omega(i)$ 维开胞腔†。所有这样的开胞腔 e_ω 就构成 $M_{n+N,n}(\boldsymbol{C})$ 的胞腔部分使之构成 CW 复形†。e_ω 的闭包 $\bar{e}_\omega$ 是 $M_{n+N,n}(\boldsymbol{C})$ 的胞腔子复形也称为 **Schubert 簇**（Schubert variety）。它是具有标准定向的伪流形†，代表 $2\sum_{i=1}^{n}\omega(i)$ 维整系数闭链，称为 **Schubert 闭链**（Schubert cycle）。这些闭链 $\bar{e}_\omega$ 用记号 $(\omega(1),\cdots,\omega(n))$ 表示，它们所属的同调类全体组成同调群 $H_*(M_{n+N,n}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{Z})$ 的基。在闭链 $(0,\cdots,0,1,\cdots,1)$（$n-q$ 个 0，q 个 1）上取值 1，在所有其他闭链上均取值 0 的上闭链就代表陈类 $c_q(\gamma_n^N)\in H^{2q}(M_{n+N,n}(\boldsymbol{C}),\boldsymbol{Z})$。在实 Grassmann 流形 $M_{n+N,n}(\boldsymbol{R})$ 的情形，也可以用类似的方法定义泛 Stiefel-Whitney 类（[8]）。

iv) R. Thom 的定义。设底空间 B 上的 $\boldsymbol{R}^n$ 从 ξ 的 Thom 空间† B_ξ 的基本上同调类为 $U\in H^n(B_\xi,\boldsymbol{Z}_2)$，$j:B\to B_\xi$ 是由零截面导出的包含映射，$\varphi:H^k(B,\boldsymbol{Z}_2)\cong\tilde{H}^{k+n}(B_\xi,\boldsymbol{Z}_2)$（Thom-Gysin 的同构定理†），则 $j^*U=w_n(\xi)$，$\varphi^{-1}(Sq^iU)=w_i(\xi)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 成立。这里 Sq^i 表示 Steenrod 运算†（[6]）。

v) 用微分形式定义。设 ξ 是以微分流形 B 为底空间的可微主 $U(n)$ 从，P_ξ 为其全空间。P_ξ 上的联络形式† $\omega=(\omega_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ 的曲率形式† 为 $\Omega=(\Omega_{ij})$，则 Ω_{ij} 为 B 上复值二次微分形式，满足 $\bar{\Omega}_{ij}=-\Omega_{ji}$。对于矩阵 Ω，考虑下面行列式所表示的（混合）微分形式

$$\phi=\sum_q\phi_q=\det|I+(2\pi\sqrt{-1})^{-1}\Omega|.$$

式中 I 是单位矩阵，行列式中的乘积表示外积†，ϕ_q 是 ϕ 的 $2q$ 次分量。ϕ 就定义成一个与联络 ω 的选取无关的实数值微分形式。$d\phi_q=0$，$(-1)^q\phi_q$ 所表示的上同调类 $\in H^{2q}(B,\boldsymbol{R})$ 就是实系数陈类 $c_q(\xi)$（[2]，[3]）。

vi) 用对称多项式的定义（→ Lie 群和齐性

空间的拓扑).

【流形的示性类】 微分流形或(殆)复流形† M,其切丛的示性类称为**流形M的示性类**(characteristic class of a manifold),**流形的 Stiefel-Whitney 类,流形的 Понтрягин 类,流形的陈类**分别用 $w_i(M)$, $p_i(M)$, $c_i(M)$ 表示.它们是流形的微分结构†或(殆)复结构†的不变量. **Stiefel-Whitney 数** (Stiefel-Whitney number) 是 n 维流形M的 Stiefel-Whitney 类生成的所有 n 次单项式在基本同调类$[M]$上所取的值 $(w_1(M)^{r_1}\cdot w_2(M)^{r_2}\cdot\cdots w_n(M)^{r_n})[M]\in \boldsymbol{Z}_2$ $(r_1+2r_2+\cdots+nr_n=n,\ r_i\geqslant 0)$. 同样可定义取整数值的 **Понтрягин 数** (Pontrjagin number) 与**陈数** (Chern number),这些数统称为流形的**示性数** (characteristic number). 特别 $X_n(M)[M]=\chi(M)$ 是 Euler-Poincaré 示性数†.

对于拓扑流形,也可以在下述意义下定义示性类. 取 n 维紧流形 M, $H^n(M,\boldsymbol{Z}_2)$ 的生成元为 X^n. 对于任意的元素 $X^i\in H^i(M,\boldsymbol{Z}_2)$ 及 $Y^{n-i}\in H^{n-i}(M,\boldsymbol{Z}_2)$, 通过 $X^i(Y^{n-i})=(X^i\cdot Y^{n-i})[M]\in\boldsymbol{Z}_2$ 得到同构 $H^i(M,\boldsymbol{Z}_2)\cong \mathrm{Hom}(H^{n-i}(M,\boldsymbol{Z}_2),\boldsymbol{Z}_2)$. 在这个同构下,同态 $Y^{n-i}\to Sq^i\,Y^{n-i}[M]$ 所对应的元素 $u_i\in H^i(M,\boldsymbol{Z}_2)$ $\left(i\leqslant\frac{n}{2}\right)$ 称为M的**吴(文俊)类** (Wu class),其中 Sq^i 是 Steenrod 运算†. 且 $w_j=\sum_{i\geqslant 0} Sq^{j-i}u_i\in H^j(M,\boldsymbol{Z}_2)$ 称为拓扑流形M的 **Stiefel-Whitney 类** (Stiefel-Whitney class). 对于M的任意的微分结构,总有 $w_i(M)=w_i$ 成立,因此微分流形的 Stiefel-Whitney 类是拓扑不变量 (Thom [6],吴文俊(W. T. Wu)). 与此相反, J. Milnor 证明了 Понтрягин 类并非是拓扑不变量.

【微分流形的指数定理】 设M为 $4k$ 维定向闭流形, x, y 为M的 $2k$ 维实系数上同调群 $H^{2k}(M,\boldsymbol{R})$的元素,令$f(x,y)=x\cdot y[M]$,则 f 在向量空间 $H^{2k}(M,\boldsymbol{R})$ 上定义了双线性型,二次型 $f(x,x)$ 的指数†(这里表示二次型 $f(x,x)$ 的标准型的(正项数目)−(负项数目))是流形M的拓扑不变量,称为流形的**指数** (index),用 $\tau(M)$ 表示. 如果流形M的维数不是4的倍数,则定义 $\tau(M)=0$. 对于流形的积,有 $\tau(M\times N)=\tau(M)\cdot\tau(N)$ 成立. 且 τ 是配边类†的不变量([6]).

微分流形的指数 τ 给出了从 Thom 代数† $\boldsymbol{\Omega}$ 到整数环 $\boldsymbol{Z}$ 的同态. F. Hirzebruch 特别着眼于 τ 的乘法性质,给出了 τ 的用 Понтрягин 数的表达式([4]). 设未定元 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的 i 次基本对称多项式†为 P_i,则用下式

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{\beta_i}}{\tanh\sqrt{\beta_i}}$$

表示的 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的形式幂级数的每个齐次项都成为 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的对称多项式,从而是 P_i 的有理系数多项式. 对于 $k\leqslant n$, k 次齐次项用 $L_k(P_1,\cdots,P_k)$ 表示. 现在令 P_i 为 $4k$ 维闭微分流形 M^{4k} 的 Понтрягин 类 $p_i(M^{4k})$, 则 $L_k(P_1,\cdots,P_k)$ 就表示 M^{4k} 的 $4k$ 维上同调类. 这时就有公式

$$\tau(M^{4k})=L_k(P_1,\cdots,P_k)[M^{4k}]$$

成立. 这公式称为微分流形的**指数定理** (index theorem) 或 **Hirzebruch 指数定理**. 例如: $L_1=\frac{1}{3}P_1$, $L_2=\frac{1}{45}(7P_2-P_1^2)$, $L_3=\frac{1}{945}(62P_3-13P_2P_1+2P_1^3)$, $\cdots$ (→微分流形的拓扑学).

【组合 Понтрягин 类】 设K为 n 维定向紧同调流形†. Σ^r 为已定向 $r+1$ 维单形的边缘,即组合 r 球面. 当$f:K\to\Sigma^{n-4i}$为分段线性映射†(piecewise linear mapping)时,对于 Σ^{n-4i} 中几乎所有的点 y, $f^{-1}(y)$ 是 $4i$ 维定向紧同调流形,其指数 $\tau(f^{-1}(y))$ 一定,与 y 点的取法无关,此整数用 $\tau(f)$ 表示. $\tau(f)$ 在映射 f 的同伦类上取值一定. 当 σ 为 $H^{n-4i}(\Sigma^{n-4i},\boldsymbol{Z})$的基本生成元时,若 $n\geqslant 8i+2$,则存在唯一的元素 $l_i=l_i(K)\in H^{4i}(K,\boldsymbol{Q})$, 使得对于所有的分段线性映射 $f:K\to\Sigma^{n-4i}$, $(l_i\cdot f^*\sigma)[K]=\tau(f)$成立. 用 $K\times\Sigma^m$ (m 充分大)代替 K, 因 $l_i(K)$ 定义为 $l_i(K\times\Sigma^m)$, 我们可去掉 $n\geqslant 8i+2$ 的限制. 假如K是微分流形 M 的 C^1 剖分†,则能够证明 $l_i(K)$ 等同于 Hirzebruch 定义的类

$L_i(p_1, \cdots, p_i)$ ([7] 及 В. А. Рохлин, А. С. Шварц)式中 $p_j = p_j(M)$是M的 Понтрягин 类. 因为变量 P_i 能够表为 $L_j(P_1, \cdots, P_j)$ $(j \leqslant i)$ 的有理系数多项式，所以用这个表达式可以把同调流形K的**组合 Понтрягин 类** (combinatorial Pontrjagin class) $p_i(K)$ 定义为 $l_j(K)$ 的有理系数多项式. 因此，当K是微分流形M的 C^1 剖分时，$p_i(K) = p_i(M)$ (整系数) 成立. 上面定义的 $l_i(K)$，从而 $p_i(K)$ 是K的重要的组合不变量. С. Новиков 证明组合(或光滑)流形†的有理 Понтрягин 类是拓扑不变量 (1966, [10]).

【Гельфанд-Фукс 上同调】 光滑流形M上所有光滑向量场构成的空间 $\mathscr{X}(M)$ 在括号运算 $[X, Y] = XY - YX$ 之下具有 Lie 代数结构，其中向量场 X, Y 看成M上光滑函数的空间 $C^\infty(M)$ 的自同态，其作用如同一阶微分算子. 在 $\mathscr{X}(M)$ 中引入拓扑，由M的紧集上向量场的分量及其所有偏导数一致收敛来定义. M上的 Гельфанд-Фукс 上同调就是 Lie 代数$\mathscr{X}(M)$及其平凡表示的连续上同调. 特别命 $C^0 = \boldsymbol{R}$, $C^p(p \geqslant 1)$ 为所有交错 p 线性连续映射 φ: $\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)$ (p 个)$\to \boldsymbol{R}$的集合. 我们定义 C^p 中上边缘算子 d 为 $d\varphi = 0$ $(\varphi \in C^0)$, $d\varphi(X_1, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\varphi([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{p+1})$ $(\varphi \in C^p, p \geqslant 1)$. 于是我们有一上链复形 $\oplus\{C^p, d\}$ 及这复形的上同调群 $H^*(\mathscr{X}(M))$，这称为M的 **Гельфанд-Фукс 上同调群** (Gel'fand-Fuks cohomology group). 上链的外积在 $H^*(\mathscr{X}(M))$中诱导一个环结构. Гельфанд 及 Фукс 证明，对于任何紧定向流形 M 及任一 p，我们有 $\dim H^p(\mathscr{X}(M)) < +\infty$，且对于 $0 \leqslant p \leqslant n$ 有 $H^p(\mathscr{X}(M)) = 0$. 例如，当M为圆 S^1 时，则环 $H^*(\mathscr{X}(S^1))$ 由两个生成元 $\alpha \in H^2$, $\beta \in H^3$ 生成，它们可用上链明显表示如下:

$$\alpha\left(f\frac{\partial}{\partial t}, g\frac{\partial}{\partial t}\right) = \int_{S^1}\begin{vmatrix} f' & f'' \\ g' & g'' \end{vmatrix} dt,$$

$$\beta\left(f\frac{\partial}{\partial t}, g\frac{\partial}{\partial t}, h\frac{\partial}{\partial t}\right) = \int_{S^1}\begin{vmatrix} f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ h & h' & h'' \end{vmatrix} dt.$$

假如紧定向流形 M 的所有 Понтрягин 类等于 0，则 $H^*(\mathscr{X}(M))$ 是有限生成的.

把 Гельфанд-Фукс 上同调的概念局部化就自然产生形式向量场的上同调. 这里形式向量场为表达式 $\Sigma f_\mu(x_1, \cdots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_\mu}$, f_μ 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的形式幂级数. 所有形式向量场的集合形成一个 Lie 代数 $\mathfrak{a}_n$，其关于 Krull 拓扑的连续上同调用 $H^*(\mathfrak{a}_n)$ 表示. 设 B_U 为群 $U(n)$ 的万有分类空间，$(B_U)_{2n}$ 为其 $2n$ 维骨架，P_{2n} 为限制于 $(B_U)_{2n}$ 的标准主 $U(n)$ 丛，则有环同构 $H^*(\mathfrak{a}_n) \cong H^*(P_{2n}; \boldsymbol{R})$.

$\oplus\{C^p, d\}$ 的一个重要子复形——对角子复形 $\oplus\{C^p_\Delta, d\}$ 定义如下: $C^p_\Delta = \{\varphi \in C^p \mid \varphi(X_1, \cdots, X_p) = 0$ 如果 $\operatorname{supp} X_1 \cap \cdots \cap \operatorname{supp} X_p = \varnothing\}$，此处 $\operatorname{Supp} X_i$ 表示 X_i 的支集，即 $\{x \mid X_i(x) \neq 0\}$. 令 P_M 为与M上的复化切丛相伴的主 $U(n)$ 丛 $(n = \dim M)$. $U(n)$自由地作用于积空间 $P_M \times P_{2n}$ 上，其商空间 $P_M \times P_{2n}/U(n)$ 是M上以 P_{2n} 为纤维的纤维丛. 于是，如果 M 是紧定向流形，对角复形的上同调 $H^*_\Delta(\mathscr{X}(M))$ 完全由下列同构决定: 对所有 p，$H^p_\Delta(\mathscr{X}(M)) \cong H^{p+n}(P_M \times P_{2n}/U(n); \boldsymbol{R})$. 特别，如果$M$的所有的 Понтрягин 类为 0，则

$$H^p_\Delta(\mathscr{X}(M)) = \sum_{i+j=p+n} H^i(M; \boldsymbol{R}) \otimes H^j(\mathfrak{a}_n).$$

表示是非平凡情形的 $\mathscr{X}(M)$的上同调理论也已研究. 一个典型并且重要的例子是Лосик复形，它来自 $\mathscr{X}(M)$ 在 $C^\infty(M)$ 上的自然表示. **Лосик 复形** (Losik complex) $L(M) = \oplus\{L^p, d\}$ 定义如下: 令 $L^0 = C^\infty(M)$，对于 $p \geqslant 1$, $L^p = \{\varphi \mid \varphi$ 是 $\mathscr{X}(M) \times \cdots \times \mathscr{X}(M)$ 到 $C^\infty(M)$ 的交错 p 线性映射，具有性质 $\operatorname{supp}\varphi(X_1, \cdots, X_p) \subset \operatorname{supp} X_1 \cap \cdots \cap \operatorname{supp} X_p\}$，且 $d\varphi(X_1, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\varphi([X_i, X_j], X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, \check{X}_j, \cdots, X_{p+1}) + \sum_i (-1)^{i+1}$

$X_i \cdot \varphi v(X_1, \cdots, \check{X}_i, \cdots, X_{p+1})$. $L(M)$自然地包含 de Rham 复形 $R(M)$ 为其子复形，因为微分 p 形式可刻划为这样的 Лосик p 上链，它作为 $C^\infty(M)$ 模在 $\mathscr{X}(M)$ 上是 p 线性的. 设 ι 为 $R(M)$ 到 $L(M)$ 中的包含映射，则映射 $H^*(R(M)) \xrightarrow{\iota^*} H^*(L(M))$的核是$M$的 Понтрягин 类 $p_i(i \geqslant 1)$ 生成的理想.

【参】 [1] A. Borel, Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. of Math., **57**(1953), 115—207; [2] A. Borel-F.Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, II, III, Amer. J. Math., **80** (1958), 458—538, **81**(1959), 315—382, **82** (1960), 491—504, [3] S. S. Chern (陈省身), Characteristic classes of Hermitian manifolds, Ann. of Math., **47**(1946), 58—121; [4] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer, 1956; [5] E. Stiefel, Richtungsfelder und Fernparallelismus in Mannigfaltigkeiten, Comment. Math. Helv., **8**(1936), 3—51; [6] R. Thom, Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod; Ann. Sci. École Norm. Sup., **69**(1952), 109—182; [7] R. Thom, Les classes caractéristiques de Pontrjagin des variétés triangulées, Symposium Internacional de Topologia Algebraica, Mexico, 1958; [8] W. T. Wu (吴文俊), Sur les classes caractéristiques des structures fibrés sphériques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1952; [9] J. W. Milnor, Microbundles I, Topology, **3**(1964), Suppl. I., 53—80; [10] С. П. Новиков (S. P. Novikov), О многообразиях со свободной абелевой фундаментальной группой и их применениях (Классы Понтрягна, гладкости, многомерные узлы), Известия Акад. Наук СССР, **30**(1966), 207—246; [11] I. M. Gel'fand, The cohomology of infinite-dimensional Lie algebras; some questions of integral geometry, Actes Congr. Intern. Math., Nice 1970, Gauthier-Villars, vol. I, p. 95—111; [12] I. M. Gel'fand-D. B. Fuks, Funkcional analiz priložen., **3**(1969), **4**(1970) (英译本: Cohomologies of the Lie algebra of tangent vector fields of a smooth manifold I, II, Functional Analysis Appl., **3**(1969), 194—210; **4** (1970), 110—116); [13] I. M. Gel'fand-D. B. Fuks, Известия Акад. Наук СССР **34**(1970) (英译本: The Cohomology of the Lie algebra of formal vector fields, Math. USSR-Izv. (1970), 322—337); [14] V. W. Guillemin, Cohomology of vector fields on a manifold, Advances in Math., **10** (1973), 192—220; [15] M. V. Losik, Funkcional analiz priložen., **4**(1970) (英译本: On the cohomologies of infinite-dемensional Lie algebras of vector fields, Functional Analysis Appl., **4**(1970), 127—135).

K理论 [英 K-theory, 法 K-théorie, 德 K-theorie 俄 K-теория 日 ケイ理論] K 理论是 M. F. Atiyah 和 F. Hirzebruch 引入的，他们根据 A. Grothendieck 代数几何学的思想，从向量丛的等价类构造K群，证明了微分流形的 Riemann-Roch 定理 ([3], [4]). 这个K群的理论加上 Bott 周期性，在微分拓扑学中得到有效的应用，如球面上向量场问题的解决 (J. F. Adams [1])，射影空间的嵌入问题等等 (→微分流形的拓扑学，嵌入问题). 我们这里只讨论微分拓扑学中所用到的K群.

【$K_\Lambda(X)$ 的构成】 设基域Λ为实数域 $\boldsymbol{R}$，复数域 $\boldsymbol{C}$ 或实四元数体 $\boldsymbol{H}$, Λ' 为Λ的中心†. 对于有限 CW 复形† X，定义 Abel 群$K_\Lambda(X)$如下 (K_Λ 是从有限 CW 复形的范畴†到 Abel 群的范畴的逆变函子). 有限 CW 复形X上的Λ向量丛†的所有等价类的集合 $\mathscr{E}_\Lambda(X)$，关于向量丛的 Whitney 和† $\xi \oplus \eta$ 构成交换半群. 从$\mathscr{E}_\Lambda(X)$造广义上同调群† $K_\Lambda(X)$ 如下: 以$\mathscr{E}_\Lambda(X)$为基，作自由 Abel 群 $F_\Lambda(X)$，在 $F_\Lambda(X)$ 中所有形如 $\xi \oplus \eta - \xi - \eta$ 的元素全体生成的子群记为 $Q_\Lambda(X)$，则定义

$$K_\Lambda(X) = F_\Lambda(X)/Q_\Lambda(X).$$

对于 $\xi \in \mathscr{E}_\Lambda(X)$，设$\xi$在$K_\Lambda(X)$中的象为 $\theta(\xi)$，而 $\theta: \mathscr{E}_\Lambda(X) \to K_\Lambda(X)$ 是半群到群的同态. 对于任意的 Abel 群 G 和任意的同态 $g: \mathscr{E}_\Lambda(X) \to G$，存在唯一的同态 $h: K_\Lambda(X) \to G$，使 $g = h \circ \theta$. 这个 h 称为 g 的扩张.

对于连续映射 $f: X \to Y$ 和 $\eta \in \mathscr{E}_\Lambda(Y)$，设 $f^*(\eta) \in \mathscr{E}_\Lambda(X)$是由 f 诱导出的向量丛†，则 $f^*: \mathscr{E}_\Lambda(Y) \to \mathscr{E}_\Lambda(X)$ 是半群的同态，且诱导出群同态 $K_\Lambda(f): K_\Lambda(Y) \to K_\Lambda(X)$. 即 $K_\Lambda(f)$ 是 $\theta \circ f^*$ 的扩张: $K_\Lambda(f) \circ \theta = \theta \circ f^*$. 通常的记号是用 f^* 代 $K_\Lambda(f)$. 当 $\Lambda = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ 时，通常分别用 KO, K, KSP 来代替 K_Λ.

对于一点 x，作为同态 $\mathscr{E}_\Lambda(x) \ni \xi \to \dim \xi \in \boldsymbol{Z}$ 的扩张就得到同构: $K_\Lambda(x) \cong \boldsymbol{Z}$. 当取定$X$的基点 x_0 时，$i: x_0 \to X$ 取为 $i(x_0) = x_0$. 设 i^* 的核为 $\tilde{K}_\Lambda(X)$，则 $K_\Lambda(X) \cong \boldsymbol{Z} \oplus \tilde{K}_\Lambda(X)$($\tilde{K}_\Lambda$ 是具有基点的有限 CW 复形的范畴上定义的函子).

对于两个Λ向量丛ξ及η，如果存在适当维数的平凡向量丛m和n，使得$\xi \oplus m = \eta \oplus n$，则称$\xi$及$\eta$ **稳定等价** (stably equivalent). 把稳

定等价的Λ向量从看成同一所得到的等价类称为**稳定Λ向量从**(stable Λ-vector bundle). 如果X是连通的, 则 $\widetilde{K}_\Lambda(X)$ 和所有稳定Λ向量从的集合一致.

当$\Lambda=\boldsymbol{R}$或$\Lambda=\boldsymbol{C}$时,由向量从的张量积†诱导出$K_\Lambda(X)$上交换环的结构, f^*就成为环同态.

映射 $i:\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(X)\to\mathscr{E}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 把 $\xi\in\mathscr{E}_{\boldsymbol{R}}(X)$ 对应于其复化 $i(\xi)=\xi\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{C}\in\mathscr{E}_{\boldsymbol{C}}(X)$, 它诱导出环同态 $i:KO(X)\to K(X)$, 且 $i\circ\theta=\theta\circ i$. 对于 $\xi\in\mathscr{E}_{\boldsymbol{H}}(X)$, 当把$\xi$看成$\boldsymbol{C}$向量从时设为 $\rho(\xi)\in\mathscr{E}_{\boldsymbol{C}}(X)$, 那么, 映射 $\rho:\mathscr{E}_{\boldsymbol{H}}(X)\to\mathscr{E}_{\boldsymbol{C}}(X)$ 诱导出群同态 $\rho:KSP(X)\to K(X)$. 同样通过把$\boldsymbol{C}$向量从看成$\boldsymbol{R}$向量从的造法,可以得到群同态 $r:K(X)\to KO(X)$(这些都是函子到函子的同态†).

把$\boldsymbol{C}$向量从ξ的陈类(→示性类)形式地写成 $c(\xi)=\Pi(1+x_i)\in H^*(X,\boldsymbol{Z})$, 定义$\xi$的**陈特征标**(Chern character) $ch(\xi)$ 为 $ch(\xi)=\Sigma\exp x_i\in H^*(X,\boldsymbol{Q})$($\boldsymbol{Q}$为有理数域), $ch:\mathscr{E}_{\boldsymbol{C}}(X)\to H^*(X,\boldsymbol{Q})$ 能够扩张成环同态 $ch:K(X)\to H^*(X,\boldsymbol{Q})$. 环同态 $ch\circ i:KO(X)\to H^*(X,\boldsymbol{Q})$, 群同态 $ch\circ\boldsymbol{\rho}:KSP(X)\to H^*(X,\boldsymbol{Q})$ 也简记作 ch. (ch 是从K_Λ到函子$H^*(\ ,\boldsymbol{Q})$的同态.)

【上同调理论】 相应于 $\Lambda=\boldsymbol{R},\boldsymbol{C},\boldsymbol{H}$ 设 $O_\Lambda(n)=O(n),U(n),Sp(n)$. 由自然的嵌入 $O_\Lambda(n)\subset O_\Lambda(n+1)$ 得到极限群 $O_\Lambda=\bigcup_n O_\Lambda(n)$ 赋予弱拓扑后成为CW群. 稳定Λ向量从和以O_Λ为结构群的主纤维从†一一对应. 设 O_Λ 的分类空间†为 B_Λ. 根据纤维从的分类定理(→纤维从),对于有限CW复形X, $K_\Lambda(X)=[X,\boldsymbol{Z}\times B_\Lambda]$,当给定基点$x_0\in X$时, $\widetilde{K}_\Lambda(X)=[X,\boldsymbol{Z}\times B_\Lambda]_0$, 此处 $[X,Y]$ 表示X到Y的连续映射的同伦集†, $[X,Y]_0$ 表示保持基点的映射的保持基点的同伦类†的集合. B_Λ具有弱H空间†的结构,由此诱导出的 $[X,\boldsymbol{Z}\times B_\Lambda]$ 的群结构与前面所给出的 $K_\Lambda(X)$ 的群结构一致. 且 f^*(作为 $K_\Lambda(X)$ 之间的映射) 与作为同伦集之间的映射一致.

由于 $\widetilde{K}_\Lambda$ 与函子 $[\ \ ,\boldsymbol{Z}\times B_\Lambda]_0$ 相一致,对于有限CW复形X及其子复形A, 令

$$K_\Lambda^{-n}(X,A)=\widetilde{K}_\Lambda(S^n(X/A)),\ n=0,1,2,\cdots$$

$$K_\Lambda^*(X,A)=\sum_n K_\Lambda^{-n}(X,A),$$

由此得到一个上同调理论(→同伦,同调群). 此处 X/A 是在X中把A中每一点看成同一点∞所得到的复形, $S^n(X/A)$ 表示X/A的n重约化双角锥†.

向量从的张量积诱导出同态

$$K_\Lambda^{-m}(X,A)\otimes K_\Lambda^{-n}(Y,B)\to K_\Lambda^{-(m+n)}(X\times Y,X\times B\cup A\times Y),$$

称之为**叉积**(cross product). 当 $\Lambda=\boldsymbol{R}$ 或 $\Lambda=\boldsymbol{C}$时,叉积和对角映射 $\Delta:X\to X\times X$ 所诱导出的 $K_\Lambda(\Delta)=\Delta^*$ 合成而得**上积**(cup product)

$$K_\Lambda^{-m}(X)\otimes K_\Lambda^{-n}(X)\to K_\Lambda^{-(m+n)}(X),$$

$$K_\Lambda^{-m}(X)\otimes K_\Lambda^{-n}(X,A)\to K_\Lambda^{-(m+n)}(X,A).$$

复化 $i:KO^{-n}(X,A)\to K^{-n}(X,A)$ 保持上积. $ch:K_\Lambda^{-n}(X,A)\to\widetilde{H}^*(S^n(X/A),\boldsymbol{Q})$ 与同纬同构† $\widetilde{H}^*(S^n(X/A),\boldsymbol{Q})\to H^*(X,A,\boldsymbol{Q})$合成也记作 ch. 当 $\Lambda=\boldsymbol{R}$ 或 $\Lambda=\boldsymbol{C}$ 时, $ch:K_\Lambda^{-n}(X,A)\to H^*(X,A,\boldsymbol{Q})$保持上积.

根据广义上同调理论,存在收敛于 $K_\Lambda^*(X)$ 的谱序列† $\boldsymbol{E}_r$, 其 $E_2=H^*(X,K_\Lambda^*(x))$, 而谱序列 $E_r\otimes\boldsymbol{Q}$ 是平凡的, $d_r\otimes\boldsymbol{Q}=0$ ([4]).

【Bott 周期性定理】 令 ξ_Λ 为Λ射影直线上的典范线从†. 元素 $g_{\boldsymbol{C}}=\theta(\xi_{\boldsymbol{C}})-1\in\widetilde{K}(S^2)=K^{-2}(x)$, $g_{\boldsymbol{H}}=\theta(\xi_{\boldsymbol{H}})-1\in\widetilde{KSP}(S^4)=KSP^{-4}(x)$, $g_{\boldsymbol{R}}=g_{\boldsymbol{H}}\cdot g_{\boldsymbol{H}}$ (叉积) $\in\widetilde{KO}(S^8)=KO^{-8}(x)$ 称为 **Bott 生成元** (Bott generator).

Bott 周期性定理(Bott periodicity theorem) ([5]) 可表述如下: 1) $\widetilde{K}(S^2)$, $\widetilde{KSP}(S^4)$, $\widetilde{KO}(S^8)$ 分别是由 $g_{\boldsymbol{C}}$, $g_{\boldsymbol{H}}$, $g_{\boldsymbol{R}}$ 生成的无限循环群, $ch(g_C)=\sigma^2$, $ch(g_{\boldsymbol{H}})=\sigma^4$, $ch(g_{\boldsymbol{R}})=\sigma^8$, 此处 $\sigma^n\in H^n(S^n,\boldsymbol{Z})$ 是生成元. 2) 叉积

$$K^{-n}(X,A)\otimes K^{-2}(x)\to K^{-(n+2)}(X,A),$$

$$KSP^{-n}(X,A)\otimes KSP^{-4}(x)\to KO^{-(n+4)}(X,A),$$

$$KO^{-n}(X,A)\otimes KO^{-8}(x)\to KO^{-(n+8)}(X,A)$$

均为同构.

由对应 $a\to a\cdot g_\Lambda$(叉积)得到的同构: K^{-n}

$(X,A)\cong K^{-(n+2)}(X,A)$, $KSP^{-n}(X,A)\cong KO^{-(n+4)}(X,A)$, $KO^{-n}(X,A)\cong KO^{-(n+8)}(X,A)$ 称为 **Bott 同构** (Bott isomorphism). Bott 同构与 f^*, 上同调边缘运算[†] δ, ch 均可交换. 通过 Bott 同构联系的 K^{-n} 及 $K^{-(n+2)}$, KSP^{-n} 及 $KO^{-(n+4)}$, KO^{-n} 及 $KO^{-(n+8)}$ 分别可看成同一,因此,作为上同调理论只要研究 $K^*=\sum_{n\in Z_2}K^n$, $KO^*=\sum_{n\in Z_8}KO^n$ 就够了. 这些是具有乘法的周期上同调理论, ch 是由它们到 $H^*(\ \ ,Q)$的同态(不保持维数). Bott 还求出了一点的上同调 $K_A(x)=\widetilde{K}_A^{-n}(S^n)=\pi_n(B_A)=\pi_{n-1}(O_A)$ ([6]) (→公式 6 IV).

【上同调运算】 以下取 $\Lambda=R$ 或 $\Lambda=C$. $K_\Lambda(X)$ 上的基本运算是**外幂运算** (exterior power) λ^q. 对于 $\xi\in\mathscr{E}_\Lambda(X)$, 其 p 次外幂丛[†] $\lambda^p(\xi)\in\mathscr{E}_\Lambda(X)$, 满足 $\lambda^0(\xi)=1$, $\lambda^1(\xi)=\xi$, $\lambda^p(\xi\oplus\eta)=\sum_{q+r=p}\lambda^q(\xi)\otimes\lambda^r(\eta)$. 设$G$为形式幂级数环 $K_\Lambda(x)\{t\}$ 中的所有常数项为 1 的元素所构成的乘法交换群. 由对应 $\xi\to\lambda_t(\xi)=\sum_q\lambda^q(\xi)t^q$ 得出同态 $\mathscr{E}_\Lambda(X)\to G$. 设其扩张为 $\lambda_t:K_\Lambda(X)\to G$, 则由 $\lambda_t(x)=\sum_{0\le q}\lambda^q(x)t^q$ 得出 $\lambda^q:K_\Lambda(X)\to K_\Lambda(X)$.

由外幂运算派生出来的 **Adams 运算** (Adams operation) ψ^q 在应用上很重要. 令

$$\psi_{-t}(x)=-t\frac{d\lambda_t(x)}{dt}\frac{1}{\lambda_t(x)}\in K_\Lambda(X)\{t\},$$

由 $\psi_t(x)=\sum_{t\le k}\psi^k(x)t^k$ 定义 $\psi^k:K_\Lambda(X)\to K_\Lambda(X)$ $(k=1,2,\cdots)$. 当 $\Lambda=C$时, 把$\xi\in\mathscr{E}_C(X)$ 对应其共轭向量丛[†] $\bar{\xi}\in\mathscr{E}_C(X)$ 所得同态的扩张为 $\psi^{-1}:K(X)\to K(X)$. ψ^k 是保持 1 的环同态, 满足 $\psi^k\circ\psi^l=\psi^{kl}$. 对于线丛 $\xi\in\mathscr{E}_\Lambda(X)$, 有 $\psi^k\theta(\xi)=(\theta(\xi))^k$. 对于 $x\in K_\Lambda(X)$, 令 $ch(x)=\sum_n ch_n(x)$, $ch_n(x)\in H^{2n}(X,Q)$, 则 $ch(\psi^k(x))=\sum_n k^n ch_n(x)$. λ^q, ψ^k 与复化 $i:KO(X)\to K(X)$ 可交换. 对于 Bott 同构 β_C: $\widetilde{K}(X)\to\widetilde{K}(S^2X)$, $\beta_R:\widetilde{KO}(X)\to\widetilde{KO}(S^8X)$,有 $\psi^k\circ\beta_C=k\beta_C\circ\psi^k$, $\psi^k\circ\beta_R=k^4\beta_R\circ\psi^k$成立([1]).

【Thom-Gysin 同构】 有限 CW 复形上的定向 R 向量丛 ξ, 当满足 $w_2(\xi)=0$ 时, 称为**旋丛** (spin bundle),其中 $w_2(\xi)$是 ξ 的二阶 Stiefel-Whitney 类[†]. ξ 称为 **c_1 丛** (c_1-bundle), 如果给定 $c_1(\xi)\in H^2(X,Z)$ 满足 $c_1(\xi)\equiv w_2(\xi)$ (mod 2). 设 X^ξ 为 ξ 的 Thom 复形[†], $\widetilde{K}_\Lambda^*(X^\xi)$ 有 $K_\Lambda^*(X)$模结构. 设当 $\Lambda=C$ 时, ξ 是 c_1 丛, $\Lambda=R$ 时, ξ 是旋丛, 则存在典范 $K_\Lambda^*(X)$ 模同构 $\varphi:K_\Lambda^n(X)\to K_\Lambda^{n+\dim\xi}(X^\xi)$, 使得当 $\Lambda=C$ 时,

$$ch\varphi(1)=\varphi'((\hat{\mathscr{A}}(\xi)\exp(c_1(\xi)/2))^{-1}),$$

当 $\Lambda=R$ 时

$$ch\varphi(1)=\varphi'(\hat{\mathscr{A}}(\xi)^{-1})$$

([2]),此处$\varphi':H^*(X,Q)\to\widetilde{H}^*(X^\xi,Q)$就是通常的 Thom-Gysin 同构定理[†], $\hat{\mathscr{A}}(\xi)$ 是 ξ 的 **$\hat{A}$ 示性类** ($\hat{A}$-characteristic class), 定义如下: 把ξ的 Понтрягин 类[†] $p(\xi)$ 形式地写为 $p(\xi)=\Pi(1+x_i^2)$ 则$\hat{\mathscr{A}}(\xi)=\Pi(x_i/2)/\sinh x_i/2)$. 如果$\xi$是复向量丛,其一阶陈类[†] $c_1(\xi)$ 给 $r(\xi)\in\mathscr{E}_\Lambda(X)$ 以 c_1 丛结构,则 $\mathscr{T}(\xi)=\hat{\mathscr{A}}(\xi)\exp(c_1(\xi)/2)$ 是 ξ 的 **Todd 示性类** (Todd characteristic class).

【微分流形的 Riemann-Roch 定理】 设 M, N 为紧连通无边缘的微分流形, $f:M\to N$为连续映射. 如果 $w_1(M)=f^*w_1(N)$, $w_2(M)=f^*w_2(N)$, 则 f 称为**旋映射** (spin mapping). 如果 $w_1(M)=f^*w_1(N)$, 且给出 $c_1\in H^2(M;Z)$ 使 $w_2(M)-f^*w_2(N)\equiv c_1(\text{mod }2)$, 则 f 称为 **c_1 映射** (c_1-mapping). 假定 $\Lambda=C$时 f 为 c_1 映射, $\Lambda=R$ 时 f 为旋映射, 则存在典范同态 $f_!:K_\Lambda^n(M)\to K_\Lambda^{n+\dim N-\dim M}(N)$ 使得

$$f_!(f^*(x)\cdot y)=xf_!(y),$$
$$y\in K_\Lambda^*(M),\ x\in K_\Lambda^*(N),$$
$$ch(f_!(y))\hat{\mathscr{A}}(N)=f_!(ch(y)\hat{\mathscr{A}}(M)\exp(c_1/2)).$$

这就是**微分流形的 Riemann-Roch 定理** (Riemann-Roch theorem for differentiable manifolds) ([3]) (→Riemann-Roch 定理). 此处当 $\Lambda=R$ 时设 $c_1=0$, 第二式的右边 $f_!:H^*(M;Q)\to H^*(N;Q)$ 是通常的 Gysin 同态[†]. $f_!$ 只依赖

于 f 的同伦类,可以选取 $f!$ 使它满足通常的函子性质 $1! = 1$ 及 $(f\circ g)! = f!\circ g!$.

【Atiyah-Singer 指数定理】 设 X 为 n 维紧无边缘 C^∞ 微分流形 (→微分流形). 正如我们后面将看到的那样,对于 X 上的任何椭圆微分算子 (或更一般的,椭圆复形) d 存在解析指数 $\mathrm{ind}_a(d)$ 以及拓扑指数 $\mathrm{ind}_t(d)$, 而后者与 K 理论有深刻的关系. **Atiyah-Singer 指数定理** (Atiyah-Singer index theorem) 是说 $\mathrm{ind}_a(d) = \mathrm{ind}_t(d)$[13,14]. 下面叙述定义及定理的细节.

设 E 及 F 为 X 上 C^∞ 复向量丛, $\dim E = s$, $\dim F = t$ (→纤维丛), $\Gamma(E)$ 及 $\Gamma(F)$ 分别为 E 及 F 上 C^∞ 截面所构成的 $\boldsymbol{C}$ 上的线性空间. 从 $\Gamma(E)$ 到 $\Gamma(F)$ 的线性映射 d 称为 **k 阶微分算子**(differential operator of the kth order), 如果 d 局部可表为某种 k 阶微分算子,也就是说,如果我们选 X 的一个局部坐标邻域 U 以及 E, F 在 U 上的平凡化使得 $E|U \cong U\times \boldsymbol{C}^s$ 及 $F|U \cong U\times\boldsymbol{C}^t$, 则 d 是从 $C^\infty(U, C^s)$ 到 $C^\infty(U, \boldsymbol{C}^t)$ 的 k 阶微分算子. 因此 d 局部可表为矩阵形式 $\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} a_\alpha^{(i,j)}(x) D^\alpha\right)(i=1,\cdots,t; j=1,\cdots,s)$, 其中每个矩阵元是一个微分算子 (→微分算子). 利用这个表达式,我们可以定义 d 的象征 (symbol) $\sigma(d)$ 如下: 设 $T^*(X)$ 为 X 的余切丛. 对任何 $\eta_x\in T_x^*(X)$, 对于定义 $\sigma(d)(\eta_x) = \left(\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha^{(i,j)}(x)\eta_x^\alpha\right)$, 其中 η_x^α 表示 $\eta_1^{\alpha_1}\cdots\eta_n^{\alpha_n}$ 任何重指标 $\alpha = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 及局部坐标表示 $\eta_x = (\eta_x^1,\cdots,\eta_x^n)$. 我们称 $\sigma(d)(\eta_x)$ 为 d 的象征. 微分算子 d 称为**椭圆** (elliptic) **算子**, 如果对于每个 $\eta_x\neq 0$ 象征 $\sigma(d)(\eta_x)$ 给出 E_x 到 F_x 上的同构. 对于椭圆微分算子 d, 我们有 $\dim\mathrm{Ker}\, d<\infty$ 及 $\dim\mathrm{Coker}\, d<\infty$ ([7]). **解析指数** (analytic index) $\mathrm{ind}_a(d)$ 定义为整数 $\dim\mathrm{Ker}\, d - \dim\mathrm{Coker}\, d$, 它有特征性质即 $\mathrm{ind}_a(d)$ 在 d 的变形下不变.

更一般地, X 上的椭圆复形 $\mathscr{E}$ 及其解析指数 $\mathrm{ind}_a(\mathscr{E})$ 可定义如下: 给定 X 上有限个光滑复向量丛 $\{E_i\}_{i=1,\cdots,l}$ 及微分算子 $d_i:\Gamma(E_i)\to\Gamma(E_{i+1})$, 我们把 $\mathscr{E} = \{E_i, d_i\}_{i=1,\cdots,l}$ 称为 X 上的一个**椭圆复形** (elliptic complex), 如果下面两个条件满足: (i) $d_{i+1}\circ d_i = 0$; (ii) 对任何 $\eta_x\in T_x^*(X)$, $\eta_x\neq 0$, 象征序列 $\to E_{i,x}\xrightarrow{\sigma(d_i)(\eta_x)} E_{i+1,x}\to$ 是正合的. 对于一个椭圆复形 $\mathscr{E}$, 我们有 $\dim H^i(\mathscr{E}) = \dim(\mathrm{Ker}\, d_i/\mathrm{Im}\, d_{i-1})<\infty$ [4; 11, 16]. 整数 $\Sigma(-1)^i\dim H^i(\mathscr{E})$ 就称为 $\mathscr{E}$ 的**解析指数** (analytic index). 形如 $0\to\Gamma(E)\xrightarrow{d}\Gamma(F)\to 0$ 的椭圆复形就是一个椭圆算子. 椭圆复形的一个重要的例子来自 de Rham 理论(→微分流形[微分形式]): 取 $E_i = \Lambda^i T^*(X)$, 微分算子为外微分算子, 这样得到的椭圆复形称为 **de Rham 复形** (de Rham complex).

椭圆复形 $\mathscr{E}$ 的拓扑指数 $\mathrm{ind}_t(\mathscr{E})$ 可如下引入: 由差别丛理论[4], 幂 $\eta_x\neq 0$ 正合性, 象征序列 $\to E_{i,x}\xrightarrow{\sigma(d_i)(\eta_x)} E_{i+1,x}\to$ 就决定 $K(X^\tau)$ 中一个确定的元素 $[\sigma(d)]$, 这里 X^τ 是与 X 的余切丛相伴的 Thom 复形[†] 把 X 嵌入到某 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^N$ 中, 则映射 $j: T^*(X)\to T^*(\boldsymbol{R}^N)\cong\boldsymbol{R}^{2N}$ 自然诱导出一个同态 $j!: K(X^\tau)\to K((\boldsymbol{R}^N)^\tau)\cong K(S^{2N})\cong\boldsymbol{Z}$, $j!$ 是从 Thom 同态经过适当修正后构造出来的. 令 $\mathrm{ind}_t(\mathscr{E}) = j![\sigma(\mathscr{E})]$ 称之为 $\mathscr{E}$ 的**拓扑指数** (topological index). 我们有

$$\mathrm{ind}_t(\mathscr{E}) = ch([\sigma(d)])\mathscr{T}(X)[X^\tau],$$

式中 $ch([\sigma(d)])$ ($\in H^*(X^\tau;\boldsymbol{Q})$) 是 $\sigma(d)$ 的陈特征标 $\mathscr{T}(X)$ ($\in H^*(X;\boldsymbol{Q})$) 是 $\mathscr{T}(X)\otimes\boldsymbol{C}$ 的 Todd 类, $[X^\tau]$ 是 X^τ 的基本闭链 [14].

Atiyah-Singer 指数定理的最一般形式就是说 $\mathrm{ind}_a(\mathscr{E}) = \mathrm{ind}_t(\mathscr{E})$. 对于 de Rham 复形 E, 由定义可知 $\mathrm{ind}_t(E)$ 等于 X 的 Euler 示性数. 设 X 为紧复解析流形, W 为 X 上复解析向量丛. 把这定理应用到取值于 W 的 Dolbeault 复形 $\cdots\to A^{0,i}(W)\xrightarrow{d''} A^{0,i+1}(W)\to\cdots$ (→复流形) 上, 我们就可以推出 Hirzebruch 型的 Riemann-Roch 定理(→Riemann-Roch 定理)不仅对射影代数流形而且也对紧复流形成立. 并且由指数定理我们还可以推出 Hirzebruch 指数定理(→示性类[微分流形的指数定理])以及各种整性定理[14].

Atiyah-Singer 指数定理也能推广到有边缘的紧流形，而与椭圆边值问题有关[10]. 还可以把定理推广到紧 Lie 群以某种适当的方式作用于流形，向量丛及椭圆算子上的情形 [14]. 在这个情形下，指数定理在同变 (equivariant) K 理论[12]的范围内来表述，而且与 Lefschetz 不动点定理† 密切相关. 这的确使我们能够应用指数定理来研究流形上的变换群.

【代数K理论】 **代数 K 理论**是代数的一个分支，它主要研究环(或更一般，某个范畴)上取值于 Abel 群的一系列函子 K_n 而带有某种广义同调论的特色. 它来源于 Grothendieck 关于 Riemann-Roch 定理的工作中所用的 K 群构造. H. Bass 于六十年代初期创始这个理论，他引入了 K_1 并与其他人合作大规模地研究 K_0 及 K_1([20, 21, 22, 23]). K_2 是 J. Milnor 引进的[26]，而高阶 K 理论是由 D. G. Quillen 和其他人从各种不同观点构造的([27], I). 还有关于 Hermite 结构的K理论([27] III). 代数 K 理论与其他各种数学分支像拓扑学，代数几何学以及算术(数论)有密切关系.

环 A 的 **Grothendieck 群** (Grothendieck group) $K_0(A)$ 是有限生成射影 A 模的同构类 $[P]$ 集合生成的 Abel 群，对于每对射影模 P, P'，其间有关系 $[P\oplus P'] = [P] + [P']$. 假如 A 作为 $\mathbf{Z}$ 代数是有限生成的，则 $K_0(A)$ 是有限生成的群. 使 $n \to n[A]$ 的对应定义一个同态 $\mathbf{Z} \to K_0(A)$，其余核就是 A 的射影类群†. 如果 A 是交换环，在秩 $=1$ 的射影 A 模的范畴中对于张量积$\otimes$的类似造法就导致 **Picard 群** (Picard group) $Pic(A)$. 于是我们有满同态 $K_0(A) \to Pic(A)$ 定义为 $P \to \Lambda^r P$，其中 P 的秩 $= r$[21]. 如果 X 是紧 Hausdorff 空间，拓扑的 $K(X)$ 就同构于代数的 $K_0(A)$，这里 A 就是 X 上的复值连续函数环.

Whitehead 群 (Whitehead group) $K_1(A)$ 定义如下：设 $GL(A)$ 为序列

$$\cdots \to GL_n(A) \xrightarrow{i_n} GL_{n+1}(A) \to$$

的顺向极限，其中 $i_n(X) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 设 $E_n(A)$ 为 $GL_n(A)$ 的子群，由所有初等矩阵 $1 + ae_{ij}$ $(i \neq j,\ a \in A)$ 生成，其中 e_{ij} 是矩阵单元. $E_n(A)$ 的极限 $E(A)$ 与 $GL(A)$ 的换位子群同构. 我们定义 $K_1(A) = GL(A)/E(A)$ [20, 23]. 对于 $A = \mathbf{Z}\pi$，即群 π 的整数群代数，自然同态 $\pm\pi \to K_1(A)$ 的余核表为 $Wh(\pi)$. J. H. C. Whitehead 的挠不变量就定义于 $Wh(\pi)$ 中[25]. 如果 A 是交换环，令 $SK_1(A) = SL(A)/E(A)$，其中 $SL(A) = \lim SL_n(A)$. 由行列式同态，我们有 $K_1(A) \cong SK_1(A) \oplus U(A)$，其中 $U(A)$ 是 A 的可逆元群. 当 A 是域或局部环时，$SK_1(A) = 0$. 一个更深刻的结果是对于代数数域的整数环 A，$SK_1(A) = 0$ (Bass, Milnor, Serre [22]). 这个结果以及有关结果曾用来研究有限群 π 的 $SK_1(\mathbf{Z}\pi)$.

我们定义 $K_2(A) = H_2(E(A), \mathbf{Z})$ ($E(A)$ 的 Schur 乘子). 这就产生出 $E(A)$ 的万有中心扩张，定义为

$$0 \to K_2(A) \to St(A) \to E(A) \to 0.$$

其中 $St(A) = \lim St_n(A)$，而 $St_n(A)$ $(n \geq 3)$ 是 **Steinberg 群** (Steinberg group): 它由 $x_{ij}(a)$ $(a \in A;\ i, j = 1, \cdots, n,\ i \neq j)$ 生成，其间有关系 (i) $x_{ij}(a)x_{ij}(b) = x_{ij}(a+b)$，及 (ii) 换位子 $(x_{ij}(a), x_{kl}(b)) = x_{il}(ab)$ 当 $j = k$, $i \neq l$; $=1$，当 $j \neq k, i \neq l$.

设 F 为域. 如果双积性映射 $s: F^* \times F^* \to C$ (C 是 Abel 群)满足 $s(x, 1-x) = 1$ $(x \neq 0, 1)$，则称为 F 上的 **Steinberg 记号** (Steinberg symbol). 存在一个万有记号 $s: F^* \times F^* \to K_2(F)$，它与同态 $K_2(F) \to C$ 结合起来，就产生 F 上的 C 值记号. 因为某些 Steinberg 记号象 Hilbert 记号在算术中很重要，因此全局域或局部域 F 的群 $K_2(F)$ 与 F 的算术密切相关. 如果 F 是代数数域，R 是其整数环，则我们有正合序列 $0 \to K_2(R) \to K_2(F) \to \coprod_{\mathfrak{p}}(R/\mathfrak{p})^* \to 0$ (最后一项是 R 的所有素理想 $\mathfrak{p}$ 的直和)，且 $K_2(R)$ 是有限群.

【参】 [1] J. F. Adams, Vector fields on spheres, Ann. of Math., 75(1962), 603—632; [2] M. F. Atiyah-R. Bott-A. Shapiro (Šapiro), Clifford modules, Topology, 3(1964), 3—38; [3] M. F. Atiyah-F. Hirze-

bruch, Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 65(1959), 276—281; [4] M. F. Atiyah-F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces, Proceedings of Symposia of Amer. Math. Soc., Vol. 3(1961) p. 7—38; [5] R. Bott, Quelques remarques sur les théorèmes de périodicité, Bull. Soc. Math. France, 87(1959), 293—310; [6] R. Bott, The stable homotopy of classical groups, Ann. of Math., 70 (1959), 313—337; [7] J. F. Adams, On the groups J(X) I, II, III, IV, Topology, 2(1963) 181—195; 3(1965), 137—171, 193—222; 5(1966), 21—71; [8] M. F. Atiyah, Algebraic topology and elliptic operators, Comm. Pure Appl, Math., 20(1967), 237—249; [9] M. F. Atiyah, K-theory, Benjamin, 1967; [10] M. F. Atiyah-R. Bott, The index problem for manifolds with boundary, Bombay Colloquium on Differential Analysis, Oxford Univ. Press (1964), 175—186; [11] M. F. Atiyah-R. Bott, A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes I, Ann. of Math., (2) 86(1967), 374—407; [12] M. F. Atiyah-G. B. Segal, Seminar on equivariant K-theory, Lecture notes, Oxford Univ., 1965; [13] M. F. Atiyah-I. M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., 69(1963), 422—433; [14] M. F. Atiyah-I. M. Singer, The index of elliptic operators I, II, III, Ann. of. Math., (2) 87(1968), 484—604; [15] R. Bott, Lectures on $K(x)$, Benjamin, 1969, [16] Séminaire H. Cartan, Ecole Norm. Sup., 1963—1964; [17] P. E. Conner-E. E. Floyd, The relation of cobordism to K-theories, Lecture notes in math. 28, Springer, 1966; [18] E. Dyer, Cohomology theories, Benjamin, 1969; [19] R. Palais, Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1965; [20] H. Bass, K-theory and stable algebra, Publ, Math. Inst. HES, 22(1964), 5—60; [21] H. Bass-M. P. Murthy, Grothendieck groups and Picard groups of Abelian group rings, Ann. of Math., (2) 86 (1967), 16—73; [22] H. Bass-J. Milnor-J.-P. Serre, Solution of the congruence subgroup problem for SL_n ($n\geqslant 3$) and Sp_{2n} ($n\geqslant 2$), Publ. Math. Inst, HES, 33(1968), 59—137; [23] H. Bass, Algebraic K-theory, Benjamin, 1968; [24] R. Swan, K-theory of finite groups and orders, Lecture notes in math. 149, Springer, 1970; [25] J. Milnor, Whitehead torsion, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 358—426; [26] J. Milnor, Introduction to algebraic K-theory, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1971; [27] Algebraic K-theory, Battelle Inst. Conf. 1972, I, II, III, Lecture notes in math., 341, 342, 343, Springer, 1973.

微分拓扑学 [英 differential topology 法 topologie différentielle 德 Differentialtopologie 俄 дифференциальная топология 日 微分位相幾何学] **微分拓扑学**是研究微分流形†在微分同胚†(diffeomorphism, differential homeomorphism)下不变的性质的学科. 这方面的研究在本世纪三十年代就有 H. Whitney 的浸入定理([1]), S. S. Cairns 的三角剖分定理([2]), J. H. C. Whitehead 的组合流形的正则邻域定理([3]). 其后, 在五十年代中期以后, 由于 R. Thom, J. Milnor, S. Smale, M. Kervaire, E. C. Zeeman, B. Mazur 等人一个接一个的重要研究成果,微分拓扑学这门新学科受到极大的重视(→流形, 微分流形的拓扑学,嵌入问题).

这门学科主要的问题是阐明流形的拓扑结构、组合结构、微分结构等等之间的关系而不去考虑微分几何学中所研究的概念, 如联络†、曲率†、测地线†等等.

正如拓扑学†研究连续映射†是重要问题一样,微分拓扑学研究微分映射†的性质是首要的问题. 从 Whitney 关于 Euclid 平面映射的奇点†的研究(1936)起, Whitehead, Smale, Thom, J. C. Moore 在流形之间的映射的奇点问题,把 C^1 映射提高成 C^∞ 映射†问题, 横截正则映射(transversal regular mapping) 问题等等方面作出卓越的贡献.

其次是关于组合结构与微分结构之间关系的问题. 首先有 Cairns, Whitehead 关于微分流形存在与其微分结构相协调的 C^1 三角剖分的结果. 反之, 对于组合流形是否存在微分结构的问题, Kervaire 举出了反例([6]). 再有关于同胚的微分流形, 微分结构是否唯一决定的问题, Milnor 证明在 S^7 上就有多个彼此不微分同胚的结构([5]),田村一郎、島田信夫也给出这种例子. 后来, Milnor, Kervaire, J. Stallings 等人进一步研究同伦球面†的微分结构,它们在连通和运算之下成为 Abel 群 θ_n. 这个群也可以按 h 配边†分类而得到(Smale ([9])). 关于微分流形是否是另一微分流形的边缘的问题, 在 Thom 得到的结果"不考虑定向的流形的配边类†与某稳定同伦群†同构"之后又进行了许多研究. 与此有关的著名问题, 例如微分流形的可平行性†、殆可平行性†、π 流形†等也有研究工作. 这方面有 J. F. Adams 的结果([12]),他使用 K 理论†解决切 r 标架†场的问题. 还有 Smale, Zeeman 解决了广义 Poincaré 猜想† ([10],

[14]). 近十多年来,许多重要的问题就是这样一个接着一个地解决,在这过程中有效地运用同伦群†等代数拓扑学的概念.

另外关于组合流形的光滑化问题;组合嵌入问题,局部平坦的嵌入†,驯顺(tame)嵌入问题等等有 Cairns([16]), A. Haefliger([15]), M. Brown([19]), R. H. Bing([18])等著名结果.

【参】[1] H. Whitney, Differentiable manifolds, Ann. of Math., **37**(1936), 645—680; [2] S. S. Cairns, Triangulation of the manifold of class one, Bull. Amer. Math. Soc., **41**(1935), 549—552; [3] J. H. C. Whitehead, On the homotopy type of manifolds, Ann. of Math., **41**(1940), 809—824; [4] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv., **28**(1954) 17—86; [5] J. W. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math., **64**(1956), 399—405; [6] M. A. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv., **34**(1960), 257—270; [7] J. W. Milnor, Differential topology, Mimeographed Notes, Princeton, 1960; [8] J. W. Milnor, Sommes de variétés différéntiables et structures différéntiables des sphères, Bull. Soc. Math. France, **87**(1959), 439—444; [9] S. Smale, On the structures of manifolds, Amer. J. Math., **84**(1962), 387—399; [10] S. Smale, Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math., **74**(1961), 391—406; [11] J. R. Stallings, Polyhedral homotopy-spheres, Bull. Amer. Math. Soc., **66**(1960), 485—488; [12] J. F. Adams, Vector fields on spheres, Ann. of Math., **75**(1962), 603—632; [13] J. R. Munkres, Obstructions to the smoothing of piecewise linear homeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc., **65**(1959), 332—334; [14] E. C. Zeeman, The generalized Poincaré conjecture, Bull. Amer. Math. Soc., **67**(1961), 270; [15] A. Haefliger, Plongments differéntiables de variétés dans variétés, Comment. Math. Helv., **36**(1961), 47—82; [16] S. S. Cairns, The manifold smoothing problem, Bull. Amer. Math. Soc, **67**(1961), 237—238; [17] J. H. C. Whitehead, Manifold with transverse fields in Euclidean space, Ann. of Math., **73**(1961), 154—212; [18] R. H. Bing, Locally tame sets are tame, Ann. of Math., **59**(1954), 145—158; [19] M. Brown, A proof of the generalized Schoenflies theorem, Bull. Amer. Math. Soc., **66**(1960), 74—76; [20] B. C. Mazur, On imbeddings of spheres, Bull. Amer. Math. Soc., **65**(1959), 59—65; [21] A. H. Wallace, Differential topology, Benjamin, 1968.

微分流形的拓扑学 [英 topology of differentiable manifolds 法 topologie des variétés différentiables 德 Topologie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten 俄 топология дифференцируемых многообразий 日 微分可能多様体の位相幾何] 微分流形的概念及其拓扑结构与大范围性质的研究可追溯到 H. Poincaré, 从那时以后,由于研究工具不足,除了同调性质的研究以及低维流形的研究之外,没有取得显著的进展. 但是由于 H. Whitney 的嵌入定理([32]), S. S. Cairns 证明微分流形的可单形剖分性([4]), 和 M. Morse 理论等方面基础研究的积累,伴随着纤维丛和示性类的理论以及同伦论等的进展, 近来, 微分流形本身的理论得到飞跃的发展,内容大大地充实起来,以至形成所谓"微分拓扑学"这样一门学科(→微分拓扑学).

【微分结构】 假设下面所考虑的流形都是仿紧的. 我们把 C^r 流形†($1\leqslant r\leqslant\infty$)的 C^r 坐标系的 C^r 等价类称为该流形或其基础空间的 **C^r 结构**(C^r-structure). 所有的 C^r 流形的 C^r 结构都包含 C^∞ 坐标系,且其 C^∞ 结构唯一决定(Whitney [32]). 这个 C^∞ 结构也称为流形的**微分结构**(differentiable structure),它与原来的 C^r 结构称为**相容**(compatible). 且所有的 C^∞ 结构,在和上面同样的意义下,容许与它相容的实解析†结构(Whitney [32], C. Morrey [16], H. Grauert [6]). C^∞ 流形也称为**光滑流形**(smooth manifold), 微分结构也称为**光滑结构**(smooth structure). 两个微分结构如果不 C^∞ 微分同胚就称为相异(distinct)(→微分流形).

J. Milnor 根据微分流形的指数定理(→示性类),引入微分结构的不变量,在七维球面 S^7 上作出几个微分结构,并证明它们相异([12]). Milnor 例: 定义映射 $f_k:S^3\to SO(4)$ 为 $f_k(\sigma)\tau=\sigma^h\tau\sigma^j$, 式中 k 为奇整数, h 和 j 是由 $h+j=1$, $h-j=k$ 决定的整数, σ 和 τ 表示范数为 1 的四元数†. 与映射 f_k 相应的 S^4 上的 S^3 丛(球丛)的全空间表为 M_k^7. 它是具有自然的微分结构的紧定向流形. 且 M_k^7 都与 S^7 同胚. 但当奇数 k,l 满足 $k^2\not\equiv l^2 \pmod 7$ 时, M_k^7 与 M_l^7 就不微分同胚. 这种与普通球面同胚但不微分同胚的微分流形称为**异种球面**(exotic sphere). 其后又知道了球面以外其他许多拓扑流形也容

许相异的微分结构．还知道一些拓扑流形不容许任何微分结构（M. Kervaire [8]，S. Smale，田村一郎）．另一方面三维以下的流形及Euclid空间 $\boldsymbol{R}^n$ $(n \neq 4)$ 的微分结构是唯一的（J. Stallings [21]）．

C^∞ 流形上能够引入 Riemann 度量†．设 M_1^k, M_2^n 是 C^∞ 流形，$f: M_1^k \to M_2^n$ 是浸入†映射．我们在 M_2^n 上引入一种 Riemann 度量．那末，对于在 M_1^k 上的每点 p，与 $f(M_1^k)$ 在点 $f(p)$ 的切空间†正交的所有 M_2^n 的切向量组成一个向量空间，以这个向量空间为纤维，以 M_1^k 为底空间，构成 $n-k$ 维向量丛 v_f，称为浸入 f 的**法丛**(normal bundle)，它与 M_2^n 的 Riemann 度量的取法无关．当 f 是嵌入†时，设 $U_\varepsilon(f(M_1^k))$ 是 M_2^n 中与 $f(M_1^k)$ 距离小于 ε 的点的集合，如果 ε 充分小，则 $U_\varepsilon(f(M_1^k))$ 不依赖于 ε 的选取，成为 M_2^n 中互相微分同胚的开子流形†，称为 $f(M_1^k)$ 在 M_2 中的**管状邻域**(tubular neighborhood)．法向量丛 v_f 的全空间 $E(v_f)$ 与 $f(M_1^k)$ 的管状邻域微分同胚．

【C^r 剖分，光滑化问题】 已给 C^r 流形 $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ M^n 的单形剖分† (K,f) $(f: |K| \to M^n)$，如果 1) 对于 $|K|$ 的每个闭 n 单形 σ，$f|\sigma$ 是 C^r 映射，2) $f|\sigma$ 的函数矩阵†的秩在每一点都是 n，则把 (K,f) 称为 M^n 的 **C^r 剖分**(C^r triangulation)，反过来也可说 M^n 的 C^r 结构与剖分 (K,f) **相容**(compatible)．关于流形的 C^r 剖分，已知有下列结果（Cairns [4]，J. H. C. Whitehead [30]）：1) 每个 C^r 流形 $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ 都具有 C^r 剖分，边缘的 C^r 剖分能扩张成整个流形的 C^r 剖分；2) 对于流形 M^n 的 C^r 剖分 (K,f)，已单形剖分的空间 (K,f,M^n) 成为组合流形†；3) 对于同一流形 M^n 的两个 C^r 剖分 (K_1,f_1) 及 (K_2,f_2)，(K_1,f_1,M^n) 与 (K_2,f_2,M^n) 组合等价．

反之，对于组合流形 M，如果存在 M 上的微分结构与其剖分 (K,i) $(i: |K| \to M$ 是恒等映射)相容，则称之为 M 的**光滑化**(smoothing)．这种光滑化的存在及可能性的问题称为**光滑化问题**(smoothing problem, smoothability problem)．对此问题，由 Cairns-Whitehead 用横截场†的方法([31])(→流形)或者 Milnor 的微丛†([15])方法均可得到光滑化的充分必要条件．另外还有下述的障碍理论的方法．设组合 k 球面的微分结构群(见后)为 Γ_k，n 维组合流形 $M=|K|$ 的 i 维骨架为 $|K^i|$，α 为 $|K^i|$ 的某个邻域 U 的光滑化，则存在障碍上闭链 $C_\alpha \in Z^{i+1}(M, \Gamma_i)$ 具有下列性质：1) 对于 M 的 $i+1$ 单形 σ^{i+1}，如果 $C_\alpha(\sigma^{i+1})=0$，则光滑化 α 可扩张到 σ^{i+1} 的邻域上，且其逆也成立；2) 如果存在 $|K^i|$ 的邻域的光滑化 α'，α' 在 $|K^{i-1}|$ 的某个邻域与 α 一致，则 $C_{\alpha'}-C_\alpha$ 是上边缘，反之，以 Γ_i 为系数的任何 $i+1$ 上边缘，可适当选取 α' 使它成 $C_{\alpha'}-C_\alpha$ 的形式（M. W. Hirsch [7]，R. Thom [25]）．因此对于 $n \leqslant 7$，任何 n 维组合流形均可光滑化．

【各种几何造法】 在有边缘的 C^∞ 流形 W 中，其边缘 ∂W 具有 $\partial W \times R_+$ $(R_+=[0,\infty))$ 的形式的开邻域．对于两个流形 W_1, W_2，设 $f: \partial W_1 \to \partial W_2$ 是微分同胚，$W_1 \cup W_2$ 中把通过 f 彼此对应的点看成同一后所得的商空间 M，具有自然的微分结构．这种由 C^∞ 流形 W_1, W_2 构成 C^∞ 流形 M 的造法称为通过映射 f **粘合边缘**(pasting of the boundaries)．

对于有边缘流形 W_1, W_2，其拓扑积 $W_1 \times W_2$ 除了边缘的一部分 $\partial W_1 \times \partial W_2$ 外可引入自然的 C^∞ 坐标系，通过在 $\partial W_1 \times \partial W_2$ 的邻域引入适当的坐标系，可得与 $W_1 \times W_2$ 同胚的 C^∞ 流形．这种 n 维微分流形 M 的边缘沿着维数 $\leqslant n-2$ 的子流形的并集 N 上具有"角"，在 M 中把 $M-N$ 的微分结构扩张到全体的引入 C^∞ 结构的方法称为**角直化法**(straightening of the angle)．

设 D^n 为 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中有标准定向的单位球†．对于两个紧定向 C^∞ 流形 M_1^n, M_2^n，设 $f_i: D^n \to M_i^n$ $(i=1,2)$ 是 C^∞ 嵌入†映射，且 f_1 保持定向，f_2 反定向．这时通过映射 $f_2 \circ f_1^{-1}: f_1(\partial D^n) \to f_2(\partial D^n)$ 把 $M_1^n - \operatorname{Int} f_1(D^n)$ 与 $M_2^n - \operatorname{Int} f_2(D^n)$ 的边缘粘合起来就得到一个 C^∞ 流形，称为 M_1^n 和 M_2^n 的**连通和**(connected

sum)，用 $M_1^n \# M_2^n$ 表示．连通和 $M_1^n \# M_2^n$ 与 M_i^n 具有相同定向，其微分结构唯一确定与映射 f_i 的取法无关．设 S^n 为通常的球面，则 $M^n \# S^n \approx M^n$（微分同胚），$(M_1 \# M_2) \# M_3 \approx M_1 \# (M_2 \# M_3)$，$M_1 \# M_2 \approx M_2 \# M_1$.

对于有边缘流形 M^n，设 $f:(\partial D^s) \times D^{n-s} \to \partial M^n$ 是 C^∞ 嵌入映射，在 $M^n \cup D^s \times D^{n-s}$ 中把通过映射 f 对应的点看成同一，这样得到的商空间 $X(M^n;f;s)$ 称为**有环柄的空间**(manifold with a handle attached by f)．由 M^n 造出 $X(M^n; f; s)$的造法称为**按环柄造法**(attaching a handle)．$X(M^n; f; s)$通过角直化造法后，成为具有自然的微分结构的有边缘的 C^∞ 流形．同样，设 f_i: $\partial D_i^s \times D_i^{n-s} \to \partial M^n$ $(i = 1, \cdots, k)$ 为嵌入映射，且各 f_i 的像互相都不具有公共点，那末也能定义 $X(M^n; f_1, \cdots, f_k; s)$．特别把 $X(D^n; f_1, \cdots, f_k; s)$ 称为**环柄体** (handlebody) (Smale [18])．

设 M^{n-1} 为 $n-1$ 维定向流形，$f:\partial D^s \times D^{n-s} \to (M^{n-1} - \partial M^{n-1})$ 为保持定向的 C^∞ 嵌入映射．则$(M^{n-1} - \mathrm{Int}\, f(\partial D^s \times D^{n-s})) \cup (D^s \times \partial D^{n-s})$中，通过 $f|\partial D^s \times \partial D^{n-s}$ 把对应点看成同一，并加以角直化，这样得到的 C^∞ 流形 $\chi(M^{n-1}; f)$ 称为由 M^{n-1} 通过$(s, n-s)$型**换球术** (spherical modification, surgery) 所得的流形．$\chi(M^{n-1}; f)$ 具有自然的定向，$\partial\chi(M^{n-1}; f) = \partial M^{n-1}$．换球造法与按柄造法有如下关系：设$W$为 n 维流形，$f:\partial D^s \times D^{n-s} \to \partial W$ 为嵌入映射，则 $\partial X(W; f; s) = \chi(\partial W; f)$．特别当 $W = M^{n-1} \times [0, 1]$，$f: \partial D^s \times D^{n-s} \to M \times (1)$，则由于 $\partial X(W;f;s) = \chi(M \times (1); f) \cup M \times (0)$，所以$M$与 $\chi(M; f)$ 配边†．反之互相配边的两个紧流形可以通过有限次换球术互变 (A. H. Wallace [29], Milnor [14])．

【流形的构成】 C^∞ 流形上的C^∞函数f，如果只有非退化的† 临界点†，并且 f 在每个临界点的指数†(→大范围变分法) 等于 f 在这点的值，则把 f 称为**佳函数** (nice function)．我们有下列定理成立：

1) 任意紧流形上佳函数存在 (Morse-Smale [18]，Wallace [29])．

2) 紧流形上 C^∞ 函数 f，如果只具有非退化临界点，且在 $f^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ 上，除了在 $f^{-1}(0)$上有 k 个指数为 s 的临界点外，不存在其它临界点，则 $f^{-1}(-\infty, \varepsilon]$ 与具环柄空间 $X(f^{-1}(-\infty, -\varepsilon]; f_1, \cdots, f_k; s)$ 微分同胚 (Morse-Thom-Smale [18])．

3) 广义 Poincaré 猜想†．设 M^n 为 C^∞ 同伦球 $(n \geqslant 5)$，则 M^n 可以从两个 n 维圆盘通过叠合边缘得到，从而 M^n 与球面 S^n 同胚 (Smale [18])．

4) 设 M^n 是 n 维可缩†的紧流形 $(n > 5)$，∂M 是连通且单连通的，则 M^n 与圆盘 D^n 微分同胚 ([18])．(称之为**圆盘定理** (disk theorem)．)

5) 设 M_1^n, M_2^n 为 n 维定向紧单连通流形 $(n > 4)$，如果 M_1 与 M_2 是 h 配边 (见后)，则 M_1 与 M_2 微分同胚 (Smale [20])(***h* 配边定理** (h-cobordism theorem))．B. Mazur 在某些条件下，把这个定理推广到非单连通情形([11])．

6) 如 $M_1^n \times \boldsymbol{R}^k$ 与 $M_2^n \times \boldsymbol{R}^k$ 微分同胚，则 M_1^n 与 M_2^n 称为 ***k* 等价** (k-equivalent)．设 M_1, M_2 是同伦型†相同的 n 维紧流形，则 M_1与 M_2 是 k 等价 $(k \geqslant n+2)$的充分必要条件为当 $f:M_1 \to M_2$ 是同伦等价映射†时，$f^*\tau(M_2) \oplus \varepsilon_k$ 与 $\tau(M_1) \oplus \varepsilon_k$ 等价．此处 $\tau(M_i)$ 为切丛，ε_k 为 k 维平凡†向量丛 (Mazur [10])．

7) 在某些特殊的条件之下，可以完全决定流形的分类：i) 五维紧单连通流形 M，满足 Stiefel-Whitney 类† $w_2(M) = 0$，其微分同胚类由 $H_2(M)$ 决定．ii) 六维紧、2 连通流形与 S^6 或 $S^3 \times S^3$ 的有限个连通和微分同胚(Smale [19])．其他在$(n-1)$连通 $2n$ 维流形 (C. T. C. Wall [27])与$(n-1)$连通$(2n+1)$维流形 (田村[22])等情形下也得出了分类．

【Thom 复形】 对于仿紧空间X上的实 n 维向量丛 ξ，与 ξ 相伴的闭 n 圆盘丛的全空间为 A_ξ，以其边缘所构成的 $n-1$ 球丛的全空间为 $\dot{A}_\xi$，则其商空间 $X_\xi = A_\xi / \dot{A}_\xi$ (把 $\dot{A}_\xi$ 缩为一点)称为向量丛 ξ 的 **Thom 空间**(Thom space)．

如果X是CW复形†，则空间X_ξ具有与CW复形相同的同伦型，称为向量丛ξ的 **Thom 复形**(Thom complex)． Thom 空间X_ξ具有对应于$\dot{A}_\xi$的标准基点p_ξ．

对于系数群$\mathfrak{G}$，设$\mathfrak{G}_\xi$为与$\boldsymbol{R}^n$从ξ相伴的局部系数群†系，则

$$H^q(X;\mathfrak{G}_\xi)\cong H^{n+q}(X_\xi,p_\xi;\mathfrak{G}),$$

$$H_q(X;\mathfrak{G}_\xi)\cong H_{n+q}(X_\xi,p_\xi;\mathfrak{G}).$$

这称为 **Thom-Gysin 同构定理**．

对于正交群$O(n)$的闭子群G，以G为结构群†的万有n维向量丛γ_G的底空间BG可取为连通的CW复形．向量丛γ_G的Thom复形特别用MG表示，称为**与(G,n)相伴的 Thom 复形**(Thom complex associated with (G,n))．与(G,n)相伴的Thom复形MG是$(n-1)$连通的．如果G连通，则$\pi_n(MG)=\boldsymbol{Z}$，且$\pi_n(MO(n))=\boldsymbol{Z}_2$． 当$G$连通时，$H^n(MG,\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}$ ($G=O(n)$时，$H^n(MO(n),\boldsymbol{Z}_2)\cong\boldsymbol{Z}_2$)，其生成元$U$称为 **Thom 复形$MG$的基本(上同调)类**(fundamental class)．对于一般的Thom空间X_ξ，也能用Thom-Gysin同构定理来定义基本类．

如果紧流形V^n的(C^∞)子流形†W^p是奇异闭链†的支集†，它代表V^n的同调类$z\in H_p(V^n,\mathfrak{G})$ ($\mathfrak{G}=\boldsymbol{Z}_2$或$\boldsymbol{Z}$)，就称同调类$z$能用子流形来**实现**(realizable)．流形V^n的同调类$z\in H_{n-k}(V^n,\mathfrak{G})$能用子流形来实现的充分必要条件是存在一个映射$f:V^n\to MO(k)$(或$MSO(k)$)，使得$f^*(U)$成为$z$的对偶(Thom [24])．

由于$\pi_{n+k}(MO(n))$ ($\pi_{n+k}(MSO(n))$) ($n>k$)当k一定时，与n无关，在同构意义下唯一决定，所以称之为 **Thom 谱**(Thom spectrum) $MO=\{MO(n)\}$ ($MSO=\{MSO(n)\}$)的k维**稳定同伦群**(stable homotopy group)，记作$\pi_k(MO)$ ($\pi_k(MSO)$)．同时对于酉群†及辛群†等通过标准嵌入$U(n)\subset O(2n)$，$Sp(n)\subset O(4n)$可定义与$(U(n),2n)$，$(Sp(n),4n)$相伴的Thom复形$MU(n)$，$MSp(n)$．Thom谱$MU=\{\cdots,MU(n),SMU(n),MU(n+1),\cdots\}$，$MSp=\{\cdots,MSp(n),SMSp(n),S^2MSp(n),S^3MSp(n),MSp(n+1),\cdots\}$的$k$维稳定同伦群$\pi_k(MU)=\lim\pi_{2n+k}(MU(n))$，$\pi_k(MSp)=\lim\pi_{4n+k}(MSp(n))$等也同样地定义．这里$SMU(n)$表示$MU(n)$的双角锥†．Thom谱的稳定同伦群的计算可用Thom-Gysin同构定理通过上同调群的关系来进行(Thom [24]，Milnor [13])．

【配边】 配边理论始于Л. С. Понтрягин，Рохлин，他们称之为**内在同调**(intrinsic homology)，后来为Thom大大发展成为微分流形的分类理论([24])．其基本问题是判定已知的紧流形是否是某个流形的边缘． 在组合流形、拓扑流形等情形也有相应的研究(Wall [28]，R. E. Williamson [32A])．

下面我们只考虑(不一定是连通的)紧C^∞流形，其(微分同胚类)全体记作$\mathscr{D}$，其中定向流形全体记作$\mathscr{D}_0$．属于$\mathscr{D}$或$\mathscr{D}_0$的流形如果边缘非空称为**有边缘流形**(英 bounded manifold 法 variété à bord)．对于定向流形V，具有相反定向的流形就用$-V$表示．

两个k维紧流形$V,W\in\mathscr{D}_0$称为**配边**(cobordant)，如果存在一个$(k+1)$维有边缘流形$X\in\mathscr{D}_0$，$\partial X=V\cup(-W)$．假如把上面的$\mathscr{D}_0$换成$\mathscr{D}$而不考虑流形的定向，V与W称为**模2配边**(cobordant mod 2)．配边是$\mathscr{D}_0(\mathscr{D})$中的等价关系，其等价类称为**(模2)配边类**((un) oriented cobordism class)．V^k所属的类记作$[V^k]$ ($[V^k]_{(2)}$)．k维流形(模2)配边类全体通过自然的加法$[V^k]_{(2)}+[W^k]_{(2)}=[V^k\cup W^k]_{(2)}$构成Abel群$\Omega_k(\mathfrak{N}_k)$，称为**(模2)配边群**((un) oriented cobordism group)．用两个流形的拓扑积可定义乘法$[V^k]_2\times[W^l]_{(2)}=[V^k\times W^l]_{(2)}$，于是直和$\Omega=\Sigma\Omega_k$ ($\mathfrak{N}=\Sigma\mathfrak{N}_k$)就成为分次反交换(交换)代数†，称为**配边环**(cobordism ring)或 **Thom 代数**(Thom algebra)．有下列诸定理成立：

1) $\Omega_k(\mathfrak{N}_k)$与Thom谱$MSO(MO)$的k维稳定同伦群$\pi_k(MSO)$ ($\pi_k(MO)$)同构．([24]) (**Thom 基本定理**)．

2) 对于每个自然数$k\neq 2^i-1$，都存在

k 维紧流形 $P(k)$，使得 $\mathfrak{N}$ 是 $\boldsymbol{Z}_2$ 上多项式环，以 $\{[P(k)]_{(2)}|k \neq 2^i - 1\}$ 为生成元. $\Omega \otimes \boldsymbol{Q}$ ($\boldsymbol{Q}$ 为有理数域)是 $\boldsymbol{Q}$ 上多项式环,以 $\{[P\boldsymbol{C}^{2m}]|m \geqslant 1\}$ 为生成元，其中 $P\boldsymbol{C}^{2m}$ 为复射影空间([24]). 后来 Milnor ([13]) 证明 Ω_k 的 p 成分 (p 为奇素数)为 0; Wall 利用包含自然映射 $\Omega_k \to \mathfrak{N}_k$ 的正合序列†证明 Ω_k 的 2 成分中不含阶数为 4 的元素([26]).

3) 设 T 为 Ω 中挠率元素所成的理想，则 Ω/T 是 $\boldsymbol{Z}$ 上的多项式环,以 $\{[Y_{4k}]|k \geqslant 1\}$ 为生成元,其中 Y_{4k} 一般可取为不连通的复 $2k$ 维非奇代数簇† (Milnor).

由于示性数†是配边类的不变量,连同上述结果,可证其逆也成立:

4) 两流形模 2 配边的充分必要条件是对应的 Stiefel-Whitney 数†相等. 两流形配边的充分必要条件是对应的 Stiefel-Whitney 数及 Понтрягин 数†相等.

$4k$ 维紧定向流形的指数†也是配边不变量([23]),所以它可以表示为 Понтрягин 数的有理系数线性组合(→示性类).

实 $2n$ 维紧殆复流形† V, W，如果对应的陈数†相等,就称为 **C 等价** (C-equivalent). C 等价类 $[V]_C$ 的全体,用和上面一样的加法,构成**复配边群**(complex cobordism group)Γ^n. 这时,逆元的存在并不显然.用流形的积在直和$\Gamma = \sum \Gamma^n$ 中引入乘法，得到**复配边环** (complex cobordism ring). $\Gamma^n \cong \pi_{2n}(MU)$, Γ 是 $\boldsymbol{Z}$ 上多项式环，以 $\{[Y'_{2k}]_C|k \geqslant 1\}$ 为生成元. 此处 Y'_{2k} 一般可以取作不连通的复 k 维非奇代数簇 (Milnor [13]).

【同伦球面的 h 配边群】 流形M称为**可平行的** (parallelizable)，如果它的切丛是平凡丛. 假如 M 除了有限个点之外的补空间是可平行的，那末称M是**殆可平行的** (almost parallelizable). M 称为**稳定可平行的**(stably parallelizable, s-parallelizable)，如果其切丛 τ 与平凡线丛 ε_1 的 Whitney 和† $\tau \oplus \varepsilon_1$ 是平凡丛. 流形 M^n 称为 **π 流形** (π-manifold)，如果把它嵌入 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^N (N > 2n)$ 时，其法丛是平凡丛. π 流形与稳定可平行流形是等价概念. 上面几个概念有如下的包含关系：可平行性 ⫋ 稳定可平行性 ⫋ 殆可平行性. 对于连通的有边缘流形，这三个概念等价. 群流形†是可平行流形. 与球面同胚的流形是可平行流形,只限于 1, 3, 7 维. 在这种维数下，所有的异种球面也是可平行流形 (J. F. Adams [1]). 且对于任意 r，通常的球面 S^{n-1} (n 为偶数)上是否容许 r 维切标架†场的问题用K 理论得到如下的解决: 设 $n = (2a+1)2^b$, $b = c + 4d$ (此处 a, b, c, d 均为整数, $0 \leqslant c \leqslant 3$), 令 $\rho(n) = 2^c + 8d$, 则 S^{n-1} 上具有 $\rho(n) - 1$ 维切标架场. 这是最佳的结果(Adams [2]). 另一方面,所有的(C^∞)同伦球面†是 π 流形([9]).

紧定向流形 V_1, V_2 称为 **h 配边** (h-cobordism),如果存在有边缘定向流形W,使 $\partial W = V_1 \cup (-V_2)$ 且 $V_i (i = 1, 2)$ 分别是 W 的形变收缩核. 定向同伦 n 球面的 h 配边类全体通过连通和构成 Abel 群 θ_n，称为**同伦 n 球面的 h 配边群** (h-cobordism group of homotopy n-spheres)，其中能够成为 π 流形的边缘的同伦球面全体形成 θ_n 的子群,记作 $\theta_n(\partial\pi)$. Kervaire-Milnor 给出包含 θ_n，球面的稳定同伦群 π_n，无限旋转群的同伦群 $\pi_n(SO)$ 等的正合序列，阐明这些群之间的关系,证明了 $\theta_n(\partial\pi) = 0$ (n 为偶数)，$\theta_n(\partial\pi)$=有限群 (n 为 $\neq 3$ 的奇数)，$\theta_n/\theta_n(\partial\pi) \subset \mathrm{Coker}\, J_n$ 等结果([9]),此处 J_n: $\pi_n(SO) \to \pi_n$ 是 J 同态†. 由此得出 $\theta_n (n \neq 3)$ 是有限 Abel 群，$\theta_n = 0$ ($n < 7$, 且 $n \neq 3$)，还算出 $\theta_7 \cong \boldsymbol{Z}_{28}$ 等低维的 θ_n (→公式 6 I).

把两块圆盘 D_1^n, D_2^n 沿边缘粘合起来作成的定向流形也可以看成是组合 n 球面的光滑化. 这样的流形的微分同胚类的集合，通过以连通和为加法构成 Abel 群 Γ_n，称为**组合球面的(定向)微分结构群**(group of oriented differentiable structures on the combinatorial sphere). 根据广义 Poincaré 猜想及 h 配边定理，可得 $\Gamma_n \cong \theta_n (n \neq 3, 4)$ 成立. 且 $\Gamma_3 = 0$, $\Gamma_4 = 0$ (J. Cerf [5]). Γ_n 还可以如下定义: 设 $\mathrm{Diff}^+ D^n$, $\mathrm{Diff}^+ S^{n-1}$ 分别是圆盘 D^n 及其边缘 S^{n-1} 的保持定向

的自微分同胚所构成的群，其中乘法是映射的合成. 设 $r: \mathrm{Diff}^+ D^n \to \mathrm{Diff}^+ S^{n-1}$ 是限制映射，则 r 的像是正规子群，且 $\Gamma_n \cong \mathrm{Diff}^+ S^{n-1}/r(\mathrm{Diff}^+ D^n)$.

【微分动力系统】 设M为C^r微分流形($r\geqslant 1$). **微分动力系统** (differentiable dynamical system)是 Lie 群G到 $\mathrm{Diff}^r(M)$中的同态，使得其诱导映射 $G\times M\to M$ 是C^r映射(→变换群). 它的主要对象是微分动力系统的全局轨道结构的拓扑研究. 对 $G=\boldsymbol{R}$, 微分动力系统理论就归结为常微分方程†定性理论，而后者往往成为研究一般理论的主要出发点. $G=\boldsymbol{Z}$ 的情形就等价于考虑一个微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$, 从其轨道 $\{f^n(p)\mid n\in \boldsymbol{Z}\}(p\in M)$ 的拓扑结构的观点，f 生成 G. 我们主要讨论这后一情形，因为其问题形式上简单，并且大多数定理能推广到 $G=\boldsymbol{R}$. 我们还假定M是无边缘紧流形. 为简单起见，$\mathrm{Diff}^r(M)$ 的一个元素 f 就称为一个动力系统.

设 $F^r(M)$ 为M到M的所有 C^r 微分映射的空间，赋予一致 C^r 收敛拓扑. 这时，$F^r(M)$ 是完备的可度量化空间，且 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 是 $F^r(M)$ 中的开集. 因此 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 是一个 Baire 空间†，并对于这个拓扑成为拓扑群. 论及 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的一个命题 P 称为**一般的** (generic), 如果集合 $\{f\in \mathrm{Diff}^r(M)\mid P(f)\}$ 是可数稠密开集的交. 两个微分同胚 $f, g\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 称为**结构稳定的** (structurally stable), 如果 f 在 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中存在一个邻域 N, 使得任何 $g\in N$ 是拓扑共轭于 f(g 称为**拓扑共轭** (topologically conjugate) 于f, 如果存在一个同胚 $h: M\to M$, 使得 $h\circ f=g\circ h$)([39]).

命 $f\in F^r(M)$. 如果 $f(p)=p$, 则点 $p\in M$ 是 f 的不动点. 对于某个正整数 m, f^m 的不动点称为周期为m的**周期点** (periodic point). 设 $N_m=N_m(f)$ 是 f 的周期为m的孤立周期点的数目. 则存在 $F^r(M)$的稠集 E, 使得对于 $f\in E$, $N_m(f)\leqslant Ck^m$, 式中C及k是只依赖于 f 的正的常数([41]). 对于这样的f, 级数 $\zeta(t)=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} N_m t^m/m\right)$ 有正的收敛半径，称为 f 的 **ζ 函数** (zeta function)([48]).

设 p 为 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的不动点. 则 f 在点 p 的微分† df_p 是M在 p 的切空间 $T_p(M)$ 的线性自同构. 如果 df_p没有么模的特征值，则 p 就称为**双曲**(hyperbolic)**点**. 如果 p 是 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的一个双曲不动点，则集合 $W^s(p)=\{x\in M\mid f^n(x)\to p$ 当 $n\to\infty\}$ 与 $W^u(p)=\{x\in M\mid f^{-n}(x)\to p$ 当 $n\to\infty\}$是向量空间的单射浸入的象[42, 46]. 我们把 $W^s(p)(W^u(p))$ 称为 f 在 p 的**稳定(不稳定)流形**(stable (unstable) manifold). 在 f 的双曲不动点 p 的充分小邻域，f 拓扑等价于 f 在 p 点的微分 df_p, 也就是存在同胚 $h: M\to M$ 及线性映射 $h': T_p(M)\to T_{h(p)}(M)$使得 $df_{h(p)}=h'df_p$[42]. 这一段中关于不动点 p, df_p 等的命题，当用 f^m 代替 f 时，对周期为m的周期点也成立.

点 $p\in M$ 称为 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$的**游荡点**(wandering point)，如果存在 p 的邻域 U, 使得 $\bigcup_{|n|\geqslant 1} f^n(U)\cap U=\varnothing$. 否则 p 是**非游荡** (nonwandering) **点**. f 的非游荡点形成一个闭集 $\Omega(f)$, 它在 f 下不变. 如果 $r=1$, p 是 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 的非游荡点，则对于 f 的任意邻域N, 存在微分同胚 $g\in N$, 使 p 是 g 的周期点[45].

微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 称为 **Morse-Smale 动力系统** (Morse-Smale dynamical system), 如果满足下列三个条件: (1) $\Omega(f)$ 是有限的. (2) f 的周期点是双曲的. (3) 对于每一对周期点 p 和 q, $W^s(p)$ 与 $W^u(q)$ 横截地相交，即对于 $x\in W^s(p)\cap W^u(q)$ 有 $T_x(W^s(p))+T_x(W^u(q))=T_x(M)$ 成立. 对于 Morse-Smale 动力系统，有和大范围变分法†中的相应的 Morse 不等式成立([46]). 性质(2)及(3)是一般性质([43,47]). 所有 Morse-Smale 动力系统所成的集合是 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中的开集. 如 $\dim M\leqslant 3$, M上任何 Morse-Smale 动力系统都是结构稳定的([44]).

微分同胚 $f\in \mathrm{Diff}^r(M)$ 称为 **Аносов 微分同胚**(或 C 系统)(Anosov diffeomorphism (or C

-system)),如果切丛$^{\dagger}T(M)$存在分裂成Whitney和$^{\dagger}T(M)=E^s\oplus E^u$，使得对于$M$上的Riemann度量及常数$c>0$及$1>\lambda>0$，$df(E^s)\subset E^s$，$df(E^u)\subset E^u$，且对于任何正整数$m$，当$v\in E^s$有$\|df^m(v)\|\leqslant c\lambda^m\|v\|$，当$v\in E^u$，有$\|df^{-m}(v)\|\leqslant c\lambda^m\|v\|$．Аносов 微分同胚是结构稳定的，且$M$上所有 Аносов 微分同胚构成的集是 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 中的开集([40])．基本的参考资料是 S. Smale ([48])．

【拓扑观点下的复解析奇异性】 令$f_1,\cdots,f_r$为N维复数空间 $\boldsymbol{C}^N$ 中开集U上定义的复值全纯函数，$V=f_1^{-1}(0)\cap\cdots\cap f_r^{-1}(0)$．$V$的点称为**奇** (singular) **点**，如果对于z在$\boldsymbol{C}^N$中的任何开邻域W，$W\cap V$不是W的光滑子流形．这个定义与奇点的解析定义一致([53])．对于V的任何点z_0，令$S_\varepsilon=S(z_0,\varepsilon)$为$\boldsymbol{C}^N$中的$(2N-1)$维球面，球心为$z_0$，半径为$\varepsilon>0$，且令$K_\varepsilon=V\cap S_\varepsilon$．如果$\varepsilon$充分小，对$(S_\varepsilon,K_\varepsilon)$的拓扑型不依赖于$\varepsilon$([53, 56])．由于这个事实，奇点的研究就构成拓扑学在多复变函数论中的应用的重要方面．

V的奇点z_0称为**孤立** (isolated) 奇点，如果对于z_0在$\boldsymbol{C}^N$中的某个开邻域W中，$W\cap V-\{z_0\}$是$W-\{z_0\}$的光滑子流形．在此情形下，K_ε是S_ε的闭光滑子流形，$(S_\varepsilon;K_\varepsilon)$的微分同胚型不依赖于(充分小的) $\varepsilon>0$．迄今对于这种奇点的拓扑研究首先是集中于孤立奇点．在这种情形下，当V是平面曲线(即 $N=2;r=1$)时，V的任何奇点均是孤立奇点，3-球S_ε的子流形 K_ε 可描述为一个多重环面链环，其型数完全由V的定义方程f在z_0的 Puiseaux 展开所决定([49],1928)．1961 年，Mumford 通过奇点解消的论证，证明如果代数曲面V在z_0是正规的，且如果 3 维闭流形 K_ε 是单连通的，则K_ε微分同胚于 3 维球面，z_0是非奇点 ([54])．对于高维情形，1966 年 E. Brieskorn 证明下面定理([50])：

π 边缘同伦球群 $\theta_{2n-1}(\partial\pi)$ 的每个非平凡元素可以实现为某复超曲面的K_ε，这些复超曲面在$\boldsymbol{C}^{n+1}(n\neq 2)$中原点附近可以由形如$f(z)=z_1^{a_1}+\cdots+z_{n+1}^{a_{n+1}}=0$的方程定义．

这个结果建立了代数几何学和现代微分拓扑学之间的联系．Milnor 受了 Brieskorn 方法的启发，发展拓扑学技巧来研究超曲面的奇点，得到许多结果如**纤维化定理**(fibering theorem)，我们简述如下：

假设V在$z_0\in\boldsymbol{C}^{n+1}$的邻域由一个方程$f(z)=0$来定义，则有一个相伴的光滑纤维化 φ：$S_\varepsilon-K_\varepsilon\to S^1$，对于$z\in S_\varepsilon-K_\varepsilon$，$\varphi(z)=f(z)/|f(z)|$．其纤维 $F=\varphi^{-1}(p)(p\in S^1)$ 有 n 维有限 CW 复形的伦型．如果 z_0 是函数 f 的孤立临界点，则F具有 n 球束 (bouquet) 的同伦型 (Milnor [53])．(这结果的推广→[51])

在孤立奇点情形，还存在有 S_ε 中F的 n 维闭链的环绕矩阵 $\Gamma(f)$，使得 $\Gamma(f)$ 的同余类完全决定 $(S_\varepsilon,K_\varepsilon)$ 的微分同胚类 ([51])；关于 $\Gamma(f)$ 的计算(→[55])．

至于簇的定性研究，Whitney 考虑把簇分解为流形，并且建立所谓 Whitney 层化(Whitney stratification) 的概念 [57](1957),[58](1964)．Whitney 层化理论被 Thom 用**分层集** (stratified set) 概念进一步加深([8])，并且在奇点的局部及大范围的研究中起着基本的作用．例如，所有半解析集 (semianalytic set) 都允许 Whitney 层化([52])．

【突变理论】【静态模型】 突变理论最早是在六十年代末期由 R. Thom [1, 2, 3] 提出来的．这理论为自然界中(特别是生物学及自然语言中) 形态的演化提供某种数学模型．近年来，E. C. Zeeman 等人发展了这个理论并且应用于各种领域，象物理科学，医学，经济学及社会学；详细文献目录见[4]．

突变理论的基本概念是**静态模型** (static model)，这是一族位势函数 $f_u:X\to\boldsymbol{R}$，其中X是$\boldsymbol{R}^n$的子集，包含原点的邻域，参数u属于$\boldsymbol{R}^r$中原点的邻域U．

我们把$\boldsymbol{R}^n$看成**内空间** (internal space) 或**状态空间** (state space)，它的点用我们所研究的过程有关的参数来表示，而 $\boldsymbol{R}^r$ 是**外空间** (external space) 或**控制空间** (control space)，它可以

是我们所考虑的过程发生的物理时空连续统，或者是控制过程的控制参数的空间. 一般规定，维数 $r \leqslant 4$，虽然维数 n 可以任意大.

静态模型具有局部的性质，f_u 的任何局部极小值，称为 $u \in U$ 处的**局部体制**(local regime)是对应于控制点 u 的模型状态的代用品.

从数学上讲，一个静态模型就是 C^∞ 函数 $f: R^n \times R^r \to R$ 在 0 点的芽，而它又是 C^∞ 函数 $\eta = f|\boldsymbol{R}^n \times \{0\}: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ 在 0 点的芽的开折(r 维扩张族); 细节见下.

【奇点的分类】 令 $\mathscr{E}(n, m)$为 C^∞ 函数 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ 在 0 点的芽的向量空间，$\mathscr{B}(n) \subset \mathscr{E}(n,n)$为把 0 映到 0 的可逆芽 $\boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ 的子集.

芽 $\eta, \xi \in \mathscr{E}(n, m)$ 称为**右等价**(right equivalent)，如果存在 $h \in \mathscr{B}(n)$ 使得 $\eta \circ h = \xi$. 命 $\mathscr{E}(n) = \mathscr{E}(n,1)$. 用通常办法可以得出$\mathscr{E}(n)$是局部代数，以 $\mathscr{M} = \{\eta \in \mathscr{E}(n) | \eta(0) = 0\}$ 为其唯一极大理想. 一芽 $\eta \in \mathscr{E}(n)$ 称为**奇**(singularity)**芽**，如果 $\eta(0) = D\eta(0) = 0$. 对任何奇芽 η，我们定义 η 的**余维** (codimension) 为

$$\operatorname{codim} \eta = \dim_{\boldsymbol{R}} (\mathscr{M} / \langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathscr{E}(n)}),$$

式中 $\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathscr{E}(n)}$ 是 $\mathscr{E}(n)$ 中的由 $\partial\eta/\partial x_1, \cdots, \partial\eta/\partial x_n$ 生成的理想而 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的坐标系. J. N. Mather ([63]) 证明了如下结果.

余维 $\leqslant 4$ 且 $\geqslant 1$ 的奇芽右等价(到加上其他变量的非退化二次型及到乘以 ± 1) 于下面 Thom 的七种初等突变表中的 η 之一.

【开折】 命 η 为奇芽. η 的 r 开折 (unfolding) 是芽 $f \in \mathscr{M}(n + r)$ 使得 $f|\boldsymbol{R}^n \times \{0\} = \eta$，这个开折表为 (r, f). 命 (r, f)及(s, g)为 η 的开折. **射** (morphism) $(\varphi, \Phi, \varepsilon): (r,f) \to (s,g)$由下面 (i)(ii)(iii) 构成: (i) 一芽 $\varphi \in \mathscr{E}(n + r, n + s)$使得 $\varphi|\boldsymbol{R}^n \times \{0\} =$ 恒等映射; (ii) 一芽 $\Phi \in \mathscr{E}(r, s)$ 使得 $\pi_s \circ \varphi = \Phi \circ \pi_r$ 成立; (iii)一芽 $\varepsilon \in \mathscr{M}(r)$ 使得 $f = g \circ \varphi + \varepsilon \circ \pi_r$ 成立，其中 $\pi_r: \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^r \to \boldsymbol{R}^r$ 是射影. 在这种情形下，我们说开折 (r,f) 是由 (s,g) 通过 $(\varphi, \Phi, \varepsilon)$ **诱导**出来. 如果 φ, Φ 是微分同胚芽，则射就是**同构** (isomorphism).

η 的开折 (r, f) 及 (s, g) 的**加法**(addition)定义为$(r, f) + (s, g) = (r + s, f + g - \eta)$，其中右端最后一项是指$(f + g - \eta)(x,u,v) = f(x,u) + g(x, v) - \eta(x)$.

因此，如果 η 的**常值开折** (constant unfolding) (r, f) 定义为 $\eta(x, u) = \eta(x)$，则有 $(r, f) + (s, \eta) = (r + s, f)$.

η 的开折 (r, f) 称为**通用的** (versal)，如果 η 的任何开折可由 (r, f) 及适当的射诱导出来. 有极小 r 的通用开折 (r, f) 称为**万有**(universal) 开折. 下面事实也是 Mather ([63]) 证明的:

奇芽 $\eta \in \mathscr{M}(n)$ 有一通用开折当且仅当 codim η 是有限的. η 的任何两个 r 通用开折是同构的. 每一通用开折同构于$(r, f) +$ 常值开折，其中 $r = \operatorname{codim} \eta$ 且 (r,f)是万有开折定义如下: 假如 $\{b_1, \cdots, b_r\} \subset \mathscr{M}(n)$是$\mathscr{M}(n)/\langle \partial\eta/\partial x_i \rangle_{\mathscr{E}(n)}$ 的基的一组代表元，则 η 是开折 f 定义为 $f(x, u) = \eta(x) + b_1(x)u_1 + \cdots + b_r(x)u_r$.

【七种初等突变】 设 f 及 g 为 $\mathscr{E}(n + r)$ 中的芽. 我们说 f, g 作为 r 开折是**等价的** (equivalent)，如果存在 $h \in \mathscr{B}(r)$，一族 $H_u \in \mathscr{B}(n)$ 其中 $u \in U \subset \boldsymbol{R}^r$，以及 $\varepsilon \in \mathscr{M}(r)$ 使得 $f(x, y) = g(H_u(x), h(u)) + \varepsilon(u)$.

我们说静态模型 (r, f) 是**稳定的** (stable)，如果 (r, f) 在 $\mathscr{E}(n + r)$ (具有 Whitney C^∞ 拓扑)的任何小微扰(r, g)都等价于(r, f). Thom 发现下面这个主要结果，后为 Mather 等人作了证明 (参见 [62] 中的文献目录). 假设 $r \leqslant 4$，则稳定静态模型 (r, f) 的集合是 $\mathscr{E}(n + r)$ 中的开稠子集，且任何稳定静态模型 (r, f) 等价 (到加上非退化二次型及乘以 ± 1)于表 1 中具有标准位势 F 的模型之一，它们都是奇芽 η 的万有开折 (x, y 表示内变数，u, v, w, t 表示外变数).

具有这些标准位势的静态模型就是所谓**初等突变** (elementary catastrophes)，它们可作为各种自然过程的定性模型.

【突变集】 对于静态模型 $f \in \mathscr{E}(n + r)$，

表 1 Thom 的七种初等突变表

r	奇芽 η	标 准 位 势 F	名 称
1	x^3	x^3+ux	折 (fold)
2	x^4	x^4+ux^2+vx	尖 (cusp) (Riemann-Hugoniot)
3	x^5	$x^5+ux^3+vx^2+wx$	燕尾 (swallowtail) (Dovetail)
3	x^3+y^3	$x^3+y^3+uxy+vx+wy$	双曲脐 (hyperbolic umbilic)
3	x^3-xy^2	$x^3-xy^2+u(x^2+y^2)+vx+wy$	椭圆脐 (elliptic umbilic)
4	x^6	$x^6+tx^4+ux^3+vx^2+wx$	蝴蝶 (butterfly)
4	x^2y+y^4	$x^2y+y^4+ux^2+vy^2+wx+ty$	抛物脐 (parabolic umbilic)

一个过程 (process) 是指 $X\times U$ 的一个子集 s，其中 X, U 分别是 $\boldsymbol{R}^n$ 及 $\boldsymbol{R}^r$ 的原点的邻域. 如果 s 是一个过程，$u\in U$，我们定义 $s_u=s\cap(X\times\{u\})$. 我们说 $u\in U$ 对 s 是**正则点** (regular point)，如果存在 u 在 U 中的邻域 V 及同胚 h: $X\times V\to X\times V$ 使得在 $X\times V$ 上 $\pi_r\circ h=\pi_r$ 且 $h(s\cap(X\times V))=s_u\times V$. U 中的非正则点就称为**突变点** (catastrophe point). 所有突变点的集合称为**突变集** (catastrophe set).

对于开折 (r, f) 定义一个过程有各种约定. 其中之一是 **Maxwell 约定** (Maxwell convention)，它要求 s_u 是最小局部体制于 $u\in U$. 采用 Maxwell 约定的模型 (r, f) 的突变集由控制空间 $\boldsymbol{R}^r$ 的那些点 u 构成，在这些点上或者 f_u 至少在两点上达到最小值或者在唯一点上达到极小值但不稳定.

另一个约定是**完全延迟约定** (perfect delay convention)，它对于 U 中的每一条道路 τ，都指定一个(可能是不连续的)映射 $m_\tau: \tau\to X\times\tau$ 使得 $\pi_r(m_\tau(u))=u$, $(m_\tau(u), u)$ 是一个局部体制，且 m_τ 在道路 τ 上的极大区间上保持连续. 考虑集合

$$\Delta=\{(x, u)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^r \mid d_x^2 f(x, u)\text{ 是退化的}\}$$

及其在射影 $\pi_r: \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^r\to\boldsymbol{R}^r$ 下的象 $B=\pi_r(\Delta)$，B 称为**分歧集** (bifurcation set). 则对于完全延迟约定来说，分歧集 B 的点是静态模型的突变点的重要的代用品.

关于初等突变的几何研究→[65, 66, 67]. 静态模型曾被推广成**代谢模型** (metabolic models)，但它的结构还很不清楚([60,61])，在这些方面，[62]的文献目录相当的完备.

【参】 [1] J. F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one, Ann. of Math., **72** (1960), 20—104; [2] J. F. Adams, Vector fields on spheres, Ann. of Math., **75** (1962), 603—632; [3] M. F. Atiyah, Thom complexes, Proc. London Math. Soc., (3), **11** (1961), 291—310; [4] S. S. Cairns, On the triangulation of regular loci, Ann. of Math., **35**(1934), 579—589; [5] J. Cerf, La nullité de π_0 (Diff S^3), Séminaire H. Cartan, vol. 15, 1962—63, no. 8, 9, 10, 20, 21; [6] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds, Ann. of Math., **68**(1958), 460—472; [7] M. W. Hirsch, Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, Bull. Amer. Math. Soc., **69** (1963), 352—356; [8] M. A. Kervaire, A manifold which does not admit any differentiable structure, Comment. Math. Helv., **34**(1960), 257—270; [9] M. A. Kervaire-J. W. Milnor, Groups of homotopy spheres I, Ann. of Math., **77**(1963), 504—537; [10] B. C. Mazur, Stable equivalence of differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., **67**(1961), 377—384; [11] B. C. Mazur, Simple neighborhoods, Bull. Amer. Math. Soc., **68** (1962), 87—92; [12] J. W. Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Ann. of Math., **64**(1956), 399—405; [13] J. W. Milnor, On the cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Amer. J. Math., **82**(1960), 505—521; [14] J. W. Milnor, A procedure for killing the homotopy groups of differentiable manifolds, Symposia in Pure Math., Amer. Math. Soc., III, 1961, p. 39—55; [15] J. W. Milnor, Microbundles I, Topology, **3** suppl. 1 (1964), 53—80; [16] C. Morrey, The analytic embedding of abstract real analytic manifolds, Ann. of Math., **68**(1958), 159—201; [17] M. Morse, The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 18, 1934; [18] S. Smale, Generalizad Poincaré conjecture in dimensions greater than four, Ann. of Math., **74**(1961), 391—406, [19] S. Smale, On the structure of 5-manifolds, Ann. of Math., **75**(1962), 38—46; [20] S. Smale, On the structure of Manifolds, Amer. J. Math., **84** (1962), 387—399; [21] J. R. Stallings, The piecewise-linear structure of Euclidean space, Proc. Cambridge Philos. Soc., **58** (1962), 481—487; [22] I. Tamura (田村一郎), Classification des variétés différentiables, $(n-1)$-connexes, sans torsions, de dimension $2n+1$, Séminaire H. Cartan vol. 15, 1962—63, no. 16—19; [23] R. Thom, Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **69** (1952), 109—181; [24] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv., **28** (1954), 17—86; [25] R. Thom, Des variétés triangulées aux variétés différentiables, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge, 1960, p. 248—255; [26] C. T. C. Wall, Determination of the cobordism ring, Ann of Math., **72**(1960), 292—311; [27]. C.

T. C. Wall, Classification of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds, Ann. of Math., **75**(1962), 163—189; [28] C. T. C. Wall, Cobordism exact sequences for differential and combinatorial manifolds, Ann. of Math., **77**(1963), 1—15; [29] A. H. Wallace, Modifications and cobounding manifolds, Canadian. J. Math., **12** (1960), 503—528; [30] J. H. C. Whitehead, On C^1-complexes, Ann. of Math., **41** (1940), 809—828; [31] J. H. C. Whitehead, Manifolds with transverse fields in Euclidean space, Ann of Math., **73**(1961), 154—212; [32] H. Whitney, Differentiable manifolds, Ann. of Math., **37**(1936), 645—680; [32A] R. E. Williamson, Jr., Cobordism of combinatorial manifolds, Ann. of Math., (2) **83** (1966), 1—33; [32B] H. Yamasuge (山管), On the Poincaré conjecture for M^5, J. Math. Osaka City Univ., **12**(1961), 1—17; [33] J. F. P. Hudson, Piecewise linear topology, Benjamin, 1969; [34] R. C. Kirby, Triangulating and smoothing homotopy equivalences and homomorphisms, Lecture notes, U. C. L. A., 1969; [35] J. Milnor, Lectures on the h-cobordism theorem, Mathematical notes, Princeton Univ. Press, 1965; [36] J. Milnor, Singular points on complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1968; [37] R. E. Stong, Notes On cobordism theory, Mathematical notes, Princeton Univ. Press, 1969; [38] D. P. Sullivan, Triangulating and smoothing homotopy equivalences and homomorphisms; geometric topology seminar notes, Princeton Univ., 1967. 关于拓扑动力系统: [39] A. Andronov-L. Pontrjagin, Systèmes grossiers, Доклады Акад. Наук СССР, **14**(1937), 247—250; [40] V. I. Arnol'd-A. Avez, Problèmes ergodiques de la mécanique clossique, Gauthier-Villars, 1967 (英译本: Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968); [41] M. Artin-B. Mazur, On periodic points, Ann. of Math., (2) **81**(1965), 82—99; [42] P. Hartman, Ordinary differential equations, Wiley, 1964; [43] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs génériques, Contributions to Differential Equations, **2**(1963), 457—482; [44] J. Palis, On Morse-Smale dynamical systems, Topology, **8**(1969), 385—404; [45] C. Pugh, An improved closing lemma and a general density theorem, Amer. J. Math., **89**(1967), 1010—1021; [46] S. Smale, Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960), 43—49; [47] S. Smale, Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) **17**(1963), 97—116; [48] S. Smale, Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc., **73**(1967), 747—817. 关于奇异性, [49] K. Brauner, Zur Geometrie der Funktionen zweier Komplexen Veränderlichen, III, IV, Abh. Math. Sem. Hamburg, **6**(1928), 8—54; [50] E. Brieskorn, Beispiele zur Differential-topologie, Inventiones Math., **2**(1966), 1—14; [51] M. Kato (加藤十吉)-Y. Matsumoto (松本幸夫), On the connectivity of the Milnor fibre of a holomorphic function at a critical point, in Manifolds (ed. by A. Hattori), 1973, Univ. of Tokyo Press, p. 131—136; [52] S. Łojasiewicz, Ensembles semianalytiques, Centre Phys. Theor. de l'Ecole Polyt. Paris, 1965; [53] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1968; [54] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for implicity, Publ. Math. Inst. HES, **9**(1961), 229—246; [55] K. Sakamoto (坂本幸一), The Seifert matrices of Milnor fiberings defined by holomorphic functions, J. Math. Soc. Japan, **36** (1974), 454—463; [56] R. Thom, Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 240—284; [57] H. Whitney, Elementary structures of real algebric varieties, Ann. of Math., (2) **66** (1957), 545—556; [58] H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. of Math., (2) **81** (1964), 496—549. 关于突变理论: [59] R. Thom, Topological models in biology, Topology **8**(1969), 313—335; [60] R. Thom, Stabilité structurelle et morphogenèse, Benjamin, 1972, [61] R. Thom, Structural stability and morphogenesis. [60] 的英译, Benjamin, 1975; [62] A. Manning (ed.), Dynamical systems-Warwick 1974, Lecture notes in math. 468, Springer, 1975; [63] J. N. Mather, Right equivalence, Warwick preprint, 1969; [64] G. Wassermann, Stability of unfoldings, Lecture notes in math. 393, Springer, 1974; [65] T. Bröcker, Differentiable germs and catastrophes, London Math. Soc. Lecture Notes Series 17. Cambridge Univ. Press, 1975; [66] A. N. Godwin, Three-dimensional pictures for Thom's parabolic umbilic, Publ. Math. Inst. HES. **40**(1971), 117—138; [67] A. E. R. Woodcock-T. Poston, A geometrical study of the elementary catastrophes, Lecture notes in math. 373, Springer, 1974.

嵌入问题 [英 problem of embedding 法 problème de plongement 德 Einbettungsproblem 俄 задача погружения 日 埋めこみの問題]

【嵌入与浸入】 如果存在从拓扑空间† V 到拓扑空间 W 内的同胚† f (即 V 与 W 的子空间同胚)，则把 f 称为 V 到 W 内的拓扑**嵌入** (embedding). 从 V 到 W 内的连续映射 f 称为拓扑**浸入** (immersion)，如果 V 中每点 p 都存在适当的邻域 U_p，使得 $f|U_p$ 是从 U_p 到 W 中的同胚. 如果存在这样的映射，则称 V 在 W 中可嵌入或可浸入. 被嵌入(或被浸入)的空间 W，通常取作 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^N$，射影空间 $P\boldsymbol{R}^N$ 或流形.

上面我们是在拓扑空间及连续映射(同胚)的范畴中讨论嵌入与浸入问题. 我们也可以在另外的范畴如单纯复形†与单形映射†，微分流形与微分映射，Riemann 流形与等距映射，(实)解析流形与解析映射等范畴中考虑嵌入与浸入问题，它们分别称为单形嵌入，微分嵌入，等距嵌入，解析嵌入(以及各种浸入). 特别当 $f(V)$ 的拓扑和 W 的子空间的拓扑一致时，这些

嵌入称为**正则嵌入**（regular embedding）．如果 V 是紧的，则所有嵌入都是正则的．例如，n 维局部 Euclid 单纯复形 K^n 均能单形浸入于 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中，也能正则单形嵌入于 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ 中．对于一般的 K^n，Euclid 空间的维数不能再降低了，在这个意义下，这是最佳结果，但到更低维的 Euclid 空间的单形嵌入问题还正在研究（吴文俊等）(→复形，公式 6 VII)．

【微分嵌入与浸入】 以下 V, W 取作仿紧连通 C^∞ 微分流形，考虑 C^∞ 微分嵌入与浸入．本节中用 $V \subset W$ 表示可嵌入，用 $V \subseteq W$ 表示可浸入．研究嵌入或浸入问题的一般的方法是：当把微分流形 M^n 嵌入在 $\boldsymbol{R}^m$ 中，讨论 M^n 的示性类†和指数†具有的性质，从而得出必要条件的方法以及已给出从 M^n 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的映射，求出使这个映射能变形成嵌入的障碍†，从而得出充分条件的方法．

充分条件．1) 对于任意的 M^n，$M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{2n-1}$ 及(正则的) $M^n \subset \boldsymbol{R}^{2n}$ 成立 (H. Whitney [4],[5])．

必要条件．2) 如果 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{n+k}$，则 M^n 的法丛†的 Stiefel-Whitney 类† $\bar{w}_i(M^n)$ 满足 $\bar{w}_i(M^n) = 0\ (i > k)$，且如果 $M^n \subset \boldsymbol{R}^{n+k}$，则 $\bar{w}_i(M^n) = 0\ (i \geqslant k)$ (Whitney)．

设 $\lambda^i (i = 0, 1, \cdots)$ 是K理论（→K 理论）的外幂运算†，对于形式幂级数 $\lambda_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(x) t^i$，由公式 $\gamma_t = \lambda_t/(1-t) = \sum \gamma^i(x) t^i$ 来定义 $\gamma^i(x)$．

3) 如果 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{n+k}$，则 $\gamma^i(v_0) = 0\ (i > k)$．如果 $M^n \subset \boldsymbol{R}^{n+k}$ 则 $\gamma^i(v_0) = 0\ (i \geqslant k)$．此处 $v_0 = n - \tau \in \widetilde{KO}(M^n)$，$n$ 为平凡 n 维向量丛†，τ 为 M^n 的切丛† (M. F. Atiyah [1])．

充分必要条件．设 M^n 浸入 $\boldsymbol{R}^{n+k}$，如果对于 M^n 上每点 p，不含于 M^n 的切空间 $T_p(M^n)$ 中的 r 个线性独立向量场存在，则称 M^n 在 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 中浸入具有**横截 r 标架场**（transverse r-field）．对于浸入，下面 M. W. Hirsch 的结果([2])是最基本的．

4) M^n 在 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 中浸入具有横截 r 标架场的充分必要条件是，与 M^n 的切丛相伴的，以 M^n 为底空间，以 Stiefel 流形† $V_{n+k,n-r}$ 为纤维的纤维丛的截面†存在．

5) 设 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{n+k+r}\ (k \geqslant 1)$，如果这个浸入具有横截 r 标架场，则 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{n+k}$．

以 1) 中的 Whitney 定理 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{2n-1}$ 为出发点，令 $k = n-1$，应用上面定理，浸入问题就成为以 M^n 为底空间的纤维丛的截面存在问题．例如，如果 M^n 为 π 流形†（→ 微分流形的拓扑学），则 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$．

Hirsch 的结果用K理论的语言可表为下面的定理，在许多具体问题上有应用．设$\mathscr{E}(X)$为 X 上实向量丛的等价类，$\theta: \mathscr{E}(X) \to KO(X)$（→$K$ 理论）．如果 $\xi \in KO(X)$ 是 θ 的象，则称 ξ 为**正的**（positive）．那末，对于 $\xi_0 \in \widetilde{KO}(X)$，使 $\xi_0 + k$（k 为平凡 k 维向量丛）为正的最小自然数 k 以 $g(\xi_0)$ 表示，$g(\xi_0)$ 称作 ξ 的**几何维数**（geometrical dimension）．

6) 如果 $k > 0$，$M^n \subseteq \boldsymbol{R}^{n+k}$ 的充分必要条件是 $g(-\tau_0) \leqslant k$，此处 $\tau_0 = \tau - k$．

这个定理还可以进一步推广．对于两个流形 M, N，$\dim M < \dim N$，使 $M \subseteq N$ 的充分必要条件是存在映射 $f: M \to N$，使 $g(f^*(\tau_0(N)) - \tau_0(M)) \leqslant \dim N - \dim M$．

对于 M^n 到 $\boldsymbol{R}^{n+k}$ 的浸入 f 与 g，如果存在联系 f, g 的（可微）同伦† $F: M^n \times I \to \boldsymbol{R}^{n+k}$，使得对于所有的 t 值，$F_t(x) = F(x, t)$ 都是浸入，则 f, g 称为**正则同伦**（regularly homotopic）．在上面定义中，如果 f, g 是嵌入，所有的 F_t 也是嵌入，则 f 与 g 称为**正则合痕**（regularly isotopic, diffeotopic）．

关于嵌入之间的相互关系，A. Haefliger 的下述结果很重要([3])．

7) i) 设 V^n 和 M^m 分别为 $(k-1)$ 连通紧流形和 k 连通†流形．如果 $2k < n$，$m \geqslant 2n - k + 1$，则 V 到 M 的任意连续映射 f 同伦于(微分)嵌入．假定 $2k < n$，$m \geqslant 2n - k$，V, M 都是 k 连通时，则 f 同伦于(微分)浸入．ii) 与上面同样假定，设 $2k < n+1$，$m \geqslant 2n - k + 2$，则 V 到 M 的两个同伦的（微分）嵌入是正则

合痕.

由 7) i) 设 $m \geqslant 3(n+1)/2$，则任意的拓扑嵌入可用微分嵌入逼近. 且当 $m > 3n/2$ 时,任何的拓扑浸入可用微分浸入逼近. 由 ii) 也可以得到拓扑情形与微分情形下的同样关系. 这个维数关系的范围称为**稳定区域** (stable range),在嵌入问题中很重要. ($m>3(n+1)/2$ 称为**介稳区域** (metastable range). Haefliger [8] 还进一步把 S^{4n-1} 到 $\boldsymbol{R}^{6n}$ 中的嵌入加以分类，并且证明存在 S^{4n-1} 到 $\boldsymbol{R}^{6n}$ 的嵌入，它与自然的嵌入不同构. Levine [9] 得到了 S^n 到 S^m 的嵌入的分类的更完全的结果).

关于(微分)嵌入与(微分)浸入之间的关系,我们知道如下的例子：对于任何正整数 q，存在紧微分流形 M^n，使得 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^k$，而对任何 $r \geqslant q$，$M^n \not\subset \boldsymbol{R}^{k+r}$.

近年来由于拓扑学方法的进步得到了许多结果;例如,假如 M^n 是非紧流形,一般有 $M^n \subset \boldsymbol{R}^{2n-1}$; 如果 M^n 是非紧 π 流形,则 $M^n \subseteq \boldsymbol{R}^n$; 如果 M^n 是可定向紧流形，且 $n>4$，则 $M^n \subset \boldsymbol{R}^{2n-1}$ 等等.

【分段线性流形的嵌入】 n 维分段线性流形† M^n 到 m 维分段线性流形 X^m 的嵌入是分段线性映射† $f: M^n \to X^m$，使 f 是到 $f(M^n)$ 上的同胚，$f(M^n)$ 是 X^m 的子复形†，且 $f^{-1}: f(M^n) \to M^n$ 是分段线性映射. 两个嵌入 $f_0, f_1: M^n \to X^m$ 称为合痕,如果存在同伦 $F: M^n \times [0,1] \to X^m \times [0,1]$ 使得对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $F(M^n \times t) \subset X^m \times t$, $F|(M^n \times t): M^n \times t \to X^m \times t$ 是嵌入，且 $F|M \times 0 = f_0$, $F|M \times 1 = f_1$. 显然，n 维单纯复形可分段线性嵌入于 $\boldsymbol{R}^{2n+1}$. 下面是吴文俊定理:当 $n>2$ 时,任何 n 维分段线性流形均可嵌入于 $\boldsymbol{R}^{2n}$ 中. 在六十年代得到的许多重要结果中，我们提一下 Zeeman 定理 [10]：如果 $m-n \geqslant 3$, S^n 到 S^m 的任何两个嵌入均合痕,因此 S^n 在 S^m 中不打结.

【参】 [1] M. F. Atiyah, Immersions and embeddings of manifolds, Topology, **1**(1962), 125—132; [2] M. W. Hirsch, Immersion of manifolds, Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), 242—276; [3] A. Haefliger, Plongements différentiables de variétés dans variétés, Comment. Math. Helv., **36**(1961), 47—82; [4] H. Whitney, The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, Ann. of Math., **45**(1944), 220—246; [5] H. Whitney, The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space, Ann. of Math., **45** (1944), 247—293; [6] H. Whitney, Differentiable manifolds, Ann. of Math., (2) **37** (1936), 645—680; [7] S. Smale, The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces, Ann. of Math., (2) **69**(1959), 327—344; [8] A. Haefliger, Knothed $(4k-1)$-spheres in $6k$-space, Ann. of Math., (2) **75** (1962), 452—466; [9] J. Levine, A classification of differentiable knots, Ann. of Math., (2) **82**(1965), 15—50; [10] E. C. Zeeman, Unknotting combinatorial balls, Ann. of Math., (2) **78** (1963), 501—526.

十、分 析 学

(微积分、测度论、无穷级数、Fourier 分析、位势论和变分法)

分析学 [英 analysis 法 analyse 德 Analysis 俄 анализ 日 解析学] 分析学起源于古代.考察起来,我们必须追溯到 Eudoxos(公元前 408? —355?)和 Archimedes(公元前 287? —212)为求平面图形的面积和立体的体积而考虑的穷竭法,但那个时代只限于研究特殊的图形和立体.到了十六世纪,这个问题又被法国的 F. Viète(1540—1603),德国的 J. Kepler(1571—1630),意大利的 B. Cavalieri(1598—1647)等重新提了出来;而到十七世纪,向曲线引切线的问题,由法国的 R. Descartes, P. de Fermat(1601—1665), B. Pascal(1623—1662),英国的 J. Wallis(1616—1703)等进行了研究,特别是,Fermat 把它应用到了求极大值和极小值的问题上.

德国的 G. W. Leibniz(1646—1716)也研究了这个问题.1684 年,他引入了新的符号 dx, dy,导出了切线的斜率由 dy/dx 给出,从而创建了求 dy/dx 的算法.接着他于 1686 年又创立了**逆切法**(methodus tangentium inversa).这就是我们今天所说的"积分法";就在这时,他引进了符号 $\int$.英国的 I. Newton(1642—1727)根据力学的考察,也创建了相当于今天的"微积分学"的**流数法**(methodus fluxionum).然而,由于 Leibniz 和 Newton 都没有明确弄清基本概念,因而受到了各方面的严厉批判.在英国,这一新的算法并未被普遍采纳,只有英格兰的 B. Taylor(1685—1731)于 1715 年,以及苏格兰的 C. Maclaurin(1698—1746)于 1745 年发挥了它的作用.与此相反,在欧洲大陆上,Leibniz 的符号化了的算法由 Bernoulli 家族的数学家,法国的 F. A. de l'Hospital(1661—1704),意大利的 G. Fagnano(1682—1766)等所继承,使以前从未得到解决的问题接连得到解决,同时又出现了新的问题.

在这方面,1747 年,法国的 J. le R. d'Alembert 联系弦的振动问题,在 $x=0$ 和 $x=l$ 时 $y=0$ 的条件下,研究了偏微分方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1}$$

他指出,设 f 为以 $2l$ 为周期的"任意函数",则解为 $y=f(at+x)-f(at-x)$.瑞士的 D. Bernoulli 于 1753 年指出,上述方程的解由"一般函数"

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

所给出,因此就产生了"任意函数是否总能用三角级数表示"的问题.这个问题经法国的 A. C. Clairaut, J. L. Lagrange 以及 L. Euler 等人而带到了十九世纪.1807 年,法国的 J. Fourier 在研究热传导问题时,指出以 2π 为周期的任意函数可以表示为

$$y=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{2}$$

其中系数 a_k, b_k 可用

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx, \tag{3}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx$$

表示.级数(2)就是现代通称的 Fourier 级数†,但 Fourier 并未验证以(3)为系数时(2)是否收敛以及它的和是否等于 $f(x)$.最早是法国的 A.L. Cauchy,他注意到讨论"级数"时,有必要考虑它的收敛性.这是 1820 年的事.

过去由“解析表达式”定义的函数概念，到十九世纪变成由对应关系来定义. Cauchy 明确了十八世纪数学家未能掌握的“极限”和“连续”的概念，引进了“可微性”和“可积性”的概念，并指明了连续函数是可积函数，但由于他未能区别“逐点连续”和“一致连续”，所以是不完整的. 德国的 B. Riemann 在其1854年关于三角级数的论文中，将 Cauchy 的可积性的含意加以推广，使它也能适用于不连续的函数，从而建立了 Riemann 积分的概念，并把它应用于 Fourier 级数的问题.

德国的 G. Cantor 于 1874 年发表的集合论，给分析学带来了革命性的变化. 法国的 R. Baire, É. Borel, H. Lebesgue 等对基于集合论的分析学的确立作出了巨大的贡献. Baire 对“不连续函数”进行了分类，Lebesgue 则将 Baire 的结果加以推广，同时明确了函数的“解析表示”的意义，自 Euler 以来被人们所含糊使用的语言，至此终于弄清楚了. 此外，Lebesgue 试图从最一般的角度出发，对“函数的积分”、“曲线的长度”、“曲面的面积”等概念作出定义，对 Borel 导入的“Borel 测度”进行了推广，于 1902 年创建了“Lebesgue 测度”和“Lebesgue 积分† 论”. 而这个理论的引进使 Fourier 级数理论产生了新的转折.

关于复变量函数的研究，我们不妨说是以 Cauchy 在 1825 年到 1850 年间所发表的论文为其开端的. 他的出发点是 fonction monogène（单演函数），而在一个域的所有点为 monogène（单演）的函数，就是现代所说的“正则函数†”或“全纯函数†”. 他还揭示，对于这种函数，“积分定理”成立；而当非正则的点存在时，可以导出“积分公式”和“残数定理”；他用这些命题证明了，若函数在 a 处为全纯，则在该点的邻域内，此函数可表示为幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$.

Riemann 在“$\frac{dw}{dz}$ 与微分 dz 的值无关时”考虑了复变量 w 作为另一复变量 z 的函数，而这就是 Cauchy 的 fonction monogène（单演函数）. 他在研究 Abel 函数时，为使多值函数“单值化”而建立了 Riemann 面. 这是给现代数学留下的遗产，它促进了拓扑学的发展.

与 Riemann 同时代在德国活跃的有 K. Weierstrass. 由于 $z-a$ 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k$，在收敛圆内表示全纯函数，所以 Weierstrass 把它命名为“函数元素”，而以 a 为始点沿所有道路进行“解析开拓†”所得到的函数元素的集合，被他命名为“解析函数”.

另外，Weierstrass 还开始对两个以上复变量的情形进行了一些片断的研究. 在他之后，法国的 H. Poincaré, P. Cousin, C. E. Picard 等试图将单变量情形的理论推广到多变量的情形. 其中 Cousin 于 1895 年提出的关于“具有给定的零点与极点的多复变量函数的构成”问题，由法国的 A. Weil 和日本的冈洁进行了研究. 还有多复变量函数的全纯域的问题，由法国的 H. Cartan，德国的 H. Behnke, P. Thullen, K. Stein 等进行了研究，而把它推广到解析空间的则是德国的 H. Grauert, R. Remmert 和 Stein 等人.

微分学给出了求函数极值的一般方法，推广这种考虑方法，建立求出使所给泛函取到极值的函数的方法，就是变分法†. 例如，对于在通过平面上两点 (a, A)，(b, B) 的所有曲线 $y=y(x)$ 中，决定使 y 的泛函 $\int_a^b F(x, y, y')dx$ 取到极值的函数 $y(x)$ 的问题，Euler 指出 $y(x)$ 必须满足方程 $\frac{dF_{y'}}{dx}-F_y=0$ (1744). 通过 Lagrange 和 W. R. Hamilton 等人，变分法已经发展成为在理论力学和量子力学†的领域中也很有用的理论. 由于研究泛函关于 y 的连续性或可微性，把函数看做函数空间†中的“点”的想法发展了. 把函数作为函数空间的元素来处理，并利用代数与拓扑方法的分析的分支，就称为**泛函分析**.

泛函分析的另一来源是积分方程†的理论，它最先为 N. H. Abel 在他所讨论的问题中所引入；以后又由 V. Volterra 在形如 $A(x)\varphi(x)$

$-\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$的方程中进行了推广，其中 $A(x)$, $K(x,y)$ 和 $f(x)$ 为已知函数，而 $\varphi(x)$ 则为未知函数. E. I. Fredholm 建立了形如 $A(x)\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x)$ 的另一种积分方程的理论. D. Hilbert 为研究具有对称核的 Fredholm 型积分方程[†]的特征值问题而引入了函数空间 l_2 与 L_2. J. L. von Neumann 随后建立了抽象 Hilbert 空间[†]中的谱理论. 他又应用这个理论，奠定了量子力学的数学基础(1929). S. Banach 还进而建立了 Banach 空间[†]中线性算子[†]的理论(1932)，而 Banach 空间包含 Hilbert 空间作为其特殊情形. 这一理论更被进一步推广为拓扑线性空间的理论. L. Schwartz (1945)利用拓扑线性空间的理论，系统地发展了广义函数[†]的理论，这是泛函分析的一个重要部分，并且已经证明，它是偏微分方程[†] 的一般理论的最近的巨大进展中的一个主要因素.

【参】 [1] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Teubner, 1894—1908. 其他→十七世纪的数学、十八世纪的数学和十九世纪的数学的[参]; [2] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Fonctions d'une variable réele, Integration, Espace vectoriels topologiques, Théorie spectrales, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1955—1969; [3] C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 第二版 Teubner, 1927 (Chelsea, 1968)(中译本: C. 卡拉皆屋锋利, 实变函数论, 科学出版社, 1957); [4] H. Cartan, 1. Calcul différentiel, 2. Formes différentielles, Hermann, 1967; [5] G. Choquet, Lectures on analysis I, II, Benjamin, 1969; [6] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics I, II, Interscience, 1953, 1962 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法 I, II., 科学出版社, 1958, 1977); [7] R. Courant, Differential-und Integralrechnung I, II, Springer, 第三版 1955 (中译本: 库兰特, 柯氏微积分学, 上海中华书局, 上卷, 1949, 下卷, 1952); [8] C. J. de La Vallée-Poussin, Cours d'analyse infinitésimale I, II, Gauthier-Villars, 第七版 1930; [9] J. Dieudonné, Foundations of modern analysis, Academic Press: Treatise on analysis I, 第二版, 1969; II, 1970; [10] J. Dieudonné, Calcul infinitesimal, Hermann, 1968; [11] 藤原松三郎, 微分積分学, 内田老鶴圃; I, 1934; II, 1939, [12] E. Goursat, Cours d'analyse mathématique: I. Dérivées et différentielles, intégrales définies, développements en séries, applications géométriques; II. Théorie des fonctions analytiques, équations différentielles, équations aux dérivées partielles du premier ordre; III. Intégrales infiniment voisines, équations aux dérivés partielles du second ordre, équations intégrales, calcul des variations, Gauthier-Villars, 第五版, 1933—1956; [13] G. H. Hardy, A course of pure mathematics, Cambridge Univ. Press, 第七版, 1938; [14] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner, 第二版, 1924; [15] C. Jorden, Cours d'analyse de l'école polytechnique: I. Calcul différentiel; II. Calcul intégral: III. Calcul intégral (équations, différentielles), Gauthier-Villars, 第三版 I 1909; II 1913; III 1915; [16] H. Lebesgue, Lecons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 第二版, 1928; [17] E. Picard, Traité d'analyse, Gauthier-Villars, I, 1922; II, 1926; III, 1928; [18] G. Pólya-G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I, II, Springer, 第二版, 1954; [19] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill, 1966; [20] L. Schwartz, Analyse mathématique I, II, Hermann, 1967; [20A] L. Schwartz, Analyse-Topologie générale et analyse fonctionelle, Hermann, 1971; [21] L. Schwartz, Théorie des distributions, Actualites Sci. Ind., Hermann, 1950, 第二版, 1966; [22] В. И. Смирнов, Курс Высшей Математики, Физматгиз, 第十七版 1961 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 高等教育出版社, 1956); [23] 高木貞治, 解析概論, 岩波, 第三版, 1961; 另→微分学、微分方程论和全纯函数的[参].

连续函数 [英 continuous function 法 fonction continue 德 stetige Funktion 俄 непрерывная функция 日 連続関数] 一般说来，连续的概念考虑的是从拓扑空间X到拓扑空间Y函数(或映射)$f:X\to Y$. (→拓扑空间[连续映射]). 其中最经常考虑的是 $X=\mathbf{R}^n$ (Euclid 空间), $Y=\mathbf{R}$ (实数集)的情形. 本条主要讨论 X, Y 分别为由距离 ρ_X, ρ_Y 所定义的度量空间[†]的情形. 所谓函数 $f:X\to Y$ 在 $x_0\in X$ 处**连续**(continuous)，是指对于任意的$\varepsilon>0$，能适当地选取 $\delta>0$，使当 $\rho_X(x,x_0)<\delta$ 时，就有 $\rho_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. 这等价于当 $x\to x_0$ 时，有 $f(x)\to f(x_0)$(→收敛). 如果 f 在X的每个点 x_0 处连续，就称它(在X上)连续. 又如果对于任意的 $\varepsilon>0$，能选取与 x, y 无关的 $\delta>0$，使当 $\rho_X(x,y)<\delta$时，$\rho_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$ 恒成立，则称 f 在 X 上为**一致连续** (uniformly continuous).

我们称 $\rho_Y(f(x),f(y))$ 关于 $\rho_X(x,y)<\delta$, $x,y\in X$ 的上确界 $\omega(\delta)$ 为 f 关于 X 的**连续模** (modulus of continuity). 于是，f 在X上一致连续即为当 $\delta\to 0$ 时，有 $\omega(\delta)\to 0$.

当存在常数 M, $\alpha>0$,使 $\omega(\delta)\leqslant M\delta^{\alpha}$ 时,也即使

$$\rho_Y(f(x),\ f(y))\leqslant M(\rho_X(x,\ y))^{\alpha}$$

恒成立时,称 f 满足 **α 次 Hölder 条件** (Hölder's condition of order α) (或 **α 次 Lipschitz 条件**). 特别当 $\alpha=1$ 时,简称为 **Lipschitz 条件** (Lipschitz's condition). 满足这一条件的函数 $f(x)$ 显然一致连续. 满足 α 次 Lipschitz 条件的函数的集合以 **Lip α** 表示之.

一般地,如果 $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ 连续,则合成函数 $g\circ f:X\to Z$ 也连续. 如果值域是实数域 $\boldsymbol{R}$(或复数域 $\boldsymbol{C}$, 或一般地,拓扑域†), 则当 f, g 连续时, $f\pm g$, fg 也连续; 又如果 $g(x)\neq 0$,则 f/g 也连续. 如果值域为实数域 $\boldsymbol{R}$,若 f, g 连续,则 $\min(f,\ g)$, $\max(f,\ g)$也连续. 又如果 X 为连通†(例如实数集 $\boldsymbol{R}$ 的区间 I),且 f 连续,则象 $f(X)$ 亦为连通.

【单侧连续性】 本段设定义域为实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的区间 I, f 为从 I 到度量空间 Y 的函数. 所谓 f 的不连续点 $x_0\in I$ 为 f 的**第一类不连续点**(discontinuity point of the first kind), 是指在 Y 内分别存在极限 $\lim\limits_{x\uparrow x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\downarrow x_0}f(x)$. 在这种情形,也称 f 在 x_0 处具有**跳跃**(jump, gap). 如果 f 在 x_0 处连续或为第一类不连续,则称 f 在 x_0 处为**最多第一类不连续** (at most discontinuous of the first kind). 在 I 中除第一类不连续点以外的不连续点,称为**第二类不连续点** (discontinuity point of the second kind). 又当 $\lim\limits_{x\downarrow x_0}f(x)=f(x_0)$ 时($\lim\limits_{x\uparrow x_0}f(x)$ 不存在亦无妨), 称 f 在 x_0 处为**右连续**(right continuous). 如果用 $x\uparrow x_0$ 替换 $x\downarrow x_0$,则同样可定义**左连续**(left continuous).

在区间 $[a,\ b]$ 内除有限个第一类不连续点外均连续的函数,称为**分段连续函数** (piecewise continuous function).

【半连续函数】 本段考察以度量空间 X 的子集 E 为定义域的实值函数 f(也允许取 $\pm\infty$ 为函数值). 设在闭包 $\bar{E}$ 内的点 x 的 δ 邻域与 E 的交内, f 所取的值的上确界、下确界分别为 $M(x,\ \delta)$, $m(x,\ \delta)$, 则

$$M(x)=\lim_{\delta\to 0}M(x,\ \delta),\ m(x)=\lim_{\delta\to 0}m(x,\ \delta)$$

分别称为 f 的**上极限函数**(upper limit function)和**下极限函数** (lower limit function). 我们有 $-\infty\leqslant m(x)\leqslant M(x)\leqslant+\infty$. 特别当 $x_0\in E$, $M(x_0)=f(x_0)$ 时,称 f 在 x_0 处**上半连续**(upper semi-continuous); 当 $m(x_0)=f(x_0)$, 即 $-f(x)$ 在 x_0 处上半连续时,称 f 在 x_0 处**下半连续**(lower semi-continuous), 这两种情形统称为 f 在 x_0 处**半连续** (semi-continuous). 上半连续函数和下半连续函数统称**半连续函数** (semi-continuous function).

作为 $f(x)$ 在 $x_0\in E$ 处上半连续的充分必要条件, 有以下两个等价的条件: 1) $f(x_0)=+\infty$, 或对满足 $f(x_0)<\lambda$ 的任意的 λ, 存在 x_0 的 δ 邻域,使得 $M(x_0,\ \delta)<\lambda$. 2)对于收敛到 x_0 的 E 的任意点列 x_n, 有 $\limsup\limits_{n\to\infty}f(x_n)\leqslant f(x_0)$.

当 $f(x)$ 在集合 E 的所有点处均上(下)半连续时,称 $f(x)$ 在 E 内为上(下)半连续. 函数 $f(x)$ 在 E 内上半连续的充分必要条件是, 对于任意的实数 α, $\{x\,|\,f(x)<\alpha\}$ 为 E 内的相对开集. 用此性质亦可在一般拓扑空间 X 上定义半连续的实值函数.

实值函数 $f(x)$ 在 $x_0\in E$ 处连续的充分必要条件是, $f(x_0)$ 为有限的实数, 且 $f(x)$ 在 x_0 处既为上半连续又为下半连续. 又函数 $f(x)$ 在 E 内连续的充分必要条件是, $f(x)$ 在 E 内取有限实数值,且对于任意的 α, $\{x\,|\,f(x)<\alpha\}$ 与 $\{x\,|\,f(x)>\alpha\}$ 为 E 内的相对开集. 在 E 为紧集时, E 上的上(下)半连续函数在 E 上某一点取到它在 E 上的上(下)确界. 特别是,紧集 E 上的实值连续函数 f 在 E 上为有界, 并在其上取到最大值与最小值(**Weierstrass 定理**). 又如果 E 为连通 (例如, $\boldsymbol{R}$ 上的区间 I), 由于 E 在连续函数 f 下的象 $f(E)$ 为连通,因此,如果 α, $\beta\in f(E)$, γ 介于 α, β 之间, 则 $\gamma\in f(E)$ (**介值定理**(德 Zwischensatz)).

如果实数集 $\boldsymbol{R}$ 上的实值函数 $f(x)$ 可微且其导数有界,则它满足 Lipschitz 条件, 从而为绝对连续†(特别为连续,为有界变差). (此外,

关于连续函数的多项式逼近→多项式逼近.)

关于度量空间X上的实值函数，上半连续函数的单调递减序列$\{f_n(x)\}$的极限函数$f(x)$为上半连续. 如果连续函数序列$\{f_n(x)\}$一致收敛，则它的极限函数$f(x)$连续.(又关于等度连续族→一致收敛.)

【Baire 函数】 即使定义在度量空间X上的实值连续函数序列在所有点处均收敛，其极限也未必是连续函数. R. Baire 把连续函数称为**0类** (class 0) 函数,把可表示为连续函数序列的极限的函数称为最多1类的函数，把最多1类但非0类的函数称为**1类** (class 1) 函数(1899). 同样地，对于自然数n亦可定义最多n类的函数. 最多n类但非最多$n-1$类的函数,称为**n类** (class n) 函数. 更进而取自然数列$\{n_\nu\}$，如果一个函数可以表示为函数序列$\{f_\nu\}$的极限,其中f_ν为n_ν类，则称此函数为最多ω类的函数,最多ω类但非有限n类(n为任一自然数)的函数,称为**ω类** (class ω) 函数. 一般地,按照超限归纳法†,对于任意的序数†ξ，令η_n为小于ξ的序数,如果一个函数可以表示为最多η_n函数f_n的极限,则称此函数为最多**ξ类** (class ξ) 的函数. 所有这些函数都统称为 **Baire 函数** (Baire function). 实际上，对于大于可数序数ω的序数ξ,并不存在ξ类的函数. 又如果X为 Euclid 空间的完备集†，则对任意的最多可数的序数ξ，实际存在定义在X上的ξ类函数. 以下仅就此种情形加以考察.

如果X具有连续统†的基数，则X上一切 Baire 函数的集合也具有连续统的基数. 另一方面，由于X上的全部函数所成的集的基数大于连续统的基数，所以在X上存在非 Baire 函数的函数. Baire 函数与 Borel 可测函数†是等价的 (H. Lebesgue). 从而，函数f为X上的 Baire 函数的充分必要条件是,对于任意的实数α，集合$\{x|x\in X, f(x)>\alpha\}$为 Borel 集†(→测度 [Borel 集]). Baire 函数的可数序列的极限函数为 Baire 函数. 如果$f(x)$，$g(x)$为X上的最多α类的函数，则以下各函数亦为最多α类的函数: $|f(x)|$; $f(x)\pm g(x)$; $f(x)\cdot g(x)$; 以及$f(x)/g(x)$ (如果在X上$g(x)\neq 0$). f为X上的最多1类函数与下面的1)或2)是等价的: 1) 对于X的任意的闭子集F，f在F上的限制f^*在F内有一连续点; 2) 对于任意的实数α，集合$\{x|f(x)<\alpha, x\in X\}$为$F_\sigma$集†(Baire). 在完备度量空间中,一个函数具有稠密的连续点集与它为最多1类是等价的.

例如，**Dirichlet 函数**(Dirichlet's function) $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}(\cos \nu!\pi x)^{2k})$ 当x是有理数时取值为1,当x是无理数时取值为0，而这正是2类函数. 如果二元函数$f(x,y)$分别对x,y连续，则它是最多1类的函数.

【参】 [1] S. Saks, Theory of the integral, Warsawa, 1937; [2] 高木貞治,解析概論,岩波,第三版, 1961; [3] 辻正次,実関数論,槇書店, 1962; [4] N. Bourbaki, Topologie générale, chap. X, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1949, 修订版 1961, 第二版, 1967; [5] R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues, Gauthier-Villars, 1905; [6] Ch. de La Vallée-Poussin, Integrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire, Gauthier-Villars, 1934; [7] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 第二版 1964.

不等式 [英 inequality 法 inégalité 德 Ungleichung 俄 неравенство 日 不等式] 【不等式】 "不等式"一词,按字面解释,就是指等式$a=b$的否定，即形如$a\neq b$的式子. 但通常所说的**不等式**,是指把有序集,特别是实数集的两个元a，b，用表示大小次序关系的所谓**不等号** (inequality sign)$<,>,\leqslant,\geqslant$连结起来以表示a与b的次序关系的式子:

$$a<b,\ a>b,\ a\leqslant b,\ a\geqslant b.$$

所以,称为"大小式"或"次序式"之类或许更准确些,但习惯上用"不等式"这个名词. 以下在本条中叙述的全是关于实数间的大小关系式.

仿照等式中的恒等式、方程式，在不等式中,对全体实数都成立的不等式(如$x^2\geqslant 0$),称为**绝对不等式** (absolute inequality),只在某子集X中成立的不等式 (如，$x(x-1)<0$)，称为**条件不等式** (conditional inequality). 不过对于这种区别,我们认为像下面这样说更精确些: 即着眼于求使某不等式成立的x的集合 (称它

为**解** (solution)) X 的,是"条件不等式"(求解过程称为**解**不等式); 虽也限定 X, 但着眼于对任意 $x \in X$, $f(x) > 0$ (或 < 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$) 都成立, 这种情况下的不等式是"绝对不等式". 因而也有对于正实数 a, b, c 都成立的绝对不等式 $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$, 或对于充分大的 x 都成立的绝对不等式 $x - 3 > 8\log x$ 等的说法.

不等式, 尤其各种绝对不等式, 在分析中, 譬如在收敛的证明、误差的估计等方面, 是被广泛使用的一种技巧性工具. 但是在不等式的证明中, 除了例如"对实数 x, $x^2 \geqslant 0$, 等号只在 $x = 0$ 时成立"或者"若 $f'(x) > 0$, 则当 $a < b$ 时, $f(a) < f(b)$"等这样极其一般的原理外, 统一的方法不太多. 而对同一个不等式能用几种方法来证明的情形则较多.

【条件不等式的解法】 含一个字母 x 的不等式, 经过移项, 总能变成 $f(x) > 0$ (或 $f(x) \geqslant 0$) 的形式. 若 $f(x)$ 是定义在全体实数上的连续函数, 则 $f(x)$ 在下列情形中必居其一: 1) 始终 >0; 2) 始终 <0; 3) 也有 $\geqslant 0$ 的, 也有 $\leqslant 0$ 的. 在 1), 2) 两种情形, $f(x) = 0$ 无实根; 在 3) 的情形, 设 $X = \{x | f(x) > 0\}$, $Y = \{x | f(x) < 0\}$, 则在 X, Y 二者的边界点†上, $f(x) = 0$ 成立. 其次, 若 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 是 $f(x) = 0$ 的相邻的二根, 则在区间 (α, β) 内 $f(x)$ 不变号. 因而通过解方程 $f(x) = 0$, 就解出了不等式 $f(x) > 0$. 对于两个变量 x, y 的**联立不等式** (simultaneous inequalities) $f(x, y) > 0$, $g(x, y) > 0$, 若 f, g 为连续函数, 则一般地以曲线 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ 为边界的 x, y 面上的某个区域, 就是它的解. 变量个数更多时也可同样地求解.

【特别著名的绝对不等式】 1) **平均**(mean). 对于 $a_\nu \geqslant 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$, 令

$$M_r = M_r(a) = \left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^r\right)^{1/r}.$$

当某个 $a_\nu = 0$ 且 $r < 0$ 时, 就认为 $M_r = 0$. 特别地,

$$A = M_1,\ G = \lim_{r\to 0} M_r = \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{1/n},\ H = M_{-1}$$

分别称为 n 个数 a_ν 的**算术平均**(arithmetic mean)、**几何平均**(geometric mean)和**调和平均**(harmonic mean). 除 a_ν 全部相等, 或者某 a_ν 等于 0 且 $r \leqslant 0$ 的情形外, M_r 关于 $r(-\infty < r < +\infty)$ 是严格单调递增函数†, 并有 $M_r \to \min a_\nu (r \to -\infty)$, $M_r \to \max a_\nu (r \to +\infty)$. 从而恒有 $\min a_\nu \leqslant M_r \leqslant \max a_\nu$. 特别是, 在不全相等的正数的平均之间, 不等式 $H < G < A$ 成立.

对于在可测的†集 E 上可积的函数 $p(x) > 0$ 和 $f(x) \geqslant 0$, 令

$$M_r(f) = \left(\int_E pf^r dx \Big/ \int_E pdx\right)^{1/r},\quad r \neq 0.$$

而且若 $M_r(f)$ 对某个 $r > 0$ 为正, 则令

$$M_0(f) = \lim_{r\to+0} M_r(f) = \exp\left(\int_E p\log f dx \Big/ \int_E pdx\right).$$

我们称 $M_r(f)$ 为展布在 E 上的函数 $f(x)$ 的(关于权 $p(x)$ 的 r 次) **平均**. $M_r(f)$ 也有与上述 $M_r(a)$ 同样的性质. 特别当 $p = 1$ 时, $M_1(f)$, $M_0(f)$, $M_{-1}(f)$ 分别称为 f 的**算术平均**、**几何平均**、**调和平均**.

2) Hölder 不等式. 设 $p \neq 0, 1$, $(p-1) \times (q-1) = 1$, 即 $1/p + 1/q = 1$. 若 $a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$, 则 **Hölder 不等式**

$$\sum_\nu a_\nu b_\nu \lesseqgtr \left(\sum_\nu a_\nu^p\right)^{1/p}\left(\sum_\nu b_\nu^q\right)^{1/q},\quad p \lesseqgtr 1$$

成立. 其中的和也可以是无限和, 而不等号则上下按同一个次序取; 只有当 $\{a_\nu^p\}$ 和 $\{b_\nu^q\}$ 成比例时, 即只有使 $\lambda a_\nu^p = \mu b_\nu^q$ 成立的比例因子 λ, μ 存在时, 才能用等号代替不等号. 特别把 $p = q = 2$ 时的 Hölder 不等式, 称为 **Cauchy 不等式**或 **Cauchy-Schwarz 不等式**.

对 E 上的可测函数 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, **Hölder 积分不等式**

$$\int_E fgdx \gtreqless \left(\int_E f^p dx\right)^{1/p}\left(\int_E g^q dx\right)^{1/q},\quad p \lesseqgtr 1$$

成立; 只有使 $\lambda f^p = \mu g^q$ 几乎处处成立的比例因子 λ, μ 存在时, 才能用等号代替不等号. 在 $p = q = 2$ 的情形, 称为 **Schwarz 不等式**或 **Буняковский 不等式**.

3) Minkowski 不等式. 设 $p \neq 0, 1$, 若 $a_\nu > 0$, $b_\nu > 0$, 则 **Minkowski 不等式**

$$\left(\sum_\nu (a_\nu + b_\nu)^p\right)^{1/p} \gtrless \left(\sum_\nu a_\nu^p\right)^{1/p} + \left(\sum_\nu b_\nu^p\right)^{1/p}, \quad p \lesseqgtr 1$$

成立. 只有 $\{a_\nu\}$ 与 $\{b_\nu\}$ 成比例时, 才能用等号代替不等号.

当 $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ 时,对应的积分不等式为:

$$\left(\int_E (f+g)^p dx\right)^{1/p} \gtrless \left(\int_E f^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_E g^p dx\right)^{1/p}, \quad p \lesseqgtr 1.$$

成为等式的条件也同上.

另外,与本条有关的问题,关于凸函数的不等式→凸函数;关于线性不等式→线性规划,凸集. 关于其他几个绝对不等式→公式 8.

【参】 [1] G. H. Hardy-J. E. Littlewood-G. Pólya, Inequalities, Cambridge Univ., Press, 1934, 修订版 1952 (中译本: G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚, 不等式,科学出版社, 1965); [2] V. I. Levin-S. B. Stečkin, (В. И. Левин-С. Б. Стечкин), Inequalities, Amer. Math. Soc. Translations, ser. 2, **14** (1960), 1—29([1] 的俄译本中增补部分的英译本); [3] E. F. Beckenbach-R. Bellman, Inequalities, Erg. Math. N. F., **30**, Springer, 1961, 修订版 1964; [4] E. F. Beckenbach-R. Bellman, An introduction to inequalities, Random House, 1961; [5] N. D. Kazarinov (Н. Д. Казаринов), Geometric inequalities, Random House, 1961; [6] N. D. Kazarinov (Н. Д. Казаринов), Analytic inequalities, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962; [7] W. Walter, Differential-und Integral-Ungleichungen, Springer Tracts in Natural Phil., **2**, Springer, 1964; [8] O. Shisha (ed.), Inequalities, Academic Press. I, 1967; II, 1970.

凸函数 [英 convex function 法 fonction convexe 德 konvexe Funktion 俄 выпуклая функция 日 凸関数] 【凸函数】 在 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间的凸集† D 上定义的实值函数 $f(x)$,如果对于 $x, y \in D$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 恒能满足

$$(1) \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y),$$

就称它为**凸函数**,特别是,如果对于 $x \neq y$, $0 < \lambda < 1$, (1) 式中的符号≤代以 <, 则称 f 为**严格凸函数** (strictly convex function). 当 $-\psi(x)$ 为凸(严格凸)函数时,就称 $\psi(x)$ 为**凹(严格凹)函数** ((strictly) concave function). 这个概念,在 D 为实轴上的区间的情形,是由 J. L. W. V. Jensen 引进的([1]).

有时放宽凸函数定义中的条件,只假定(1)当 $\lambda = 1/2$ 时成立. 如果 D 是拓扑线性空间†且 f 连续,则从后一定义出发也可以推出 (1).以下暂且假定 D 是实轴上的区间. 这时即使从放宽了的定义出发,如果凸函数 $f(x)$ 为可测的†,或在测度为正的集合上有上界, 则它必在区间的内点处连续(后者是由 A. Ostrowski 所证明的[2]). 又如果定义在区间 I 内的凸函数 $f(x)$ 有下界, 则或者 $f(x)$ 连续, 或者它的图象在集 $\{(x, y) | x \in I, y \geqslant g(x)\}$内稠密,其中 $g(x)$ 是一个适当的连续凸函数(福原满洲雄定理[3]). 此外,如果从定义(1)出发,则 $f(x)$ 必在区间的内点处连续. 此时, $f(x)$ 在各点处存在单侧导数,且对于 $x < y$, 满足 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y)$. 从而,除去最多可数个点外, $f(x)$ 为可微. 函数 $f(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上为连续凸函数的充分必要条件是, 借助适当的单调递增函数 $\varphi(t)$, 可以把 $f(x)$ 写成

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\, dt.$$

特别是,如果 $f(x)$二次可微,则 $f''(x) \geqslant 0$ ($a < x < b$) 是 $f(x)$ 在 (a, b) 内为凸的充分必要条件.

【凸函数与不等式】 如果 $f(x)$ 是(在(1)的意义下的)凸函数,则当 $a_\nu > 0$ 时,有

$$(2) \qquad f\left(\sum a_\nu x_\nu / \sum a_\nu\right) \leqslant \sum a_\nu f(x_\nu) / \sum a_\nu.$$

在实变量的情形,对应的积分不等式为

$$(3) \qquad f\left(\int \varphi\phi dx \Big/ \int \varphi dx\right) \leqslant \int \varphi f(\phi) dx \Big/ \int \varphi dx.$$

函数 x^a ($a > 1$ 或 $a < 0$), $-x^a$ ($0 < a < 1$), $-\log x$, $x \log x$ 在 $x > 0$ 内为严格凸函数; 函数 x^{2n} ($n \geqslant 1$), e^x, $\log(1 + e^x)$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ ($a \neq 0$) 在 $-\infty < x < \infty$ 内为严格凸函数. 应用不等式 (2) 或 (3) 到这些函数, 我们能够证明关于平均†的不等式(→不等式)以及其他种种不等式.

如果拓扑线性空间上的连续凸函数$f(x)$更对任意点x与任意正数α满足$f(\alpha x)=\alpha f(x)$，则称$f(x)$为**次加性泛函**(subadditive functional)，在泛函分析中常用到它.

【M. Riesz 凸性定理】 对于以复数为分量的n维向量$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$与$\nu\geqslant 0$，令$N_\nu(x)=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^{1/\nu}\right)^\nu$ ($\nu>0$时)；$N_0(x)=\sup|\xi_j|$. 对于m行n列的复数分量矩阵(a_{ij})，$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$z=(\zeta_1,\cdots,\zeta_m)$以及$\nu\geqslant 0$，$\mu\geqslant 0$，若定义

$$M(\nu,\mu)=\sup_{N_\nu(x)\leqslant 1, N_\mu(z)\leqslant 1}\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\zeta_i\xi_j\right|,$$

则$\log M(\nu,\mu)$在如下意义下成为(ν,μ)的凸函数：如果$0<\nu_i\leqslant 1$，$0<\mu_i\leqslant 1$且$\nu_i+\mu_i\geqslant 1$ $(i=1,2)$，则$\log M((1-t)\nu_1+t\nu_2, (1-t)\mu_1+t\mu_2)$在$0\leqslant t\leqslant 1$成为$t$的凸函数([4],[5]). 这称为**M. Riesz 凸性定理**(M. Riesz's convexity theorem). 应用这条定理,能够导出 Hölder 不等式†，Minkowski 不等式†以及其他多种不等式. 例如，当对于满足$1\leqslant p\leqslant\infty$的一切$p$，$T$为从$L_p(\Omega)$到$L_p(\Omega)$的加法算子时,如果当$p=1$和$p=\infty$时$T$都连续且其范数$\leqslant C$，则对所有$p(1<p<\infty)$，$T$都连续且其范数也都$\leqslant C$.

【参】 [1] J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inéqualités entre les valeurs moyennes, Acta Math., **30** (1906), 175—193; [2] A. Ostrowski, Mathematische Miszellen XIV, Über die Funktionalgleichung der Exponential funktion und verwandte Funktionalgleichungen, Jber. Deutsch. Math. Verein, **38** (1929), 54—62; [3] M. Hukuhara (福原満洲雄), Sur la fonction convexe, Proc. Japan Acad., **30** (1954), 683—685; [4] M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionelles linéaires, Acta Math., **49** (1927), 465—497; [5] G. O. Thorin, An extention of a convexity theorem due to M. Riesz, Comm. Sém. Math. Univ. Lund., **4** (1939), 1—5; [6] G. H. Hardy-J. E. Littlewood-G. Pólya, Inequalities, chap. III, Cambridge Univ. Press, 1934, 修订版 1952 (中译本: G. H. 哈代, J. E. 李特伍德, G. 波利亚, 不等式, 第三章, 科学出版社, 1965); [7] N.Bourbaki, Eléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques, chap. II, Herman, 1953, 第二版, 1966; [8] 辻正次,実関数論,第8章,槇書店,1962; [9] F. A. Valentine, Convex sets, McGraw-Hill, 1964.

有界变差函数 [英 function of bounded variation 法 fonction à variation bornée 德 Funktion beschränkter Schwankung 俄 функция с ограниченным изменением 日有界変動関数] 【单调函数】 从有序集†X到有序集Y的函数(映射)f满足条件

(1) 若$x_1<x_2$，则$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，
(或$f(x_1)\geqslant f(x_2)$)

时，我们称$f(x)$为**单调递增(或递减)函数**(monotone increasing (decreasing) function)，或**非减(非增)函数** (nondecreasing (nonincreasing) function),二者总称为**单调函数**(monotone function). 设X,Y是全有序集,当(1)中的$\leqslant$(或$\geqslant$)处总是不等号$<$(或$>$)成立时,就称$f(x)$为**严格**(strictly)(**单调**)**递增**(**或递减**)**函数**,二者总称为**严格单调函数**(strictly monotone function).

特别当X,Y是实数集的子集时，单调函数最多有可数个不连续点，因而有限区间上的有界单调函数是 Riemann 可积的†. 定义在实数区间上的连续实函数$f(x)$在该区间上是单射的充分必要条件为$f(x)$严格单调.这时$f(x)$的值域也是一个区间，其反函数也是严格单调函数. 定义在一个区间上的可微函数为单调的充分必要条件是其导数在该区间内恒$\geqslant 0$或$\leqslant 0$; 若$\geqslant 0$，则此函数单调递增，若$\leqslant 0$，则此函数单调递减. 特别地，若$f'(x)>0$(或<0)，则函数f是严格单调递增(或递减)的.

【有界变差性】 设$f(x)$为定义在实数区间$[a,b]$上且取实数值的有界函数，在区间上取有限个分点：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，在差$f(x_i)-f(x_{i-1})$中，设正项之和与负项之和分别为$P,-N$，则$P-N=f(b)-f(a)$，$P+N=\sum_i|f(x_i)-f(x_{i-1})|$. $P,N,P+N$关于所有分割的上确界,分别称为$f(x)$在$[a,b]$上的**正变差**(positive variation),**负变差**(negative variation),**全变差**(total variation). 若其中一个有限,则这三个数就全都有限. 这时称$f(x)$为**有界变差函数**(有时也把上述术语中的

“变差”称为“**变分**”). 因为 $f(x)$ 在 $[a, t]$ 上的正变差 $\pi(t)$, 负变差 $\nu(t)$ 是 t 的单调递增函数,故若 $f(x)$ 是有界变差函数,则能表示为 $f(x) - f(a) = \pi(x) - \nu(x)$. 这样把 $f(x)$ 表示为两个单调递增函数之差,就称为 $f(x)$ 的 **Jordan 分解** (Jordan decomposition). 反之,单调函数是有界变差函数,两个有界变差函数的和、差、积还是有界变差函数. 因此, 有界变差函数无非是能表示为两个单调函数之差的函数. 从而,与单调函数同样,有界变差函数也 Riemann 可积,最多有可数个不连续点,且几乎处处†可微.

连续函数不一定是有界变差的(例如, $x\sin 1/x$),也有不连续函数却是有界变差的(例如, $\mathrm{sgn}(x)$). 然而,绝对连续†函数,可微且导数有界的函数, 满足 Lipschitz 条件†的函数都是有界变差的.

有界变差性的概念,是 C. Jordan 联系曲线的长度问题引入的(→长度和面积). 这个概念能推广到更一般的集函数†上去,有界变差函数经常被用来对连续的被积函数建立 Stieltjes 积分†.

【参】 [1] 高木貞治, 解析概論, 岩波, 第三版 1961;
[2] S. Saks, Theory of the integral, Warszawa, 1937;
[3] 辻正次, 実関数論, 槙書店, 1962.

微分学 [英 differential calculus, differentiation 法 calcul différentiel, dérivation 德 Differentialrechnung, Differentiation 俄 дифференциальное исчисление 日 微分法] 【一阶导数】 设 $y = f(x)$ 为定义在实数的区间 I 上取实数值的函数. 设 $x, x+h \in I$, 如果当固定 x 并使 h 趋于 0 时, 有限的极限 $\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x))/h$ 存在,就称 f 在 x 处是**可微的** (differentiable). 称此极限为 f 在 x 处的**导数** (derivative), 或**微分系数** (differential coefficient),或**微商** (differential quotient), 并以 $\dfrac{dy}{dx}$, dy/dx, y', $\dot{y}$, $f'(x)$, $Df(x)$ 等表示. 若 f 在集合 $A\subset I$ 的各点处都可微, 则称 f 在 A 上是可微的. 使 $f'(x)$ 对应于 $x\in A$ 而得到的函数称为 $f(x)$ 的**导数**或**导函数** (derivative or derived function). 从 $f(x)$ 求 $f'(x)$, 称为“**微分** (differentiate) $f(x)$”.

如果当 $h \to +0$ 时, $(f(x+h)-f(x))/h$ 的极限存在且有限, 则称 f 在 x 处是**右可微的** (right differentiable), 称此极限为**右导数** (right derivative) 或**右微分系数** (right differential coefficient),记为 $D^+f(x)$ 或 $f'_+(x)$;同样定义**左导数** (left derivative) 或**左微分系数** (left differential coefficient) $D^-f(x)$ 或 $f'_-(x)$. 例如,设 f 定义在 $I=[a, b)$ 上,则在 I 的左端点 $x = a$ 处, $Df(a)$ 即为 $D^+f(a)$.

【微分】 根据上述定义, 符号 dy/dx 中的 dy, dx 本身都没有特定的意义,但我们可以赋予意义如下: 如果把 x 增加 $\Delta x(=h)$ 时 y 的**增量** (increment) $f(x+\Delta x) - f(x)$ 记为 Δy, 则当 f 在 x 处可微时, 若令 $\Delta y/\Delta x = f'(x) + \varepsilon$, 就有 $\varepsilon \to 0\,(\Delta x \to 0)$. 用 Landau 符号†书写,就有 $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(|\Delta x|)\,(\Delta x \to 0)$; 这就是说,当 $\Delta x \to 0$ 时, Δy 由两部分组成,一部分是与 Δx 成比例的 $f'(x)\Delta x$, 另一部分是比 Δx 高阶的无穷小†. 我们把这种意义下 Δy 的“主部” $f'(x)\Delta x$, 称为 $y = f(x)$ 的**微分** (differential), 记为 dy. 可见微分 dy 是 x 和 Δx 这两个独立变量的函数. 特别当 $f(x) = x$ 时, 有 $dx = 1\cdot\Delta x = \Delta x$, 所以 $dy = f'(x)dx$, $f'(x) = dy/dx$ 成立.

若过 $y = f(x)$ 关于直角坐标 (x, y) 的图象上的点 $(x, f(x))$, 作斜率等于 $f'(x)$ 的直线,则该直线就是此图象在该点处的切线†. 若 f 在 x 处可微, 则 f 在 x 处连续†; 但逆命题不成立. K. Weierstrass 指出,由

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos b^n \pi x;\quad 0 < a < 1,\quad b \text{ 为奇数},$$

$ab > \dfrac{3}{2}\pi + 1$ 所定义的函数,虽在 $(-\infty, \infty)$ 上连续,却处处不可微 (关于 Weierstrass 函数, 例如可参阅藤原松三郎[2], p.160—164; [8]).

【微分法】 如果两个函数 f, g 在 I 上可微,那末关于函数的四则运算,有 $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ (α, β 为常数); $(fg)' = f'g + fg'$; 在 $g \neq 0$ 的点处 $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$. 设 $y =$

$f(x)$ 为定义在 (a, b) 上的 x 的函数，$x = \varphi(t)$ 为定义在 (α, β) 上的 t 的函数，若 $\varphi(t)$ 所取的值恒在 (a, b) 内，则能作合成函数† $y = F(t) = f(\varphi(t))$. 如果 f, φ 分别在 $(a, b), (\alpha, \beta)$ 上可微，那么 $F(t)$ 也在 (α, β) 上可微，且 $F'(t) = f'(x)\varphi'(t)(x = \varphi(t))$，即 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$ 成立.

若 $y = f(x)$ 是单调的†，在 x 处可微，且 $f'(x) \neq 0$，则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y(=f(x))$ 处可微，且 $(dx/dy)(dy/dx) = 1$. 若 $f'(x) = 0$，则 $f^{-1}(y)$ 不可微，但是 $\lim\limits_{\Delta y \to 0} (f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y))/\Delta y$ 存在，是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

【高阶导数】 如果 $y = f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 I 上可微，则 $(f'(x))' = f''(x)$ 仍确定 x 的一个函数. 一般地，若 $f^{(n-1)}(x)$ 在 I 上可微（此时称 $f(x)$ 在 I 上是 **n 次可微的** (n-times differentiable)），则 $(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x)$ 也确定 x 的一个函数，称为 $f(x)$ 的 **n 阶导（函）数** (n-th derivative or n-th derived function)，记为 $\frac{d^n y}{dx^n}$，$d^n y/dx^n$，$D^{(n)}y$，$f^{(n)}(x)$ 等. $n \geqslant 2$ 时的 n 阶导数，称为**高阶导（函）数** (derived function of higher order)，它在 x 处的值称为 f 在 x 处的**高阶导数** (higher-order derivative).

关于两个函数乘积的 n 阶导数，**Leibniz 公式**

$$(fg)^n = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \cdots + \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}$$

成立.

对 d^2y/dx^2 中的 d^2y，可赋予意义如下：在 $dy = y'\Delta x$ 中，Δx 和 x 是独立变量，y' 是 y 关于 x 的导数. 所以 $d^2y = d(dy) = d(y'\Delta x) = (y'\Delta x)'\Delta x = y''\Delta x^2$，再由 $\Delta x = dx$，得到 $d^2y = y''dx^2$. 同样可得 $d^n y = y^{(n)}dx^n$. 我们称 $d^n y$ 为 y 的 **n 阶微分** (n-th differential, differential of n-th order).

【中值定理】 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，而且在 (a, b) 内每个点 x 处，有限或 $\pm\infty$ 的极限 $\lim\limits_{h \to 0}(f(x + h) - f(x))/h$ 存在（因而，若 $f(x)$ 可微，则条件当然满足），则存在 $\xi(a<\xi<b)$，使 $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(\xi)$ 成立. 这个命题称为**中值定理** (mean value theorem). 特别把 $f(b) = f(a)$ 时的命题称为 **Rolle 定理**. 若令 $b - a = h$，$\xi = a + \theta h$，则上式能表示为 $f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h)$ $(0 < \theta < 1)$ 的形式. 这定理对 $h < 0$ 也成立.

这条定理蕴涵如下的结果：在上述条件下，如果在 $a < x < b$ 上还成立 $A \leqslant f'(x) \leqslant B$，则 $A \leqslant (f(b) - f(a))/(b - a) \leqslant B$. 这个结果，有时特别称为**有限增量定理**（法 théorème des accroissements finis）. 由此能证明如下的事实：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f'(x)$ 在 (a,b) 上存在且 > 0，则 $f(b) > f(a)$. 因而若在区间 I 内 $f' > 0$，则 $f(x)$ 为严格单调†递增（若 $f' < 0$，则 f 为严格单调递减）. 但是逆定理不一定成立（例：$f(x) = x^3$，$f'(0) = 0$）. 其次，若在 I 上 $f'(x) = 0$ 恒成立，则 $f(x)$ 必是常数. 从而若两个函数在区间的每个点处的导数都相等，则这两个函数之差是一个常数.

设 $f(x)$ 在开区间 I 内 n 次可微. 当固定 $a \in I$ 而 $x \in I$ 为任意时，令

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + R_n,$$

则 $R_n = f^{(n)}(\xi)(x - a)^n/n!$，$\xi$ 是 a 与 x 之间的某个数. 此式称为 **Taylor 公式**. 若 $f^{(n)}(x)$ 在 $x = a$ 处连续，则由于 $x \to a$ 时 $\xi \to a$，故 $f^{(n)}(\xi) \to f^{(n)}(a)$，从而 $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + o((x - a)^n)$. 我们称上面的 R_n 为 Taylor 公式的 n 次**余项** (remainder). 上述余项形式是由 J. L. Lagrange 给出的，但还有其他形式的 R_n（→公式 9）.

由 Taylor 公式，若 $f^{(n)}(x)$ 在 $x = a$ 处连续，则当 x 接近 a 时，可以取多项式 $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$ 的值作为 $f(x)$ 的近似值. 称该多项

式为 $f(x)$ 的 **n 次近似式** (n-th approximation), $|R_{n+1}|$ 给出 n 次近似式的误差. 应用这个公式,在 $x\to a$ 时 $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ 的情形下,有时能计算出极限 $A=\lim_{x\to a}f(x)/g(x)$. 例如,若 $f'(x)$, $g'(x)$ 在 a 处连续, $g'(a)\neq 0$, 则基于取 $f(x)$, $g(x)$ 的一次近似式,即得 $A=f'(a)/g'(a)$. 这种形式的极限,称为 0/0 型**不定式** (indeterminate form) 的极限. 同理可求 $0\cdot\infty$, 0^∞ 等不定式的极限 (关于不定式的极限问题,例如可参阅藤原[2] p. 189—196;[11]).

【偏导数】 对两个以上实变量的函数 $w=f(x,y,\cdots,z)$, 只使其一个变量变化,而把其余的变量看作常数,如果此时 f 可微,则称 f 对该变量是**可偏微分的**(partially differentiable), 其导数称为**偏导数**或**偏微分系数** (partial derivative, partial differential coefficient). 求偏导数称为进行**偏微分** (partially differentiate). 例如, f 关于 y 的偏导数,就是令 $\varphi(y)=f(x,y,\cdots,z)$ 时的 $\varphi'(y)$, 即

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,\cdots,z)-f(x,y,\cdots,z)}{\Delta y}.$$

把它记为 $\partial w/\partial y$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,\cdots,z)$, $f_y(x,y,\cdots,z)$ 或 $D_yf(x,y,\cdots,z)$ 等. 这时,一般假定点 $(x,y,\cdots,z)$ 是 f 的定义域†的内点†. 在二维以上的情形,由于定义域的边界†是复杂的,所以在微分法中,通常不考虑边界点处的偏导数. 若 f 在开集† G 的各点处关于 x 都有偏导数,则 f_x 即成为定义在 G 上的函数. 这就是 f 关于 x 的**偏导(函)数** (partial derivative).

【全微分】 设点 $P=(x,y,\cdots,z)$ 是 $w=f(x,y,\cdots,z)=f(P)$ 的定义域 G 的内点, $\Delta w=f(x+\Delta x,y+\Delta y,\cdots,z+\Delta z)-f(x,y,\cdots,z)$. 再设点 $P'=(x+\Delta x,y+\Delta y,\cdots,z+\Delta z)$ 与 P 的距离为 ρ, 如果存在常数 $\alpha,\beta,\cdots,\gamma$ 使当 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\cdots+\Delta z^2}\to 0$ 时, $\Delta w=\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\cdots+\gamma\Delta z+o(\rho)$ 成立, 则称 f 在点 P 处是**可微的或完全可微分的** (totally differentiable), 或**在 Stolz 意义下可微的**(differentiable in the sense of Stolz). 这时, f 在点 P 处关于每个变量都是可偏微分的, 并且 $\alpha=f_x(x,y,\cdots,z)$, $\beta=f_y(x,y,\cdots,z)$, $\cdots$, $\gamma=f_z(x,y,\cdots,z)$ 成立. 当 $\rho\to 0$ 时, Δw 的主部 $f_x\Delta x+f_y\Delta y+\cdots+f_z\Delta z$ 称为 w 在 P 处的**全微分** (total differential), 记为 dw. 因为 $x,y,\cdots,z$ 本身的全微分 $dx,dy,\cdots,dz$ 分别为 $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$, $\cdots$, $dz=\Delta z$, 所以 w 的全微分可写为 $dw=f_xdx+f_ydy+\cdots+f_zdz$. 这就是说, dw 是以 $x,y,\cdots,z$ 和 $dx,dy,\cdots,dz$ 为独立变量的函数. 若函数在点 P 可微, 则此函数在该点是连续的. 当 f 在 G 的每个点处都可微时,就称 f 在 G 上是可微的. 但即使 $f_x,f_y,\cdots,f_z$ 都存在, f 也不一定连续 (例如,在 $(0,0)$ 的邻域内,当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时 $f(x,y)=xy/(x^2+y^2)$, 而 $f(0,0)=0$), 因而也未必可微. 不过如果 $f_x,f_y,\cdots,f_z$ 在 G 上存在且连续, 或者稍微减弱一点,如果 $f_x,f_y,\cdots,f_z$ 都存在, 且其中除一个外其他的都连续,则 f 在 G 上是可微的.

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微, 再设 $\Delta x=\rho\cos\theta$, $\Delta y=\rho\sin\theta$, 于是,当令 θ 固定而使 $\rho\to 0$ 时,有限极限 $\lim_{\rho\to 0}(\Delta z/\rho)=f_x(x,y)\cos\theta+f_y(x,y)\sin\theta$ 存在. 称此极限为函数在点 (x,y) 处**沿角 θ 方向的偏导数**.而 f_x, f_y 分别是 $\theta=0,\frac{\pi}{2}$ 时的特殊情形. 设在 f 的定义域的内部† 给定一条具有切线的曲线, 这时我们往往用 $\partial z/\partial n$ 这个符号表示 f 在该曲线上的点 (x,y) 处**沿曲线的法线方向的偏导数**. 关于三元以上的函数, 也有类似的定义和记号.

$z=f(x,y)$ 的可微性的几何意义如下: 设 (x,y,z) 为空间点的正交坐标†,若把过空间曲面 $z=f(x,y)$ 上的点 $(a,b,f(a,b))$ 的平面记为 $z-f(a,b)=\alpha(x-a)+\beta(y-b)$, 则此平面是该曲面在 $(a,b,f(a,b))$ 处的切平面† 当且仅当 $\alpha=f_x(a,b)$, $\beta=f_y(a,b)$. 虽然 f_x, f_y 的存在依赖于坐标系的选择,但完全可微

分性与坐标系的取法无关.

【高阶偏导数】 如果定义在开集 G 上的函数 $w=f(x,y,\cdots,z)$ 的偏导数关于某个变量可偏微分，就能作出二阶偏导数. 同样能定义 n 阶偏导数. 将这些偏导数记为：$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y,\cdots,z)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y,\cdots,z)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial x}=f_{xyx}(x,y,\cdots,z)$, $\cdots$ 等（在高木[1]中，将 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ 记为 $\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$，但也有记为 $\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$ 的）. f_{xy} 与 f_{yx} 并不无条件地相等（G. Peano 的例：在 $(0,0)$ 的邻域内，若 $(x,y)\neq(0,0)$，令 $f(x,y)=xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$，而 $f(0,0)=0$，于是在 $(0,0)$ 处就有 $f_{xy}=-1$, $f_{yx}=1$）. 然而若 f_{xy}, f_{yx} 在 G 内连续，则二者相等. 再设在 f 的定义域的点 P 的邻域 U 上 f_x,f_y,f_{xy} 存在，而 f_{xy} 在 P 处连续，则 f_{yx} 在该点处也存在且 $f_{xy}=f_{yx}$ (H. A. Schwarz). 若在 U 上 f_x,f_y 存在且在点 P 处可微，则在 P 处 $f_{xy}=f_{yx}$ (W. H. Young). 对三阶以上的偏导数 $f_{\cdots xy\cdots}$，若 $f_{\cdots xy\cdots}$ 与 $f_{\cdots yx\cdots}$ 连续，则 $f_{\cdots xy\cdots}=f_{\cdots yx\cdots}$. 从而，如果所涉及的偏导数都连续，则求偏导数的次序可以改变([1], p.57—59).

【多变量合成函数】 设 w 是 $x,y,\cdots,z$ 的函数，而 $x,y,\cdots,z$ 又是 t 的函数，则 w 是 t 的函数. 若 w 关于 $x,y,\cdots,z$ 可微，而 $x,y,\cdots,z$ 关于 t 可微，则 w 作为 t 的函数也可微，且 $\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\cdots+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$. 如果假定二阶或二阶以上的偏导数可微，那么重复上述过程也可求出 d^2w/dt^2, d^3w/dt^3 等等. 当 $x,y,\cdots,z$ 是多变量函数时，也可同样考虑([1], p. 59—61).

【多变量函数的 Taylor 公式】 设 $f(x,y)$ 有直到 n 阶的连续偏导数，且连结两点 (a,b), (x,y) 的线段 $(a+(x-a)t,\ b+(y-b)t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 包含在 f 的定义域(开集) G 内，则

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=f(a,b)\\
&+\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)\\
&+\frac{1}{2!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+\cdots\\
&+\frac{1}{(n-1)!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}\\
&\times f(a,b)\\
&+\frac{1}{n!}\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n}\\
&\times f(a+(x-a)\theta,\ b+(y-b)\theta),\ 0<\theta<1
\end{aligned}
$$

成立. 在上式中，例如在第三项中出现的 $\left((x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$，表示 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 在 (a,b) 处的值分别乘以 $(x-a)^2$, $2(x-a)(y-b)$, $(y-b)^2$ 再相加；其他各项也有同样的含义. 这就是二元函数的 **Taylor 定理**. 对三元以上的函数也有类似的公式. 与一元函数的情形相同，由这个公式可以得到函数的近似式.

【函数的类】 当 $f(P)$ 在其定义域 G 内有直到 n 阶偏导数，并且这些偏导数还连续时，就称 f 为 **C^n 类函数** (function of class C^n)或 **n 次连续可微的** (n-times continuously differentiable) 函数. 这类函数的全体就记为 C^n $(n=1,2,\cdots)$. 连续函数是 **C^0 类函数**. 称 **C^1 类函数**为**连续可微的**（德 stetig differenzierbar）或**光滑的**（英 smooth 德 glatt）函数. 显然，$C^0\supset C^1\supset C^2\supset\cdots$，对 C^n 类函数 $(n\geqslant 2)$，它的 $\leqslant n$ 阶的偏导数的求导次序可以自由交换. 属于 $C^\infty=\bigcap C^n$ 的函数，称为 **C^∞ 类函数**或**无限次连续可微的函数** (infinitely differentiable function). 有时我们称属于某 C^n $(n\geqslant 1)$ 的函数为具有某种程度的良好性质的函数.

设 $w=f(x,y,\cdots,z)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 G 上的函数，$P=(a,b,\cdots,c)\in G$，若

$$
\begin{aligned}
f(x,y,\cdots,z)&=f(a,b,\cdots,c)\\
&+\sum_{r_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{r_n=1}^{\infty}a_{r_1r_2\cdots r_n}(x-a)^{r_1}(y-b)^{r_2}\cdots\\
&\times(z-c)^{r_n}
\end{aligned}
$$

在 P 的某邻域 U 内成立，其中等式右端是绝对收敛级数，则称 f 在 P 处是**实解析的**(real analytic)．在这种情形下，对任一 r，f 在点 P 处是 r 次可微的，并有

$$a_{r_1r_2\cdots r_n}=\frac{r_1!r_2!\cdots r_n!}{(r_1+r_2+\cdots+r_n)!}\times\frac{\partial^{r_1+r_2+\cdots+r_n}f}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\cdots\partial z^{r_n}}(a,b,\cdots,c).$$

若 f 在域 G 的每一点 P 处是实解析的，则称 f 是 G 上的**实解析函数**(real analytic function)．有时称实解析函数为 **C^ω 类函数**．实解析函数属于 C^∞，但反之不成立(→拟解析函数)．对于定义在开区间上的一元函数，我们也使用同样的术语．

【极值】 设点 P 的函数 $f(P)$ 定义在以 $P=P_0$ 为内点的域上，若对于 P_0 的某邻域内的所有点 $P\neq P_0$，$f(P)\geqslant f(P_0)$ 恒成立，就称 f 在 P_0 处达到**极小**(minimum)，称 $f(P_0)$ 为 $f(P)$ 的**极小值**(minimal value)．把≥换成≤，就得到**极大**(maximum)，**极大值**(maximal value)的定义．极大、极小只不过是局部的最大、最小而已．极大、极小合在一起称为**极值**(extremum)．

为了判定极值，可以使用下列基于导数符号的条件：当单个变量 x 的函数 $f(x)$ 在区间 I 上可微时，i) 若在 I 的内点 x_0 处 f 达到极大或极小，则 $f'(x_0)=0$．ii) 设 $f'(x_0)=0$，且当 x 增大时，f' 在 x_0 处由正变为负，则 $f(x_0)$ 为极大值；在相反的情形，$f(x_0)$ 为极小值．iii) 当 $f'(x_0)=0$，且 f 在 x_0 的邻域内二次可微时，则按照 $f''(x_0)<0$ 或 >0，$f(x_0)$ 成为极大值或极小值．当 $f''(x_0)=0$ 时，不能断定极大或极小．一般地，当 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内 n 次可微且 $f^{(n)}(x)$ 连续时，若 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，而 $f^{(n)}(x_0)>0$(或 <0)，且 n 为偶数，则 $f(x_0)$ 为极小(或极大)值；若 n 为奇数，则 $f(x_0)$ 不是极值．当 $f'(x_0)=0$ 时，我们称 $f(x_0)$ 为**平稳值**(stationary value)．

对多变量 $x,y,\cdots z$ 的函数 $f(x,y,\cdots,z)$，若 f 在 $P_0=(x_0,y_0,\cdots,z_0)$ 处达到极大或极小且一阶偏导数存在，则必有 $f_x(x_0,y_0,\cdots,z_0)=0$，$f_y(x_0,y_0,\cdots,z_0)=0$，$\cdots$，$f_z(x_0,y_0,\cdots,z_0)=0$．关于两个变量 x,y 的函数 $f\in C^2$，当此必要条件成立时，令 $\delta=f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)$，于是有：1) 若 $\delta>0$，则按照 $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ 或 >0，$f(P_0)$ 为极大值或极小值；2) 若 $\delta<0$，则 $f(P_0)$ 不是极值；3) 若 $\delta=0$，则不能作出一般性的判定．

若 n 元函数 $f=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处取极值，且它的一阶偏导数都存在，则有 $f_i=f_{x_i}(P_0)=0(i=1,\cdots,n)$．一般地当这些条件满足时，称点 P_0 为 f 的**临界点**(critical point)．再设 $f\in C^2$，并令 $f_{ik}=f_{x_ix_k}(P_0)$，以 f_{ik} 为系数作 n 个变量的二次型† $Q=Q(X_1,\cdots,X_n)=\sum_{i,k}f_{ik}X_iX_k$，则得极值的判定法如下：若 Q 为正定型†，则 $f(P_0)$ 为极小值，若 Q 为负定型†，则 $f(P_0)$ 为极大值，若 $|f_{ik}|\neq 0$，且 Q 为不定型†，则 $f(P_0)$ 不是极值．若 $|f_{ik}|=0$，则仅此不足以判定极值．当 $|f_{ik}|\neq 0$ 时，f 的临界点 P_0 称为**非退化的**(non-degenerate)；当 $|f_{ik}|=0$ 时，则称 P_0 为**退化的**(degenerate)．

我们也能根据隐函数的微分法求隐函数的极值．在 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)=0\ (m<n)$ 的条件下，求 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的极值这样的**条件极值**(conditional extremum)问题，也归结为求隐函数的极值．实际上，设 $f,\varphi_1,\cdots,\varphi_m\in C^1$，若在所考虑的域内函数行列式† $\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)/\partial(x_{n-m+1},\cdots,x_n)\neq 0$，则 $x_{n-m+1}=y_1,\cdots,x_n=y_m$ 都可看作关于 $x_1,\cdots,x_l\ (l=n-m)$ 的隐函数，并有 $f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_l,y_1,\cdots,y_m)=f^*(x_1,\cdots,x_l)$．$f$ 在条件 $\varphi_1=\cdots=\varphi_m=0$ 下在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处取到极值当且仅当 f^* 在 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_l^0)$ 处取到极值．因而 $\partial f^*/\partial x_j\ (j=1,\cdots,l)$ 在 P_0 处等于 0 乃是必要的．这些条件与下面的陈述是等价的：设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为任意常数，当令 $F(x_1,\cdots,x_n)=f+\lambda_1\varphi_1+\cdots+\lambda_m\varphi_m$ 时，点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 满足 $\partial F/\partial x_i=0\ (i=1,\cdots,n)$ 与 $\varphi_1=0,\cdots,\varphi_m=0$．在多数情形下，能从解这个联立方程求出 $(x_1^0,$

$\cdots, x_n^0)$. 这称为 **Lagrange 待定系数法** (Lagrange's method of indeterminate coefficients) 或 **Lagrange 乘数法**(method of Lagrange multipliers).

再者,作为有关的内容,关于隐函数→隐函数;关于逐项微分→级数;关于积分与微分的交换次序问题→积分学.

【参】 [1] 高木貞治,解析概論,岩波,第三版 1961; [2] 藤原松三郎,微分積分学I,内田老鶴圃, 1934; [3] 亀谷俊司,初等解析学 I, II, 岩波, 1953, 1958; [4] 一松信,解析学序説,上,下,裳華房, 1962, 1963; [5] E. Landau, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, Teubner, 1934 (英译本: Differential and integral calculus, Chelsea, 1965); [6] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle, Hermann, 1948, 1951, 第二版 1958, 1961; [7] T.M. Apostol, Mathematical analysis, Addison-Wesley, 1957; [8] R. C. Buck, Advanced calculus, McGraw-Hill, 第二版 1965; [9] R. Courant, Differential and integral calculus I, II, Nordemann, 1938 (中译本: 库兰特, 柯氏微积分学, 上海中华书局, 上卷, 1949, 下卷, 1952); [10] G. H. Hardy, A course of pure mathematics, Cambridge Univ. press, 第七版 1938; [11] E. Hille, Analysis, Blaisdell, I, 1964; II, 1966; [12] W. Kaplan, Advanced calculus, Addison-Wesley, 1952; [13] J. M. H. Olmsted, Advanced calculus, Appleton-Century-Crofts, 1961; [14] A. Ostrowski, Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung I, II, III, Birkhäuser, 第二版 1960—1961; [15] M.H. Protter-C. B. Morrey, Modern mathematical analysis, Addison-Wesley, 1964; [16] W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 第二版 1964; [17] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Том I,II, Гостехиздат, 1956 (中译本: В. И. 斯米尔诺夫, 高等数学教程, 第一卷, 第二卷, 高等教育出版社, 1958, 1959); [18] A.E. Taylor, Advanced calculus, Ginn, 1955.

隐函数 [英 implicit function 法 fonction implicite 德 implizite Funktion 俄 неявная функция 日 陰関数] 【隐函数】 在历史上,当 x 与 y 之间有函数关系 $\varphi(x, y) = 0$, 而 y 不能用 x 的显式表示时,就称 y 为 x 的隐函数(→函数). 但为严密起见,还要求函数的连续性和可微性,现今通常定义如下.

设 $f(x_1, \cdots, x_n, y)$ 是实 $n+1$ 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 的域 G 内的 C^1 类函数†,若在 G 内的点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0, y^0)$ 处, $f(x_1^0, \cdots, x_n^0, y^0) = 0$, $f_y(x_1^0, \cdots, x_n^0, y^0) \neq 0$, 则在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 的邻域内存在唯一的 C^1 类函数 $g(x_1, \cdots, x_n)$, 恒满足

$$f(x_1, \cdots, x_n, g(x_1, \cdots, x_n)) = 0, \text{ 且 } y^0 = g(x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

(**隐函数定理**(theorem on implicit function)). 称 g 为由 $f = 0$ 确定的**隐函数**. g 的导数是 $\partial g/\partial x_i = -(\partial f/\partial x_i)/(\partial f/\partial y)$, 其中右端以 $y = g(x_1, \cdots, x_n)$ 代入. 若 f 为 C^r 类函数 $(1 \leqslant r \leqslant \infty$ 或 $r = \omega)$, 则 g 也是 C^r 类的. 特别当 $n = 1$ 时,把 x_1 写为 x, 就有 $dg/dx = -f_x/f_y$.

【函数行列式】 设有从 $\boldsymbol{R}^n$ 的域 G 到 $\boldsymbol{R}^m$ 内的映射 $x = (x_1, \cdots, x_n) \to u(x) = (u_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, u_m(x_1, \cdots, x_n))$. 当 $u_1, \cdots, u_m$ 是 C^r 类函数时,称该映射为 **C^r 类映射**(mapping of class C^r) $(0 \leqslant r \leqslant \infty$ 或 $r = \omega)$. 对于从 G 到 $\boldsymbol{R}^m$ 内的 C^1 类映射 $x \to u(x)$, 与它相连接的线性变换的系数构成的矩阵

$$(1) \qquad \partial(u)/\partial(x) = (\partial u_j/\partial x_k)_{1 \leqslant j \leqslant m; 1 \leqslant k \leqslant n},$$

称为该映射的**变换矩阵**(transformation matrix), 或 **Jacobi 矩阵** (Jacobian matrix). 若存在另一从包含 u 的值域† U 的域到 $\boldsymbol{R}^l$ 内的 C^1 类映射 $(v(u))$, 则由合成函数的微分法则和矩阵积的公式,得到合成律

$$(\partial(v)/\partial(u))\,(\partial(u)/\partial(x)) = \partial(v)/\partial(x).$$

特别当 $m = n$ 时, 称(1)的行列式†为 (u) 对 (x) 的**函数行列式** (functional determinant), **Jacobi 行列式** (Jacobian), 记为 $\dfrac{D(u_1, \cdots, u_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}$, $D(u_1, \cdots, u_n)/D(x_1, \cdots, x_n)$, 或 $D(u)/D(x)$. 也可用 ∂ 代替 D. 但在本条中,为方便起见,对矩阵用 ∂, 对行列式用 D, 以示区别.

当 $m = n$, $D(u)/D(x)$ 在 G 的所有点处都不等于 0 时,称 u 为 G 上的**正则** (regular) **C^1 类映射**, 正则换个说法也称为**非奇异的** (non-singular) 或**可逆的** (invertible). 在 $D(u)/D(x) = 0$ 的点处,称 u 在该点为**奇异的** (singular), 当 u 在某集合 $S \subset G$ 的每个点处都奇异时, 就称 u 在 S 上是**退化的**(英 degenerate 德 entartet). 对于正则映射 u, Jacobi 行列式的符号在连通域 G 内是一定的. 若它为正, 则 u 不改变 G 内各点的坐标系的方向, 若它为负, 则改为相反的方向.

使u退化的点，称为映射u的**临界点**(critical point)，该点在映射u下的像，称为**临界值**(critical value)，有时也称为**折值**(德 Falte)．一般地，由u确定的象沿着u的退化点的集合折叠在一起．C^1类映射u的临界值的集合是$\boldsymbol{R}^n$的Lebesgue测度†为0的集合(**Sard 定理**)．对于正则映射u，在G的每个点x_0处，都存在邻域V_0，使u在V_0上的限制是同胚†映射，且其逆映射$x(u)$也是正则C^1类映射，并满足

$$(D(u)/D(x))(D(x)/D(u))=1$$

(**逆映射定理**(inverse mapping theorem))．此处若u是C^r类的$(1\leqslant r\leqslant\infty$或$r=\omega)$，则其逆映射也是$C^r$类的．

【函数关系】 设在$\boldsymbol{R}^n$内域B上定义的函数$F(u_1,\cdots,u_n)$的零点的集合非空且没有内点，即F在B的任一开子集内都不恒等于0，这时称F为**具有离散零点的函数**(function with scattered zeros)．解析函数†具有这种性质．对于从$\boldsymbol{R}^n$的域G到$B\subset\boldsymbol{R}^n$的映射$u(x)$，若存在定义在B内的具有离散零点的C^r类函数F，使$F(u(x))=0$恒成立，就称$u(x)$的分量$u_1,\cdots,u_n$**有C^r类的函数关系**，或者**C^r类函数相关**．在不考虑可微次数时，就只说这些分量**函数相关**(functionally dependent)或具有**函数关系**(functional relations)；否则，就说这些分量**函数无关**(functionally independent)．若C^1类映射的分量$u_1,\cdots,u_n$为C^0类函数相关，则Jacobi行列式$D(u)/D(x)=0$．反之，若C^1类映射$u(x)$的Jacobi行列式恒等于0，则在G内的每个紧集上，$u_1,\cdots,u_n$为C^∞类函数相关(**Knopp-Schmidt 定理**)．关于具有局部性函数关系的命题，容易从隐函数定理来证明，而在非解析函数的情形，关于具有整体性函数关系的命题，首先是由 K. Knopp-R. Schmidt 证明的([1])．

【函数组的隐函数】 设从$\boldsymbol{R}^n$的域G到$\boldsymbol{R}^m$的C^1类映射$u(x)$的变换矩阵(1)的秩†$r<m$，在G内$D(u_1,\cdots,u_r)/D(x_1,\cdots,x_r)\neq0$，而对于满足$r<\rho\leqslant m$，$r<\sigma\leqslant n$的所有$\rho,\sigma$，$D(u_1,\cdots,u_r,u_\rho)/D(x_1,\cdots,x_r,x_\sigma)$在$G$内恒等于0，则$u_{r+1}(x),\cdots,u_m(x)$由$u_1(x),\cdots,u_r(x)$的值所确定，$u_\rho$能表示为$u_1,\cdots,u_r$的$C^1$类函数．

对于从$\boldsymbol{R}^n$的域G到$\boldsymbol{R}^m$的C^1类映射$u(x)$，今考察值域的一点u^0的逆象†V．我们不妨把u^0作为原点．若在上述意义下矩阵的秩为r，且$u_{r+1},\cdots,u_m$对$u_1,\cdots,u_r$函数相关，则$u_\rho(r<\rho\leqslant m)$是$u_1,\cdots,u_r$的函数，记为$u_\rho(u_1,\cdots,u_r)$；如果使$u_\rho(0,\cdots,0)\neq0$的$\rho$存在，则$V$为空集；如果对所有的$\rho(r<\rho\leqslant m)$都有$u_\rho(0,\cdots,0)=0$，则$V$是$u_1(x),\cdots,u_r(x)$的共同零点的集合．因而设$r=m\leqslant n$并不失去一般性．如果$m=n$，则$V$仅由孤立点组成．如果$m<n$，则必要时改变$x_i$的次序，总可认为在$V$内的一点$(x_i^0)$处，$D(u_1,\cdots,u_m)/D(x_1,\cdots,x_m)\neq0$．这时，在$(x_i^0)$的邻域内存在唯一的$C^1$类函数$\xi_\mu(x_{m+1},\cdots,x_n)$ $(1\leqslant\mu\leqslant m)$，具有下列性质：1) $x_\mu^0=\xi_\mu(x_{m+1}^0,\cdots,x_n^0)$；2) 当$(x_{m+1},\cdots,x_n)$在$(x_{m+1}^0,\cdots,x_n^0)$的一个邻域内变动时，点$(\xi_1(x_{m+1},\cdots,x_n),\cdots,\xi_m(x_{m+1},\cdots,x_n),x_{m+1},\cdots,x_n)\in V$．称$\xi_\mu$为由$u_1=\cdots=u_m=0$确定的$x_{m+1},\cdots,x_n$的**隐函数**．$\xi_\mu$的全微分†可从下列一次方程组求出：

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}d\xi_k+\sum_{l=m+1}^{n}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}dx_l=0,$$
$$j=1,\cdots,m.$$

【线性关系】 设$u(x)$为从$\boldsymbol{R}^1$到$\boldsymbol{R}^m$的C^{m-1}类映射，即设它的分量$u_1,\cdots,u_m$为C^{m-1}类函数，则称行列式

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_m \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_m' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \cdots & u_m^{(m-1)} \end{vmatrix}$$

为$u_1,\cdots,u_m$的**Wronski 行列式**(Wronskian)，记为$W(u_1,\cdots,u_m)$．若$u_1,\cdots,u_m$作为x的函数是线性相关的†，即存在不全为0的常数c_j，使得$\sum_{j=1}^{m}c_ju_j(x)=0$，恒满足，则$W(u_1,\cdots,u_m)=0$恒成立．从而，若$W(u_1,\cdots,u_m)\neq0$，则$u_1,\cdots,u_m$是线性无关的†．反之，

若 $W(u_1,\cdots,u_m)=0$ 恒成立，且从 $(u_1,\cdots,u_m)$ 中任选 $m-1$ 个函数所作的 Wronski 行列式中，至少有一个不等于 0，则 $u_1,\cdots,u_m$ 线性相关．这个附带条件一般是必要的．例如，C^1 类函数 x^3 与 $|x|^3$ 在区间 $[-1,1]$ 上线性无关，但 $W(x^3,|x|^3)=0$ 恒成立．可是，若 $u_1,\cdots,u_m$ 是 x 的解析函数，则这个附带条件是不必要的．若 x 为复变量，$u(x)$ 以复平面†上的域为定义域，则与上述同样的定理仍然成立．

其次，设 $u(x)$ 为从 $\boldsymbol{R}^1$ 上的区间 $[a,b]$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的连续映射，对于其分量 $u_1(x),\cdots,u_m(x)$，令 $\int_a^b u_j(x)u_k(x)dx=(j,k)$，由它作出的行列式

$$G(u_1,\cdots,u_m)=\begin{vmatrix}(1,1) & \cdots & (1,m)\\ (2,1) & \cdots & (2,m)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (m,1) & \cdots & (m,m)\end{vmatrix}$$

称为函数 $u_1,\cdots,u_m$ 的 **Gram 行列式**（Gramian）．$G(u_1,\cdots,u_m)$ 是 $(\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 的二次型 $\int_a^b\left(\sum_{j=1}^m \xi_j u_j(x)\right)^2 dx$ 的判别式†，并等于

$$\frac{1}{m!}\int_a^b\cdots\int_a^b(\det(u_j(x_k)))^2dx_1\cdots dx_m.$$

$G(u_1,\cdots,u_m)\geqslant 0$ 恒成立，并且当且仅当 $u_1,\cdots,u_m$ 线性相关时，才有 $G(u_1,\cdots,u_m)=0$．当 $u_1(x),\cdots,u_m(x)$ 为在 Lebesgue 意义下的平方可积函数时，也同样能考虑 $G(u_1,\cdots,u_m)$．此时，当且仅当 $u_1,\cdots,u_m$ 几乎处处线性相关，即存在不全为 0 的常数 $c_1,\cdots,c_m$，使得在区间 $[a,b]$ 上几乎所有†点处：$c_1u_1(x)+\cdots+c_mu_m(x)=0$ 都成立时，才有 $G=0$．

【参】［1］K. Knopp-R. Schmidt, Funktionaldeterminanten und Abhängigkeit von Funktionen, Math. Z., **25** (1926), 373—381;［2］G. Doetsch, Die Funktionaldeterminante als Deformationsmass einer Abbildung und als Kriterium der Abhängigkeit von Funktionen, Math. Ann., **99** (1928), 590—601;［3］高木貞治，代数学講義，共立出版，修訂版，1948;［4］高木貞治，解析概論，岩波，第三版，1961;［5］藤原松三郎，微分積分学，第二卷，内田老鶴圃，1939;［6］一松信，解析学序説，下，裳華房，1963;［7］W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 第二版 1964;［8］H. Cartan, Calcul différentiel, Hermann, 1967.

初等函数［英 elementary functions 法 fonctions élémentaires 德 elementare Funktionen 俄 элементарные функции 日 初等関数］

【初等函数的定义】有限个实变量或复变量的代数函数†、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，或由它们经有限次合成得到的函数，称为**初等函数**．这是微积分学中最常见的函数．

J. Liouville (J. École Polytech., **23** (1834); J. Reine Angew. Math., **13** (1835)) 定义初等函数如下：称有限个复变量的代数函数为第 0 类初等函数；称 e^z 和 $\log z$ 为第 1 类初等函数；二者合起来，称为最多第 1 类初等函数．归纳地，假定已定义最多第 $n-1$ 类初等函数 $f(z_1,\cdots,z_m)$．设 $g(t)$，$g_j(w_1,\cdots,w_n)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ 为最多第 1 类初等函数，作合成函数 $g(f(z_1,\cdots,z_m))$ 或 $f(g_1(w_1,\cdots,w_n),\cdots,g_m(w_1,\cdots,w_n))$，称这样得到的函数为最多第 n 类初等函数．如果一个函数是最多第 n 类初等函数，但不是最多第 $n-1$ 类初等函数，则称它为**第 n 类初等函数**．如果一个函数对某个 n 是第 n 类初等函数，则称它为**初等函数**．以下叙述主要的初等函数．

【实变量的指数函数与对数函数】设 $a>0$，$a\neq 1$．若实变量 x 的函数 $f(x)$ 满足

(1) $\quad f(x+y)=f(x)f(y),\ f(1)=a,$

则对于自然数 n 有 $f(n)=a^n$，对于负整数 $-n$ 有 $f(-n)=1/a^n$．一般地，对于有理数 $r=n/m$ 有 $f(r)=\sqrt[n]{a^m}$．如果还设 $f(x)$ 是连续函数，则由此就确定了唯一的以 $(-\infty,\infty)$ 为定义域，以 $(0,\infty)$ 为值域的严格单调的连续函数 $f(x)$．称这个函数为**以 a 为底的指数函数**（exponential function with the base a）a^x．称其反函数为**以 a 为底的对数函数**（logarithmic function with the base a），或简称为**对数**（logarithm）$\log_a x$．为简单起见，若记 $\log_a x=g(x)$，则对应于(1)，有

(2) $\quad g(xy)=g(x)+g(y),\ g(a)=1.$

从而得 $xy=f(g(x)+g(y))$．因此，若已有 $g(x)$ 的函数表，则为求 x，y 的积，可用表先

算出 $g(x)$ 与 $g(y)$ 的和，再反查表即得积 xy.

【对数计算的原理】 特别把以 $a=10$ 为底的对数，称为**常用对数** (common logarithm). 在常用对数里，对于只有小数点位置不同的两个数 x 与 y (即对某整数 n, $y=x10^n$)，因其对数 $g(x)$ 与 $g(y)$ 之差是某个整数 n，故只有对数的整数部分(称为常用对数的**首数**(characteristic)) 不同，而小数部分 (称为常用对数的**尾数** (mantissa)) 则相等 (但尾数一词，在数的浮点[†]表示法中 ($x=a\cdot 10^n(10^{-1}\leqslant |a|<1)$)，也用以表示其小数部分 a). 自然数的对数已被算出并制作了表(**对数表**).

$f(x)=a^x$ 是可微函数，且 $f'(x)=k_af(x)$，k_a 是由 a 确定的常数. 但若取 a 等于

$$e=\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}=2.71828\cdots,$$

则 $k_e=1$. 数 $\sum(1/\nu!)$ 称为 **Napier 数**，从 L. Euler (给 C. Goldbach 的信 (1731)) 以来，就把它记为 $\boldsymbol{e}$ (→数表 9). Ch. Hermite 在 1873 年证明了 e 是超越数[†]. 有时也把 e^x 记为 $\mathbf{exp}\,x$. 如果只说**指数函数**，那就是指 e^x. 它是在微分 (从而在积分) 下不变的函数，而且只有 Ce^x 是这样的函数. 以 e 为底的对数称为 **Napier 对数** (Napierian logarithm) 或**自然对数** (natural logarithm). 通常略去底 e 而记为 $\mathbf{log}\,x$ (有时也记为 $\ln x$). $\log x$ 的导数是 $1/x$，故可得下面的积分表示式:

$$\log x=\int_1^x\frac{dx}{x}. \tag{3}$$

求 a^x 的导数时所乘的常数 k_a 等于 $\log a$. $y=e^x$ 和 $y=\log x$ 的图象如图 1. e^x 与 $\log(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 展开式[†]如下:

$$e^x=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}, \tag{4}$$

$$\log(1+x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu+1}\frac{x^\nu}{\nu}. \tag{5}$$

(4), (5)右端的级数分别称为**指数级数** (exponential series) 与**对数级数** (logarithmic series). 这两个幂级数的收敛半径[†]分别为∞与 1.

【实变量的三角函数与反三角函数】 实变量 x 的**三角函数** (trigonometrical function) 是 $\mathbf{sin}\,x$, $\mathbf{cos}\,x$ (→三角学) 以及由这两个函数导出的函数 $\mathbf{tan}\,x=\sin x/\cos x$, $\mathbf{cot}\,x=\cos x/\sin x$, $\mathbf{sec}\,x=1/\cos x$, $\mathbf{cosec}\,x=1/\sin x$. $\sin x$, $\cos x$ 的导数分别是 $\cos x$, $-\sin x$. 在 $x=0$ 处, $\sin x$ 和 $\cos x$ 的 Taylor 展开式为:

$$\sin x=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}x^{2\nu+1}, \tag{6}$$

$$\cos x=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!}x^{2\nu}. \tag{7}$$

它们的收敛半径都是∞. 将三角函数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ 等的反函数分别记为 $\mathbf{arcsin}\,x$, $\mathbf{arccos}\,x$, $\mathbf{arctan}\,x$ (或记为 $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$)，称为**反三角函数** (inverse trigonometrical function). 它们的图象如图 3，是无穷多值函数. 以图 3 中实线部分为图象的函数(即 $-\pi/2\leqslant\arcsin x\leqslant\pi/2$, $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, $-\pi/2<\arctan x<\pi/2$)，分别称为这些函数的**主值** (principal value)，记为 $\mathbf{Arcsin}\,x$, $\mathbf{Arccos}\,x$, $\mathbf{Arctan}\,x$. 这些函数的导数分别是 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $-(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $(1+x^2)^{-1}$ (→公式 9I). 关于 $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$ 的幂级数展开(Taylor 展开, Laurent 展开), →公式 10 IV.

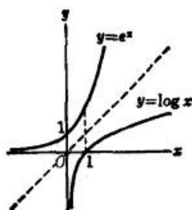


图 1

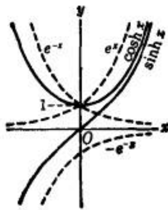
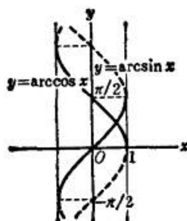


图 2



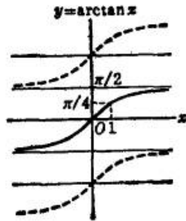


图 3

【双曲函数】 在双曲线 $x^2-y^2=1\ (x>0)$ 上取一点 P，设 O 为原点，A 为双曲线的顶点 $(1,0)$. 把线段 OA，OP 和双曲线上的弧 $\widehat{AP}$ 所围的域的面积记为 $\theta/2$. 将点 P 的坐标看作 θ 的函数,记为 $\cosh\theta$, $\sinh\theta$，则有

$$(8)\qquad \begin{aligned}\mathbf{cosh}\, x &= (e^x+e^{-x})/2,\\ \mathbf{sinh}\, x &= (e^x-e^{-x})/2.\end{aligned}$$

分别称为**双曲余弦** (hyperbolic cosine) 及**双曲正弦** (hyperbolic sine). 这两个函数，以及像三角函数那样，由它们导出的函数 **tanh** $x=\sinh x/\cosh x$ (**双曲正切** (hyperbolic tangent))，**coth** $x=\cosh x/\sinh x$ (**双曲余切** (hyperbolic cotangent))，**sech** $x=1/\cosh x$ (**双曲正割** (hyperbolic secant))，和 **cosech** $x=1/\sinh x$ (**双曲余割**(hyperbolic cosecant)) 等,统称为**双曲函数** (hyperbolic function). $\sinh x$, $\cosh x$ 的图象如图 2. 与此相对应,有时也把三角函数称为**圆函数**(英 circular function 德 Kreisfunktion).

如果引进 **Gudermann 函数** (Gudermannian)

$$\begin{aligned}\theta &= \mathrm{gd}\, u = 2\arctan e^u-\pi/2,\\ u &= \mathrm{gd}^{-1}\theta = \log|\tan\theta+\sec\theta|\\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta},\end{aligned}$$

则双曲函数能变换为三角函数. 例如,

$$\sinh u=\tan\theta,\quad \cosh u=\sec\theta,\quad \tanh u=\sin\theta$$

等等.

【复变量初等函数】 (→公式 10) 1) 指数函数. 将(4)式中的变量 x 换为复变量 z，则(4)对所有有限值都收敛,从而给出一个仅在无穷远点处具有本性奇点†的 z 的整函数†. 这就是复变量 z 的指数函数 e^z，它满足和(1)相同的**加法定理**(addition theorem): $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$，并成为实变量的指数函数的解析开拓†. 当 z 为纯虚数 iy 时，**Euler 公式**

$$(9)\qquad e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

成立. 如图 4 所示，$w=e^z$ 给出了 z 平面到 w 平面的一个保角映射，它把 z 平面上的虚轴映射成 w 平面 $(w=u+iv)$ 上的单位圆周. 对于一般的 $z=x+iy$ (x, y 为实数)，我们有 $e^z=e^xe^{iy}$，因而 e^z 是以 $2\pi i$ 为基本周期的单周期函数†.

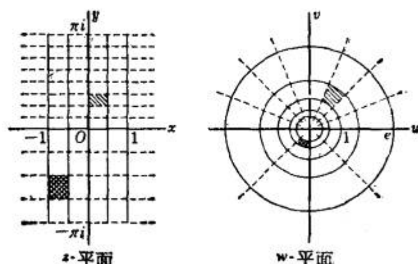


图 4

2) 对数函数. 复变量 z 的对数函数 $\log z$ 是 e^z 的反函数，是仅在原点和无穷远点处具有对数奇点† 的无穷多值的解析函数. 设其一值为 $\log z$，则 $\log z+2n\pi i$ (n 是任意整数)就是它的所有可能的值. $\log z$ 的**主值** (principal value) 常取作 $\log r+i\theta$，这里，$z=re^{i\theta}$ ($r=|z|$，θ 为 z 的幅角) 而 $0\leqslant\theta<2\pi$ (有时也取 $-\pi<\theta\leqslant\pi$). $\log z$ 的主值也往往记为 **Log** z. (5)式给出它的一个函数元素†. 把(3)式中的 x 换为复数 z，此式仍成立. 绕原点一周时，$1/z$ 的积分增加了 $2\pi i$，由此可以证明 $\log z$ 的多值性.

3) 幂函数. 一般地，对于复数 a，**幂** (power) a^z 定义为 $\exp(z\log a)$，z^a 定义为 $\exp(a\log z)$. 只有当 a 为有理数时，z^a 才成为代数函数,在其他情形,它是第二类初等函数.

4) 三角函数、反三角函数、双曲函数. 复变量的三角函数、反三角函数、双曲函数等,都能作为同名的实变量函数的解析开拓而得到. 例如，$\sin z$，$\cos z$ 分别定义为形如(6)，(7)的幂级数. 它们是整函数，且分别在 $n\pi$，$(n-1/2)\pi$ (n为整数) 处有一阶零点，还能表成 Weierstrass 无穷乘积 (→公式 10 VI). $\tan z$，$\cot z$，$\sec z$，$\operatorname{cosec} z$ 是 z 的亚纯函数†,且能表示为 Mittag-Leffler 部分分式(→公式 10 IV，V). 从 (8),(9)可得:

$$(10)\qquad \begin{aligned}\cos z &= (e^{iz}+e^{-iz})/2,\\ \sin z &= (e^{iz}-e^{-iz})/2i,\end{aligned}$$

$$\cosh z = \cos iz, \quad \sinh z = (\sin iz)/i.$$

(10)式也称为 **Euler 公式**. 若使用复数,则三角函数和双曲函数都能由指数函数合成,反三角函数能由对数函数合成,它们都是第一类初等函数. 本条开头的 Liouville 定义不用说是从复变量的观点整理出来的. 另外初等函数的反函数不一定是初等函数(例如, Kepler 方程† $y = x - a\sin x$ 的反函数).

初等函数导数还是初等函数. 但初等函数的不定积分不一定是初等函数. 有理函数和亏格† 0 的代数函数的不定积分还是初等函数. 三角函数的有理函数的积分也是如此. 关于初等函数的积分在什么条件下还是初等函数这个问题, Liouville 作过深入的研究.

【参】 [1] 高木貞治,解析概論,岩波,第三版 1961; [2] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Fonctions d'une variable réele, chap. III, Fonctions élémentaires, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1948, 第二版, 1958; [3] 黒河龍三,初等関数に関する Liouville の研究,数物会誌, **1** (1927), 17—27, 146—155, **3** (1929), 8—18.

拟解析函数 [英 quasi-analytic function 法 fonction quasi-analytique 德 quasianalytische Funktion 俄 квазианалитическая функция 日 準解析関数] 实解析函数†是 C$^\infty$ 类函数†, 在属于它的定义域的每个点的邻域内可以表示为 Taylor 展开式. 然而, 不是实解析函数的 C$^\infty$ 类函数的例子很多, 正是由于它的多样性, C$^\infty$ 类函数在解决各种问题时有很多方便之处 (→微分流形[单位分解]). 另一方面, 对于 C$^\infty$ 类函数族中具有实解析函数某些性质的似解析函数族, 自进入二十世纪以来, 进行了大量的研究. 本条前半部分论述 C$^\infty$ 类函数, 后半部分阐释拟解析函数.

【C$^\infty$ 类函数】 如果定义于实 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 Ω 上的 n 个变量的实值函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 任意次连续可微, 则称 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为 Ω 上的 **C$^\infty$ 类函数** (function of class C$^\infty$). 定义于 Ω 上的 C$^\infty$ 类函数的全体所成的集合以 $C^\infty(\Omega)$ 表示. $C^\infty(\Omega)$ 构成实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的代数†. 定义于 $\boldsymbol{R}^n$ 的闭集 F 上的连续函数 f 为 F 上的 C$^\infty$ 类函数是指, 存在 F 的开邻域 U 和 $g \in C^\infty(U)$, 使得 $f = g|F$. 这个定义与下列表述是等价的 (H. Whitney [5]): 对于任意的多重指标 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, 能够求得 F 上的一个连续函数 $f^\alpha(x_1, \cdots, x_n)$, 使得

i) $f^0(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$,

ii) 对于任意的自然数 r 以及满足 $|\alpha| \leqslant r$ 的所有多重指标 α,

$$\lim_{y \to x} \frac{1}{\|y - x\|^{r-|\alpha|}} \Big| f^\alpha(x) - \sum_{|\alpha+\beta| \leqslant r} f^{\alpha+\beta}(x) \frac{(x-y)^\beta}{\beta!} \Big| = 0$$

成立(这里 $\|\ \|$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的距离).

【C$^\infty$ 类函数的局部理论】 在 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 中定义如下的等价关系 $\sim$: $f \sim g \Leftrightarrow$ 存在原点的某个邻域 U, 使得 $f|U = g|U$. 用这个等价关系将 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 分类所得的代数记作 $\mathscr{E}_n$. $\mathscr{E}_n$ 的元素称为 C$^\infty$ 类函数关于原点的芽†. 我们以 $\tilde{f}$ 表示 $f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 的芽. 对于 $\tilde{f} \in \mathscr{E}_n$, 使 f 的以原点为中心的**形式 Taylor 展开** (formal Taylor expansion) $\sum (D^\alpha f(0)/\alpha!) x^\alpha$ (其中 $D^\alpha f$ 表示 $(\partial^{r_1+\cdots+r_n} f)/(\partial^{r_1} x_1 \cdots \partial^{r_n} x_n)$, $\alpha = (r_1, \cdots, r_n)$) 与之对应, 便可得到从 $\mathscr{E}_n$ 到 n 个变量的形式幂级数环† $\boldsymbol{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 的一个同态 τ. τ 是全射, 但不是单射. 令 $\Lambda_n = \tau^{-1}(0) \subset \mathscr{E}_n$, 如果函数 f 的芽 $\tilde{f}$ 属于 Λ_n, 则称 f 为**平坦函数** (flat function). 例如, 定义一个函数它在原点处取值为 0, 在原点以外为 $\exp(-1/x^2)$, 这样定义的 $\boldsymbol{R}^1$ 上的 C$^\infty$ 类函数, 便是平坦函数的一个例子. 详细考察 $\mathscr{E}_n$ 与 $\boldsymbol{R}[x_1, \cdots, x_n]$ 之间的关系, 就能证明**关于 C$^\infty$ 类函数的 Weierstrass 预备定理**. 即设 $\tilde{F}(x_1, \cdots, x_n) \in \mathscr{E}_n$, 且 $\tilde{F}(0, \cdots, 0, x_n) = x_n^p \tilde{g}(x_n)$ ($\tilde{g} \in \mathscr{E}_1$, $g(0) \neq 0$), 则任意的 $\tilde{f} \in \mathscr{E}_n$ 可表示为

$$\tilde{f} = \tilde{F}\tilde{Q} + \tilde{R},$$

其中 $\tilde{Q} \in \mathscr{E}_n$, $R = \sum_{i=0}^{p-1} r_i(x_1, \cdots, x_{n-1}) x_n^i$, 而 $r_i \in \mathscr{E}_{n-1}$ (B. Malgrange [3]).

设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为关于 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的 C$^\infty$ 类对称函数, 则存在芽 $\tilde{g} \in \mathscr{E}_n$, 使 $\tilde{f}(x_1, \cdots, x_n) = \tilde{g}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ 成立. 这里 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ 为关

于 $x_1, \cdots, x_n$ 的基本对称多项式[†] (G. Glaeser, Malgrange). 设 $\tilde{f} \in \mathscr{E}_1$ 满足 $f(x) = f(-x)$, 则存在芽 $\tilde{g} \in \mathscr{E}_1$, 使得 $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x^2)$(H. Whitney).

【整体结果】 n 个变量的情形. 当 $C^\infty(\Omega)$, 对于所有偏导数具有在紧集上均一致收敛的拓扑时, 它就成为 Fréchet 空间[†]. 设 $C^\infty(\Omega)$ 中的两个理想 J, J_1 关于此拓扑为闭集. 此时, $J = J_1$ 的充分必要条件是, 在所有点 $x \in \Omega$ 处, $\tau_x(J) = \tau_x(J_1)$ 成立. 这里 τ_x 为 $C^\infty(\Omega)$ 到形式幂级数环的一个映射, 它使 $C^\infty(\Omega)$ 的每个函数对应到该函数的以 x 为中心的形式 Taylor 展开 (Whitney).

一个变量的情形. 特别地, 关于一个变量的 C^∞ 类函数, 有来自各种不同观点的一些研究. 以下,设 $f(x)$ 为定义在区间 $I = [0, 1]$上的 C^∞ 类函数. 如果 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1, f'(0) = \cdots = f^{(r-1)}(0) = 0$,则存在不依赖于 f 与 r 的常数 k, 使

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{\sqrt{m_2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[r]{m_r}} < k$$

成立,其中 $m_i = \sup\{|f^{(i)}(x)| \,|\, x \in I\}$(É. Borel). 类似的不等式,也曾由 A. H. Колмогоров, A. Gorny-H. Cartan 所得到. 设 A 是实数的任一可数集, 如果对任意的 $x \in I$,可确定一自然数 $r(x)$, 使得 $f^{(r(x))}(x) \in A$, 则这样的 $f(x)$ 必是一个多项式([1]). $f(x)$ 以点 $x_0 \in I$ 为中心的形式 Taylor 展开可以分为在 x_0 的邻域内收敛于 $f(x)$ 的情形,收敛半径为 0 的情形,以及其他情形(即虽然在 x_0 的邻域内收敛, 但是未必收敛于 $f(x)$ 的情形). 按照任意的点 $x_0 \in I$ 属于这三种情形的某一种, 区间 I 可以表为没有共同点的集合 $S_1^{(f)}$, $S_2^{(f)}$, $S_3^{(f)}$ 的并. $S_1^{(f)}$ 为开集, $S_2^{(f)}$ 为 G_δ 集, $S_3^{(f)}$ 为第一范畴的 F_σ 集. 反之,如果给出区间 I 的由开集、G_δ 集和第一范畴的 F_σ 集所作的任意的划分 $I = S_1 + S_2 + S_3$,则必有某个 $f \in C^\infty(I)$,使 $S_i = S_i^{(f)} (i = 1, 2, 3)$ 成立([4]).

【C^∞ 类函数与实解析函数的关系】 以 $C^\omega(I)$ 表示 I 上的实解析函数[†]的全体所成的集合. $C^\omega(I)$ 是 $C^\infty(I)$的子代数. 在上述结果中令 $S_1 = \varnothing$,可知存在 $f \in C^\infty(I)$,使在任一点的邻域, 都不存在与 f 相同的解析函数. 这种函数在 $C^\infty(I)$ 中稠密分布. $f \in C^\infty(I)$ 属于 $C^\omega(I)$ 的充分必要条件是, 如果适当选取正数 k, 则

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant k^n n!, \quad x \in I, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

成立 (**Pringsheim 定理**). 又如果对于每个点 $x \in I$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 成立,则 $f \in C^\omega(I)$ (С. Н. Бернштейн). 对于一般的开集 $\Omega(\subset \boldsymbol{R}^n)$, Ω 上的实解析函数的全体 $C^\omega(\Omega)$ 在 $C^\infty(\Omega)$ 中稠密 (多项式逼近定理). 这个结果,即使把 $C^\infty(\Omega)$ 的拓扑换为较强拓扑时也成立 (Whitney [1]). 设 $f \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi \in C^\omega(\Omega)$. 此时, 满足 $f = g\varphi$ 的 $g \in C^\infty(\Omega)$ 存在的充分必要条件是, 对于任意的点 $x \in \Omega$, $\tau_x(f)$ 在形式幂级数环中能为 $\tau_x(\varphi)$ 所整除(S. Łojasiewicz, Malgrange [3]).

【拟解析函数】 拟解析函数的研究, 是以考察解析函数的特征为其开端的. Borel 引进了单演函数,它是复平面的一般点集(不一定是域)上的可微函数 (→解析函数[解析函数概念的历史及其推广]). 与复解析函数相类似, 这种函数也能由它在定义域内任一曲线上的值唯一确定. 用这样的性质定义拟解析函数族虽属可能,但通常关于单实变量函数却是依据 C^∞类函数的高阶导数的性态来进行讨论的.

一般地,对于 $C^\infty(I)$ 的子集 B, 如果上面定义过的映射 $\tau_x: B \to \boldsymbol{R}\{x\}$ 在 I 的每个点处为单射,则称 B 为**拟解析函数族**,或由于与微分有关而称为**拟解析的 $\boldsymbol{D}$**, 属于 B 的函数称为**拟解析函数**. 特别地,通过限定 $\tau_x(B)$ 的象以确定拟解析函数的一个族是中心课题.

设 $\{M_n\}$ 为正数序列,以 $C(M_n)$ 表示区间 I 上满足下述条件的 C^∞ 类函数 f 所成的族: 存在常数 $k = k(f)$, 使得

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant k^n M_n, \quad x \in I, \quad n = 0, 1, 2, \cdots;$$

于是上述 Pringsheim 定理意味着 $C(n!) = C^\omega(I)$.

1912 年 J. Hadamard 提出了这样的问题: 对 $\{M_n\}$ 给出何种条件,就能使 $\tau_x: C(M_n) \to$

$\boldsymbol{R}\{x\}$ 成为单射,即 $C(M_n)$ 成为拟解析函数族([8]). 对这个问题, A. Denjoy 指出, $M_n=(n\log^1 n\log^2 n\cdots\log^p n)^n$ 即可(这里设 $\log^1 n=\log n$, $\log^p n=\log(\log^{p-1}n)$ $(p=2,3,\cdots)$)([9]). 以后他更证明,一般地说, $\sum M_n^{-1/n}=\infty$ 即可. 为使 $C(M_n)$ 为拟解析函数族的充分必要条件是由 T. Carleman 所给出的([10]), 后来, A. Ostrowski-T. Bang 给出了其他形式的充分必要条件([11], [12]). 即, $C(M_n)$ 是区间 (a,b) 上的拟解析函数族的充分必要条件是, 1) 令 $\beta_n=\inf_{k>n} M_k^{1/k}$ 时, $\sum\beta_n^{-1}=+\infty$ (Carleman); 或 2)令 $T(r)=\sup_{n>1}\frac{r^n}{M_n}$ 时,

$$\int^{\infty}\frac{\log T(r)}{r^2}dr=\infty$$

(Ostrowski-Bang). S. Mandelbrojt, Bang 还给出了别的充分必要条件([12], [13]). 关于这条定理, 根据 Bang 在 [12] 或 [14] 中提出的想法所作的证明最为简单.

与以上定理相联系,如果正数序列 $\{M_n\}$ 满足 $\sum(M_n/M_{n+1})<\infty$, 则对 $\alpha>0$, 存在函数 f, 它在全空间 $(-\infty,\infty)$ 上属于 $C(M_n)$ 且有 $f(0)>0$, $f^{(n)}(\pm\alpha)=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 又对 $0<\alpha<\beta$ 存在 $f\in C(M_n)$, 使得 $f(0)>0$, $f^{(n)}(x)=0$ $(\alpha\leqslant x\leqslant\beta,\ n=0,1,2,\cdots)$([15]).

推广上述问题,设给定区间 I, 正整数的递增序列 $\{\nu_n\}$ 和 $\{M_n\}$, 则对属于 $C(M_n)$ 的 C^∞ 类函数 f, 为使 $f\to\{f^{(\nu_n)}(x_0)\}$ 是单射, $\{M_n\}$, $\{\nu_n\}$ 应具备什么条件, 这就成为一个问题. 具有这种性质的函数族称为**广义 (ν_n) 拟解析的** (quasi-analytic (ν_n) in the generalized sense) 函数族. 此外,对于两个正数序列 $\{M_n\}$ 与 $\{M'_n\}$, $C(M_n)$ 与 $C(M'_n)$ 之间的包含关系也是一个问题. 特别是, 关于 $C(M_n)$ 与 $C(n!)=C^\omega(I)$ 二解析函数族之间的关系, [14]中有详细的论述, 但有关 $C(M_n)$ 与 $C(M'_n)$ 之间的关系, 尚未解决的问题颇多.

拟解析函数同分析中的各种问题, 特别同复变量解析函数、Fourier 级数、Fourier 积分、Dirichlet 级数以及渐近展开等, 有很深刻的关系(关于这些问题→[16], [14], [7]).

【参】 关于 C^∞ 类函数: [1] R. P. Boas, Jr., A primer of real functions, The Carus Math. Monographs, John Wiley, 1960; [2] G. Glaeser, Fonctions Composées différentiables, Ann. of Math., **77** (1963), 193—209; [3] B. Malgrange, Le théorème de préparation en géométrie différentiables, Séminaire H. Cartan, 1962—1963, Exp. 11, Inst. H. Poincaré, Univ. Paris, 1964; [3A] B. Malgrange, Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966; [4] H. Salzmann-K. Zeller, Singularitäten unendlich oft differenzierbarer Funktionen, Math. Z., **62** (1955), 354—367; [5] H. Whitney, Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets, Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 63—89; [6] H. Whitney, Differentiable even functions, Duke Math. J., **10** (1943), 159—160; [7] H. Whitney, On ideals of differentiable functions, Amer. J. Math., **70** (1948), 635—658. 关于拟解析函数: [8] J. Hadamard, Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, Bull. Soc. Math. France, **40** (1912), 28—29; [9] A. Denjoy, Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, C. R. Acad. Sci. Paris, **173** (1921), 1329—1331; [10] T. Carleman, Les fonctions quasi-analytiques, Gauthier-Villars, 1926; [11] A. Ostrowski, Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwickelungen, Acta Math., **53** (1929), 181—266; [12] T. Bang, Om quasi-analytiske Funktioner, Thesis, Univ. of Copenhagen, 1946; [13] S. Mandelbrojt, Analytic functions and classes of infinitely differentiable functions, The Rice Institute Pamphlet 29, no. 1, 1942; [14] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, régularisation des suites, applications, Gauthier-Villars, 1952; [15] S. Mandelbrojt, Some theorems connected with the theory of infinitely differentiable functions, Duke Math. J., **11** (1944), 341—349; [16] S. Mandelbrojt, Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Gauthier-Villars, 1935; [17] R. E. A. C. Paley-N. Wiener, Fourier transformations in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1934.

积分学 [英 integral calculus 法 calcul intégral 德 Integralrechnung 俄 интегральное исчисление 日積分法] 【Riemann 积分】 设 $f(x)$ 为定义在区间 $[a,b]$ 上的取实数值的有界函数. 在 $[a,b]$ 内取有限个点 x_i, 使得 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 即把区间 $[a,b]$ 分割为子区间 $I_i=[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\cdots,n)$. 因为这个分割法由所给分点的集合 $D=\{x_i\}$ 唯一确定,所以称它为**分割** (division into subintervals) D. 设 $M_i=\sup_{x\in I_i}f(x)$, $m_i=\inf_{x\in I_i}f(x)$, 令

$$\bar{\sigma}(D)=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}),$$

$$\underline{\sigma}(D)=\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}),$$

$\bar{\sigma}(D)$ 关于 D 的下确界和 $\underline{\sigma}(D)$ 关于 D 的上确界，分别记为 $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ 和 $\underline{\int_a^b} f(x)dx$，并依次称为 **Riemann 上积分** (Riemann upper integral) 和 **Riemann 下积分** (Riemann lower integral). 特别当二者相等时，其值记为 $\int_a^b f(x)dx$，称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分** (Riemann integral)，此时并称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 **Riemann 可积的**(英 integrable in the sepse of Riemann 法 sommable). 通常如果单说**积分**(integral)，就是指 Riemann 积分而言. $f(x)$称为**被积函数**(integrand)，a 和 b 分别称为**下限** (lower limit) 和**上限** (upper limit). 所谓从 a 到 b **积分** (integrate) f，指的是求得值 $\int_a^b f(x)dx$ 的过程.

Darboux 定理：设 $\delta(D)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}(x_i-x_{i-1})$. 对任意的正数 ε，若存在正数 δ，使得 $\delta(D)<\delta$ 时，则下列不等式成立：

$$\left|\bar{\sigma}(D)-\overline{\int_a^b} f(x)dx\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\underline{\sigma}(D)-\underline{\int_a^b} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

用极限符号，这一事实可表示为

$$\lim_{\delta(D)\to 0}\bar{\sigma}(D)=\overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

$$\lim_{\delta(D)\to 0}\underline{\sigma}(D)=\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

根据 Darboux 定理，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件是：对任意的正数 ε，若存在正数 δ，使得当 $\delta(D)<\delta$ 时，就有

$$\bar{\sigma}(D)-\underline{\sigma}(D)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\varepsilon$$

成立.

称 M_i-m_i 为 f 在 I_i 上的**振幅**(oscillation). 称 $\bar{\sigma}(D)$ 和 $\underline{\sigma}(D)$ 为 **Darboux 和** (Darboux's sum). 显然，若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则对任意的正数 ε，存在正数 δ，使得对满足 $\delta(D)<\delta$ 的所有 $D=\{x_i\}$ 和每个 $I_i(i=1,2,\cdots,n)$ 中的任意的 ξ_i，下列不等式都成立：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

常称和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 为 **Riemann 和** (Riemann sum) 或**积和** (sum of products). 在 $[a,b]$ 上连续的函数，或有有限个不连续点的有界函数，都是可积的. 即使是有无限多个不连续点的有界函数，如果它的不连续点的集合能被全长可为任意小的有限个小区间所覆盖，则该函数在 $[a,b]$ 上也可积. 一般地，区间 $[a,b]$ 上的有界函数为可积的充分必要条件是它的不连续点的集合的(Lebesgue)测度†等于零. $[a,b]$ 上的单调†(从而有界)函数和有界变差函数†都是可积的. 如果一个函数在区间 $[a,b]$ 上可积，那么它在 $[a,b]$ 的任一子区间上也是可积的.

【积分的基本性质】 设 $[a,b]$ 上可积函数的全体所成的集合为 $\boldsymbol{I}$，若 $f,g\in\boldsymbol{I}$，则 $\alpha f+\beta g\in\boldsymbol{I}$ (α,β 为任意常数)，$fg\in\boldsymbol{I}$，$\min\{f,g\}\in\boldsymbol{I}$，$\max\{f,g\}\in\boldsymbol{I}$，若还有 $|g|>A>0$，则 $f/g\in\boldsymbol{I}$；若 $f\in\boldsymbol{I}$，则 $|f|\in\boldsymbol{I}$；若 $f_n\in\boldsymbol{I}$，且 f_n 一致收敛†于 f，则 $f\in\boldsymbol{I}$. 对应于这些性质，下列公式成立：

1）线性：

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx$$
$$=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx,$$

α,β 为常数.

2）单调性：若 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0.$$

特别是，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的一点 x_0 处连续且 $f(x_0)>0$，则

$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

3）关于区间的可加性：若 a,b,c 是属于 $f(x)$ 的可积区间上的点，且 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

若约定

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx,$$

则无论 a, b, c 的大小关系如何，上面的公式总成立。

另外，若 $a < b$，则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

如果用级数的部分和替换 $f_n(x)$，则下面的定理成立：若定义在 $[a, b]$ 上的可积函数项级数 $\sum a_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $s(x)$，则可**逐项积分**（termwise integration），即

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n(x)dx,$$

而且 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x a_n(t)dt$ 也在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $\int_a^x s(t)dt$. 设 $\sum a_n(x)$ 收敛于 $s(x)$，但不是一致收敛，再设 $a_n(x)$，$s(x)$ 可积，且 $s_n(x)$ 为部分和，若存在与 n 无关的 M，使 $|s_n(x)| < M (x \in [a, b])$，则上述定理仍然成立（C. Arzelà）。

第一中值定理（first mean value theorem）：若 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数，而 $\varphi(x)$ 是在 $[a, b]$ 上保持符号不变的可积函数，则存在 $\theta(0 < \theta < 1)$，使得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a + \theta(b - a))\int_a^b \varphi(x)dx.$$

特别当 $\varphi(x) = 1$ 时，就有

$$\int_a^b f(x)dx = f(a + \theta(b - a))(b - a).$$

第二中值定理（second mean value theorem）：若 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上为正的单调递减函数，$\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上为可积函数，则存在 $\eta(a < \eta \leqslant b)$，使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a + 0)\int_a^\eta \varphi(x)dx.$$

一般地，当 $f(x)$ 是单调函数但不一定为正时，也存在 $\eta(a < \eta < b)$，使

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a + 0)\int_a^\eta \varphi(x)dx + f(b - 0)\int_\eta^b \varphi(x)dx$$

成立（通常认为 $a \leqslant \eta \leqslant b$，但实际上只要 $a < \eta < b$ 即可（岡村博，数学，**1**（1947），38））。

设在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$，$f(x)$ 的图象和 $x = a$，$x = b$ 以及 x 轴围成的图形为 F，则可以把 $\bar{\sigma}(D)$，$\underline{\sigma}(D)$ 看作分别从外和从内逼近 F 的面积的多边形面积（图 1）. $f(x)$ 为 Riemann 可积等价于 F 为 Jordan 可测；而 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 就是 F（关于 Jordan 测度†）的面积。

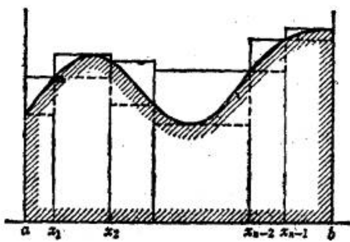


图 1

【微分和积分的关系】 设 a 为 $f(x)$ 的可积区间上的一个定点，x 为其上任一点，则 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ 成为 x 的函数，称为 $f(x)$ 的**不定积分**（indefinite integral）. 与此相对应，上述具有固定积分区间的积分，称为**定积分**（definite integral）. $F(x)$ 在所述区间内连续且有界变差. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $F(x)$ 在该点可微且 $F'(x_0) = f(x_0)$. 一般来说，当存在函数 $G(x)$，使 $G'(x) = f(x)$ 恒成立时，就称 $G(x)$ 为 $f(x)$ 的**原函数**（primitive function）. 若 $f(x)$ 连续，则 $f(x)$ 的不定积分 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 其次，若 $G(x)$ 在某区间内是 $f(x)$ 的原函数，则其他原函数都能表示为 $G(x) + C$ 的形式（C 为常数），称 C 为**积分常数**（integral constant）. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$G(x)$ 是它的任一原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

成立. 这称为**微积分基本定理**（fundamental theorem of the infinitesimal calculus）（→公式 9）.

从微分公式可得下列积分公式。

分部积分法(integration by parts)：设 $f(x)$，$g(x)$ 定义在 $[a, b]$ 上，并存在连续的导数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

更一般地，若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则

$$\int_a^b g(x)\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)dx = \int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)\left(\int_a^x g(t)dt\right)dx.$$

积分变量的更换 (change of variable)：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，$x=\varphi(t)$ 及 $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续，而 $a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$($a\leqslant\varphi(t)\leqslant b$)，则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

【广义积分】 积分的意义，能推广到被积函数或者积分区间是无界的情形。设 $f(x)$ 仅在 $[a, b]$ 的右端 b 处无界，亦即对任意的 $0<\varepsilon<b-a$，$f(x)$ 在 $[a, b-\varepsilon]$ 上有界可积。当 $\varepsilon\to 0$ 时，若 $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ 有有限的极限值，则把这个极限记作 $\int_a^b f(x)dx$，并称它为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**广义积分**或**非正常积分** (improper Riemann integral)。例如，设 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续，当 $x\to b$ 时，$f(x)=O((b-x)^\alpha)$ ($-1<\alpha<0$，O 是 Landau 符号[†])，则 $\int_a^b f(x)dx$ 存在。在 a 处无界时也同样定义；当 $f(x)$ 在 a, b 处都无界时，如果存在点 c，$a<c<b$，使广义积分 $\int_a^c f(x)dx$ 和 $\int_c^b f(x)dx$ 存在，则我们定义 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx$，它与 c 的取法无关。若 $f(x)$ 仅在 $[a, b]$ 的有限个点 $c_1<c_2<\cdots<c_n$ 处无界，而在 $[c_i, c_{i+1}]$ ($i=1, \cdots, n-1$)，$[a, c_1]$，$[c_n, b]$ 上广义积分存在，则定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^b f(x)dx.$$

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内除一点 c 外是有界函数(即 $f(x)$ 在 c 的任一邻域外有界，但对任意的 $\varepsilon>0$，$f(x)$ 在 $[c-\varepsilon, c]$ 和 $[c, c+\varepsilon]$ 上均无界)，这时，即使 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$，$\lim\limits_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx$ 都不存在，但当令 $\varepsilon=\varepsilon'$ 时，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$ 却往往存在。这时，称此极限为积分的 **Cauchy 主值**(英 principal value, 法 valeur principale)，记为 p. v. $\int_a^b f(x)dx$ (法文记为 v. p.)。例如，p. v. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x}\right) = 0.$

【在无限区间上的积分】 当积分区间右端无界时，若对任取的 b ($a<b$)，$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，且当 $b\to\infty$ 时 $\int_a^b f(x)dx$ 有有限的极限，则定义此极限为 $\int_a^\infty f(x)dx$，称为 f 在 $[a, \infty)$ 上的广义积分(improper integral)。同样定义 $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$；还定义 $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$，它与 c 的取法无关。设 $f(x)$ 对任意的 b($>a$，a 为定值) 在 $[a, b]$ 上可积，若 $f(x)=O(x^\alpha)$ ($\alpha<-1$)，则 $\int_a^\infty f(x)dx$ 存在。一般地，对于 α, β ($-\infty\leqslant\alpha<\infty$, $-\infty<\beta\leqslant\infty$)，如果广义积分 $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ 存在，就称这广义积分**收敛** (converge)，否则就称它**发散**(diverge)。广义积分也满足关于积分的基本性质 1)，2)，3)。不过，即使函数 $f(x)$ 在区间 I 上的广义积分存在，在同一区间上 $|f(x)|$ 的积分却不一定存在(例：$f(0)=0$, $f(x)=(1/x)\sin(1/x)$ ($0<x\leqslant\pi$))。然而，若 $|f(x)|$ 的广义积分存在，则 $f(x)$ 的广义积分也存在且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|dx$ ($-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$)。这时称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是**绝对可**

积的(absolutely integrable). 又当$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}f(x)dx$存在时,称它为$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上的积分的**Cauchy 主值**(principal value).

设$f(x)$是定义在$[k,\infty)$(k为整数)上的单调递减并取正值的连续函数,则$\int_k^\infty f(x)dx$与$\sum_{\nu=k}^{\infty}f(\nu)$的收敛、发散性相同.

设$f_n(x)$为定义在无限区间$[a,\infty)$上的正的可积函数,以$f_n(x)$为项的级数,若对任意的$b>a$都有$\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{\infty}f_n(x)dx$,则$\int_a^\infty\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx$与$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^\infty f_n(x)dx$同时收敛或发散;若收敛,则下式成立:

$$\int_a^\infty\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^\infty f_n(x)dx.$$

在这定理中即使$f_n(x)$非正,若$\int_a^\infty\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|dx$或$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^\infty|f_n(x)|dx$收敛,则与上面同样的等式成立(→公式 9).

【重积分】 设函数$f(x,y)$在xy平面的区间$I=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$上有界,把区间$[a,b]$,$[c,d]$分割为$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$,$c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$,过分点作两坐标轴的平行线,把$I$分割为有限个子区间$I_{jk}=\{(x,y)|x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j,y_{k-1}\leqslant y\leqslant y_k\}$($j=1,\cdots,m;k=1,\cdots,n$). 将此分割记为$D$,令

$$M_{jk}=\sup_{(x,y)\in I_{jk}}f(x,y),\quad m_{jk}=\inf_{(x,y)\in I_{jk}}f(x,y),$$

$$\bar{\sigma}(D)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}M_{jk}(x_j-x_{j-1})(y_k-y_{k-1}),$$

$$\underline{\sigma}(D)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}m_{jk}(x_j-x_{j-1})(y_k-y_{k-1}).$$

当$\bar{\sigma}(D)$关于分割D的下确界与$\underline{\sigma}(D)$关于分割D的上确界相等时,就称$f(x,y)$在I上可积,把这个相等的值记为$\iint_I f(x,y)dxdy$,称为$f(x,y)$在区间I上的**二重积分**(double integral). 同样能定义n元函数的**n 重积分**(n-tuple integral)或**多重积分**(multiple integral)和可积性.

其次,设K为xy平面上任意的有界集,I为包含K的区间,$\varphi(x,y)$为K的定义函数,即

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in K,\\ 0, & (x,y)\in I-K.\end{cases}$$

用$\varphi(x,y)$代替$f(x,y)$,考虑$\bar{\sigma}(D)$关于D的下确界和$\underline{\sigma}(D)$关于D的上确界,可以证明这两个数与区间I的取法无关,分别称为K的**外面积**(outer area)和**内面积**(inner area). 当这两个值相等时,就称K**有确定的面积**(of definite area),而这个共同的值就称为K的**面积**(area). K有确定的面积的充分必要条件是K的边界†的外面积等于0. 其次,设$f(x,y)$是具有确定的面积的集合K上的有界函数,I是包含K的区间,考虑$f(x,y)$的扩张函数

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in K,\\ 0, & (x,y)\in I-K.\end{cases}$$

若$\varphi(x,y)$在I上可积,就称$f(x,y)$在K上是可积的,并定义$\iint_K f(x,y)dxdy=\iint_I\varphi(x,y)dxdy$,它与$I$的取法无关. 这时还往往称$K$为$f$的**积分域**(domain of integration). 虽然K的边界点可能是$\varphi(x,y)$的不连续点,但由于K有确定的面积,所以边界点集总能为总面积可以任意小的小区间所覆盖. 从而,在K的每个内点†处连续的有界函数在K上可积. 多重积分也满足关于一维积分的基本性质.

【多重积分和累积分】 设$f(x,y)$在区间$I=\{(x,y)|a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$上连续,则把$f(x,y)$看作$x$的函数,关于$x$从$a$到$b$积分,得到的是$y$的连续函数,再把它关于$y$从$c$到$d$积分,即得$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$,把它记为$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$,称为$f(x,y)$的**累积分**(repeated integral). 这时有

$$\iint_I f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

更一般地，设 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 为定义在 $[a, b]$ 上的连续函数，若 $f(x, y)$ 在 $K=\{(x, y)|a\leqslant x\leqslant b,\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$ 上有定义且连续，则下面的等式成立：

$$\iint_K f(x, y)dxdy=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x, y)dy.$$

当积分域K或被积函数无界时，在适当的条件下也能定义它的积分．例如，设 1) 能在K内取有确定面积的集序列 $\{K_n\}$，使 $K_1\subset K_2\subset\cdots$, $\bigcup K_n=K$, 2) $f(x, y)$ 在每个 K_n 上有界并可积，若当 $n\to\infty$ 时 $\iint_{K_n}f(x, y)dxdy$ 存在有限的极限，且此极限与满足 1), 2) 的集序列$\{K_n\}$的取法无关，就称 $f(x, y)$ 在K上可积，并定义 $\iint_K f(x,y)dxdy=\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{K_n}f(x,y)dxdy$. 这时，也说此积分收敛．若 $|f|$ 对于上述 1) 那样的某个集序列$\{K_n\}$存在有限的极限

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n}|f(x, y)|\,dxdy,$$

则 f 就在K上可积．设 $f(x, y)$ 定义在 $K=\{(x, y)|\alpha<x<\beta,\ \gamma<y<\delta\}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 不一定有限) 上且为非负连续，$f(x, y)$ 在K上可积，再设以广义积分作成的 $F(x)=\int_\gamma^\delta f(x, y)dy=\lim\limits_{c\downarrow\gamma, d\uparrow\delta}\int_c^d f(x, y)dy$ 存在，而且当 $c\downarrow\gamma$, $d\uparrow\delta$ 时关于 x 一致收敛，则也能定义 $\int_\alpha^\beta F(x)dx$, 且 $\iint_K f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta dx\int_\gamma^\delta f(x,y)dy$.

例如，若 $f(x, y)$ 满足上述条件，则

$$\int_a^\infty\int_b^\infty f(x, y)dxdy=\int_a^\infty dx\int_b^\infty f(x, y)dy.$$

【积分和微分的次序变更】 若 $f(x, y)$ 和 $\partial f(x, y)/\partial y$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$, $y_0-\eta\leqslant y\leqslant y_0+\eta$ 上连续，则能变更积分和微分的次序：

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx,\quad y=y_0.$$

其次，若这个式子对所有的$b(>a)$都成立，广义积分 $\int_a^\infty f(x, y)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x, y)dx$ 收敛，且关于 $|y-y_0|<\eta$ 上的 y, 当 $b\to\infty$ 时广义积分 $\int_a^\infty\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx$ 一致收敛，则有

$$\frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x, y)dx=\int_a^\infty\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx,\quad y=y_0.$$

另外还有各种关于变更次序的定理．以上只是就两个变量的情形做了阐述，同样的事实对 n 个变量的情形也成立．

【多重积分的变量更换】 设G为 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n(x)$ 内的有确定面积的有界域，设从包含G的闭包 $\bar{G}$的开集到另一 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n(y)$ 内有一个 C^1 类映射 $y(x)=(y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_n))$, 若 $f(y_1, \cdots, y_n)$ 在G的像B上连续，则下面的积分变量更换公式成立：

$$\begin{aligned}\int\cdots\int_B f(y_1, \cdots, y_n)dy_1\cdots dy_n&=\int\cdots\int_G g(x_1, \cdots, x_n)\\&\quad\times\left|\frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}\right|dx_1\cdots dx_n,\end{aligned}$$

其中 $g(x_1, \cdots, x_n)=f(y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_n(x_1, \cdots, x_n))$, $\frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}$ 是映射 $y(x)$ 的函数行列式†．通常此式在 $y_1,\cdots,y_n$ 函数无关†时使用，否则两端都为 0．对广义积分，例如积分是绝对收敛的情形，此公式也成立．

还有与本条有关的问题，如关于线积分、面积分、Stieltjes 积分、Lebesgue 积分、测度等→线积分和面积分、Lebesgue 积分、测度．

【参】 [1] 高木貞治，解析概論，岩波，第三版 1961; [2] 藤原松三郎，微分積分学 I, II, 内田老鶴圃，1934, 1939; [3] 亀谷俊司，初等解析学 I, II, 岩波，1953, 1958; [4] 一松信，解析学序説，上，下，裳華房，1962, 1963; [5] E. Landau, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, Noordhoff, 1934 (英译本：Differential and integral calculus, Chelsea, 1965); [6] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1948, 1951, 第二版，1958, 1961。

线积分和面积分 【英 curvilinear integral and surface integral　法 intégrale curviligne et intégrale surface　德 Kurvenintegral und Flächenintegral　俄 криволинейный интеграл и поверхнос-

тный интеграл 日 線積分，面積分] 函数（准确地说是微分形式†）沿着曲线、曲面的积分，分别称为**线积分**、**面积分**. 因为线积分可看作特殊的 Stieltjes 积分，所以，先从这儿说起. Stieltjes 积分是 Th. J. Stieltjes 把 Riemann 积分加以推广而定义的积分(1894). 这种积分是从连分数的研究建立起来的，但以后却成为考虑关于一般测度的积分的开端.

【Riemann-Stieltjes 积分】 设 $f(x)$, $\alpha(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上取实数值的有界函数，$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 是 $[a, b]$ 的一个分割（→积分学）. 作关于 $\alpha(x)$ 的 Riemann 和：

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i)),\ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}],$$

若当分割越来越细，使得 $\max(x_{i+1} - x_i) \to 0$ 时，此 Riemann 和收敛于一个确定的数，则称这个数为 $f(x)$ 关于 $\alpha(x)$ 的 **Riemann-Stieltjes 积分**(Riemann-Stieltjes integral)，或简称为 **Stieltjes 积分** (Stieltjes integral)，记作 $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$. Riemann 积分就是 $\alpha(x) = x$ 时的特殊情形.

(Riemann-) Stieltjes 积分，除具有可加性及积分的其他初等性质外，还具有下列性质：$\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ 对任意的连续函数 $f(x)$ 都存在的充分必要条件是 $\alpha(x)$ 为有界变差†. 由于这条定理，当我们说到 $f(x)$ 关于 $\alpha(x)$ 的 Stieltjes 积分时，通常就假定 $f(x)$ 是连续的，$\alpha(x)$ 是有界变差的. 然而即使 $f(x)$ 为有界变差，$\alpha(x)$ 为连续，也能定义 Stieltjes 积分. 若在 $[a, b]$ 上一致有界的连续函数序列 $f_n(x)$ 当 $n \to \infty$ 时收敛于连续函数 $f(x)$，则对于有界变差函数 $\alpha(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, d\alpha(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x).$$

再设 $\alpha_n(x)$ 是在 $[a, b]$ 内全变差† 为一致有界的有界变差函数序列，若在有界变差函数 $\alpha(x)$ 的连续点处有 $\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x) = \alpha(x)$，则对于 $[a, b]$ 上任意的连续函数 $f(x)$，

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, d\alpha_n(x) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$$

成立（Helly 定理).

若设 $\alpha(x)$ 为严格单调递增函数†，而 $\alpha(x)$ 的反函数为 $\beta(y)$，则有

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(\beta(y))dy,$$

这里右端为 Riemann 积分. 如果 $\alpha(x)$ 为有界变差函数，那么由于 $\alpha(x)$ 能表示为两个严格单调递增函数之差 $\alpha_1(x) - \alpha_2(x)$，所以若设 $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ 的反函数分别为 $\beta_1(y)$, $\beta_2(y)$，则有

$$(2)\qquad \int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_{\alpha_1(a)}^{\alpha_1(b)} f(\beta_1(y))dy - \int_{\alpha_2(a)}^{\alpha_2(b)} f(\beta_2(y))dy.$$

又若 $\alpha'(x)$ 存在且连续，则有

$$(3)\qquad \int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx.$$

【Lebesgue-Stieltjes 积分】 设 $\alpha(x)$ 为单调递增函数，$I = (x_1, x_2)$，作区间函数† $U(I) = \alpha(x_2 + 0) - \alpha(x_1 + 0)$. 因为 $U(I) \geqslant 0$，且具有可数可加性，所以用它能构造外测度并确定一个测度（→集函数，测度). $f(x)$ 关于这个测度的 Lebesgue 积分†，称为关于 $\alpha(x)$ 的 **Lebesgue-Stieltjes 积分** (Lebesgue-Stieltjes integral) 或 **Lebesgue-Radon 积分** (Lebesgue-Radon integral)，记为 $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$. 若 $\alpha(x)$ 是严格单调递增函数，$\beta(y)$ 是 $\alpha(x)$ 的反函数，则当(1)式左端是 Lebesgue-Stieltjes 积分，右端是 Lebesgue 积分时，此式仍然成立. 当 $\alpha(x)$ 为有界变差函数时，将它分解为二单调递增函数之差，则(2)式也成立. 若 $\alpha(x)$ 绝对连续†，则当(3)式右端是 Lebesgue 积分时，此式也成立.

关于 Stieltjes 积分，下面的定理成立：

分部积分法 (integration by parts). 若在 $[a, b]$ 上 $U(x)$, $V(x)$ 之一为有界变差函数，而另一个连续，则有

$$\int_a^b UdV + \int_a^b VdU = U(b)V(b) - U(a)V(a).$$

第二中值定理(second mean value theorem).

若 $U(x)$ 为单调递增函数，$V(x)$ 连续，则在 $[a, b]$ 内存在 ξ 使

$$\int_a^b U dV = U(a)(V(\xi) - V(a)) + U(b)(V(b) - V(\xi)).$$

【线积分】 从 $\boldsymbol{R}^1$ 的区间 $a \leqslant t \leqslant b$ 到 $\boldsymbol{R}^n$ 内的连续映射 $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$ 是有向†曲线. 对于在映射 $\varphi(t)$ 的像 C 的邻域 U 内定义的函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 的 Stieltjes 积分

$$(4)\qquad \int_a^b f(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)) d\varphi_i(t),\quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

称为 f 关于 x_i 沿 C 的**线积分**，记为 $\int_C f dx_i$. C 称为**积分周线**（contour）或**积分路线**（path of integration），$\varphi(a)$，$\varphi(b)$ 称为积分的**下端**、**上端**或**始点**(**起点**)，**终点**. 此外，f 关于表示线素的函数

$$\sqrt{(\varphi_1(t))^2 + \cdots + (\varphi_n(t))^2}$$

的 Stieltjes 积分，称为 f **关于线素的线积分**，记为 $\int_C f ds$. 若(4)的被积函数是 t 的有界变差函数，则能定义线积分. 特别若 C 是有(有限)长†曲线，则对于任意的连续函数 f 能定义线积分. 通常只处理这种情形. 对于在 U 上定义的微分形式 $\omega = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$，其线积分 $\int_C \omega$ 定义为 $\sum_{i=1}^n \int_C f_i dx_i$.

线积分关于被积函数是线性的. 又当 C_1 的终点是 C_2 的始点时，对于把它们连接起来的曲线 $C = C_1 + C_2$，**关于路线的加法性**

$$\int_C f dx_i = \int_{C_1} f dx_i + \int_{C_2} f dx_i$$

成立(把式中的 dx_i 换成 ds 也同样成立). 如果 $\varphi_i(t)$ 是单调递增函数，则单调性成立，即当 $f \leqslant g$ 时，有 $\int_C f dx_i \leqslant \int_C g dx_i$；关于线素的线积分，单调性也成立.

特别当 $n = 2$ 时，$\boldsymbol{R}^2$ 可恒等于复平面† $\boldsymbol{C} = \{z = x + iy\}$. 关于复函数 $f(z) = u(z) + iv(z)$，将

$$\left\{\int_C u(z)dx - \int_C v(z)dy\right\} + i\left\{\int_C v(z)dx + \int_C u(z)dy\right\}$$

记为 $\int_C f(z)dz$，称为**复积分**(integral in complex domain). 关于复积分与复函数的联系→全纯函数.

【面积分】 由 $\boldsymbol{R}^m$ 的域 G 到 $\boldsymbol{R}^n (m < n)$ 内的正则 C^1 类映射† $\xi(u) = (\xi_1(u_1, \cdots, u_m), \cdots, \xi_n(u_1, \cdots, u_m))$ 所生成的像 S，称为 m 维**光滑曲面**(smooth surface). 设 U 为 S 在 $\boldsymbol{R}^n$ 内的一个邻域，对于定义在 U 上的连续函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，把多重积分

$$(5)\qquad \int\cdots\int_G f(\xi_1(u), \cdots, \xi_n(u)) \times \frac{D(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})}{D(u_1, \cdots, u_m)} du_1 \cdots du_m,$$

$$(i_1, \cdots, i_m) \subset (1, \cdots, n)$$

称为 f 关于 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ 沿 S 的**面积分**，记为 $\int_S f dx_{i_1} \cdots dx_{i_m}$(有时也写 m 个积分号). 将(5)中的 Jacobi 行列式 $D(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})/D(u_1, \cdots, u_m)$ 换以表示 S 的面素的量，即以

$$\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_m} \left(\frac{D(x_{i_1}, \cdots, x_{i_m})}{D(u_1, \cdots, u_m)}\right)^2\right)^{1/2}$$

代换后所得的积分，称为**关于面素的面积分**. 记为 $\int_S f dS$ 或 $\int_S f d\sigma$. 同样能定义 $\boldsymbol{R}^n$ 内 m 次微分形式的面积分. 当 $m = 1$ 时，就是前述的线积分. 就像把线积分推广为 Stieltjes 积分那样，在不假定 $\xi(u)$ 为 C^1 类的情形下，也有几种推广面积分概念的理论.

【Stokes 公式】 设 S 为 $\boldsymbol{R}^n$ 内的 $m(\leqslant n)$ 维光滑曲面，∂S 为对应于它的边界的 $m-1$ 维面，设 ω 为 C^1 类 $m-1$ 次微分形式，$d\omega$ 为其外微分†，则等式 $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$ 成立，称它为 **Stokes 公式**或 **Green-Stokes 公式**(关于一般的微分流形上的 Stokes 公式→微分流形). 作为这个定理的特殊情形，可以得到下列古典的定理:

1) 平面域的情形. 设 x, y 平面上的有界

域D是由有限条光滑曲线C围成的，并规定了C的正方向，对$\bar{D}$上的C^1类微分形式 $\omega = Pdx + Qdy$，因为

$$d\omega = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dx \wedge dy$$

所以得到

$$(6) \quad \int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

称它为 **Green 公式**或者**平面 Gauss 公式**. 又若P, Q为完全可微的†，右端的被积函数连续（即使 $\partial Q/\partial x$, $\partial P/\partial y$ 本身不连续），则(6)式仍成立（E. Goursat）.

2）三维空间的域的情形. 设 x, y, z 空间的有界域D是由有限张光滑曲面S围成的，对$\bar{D}$上的C^1类向量场 $\boldsymbol{V} = \langle P, Q, R\rangle$，若设 $\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$，则有

$d\omega = (\partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z)dx\wedge dy\wedge dz$，

从而得到

$$(7) \quad \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$= \iiint_D \operatorname{div} \boldsymbol{V}\, dxdydz$$

$$= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

称它为 **Gauss 公式**或 **Остроградский 公式**或**散度定理** (divergence theorem). 设S的单位外法向量为 $\boldsymbol{n}$，则(7)的左端等于面积分$\iint_S (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n})d\sigma$，它表示通过$S$的向量流量†.

3）三维空间内的有边界曲面的情形. 设有 x, y, z 空间内的光滑曲面 $\bar{S}: x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ $((u, v)\in \bar{G})$，参变数的定义域 $\bar{G}$ 的边界由有限条光滑曲线Γ组成，规定Γ的正方向，设C为其像曲线（S 的边界）对于S上的C^1类向量场 $\boldsymbol{V} = \langle P, Q, R\rangle$，设$S$的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$，C的单位切向量为 $\boldsymbol{t}$，则对于 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$，有

$$d\omega = (\partial R/\partial y - \partial Q/\partial z)dy\wedge dz + (\partial P/\partial z - \partial R/\partial x)dz\wedge dx + (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)dx\wedge dy.$$

从而得到

$$(8) \quad \iint_S (\operatorname{rot}\boldsymbol{V}, \boldsymbol{n})d\sigma = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right)$$

$$= \int_C (Pdx + Qdy + Rdz)$$

$$= \int_C (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{t})ds.$$

(8)式称为 **Stokes 公式** (→公式 3 III).

【参】[1] 高木貞治，解析概論，岩波，第三版 1961；[2] 藤原松三郎，微分積分学 II，内田老鶴圃，1939；[3] 一松信，解析学序説，下，裳華房，1963. 关于 Stieltjes 积分，[4] H. L. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 1928, chap. II; [5] S. Saks, Theory of the integral, Warsaw, 1937; [6] D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton Univ. Press, 1941, chap I; [7] 辻正次，実函数論，槙書店，1962; [8] H. Flanders, Differential forms, with applications to the physical sciences, Academic Press, 1963; [9] H. K. Nickerson-D. C. Spencer-N. E. Steenrod, Advanced calculus, Lecture notes, van Nostrand, 1959; [10] H. Cartan, Formes différentielles, Hermann, 1967. 还有关于复积分→全纯函数的【参】. 关于Stokes公式等→向量的【参】.

测度 [英 measure 法 mesure 德 Mass 俄 мера 日 測度] 【集环】 如果 $\mathfrak{B}$ 是某个固定的集合 $X(\neq\varnothing)$ 的子集的一个集合，而对 $\mathfrak{B}$ 的任意两个元 A, B，有 $A\cup B\in\mathfrak{B}$, $A\cap B\in\mathfrak{B}$，则称 $\mathfrak{B}$ 为**集环** (ring of sets)（详细地说，关于空间X的集环，以下亦同）. 如果非空的集环 $\mathfrak{B}$ 的每个元的余集属于 $\mathfrak{B}$，则称 $\mathfrak{B}$ 为**集域** (field of sets) 或**有限加法族** (finitely additive class). 如果集环 $\mathfrak{B}$ 的可数个元的并恒属于 $\mathfrak{B}$，则称 $\mathfrak{B}$ 为**完全加性的** (completely additive, totally additive) 或**可数加性的**(countably additive). 具有完全加性的集域称为**完全加法族**(completely additive class). (完全加法族也称为 **σ 代数，可数加法族，σ 加法族，加性族，Borel 族**或 **Borel 集域** (Borel field). 另外，也有将这些术语区别使用的做法，但通常则无区别地加以使用.) 也往往把集合X与它的一个完全加法族$\mathfrak{B}$合在一起，而称 $(X, \mathfrak{B})$ 为**可测空间** (measurable

space). 有限加法族 $\mathfrak{B}$ 或完全加法族 $\mathfrak{B}$ 也可以定义为 X 的子集的一个集合，分别满足下述条件 1), 2), 3) 或 1), 2), 3′): 1) $\varnothing \in \mathfrak{B}$; 2) $A \in \mathfrak{B} \Longrightarrow A^c \in \mathfrak{B}$; 3) $A, B \in \mathfrak{B} \Longrightarrow A \cup B \in \mathfrak{B}$; 3′) $A_n \in \mathfrak{B}(n = 1, 2, \cdots) \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$. 如果 $\mathfrak{B}$ 为完全加法族,则称属于 $\mathfrak{B}$ 的集合 E 为 **$\mathfrak{B}$ 可测** ($\mathfrak{B}$-measurable) **集**.

对于 X 的子集的序列 $\{A_n\}$ $(n \in \boldsymbol{N})$, 分别用

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\Big),$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcap_{n=m}^{\infty} A_n\Big)$$

来定义 $\{A_n\}$ 的**上极限** (superior limit), **下极限** (inferior limit). lim sup, lim inf 也可写作 $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$. 下极限恒包含于上极限之内. 特别当下极限与上极限一致时,就称它为 $\{A_n\}$ 的**极限** (limit), 记作 $\lim_{n\to\infty} A_n$ (→收敛). **单调集序列** (monotone sequance of sets), 即满足 $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$(单调递增)或 $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$(单调递减)的集序列必有极限,如果单调递增,则极限为 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, 如果单调递减，则极限为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. 对于完全加法族 $\mathfrak{A}$, 若 $A_n \in \mathfrak{A}(n \in \boldsymbol{N})$, 则 $\liminf_{n\to\infty} A_n$, $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}$; 特别是,如果 $\{A_n\}$ 有极限,则其极限也属于 $\mathfrak{A}$. 反之,如果在有限加法族 $\mathfrak{A}$ 中, 对于 $A_n \in \mathfrak{A}$ 的一切单调递增序列 $\{A_n\}$, 有 $\lim_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, 则 $\mathfrak{A}$ 是完全加性的.

【完全加法族的生成】 给定 X 的子集的一个集合 $\mathfrak{M}$, 存在包含 $\mathfrak{M}$ 的最小的完全加法族 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. 即, i) $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ 是完全加法族而 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M}) \supset \mathfrak{M}$; ii)如果完全加法族 $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{M}$, 则 $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{B}(\mathfrak{M})$. $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ 称为由 $\mathfrak{M}$ **生成** (generate) 的完全加法族. 对于集 $\mathfrak{A}$, 以 $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A}_\delta)$ 表示可以表为可数个属于 $\mathfrak{A}$ 的集合的并(交)的集合的全体所成的集合. 对于集族 $\mathfrak{M}$, 任意选取 $l, m_1, \cdots, m_l, n_1, \cdots, n_l \in \boldsymbol{N}$, 如果把可以表示为

$$\bigcup_{k=1}^{l}(A_{k1} \cap \cdots \cap A_{km_k} \cap B_{k1}^c \cap \cdots \cap B_{kn_k}^c)$$

$$A_{kj},\ B_{kj} \in \mathfrak{M}$$

的集合的全体记为 $\mathfrak{M}_0$, 则 $\mathfrak{M}_0$ 即成有限加法族. 对于序数† ξ, 以如下方法确定 $\mathfrak{M}_\xi$: 当对于满足 $\eta < \xi$ 的所有序数 η 已确定 $\mathfrak{M}_\eta$ 时,如果 $\xi = 2\zeta$, 则定义 $\mathfrak{M}_\xi = \Big(\bigcup_{\eta<\xi} \mathfrak{M}_\eta\Big)_\sigma$; 如果 $\xi = 2\zeta + 1$, 则定义 $\mathfrak{M}_\xi = \Big(\bigcup_{\eta<\xi} \mathfrak{M}_\eta\Big)_\delta$. 如果令 ω_1 为第二级的始数†, 则 $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathfrak{M}_\xi$ 即为 $\mathfrak{M}$ 所生成的完全加法族 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$.

【Borel 集】 在 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中,由 $a_k \leqslant b_k (k = 1, \cdots, n)$ 所决定的集合 $\{x \mid a_k \leqslant x_k < b_k, k = 1, 2, \cdots, n\}$ 称为**半开区间** (half-open interval). 由半开区间的全体所生成的完全加法族称为 $\boldsymbol{R}^n$ 的 **Borel 集族** (family of Borel sets),属于这个族的集合称为 $\boldsymbol{R}^n$ 的 **Borel 集** (Borel set). 开集,闭集是 Borel 集. 由于半开区间可以表为可数个闭集的并, 又可表为可数个开集的交,因此, $\boldsymbol{R}^n$ 的 Borel 集族也可以定义为由 $\boldsymbol{R}^n$ 的闭集(开集)的全体所生成的完全加法族.

一般地,在拓扑空间 X 中,由闭集的全体所生成的完全加法族称为 **Borel 集族**,属于这个族的集合称为 **Borel 集**或 **B 可测** (法 mesurable (B)) **集**. 由 X 的开集的全体所生成的完全加法族与 Borel 集族一致. 定义函数† 为 Baire 函数†的集合是 Borel 集. 称这样的集合为**狭义 Borel 集**或 **Baire 集** (Baire set). 最多可数个闭集(开集)的并(交)称为 **F_σ 集** (F_σ set) (**G_δ 集** (G_δ set)). F_σ 集与 G_δ 集都是 Borel 集. 设 X 的闭集的全体所成的集合为 $\mathfrak{F}_0$, 开集的全体所成的集合为 $\mathfrak{G}_0$; 与上述 $\mathfrak{M}_\xi$ 的作法相同,对于序数 ξ 定义 $\mathfrak{F}_\xi$, $\mathfrak{G}_\xi$. 从作法可知, $\mathfrak{F}_\xi$, $\mathfrak{G}_\xi$ 的元都是 Borel 集. 如果 $\omega_1 < \xi$, 则 $\mathfrak{F}_\xi = \mathfrak{F}_{\omega_1}$, $\mathfrak{G}_\xi = \mathfrak{G}_{\omega_1}$. 特别是, 对于完全正规空间† (例如,度量空间),如果 $\alpha < \beta$, 则 $\mathfrak{F}_\alpha \subset \mathfrak{G}_\beta$, $\mathfrak{G}_\alpha \subset \mathfrak{F}_\beta$, 且 $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathfrak{F}_\xi$ 和 $\bigcup_{\xi<\omega_1} \mathfrak{G}_\xi$ 均与 Borel 集族一

致．在这种情形，任意的 Borel' 集 B 是狭义 Borel 集，从而，可根据 B 的定义函数的 Baire 函数的类[†]来分类．又对于 B，亦可根据使 $B \in \mathfrak{F}_\xi$（或 $B \in \mathfrak{G}_\xi$）的最小序数 ξ 来分类．

【测度的定义】 以空间 X 的有限加法族 $\mathfrak{M}$ 为定义域的实值集函数 m，如果满足：I) $0 \leqslant m(E) \leqslant \infty$，$m(\varnothing) = 0$; II_0) 如果 $A, B \in \mathfrak{M}$，$A \cap B = \varnothing$，则 $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$，则称 m 为 $\mathfrak{M}$ 上的**有限加法测度**（finitely additive measure），也称为 **Jordan 测度**（Jordan measure）．当 $m(X) < \infty$ 时，称 m 为**有限测度**（bounded measure）；如果存在序列 $\{X_n\}$，满足 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$，$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$，$m(X_n) < \infty$，且对任意的 $A \in \mathfrak{M}$，有 $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(A \cap X_n)$，则称 m 为 **σ 有限测度**（σ-finite measure）．

定义于空间 X 的完全加法族 $\mathfrak{B}$ 上的集函数 μ，如果满足 I) $0 \leqslant \mu(E) \leqslant \infty$，$\mu(\varnothing) = 0$; II) $E_n \in \mathfrak{B}(n = 1, 2, \cdots)$，$E_j \cap E_k = \varnothing$ $(j \neq k)$ 蕴涵 $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$（**完全可加性**），则称 μ 为 $\mathfrak{B}$（或 X）上的**测度**或**完全加法测度**（completely additive measure）或 **σ 加法测度**（σ-additive measure），而空间 X，完全加法族 $\mathfrak{B}$ 以及测度 μ 的组合 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 或 (X, μ)，称为**测度空间**（measure space）．当 $\mu(X) < \infty$ 时，或存在序列 $\{X_n\}$ 使 $\mu(X_n) < \infty$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$ 时，则 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 分别称为**有限的**或 **σ 有限的**．最简单的有限测度是给定 X 的一点 a，当 $a \in A$ 时定义 $m(A) = 1$，当 $a \notin A$ 时定义 $m(A) = 0$．这种测度称为 Dirac **δ 测度**（δ-measure）．又满足 $m(X) = 1$ 的测度称为概率[†]（→概率论）．

在 II_0) 及 II) 中，结论的等式的两端，也含有都为 ∞ 的情形．含有 $\pm\infty$ 的运算遵从以下规定．设 a 为实数，以下符号的选取按上下相同的顺序．$(\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = \pm\infty$，$(\pm\infty) - a = \pm\infty$，$a - (\pm\infty) = \mp\infty$，$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$，$(\pm\infty) - (\mp\infty) = \pm\infty$．当 $a > 0$ 时，$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \pm\infty$，当 $a < 0$ 时，$a \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot a = \mp\infty$，$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$．（此外，也有规定 $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$ 的．）

在测度空间 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 中，称属于 $\mathfrak{B}$ 的集合（$\mathfrak{B}$ 可测集）为 **μ 可测**（μ-measurable）或简称**可测**．对于 μ 可测集的序列 $\{A_n\}$，我们有：i) $\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$; ii) 如果对于某个 n_0，$\mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n\right) < +\infty$，则 $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)$; iii) 如果在 ii) 的假定下，又有 $\lim_{n\to\infty} A_n$ 存在，则 $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$．当 μ 为完全加法族 $\mathfrak{B}$ 上的有限加法测度时，则为使 μ 具有完全可加性的充分必要条件是，对于满足 $A_n \in \mathfrak{B}$，$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$ 的任意序列 $\{A_n\}$，有 $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$．

如果满足 $\mu(E) = 0$ 的集合 E 的子集恒属于 $\mathfrak{B}$，则 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 称为**完全的**（complete），或简称 μ 为完全的．当 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 为非完全时，添加使 $\mu(E) = 0$ 的 E 的全部子集所得的完全测度空间，称为 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 的**完全化**（completion）．满足 $\mu(E) = 0$ 的集合称为**零集**（null set）．当使某些性质 $\boldsymbol{P}$ 不成立的点的集合为零集时，就称 **$\boldsymbol{P}$ 几乎处处**（英 almost everywhere 法 presque partout）成立，或在**几乎所有**（almost all）点处成立，或称为"**几乎 $\boldsymbol{P}$**"．

【测度的构成】 设空间 X 的完全加法族 $\mathfrak{A}$ 具有性质：如果 $A \in \mathfrak{A}$，$B \subset A$，则 $B \in \mathfrak{A}$．那末，当定义在 $\mathfrak{A}$ 上的集函数 $\mu^*(A)$ 满足 1) $0 \leqslant \mu^*(A) \leqslant \infty$，$\mu^*(\varnothing) = 0$; 2) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$; 3) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ 时，就称 μ^* 为 **Carathéodory 外测度**（Carathéodory outer measure）或**外测度**（outer measure）．根据 3)，$\mu^*(B) \leqslant \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$ 恒成立；特别地，如果等号对于所有 $B \in \mathfrak{A}$ 成立，则称 A **关于 μ^* 为可测**．根据这个定义，满足 $\mu^*(A) = 0$ 的 A 关于 μ^* 恒为可测．关于 μ^* 为可测的集合的全体 $\mathfrak{B}$ 形成一个完全加法族，

如果对属于该族的 A，令 $\mu(A)=\mu^*(A)$，则 $\mu(A)$ 即成为定义于可测集族 $\mathfrak{B}$ 上的一个完全测度. 把这个测度称为由 μ^* 导出的 **Carathéodory 测度** (Carathéodory measure) 或**广义 Lebesgue 测度**.

如果有限加法族 $\mathfrak{M}$ 上的有限加法测度 m 满足下述条件 II′)，就称 m 为**完全可加的** (completely additive)：II′) 若 $A_n\in\mathfrak{M}, A_j\cap A_k=\varnothing$ $(j\neq k)$，$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathfrak{M}$，则 $m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$. 此时，对于任意的 $A\subset X$，我们定义 $\mu^*(A)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}m(A_n)$ 关于 A 的所有覆盖 $\{A_n\}$（即 $A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_n\in\mathfrak{M}$）的下确界，于是 μ^* 成为 Carathéodory 外测度. 从 μ^* 出发，按照上述做法，我们确定了完全加法族 $\mathfrak{B}$ 上的测度 μ，且 $\mathfrak{B}\supset\mathfrak{M}$，对于 $A\in\mathfrak{M}$，有 $\mu(A)=m(A)$. 从而，m 能够扩张为 $\mathfrak{B}(\mathfrak{M})$ 上的测度 μ (**E. Hopf 扩张定理** (E. Hopf's extension theorem)). 特别是，如果 m 为 σ 有限(或有限)，则这个扩张是唯一确定的.

对于在完全加法族 $\mathfrak{A}$ 上定义的 Carathéodory 外测度 μ^*，设关于 μ^* 为可测的集合的全体为 $\mathfrak{B}$，由 μ^* 导出的测度为 μ，如果对于所有 $A\in\mathfrak{A}$，$\mu^*(A)=\inf\{\mu(B)\mid B\in\mathfrak{B},\ A\subset B\}$ 成立，则外测度 μ^* (或测度 μ) 称为**正则的** (regular). 在正则测度的情形，与外测度相对应，对于 $A\in\mathfrak{A}$，由 $\mu_*(A)=\sup\{\mu(B)\mid B\in\mathfrak{B},\ A\supset B\}$ 定义 A 的**内测度** (inner measure). 如果 $A\in\mathfrak{A}$，$B\in\mathfrak{B}$，$\mu(B)<+\infty$，$A\subset B$，则 $\mu_*(A)=\mu(B)-\mu^*(B-A)$. 再者，满足 $\mu^*(A)<\infty$ 的集合 A 可测的充分必要条件是 $\mu^*(A)=\mu_*(A)$. 对于任意的 $A\in\mathfrak{A}$，存在可测集 B，C，使 $A\subset B$，$\mu^*(A)=\mu(B)$，$C\subset A$，$\mu_*(A)=\mu(C)$. 集合 B 称为 A 的**可测覆盖**(英 measurable cover 德 massgleiche Hülle)，C 称为 A 的**可测核** (英 measurable kernel 德 massgleicher Kern).

【Lebesgue 测度】 在 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，半开区间 $I=\{x\mid a_k\leqslant x_k<b_k\ (k=1,2,\cdots,n)\}$ 的体积定义为 $m(I)=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k)$. 对于可表为无共同点的半开区间的有限并的集合 $A=\bigcup_{j=1}^{r}I_j$，定义 $m(A)=\sum_{j=1}^{r}m(I_j)$，把这样的集合的全体记作 $\mathfrak{M}_0$. 设 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\cup\{\varnothing\}$，$m(\varnothing)=0$，于是 m 成为 $\mathfrak{M}$ 上的有限加法测度，而且是完全可加的. 因此，由 m 确定一个外测度 μ^*，而由 μ^* 又确定一个测度 μ. 这个 μ^* 称为 **Lebesgue 外测度**，或简称**外测度**. C. Carathéodory 最初考察的就是这种情形. 关于这个 μ^* 为可测的集合称为 **Lebesgue 可测的** (英 Lebesgue measurable 法 mesurable (L)) 或简称**可测的** (measurable)，测度 μ 称为 **Lebesgue 测度** (Lebesgue measure) 或简称**测度**. 区间都是可测的，其测度等于它的体积. 开集，闭集，Borel 集都是可测的. 一般说来，设具有距离函数 d 的度量空间 X 的外测度 μ^* 满足：若 $d(A,B)>0$ 则 $\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$. 那末 X 的所有闭集均为 μ^* 可测，从而，X 的所有 Borel 集均为 μ^* 可测. 这里 $d(A,B)=\inf\{d(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$ 表示集合 A，B 之间的距离. 当给定拓扑空间 X，X 的 Borel 集族 $\mathfrak{B}$，以及 $\mathfrak{B}$ 上的测度 μ 时，就称 μ 为 **Borel 测度** (Borel measure). 通常假定 Borel 测度满足：对于紧子集 E，有 $\mu(E)<\infty$. $\boldsymbol{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度即具有这个性质. $\boldsymbol{R}^n$ 中的 Lebesgue 可测集的全体所成的集合的基数为 $2^{\mathfrak{c}}$，而 Borel 集族的基数则为 $\mathfrak{c}$. 这里 $\mathfrak{c}$ 表示连续统† 的基数 ($\boldsymbol{R}$ 的基数). 因此，不是 Borel 集的 Lebesgue 可测集存在.

在历史上，C. Jordan 对于 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界集 A，将关于所有包含 A 的 $B\in\mathfrak{M}$ 的 $m(B)$ 的下确界定义为 $\overline{m}(A)$，将关于所有被 A 包含的 $B\in\mathfrak{M}$ 的 $m(B)$ 的上确界定义为 $\underline{m}(A)$，并称 $\overline{m}(A)$ 为 A 的**外体积** (outer volume)，$\underline{m}(A)$ 为 A 的**内体积** (inner volume) (在二维情形，称为**外面积** (outer area) 与**内面积** (inner area)). 当 $\overline{m}(A)=\underline{m}(A)$ 时，称 A 为 **Jordan 可测的** (Jordan measurable)，而将这个共同的值定义为

A 的 **Jordan 测度**(Jordan measure). Jordan 测度是有限加法测度,是不够完善的. Lebesgue 对此作了改进,引进了完全加法的测度. Jordan 可测集是 Lebesgue 可测的.

$\boldsymbol{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度是正则的. 从而,也可定义如下:在集合 A 的 Lebesgue 外测度 $\mu^*(A)<\infty$ 的情形,对于包含 A 而外测度为有限的任意开集 G, $\mu^*(G)-\mu^*(G-A)$ 具有与 G 的取法无关的一定的值. 定义此数为 A 的 **Lebesgue 内测度** $\mu_*(A)$. 于是对于任意的 A,均有 $\mu_*(A)\leqslant\mu^*(A)$. 特别是,当等号成立时,称 A 为 **Lebesgue 可测**,令这个共同的值为 $\mu(A)$. 在 $\mu^*(A)=\infty$ 的情形,如果对于任意的有界开集 G, $A\cap G$ 恒为可测,则称 A 为可测,且令 $\mu(A)=\infty$. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 内,对于任意的集合 A,能够选取 G_δ 集为其可测覆盖,选取 F_σ 集为其可测核. 从而,可测集可以表为 G_δ 集与零集的差,亦可表为 F_σ 集与零集的并.

非 Lebesgue 可测集也是存在的(G. Vitali),但实际构造这种集合时须用选择公理†. 例如,用有理数全体所成的加法群对实数加法群加以分类,而从每个类中各取一个元所得的集合是不可测的(例如,→[3](中译本)p. 71—74, [13] p. 256).

如果 $\boldsymbol{R}^n$ 的集合 A, B 叠合,即可用运动使它们重合,则 A, B 的可测性一致,在二者均可测时,其 Lebesgue 测度相等. 即, Lebesgue 测度可以表征为关于 Euclid 运动群的 Haar 测度†.

【乘积测度】 设 μ_X, μ_Y 为定义于空间 X, Y 的完全加法族 $\mathfrak{B}_X$, $\mathfrak{B}_Y$ 上的测度,则在积空间 $X\times Y$ 中,包含 $\{A\times B\mid A\in\mathfrak{B}_X, B\in\mathfrak{B}_Y\}$ 的最小有限加法族 $\mathfrak{R}$ 的元 C,可以表为互不相交的有限并 $\bigcup_{j=1}^{n}(A_j\times B_j)$ $(A_j\in\mathfrak{B}_X, B_j\in\mathfrak{B}_Y)$. 如果令 $\nu(C)=\sum_{j=1}^{n}\mu_X(A_j)\mu_Y(B_j)$(约定 $0\cdot\infty=0$),则此值与以上 C 的表法无关而唯一确定,且 ν 成为 $\mathfrak{R}$ 上的完全加法测度. 根据 Hopf 扩张定理将 ν 加以扩张,得到一个(完全)测度空间,称为测度空间 $(X,\mathfrak{B}_X,\mu_X)$ 与 $(Y,\mathfrak{B}_Y,\mu_Y)$ 的 **(完全)乘积测度空间**((complete) product measure space),这样得到的 $X\times Y$ 上的测度称为 μ_X 与 μ_Y 的**乘积测度**(product measure),记作 $\mu_X\times\mu_Y$. 如将 p 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^p$ 的 Lebesgue 可测集所成的族记作 $\mathfrak{M}_p$,相应的 Lebesgue 测度记作 m_p,则 $(\boldsymbol{R}^p,\mathfrak{M}_p,m_p)$ 与 $(\boldsymbol{R}^q,\mathfrak{M}_q,m_q)$ 的(完全)乘积测度空间为 $(\boldsymbol{R}^{p+q},\mathfrak{M}_{p+q},m_{p+q})$. 同样定义任意有限个测度空间 $(X_j,\mathfrak{B}_j,\mu_j)$ $(j=1,\cdots,n)$ 的乘积测度空间.

设 X_λ $(\lambda\in\Lambda)$ 为空间,这里,指数集 Λ 的基数为任意. 乘积空间 $X=\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 的 ***n* 柱集**(n-cylinder set)或简称**柱集**(cylinder set),是指形如 $A\times\prod_{\lambda\notin(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}X_\lambda$ $(A\subset X_{\lambda_1}\times\cdots\times X_{\lambda_n})$ 的集合. 如果对于每个 X_λ 均已给了有限加法族 $\mathfrak{A}_\lambda$,则一切可以表为形如 $A_1\times A_2\times\cdots A_n\times\prod_{\lambda\notin(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}X_\lambda$ $(A_j\in\mathfrak{A}_j, j=1,\cdots,n)$ 的柱集的并的集合的全体,构成空间 X 的一个有限加法族. 当每个 $\mathfrak{A}_\lambda$ 均为完全可加时,则由这个有限加法族所生成的完全加法族 $\mathfrak{A}$,称为完全加法族 $\mathfrak{A}_\lambda$ 的**积**,记作 $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{A}_\lambda$. 如果对于每个 $\lambda\in\Lambda$ 已给出一个满足 $\mu_\lambda(X_\lambda)=1$ 的可测空间 $(X_\lambda,\mathfrak{B}_\lambda,\mu_\lambda)$,则在积空间 X 中,可用下面的方法在完全加法族 $\mathfrak{B}=\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{B}_\lambda$ 上定义一个测度 μ: 首先,对于形如 $A_1\times\cdots\times A_n\times X'$(其中 $A_j\in\mathfrak{B}_\lambda$, $X'=\prod_{\lambda\notin(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}X_\lambda$)的柱集,定义 $\mu(A_1\times\cdots\times A_n\times X')=\mu_{\lambda_1}(A_1)\cdots\mu_{\lambda_n}(A_n)$. 如果将 μ 扩张到可表为这种柱集的有限并的集合的全体所成的有限加法族 $\mathfrak{C}$ 上去,则这一扩张给出了 $\mathfrak{C}$ 上的一个完全加法测度. 因此,由 Hopf 扩张定理,存在 $\mathfrak{B}$ 上的唯一扩张测度 μ,且 μ 满足 $\mu(X)=1$. 这个 μ 记作 $\mu=\prod_{\lambda\in\Lambda}\mu_\lambda$.

【Radon 测度】 定义于局部紧† Hausdorff 空间 X 上且具有紧支集†($\{x\mid f(x)\neq0\}$ 的闭包)的实值连续函数 f 的全体所成的实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的线性空间,记作 $C_0(X)$. 定义于 $C_0(X)$ 上且满足 $f\geqslant0$ 蕴涵 $\varphi(f)\geqslant0$ 的(实)线性泛函† φ,称为**正 Radon 测度**(positive Radon measure). 对于这样的 φ,可确定正则测度 μ,使对

每个 $f\in C_0(X)$，有 $\varphi(f)=\int_X f d\mu$，且使得 X 的一切 Borel 集均为 $\mathfrak{B}$ 可测．这里，所谓正 Radon 测度 μ 为**正则的**（regular），是指对于任意的 $B\in\mathfrak{B}$，$\mu(B)=\inf\{\mu(G)\}$（其中 inf 为关于所有包含 B 的开集 G 的下确界）成立．如果 X 为 σ 紧†（即可以表为可数个紧集的并），则在 X 的 Borel 集族上存在唯一的测度 μ，使对一切 $f\in C_0(X)$，有 $\varphi(f)=\int_X f d\mu$．可表为两个定义于 $C_0(X)$ 上的正 Radon 测度之差的线性泛函，称为 **Radon 测度**．这个条件等价于，对任意的 $f\in C_0(X)$，$\{\varphi(g)\,|\,|g|\leqslant|f|,\ g\in C_0(X)\}$ 为有界，换言之，φ 在具有包含于某固定紧子集内的支集的函数的全体所成的子空间上的限制，关于一致收敛拓扑为连续．从而，特别在 X 为紧时，$C(X)$ 上的连续线性泛函为 Radon 测度．又 L. Schwartz 对非局部紧空间上的 Radon 测度进行了研究[15]．

【可测函数】　当给定 X 上的完全加法族 $\mathfrak{B}$ 时，定义于 $\mathfrak{B}$ 可测集 E 上的取实数值或 $\pm\infty$ 的函数 f 称为 E 上的 **$\mathfrak{B}$ 可测函数**（$\mathfrak{B}$-measurable function），如果对于任意的实数 α，$\{x\,|\,f(x)>\alpha\}$ 恒为 $\mathfrak{B}$ 可测．在上述定义中，可以用"$f\geqslant\alpha$"，"$f<\alpha$"或"$f\leqslant\alpha$"来代替"$f>\alpha$"．也可以用"任一 Borel 集在 f 下的原象†为 $\mathfrak{B}$ 可测集"来定义．如果 f,g 为 $\mathfrak{B}$ 可测，则 $af+bg$（a,b 是常数）$f\cdot g$，f/g，$\max\{f,g\}$，$\min\{f,g\}$，$|f|^p$（p 为常数）等（在这些函数有意义的限度内）为 $\mathfrak{B}$ 可测．又 $\mathfrak{B}$ 可测函数列的上（以及下）极限函数†亦为 $\mathfrak{B}$ 可测．在两个 σ 有限测度空间的完全乘积测度空间中，即使 $f(x,y)$ 分别作为 x,y 的函数为可测，但作为两个变量的函数并不一定可测．反例：设 $\boldsymbol{R}^2$ 内满足 $m_2(F)>0$，$F\subset[0,1]\times[0,1]$ 的闭集 F 的全体为 $\mathfrak{F}$．对于所有 $F_\xi\in\mathfrak{F}$，在其中取两点 $z_\xi=(x_\xi,y_\xi)$，$z'_\xi=(x'_\xi,y'_\xi)$，使得若 $\xi\neq\eta$，则 $x_\xi,x'_\xi,x_\eta,x'_\eta$ 中任何两个互不相同，$y_\xi,y'_\xi,y_\eta,y'_\eta$ 中任何两个也互不相同．我们可以用 $\mathfrak{F}$ 的基数不超过连续统†的基数和超限归纳法来证明这种做法是可能的，又可以证明 z_ξ 的全体 E 并非可测．从而，如果设 E 的定义函数为 $f(x,y)$，则 $f(x,y)$ 是不可测的，但如果固定 $x(y)$，则它作为 $y(x)$ 的函数最多除去一点外恒为 0，从而显然是可测的．特别当 $\mathfrak{B}$ 为 Lebesgue 可测集的全体或 Borel 集族时，相应的 $\mathfrak{B}$ 可测函数分别称为 **Lebesgue 可测函数**（或简称**可测函数**）或 **Borel 可测函数**．可测函数的合成函数并不一定可测．特别关于 $\boldsymbol{R}^n$ 的 Lebesgue 可测函数和 Borel 函数的合成函数，有如下的关系：

$B\circ B=B$，$L\circ B=L$，$B\circ L=\times$，$L\circ L=\times$，

其中 B 表示 Borel 可测，L 表示 Lebesgue 可测，$\times$ 表示不一定可测．

在 Euclid 空间中，Borel 可测函数与 Baire 函数是一致的，Lebesgue 可测函数与最多为第二类的 Baire 函数几乎相等．又在 Lebesgue 可测集 E 上几乎处处有限的 f 为 Lebesgue 可测的充分必要条件是，对于任意的 $\varepsilon>0$，能够选取闭子集 F，使得 $m(E-F)<\varepsilon$，且 f 在 F 上连续（**Лузин 定理**）．

在测度空间 $(X,\mathfrak{B},\mu)$ 中，如果满足 $\mu(E)<\infty$ 的 E 上的 $\mathfrak{B}$ 可测函数序列 f_n 几乎处处收敛于 f．则对于任意的 $\varepsilon>0$，能够选取集合 F（$F\subset E$，$F\in\mathfrak{B}$），使得 $\mu(E-F)<\varepsilon$，而 f_n 在 F 上一致收敛†．在此，如果 $X=\boldsymbol{R}^m$，$\mathfrak{B}$ 为 Borel 族或 Lebesgue 可测集的全体，μ 为 Lebesgue 测度，则 F 可以选为闭集（**Егоров 定理**）．

特别是，关于一维 Euclid 空间的有限可测函数 $f(x)$，几乎处处使 $\lim_{n\to\infty}f(x+h_n)=f(x)$ 的数列 $\{h_n\}$ 存在（H. Auerbach）．

函数方程 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 有无穷多个非可测的解（G. Hamel，→特殊函数方程）．

此外，与本条有关的概念，→Lebesgue积分，集函数，不变测度．

【参】［1］ S. Saks, Theory of the integral, Warszawa, 1937; ［2］ F. Hausdorff, Mengenlehre, Teubner, 第三版 1935（中译本：F. 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960）· ［3］ P. R. Halmos, Measure theory, van Nostrand, 1950（中译本：R. 哈尔摩斯，测度论，科学出版社，1958）; ［4］ C. E. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Teubner, 1918 (Chelsea, 1968); ［5］ H. L. Royden, Real analysis, Macmillan, 1964, 第

二版，1968；［6］ 稲垣武，点集合論，岩波，1949；［7］中野秀五郎，測度論，裳華房，I 1947，II 1948，III 1950；［8］ 河田敬義，積分論，共立全書，1959；［9］ 高木貞治，解析概論，岩波，第三版，1961；［10］ 辻正次，実函数論，槇書店，1962；［11］ 伊藤清三，ルベーグ積分入門，裳華房，1963；［12］ 吉田洋一，ルベーグ積分入門，培風館，1965；［13］ 河口敬義-三村征雄，現代数学概説 II，岩波，1965．关于从 Jordan 测度到 Lebesgue 测度的历史；［14］ 弥永昌吉，現代数学の基礎概念，上，第六章第三节 V. 弘文堂，1944；［15］ L. Schwartz, Probabilités cylindriques et applications radonifiantes, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, IA. **18** (1971) 139—286；［16］ N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Intégration, Actualités Sci. Ind., 1175a, 1244b, 1281, 1306, 1343, Herman, 第二版，1965, 1967, 1959, 1963, 1969.

Lebesgue 积分 ［英 Lebesgue integral　法 intégrale de Lebesgue　德 Lebesguesches Integral　俄 интеграл Лебега　日 ルベーグ積分］【积分的定义】 给定集合 X 的子集所作成的 σ 加法族† $\mathfrak{B}$ 及在 $\mathfrak{B}$ 上定义的测度† μ，即给定测度空间† $(X, \mathfrak{B}, \mu)$．Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$，$\boldsymbol{R}^n$ 上 Lebesgue 可测集的全体所成的族 $\mathfrak{M}_n$ 以及 $\mathfrak{M}_n$ 上的 Lebesgue 测度 m_n 所作成的测度空间$(\boldsymbol{R}^n, \mathfrak{M}_n, m_n)$即其一例（→测度）．以下设集合，函数均为 $\mathfrak{B}$ 可测†，不再一一指明．E 上的实值函数 $f(x)$ 的积分$\int_E f(x)d\mu(x)$（或简单地记作$\int_E fd\mu$，$\int_E f$）可以分几步来定义．1）设 $f(x) \geqslant 0$ 为**简单函数**（simple function），即值域为不包含 $\pm\infty$ 的有限集 $\{a_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，如果 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，$E_i \cap E_k = \varnothing$ $(i \neq k)$，在 E_i 上 $f(x) = a_i$，则定义 $\int_E f = \sum_{a_i \neq 0} a_i \mu(E_i)$．（其值为实数或 $+\infty$．关于包含 $\pm\infty$ 的运算→测度．）2）在 $f(x) \geqslant 0$ 时，定义 $\int_E fd\mu$ 为满足 $0 \leqslant g \leqslant f$ 的所有简单函数 g 的积分$\int gd\mu$ 的上确界．3）在一般情形，设 $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$，$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$，则 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$．如果 $\int_E f^+$，$\int_E f^-$ 之中至少有一为有限，则定义 $\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$，并称 f 在 E 上有积分值．特别是，如果此值为有限，则称 f 在 E 上是**可积的**（英 integrable　法 sommable）．如果最初给定的测度空间是关于 Lebesgue 测度的测度空间 $(\boldsymbol{R}^n, \mathfrak{M}_n, m_n)$，则称这样定义的积分为 **Lebesgue 积分（L 积分）**，而此时称可积函数为 **Lebesgue 可积**．当 $n = 1$ 时，则将积分记作 $\int_E f(x)dx$，特别当 E 为区间 $[a, b]$ 时，也可记作$\int_a^b f(x)dx$．在任意测度空间的一般情形，这样定义的积分也称为**广义 Lebesgue 积分**或简称为 **Lebesgue 积分**．

当 $\mu(E) < \infty$，$f(x)$ 有界时，对于分割 Δ：$E = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$，$E_j \cap E_k = \varnothing$ $(j \neq k)$，如果令 $S_\Delta = \sum_{j=1}^{n} \sup\{f(E_j)\} \cdot \mu(E_j)$，$s_\Delta = \sum_{j=1}^{m} \inf\{f(E_j)\} \cdot \mu(E_j)$，则 $\inf S_\Delta$ 与 $\sup s_\Delta$ 相同且等于 $\int_E f$，这里下确界和上确界都是对 E 的所有分割取的．如果令 $\delta(\Delta) = \max(\sup\{f(E_j)\} - \inf\{f(E_j)\})$，则对于使 $\delta(\Delta_n) \to 0$ 的任意的分割序列$\{\Delta_n\}$，S_{Δ_n}，s_{Δ_n} 都收敛于 $\int_E f$．例如，将值域分为 n 等分，设与此对应的 E 的分割为 Δ_n，则 $\delta(\Delta_n) \to 0$．H. Lebesgue 最初就是这样给出积分定义的．而在 σ 有限†测度空间中，$f(x) \geqslant 0$ 的积分也可定义如下：设$\{X_n\}$为满足 $X_n \uparrow X$，$\mu(X_n) < \infty$ 的任意的序列，令 $E_n = \{x \mid f(x) \leqslant n, x \in X_n\}$，定义$\int_E f$ 为 $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f$．

【积分的性质】 1）在 E 上可积的函数的全体构成一个线性空间．即，如果 f，g 在 E 上可积，则对于任意的实数 α，β，$\alpha f + \beta g$ 也在 E 上可积．此时，$\int_E (\alpha f + \beta g)d\mu = \alpha\int_E fd\mu + \beta\int_E gd\mu$．2）下面三个命题互相等价：$f$ 在 E 上可积；f^+，f^- 在 E 上可积；$|f|$ 在 E 上可积．3）如果 f，g 在 E 上有积分值且 $g \leqslant f$，则$\int_E gd\mu \leqslant \int_E fd\mu$．特别是，如果 $m \leqslant f(x) \leqslant l$ 在 E 上成

立，则 $m\,\mu(E) \leqslant \int_E f d\mu \leqslant l\mu(E)$ 成立(**平均值定理** (mean value theorem))．第二平均值定理也成立，它的形式与 Riemann 积分的情形相同(→积分学)．4) 如果 $f(x)$ 在 E 上可积(在 E 上有积分值)，则它在 E 的任一子集上可积(有积分值)．5) 如果 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_j \cap E_k = \varnothing (j \neq k)$，则 $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$ 当左端或右端有意义(这时另一端也有意义)时成立(积分的完全可加性)．6) 如果 $f(x) \geqslant 0$, $\int_E f d\mu = 0$，则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处† 为 0．7) 在零集†上改变 f 的值并不影响可积性与积分值．从而，如果 f 在一个零集上没有定义，则在此零集上可任意给定 f 的值，对积分并无影响．因此，这时可对 f 的积分赋予意义．8) 如果 $f(x)$ 在 E 上可积 $E \supset E_n$, $\mu(E_n) \to 0$，则 $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f d\mu = 0$.

【与 Riemann 积分的关系】 如果 $f(x)$ 在区间 E 上在 Riemann 意义下可积，则 $f(x)$ 也在 Lebesgue 意义下可积，且二者的值相等．逆命题并不成立．例如，当 x 为无理数时取值为 0，当 x 为有理数时取值为 1 的函数，即 Dirichlet 函数，它是 Lebesgue 可积的，但不是 Riemann 可积的．实际上，为使区间 E 上的有界函数在 E 上为 Riemann 可积的充分必要条件是该函数在 E 上几乎处处连续．然而，也有 Riemann 广义积分†存在而 Lebesgue 积分却不存在的情形．例如，$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 并非 Lebesgue 意义的积分．这是因为，一般地，$f(x)$ 与 $|f(x)|$ 总是同时为 Lebesgue 可积，而我们有 $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \infty$．为了改善这一点，就有必要考虑 Denjoy 积分(→Denjoy 积分)．

特别关于 $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n$ 与 $\int_E (\lim_{n\to\infty} f_n)$ 之间的关系，即关于收敛定理，在 Riemann 积分论的范围内，是不可能得到圆满解答的．而我们可以说 Lebesgue 积分论则完全解决了这个问题．1) 如果在 E 上 $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$，且存在 $\varphi(x)$，使 $f_n(x) \geqslant \varphi(x)$, $\int_E \varphi > -\infty$ (例如，$f(x) \geqslant 0$)，则 $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E (\lim_{n\to\infty} f_n)$．2) 如果在 E 上 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 几乎处处存在，且存在 $\varphi(x)$，使 $|f(x)| \leqslant \varphi(x)$, $\int_E \varphi < +\infty$ (例如，$\mu(E) < \infty$ 而 $|f_n(x)| < M$ 时)，则 $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E (\lim_{n\to\infty} f_n)$ (**Lebesgue 收敛定理**(Lebesgue's convergence theorem))．3) 如果存在 $\varphi(x)$，使在 E 上 $f_n(x) \geqslant \varphi(x)$，且 $\int_E \varphi > -\infty$，则 $\liminf_{n\to\infty} \int_E f_n \geqslant \int_E (\liminf_{n\to\infty} f_n)$ (**Fatou 引理**)．

【不定积分】 设 $f(x)$ 在 E 上可积，如果对 E 的任一可测子集 e，令 $F(e) = \int_e f$，则 $F(e)$ 成为 μ 绝对连续† 的完全加性集函数†(积分的性质 4), 5), 8))．称 $F(e)$ 为 $f(x)$ 的**不定积分** (indefinite integral)．特别是，当 X 为实数集 $\boldsymbol{R}$, $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积时，则定义在 $[a, b]$ 上的 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 也称为 $f(x)$ 的不定积分．$f(x)$ 的不定积分 $F(x)$ 是绝对连续† 的，反之，如果 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上绝对连续，则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处可微，且 $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(x) dx$ 成立．(关于 X 为 $\boldsymbol{R}^n$ 或更一般的测度空间情形的微分与积分的关系→集函数．)

【Fubini 定理】 设 $(X, \mathfrak{B}_1, \mu_1)$, $(Y, \mathfrak{B}_2, \mu_2)$ 为两个 σ 有限测度空间，$(X \times Y, \mathfrak{B}, \mu)$ 为其完全乘积测度空间†．如果 $f(x, y)$ 在 $X \times Y$ 上为 $\mathfrak{B}$ 可测且可积(有积分值)，则对于几乎所有 $y \in Y$, $f(x, y)$ 作为 x 的函数为 $\mathfrak{B}_1$ 可测且可积(有积分值)，而 $\int_X f(x, y)\, d\mu_1(x)$ 是 y 的 $\mathfrak{B}_2$ 可测函数．而且此时 $\int_{X\times Y} f(x, y)\, d\mu(x, y) = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)$ 成立．又如果变更 x 与 y 的顺序，类似的结果也成立．从而，特别是，如果 $f(x, y)$ 在 $\boldsymbol{R}^2$ 上可积(有积分值)，则

$$\int_{R^2} f(x, y)\, dm_2(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\right)dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right)dx$$

(**Fubini 定理**). 此式的左端称为**多重积分**(multiple integral),而其他两个积分称为**叠积分**(iterated integral, repeated integral).

也有叠积分存在而多重积分不存在的情形. 例如,设在 $(0,1)\times(0,1)$ 内, $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$, 而在其他点处 $f(x, y)=0$, 则 $\int_{R^2} f^+ = \int_{R^2} f^- = \infty$, 因而 $\int_{R^2} f$ 不存在,但

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\right)dy = -\pi/4,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\right)dx = \pi/4.$$

根据 Fubini 定理,可以证明,当 f 为定义于 σ 有限测度空间 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 的 $\mathfrak{B}$ 可测子集 E 上的非负函数时, f 的 $\mathfrak{B}$ 可测性与**纵标集** $E_f = \{(x, y)\,|\,0 \leqslant y \leqslant f(x), x \in E\}$ 关于 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 和 $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{M}_1, m_1)$ 的完全乘积测度空间 $(X \times \boldsymbol{R}, \mathfrak{B}', \mu')$ 的可测性等价,此时有 $\int_E f d\mu = \mu'(E_f)$. 我们也可以把它作为 Lebesgue 积分的定义. 如果 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 与 $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{M}_1, m_1)$ 相同,则纵标集的 Jordan 测度(面积)与 Riemann 积分一致.

【参】 [1] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Intégration, Actualités Sci. Ind., 1175a, 1244b, 1281, 1306, 1343, Hermann, 第二版, 1965, 第二版, 1967, 1959, 1963, 1969; [2] P. R. Halmos, Measure theory, van Nostrand, 1950 (中译本: R. 哈尔摩斯, 测度论, 科学出版社, 1958). 另一测度的[参].

集函数 [英 set function 法 fonction d'ensemble 德 Mengenfunktion 俄 функция множества 日 集合関数] 一般地以集族†为定义域的函数†, 称为**集函数**. 通常考察取实数或 $\pm\infty$ 值的集函数. 例如,设 $f(x)$ 为定义于 X 上的实值函数,如果对于 X 的任意子集 A, 使 $\sup f(A)$, $\inf f(A)$, $\sup f(A) - \inf f(A)$ 等与之对应,就得到几个相应的集函数. 特别地,以 $\boldsymbol{R}^m$ 的区间† 的集合为定义域的函数称为**区间函数**(interval function). 为了区别于 $\boldsymbol{R}^m$ 的集函数,也把对应于 $\boldsymbol{R}^m$ 的各个点而取值的通常函数称为**点函数**(point function). 例如,当 $f(x)$ 是以 $\boldsymbol{R}^1 = \boldsymbol{R}$ 为定义域的可积†(点)函数时,如果对 $I = [a, b]$ 使 $F(I) = \int_a^b f(x)\, dx$ 与之对应,则得 $\boldsymbol{R}$ 上的区间函数 F.

【有限加性集函数】 在空间 X 的有限加法族† $\mathfrak{B}$ 上定义的实值集函数 $\Phi(E)$, 如果满足有限可加性, 即 $E_1, E_2 \in \mathfrak{B}$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow \Phi(E_1 \cup E_2) = \Phi(E_1) + \Phi(E_2)$, 就称 $\Phi(E)$ 为 $\mathfrak{B}$ 上的**有限加性集函数** (finitely additive set function). 对于任意的 $E \in \mathfrak{B}$, 称 $\sup\{\Phi(A)\,|\,A \subset E, A \in \mathfrak{B}\}$($\inf\{\Phi(A)\,|\,A \subset E, A \in \mathfrak{B}\}$)为 Φ 在 E 上的**上(下)变差**(upper (lower) variation),记作 $\overline{V}(\Phi; E)$($\underline{V}(\Phi; E)$). 由于 $\Phi(\varnothing) = 0$, 因而 $\underline{V}(\Phi; E) \leqslant 0 \leqslant \overline{V}(\Phi; E)$. $V(\Phi; E) = \overline{V}(\Phi; E) + |\underline{V}(\Phi; E)|$ 称为 Φ 在 E 上的**全变差**(total variation). 当把 Φ 固定而考察时, $V(\Phi; E)$ 等亦可记作 $V_\Phi(E)$ 或 $V(E)$. 当 $V(\Phi; X) < \infty$ 时, 称 Φ 为**有界变差**(bounded variation). 又对于任意的 $E \in \mathfrak{B}$ 恒有 $\Phi(E) \geqslant 0 (\leqslant 0)$ 时,即 $E \subset E' \Rightarrow \Phi(E) \leqslant \Phi(E')$ ($\Phi(E) \geqslant \Phi(E')$) 时, 就称 Φ 为**单调递增(递减)**(monotone increasing (decreasing)). 有界变差的有限加性集函数可以表示为两个单调递增的有限加性集函数的差.

设 I_0 为 $\boldsymbol{R}^m$ 中固定的区间, $F(I)$ 为对包含于 I_0 内的半开区间 I (特别把 $\varnothing$ 看作退化的区间)有定义的区间函数. 如果当 I_1, I_2, $I_1 \cup I_2$ 均为区间且 $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ 时, $F(I_1 \cup I_2) = F(I_1) + F(I_2)$ 恒成立,则称 $F(I)$ 为 I_0 内的**加性区间函数**(additive interval function). 设 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{R}$ 上的实值(点)函数,对于 $I = (a, b)$, 使 $f(x)$ 的增量 $D(I) = f(b) - f(a)$ 与之对应,这样就得到一个加性区间函数,称它为**增量函数**(increment function). 这个增量函数 D 由 f 唯一确定; 反之,如果给定 D, 不计附加常数,则 f 唯一确定. 在这个意义下, $\boldsymbol{R}$ 上的加性区间函数除附加常数外,可以看作和 $\boldsymbol{R}$ 上的点函数是同一的.

可以把加性区间函数 $F(I)$ 的定义域扩张为 $\mathfrak{R}(I_0)$, $\mathfrak{R}(I_0)$ 是能表示为包含于 I_0 内的有

限个区间的并的集合R所成的族，且使F满足：如果$R_1\cap R_2=\varnothing$，则$F(R_1\cup R_2)=F(R_1)+F(R_2)$.这样把定义域扩张为有限加法族$\mathfrak{R}(I_0)$的有限加性集函数，也称为区间函数. 以下将在这种意义下使用加性区间函数$F(R)$. 如果对于任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当区间I的体积$|I|<\delta$时，恒有$F(I)<\varepsilon$，则F称为**连续的**(continuous).

【完全加性集函数】 如果在空间X的完全加法族中$\mathfrak{B}$上定义的实值集函数$\Phi(E)$满足如下的完全可加性：$E_j\in\mathfrak{B}, E_j\cap E_k=\varnothing(j\neq k)$蕴涵$\Phi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\Phi(E_j)$，则称$\Phi(E)$为$\mathfrak{B}$上的**完全加性集函数**(completely additive set function)或简称为**加性集函数**. 对应于它的上变差$\overline{V}(E)$，下变差$\underline{V}(E)$，全变差$V(E)$亦均为$\mathfrak{B}$上的完全加性集函数，且对于任意的$E\in\mathfrak{B}$，$\Phi(E)=\overline{V}(E)+\underline{V}(E)$成立(**Jordan 分解**(Jordan decomposition)). 又

$V(E)=\sup\sum_{j=1}^{n}|\Phi(E_j)|$成立.其中sup为对于$E$的所有分割$E=\bigcup_{j=1}^{n}E_j(E_j\in\mathfrak{B}_j;\ E_j\cap E_k=\varnothing,\ j\neq k)$所取的上确界.

有界变差(即$V(E)$有界)的连续加性区间函数可以扩张为完全加性集函数. 有界变差的加性区间函数的概念是有界变差函数概念的推广,(→有界变差函数).

设在$\mathfrak{B}$上有完全加性集函数Φ和测度†μ，且$\mu(E)=0$蕴涵$\Phi(E)=0$，则称集函数Φ是**μ绝对连续的**(μ-absolutely continuous). 这与下述说法等价：对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$\mu(E)<\delta$时，就有$|\Phi(E)|<\varepsilon$. 又如果对于给定的Φ，μ，存在$E_0\in\mathfrak{B}$，使得$\mu(E_0)=0$，且对于所有$E\in\mathfrak{B}$，有$\Phi(E)=\Phi(E\cap E_0)$，则称集函数Φ为**μ奇异的**(μ-singular). 特别当X为Euclid空间，μ为Lebesgue测度时，就略去μ而简称为**绝对连续的**(absolutely continuous)和**奇异的**(singular).

在σ有限†测度空间$(X,\mathfrak{B},\mu)$中，任意的完全加性集函数$\Phi(E)$可以唯一地表示为μ绝对连续函数与μ奇异函数的和(**Lebesgue 分解定理**(Lebesgue's decomposition theorem)). 为使$\Phi(E)$为μ绝对连续的充分必要条件是，$\Phi(E)$可表示为X上关于μ为可积的一个函数f的不定积分$\int_E fd\mu$(**Radon-Nikodym 定理**).

【集函数的微分】 设E为$\boldsymbol{R}^m$中的Lebesgue可测†集. 设Q为包含E的正立方体，$m(E)/m(Q)$(m为Lebesgue测度)关于满足$E\subset Q$的所有正立方体Q的上确界，记作$r(E)$，称为E的**正则性参数**(parameter of regularity). 例如，如果E为正立方体，则$r(E)=1$; 如果E为矩形，则$r(E)$是E的最小边长与最大边长的比. 对于可测集的序列$E_n(n=1,2,\cdots)$，如果存在α，使$r(E_n)>\alpha>0\ (n=1,2,\cdots)$，则称$E_n$为**正则序列**(regular sequence). 又当所有E_n均含有$\boldsymbol{R}^m$的一点P，且E_n的直径†收敛于0时，则称$\{E_n\}$收敛于点P.

当给定$\boldsymbol{R}^m$中的集函数Φ时，对于收敛于点P的闭集的正则序列$\{E_n\}$，令

$$l=\limsup(\Phi(E_n)/m(E_n)),$$

当$\{E_n\}$遍历所有这种序列时l的上确界，称为Φ在P处的**一般上导数**(general upper derivative)，记作$\overline{D}\Phi(P)$. 同样地，Φ在P处的**一般下导数**(general lower derivative) $\underline{D}\Phi(P)$为对于所有收敛于P的闭集的正则序列$\{E_n\}$, $\liminf(\Phi(E_n)/m(E_n))$的下确界. 又如果不取$\{E_n\}$为闭集的正则序列而代之以收敛于$P$的闭区间的正则序列，则与上面的$\overline{D}\Phi(P)$ ($\underline{D}\Phi(P)$)相对应的量记作$\bar{\Phi}(P)$ ($\underline{\Phi}(P)$)，称为Φ在P处的**寻常上(下)导数**(upper (lower) derivative in the ordinary sense). $\overline{D}\Phi$, $\bar{\Phi}$等都是从集函数Φ所导出的点函数，显然，$\underline{D}\Phi(P)\leqslant\underline{\Phi}(P)\leqslant\bar{\Phi}(P)\leqslant\overline{D}\Phi(P)$. 当$\overline{D}\Phi(P)=\underline{D}\Phi(P)$时，把这个值记作$D\Phi(P)$，如果$D\Phi(P)$有限，则称它为$\Phi$在$P$处的**一般导数**(general derivative)，而Φ称为在点P处是**一般可导的**(derivable in the general sense). 又在$\bar{\Phi}(P)=\underline{\Phi}(P)$时，则把这个值记作$\Phi'(P)$，如果$\Phi'(P)$有限，则称它为$\Phi$在$P$处的**寻常导数**(ordinary deri-

vative),而称 Φ 在 P 处是**寻常可导的**(derivable in the ordinary sense). 对此有以下的定理: 1) 完全加性集函数几乎处处[†]一般可导 (H. Lebesgue). 2) 有界变差的加性区间函数几乎处处寻常可导(Lebesgue). 3) 加性区间函数 Φ 在几乎所有使得 $\bar{\Phi}(P) < \infty$ 或 $\underline{\Phi}(P) > -\infty$ 的点处寻常可导.

设在 Euclid 空间中给定集合 A 与可测集的一个集合 $\mathfrak{S}$, 对于任意的 $x \in A$, 有以 n 为中心,一边为 $a_n(x)$ 的正方立体的序列 $\{C_n(x)\}$ 与之对应, 又设有 $E_n \in \mathfrak{S}$, $a_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$, $E_n \subset C_n(x)$, $m(E_n)/m(C_n(x)) > \varphi(x) > 0$. 其中 $\varphi(x)$ 为只由 x 确定而与 n 无关的数. 这样的序列 $\{E_n\}$ 也常称为**正则序列**. 这时,能从 E_n 的集合中取出可数个互不相交的 $E_j \in \mathfrak{S}$, 使得 $m\left(A - \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = 0$. 这个命题称为 **Vitali 覆盖定理**(Vitali's covering theorem), 它在证明前段叙述的命题中起着根本的作用.

【Dini 导数】 对于在 $\boldsymbol{R}$ 的区间 I 上有定义的实值函数 $f(x)$, 称 $\limsup_{h \to +0} (f(x+h) - f(x))/h$ $(\liminf_{h \to +0} (f(x+h)-f(x))/h)$ 为 f 在 x 处的**右方上(下)导数** (right hand upper (lower) derivative), 记作 $\bar{f}^+(x)$ $(\underline{f}^+(x))$ 或 $\bar{D}^+f(x)$ $(\underline{D}^+f(x))$. 同样地,以 $h \to -0$ 代替 $h \to +0$,则可定义**左方上(下)导数**(left hand upper (lower) derivative) $\bar{f}^-(x)(\underline{f}^-(x))$ 或 $\bar{D}^-f(x)(\underline{D}^-f(x))$. 又 $h \to 0$(正负均可)时, 相应的上(下)极限称为**上(下)导数** (upper (lower) derivative), 记作 $\bar{f}'(x)(\underline{f}'(x))$. $\bar{f}'(x) = \max(\bar{f}^+(x), \bar{f}^-(x))$, $\underline{f}'(x) = \min(\underline{f}^+(x), \underline{f}^-(x))$. 这些导数称为 **Dini 导数** (Dini derivative). 又在 x 处取值为 $\bar{f}'(x)$ $(\underline{f}'(x))$ 的函数 $\bar{f}'(\underline{f}')$,称为 f 的**上(下)导函数** (upper (lower) derived function). 由于 f 的增量函数 Φ 是集函数, 对于 Φ 作上述的 $\bar{D}\Phi$, $\bar{\Phi}$, 并分别记作 $\bar{D}f$, $\bar{f}$, 也称它们为 f 的一般上导数, 寻常上导数等. 在这种情形, f 的寻常上(下)导数与上述的上(下)导数的值 $\bar{f}'(x)$ $(\underline{f}'(x))$ 相等. 又通常意义的可微即是 Dini 导数的值都相等且有限(→微分学).

关于这些导数, 以下的 **Denjoy-Young-Saks 定理**成立: 1) 如果在 I 的每个点处, $f(x)$ 的 Dini 导数之一, 例如, 右方上导数 $\bar{f}^+(x)$为有限,则在 I 上几乎处处存在左方下导数$\underline{f}^-(x)$,且 $\bar{f}^+(x) = \underline{f}^-(x)$. 2) 如果在 I 的每个点处, $f(x)$ 的两个同侧 Dini 导数有限, 或 $\bar{f}'(x)$ (或 $\underline{f}'(x)$) 为有限,则 $f(x)$ 在 I 上几乎处处可微. 3) 使 $\lim_{h \to 0} |\{f(x+h)-f(x)\}/h| = \infty$ 的 x 的集合为零集[†]. 4) 特别是在 $f(x)$ 为可测函数的情形, 如果在 I 的每个点处, $f(x)$ 的 Dini 导数之一为有限,则在 I 的几乎所有点处, $f(x)$ 为近似可导[†], 且它的近似导数与 Dini 导数相等.

【微分与积分的关系】 如果 $f(P)$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 上的 Lebesgue 可积[†]的点函数, 则 $\Phi(E) = \int_E f(P)dm(P)$是绝对连续的完全加性集函数,且在几乎所有点 P 处 $D\Phi(P) = f(P)$.反之, 如果 Φ 为绝对连续的完全加性集函数,则$\Phi(E) = \int_E D\Phi(P)\,dm(P)$. 如果 Φ 仅是加性集函数, 则 $D\Phi(P)$ 可积,且由

$$\Phi(E) = \int_E D\Phi(P)\,dm(P) + \Psi(E)$$

(这里 Ψ 为奇异函数)可得 $\Phi(E)$ 的 Lebesgue 分解. 特别是, 如果 F 为单调递增的加性区间函数, 对满足 $I \subset I_0$ 的所有区间 I, 有

$$F(I) \geqslant \int_I DF(P)\,dm(P).$$

【参】 [1] F. Hausdorff, Mengenlehre, Teubner,第三版 1935(中译本: F.豪斯道夫,集论,科学出版社, 1960);
[2] S. Saks, Theory of the integral, Warsaw, 1937. 另→测度的[参].

长度和面积 [英 length and area 法 longueur et aire 德 Länge und Flächenmass 俄 длина и площадь 日 長さ, 面積] **【曲线的长度】** 从区间 $I: a \leqslant u \leqslant b$ 到 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ 的连续映射 C: $p = p(u) = (x_1(u), \cdots, x_k(u))$, 称为连续弧[†]. 内接于 C 的折线的长度的上确界,称为 C 的 (Jordan 意义下的)**长度**. 即长度 $l(C)$ 等于对所有分割 $a = u_0 < u_1 < \cdots < u_m = b$ 取的 $\sup \sum_{i=1}^{m} |p(u_i) -$

$p(u_{i-1})|$. 对于连续弧 $C:p=p(u)\ (u\in I)$ 与连续弧序列 $C_n:p=p_n(u)(u\in I,\ n=1,2,\cdots)$, 如果在 I 上 $p_n(u)\to p(u)$, 则 $l(C)\leqslant\liminf_{n\to\infty} l(C_n)$. 这个性质称为长度的**下半连续性** (lower semi-continuity). 设 $C:p=p(u)\ (u\in I)$ 与 $C_1:p=q(v)\ (v\in I_1)$ 为给定的两条连续弧, 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在从 I_1 到 I 的同胚 $u=h_\varepsilon(v)$, 使在 I_1 上 $|p(h_\varepsilon(v))-q(v)|<\varepsilon$ 成立, 则称 C 与 C_1 (在 Fréchet 意义下) **等价** (equivalent). 等价连续弧的长度相等. 开区间或圆周的连续象称为曲线†. 它的长度由它所包含的连续弧的长度的上确界来定义. 等价性与连续弧的情形同样定义. 等价曲线的全体所成的族, 称为 **Fréchet 曲线** (Fréchet curve), 其长度唯一确定.

当且仅当确定连续弧 C 的各函数 $x_i(u)$ 为有界变差†时, 长度 $l(C)$ 为有限. 此时称 C 为**可求长的**或**有长** (rectifiable) 曲线. 在这种情形下, $\partial x_i/\partial u$ 在 I 上几乎处处†存在, 且

$$(1)\qquad l(C)\geqslant\int_a^b\left(\sum_{i=1}^k(\partial x_i/\partial u)^2\right)^{1/2}du$$

成立. 等号当且仅当各 $x_i(u)$ 为绝对连续时成立. 在等价于 C 的连续弧中, 存在称为**由弧长表示** (representation in terms of arc-length) 的如下的 C_1. $C_1:q=q(s)\ (0\leqslant s\leqslant l(C))$, 且每条连续子弧 $q=q(s)\ (0\leqslant s\leqslant s'(\leqslant l(C)))$ 的长度都等于 s'. 对于 C_1, (1) 中的等号显然成立. 在 C 为曲线的情形, 同样的讨论仍然成立. 当曲线 C 的任意连续子弧的长度均为有限时, 就称 C 为**局部可求长的**或**局部有长的** (locally rectifiable). 以 Λ_1 表示 $\boldsymbol{R}^k$ 的一维 Hausdorff 测度†, 令 I 上对应于 $p\in\boldsymbol{R}^k$ 的点数为 $n(p)$, 则 $l(C)=\int n(p)\,d\Lambda_1(p)$ 成立 (大津賀信, Nagoya Math. J., **3** (1951), 125—126).

【曲面面积】 以下考察 $\boldsymbol{R}^3$ 内曲面†的面积 (以[1]为主要参考文献). 与曲线情形不同, 当内接多面体的表面接近于曲面时, 多面体的表面积不一定趋于一个定值. H. A. Schwarz 在 1880 年的书信中给出了如下的例. 如果以大小相同的三角形为各个面所成的内接多面体表面逼近高为 h 半径为 r 的圆柱面, 则由三角形的高 b 与底边 a 之比的适当取法, 可使多面体的表面积趋近于任意的值(但 $\geqslant 2\pi rh$)(图 1).

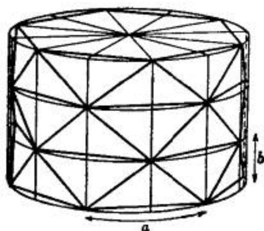


图 1

【Lebesgue 面积】 H. Lebesgue 考虑了以下的定义. 一般地设 A 为平面域, T 为从 A 到 $\boldsymbol{R}^3$ 内的连续映射. (T,A) 称为(一张)曲面. 对于两曲面 (T,A) 与 (T',A') 以及集合 $B\subset A\cap A'$, 令 $d(T,T',B)=\sup_{w\in B}|T(w)-T'(w)|$. 设 $(T,A),(T_1,A_1),(T_2,A_2),\cdots$ 为已给, 如果 $A_n\uparrow A$ 且 $d(T,T_n,A_n)\to 0$, 则称 (T_n,A_n) 收敛于 (T,A), 或 T_n 收敛于 T, 记作 $T_n\to T$. 现在, 特别当 A 由有限个三角形所构成, 而在每个三角形上 T 为线性时, 即 A 在映射 T 下的象由三角形所组成时, 采用符号 (P,F), 其面积记作 $a(P,F)$. 在此, 把收敛于给定的一般曲面 (T,A) 的序列 $(P_n F_n)$ 的全体记作 Φ, $\inf_{\Phi}\liminf_{n\to\infty} a(P_n,F_n)$ 称为 (T,A) 的 **Lebesgue 面积** (Lebesgue area), 记作 $L(T,A)$ 或 $L(T)$. 由定义, 存在序列 $\{(P_n,F_n)\}$, 满足 $P_n\to T$ 且 $a(P_n,F_n)\to L(T,A)$. 与长度的情形相同, 面积也具有下半连续性. 即如果 $T_n\to T$, 则 $L(T,A)\leqslant\liminf_{n\to\infty} L(T_n,A_n)$. 在 A 为 Jordan 域的情形, 不用 Φ 而用满足 $F_n\uparrow A$ 与 $P_n(w)\to T(w)$ 的序列 $\{(P_n,F_n)\}$ 的全体 Φ^*, 仍得同样的值.

设 $f(x,y)$ 是定义在正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ 上的连续函数. 当固定 x (或 y) 而将 $f(x,y)$ 看作 y (或 x) 的函数时, 把它记作 $f_x(y)$ (或 $f_y(x)$). 如令其全变差†为 $V(x)$

(或 $V(y)$), 则当 $\int_0^1 V(x)\,dx + \int_0^1 V(y)\,dy < \infty$ 时, 称 $f(x, y)$ 为在 **Tonelli 意义下有界变差** (bounded variation in the sense of Tonelli). 而且如果对于几乎所有 x 与 y, $f_x(y)$ 与 $f_y(x)$ 均为绝对连续†, 则称 $f(x, y)$ 为在 **Tonelli 意义下绝对连续** (absolutely continuous in the sense of Tonelli). 在定义域为平面域的情形, 仍可同样来定义. 今设曲面 (T, A) 由函数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ 所表示, 它们在 A 内均在 Tonelli 意义下有界变差且绝对连续, 且偏导数 $x_u, x_v, \cdots, z_v$ 均为平方可积. 在这些条件下, C. B. Morrey 证明, $L(T, A) = \iint_A J\,du\,dv < \infty$. 其中 $J = (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2)^{1/2}$, J_1, J_2, J_3 分别为变换 $(u, v) \to (y, z)$, (z, x), (x, y) 的函数行列式†.

【Geöcze 问题】 用内接于曲面 (T, A) 且收敛于 (T, A) 的序列 $\{(P_n, F_n)\}$ 的全体代替 Φ 所得的面积是否等于 $L(T, A)$ 的问题, 称为 **Geöcze 问题** (Geöcze problem). 在 A 为 Jordan 域的情形, 附加 F_n 的边界内接于 A 的边界的条件, 竟得到肯定的解答. 上面已经给出了 Schwarz 的例, 但如果形成 (P_n, F_n) 的各三角形的最大底边与最小高的比取为一致有界, 则对于由 Tonelli 意义的绝对连续函数 $F(u, v)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1)$ 所表示的曲面 S, 已经知道 $a(P_n, F_n)$ 趋近于 $L(S)$, 且后者等于 $\int_0^1\int_0^1 J\,du\,dv$ ([1] p. 74).

【Geöcze 面积】 考察曲面 (T, A). 设 $\boldsymbol{R}^3$ 的坐标面为 E_1, E_2, E_3, T 与 $\boldsymbol{R}^3$ 到 E_i $(i = 1, 2, 3)$ 上的射影的合成变换为 T_i. 如果给 A 内的多角形 π 标出正向, 令它在变换 T_i 下附有方向的象为 C_i, 则 z 关于 C_i 的阶† $O(z; C_i)$ 为可测. 令 $v_i(T, \pi) = v_i = \iint_{E_i} |O(z; C_i)|\,dx\,dy$ $(z = x + iy)$, $v(T, \pi) = v = (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^{1/2}$. 把 A 内有限个不相重合的多角形所成的集合记作 S, 则

$$(2)\qquad V(T, A) = \sup_S \sum_{\pi \in S} v(T, \pi)$$

称为 **Geöcze 面积** (Geöcze area). 在 $V(T, A) < \infty$ 的情形, 如果代替积分 $|O(z; C_i)|$ 而以积分 $O(z; C_i)$ 来定义 u_i, 且与上面的做法相同, 用 u_i 定义 $U(T, A)$, 则 $U(T, A)$ 与 $V(T, A)$ 相等. 不等式 $V(T_i, A) \leqslant V(T, A) \leqslant V(T_1, A) + V(T_2, A) + V(T_3, A)$ 是显然的.

【Peano 面积】 同样地, 考察 (T, A) 与 $\pi \subset A$. 设 τ 为 $\boldsymbol{R}^3$ 到 $\boldsymbol{R}^3$ 内任意平面 E 上的射影, C' 为 π 的边界在合成映射 $\tau \circ T$ 下的象. 令 $v(T, \pi, E) = \iint_E |O(z; C')|\,dx\,dy$ $(z = x + iy)$ 以及 $\phi(T, \pi) = \sup_E v(T, \pi, E)$, 类似于 (2), 定义

$$P(A, T) = \sup_S \sum_{\pi \in S} \phi(T, \pi),$$

称它为 **Peano 面积** (Peano area). 岡村博用积分映射度†来代替积分 $|O(z; C')|$, 给出了面积的定义 ([5]). 上面定义的 L, V, P 三者相等. 从而 L 与 V 的值对于 $\boldsymbol{R}^3$ 的正交变换是不变的.

【曲面面积的其他定义】 根据上述成为 Peano 面积基础的 Peano 的想法, 利用以上 E, π, τ 等记号, 以 $m(\pi, E)$ 表示 $\tau \circ T(\pi)$ 的二维 Lebesgue 测度, 并令 $\mu(\pi) = \sup_E m(\pi, E)$, 就可以把 $\sup_S \sum_{\pi \in S} \mu(\pi)$ 取作面积的定义. 如果不用 $\mu(\pi)$ 而用 $v(\pi) = (m^2(\pi, E_1) + m^2(\pi, E_2) + m^2(\pi, E_3))^{1/2}$, 则得到 **Banach 面积** (Banach area), 如果取 $\iint |O(z; C_i)|\,dx\,dy$ 以代替 $m(\pi, E_i)$, 则得前述的 Geöcze 面积. 此外, 对于 $\boldsymbol{R}^3$ 内任意的 Borel 集 X 亦可考虑种种面积. 设将 $\boldsymbol{R}^3$ 分割为具有相同直径 d 的半开立方体的网格 $M_1, M_2, \cdots$, 把 $M_j \cap X$ 到各坐标面上的射影的 Lebesgue 测度记为 $m_1^{(j)}$, $m_2^{(j)}$, $m_3^{(j)}$. $\sum_j ((m_1^{(j)})^2 + (m_2^{(j)})^2 + (m_3^{(j)})^2)^{1/2}$ 当 $d \to 0$ 时的极限, 称为 **Janzen 面积** (Janzen area). 令 $M_j \cap X$ 到平面上的射影的 Lebesgue 测度 (关

于 $\boldsymbol{R}^3$ 内平面的集合)的上确界为 m_j，则称当 $d\to 0$ 时的极限 $\lim\sum_j m_j$ 为 **Gross 面积**(Gross area). 又 C. Carathéodory 用可数个直径小于 δ 的凸集 $K_1, K_2, \cdots$ 来覆盖 X，令 K_j 到平面上射影的 Lebesgue 测度的上确界为 m_j'，用 $\delta\to 0$ 时的极限 $\lim\sum_j m_j'$ 作为面积的定义. 如果将 K_j 限为球，则这样得到的极限是 X 的 Hausdorff 测度[†] $\Lambda_2(X)$ 乘以 $\pi/4$. 关于其他定义以及它们之间关系→[4].

最后考察关于曲面 (T, A) 的面积的测度论定义. 把 A 内对应于象 $T(A)$ 的点 p 的点数记为 $m(p)$，称为映射 T 的**重复度函数** (multiplicity function). 在此可以考虑采取 $\Lambda(T, A)=4^{-1}\pi\int n(p)d\Lambda_2(p)$ 作为面积的定义. 然而，为使 $\Lambda(T, A)$ 恒等于 $L(T, A)$ 就必须改变重复度函数的定义([3], [6]). 实际上，如果 $x=\varphi(u)$, $y=\psi(u)$ $(0\leqslant u\leqslant 1)$ 为填满正方形 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$ 的 Peano 曲线[†]，则 $A=\{0<u<1, 0<v<1\}$, $T: x=\varphi(u)$, $y=\psi(u)$, $z=0$ 所确定的曲面 (T, A) 的 Lebesgue 面积等于 0，但 $\Lambda(T, A)\geqslant 1$.

【有界变差映射】 设 (T, A) 为从 w 平面的域到 z 平面内的映射. 设 π, $O=O(z;C)$, S 等与前述意义相同，令 $O^+(z;C)=(|O|+O)/2$, $O^-(z;C)=(|O|-O)/2$. $v(T,\pi)=\iint|O(z;C)|dxdy$, $v^\pm(T,\pi)=\iint O^\pm(z;C)dx\,dy$(符号取相同顺序)，又令 $V(T, A)=\sup_S\sum_{\pi\in S}v(T,\pi)$, $V^\pm(T,A)=\sup_S\sum_{\pi\in S}v^\pm(T,\pi)$, 以及 $N(z;T,A)=\sup_S\sum_{\pi\in S}|O(z;C)|$, $N^\pm(z;T,A)=\sup_S\sum_{\pi\in S}O^\pm(z;C)$. N, $N^\pm$ 在 z 平面内为下半连续，故可定义 $W(T,A)=\iint Ndxdy$, $W^\pm(T,A)=\iint N^\pm dx\,dy$. W, W^+, W^- 分别称为 T 的**全变差** (total variation), **正变差** (positive variation), **负变差** (negative variation). $W=W^++W^-$, $V=W$, $V^\pm=W^\pm$ 成立. 当 $W(T, A)<\infty$ 时，称 (T, A) 为**有界变差** (bounded variation). 作为与此有关的概念，当以下两个条件得到满足时，称 (T, A) 为**绝对连续** (absolutely continuous): 1) 对于任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 $S\ni\pi$ 面积的和不超过 δ 的(如上所述的) S, $\sum_{\pi\in S}v(T,\pi)\leqslant\varepsilon$ 恒成立. 2) 对于任意的包括边界包含在 A 内的多角形 π_0 与 π_0 的多角形分割 S, $v(T,\pi_0)=\sum_{\pi\in S}v(T,\pi)$ 也成立. 特别，如果 A 的面积有限，(T, A) 绝对连续，则 (T, A) 为有界变差.

设 (T, A) 为从 w 平面到 z 平面内的有界变差连续映射. 集函数 $V(T,A)$, $V^+(T,A)$, $V^-(T, A)$ 的微分 $V'(w)$, $V'_+(w)$, $V'_-(w)$ 在 A 内几乎处处存在且有限. $J(w)=V'_+(w)-V'_-(w)$ 称为**广义 Jacobi 行列式** (generalized Jacobian). $J(w)=\pm V'(w)$ 几乎处处成立. 如果 $x(u, v)$, $y(u, v)$ 几乎处处可微，则 $J(w)$ 与通常的函数行列式[†]几乎处处相等. 其次，当 (T, A) 为从 A 到 $\boldsymbol{R}^3$ 内连续映射且 $V(T, A)<\infty$ 时，设 $J_i(w)$ 为对于 (T_i, A) 的广义 Jacobi 行列式，令 $J(w)=(J_1^2(w)+J_2^2(w)+J_3^2(w))^{1/2}$, 称它为对于 (T,A) 的广义 Jacobi 行列式. 于是，$V'(w)=J(w)$ 在 A 内几乎处处成立. 从而得到

$$V(T, A)\geqslant\iint_A J(w)du\,dv, \tag{3}$$

等号当且仅当各 (T_i, A) 绝对连续时成立.

【Fréchet 距离】 设 (T_1, A_1), (T_2, A_2) 为两曲面，A_1 与 A_2 之间的同胚的全体所成的族 H 非空. 此时，这两张曲面间的 **Fréchet 距离** (法 écart) 由

$$\|T_1, T_2\|=\inf_{h\in H}\sup_{w\in A_1}|T_1(w)-T_2(h(w))|$$

来定义. 它满足距离公理. 如果 $\|T_1, T_2\|=0$, 则称 T_1 与 T_2 (在 Fréchet 意义下)**等价**. 等价曲面的全体所成的集合，称为 **Fréchet 曲面** (Fréchet surface). 等价曲面的 Lebesgue 面积相同，从而，对于 Fréchet 曲面，可以一意地定义

Lebesgue 面积. 在 $L(T, A) < \infty$ 时,求与(T, A)等价且在(3)内等号成立的(T_1, A_1)的问题,称为曲面的**表示问题**(representation problem). 这个问题可以在下面叙述的广泛的形式下求得解决. 设$(T, A): x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$. 当 $x_u, x_v, \cdots, z_v$ 在A内几乎处处存在并为平方可积且在A内 $E = G$ $(E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)$ 与 $F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0$ 几乎处处成立时,称(T, A)为**广义保形映射**(generalized conformal mapping). 给定具有有限 $L(T, A)$ 的 (T, A) 时,存在给出与它等价且满足 $L(T_1, A_1) = \iint_A E_1\, du dv$ 的曲面的广义保形映射(T_1, A_1),这里设E_1为对应于(T_1, A_1)的量.

【参】 [1] L. Cesari, Surface area, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1956; [2] L. Cesari, Recent results in surface area theory, Amer. Math. Monthly, **66** (1959), 173—192; [3] H. Federer, Measure and area, Bull. Amer. Math. Soc., **58** (1952), 306—378; [4] G. Nöbeling, Über die Flächenmasse im Euklidischen Raum, Math. Ann., **118** (1941—43), 687—701; [5] H. Okamura (岡村博), On the surface integral and Gauss-Green's theorem, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto, Ser. A. Math., **26** (1951), 5—14; [6] T. Radò, Length and area, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1948; [7] T. Radó, Lebesgue area and Hausdorff measure, Fund. Math., **44** (1957), 198—237; [8] S. Saks, Theory of the integral, Warsaw, 1937.

Denjoy 积分

[英 Denjoy integral 法 intégrale de Denjoy, totalisation 德 Denjoysches Integral 俄 интеграл Данжуа 日 ダンジョワ積分]

【研究的历史】 实变量 x 的实值函数 $f(x)$ 为 Lebesgue 可积†的充分必要条件是,存在绝对连续†函数 $F(x)$,且在几乎所有†点处有 $F'(x) = f(x)$(→集函数),一般说来,一个函数的导数不一定 Lebesgue 可积. 而由于 $f(x)$ 为 Lebesgue 可积与$|f(x)|$为 Lebesgue 可积等价,因此,广义 Riemann 可积的函数不一定 Lebesgue 可积(→Lebesgue 积分). 就这个意义说,Lebesgue 积分论还留有拓广的余地. A. Denjoy 于 1912 年利用超限归纳法给出了狭义 Denjoy 积分的构造性定义,它同时成为 Lebesgue 积分与 Riemann 积分的一个推广,从而解决了这个问题. 尔后, Н. Н. Лузин 给出了这种积分的描述性定义. 另外, Denjoy 应用构造性方法, А. Я. Хинчин 应用描述性方法,几乎同时各自独立地定义了更广泛的积分(广义 Denjoy 积分)(1916).

另一方面,与 Denjoy 无关, O. Perron 将与微分方程 $y' = f(x, y)$ 解的存在性证明相同的方法应用于 $y' = f(x)$,给出了与狭义 Denjoy 积分等价的积分(Perron 积分)的定义(1914). 然而,由于对无界函数的积分,仅有 Denjoy 积分是不够的,因此定义了与 Denjoy 积分不同的积分,作为广义 Riemann 积分和 Lebesgue 积分的推广。例如,有与三角级数的系数问题相联系而出现的 Denjoy(1921), J. C. Burkill(1951). R. D. James(1950) 等的积分([2],[3]),有与 Fourier 级数的共轭函数问题相联系而出现的 А. Н. Колмогоров 等的"A积分"([4])(1951). 又功力金二郎等把积分作为简单函数的泛函所成的空间的某种完备化,从这种观点出发,与 Колмогоров 等无关地定义了"E. R. 积分",它包括A积分作为其特殊情形,并使 $1/x^a (a \geqslant 1)$ 型的函数也可积(1956[5],[6]).

以上所述,主要是关于一个实变量的情形,至于向多变量情形的推广方面,有 M. Looman, S. Kempisty, 中西しづ等的研究([7],[8]).

【近似导数】 对于实数空间的可测集†E的一点ξ,当 $\lim_{h\to 0, k\to 0} m\{E \cap (\xi - h, \xi + h)\}/(h + k) = 1$ 成立时,称ξ为E的**密集点**(point of density). E的几乎所有的点都是密集点(Lebesgue **密集点定理**(density theorem)). 设E为以x_0为密集点的可测集, $F(x)$ 为E上的可测函数. 如果存在数 l,使对任意的 $\varepsilon > 0$, $\{x \mid l - \varepsilon \leqslant (F(x) - F(x_0))/(x - x_0) \leqslant l + \varepsilon, x \in E\}$ 以 x_0 为密集点,则称 l 为 $F(x)$ 在 x_0 处的**近似导数**(approximate derivative),记作 $l = \mathrm{AD}F(x_0)$. 当 $\mathrm{AD}F(x_0)$ 存在时,称 $F(x)$ 在 x_0 处**近似可导**(approximately derivable). 如果 $F(x)$ 在集合E的每个点处均近似可导,则称 $F(x)$ 在E内近似可导. 在 $F'(x)$ 存在的点, $\mathrm{AD}F(x)$ 存在, $\mathrm{AD}F(x) = F'(x)$; 但反之,存

在连续函数 $F(x)$，使 $ADF(x)$ 在正测度集 E 上存在，但在 E 的几乎所有点处 $F'(x)$ 并不存在.

【一般绝对连续性】 设 E 为实数的一个集合，$F(x)$ 为定义域包含 E 的实值函数. 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对两端点属于 E，且 $\sum(b_n - a_n) < \delta$ 的互不重叠的任意的区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$，有 $\sum|F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$，则称 $F(x)$ 在 E 上为**绝对连续** (absolutely continuous). 我们用 AC 表示在 E 上绝对连续的函数所成的族. 如果 $F(x)$ 在 E 上连续，且有 $E = \bigcup E_n$，而在每个 E_n 上 $F \in AC$，则称 $F(x)$ 在 E 上为**一般绝对连续** (generalized absolutely continuous)，记作 $F \in GAC$. 如果 $F \in GAC$，则在几乎所有点处 $ADF(x)$ 存在.

如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使对两端点属于 E，且 $\sum(b_n - a_n) < \delta$ 的互不重叠的区间序列 $\{[a_n, b_n]\}$，有 $\sum_n O\{F; [a_n, b_n]\} < \varepsilon$ (这里 $O\{F; [a_n, b_n]\}$ 表示 $F(x)$ 在 $[a_n, b_n]$ 上的振幅，即函数值在 $[a_n, b_n]$ 上的上确界与下确界的差)，则称 $F(x)$ 在 E 上为**狭义绝对连续**(absolutely continuous in the restricted sense) 或**绝对连续**$(*)$，记作 $F \in AC(*)$. 用从 AC 定义 GAC 同样的方法可以定义 $F(x)$ 在 E 上**狭义一般绝对连续**(generalized absolutely continuous in the restricted sense) 或**一般绝对连续**$(*)$. 在 E 上为一般绝对连续$(*)$的函数 $F(x)$ 记作 $F \in GAC(*)$. 如果 $F \in GAC(*)$，则 $F'(x)$ 在几乎所有点处存在.

【Denjoy 积分的定义】 设 $f(x)$ 为定义于 $I = [a, b]$ 上的实值函数. 如果对于 $f(x)$，在 I 上存在属于 GAC 的函数 $F(x)$，使 $ADF(x) = f(x)$ 在 I 的几乎所有点处成立，则称 $f(x)$ 为**广义 Denjoy 可积**(integrable in the wide sense of Denjoy) 或 **D 可积**. $F(b) - F(a)$ 称为 $f(x)$ 在 I 上的 **Denjoy 积分**或 **D 积分**，记作 $(D)\int_a^b f(x)dx$. $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的**不定 D 积分**. 同样地，如果用 $GAC(*)$ 代替 GAC，用导数代替近似导数，则可定义**狭义 Denjoy 积分** (Denjoy integral in the restricted sense) 或 **D$(*)$ 积分**. 在 I 上除属于某个可数集的点外满足 $ADF(x) = f(x) \neq \pm\infty$ 的连续函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的不定 D 积分，除属于某个可数集的点外满足 $F'(x) = f(x) \neq \pm\infty$ 的连续函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的不定 D$(*)$ 积分. Lebesgue 可积函数是 D$(*)$ 可积的，D$(*)$ 可积函数是 D 可积的. 几乎处处满足 $f(x) \geqslant 0$ 的 D 可积函数是 Lebesgue 可积的.

【积分的构造性定义】 设 S 是一个泛函，它的定义域是集 $K(S; I)$ (I 遍历所有闭区间的集)的并 $\bigcup_I K(S; I)$，这里 $K(S; I)$ 是定义在闭区间 $I = [a, b]$ 上的实值函数的集. 如果 $f \in K(S; I)$，则以 $S(f; I)$ 记 S 所取的值 $S(f)$. 当 S 满足以下条件时，就称 S 为**积分算子** (integration operator): 1) 如果 $f \in K(S; I_0)$ ($I \subsetneqq I_0$)，则 f 在 I 上的限制† $f_I \in K(S; I)$，而且 $S(f; I)$ 是区间 I ($\subsetneqq I_0$) 的连续加性区间函数†. 2) 设 $I_1 = [a, b]$，$I_2 = [b, c]$，$I = [a, c]$ ($a < b < c$). 当 f 定义在 I 上时，如果 $f_1 = f_{I_1}$，$f_2 = f_{I_2}$，而 $f_1 \in K(S; I_1)$，$f_2 \in K(S; I_2)$，则 $f \in K(S; I)$. 3) 如果 $f(x) \equiv 0$，则 $f \in K(S; I)$，且 $S(f; I) = 0$.

对于两个积分算子 S_1，S_2，如果对任意的 I，有 $K(S_1; I) \subset K(S_2; I)$，而对 $f \in K(S_1; I)$ 有 $S_1(f; I) = S_2(f; I)$，则称 S_2 包含 S_1，或 S_1 弱于 S_2. D 积分，D$(*)$ 积分包含 Lebesgue 积分，且在满足以下条件 C)，H)(D$(*)$积分的情形为 H$(*)$)的积分算子 S 中为最弱: C) **Cauchy 条件**. 如果对定义在 I_0 上的每个函数 f 以及每个区间 $[a + \delta, b - \varepsilon] = I \subsetneqq [a, b] = I_0$，有 $f_I \in K(S; I)$，且如果有限极限 $\lim_{\delta \to 0, \varepsilon \to 0} S(f; I)$ 存在，则 $f \in K(S; I_0)$ 而且 $S(f; I_0)$ 与该极限值相等. H) **Harnack 条件**. 设 E 为 I_0 的闭子集，$\{I_k\}$ 为邻接于由集合 E 与 I_0 的端点所成的集合的闭区间序列. 设 f 为 I_0 上的满足下列三个条件的函数: (i) $f_E \in K(S; I_0)$，这里 f_E 的定义是当 $x \in E$，$f_E(x) = f(x)$，而在其他点处，$f_E(x) = 0$; (ii) 对每个 k，$f_k = f_{I_k} \in K(S; I_k)$; (iii) 如果 $\{I_k\}$ 为无穷序列，

则$\sum_k |S(f_k; I_k)| < +\infty$且$\lim_{k\to\infty} O(S; f_k; I_k) = 0$（这里 $O(S; f_k; I_k)$ 为 $S(f_k)$ 在 I_k 上的**变差** (variation) 即 J 遍历 $\subset I_k$ 的所有区间时 $|S(f_J; J)|$的上确界）. 在这些条件下，有 $f \in K(S; I_0)$ 且 $S(f; I_0) = S(f_E; I_0) + \sum S(f_k; I_k)$.

又 H) 的条件 (iii) 以$\sum_k O(S; f_k; I_k) < +\infty$代替时，就称为 H(*) 条件，广义 Denjoy 积分(或狭义 Denjoy 积分)的构造性定义，就是从 Lebesgue 积分出发，在满足 C), H), 或 H(*) 的条件下，应用超限归纳法†进行扩张来得到.

【Perron 积分】 如果对于在区间$[a, b]$上定义的函数 $f(x)$，存在定义于同一区间上的函数 $F(x)$，使对所有 x，1) $\underline{F}(x) \geqslant f(x)$，2) $\underline{F}(x) \neq -\infty$，或 1') $\overline{F}(x) \leqslant f(x)$，2') $\overline{F}(x) \neq +\infty$（其中$\overline{F}(x)$ ($\underline{F}(x)$)表示 $F(x)$ 的上(下)导数†)，则 $F(x)$ 相应地称为 $f(x)$ 的**强函数** (major function) 或**弱函数** (minor function). 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $f(x)$ 的强函数 $\psi(x)$，弱函数 $\varphi(x)$，使 $\psi(b) - \varphi(b) < \varepsilon$，则称 $f(x)$ 为 **Perron 可积** (integrable in the sense of Perron)，并将 $\inf_\psi \{\psi(b) - \psi(a)\} = \sup_\varphi \{\varphi(b) - \varphi(a)\}$ 这个值记作 $(P)\int_a^b f(x)dx$.

【积分的性质】 如果$\{f_n\}$为区间 I 上D可积函数的非减序列，且它们在 I 上的D积分为上方有界，则 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 仍在 I 上D可积，且 $(D)\int_I f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}(D)\int_I f_n(x)\,dx$.

如果 $F(x)$ 在$[a, b]$上为有界变差†函数，$g(x)$ 为D可积函数，则 $F(x)g(x)$ 在$[a, b]$上仍为D可积；如果把 $g(x)$ 的不定D积分记作 $G(x)$，则以下的等式成立:

$$(D)\int_a^b F(x)g(x)dx = G(b)F(b) - G(a)F(a) - \int_a^b G(x)dF(x).$$

式中最后一项为 Stieltjes 积分†（**分部积分法** (integration by parts)）.

如果 $F(x)$ 为$[a, b]$上的非减函数，$g(x)$ 为D可积函数，则存在$[a, b]$上的点 ξ 使以下等式成立:

$$(D)\int_a^b g(x)F(x)dx = F(a)(D)\int_a^\xi g(x)dx + F(b)(D)\int_\xi^b g(x)dx$$

(**第二平均值定理**).

以上诸定理，在以 $(D(*))$ 代替 (D) 时亦成立.

【参】 [1] S. Saks, Theory of the Integral, Warsaw, 1937; [2] R. D. James, Integrals and summable trigonometric series, Bull. Amer. Math. Soc., **61** (1955), 1—15; [3] R. Henstock, Theory of integration, Butterworths, London, 1963; [4] Ю. С. Очан, Обобщенный интеграл, Мат. Сб. **28** (70): 2 (1951), 293—336; [5] K. Kunugi (功力金二郎), Sur une généralisation de l'intégrale, Fundamental and Applied Aspects of Math., **1** (1959), 1—30; [6] H. Okano (岡野初男), Sur une généralisation de l'intégrale (E. R) et un théorème général de l'intégration Par Parties, J. Math. Soc. Japan, **14** (1962), 430—442; [7] S. Kempisty, Sur les fonctions absolument continue d'intervalle, Fund. Math., **27** (1936), 10—37; [8] S. Nakanishi (中西しづ), Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions I, II, Osaka Math. J., **7** (1955), 69—102, 157—178, [9] 泉信一, 積分論, 大阪帝国大学数学講演集 II, 岩波, 1937.

级数 [英 series 法 série 德 Reihe 俄 ряд 日 級数] 【级数的收敛和发散】 设 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$)为给定的实数或复数序列，则写成 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ 的形式称为**级数**，记为 $\sum_{n=1}^\infty a_n$ 或简记为 $\sum a_n$，a_n 称为级数 $\sum a_n$ 的第 n 项或**项** (term)，$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 称为第 n 部分和或**部分和** (partial sum). 有限数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的和 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 有时也叫做级数. 为区别起见，称它为**有限级数** (finite series)，而上述以无穷数列作成的级数称为**无穷级数**(infinite series). 以下在本条中论述的主要是无穷级数. 当部分和序列$\{s_n\}$收敛†于极限 s 时，就称级数 $\sum a_n$ 收敛且**具有和** s；或若称该级数**收敛** (converge) 或是**收敛的**(convergent)，称 s 为**和** (sum)，记为 $\sum_{n=1}^\infty a_n = s$，或 $\sum a_n = s$. 记号 $\sum a_n$ 习惯上用于形式的级数以及它的和这两种意义. 在与其他种类的和（一

求和法)相区别时,也称形式和为 **Cauchy 和**. 当 $\{s_n\}$ 不收敛时,就称该级数**发散**(diverge),或者是**发散的** (divergent). 特别是,随着 $\{s_n\}$ 振动†或(纯)发散†于 $+\infty$ (或 $-\infty$),就称所给级数振动,或(纯)发散于$+\infty$(或$-\infty$).

根据数列收敛性的 Cauchy 判别准则†,级数 $\sum a_n$ 收敛的充分必要条件是,对任意给定的正数 ε, 总能取充分大的 N, 使得对所有满足 $m>n>N$ 的 $m, n, |s_m-s_n| = |a_{n+1}+\cdots+a_m| < \varepsilon$ 都成立. 因而若 $\sum a_n$ 收敛,则当 $n\to\infty$ 时, $a_n\to 0$. 但反之不一定成立.

关于级数收敛的主要性质如下: 1)若级数 $\sum a_n$, $\sum b_n$ 分别收敛于 a, b, 则 $\sum(a_n+b_n)$ 收敛于 $a+b$. 2) 若 $\sum a_n$ 收敛于 a, c 为常数,则 $\sum ca_n$ 收敛于 ca. 3) 从级数中去掉有限多项,或往其中添加有限多项,级数的收敛性不变. 4) 若级数 $\sum a_n$ 收敛,则把相连的若干项用括号括起来所得的级数,仍然收敛于原来的和. 然而,反之,即使用括号括起来的级数收敛,原来的级数也不一定收敛(例: $1-1+1-1+\cdots$振动,但$(1-1)+(1-1)+\cdots=0$).

【正项级数】 各项都是正实数或 0 的级数,称为**正项级数**(positive term series). 因为正项级数的部分和数列 $\{s_n\}$ 构成单调递增†数列,所以正项级数收敛的充分必要条件为 $\{s_n\}$ 有界. 例如,对 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>0)$, 当 $p>1$ 时,因 $s_n<2^{p-1}/(2^{p-1}-1)$,故级数收敛;当 $p\leqslant 1$ 时,则由 $s_{2^{m+1}}>1+(m+1)/2$ 得知级数发散. 又如对**等比级数** (geometrical series) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}(a>0)$, 若 $a<1$, 则由 $s_n=(1-a^n)/(1-a)$得知级数收敛;若 $a\geqslant 1$, 则由 $s_n\geqslant n$得知级数发散.

在正项级数的收敛性检验法中,我们举出如下几种(以下在本节中, $\sum a_n$, $\sum b_n$ 表示正项级数): 1) 若 $\{a_n\}$ 单调递减, 则 $\sum_n a_n$ 与 $\sum_\nu 2^\nu a_{2^\nu}$ 同时收敛或发散 (Cauchy **并项检验法** (condensation test)). 2) 对 $\sum a_n$, 设 $\{a_n\}$ 为单调递减数列,若存在定义在$[1,\infty)$上的单调递减函数 $f(x)$, 使 $f(n)=a_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 则 $\sum a_n$ 与$\int_1^\infty f(x)dx$ 同时收敛或发散 (Cauchy **积分检验法** (integral test)$\left(\text{例: } \sum\frac{1}{n^p}\text{与}\int_1^\infty\frac{dx}{x^p}\right)$. 3) 设对 $\sum a_n$, $\sum b_n$, 存在正的常数 k, 使除有限个 n 外, $a_n\leqslant kb_n$ 均成立,则当 $\sum b_n$收敛时, $\sum a_n$ 也收敛;若除有限个 n 外, $kb_n\leqslant a_n$ 均成立,则当 $\sum b_n$ 发散时, $\sum a_n$ 也发散 (**比较检验法** (comparison test). 4) 若除有限个 n 外, $a_{n+1}/a_n\leqslant b_{n+1}/b_n$ $(a_n>0, b_n>0)$ 成立,则当$\sum b_n$ 收敛时,$\sum a_n$ 也收敛; 若除有限个 n 外,$a_{n+1}/a_n\geqslant b_{n+1}/b_n$ 成立,则当 $\sum b_n$ 发散时, $\sum a_n$ 也发散. 至于其他各种检验法→公式 10.

【绝对收敛】 对级数 $\sum a_n$ (a_n 为实数或复数), 当 $\sum|a_n|$ 收敛时, 就称 $\sum a_n$ **绝对收敛** (absolutely converge). 收敛而不绝对收敛的级数称为**条件收敛** (conditionally converge). 绝对收敛的级数一定收敛. 特别把 a_n 为实数且形如 $\sum a_n=\sum(-1)^{n-1}\alpha_n$ $(\alpha_n>0)$ 的级数称为**交错级数**(alternating series). 对交错级数$\sum a_n$, 若$|a_n|\downarrow 0$, 则该级数收敛 (**Leibniz 定理**). 例如, $\sum(-1)^{n-1}/n^p(p>0)$ 收敛. 把绝对收敛级数的项的次序任意变更而得到的级数仍然绝对收敛,且其和不变(**Dirichlet 定理**). 实数项的条件收敛级数,适当变更其项的次序,就能使它以任意给定的实数为和, 也能使它发散于 $+\infty$ 或 $-\infty$, 或者使它成为振动的级数 (**Riemann 定理**).

再者, 当任意改变级数的项的次序后得到的级数恒收敛, 且其和不变时, 就称它**无条件收敛** (unconditionally converge), 或**交换收敛** (commutatively converge). 实数或复数级数无条件收敛的充分必要条件是它绝对收敛. 级数的概念可推广到完备赋范空间† 中去. 把绝对值换为范数,也能定义绝对收敛的概念,但在一般情形下,与实数级数的情形不同,绝对收敛与交换收敛不一定等价.

【二重级数】 有两个指标的数列, 即从自然数集 $\boldsymbol{N}$ 的直积 $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ 到实数或复数集内

的映射，称为**二重数列**（double sequence），记为$\{a_{mn}\}$或$\{a_{m,n}\}$。所谓$\{a_{mn}\}$有**极限值** l，是指对任意的正数 ε，都存在自然数 $N(\varepsilon)$，使当$m > N(\varepsilon)$，$n > N(\varepsilon)$时，恒有$|a_{mn} - l| < \varepsilon$；记作 $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{mn} = l$。它同诸如$\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn})$等累极限有不同的意义。如果$\lim\limits_{m\to\infty} a_{mn} = \alpha_n$存在，而$a_{mn}$关于$n$又一致收敛于$\alpha_n$，且$\lim \alpha_n = l$也存在，则$\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}} a_{mn}$存在，并等于$l$。当给定$\{a_{mn}\}$时，写成 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a_{mn}$ 的形式，称为**二重级数**（double series），记为 $\sum a_{mn}$。与二重级数相对应，前面所说的级数也称为**简单级数**（simple series）。

当二重级数 $\sum a_{mn}$ 的部分和

$$s_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}$$

所构成的二重序列收敛时，就称 $\sum a_{mn}$**收敛**，s_{mn} 的极限就称为 $\sum a_{mn}$ 的**和**；当 s_{mn} 不收敛时，就说 $\sum a_{mn}$ **发散**。当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ 对每个m收敛于b_m时，以b_m为项的级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\right)$称为**行累级数**（repeated series）；又当$\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn}$对每个$n$收敛于$c_n$时，以$c_n$为项的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}\right)$$

称为**列累级数**。不过，即使行和列累级数都收敛，其和也未必相等，原级数也不一定收敛。然而，当二重级数 $\sum a_{mn}$ 本身收敛时，若对应于每个m，$\sum\limits_{n} a_{mn}$ 都收敛，则行累级数也收敛且与 $\sum a_{mn}$ 有相同的和。关于列累级数也有同样的结论。

当二重级数 $\sum a_{mn}$ 的各项 a_{mn} 为非负实数时，称它为**正项二重级数**。对正项二重级数，若$\sum\limits_{m,n} a_{mn}$，$\sum\limits_{m}\sum\limits_{n} a_{mn}$，$\sum\limits_{n}\sum\limits_{m} a_{mn}$ 中的某一个收敛，则其余的也收敛，且其和均相等；若其中某一个发散，则其余的也发散。其次，若 $\sum a_{mn}$ 的**对角部分和**（diagonal partial sum）

$$s_{mm} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} a_{kl}$$

收敛于a，则 $\sum a_{mn}$ 也收敛于a。

对二重级数 $\sum a_{mn}$，当 $\sum |a_{mn}|$ 收敛时，就称 $\sum a_{mn}$ **绝对收敛**；当 $\sum a_{mn}$ 收敛但不绝对收敛时，就称它**条件收敛**。绝对收敛的二重级数，无论怎样变更其项的次序，或无论按怎样的次序写成简单级数，它总是收敛于同一个和。

【级数的积】 对于两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$，令 $c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$，称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 为 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 的 **Cauchy 积**（Cauchy product）。1）若 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 及其积 $\sum c_n$ 分别收敛于 A，B 及 C，则 $AB = C$（**Abel 定理**）。2）若 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 都收敛，且其中至少有一个绝对收敛，则其积也收敛，且 $(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$（**Mertens 定理**）。3）若 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 都绝对收敛，则 $\sum c_n$ 也绝对收敛（**Cauchy 定理**）。4）若 $\sum a_n$，$\sum b_n$ 收敛（即使非绝对收敛），且$\{na_n\}$，$\{nb_n\}$有下界，则其积 $\sum c_n$ 也收敛，且$(\sum a_n)(\sum b_n) = \sum c_n$（**Hardy 定理**）。

【无穷乘积】 设给定数列$\{a_n\}$，$a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$，写成$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots$的形式，称为**无穷乘积**（infinite product），记为 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 或简记为$\prod a_n$。a_n称为它的第n项，而前n项的积 $p_n = a_1a_2\cdots a_n$，称为它的第n**部分积**（partial product）。当数列$\{p_n\}$收敛于非零极限p时，就称该无穷乘积**收敛**于p，记为$\prod a_n = p$。当$\{p_n\}$不收敛，或者收敛于0时，就称该无穷乘积**发散**。对于含有有限个取值为零的项的无穷乘积的收敛或发散，仅就除掉那有限个零后的无穷乘积来考虑。对于含有无限多个取值为零的项的无穷乘积，一般不予讨论。

无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充分必要条件为：对任意给定的正数ε，都能适当地确定自然数N，使当 $m, n > N$ 时，$|p_m/p_n - 1| < \varepsilon$ 恒成立。若 $\prod a_n$ 收敛，则 $a_n \to 1$，但反之未必成

立.

把无穷乘积的项写成 $1+a_n$,而用 $\Pi(1+a_n)$ 这样的形式来处理是方便的. 如果取对数的虚部 $i\theta$ 满足 $0\leqslant\theta<\pi$,则 $\Pi(1+a_n)$ 与 $\sum\log(1+a_n)$ 同时收敛或发散. 若 $a_n\geqslant 0$,则 $\Pi(1+a_n)$ 与 $\sum a_n$ 同时收敛或发散.

对 $\Pi(1+a_n)$,当 $\Pi(1+|a_n|)$ 收敛时,就称 $\Pi(1+a_n)$ **绝对收敛**. 绝对收敛的无穷乘积,与绝对收敛的级数一样,不管怎样变更其项的次序,仍然绝对收敛,其积的值也不变 (→公式 10 VI).

【函数项级数的逐项微分】 函数项级数 $\sum f_n(x)$ 的一致收敛性,用它的部分和序列 $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$ 的一致收敛†性来定义 (→一致收敛). 如果以在实数区间 I 上可微的函数为项的级数 $\sum f_n(x)$ 至少在 I 的一点处收敛,且 $\sum f_n'(x)$ 又在 I 内一致收敛,那么 $\sum f_n(x)$ 也在 I 内一致收敛,且其和 $f(x)$ 可微,并有 $f'(x)=\sum f_n'(x)$ (**逐项微分** (termwise differentiation)). 再者,若以复平面的域 D 内的全纯函数为项的级数 $\sum\varphi_n(z)=\varphi(z)$ 在 D 内广义一致收敛,则 $\sum\varphi_n'(z)$ 也在 D 内广义一致收敛,其和为 $\varphi'(z)$ (**Weierstrass 二重级数定理**(theorem of double series)). 还有关于逐项积分→积分学.

【级数的数值计算法】 只有在特殊情况下,无穷级数 $\sum a_n$ 的有限部分和 s_n 才能作为 n 的简单函数来求出. 最简单的例子就是**等差级数(算术级数)** (arithmetic progression), **等比级数(几何级数)** (geometric progression),它们的前 n 项和分别为

$$s_n=\frac{n}{2}(2a+(n-1)d),$$

$$s_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1},$$

其中 a 为首项, d, q 分别表示公差和公比. 从第二个式子可得,若 $q<1$,则收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 的和为 $a/(1-q)$. 自然数的幂的和,利用 $r+1$ 次 Bernoulli 多项式† $B_{r+1}(x)$,可表示为下面的形式:

$$\begin{aligned}s_n&=1^r+2^r+\cdots+n^r\\&=[B_{r+1}(x)]_1^{n+1}/(r+1).\end{aligned}$$

Euler 曾研究过这个和.在他的"Ars conjectandi"中列举了到 $r=10$ 的公式.

如果对于级数 $\sum u_n$ 的一般项 u_n, 能找到数列 v_n, 使 $u_n=v_n-v_{n-1}$, 则 $s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n=v_n-v_0$. 例如, 若设 $u_n=n(n+1)(n+2)$, 则 $v_n=n(n+1)(n+2)(n+3)/4$, 又因 $v_0=0$, 所以 $s_n=v_n$ (→差分法[和分]). 对以三角函数为项的级数,也能用类似的方法求和.

即使不求有限部分和, 有时也能用其他方法求得无穷级数 $\sum a_n$ 的和. 例如,当 r 为偶数时, $\zeta(r)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^r}$ 能用 Bernoulli 数† 来表示 (公式 10). 特别是 $\zeta(2)=\pi^2/6$, $\zeta(4)=\pi^4/90$ 等.

对收敛快的级数的和, 由适当的有限和可以得到它的近似值,对收敛慢的情形,可以作适当的变换. 若作出项之间的逐次差分, 而 k 阶差分†精确地等于 0, 则

$$s_n=\sum_{i=1}^{k}\binom{n+1}{i}\Delta^{i-1}u_1.$$

由于随着阶数的增高, 差分的绝对值往往急剧减小,所以,把级数的项以差分置换后再处理就会容易些. 利用差分的方法, 在级数论里有熟知的 **Euler 变换** (Euler's transformation). 尤其下面的公式, 在收敛较慢的交错级数的和的数值计算中经常使用:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}}.$$

在进行级数和的数值计算中, 往往先算出开始若干项的数值,再对剩下的项实行上述变换,并算出变换后的级数的适当的有限部分和.

在近似计算级数和时, 总是需要把它的误差估计出来. 用函数的高阶微分或者差分能推断出误差的最大值. 关于级数的变换, 除上述 Euler 变换外,还有 Марков, Kummer 的方法. 前者是把级数的各项分别用另外一个收敛的级数表示, 后者是从所考虑的级数中再减去另外

一个收敛级数．此处所说的另外一个级数，是选择这样的级数，即它与原先的级数有类似的形式，且其和能用一个统一的式子给出（K. Knopp [2]).

【级数与积分】 在函数的数值计算中，有时利用下面的 **Euler-Maclaurin 公式**([14]):

$$f(x+\xi\omega)=\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}f(z)dz$$
$$+\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{\omega^r}{r!}B_r(\xi)\Delta_\omega f^{(r-1)}(x)\right)+R_m,$$
$$R_m=-\omega\int_0^1\frac{\bar{B}_m(\xi-z)}{m!}f^{(m)}(x+\omega z)dz,$$

其中

$$\bar{B}_m(\xi-z)=\begin{cases}B_m(\xi-z+1), & \xi<z,\\ B_m(\xi-z), & \xi\geqslant z.\end{cases}$$

因为这里是以 Bernoulli 多项式 $B_r(\xi)$ 为项,又有 $0\leqslant\xi\leqslant 1$,所以当变量之差 $\xi\omega$ 大时，上式就比 Taylor 展开式收敛快．与此类似的还有以 Euler 多项式† $E_r(\xi)$ 为项的 **Boole 公式** (N. E. Nörlund [13])．这些公式也可反过来用于进行级数部分和的近似计算．（另外关于公式的优劣或 Bernoulli, Euler 两多项式的数值表→[10][11].)

作为解析地计算无穷级数和的其他方法，还有用残数定理†把级数变换为定积分的方法．设解析函数 $f(z)$ 在闭曲线 C 内部除极点 $a_n(n=1,2,\cdots,k)$外为全纯,且 C 将点 $z=m(m=1,2,\cdots,N)$ 包含在其内部,则有

$$\sum_{m=1}^{N}f(m)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\pi(\cot\pi z)f(z)\,dz$$
$$-\sum_{n=1}^{k}\mathrm{Res}\left[\pi(\cot\pi z)f(z)\right]_{z=a_n}.$$

当左端为 $\sum_{m=1}^{N}(-1)^m f(m)$ 时，只要把右端中的 $\cot\pi z$ 换为 $\operatorname{cosec}\pi z$ 即可．此处 $\mathrm{Res}[F(z)]_{z=a}$ 表示 $F(z)$ 在 a 点的残数†．关于 C 的曲线积分,将 C 作适当的变形,往往容易求得．例如直接变成 $\int_C=0$ 的情形,或能用最速下降法†计算渐近值的情形,等等.

Fourier 变换的 **Poisson 求和公式** (Poisson's summation formula)

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(2\pi m)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-in\tau}\,d\tau$$

也能用到变换上去．此处,设 $\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(2\pi m+t)$ 在 $0\leqslant t<2\pi$ 上一致收敛,且能展成 Fourier 级数†．对于 θ 函数†的变换公式

$$\theta(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\pi m^2x}=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi n^2/x}$$
$$=x^{-1/2}\theta\left(\frac{1}{x}\right),$$

就是其应用的一例.

还有整个地与本条有关的概念→求和法，幂级数，Dirichlet 级数，Fourier 级数等.

【参】 [1] K. Knopp, Theory and application of infinite series, Blackie & Son, London-Glasgow, 1928. (这是[2]的英译本); [2] K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, 1921, 第四版 1947; [3] T. J. I'A. Bromwich, An introduction to the theory of infinite series, Macmillan, 1926; [4] 岡田良知，級数論，岩波，1936; [5] 岡田良知，級数概論，岩波全書，1952; [6] 藤原松三郎，微分積分学 I, 内田老鶴圃，1934; [7] 高木貞治，解析概論，岩波，第三版 1961; [8] 小松勇作，解析概論，広川，1962．关于级数的数值计算，[9] L. B. W. Jolley, Summation of series, Chapman & Hall, London, 1925; [10] 林桂一，数値計算，岩波，1941; [11] 林桂一，数値計算の理論と応用，岩波，1949; [12] 森口繁一-宇田川銈久-一松信，数学公式 II, 岩波全書，1957; [13] N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer, 1924．关于 Enler-Maclaurin 公式，[14] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Fonctions d'une variable réelle, 第 VI 章，Actualités Sci. Ind., Hermann, 1952, 第二版，1961.

求和法 [英 summation (of series) 法 sommation (de série) 德 Summation (der Reihe) 俄 суммирование (рядов) 日 総和法] 直到十九世纪初,人们处理级数时,都没有考虑收敛和发散的问题,所以发生了各种各样的矛盾.首先正确地定义了收敛概念的是 A. L. Cauchy (1821)．其后一段时间内人们只讨论了收敛的级数．然而在许多问题上,对于在 Cauchy 意义下不收敛的级数，对其和加以适当的解释已成为必要．所以，从十九世纪末叶作为发散级数论开始了求和法的研究．不过在这以前已经有

了 L. Euler, N. H. Abel 等人的求和法定理，只是没有受到求和法的看待而已．把Cauchy意义下不收敛的级数的和给予适当的解释而加以定义的方法，一般称为**求和法**．在历史上，下面将要阐述的 Cesàro 求和法是最先出现的方法，而现在能用线性变换对求和法进行统一的论述．另外，"summation"这个词，除本条解释的"求和法"外，也在求普通的级数和的数值计算法(→级数)的意义下使用．

【线性变换】 由数列 $\{s_n\}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，用矩阵 $T=(a_{ik})$ $(i,k=0,1,2,\cdots)$ 作另一数列 $\sigma_n=\sum_{i=0}^{\infty}a_{ni}s_i(n=0,1,2,\cdots)$，把它简记为 $\{\sigma_n\}$，称映射 $T:\{s_n\}\to\{\sigma_n\}$ 为**线性变换或一次变换** (linear transformation)．如果 $a_{ik}=0$ $(k>i)$，则矩阵 T 称为**三角形阵**．若当 $\{s_n\}$ 收敛时 $\{\sigma_n\}$ 也收敛，则称 T 为**半正则变换** (semi-regular transformation)；若 $\{\sigma_n\}$ 还与 $\{s_n\}$ 收敛于同一极限，则称 T 为**正则变换** (regular transformation)．若对于任意的有界数列 $\{s_n\}$，恒有 $\{\sigma_n\}$ 收敛，则称 T 为**正规变换** (normal transformation)． 对于三角形正则变换 T，若当 $s_n\to\infty$ 时也有 $\sigma_n\to\infty$，则称 T 为**完全正则变换** (totally regular transformation)．

至少对于一个发散序列 $\{s_n\}$，相应的 $\{\sigma_n\}$ 收敛的正则变换 T，一般称为**求和法**．这时把 $\{\sigma_n\}$ 的极限，称为用求和法 T 确定的 $\{s_n\}$ 的**和** (sum)，并称 $\{s_n\}$ 为 ***T* 可和的** (T-summable)．对于求和法 T_1，把 T_1 可和的数列的全体记为 $D(T_1)$．对于两个求和法 T_1, T_2，当 $D(T_1)=D(T_2)$ 时，就说 T_1 与 T_2 是**等价的**．当 $D(T_1)\subset D(T_2)$ 时，就说 T_1 比 T_2 是**弱**(weak)**求和法**，T_2 比 T_1 是**强** (strong) **求和法**．如果 $D(T_1)\not\subset D(T_2)$ 且 $D(T_1)\not\supset D(T_2)$，则说 T_1 与 T_2 是互相**不可比** (non-comparable) **求和法**．

现将已知的关于线性变换的主要定理列举如下：1) **小岛-Schur 定理**．T 为半正则变换的充分必要条件是：i) 对任意的 k，$\lim_{n\to\infty}a_{nk}$ 存在；ii) $t_n=\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|$ 收敛且 $\{t_n\}$ 为有界数列；iii) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}$ 存在．这时下面的等式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}s_k=\left(\lim_{n\to\infty}s_n\right)\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}a_{nk}\right)\left(s_k-\lim_{n\to\infty}s_n\right).$$

特别是，当 $s_n\to 0$ 时，$\{\sigma_n\}$ 收敛的充分必要条件是条件 i), ii) 满足．此时下面的等式成立：

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}s_k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\lim_{n\to\infty}a_{nk}\right)s_k$$

(I. Schur, J. Reine Angew. Math., **151** (1921); 小島鉄蔵, Tôhoku Math. J., **12** (1917))．2) **Toeplitz 定理**．T 为正则变换的充分必要条件是：i′) 对任意的 k, $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=0$; ii); 和 iii′) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}=1$ (O. Toeplitz, Prace Mat.-Fiz., **22** (1914))．作为特殊情形，如果满足 ii) 和 i″) 对任意的 K, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=K}^{\infty}a_{nk}=1$ 均成立，则 T 是正则变换 (Perron 定理)．3) **Schur 定理**．T 为正规变换的充分必要条件是：i), ii), iii) 和 iv) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $K>0$，使对任意的 n，$\sum_{k=K+1}^{\infty}|a_{nk}|<\varepsilon$ 成立．4) 三角形正则变换 T 为完全正则变换的充分必要条件是：除有限多个 k 外，$a_{nk}\geqslant 0$ 成立．

【求和法分论】 以下叙述主要的求和法及其性质．其中 Cesàro, Abel, Borel 求和法是最重要的．

【Cesàro 求和法】 今设

$$(1-x)^{-\alpha-1}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{\alpha}x^n,$$

$$A_n^{\alpha}=\binom{n+\alpha}{n}\sim\frac{n^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$(1-x)^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n=(1-x)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}s_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}s_n^{\alpha}x^n,$$

于是就由级数 $u_0+u_1+\cdots$ 定义了 $\{s_n^\alpha\}$, $s_n=\sum_{i=0}^{n}u_i$. 若当 $n\to\infty$ 时

$$\sigma_n^\alpha=s_n^\alpha/A_n^\alpha$$

收敛于 s, 就称 $\sum u_n$ 为 **(C, α) 可和或 α 次 Cesàro 可和** ((C, α)-summable) 于 s, 记为 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s(C,\alpha)$. 用此法得到的变换 T 记为 (C,α), 称为 **α 次 Cesàro 求和法.**

关于 (C, α) 求和法的主要定理将列举于下, 但通常对此求和法只考虑 $\alpha>-1$ 的情形. 所谓(C, -1)可和, 就是指 $\sum u_n$ 收敛且 $nu_n=o(1)$. $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s(C,0)$ 表示 $s=\lim_{n\to\infty}s_n$, 而 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=s(C,1)$ 表示 $s=\lim_{n\to\infty}(s_0+\cdots+s_{n-1})/n$. 1) 若 $\alpha>0$, 则 A_n^α 关于 n 递增, 若 $0>\alpha>-1$, 则递减; $A_n^0=1$; 若 $\alpha>-1$, 则 $A_n^\alpha>0$. 2) $s_n^{\alpha+\beta+1}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\beta}s_k^\alpha$, $A_n^\alpha-A_{n-1}^\alpha=A_n^{\alpha-1}$, $s_n^\alpha-s_{n-1}^\alpha=s_n^{\alpha-1}$. 3) (C,α) $(\alpha\geqslant 0)$ 为正则变换, 若 $\alpha>\beta>-1$, 则 $D(C,\alpha)\supset D(C,\beta)$. 4) 设 $\sum u_n=s(C,\alpha)$, $\sum u'_n=s'(C,\alpha)$, λ 为任意数, 则 $u_n=o(n^\alpha)$, $\sum(u_n+u'_n)=s+s'(C,\alpha)$, $\sum\lambda u_n=\lambda s(C,\alpha)$. 5) 设 $\sum u_n=s(C,\alpha)$, $\sum u'_n=s'(C,\beta)$, 再设其 Cauchy 积[†]为 $\sum v_n$, 则 $\sum v_n=ss'(C,\alpha+\beta+1)$(Chapman 定理). 如再设 $\sum_{k=0}^{n}A_k^\alpha|s_{n-k}^{\beta-\alpha-1}(u'_{n-k})|/A_n^\beta=O(1)$, 则 $\sum v_n=ss'(C,\beta)$(小島). 如果代替上式, 设 $\alpha', \beta'>-1$, $s_n^{\alpha'}(u_n)=O(n^{\alpha'})$, $s_n^{\beta'}(u'_n)=O(n^{\beta'})$, 则 $\sum v_n=ss'(C,\alpha'+\beta'+2)$ (G. Doetsch). 6) 设 α 为任意正整数, 则 $\sum u_n=s(C,\alpha)$成立的充分必要条件是: 当以 $u_n=(n+1)(v_n-v_{n+1})$ 定义 $\{v_n\}$ 时, $\sum v_n=s(C,\alpha-1)$ 成立 (G. H. Hardy, Proc. London Math. Soc., (2) **8** (1910)). 或者下面的条件 i), ii), iii) 成立也行: i) $b_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{\infty}s_k^{\alpha-2}/(k+1)\cdots(k+\alpha)$ 收敛; ii) $b_n=o(1)$ $(n\to\infty)$; iii) $(s_n^{\alpha-1}/A_n^{\alpha-1})+(n+\alpha)\Gamma(\alpha)b_{n+1}\to s(n\to\infty)$. 7) 设 $\sum u_n=s(C,\alpha)(\alpha>0)$, 若下列条件之一成立, 则 $\sum u_n$ 收敛 (这是一类 Tauber 型定理[†]): i) $nu_n=o(1)$; ii) $t_n=\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu=o(n)$; iii) $\sum n^p|u_n|^{p+1}<\infty$ (其中 $p\geqslant 0$); iv) $nu_n>-K$ (K 与 n 无关); v) $\liminf(s_m-s_n)\geqslant 0$, 此处按条件 $m>n\to\infty$, $m/n\to 1$ 取 lim inf. 这称为 R. Schmidt 条件. 8) 设 $\alpha'>\alpha>-1$, $\sum u_n=O(1)$ (C,α), $\sum u_n=s(C,\alpha')$, 则 $\sum u_n=s(C,\alpha+\varepsilon)$, 其中 $\varepsilon>0$ 为任意数.

对 $\sum u_n$, 设 $H_n^0=s_n$. 设 $\{H_n^0\}$ 的算术平均为 H_n^1, $\{H_n^1\}$ 的算术平均为 H_n^2, 依此可定义 $\{H_n^p\}$. 若

$$H_n^p\to s\ (n\to\infty),$$

则称级数 $\sum u_n$ **p 次 Hölder 可和**于 s, 记为 $\sum u_n=s(H,p)$, 这时的变换称为 **p 次 Hölder 求和法.** 如果 p 为正整数或 0, 则 p 次 Hölder 求和法与 p 次 Cesàro 求和法等价 (Knopp-Schnee 定理).

【Abel 求和法】 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}u_nr^n$ 的收敛半径为 1, 且当 $r\to 1$ 时有

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_nr^n\to s,$$

则称级数 $\sum u_n$ **A 可和或 Abel 可和** (A-summable) 于 s, 记为 $\sum u_n=s(A)$. 其变换矩阵记为 A, 而这个变换称为 **Abel 求和法.** 1) 若 $\sum u_n=s(A)$, 则 $\limsup_n|u_n|^{1/n}\leqslant 1$. 2) 若 $\sum u_n=s(A)$, $\sum u'_n=s'(A)$, λ 为任意数, 则 $\sum(u_n+u'_n)=s+s'(A)$, $\sum\lambda u_n=\lambda s(A)$, 并且 $\sum_{n=k+1}^{\infty}u_n=s-u_0-u_1-\cdots-u_k(A)$. 3) 设 $\sum u_n=s(A)$, $\sum u'_n=s'(A)$, 其 Cauchy 积为 $\sum v_n$, 则 $\sum v_n=ss'(A)$. 4) 设 $\sum u_n=s(A)$, 若下面的 Tauber 条件之一得到满足, 就有 $\sum u_n=s$: $nu_n=o(1)$; $t_n=\sum_{\nu=1}^{n}\nu u_\nu=o(n)$; $nu_n=O(1)$; $nu_n>-M$ (M 与 n 无关); lim inf

$(s_m - s_n) \geqslant 0$(当 $m > n \to \infty$, $m/n \to 1$ 时). 它们就是由 Tauber 所证明的最初形式的 Tauber 型定理†. 5) A 是正则变换. $D(C,\alpha) \subset D(A)$, 此处 $\alpha > -1$. 6) 设 $\sum u_n = s(A)$, $s_n \geqslant 0$, 则 $\sum u_n = s(C, 1)$. 另外,若 $\sigma_n^\alpha = O(1)$, 则 $\sum u_n = s(C, \alpha + \varepsilon)$, 此处 $\alpha > -1$, 且 $\varepsilon > 0$.

【Borel 求和法】 对 $\sum u_n$, 如果

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n x^n}{n!}$$

对一切 x 收敛,并且

$$u(x)/e^x \to s \ (x \to \infty)$$

成立,则称 $\sum u_n$ (按指数) **Borel 可和**于 s, 记为 $\sum u_n = s(B)$. 以 B 表示其变换,称为 **Borel 求和法**. 当

$$\int_0^\infty u(x) e^{-x} dx = s$$

时,就称 $\sum u_n$ **$\mathfrak{B}$ 可和(按积分 Borel 可和)**于s, 记为 $\sum u_n = s(\mathfrak{B})$. 则 1) B 是正则变换, $D(C, \alpha) \subset D(B)$(其中 $\alpha > -1$). $D(C,\alpha)$ 与 $D(\mathfrak{B})$ 不可比. 2) 当 $\sum_0^\infty u_n x^n$ 的收敛半径为 1 时,若 $\sum u_n = s(B)$, 则 $\sum u_n = s(A)$. 3) 当 $\sum_{k+1}^\infty u_n = s(B)$ 或 $(\mathfrak{B})$ 时,则 $\sum_0^\infty u_n = s + u_0 + u_1 + \cdots + u_k(B)$ 或 $(\mathfrak{B})$. 其逆不一定成立. 4) 若 $\sum u_n = s(B)$, 则 $|u_n|^{1/n} = o(n)$. 5) 设 $\sum u_n = s(B)$, $\sum u_n' = s'(B)$, λ 为任意数, 则 $\sum (u_n + u_n') = s + s'(B)$, $\sum \lambda u_n = \lambda s(B)$. 这命题对 $(\mathfrak{B})$ 也成立. 6) 当 $\sum u_n = s(B)$ 时, 若下列条件之一满足,则 $\sum u_n = s$: i) $\sqrt{n}\, u_n = o(1)$; ii) $\liminf (s_m - s_n) \geqslant 0$, 其中当 $m > n \to \infty$, $(m-n)\sqrt{n} \to 0$ 时取 $\liminf$. 7) 设 $\sum u_n = s(B)$, 若 $s_{n-1}^{\alpha-1} = o(n^{\alpha-1/2})$, 则 $\sum u_n = s(C, \alpha)$(其中 $\alpha \geqslant 0$). 8) 设 $\sum u_n = s(A)$, 若 $u(x) > -Mt^{-1}\exp t$, 则 $\sum u_n = s(B)$. 9) 设 $\{n_k\}$ 和 $\{n_k'\}$ 满足 $n_{k+1} > n_k'$, $n_k'/n_k > 1 + \varepsilon$ ($k = 1, 2, \cdots$; $\varepsilon > 0$), 而且 $u_\nu = 0$($n_k < \nu \leqslant n_k'$), 如果 $\sum u_\nu = s(B)$, 那么 $s_{n_k} \to s$($k \to \infty$).

设 $\sum u_n = s(\mathfrak{B})$, 而且

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^\lambda u(x)}{dx^\lambda} \right| e^{-x} dx$$

对所有的 $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$ 都收敛, 这时就称 $\sum u_n$ 是 **$|\mathfrak{B}|$ 可和的(绝对 Borel 可和的)**. 1) 若 $\sum |u_n|$ 收敛,则 $\sum u_n$ 是 $|\mathfrak{B}|$ 可和的, 但即使 $\sum u_n$ 收敛,它也未必 $|\mathfrak{B}|$ 可和. 若 $\sum u_n$ $|\mathfrak{B}|$ 可和,则 $\sum u_n = s(\mathfrak{B})$ 成立,将它记为 $\sum u_n = s(|\mathfrak{B}|)$. 2) 当 $\sum_0^\infty u_n = s(|\mathfrak{B}|)$ 时,则 $\sum_{k+1}^\infty u_n = s - (u_0 + u_1 + \cdots + u_k)(|\mathfrak{B}|)$. 3) 设 $\sum u_n = s(B)$, $\sum u_n' = s'(B)$, 且其中至少有一个还是 $|\mathfrak{B}|$ 可和的,则关于 Cauchy 积 $\sum v_n$ 有 $\sum v_n = ss'(|\mathfrak{B}|)$.

【Euler 求和法】 对 $\sum u_n$, 若当 $k \to \infty$ 时,

$$\left\{ \binom{k+1}{1} s_0 + \binom{k+1}{2} s_1 + \cdots + \binom{k+1}{k+1} s_k \right\} 2^{-(k+1)}$$

收敛于 s, 就称 $\sum u_n$ 是 **Euler 可和的**, 记为 $\sum u_n = s(E)$, 这时的变换称为 **Euler 求和法**. $\sum u_n = s(E)$ 的充分必要条件是 $\sum v_n = s$, 这里 $v_n = 2^{-(n+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$. 这个求和法是正则的. 设 $\sum u_n = s(E)$, 若下列条件之一满足, 则有 $\sum u_n = s$: i) $\sqrt{n}\ u_n = O(1)$; ii) $\liminf(s_m - s_n) \geqslant 0$, 此处当 $m > n \to \infty$, $(m-n)/\sqrt{n} \to 1$ 时取 $\liminf$. Cesàro 求和法与 Euler 求和法是不可比的. 此外,作为这个方法的推广,也已定义了 p 次 Euler 求和法(岡田良知[4]第 16 章).

【Nörlund 求和法】 对正数列 $\{p_n\}$, 设 $P_n = \sum_0^n p_\nu \to \infty (n \to \infty)$, 且 $p_n/P_n \to 0$ ($n \to \infty$), 这时,如果当 $n \to \infty$ 时

$$\left(\sum_{k=0}^n s_k p_{n-k} \right) \Big/ P_n = \left(\sum_{k=0}^n u_k P_{n-k} \right) \Big/ P_n$$

收敛于 s, 就称 $\sum u_n$ 对应于 $\{p_n\}$ **Nörlund 可和**,记为 $\sum u_n = s(N, \{p_n\})$. 这是正则线性变

换,称为 **Nörlund 求和法**. 设$\sum u_n = s(C, 1)$, 且$0 < p_0 \leqslant p_1 \leqslant \cdots$, 则 $\sum u_n = s(N, \{p_n\})$. Cesàro 求和法就是这个方法的特殊情形.

【M. Riesz 求和法】 设$\{\lambda_n\}$为发散于$+\infty$的递增数列,若当 $\tau \to \infty$ 时,

$$R(\lambda_n, k, \tau) = \Big(\sum_{\lambda_n < \tau} (\tau - \lambda_n)^k u_n\Big)\Big/\tau^k$$

收敛于 s, 则称 $\sum u_n$ **k 次 Riesz 可和**, 记为$\sum u_n = s(R, \lambda_n, k)$. 这是正则变换,称为 **$k$ 次 Riesz 求和法**. 特别当 $\lambda_n = n$ 时, $D(R, \lambda_n, k) = D(C, k)$.

【Riemann 求和法】 对级数 $\sum u_n$, 设 $u_0 = 0$. 如果对 $h > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^k$$

收敛,并且当 $h \to 0$ 时收敛于 s, 则称 $\sum u_n$**(R, k) 可和**于 s. 当 $k = 1$ 时, 也称为 **Lebesgue 求和法**. Lebesgue 求和法不是正则的. 当 $k = 2$ 时,称为 **Riemann 求和法**,它是正则的. 对此,当

$$\frac{2}{\pi}\sum s_n \frac{\sin nh}{n} \to s, \quad \frac{2}{\pi h}\sum s_n \left(\frac{\sin nh}{n}\right)^2 \to s \quad (h \to 0)$$

成立时,分别称为 (R_1), (R_2) 求和法,但(R_1)非正则,而 (R_2) 是正则的. 另外,若 $\sum u_n$ 是 (R_1) 可和的,则它也是 (R_2) 可和的, 但是 $(R, 2)$ 与 (R_2) 是不可比的.

其他 Hardy-J. E. Littlewood, E. Le Roy, Ch. de la Vallée-Poussin 等的求和法也是熟知的.

【参】 [1] T. J. I'A. Bromwich, Theory of infinite series, Macmillan, 1931; [2] K. Knopp, Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen, Springer, 1921, 第四版, 1947 (英译本: Theory and application of infinite series, Blackie, 1928); [3] G. H. Hardy, Divergent series, Clarendon Press, 1949; [4] 岡田良知, 級数論, 岩波, 1936; [5] 岡田良知, 級数概論, 岩波全書, 1952; [6] R. G. Cooke, Infinite matrices and sequence spaces, Macmillan, 1950; [7] K. Zeller, Theorie der Limitierungsverfahren, Erg. Math., Springer, 1958; [8] K. Chandrasekharan-S. Minakshisundaram, Typical means, Oxford Univ. Press, 1952; [9] H. R. Pitt, Tauberian theorems, Oxford Univ. Press, 1958.

渐近级数 [英 asymptotic series 法 série asymptotique 德 asymptotische Reihe 俄 асимптотический ряд 日 漸近級数] 【渐近展开】 设α为复平面(或 Riemann 面)上域D的边界点, 复函数 $\varphi_n(z)$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 在D内全纯†, 且当 z 从D的内部趋近于α时,

$$\varphi_{n+1}(z) = o(\varphi_n(z))$$

成立. 设 $f(z)$ 在域D与α的某邻域 U 的交集 $D \cap U$ 内为全纯, 当 z 由D的内部趋近于α时, 如果对所有的自然数 n,

$$f(z) = a_0\varphi_0(z) + a_1\varphi_1(z) + \cdots + a_n\varphi_n(z) + O(\varphi_{n+1}(z))$$

都成立,则称当 $z \in D$, $z \to \alpha$ 时, $f(z)$能**渐近地展开**为

$$(1) \qquad f(z) \sim a_0\varphi_0(z) + a_1\varphi_1(z) + \cdots + a_n\varphi_n(z) + \cdots$$

或称 $f(z)$ 能**渐近展开** (asymptotic expansion). 这时渐近展开的系数 $a_n$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是唯一确定的,这一事实由

$$a_0 = \lim_{z \to \alpha} f(z)/\varphi_0(z),$$

$$\cdots\cdots,$$

$$a_n = \lim_{z \to \alpha}\Big(f(z) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i\varphi_i(z)\Big)\Big/\varphi_n(z)$$

得知. α 可以是无穷远点.

实际上最常出现的 $\varphi_n(z)$ 的形式为 $\varphi_n(z) = \varphi(z)^n\psi(z)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$的情形,其中 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 在D内为全纯. 例如,设 $D = \{z \mid 0 < |z| < \infty, |\arg z| < \pi\}$, $\alpha = \infty$, 则下式成立:

$$(2) \quad \log\Gamma(z) - \left(\frac{1}{2}\log 2\pi + \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z\right) \sim \frac{B_2}{1\cdot 2}\frac{1}{z} - \frac{B_4}{3\cdot 4}\frac{1}{z^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{B_{2n}}{(2n-1)\cdot 2n}\frac{1}{z^{2n-1}} + \cdots,$$

其中 $B_{2n}$$(n = 1, 2, \cdots)$ 为 Bernoulli 数†. 从这个公式出发,当从D的内部 $z \to \infty$ 时,近似地有

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2}\, e^{-z}.$$

这就是 Stirling 公式†.

当 $f(z)$ 在α处为全纯时, 设 $D = \{z \mid 0 <$

$|z-\alpha|<r\}$，$\varphi_n(z)=(z-\alpha)^n$，则可以把它的 Taylor 展开式

(3) $$f(z)=a_0+a_1(z-\alpha)+\cdots+a_n(z-\alpha)^n+\cdots$$

看作渐近展开．反之，若 $f(z)$ 在 $0<|z-\alpha|<r$ 内单值全纯，且能渐近地展开为

(4) $$f(z)\sim a_0+a_1(z-\alpha)+\cdots+a_n(z-\alpha)^n+\cdots,$$

则 α 为 $f(z)$ 的可去奇点．从而 $f(z)$ 在 α 处能展开为 Taylor 级数．由渐近展开的系数的唯一性可知，(4)式右端的无穷级数在 $|z-\alpha|<r$ 内确实是一致收敛的，而且就等于 $f(z)$．

关于渐近展开的收敛性，有下列**Carleman 定理**([4])：设在 $\log(z-\alpha)$ 的 Riemann 面上，当从以 $z=\alpha$ 为顶点的任意角域内部 $z\to\alpha$ 时，渐近展开 (4) 成立，那末实际上渐近展开(4)是一致收敛的．

设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 都在D内全纯，且当 $z\in D$, $z\to\alpha$时能渐近地展开为 $z-\alpha$ 的幂级数，则由和与差 $f(z)\pm g(z)$，积 $f(z)g(z)$，商$f(z)/g(z)$ ($g(z)\neq 0$, $z\in D$) 所定义的函数也能渐近地展开为 $z-\alpha$ 的幂级数．并且 $\int f(z)\,dz$ 和 $f'(z)$ 也能渐近地展开为 $z-\alpha$ 的幂级数，这两个渐近级数与分别逐项积分和逐项微分 $f(z)$ 的渐近级数所得的级数相等（当 z 为实变量时，这一结论一般不成立）．

设 $\{a_n\}(n=0,1,2,\cdots)$ 为任意数列，D 为 $\log(z-\alpha)$ 的 Riemann 面上以 α 为顶点的任意角域．这时恒存在函数 $f(z)$，它在D内全纯，且当 $z\in D$, $z\to\alpha$时，能渐近展开为(4)式．这条定理最初由 T. Carleman 所证明，后来福原满洲雄(1937)改进了证明，佐藤德意(1949)又把它推广到了两个变量的情形．

【多变量的渐近级数】 实际上，在微分方程等理论中经常出现的问题（→非线性常微分方程的奇点），还是多变量的情形．对多元函数的渐近展开，能考虑各种形式．例如，设原点 $0=(0,\cdots,0)$ 是复 n 维空间内域 D 的边界点，复函数 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 在D与 0 的某邻域U的交集 $D\cap U$ 内全纯†，若当 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 从D的内部趋近于 0 时，对于所有的自然数 N，

(5) $$f(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{k_1+\cdots+k_n<N} f_{k_1\cdots k_n} z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}+O(|z_1|^N+\cdots+|z_n|^N)$$

都成立，就称 $f(z_1,\cdots,z_n)$ 当 $z\in D$, $z\to 0$时，能渐近地展开为

$$f(z_1,\cdots,z_n)\sim\sum_{N=1}^{\infty}\sum_{k_1+\cdots+k_n=N} f_{k_1\cdots k_n} z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}.$$

另外，代替(5)，若当 $z\in D$, $z_n\to 0$ 时，

(6) $$f(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{j=0}^{N-1} f_j(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n^j+O(|z_n|^N)$$

成立，就称当 $z\in D$, $z_n\to 0$ 时，$f(z_1,\cdots,z_n)$ 关于 $(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 能一致地渐近展开为

$$f(z_1,\cdots,z_n)\sim\sum_{j=0}^{\infty} f_j(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n^j.$$

其中 $f_j(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 为 $z_1,\cdots,z_{n-1}$ 的全纯有界复函数．如果所有的 $f_j(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 能渐近地展成形如 (5) 的级数，则能渐近展开为(6)式的函数，也一定能渐近展开为(5)式．

关于可渐近展开的多元函数的四则运算、微分、积分、隐函数的存在性等，福原做过基本的研究(1937)．

【在微分方程理论上的应用】 以 $z=0$ 为非正则奇点的线性常微分方程组，即使存在着能展开为 x 的形式幂级数的形式解，这个级数一般说来也是发散的．H. Poincaré 受 Γ 函数的 Stirling 公式的启发，引入了渐近展开的概念，并成功地给发散型形式解以解析意义．从二阶合流型线性微分方程†开始，以至差分方程†、差分微分方程†、写成标准型的常微分方程等的解，都能在某种意义下用渐近展开式表示出来．尤其是，对于常微分方程组，渐近地表示它的解的最一般的方法，有所谓福原理论([2])．但这个方法不能求出所谓解的连接公式．当用积分表示给出解函数时，不仅能得到渐近展开式，而且连同连接公式也能求出来的极为有力的方法，有最速下降法†(→最速下降法)，这是首先由 B. Riemann 建立，后来由 P. Debye 完成的方法．

【参】 [1] 藤原松三郎，常微分方程式論，岩波，1930; [2] 福原滿洲雄，常微分方程式，岩波全書，1950; [3] N. G. de Bruijn, Asymptotic methods in analysis, Noordhoff, 1958; [4] T. Carleman, Les fonctions quasi-analytiques, Gauthier-Villars, 1926; [5] A. Erdélyi, Asymptotic expansions, Dover, 1956; [6] H. Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, Acta Math., 8 (1886), 295—344; [7] W. R. Wasow, Asymptotic expansions of ordinary differential equations, Interscience, 1965; [8] E. T. Whittaker-G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 第四版 1958; [9] M. Hukuhara-T. Kimura-T. Matuda (福原滿洲雄-木村俊房-松田千鶴子), Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complex, Publ. Math. Soc. of Japan, 1961; [10] W. B. Ford, Studies on divergent series and summability, 1916, The asymptotic developments of functions defined by Maclaurin series, 1936, Scientific Series, Univ. of Michigan, (再版, Chelsea, 1960).

多项式逼近 [英 polynomial approximation 法 approximation par polynômes 德 polynomische Approximation 俄 полиномиальное приближение 日 多項式近似] 在用多项式†逼近一个函数的问题中，主要的是：近似多项式的存在性，近似度，近似多项式的构造法，在给定条件下的近似，等等。它们与插值法†有密切的联系。

Weierstrass 逼近定理 (Weierstrass approximation theorem) 是多项式逼近中最重要的定理。它可叙述为下列两种形式：1) 设 $f(x)$ 为 $a \leqslant x \leqslant b$ 内的连续函数，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在多项式 $P(x)$，使对 $a \leqslant x \leqslant b$ 中的所有 x，$|f(x)-P(x)| < \varepsilon$ 成立。2) 设 $f(\theta)$ 是周期为 2π 的连续函数，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在三角多项式

$$P(\theta)=\sum_{n=0}^{N}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

使得 $|f(\theta)-P(\theta)| < \varepsilon$ 对所有的 θ 成立。这两个命题是相互等价的。M. H. Stone 得到了一条定理，它把 Weierstrass 定理推广到了多元函数的情形。关于 Weierstrass 定理有各种不同的证明(例如，高木[9] p. 284—286)。但在 1) 的所有证明中，揭示 **Бернштейн 多项式** (Bernšteĭns polynomial) $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}f\left(\frac{p}{n}\right)x^p(1-x)^{n-p}$ 一致收敛†于 $[0,1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 这个事实的证明，是个简单的证法(例如，[13] p. 20—21)，而 2) 由 Fourier 级数† 的 Fejér 定理† 是显见的。

作为 1) 的推广，我们有：$x^0=1$，x^{p_1}，$\cdots$，x^{p_n}，$\cdots$ (p_n 为正数，$\lim p_n=\infty$) 的线性组合能一致逼近 $[0,1]$ 上的任一连续函数的充分必要条件是 $\sum 1/p_n=+\infty$ (**Müntz 定理**)。

【最佳逼近】 设 $\{\varphi_k(x)\}$ 是在 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界闭域 A 上连续的线性无关的函数组，对任给的连续函数 $f(x)$，如果函数 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)$ 达到 $\inf_{c_1,\cdots,c_n}\max_{x\in A}|f(x)-P_n(x)|$，则称 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的 (基于 $\{\varphi_k(x)\}$ 的线性组合的) **最佳逼近** (best approximation, best fit approximation)。虽然对给定的 n，在 $P_n(x)$ 中有实现最佳逼近的函数，但这样的函数不一定是唯一的。使它唯一的必要充分条件是，对于 A 内的任意 $n+1$ 个不同的点 x_i $(i=0,1,2,\cdots,n)$，矩阵 $(\varphi_k(x_i))$ $(k,i=0,1,\cdots,n)$ 的行列式不等于零 (**Haar 条件** (Haar's condition) [11])，如果 $\{\varphi_k(x)\}$ 满足 Haar 条件，则称函数组 $\{\varphi_k\}$ $k=0,1,\cdots,n$ 为 **Чебышев 组** (Čebyšev system) 或**唯一可解组** (unisolvent system)。$[a,b]$ 上的集合 $\{1,x,x^2,\cdots,x^n\}$，$[0,\pi]$ 上的集合 $\{1,\cos x,\cdots,\cos nx\}$ 和 $[0,\pi]$ 上的集合 $\{\sin x,\cdots,\sin nx\}$，都是 Чебышев 组。Haar 条件与下面的条件等价：对不全为零的 c_k，$\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k$ 的零点不多于 n 个。在有限实数区间上用多项式逼近，以及用三角函数组构成三角多项式逼近周期函数，都能满足上述条件，并且给出最佳逼近的多项式是唯一的。对 $[a,b]$ 上的 Чебышев 组 $\{\varphi_k(x)\}$，设 $P_n(x)$ 是 $\varphi_0(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 的线性组合，且 $P_n(x)$ 不恒等于 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$，则 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近的充分必要条件是：使 $f(x)-P_n(x)$ 的绝对值达到最大值的点 (**偏差点** (deviation point)) 至少有 $n+2$ 个，且把它们按大小次序排列时，$f(x)-P_n(x)$ 在这些点处的值交错变号(**Чебышев 定理**)。例如，在区间 $-1\leqslant x\leqslant 1$

上以 $n-1$ 次实系数多项式 $P(x)$ 最佳逼近 x^n 时，就得 $x^n - p(x) = 2^{-(n-1)} T_n(x)$ ($T_n(x)$ 是 Чебышев 多项式† $\cos(n \arccos x)$).

近年来，由于最佳逼近有效地运用在使用电子计算机进行的各种函数的数值计算中，因而已经发展了几种寻求最佳逼近的方法(后述，或→数值计算). 然而，当 $n \geqslant 2$，且域 $A \subset \boldsymbol{R}^n$ 包含从一个公共点射出的三条不相交弧时，A 就没有 Чебышев 组. 这样，最佳逼近多项式就并不总是唯一的.

【近似度与连续模】 定义在 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 的 k 阶**连续模** (modulus of continuity)，就是

$$\omega_k(f; t) = \sup_{\substack{|h| \leqslant t \\ a \leqslant x \leqslant b \\ a \leqslant x+kh \leqslant b}} \left| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} f(x + \nu h) \right|,$$

其中 $t \leqslant (b-a)/k$. 特别 ω_1 是寻常连续模. 用 n 次三角多项式 $P_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 逼近以 2π 为周期的连续函数 $f(x)$，其最佳逼近的近似度 $E_n^*(f)$ 定义为 $E_n^*(f) = \inf_{\substack{a_0, \cdots, a_n \\ b_1, \cdots, b_n}} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_n(x)|$. $E_n^*(f)$ 满足 $E_n^*(f) \leqslant c_k \omega_k(f; 1/(n+1))$(**Jackson 定理**)，其中 c_k 与 f 无关. 进而准确地确定常数 c_k 的工作，是由 J. Favard 完成的. 关于 $E_n^*(f)$ 和 $\omega_k(f; t)$ 的进一步研究由 С. Н. Бернштейн, A. Zygmund 等人所作出. 但还有更精确的结果 (С. Б. Стечкин)

$$\omega_k\left(f; \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{c_k}{n^k} \sum_{\nu=0}^{n} (\nu+1)^{k-1} E_\nu^*(f).$$

用多项式逼近 $f \in C^r([-1,1])$时，存在最多为 n 次的多项式 $P_n(x)$，使对任意的 $x \in [-1,1]$，有

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant M_r((\sqrt{1-x^2} + |x|/n)/n)^r \times \omega_1(f^{(r)}; (\sqrt{1-x^2} + |x|/n)/n),$$

其中 M_r 是与 f, x 和 n 无关的常数. $f^{(r)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 r 阶导数. 我们也有用 $|f(x) - P_n(x)|$ 估计 $\omega_k(f^{(r)}; t)$ 的定理. 在这些定理的证明中，关于三角多项式 $T_n(x)$ 的导数的 **Бернштейн 不等式**

$$\max_x |T_n'(x)| \leqslant n \max_x |T_n(x)|,$$
$$\max_x |\tilde{T}_n'(x)| \leqslant n \max |T_n(x)|$$

($\tilde{T}_n$ 为 T_n 的共轭函数†)，以及关于区间 $[-1, 1]$ 上的 (普通的) 多项式 $P_n(x)$ 的 **Марков 不等式**

$$\max_x |P_n'(x)| \leqslant n \min\{1/\sqrt{1-x^2}, n\} \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P_n(x)|$$

等，起着重要的作用.

【用 Fourier 展开逼近】 一般地，设$\{\varphi_n(x)\}$为 $[a, b]$ 上的正规正交系†时，使 $\{\varphi_n(x)\}$ 的线性组合在最小二乘意义下给出 $f(x) \in L_2(a, b)$ 的最佳逼近，即**最小二乘逼近** (least-square approximation)，也就是使

$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_n(x)\right)^2 dx = \min$$

成立的充分必要条件是 $a_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx$. 因而在用三角函数组确定的 L_2 逼近中，Fourier 级数的部分和给出最佳逼近. 在 $L_p(1 < p < \infty)$ 逼近中，也有同样的结论; 不过，在一致逼近的情形，在用部分和 $S_n(x)$ 确定的逼近中，$|f(x) - S_n(x)| \leqslant A(\log n)\omega_k(f; n^{-1})$成立，一般地这个结果不能再改进. 用线性运算总能给出最佳三角逼近的近似法是不存在的. 在以 $S_n(x)$的线性变换确定的近似法中，会出现逼近的**饱和现象** (saturation of approximation)，即到某连续模为止给出良好的逼近，但若再进一步提高近似度，则原来的函数多半仅限于是常数. 例如，当取 Fejér 平均† $\sigma_n(x)$ 时，若 $f \in \mathrm{Lip}\, \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$，则 $|f(x) - \sigma_n(x)| = O(n^{-\alpha})$. 但具有 $|f(x) - \sigma_n(x)| = O(n^{-1})$ 这样的近似当且仅当共轭函数 $\tilde{f}(x) \in \mathrm{Lip}1$; 而$|f(x) - \sigma_n(x)| = o(n^{-1})$ 成立当且仅当 $f(x)$是常数(M. Zamansky, 洲之内源一郎-渡利千波).

【内插三角多项式】 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的连续函数，在区间 $[0, 2\pi]$ 的 $2n+1$ 个不同

的点处与 $f(x)$ 取值相同的 n 次内插三角多项式是唯一的. 当这 $2n+1$ 个点为 $x_j=2\pi j/(2n+1)$ $(j=0,1,2,\cdots,2n)$时,内插三角多项式有如下的形式:

$$U_n(f,x)$$

$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}f(x_j)\frac{\sin((n+1/2)(x-x_j))}{\sin((x-x_j)/2)}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)}d\varphi_n(t),$$

其中, $\varphi_n(t)$ 是在 $[2\pi j/(2n+1),\ 2\pi(j+1)/(2n+1)]$上取值 $2\pi j/(2n+1)$的阶梯函数. 它与 Fourier 级数的部分和有类似的形式, 人们已对它做过很多研究. 若 $f(x)$ 是连续的有界变差†函数,则 $U_n(f,x)$ 一致收敛于 $f(x)$(D. Jackson). 虽然连续函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 $s_n(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$, 但已经知道,存在使 $U_n(f,x)$ 到处发散的连续函数(J. Marcinkiewicz). 而且也存在使$\frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N}U_n(f,x)\right)$到处发散的连续函数(P. Erdős, G. Grünwald). 如果把三角多项式改为代数多项式, 并选取通常的 Чебышев 多项式†的根为结点(即与所给函数必须取相同值的点)时,则在 $(-1,1)$ 上存在连续函数,它的 Lagrange 内插多项式† 及其算术平均都到处发散.

【复函数的情形】 设函数 $f(z)$ 在复平面的有界单连通† 域 E 内解析, 并在 $\bar{E}$ 上连续. C. Runge, J. L. Walsh 曾研究过函数 $f(z)$ 的多项式逼近问题. 对这样的 $f(z)$, 在 E 内的任意紧集上,可用多项式来一致逼近 (**Runge 定理**),但完整的结果是由 M. B. Келдыш 得到的. 当 E 不含内点时, 用多项式逼近 E 内的连续函数的工作,首先由 K. Weierstrass 提出,而后由 M. A. Лаврентьев 给出了完全的解答. 作为把二者包含在一起的结果,C. H. Мергелян 得到了下面的定理([7]): 在有界闭集 E 上连续, 在 E 的内部解析的函数 $f(z)$, 能用 E 上的多项式一致逼近的充分必要条件是集合 E 不能分开复平面.

用极点位于 E 内的有理函数逼近在 E 内解析的函数,这个问题已由 A. Г. Витушкин 做过全面讨论.

为了进一步明确在单连通域上的准确近似度,有下列定理: 以无穷远点∞为极点的 Green 函数†存在的区域称为正则域. 设有界闭集 D 的补集 K 为连通且正则, 在 K 上以无穷远点∞为极点的 Green 函数设为 $G(x,y)$, 满足 $G(x,y)=\log R>0$ 的曲线记为 D_R. 若 $f(z)$ 在 D 上单值全纯,则存在最大的 ρ, 使 $f(z)$ 在 D_ρ 的内部单值全纯. 若 $R<\rho$, 则能求得 n 次多项式 $P_n(z)$ $(n=0,1,\cdots)$ 使 $|f(z)-P_n(z)|\leqslant M/R^n$ $(z\in D)$ 成立, M 是不依赖于 n, z 的常数. 若 $R>\rho$, 则不存在使上式成立的多项式 (Бернштейн-Walsh).

【Lagrange 内插公式】 设已给点列 $z_1^{(0)}$; $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}$; $\cdots$, $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \cdots, z_{n+1}^{(n)}$; $\cdots$, 则在 $z_k^{(n)}$ $(k=1,2,\cdots,n+1)$ 处与 $f(z)$ 取相同的值的 n 次多项式 $P_n(z)$ 唯一存在,且

$$P_n(z)=\sum_{k=1}^{n+1}f(z_k^{(n)})\frac{\omega(z)}{(z-z_k^{(n)})\omega'(z_k^{(n)})},$$

$$\omega(z)=(z-z_1^{(n)})\cdots(z-z_{n+1}^{(n)}).$$

称它为 **Lagrange 内插公式** (Lagrange's interpolation formula), 而称右端为 **Lagrange 内插多项式** (Lagrange's interpolation polynomial). $P_n(z)$ 不一定收敛于 $f(z)$. 例如,对于 $f(z)=1/z$, 若取 $z_k^{(n)}$ $(k=1,2,\cdots,n+1)$ 为 1 的 $n+1$ 次根, 则 $P_n(z)=z^n$, 当 $|z|<1$ 时, $P_n(z)\to 0$, $|z|>1$ 时, $P_n(z)$ 发散,可见只有 $z=1$ 时, $P_n(z)$才收敛于 $f(z)$. 在实变数的情形,也能作出 $P_n(x)$ 发散的例子. 但是,当 $f(z)$ 在 $|z|<\rho$ $(\rho>1)$ 内全纯时, 若 $P_n(z)$ 是 n 次多项式,它在 1 的 $n+1$ 次根处与 $f(z)$ 的值相等,则 $\lim_{n\to\infty}P_n(z)=f(z)$ $(|z|\leqslant 1)$ 成立.

当 $z_k^{(n)}$ 不依赖于 n 时, $P_n(z)$成为 Newton 内插式(→公式 21) 的前 n 项的和,称为 **Newton 内插多项式** (Newton's interpolation polynomial), 其形式为: $P_n(z)=a_0+a_1(z-z_1)+a_2(z-z_1)(z-z_2)+\cdots+a_n(z-z_1)\cdots(z-z_n)$, 其中 $a_0=f(z_1)$; $a_1=(f(z_2)-f(z_1))/(z_2-$

$z_1)$ $(z_2 \neq z_1)$, $a_1 = f'(z_1)$ $(z_2 = z_1)$, 等等，相继的系数可由有限差分法†依次求得. Newton 内插多项式的收敛性与 Dirichlet 级数†的收敛性有密切的关系(藤原松三郎[10]).

【Чебышев 逼近论】 设D为复平面上的有界闭集,则最佳逼近D上的连续函数$f(z)$的n次多项式,$\pi_n(z)$唯一确定. 称$\pi_n(z)$为n次**Чебышев 近似多项式** (Čebyšev's approximation polynomial). 若D单连通,$f(z)$单值全纯,则$f(z)$的 Чебышев 近似多项式$\pi_n(z)$在D上一致收敛于$f(z)$,并且存在大于1的数R和不依赖n的数M,使$|f(z)-\pi_n(z)| \leqslant M/R^n$成立. 如果对$f(z)$再附加条件,即可证明存在常数$r$,使$|f(z)-\pi_n(z)| \leqslant M/n^r R^n$ (W. E. Sewell). 特别是,在对应于$f(z)=z^n$的$n-1$次近似多项式中,存在着使$\max\limits_D |z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n|$最小的$n$次多项式,称为关于$D$的$n$次**Чебышев 多项式** (Čebyšev's polynomial)同样的陈述对实变量函数也成立. 当$D=[-1,1]$时,它是$\cos(n\arccos x)/2^{n-1}$,即通常的 Чебышев 多项式†. 设$T_n(z)$为D上的 Чебышев 多项式,则$\lim\limits_{n\to\infty}(\max\limits_D|T_n(z)|)^{1/n} = \rho(D)$存在. $\rho(D)$和D的超限直径†及容量†是一致的(例如[8]).

即使用线积分†、面积分†估计近似度,也可得到大致相同的结果. 设D是在复平面内由可求长的 Jordan 曲线C所围成的闭域,而$f(z)$在D上单值全纯. 设$u(z)$是在C上取正值的连续函数,则存在n次多项式$\pi_n(z)$,使

$$\int_C u(z)|f(z)-\pi_n(z)|^p |dz| \quad (p>0)$$

最小.此时,对大于1的某数R,在D上$|f(z)-\pi_n(z)| \leqslant M/R^n$成立(实际上$\pi_n(z)$是过度收敛†). 这个关于域的条件还可以放宽. 设$f(z)$在有界闭 Jordan 域†D上单值全纯,则对于在D上取正值的连续函数$u(z)$,存在n次多项式$\pi_n(z)$,使$\iint_D u(z)|f(z)-\pi_n(z)|^p dS$最小. 这时对大于1的某数$R$,在$D$上$|f(z)-\pi_n(z)| \leqslant M/R^n$成立.

【用正交多项式逼近】 设C为可求长的 Jordan 曲线,$p_k(z)$属于$L_2(C)$. 当

$$\int_C p_k(z)\overline{p_n(z)}|dz| = \delta_{kn}$$

时,就称$\{p_k(z)\}$在C上构成正规正交系†. 对于$f(z) \in L_2(C)$,令$a_k = \int_C f(z)p_k(z)|dz|$,并设$f(z) \sim a_0 p_0(z) + a_1 p_1(z) + \cdots$是$f(z)$的形式展开式. 设此展开式的前$n$项的和为$s_n(z)$,则在$\{p_k(z)\}$的最初$n$个函数的所有线性组合中,$s_n(z)$是最小二乘逼近,同时,Bessel 不等式†,F. Riesz-Fischer 定理†,以及$\{p_k(z)\}$完备†蕴涵 Parseval 等式†等等,都仍然成立(→正交函数系). 特别当C是$|z|=R$时,$1, z, z^2, \cdots$构成线性无关的正交系,因为$s_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_k = \dfrac{1}{2\pi R^{2k+1}}\int_C f(z)\bar{z}^k|dz| = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{f(z)}{z^{k+1}}dz$,所以如果$f(z)$在$C$上及$C$内为全纯,则$f(z)$关于原点的 Taylor 展开式†就成为用正交多项式作出的展开式.

设D为有界闭集,如果存在这样的多项式$p_n(z)$,使对D上的任一全纯函数,它关于$p_n(z)$的正交展开在D上一致收敛,我们就说该多项式"属于D". 对任意的域,这样的多项式的存在和确定的问题,是由 G. Faber 提出,并由他解决的. 其后,G. Szegö, T. Carleman, Walsh 等人又把条件放宽了. 从 Чебышев 逼近论可知,只要以D的边界曲线C上的线积分,或D上的面积分把$1, z, z^2, \cdots$正交化即可得到这种$p_n(z)$.

【计算函数值的数值逼近】 用 Taylor 展开式的部分和逼近函数值的方法,其精度随着离展开中心点距离的增大而急剧下降. 使近似函数$\varphi(x)$(主要是多项式)在问题涉及的整个区间$[A, B]$上尽可能一致地趋近于所给函数$f(x)$的区间逼近法,作为近似规范法,有最小二乘逼近和最佳逼近. 但为了计算函数值,后者较适用. 为得到最佳逼近,只要按前述 Чебышев 定理要求的条件确定系数即可. 为此,作为第一近似,常用关于 Чебышев 多项式的正交

展开式，在展开的 n 次项处截断得到 $\varphi(x)$，误差 $|f(x)-\varphi(x)|$ 可估计为截断误差的头一项 $T_N(u)$ 的常数倍，其中 $N=n+1$，$u=(x-(A+B)/2)/((B-A)/2)$. 因而为了近似地简单地求出 $\varphi(x)$，设 $T_N(u)$ 的 N 个根为 $u_i(i=1,2,\cdots,N)$，用相应于 u_i 的点 x_i 处的函数值 $f(x_i)$ 作出 $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k T_k(u)$ $\left(\text{其中 } a_0=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}f(x_i),\ a_k=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}f(x_i)T_k(u_i)\right)$ 即可（Чебышев 内插法）. 设这样得到的第一近似多项式的误差的极值为 $\pm M_i$，把 $\bar\varphi(x_i)-f(x_i)=\pm M$ 与 $\varphi(x_i)-f(x_i)=\pm M_i(i=1,2,\cdots,N)$ 边边相减得到的式子，作为系数的修正值 $\Delta a_k=\bar a_k-a_k$ 和 M 的联立方程，解这个方程组. 这样反复进行到修正值充分小为止. 前面作出的 Чебышев 多项式近似，在多数情形下，差不多已成为最佳逼近.

在除法运算所需时间很短的电子计算机上，用连分数†作函数的近似及其最优化也是有用的.

【参】 [1] D. Jackson, The theory of approximation, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1930; [2] J. L. Walsh, Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1935; [3] Ch. de la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Gauthier-Villars, 1919; [4] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947;（中译本：Н. И. 阿赫叶惹尔，逼近论讲义，科学出版社，1957）; [5] И. П. Натансон, Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949（中译本：И. П. 纳唐松，函数构造论，科学出版社，1958）; [6] А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, 1960; [7] С. Н. Мергелян, О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах, Доклады АН СССР, **78** (1951), 405—408; [8] E. Hille, Analytic function theory II, chap. 16, Lemniscates, Ginn, 1962; [9] 高木貞治，解析概論，岩波，第三版 1961; [10] 藤原松三郎，微分積分学 I，内田老鶴圃，1934; [11] A. Haar, Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen, Math. Ann., **78** (1918), 294—311. 关于实用数值逼近理论及其公式集: [12] C. Hastings, Approximations for digital computers, Princeton Univ. Press, 1955; [13] 一松信，近似式，竹内書店，1963; [14] M. Abramowitz-I.A. Stegun 编, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, National Bureau of Standards, Applied Math. Ser., **55** (1964); [15] On approximation theory. Proc. Conference in Math. Res. Inst. at Oberwolfach, Aug. 4—10, 1963, Birkhäuser, 1964; [16] G. G. Lorentz, Approximation of functions, Holt Rinehart and Winston, 1966; [17] G. Meinardus, Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Springer, 1964; [18] Proc. Symp. on Approximation of Functions, Warren, Michigan, 1964 (General Motors Research Laboratories Elsevier, 1965); [19] J. R. Rice, The approximation of functions, Addison-Wesley, I, 1964; II, 1969; [20] P. J. Davis, Interpolation and approximation, Blaisdell, 1963; [21] E. W. Cheney, Introduction to approximation theory, Mc Graw-Hill, 1966; [22] A. Sard, Linear approximation, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1963.

正交函数系 [英 system of orthogonal functions 法 système des fonctions orthogonales 德 System der orthogonalen Funktionen 俄 система ортогональных функций 日 直交関数系] 【正交系】 对于测度空间†(X,μ) 上的复值函数 $f(x),g(x)$，定义内积 $(f,g)=\int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$（假定积分是能够定义的）和范数 $\|f\|=(f,f)^{1/2}$. 当 $(f,g)=0$ 时，我们称 f,g 在 X 上关于测度 μ **是正交的** (orthogonal). 若 X 是 Euclid 空间内的子集，μ 是 Lebesgue 测度 m，则简称为正交. 设测度以函数 $\varphi(x)$ 为密度，而且 $(f,g)=\int_X f(x)\overline{g(x)}\varphi(x)dm(x)=0$，就称它们关于**权** (weight) 或**权函数** (weight function) $\varphi(x)$ 正交. 若 f,g 关于 μ 属于函数空间 $L_2(X)$，则内积是能够定义的. 特别当 $\|f\|^2=1$ 时，称 f **是正规化的** (normalized). 如果在 X 上定义的函数族 $\{f_n(x)\}$ 中任意两个函数都互相正交，则称该函数族为**正交函数系**，记为 $\{f_n\}\in O(X)$. 如果所有 $f_n(x)$ 还都是正规化的，则称 $\{f_n\}$ 为**正规正交函数系** (system of orthonormal functions, 简写为 ON 系)，记为 $\{f_n\}\in ON(X)$.

一般地说，设 $\{f_n\}$ 是 X 上的线性无关†的函数的一个族，R 是 $L_2(X)$ 的一个子集，当任意函数 $f\in R$ 能够用 $\{f_n\}$ 中的有限个函数的线性组合†在范数意义下以任意精确度近似时，就称 $\{f_n\}$ 在 R 内**封闭** (closed). 再者，当 R 是 $L_2(X)$ 的一个子集，而且 $\{f_n\}\in O(X)$ 时，若对于所有的 n 都满足 $(\varphi,f_n)=0$ 的 $\varphi(x)\in R$ 必定几乎处处为 0，则称正交函数系 $\{f_n\}$ 在 R 内是**完备**

的(complete). 如果在这个 R 上考虑前述 $L_2(X)$ 的范数,则正交函数系 $\{f_n\}$ 为封闭与 $\{f_n\}$ 为完备是等价的.

若 $\{f_n\}\in O(X)$, 则称级数 $\sum c_nf_n(x)$ 为**正交级数**(orthogonal series). 特别是,若此级数平均收敛† (即在 $L_2(X)$ 的范数的意义下收敛)于 $\varphi(x)$, 则 $c_n=(\varphi,f_n)/\|f_n\|^2$. 称 $c_n(n=1,2,\cdots)$为 φ 对于 $\{f_n\}$ 的**展开系数** (expansion coefficient) 或 **Fourier 系数** (Fourier coefficient).

若属于 $L_2(X)$ 的函数的序列 $\{g_n\}$ 是线性无关的,我们就能用 g_n 的适当的线性组合的序列 $\{f_n\}$ 构成一个 ON 系,使 $\{f_n\}$ 所生成的子空间与 $\{g_n\}$ 生成的相同. 为此,可以令 $f_1(x)=g_1(x)/\|g_1\|$, 一般地令 $f_n(x)=\varphi_n(x)/\|\varphi_n\|$, 其中 $\varphi_n(x)=g_n(x)-\sum_{\nu=1}^{n-1}(g_n,f_\nu)f_\nu(x),n\geqslant 2$. 这个步骤称为 **Schmidt 正交化** (Schmidt's orthogonalization).

当 $\{f_n(x)\}\in ON(X)$ 时, 如果设 $\varphi(x)\in L_2(X)$对于$\{f_n(x)\}$的展开系数为 c_n, 则 Bessel不等式† $\sum|c_n|^2\leqslant\|\varphi\|^2$ 成立;而等号(Parseval 等式†) 对所有 $\varphi\in L_2(X)$ 成立等价于 $\{f_n(x)\}$ 在 $L_2(X)$ 中构成完备系. 在此情况下, $\sum_{n=1}^{\infty}c_nf_n(x)$ 称为 φ 关于 $\{f_n\}$ 的**正交函数展开** (orthogonal expansion). 反之,对于满足 $\sum|c_n|^2<\infty$ 的任意数列 $\{c_n\}$, 只存在一个以它为展开系数的函数 $\varphi\in L_2(X)$, 且有
$\sum|c_n|^2=\|\varphi\|^2,\varphi(x)=\sum c_nf_n(x)$(平均收敛) (**F. Riesz-Fischer 定理**).

【实轴上的正交函数系】 下面设 X 为实轴上的有限区间 (a,b), 并设 X 上的函数取实数值. 这时把 $O(X)$, $ON(X)$写为 $O(a,b)$, $ON(a,b)$. 1) 若对于 $\{f_n(x)\}\in ON(a,b)$, $|f_n(x)|\leqslant M$ (常数), 且正交级数 $\sum c_nf_n(x)$ 几乎处处†收敛,则当 $n\to\infty$ 时 $c_n\to 0$. 2) 我们能够作出一个完备 ON 系 $\{f_n(x)\}$ 和函数 $\varphi(x)\in L_1(a,b)$,使得 $\varphi(x)$的正交函数展开 $\sum c_nf_n(x)$处处发散. 3)若 $\{f_n(x)\}\in ON(a,b)$, $\sum c_n^2\log^2 n<\infty$, 则正交级数 $\sum c_nf_n(x)$几乎处处收敛. 这里,因子 $\log^2 n$ 不能以满足 $0\leqslant w(n)=o(\log^2 n)$ 的其他单调递增函数 $w(n)$代替(**Rademacher-Меньшов 定理**). K. Tandori 进一步证明了,若 $c_n\downarrow 0$,且 $\sum c_n\varphi_n$ 对于任何正交系 $\{\varphi_n\}$ 几乎处处收敛,则 $\sum|c_n|^2\log^2 n<\infty$. 4) 若函数 $\varphi\in L_2(a,b)$ 的正交函数展开在集合 E 上是 Abel 可和†的, 则它在 E 上几乎处处是 $(C,1)$ 可和的. 一个函数 $\varphi\in L_2(a,b)$ 的正交函数展开几乎处处 $(C,1)$ 可求和, 等价于部分和 $s_{2^n}(x)$ 几乎处处收敛. 5) 设 $\{f_n(x)\}\in ON(a,b)$, $|f_n(x)|\leqslant M$ (常数),则有:(i) 设 $\varphi(x)$ 关于 $\{f_n(x)\}$ 的展开系数为 a_n, 则如下的不等式成立(假定式子右端存在):

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{p'}\right)^{1/p'}\leqslant M^{(2-p)/p}\left(\int_a^b|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

这里 $1<p\leqslant 2$, $1/p+1/p'=1$. 反之, 若 $(\sum|a_n|^p)^{1/p}<\infty(1<p\leqslant 2)$,则存在 $\varphi(x)\in L_{p'}(a,b)$,使函数 $\varphi(x)$以 a_n 为它的展开系数,并有

$$\left(\int_a^b|\varphi(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'}\leqslant M^{(2-p)/p}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\right)^{1/p}$$

(**F.Riesz 定理**). 当这个正规正交系为三角函数系时, 称为 **Hausdorff-Young 定理**. (ii) 设按递减顺序重排 $\{|a_n|\}$ 而得到的数列为 $\{a_n^*\}$, $1<p\leqslant 2$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{*p}n^{p-2}\leqslant A_p\int_a^b|\varphi(x)|^p dx.$$

当 $q\geqslant 2$ 时,如果 $\sum a_n^{*q}n^{q-2}<\infty$,则存在以 a_n 为展开系数的函数 $\varphi(x)$, 而且

$$\int_a^b|\varphi(x)|^q dx\leqslant A_q\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{*q}n^{q-2}$$

(**Paley 不等式**). 上面的 A_p, A_q 分别是只与 p, q 有关的常数. 当此函数系是三角函数系时, 称为 **Hardy-Littlewood 定理**. 6) 如果对于某个 $\varepsilon>0$, $\sum|c_n|^{2-\varepsilon}<\infty$, 则正交级数 $\sum c_nf_n(x)$几乎处处绝对收敛. 7) 更精确地说, 若设 $s^*(x)=\sup_n|\sum_{\nu=1}^{n}c_\nu f_\nu(x)|$, 则 $\|s^*\|_q\leqslant A_q(\sum c_\nu^{*q}\nu^{q-2})^{1/q}$ 成立 $(q>2)$. 这里设 c_n^* 是将 $|c_n|$ 按递减顺序重排而得到的数列.

【正交函数系的例子】 下列各函数系为正交函数系：1) $\{\cos nx\}\in O(0,\pi)$，$\{\sin nx\}\in O(0,\pi)$．2) $\{1,\cos nx,\sin nx\}\in O(0,2\pi)$(→Fourier 级数)．3) 若 $y''(x)+\lambda A(x)y(x)=0$ (λ 是参数，$A(x)>0$ 是连续函数)当 $\lambda=\lambda_n$ (λ_n 是任意的特征值)时的解为 $y_n(x)$ ($y_n(a)=y_n(b)=0$)，则 $\{\sqrt{A(x)}\,y_n(x)\}\in O(a,b)$ (特征函数的正交性，→特征值问题) 是正交函数系．4) 当 x 的二进展开式 ($0<x\leqslant 1$) 的第 n 个数字为 0 时，令 $r_n(x)=1$，为 1 时，令 $r_n(x)=-1$，若 x 能按两种方式展开，则令 $r_n(x)=0$，于是 $\{r_n(x)\}\in O(0,1)$．称它为 **Rademacher 正交函数系**(Rademacher's system of orthogonal functions)． Rademacher 正交函数系不是完备的，但可以认为这是抛掷硬币的随机事件的样本空间†，在构成各种反例方面应用很广．5) 当 n 的二进展开式为 $n=2^{\nu_1}+2^{\nu_2}+\cdots+2^{\nu_p}$ ($\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_p$) 时，令 $w_n(x)=r_{\nu_1+1}(x)r_{\nu_2+1}(x)\cdots r_{\nu_p+1}(x)$，则$\{w_n(x)\}$是完备正交函数系．称它为 **Walsh 正交函数系** (Walsh's system of orthogonal functions)，可以认为这是二进数群的特征标群，并且可以得到许多类似于三角函数系的定理．6) 区间$[0,1]$上按

$$\begin{aligned}\chi_m^k(x)&=\sqrt{2^m},\ x\in((k-1)/2^m,\ (k-1/2)/2^m),\\&=-\sqrt{2^m},\ x\in((k-1/2)/2^m,k/2^m),\\&=0,\qquad x\in((l-1)/2^m,l/2^m),\\&\qquad\qquad l\neq k,\ 1\leqslant l\leqslant 2^m\end{aligned}$$

定义的正交函数系 $\chi_m^k(x)$ ($1\leqslant k\leqslant 2^m$, $1\leqslant m$)，称为 **Haar 正交函数系** (Haar's system of orthogonal functions)．连续函数 $f(x)$ 的 Haar 展开式一致收敛于 $f(x)$．

【正交多项式系】 (→公式 20) 设给定定义于实轴的区间 (a,b) 上的权函数 $\varphi(x)$ (设 $\varphi(x)\geqslant 0$，几乎处处有 $\varphi(x)>0$)，而且(a,b)上的函数 f,g 的内积定义为

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,\varphi(x)dx.$$

将 $\{x^n\}$ ($n=0,1,2,\cdots$) 按 Schmidt 正交化†方法关于 $\varphi(x)$ 进行正交化，若规定最高次项的系数为正，便得到关于 $\varphi(x)$ 的正规正交系 $\{p_n(x)\}$．$p_n(x)$ 是 n 次多项式，称为属于权函数 $\varphi(x)$ 的**正交多项式系** (system of orthogonal polynomials)．这种多项式系在 $L_2^{(\varphi)}(a,b)$ 内是完备的，$L_2^{(\varphi)}(a,b)$ 定义为满足 $\int_a^b |f(x)|^2\varphi(x)dx<\infty$ 的函数 f 所成的空间．换句话说，函数系$\{\sqrt{\varphi(x)}\,p_n(x)\}$ ($n=1,2,\cdots$)在通常的 $L_2(a,b)$空间中构成 ON 系．在关于$\{p_n(x)\}$ 的展开级数的收敛问题的讨论方面，**Christoffel-Darboux 公式**

$$\sum_{k=0}^{n}p_k(t)p_k(x)=\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\frac{p_n(x)p_{n+1}(t)-p_n(t)p_{n+1}(x)}{t-x}$$

(α_n, α_{n+1} 为某常数) 起着重要的作用．

在古典的数学物理中有几种重要的特殊函数是用正交多项式系的形式给出的．

1) 在区间$[-1,1]$内令 $\varphi(x)=(1-x)^\alpha\cdot(1+x)^\beta$ ($\alpha>-1$, $\beta>-1$) 时得到的正交多项式是 **Jacobi 多项式**(Jacobi's polynomials)．但是也有人将在区间$[0,1]$内关于 $\varphi(x)=x^\alpha(1-x)^\beta$ 的正交多项式系定义为 Jacobi 多项式系(公式 20 V)．Jacobi 多项式中的 $\alpha=\beta$ 时，得到**特种球多项式** (ultraspherical polynomials) 或 **Gegenbauer 多项式** (Gegenbauer's polynomials) (→公式 20 I)．又 $\alpha=\beta=0$ 时得到 Legendre 多项式†；$\alpha=\beta=-1/2$ 时得到 Чебышев 多项式．**Чебышев 多项式**(Čebyšev's polynomials) $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ 是特殊的 Jacobi 多项式，它还出现在最佳逼近问题中(→公式 20 II，多项式逼近)．

2) 在区间$(0,\infty)$内，令 $\varphi(x)=x^\alpha e^{-x}$ 时得到的正交多项式 (适当地决定常数系数) 是 **Sonine 多项式** (Sonine's polynomials) 或**连带的 Laguerre 多项式** (associated Laguerre's polynomials)．在 α 为正整数 m 的情形下，得到的正交多项式为 $S_n^{(m)}(x)=x^{-m}e^x(d^n(x^{n+m}e^{-x})/dx^n)$．在 $m=0$ 的特殊情形下，得到 **Laguerre 多项式** (Laguerre's polynomials)．这时，通常乘以常

数,将它正规化为 $L_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ (→公式 20 VI). Laguerre 多项式应用在区间 $(0,\infty)$ 的 Gauss 型的数值积分法†中. 连带的 Laguerre 多项式出现在氢原子的 Schrödinger 方程的解中. 这个正交多项式系还应用在类氢原子的近似特征函数和气体理论中分子的速度分布函数的展开中.

3) 在区间 $(-\infty,\infty)$ 内,令 $\varphi(x)=e^{-x^2}$ (或 $e^{-x^2/2}$) 时得到的正交多项式 (除了常数系数)是 **Hermite 多项式**(Hermite's polynomials) $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}(d^n e^{-x^2}/dx^n)$(→公式 20 IV). Hermite 多项式是抛物柱面函数 (→合流型函数)的特殊情形,作为关于谐振子的 Schrödinger 方程的特征函数而出现. 它们还与概率积分有关,可应用于数理统计.

4) 将内积定义中的积分用 $\sum_{m=0}^{n} f(m)\overline{g(m)}$ 代替, 这样得到的多项式是与所谓**选点正交性**(orthogonality for finite sum)有关的选点正交多项式† (→公式 20 VII). 关于选点正交多项式及其在最小二乘逼近方面的应用, →曲线拟合. 这个部门的技术工作者往往将选点正交多项式简称为"正交多项式", 因此必须注意不要混淆.

【参】 [1] S. Kaczmarz-H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warsaw, 1935 (Chelsea, 1951); [2] G. Szegö, Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.,1939; [3] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics, I, Interscience, 1953 (R. 柯朗、D. 希尔伯特,数学物理方法,卷 I. 科学出版社, 1977); [4] F. G. Tricomi, Vorlesungen über Orthogonalreihen, Springer, 1955; [5] 福原満洲雄, 常微分方程式ノ解法 II, 線型ノ部, 岩波,1941; [6] G. Alexits, Convergence problems of orthogonal series, Pergamon, 1961(德文版 (1960) 的增订译本); [7] G. Sansone, Orthogonal functions, Interscience, 英文修订版 1959.

Fourier 级数 [英 Fourier series 法 séries de Fourier 德 Fouriersche Reihe 俄 ряд Фурье 日 フーリエ級数] 【Fourier 级数】 三角函数系

$$1/\sqrt{2\pi},\ \cos x/\sqrt{\pi},\ \sin x/\sqrt{\pi},\ \cdots,\ \cos kx/\sqrt{\pi},\ \sin kx/\sqrt{\pi},\ \cdots$$

在 $(-\pi,\pi)$ 上构成正规正交系† (→正交函数系). 设 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 上是 Lebesgue 意义下的可积函数 (在本条中, 积分都假定为 Lebesgue 积分†),则称

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt$$

$(k=0,1,2,\cdots)$ 为 $f(x)$ 的 **Fourier 系数** (Fourier coefficient), 由这些系数所作的级数

$$(1)\qquad \frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

称为 $f(x)$ 的 **Fourier 级数**, 常简记为 $\mathfrak{S}[f]$. 我们把(1)是 $f(x)$ 的 Fourier 级数这一事实记为

$$f(x)\sim a_0/2+\sum(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

一般地,以任意实数 a_k, b_k 作出的形如(1)的级数称为**三角级数** (trigonometrical series). 由于级数(1)以 2π 为周期,所以设 $f(x)$ 也以 2π 为周期,其定义域拓展为 $(-\infty,\infty)$. 研究 Fourier 级数的性质和它在怎样的意义下才能表示原来的函数, 是 Fourier 级数理论的主要问题. 因为 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$,所以若令 $2c_k=a_k-ib_k$, $c_{-k}=\bar{c}_k$, 则有

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt,\ k=0,\pm1,\cdots,$$

于是 f 的 Fourier 级数能写成**复形式** (complex form):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}.$$

其中级数的部分和取为对称的 $\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ 的形式.

在单位圆周 $z=e^{ix}$ 上考虑幂级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-ib_k)z^k$时,其实部就是上述三角级数(1),其虚部成为常数项是 0 的级数:

$$-i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\mathrm{sign}\,k)c_k e^{ikx},$$

称它为三角级数(1)的**共轭级数** (conjugate series,

allied series). 若写成实数形式,它就成为

$$(2)\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx).$$

若

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},\ g(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} d_k e^{ikx},\quad 则$$

$$f*g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)\,g(t)dt \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k d_k e^{ikx}.$$

由第二个式子定义的 $f*g$, 称为 f 与 g 的**卷积**(英 convolution　德 Faltung).

若 $f(x)$ 绝对连续†,则还有

$$f'(x) \sim i\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k c_k e^{ikx} = \sum_{k=1}^{+\infty} k(b_k \cos kx - a_k \sin kx).$$

再设 $f(x)$ 的不定积分为 $F(x)$, 若适当选取积分常数 C,则

$$F(x) - c_0 x \sim C + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{c_k}{ik} e^{ikx} = C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}$$

($'$ 表示省略了 $k=0$ 的项). 若 $f \in L_1(-\pi,\pi)$,则当 $n \to \infty$ 时, f 的 Fourier 系数 c_n (从而 a_n 及 b_n) 收敛于 0 (**Riemann-Lebesgue 定理**). 其次,若 $f \in \mathrm{Lip}\alpha\ (0 < \alpha \leqslant 1)$ (即满足 α 次 Lipschitz 条件†), 则 $c_n = O(n^{-\alpha})$, 若 f 为有界变差†, 则 $c_n = O(n^{-1})$. 若 $f \in L_2(-\pi, \pi)$, 则 **Parseval 等式**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = 2\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

成立. 其逆就是 F. Riesz-Fischer 定理† (→公式 11 I).

【收敛性检验法】 设 f 的 Fourier 级数 $\mathfrak{S}[f]$ 的前 n 项和为 $s_n(x)\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则有

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x) D_n(t) dt,$$

$$D_n(t) = (\sin(n+1/2)t)/2\sin(t/2),$$

称 $D_n(t)$ 为 **Dirichlet 核** (Dirichlet's kernel). 因为若令 $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, 就有

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_x(t) D_n(t) dt,$$

所以为求使 $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ 成立的条件, 只要求出上式右端的积分当 $n \to \infty$ 时收敛于 0 的条件即可. 若 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 在长度为正的区间 I 上相同,则 f_1 的 Fourier 级数和 f_2 的 Fourier 级数之差在 I 的内部一致地收敛于 0, 称它为**局部化定理** (theorem on localization).

下面举出几个判定收敛性的条件: 1) 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上有界变差,则 f 的 Fourier 级数 $\mathfrak{S}[f]$ 在 (a, b) 上收敛于 $(f(x+0) + f(x-0))/2$. 如果 $f(x)$ 还连续,则级数 $\mathfrak{S}[f]$ 在 $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ 上一致收敛 (**Jordan 检验法** (Jordan's test)). 作为它的特殊情形, 在 $(-\pi, \pi)$ 上只有有限个极大、极小和有限个不连续点的有界函数具有收敛的 Fourier 级数,这称为 **Dirichlet 检验法**. 例如, 若 $f'(x)$ 有界, 则其 Fourier 级数收敛于 $f(x)$. 2) 若 $\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_x(t)|}{t} dt < \infty$, 则 $\mathfrak{S}[f]$ 在 x 处收敛于 $f(x)$ (**Dini 检验法**). 3) 若

$$\int_0^h |\varphi_x(t)| dt = o(h),$$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{\eta}^{\pi} \frac{|\varphi_x(t) - \varphi_x(t+\eta)|}{t} dt = 0,$$

则 $\mathfrak{S}[f]$ 收敛于 $f(x)$ (**Lebesgue 检验法**). Dini 检验法与 Jordan 检验法互不包含, 而 Lebesgue 检验法包含前面两个检验法, 但用起来不一定方便. 4) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 在该区间上 $\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) \log 1/\delta = 0$ (其中 $\omega(\delta) = \max_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |f(x_1) - f(x_2)|$), 则 $\mathfrak{S}[f]$ 在 $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ 上一致收敛 (**Dini-Lipschitz 检验法**).

【可和性】 一般地说,检验 Fourier 级数的收敛性是麻烦的, 但求和法†却给出简单的结果. 若把 Fourier 级数关于 (C, 1) 求和法的部分和记为 $\sigma_n(x) = (s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_n(x))/(n+1)$, 则

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)K_n(t)dt,$$

其中

$$K_n(t)=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}\right)^2.$$

称 $K_n(t)$ 为 **Fejér 核**(Fejér's kernel). 而称 $\sigma_n(x)$ 为 Fourier 级数的 **Fejér 平均** (Fejér's mean). 若 $f(x\pm 0)$ 存在, 则 $\sigma_n(x)\to(f(x+0)+f(x-0))/2$, 即 f 的 Fourier 级数在点 x 处(C, 1)可和于 $(f(x+0)+f(x-0))/2$. 若 $f(x)$ 在一闭区间上连续, 则 $\mathfrak{S}[f]$ 在这区间内一致地(C, 1)可和 (**Fejér 定理**, 1904). 一般来说, 由于连续函数的 Fourier 级数不一定收敛 (见后述), 所以这个结果表明级数求和法的重要性. 这个结果关于 (C, α) 求和法[†]也成立($\alpha>0$). 更一般地, 若 $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$, 则 $\mathfrak{S}[f]$ 几乎处处 (C, α) 可和于 $f(x)$ (H. Lebesgue). 一般地, 因为 (C, α) 可和的级数也是 Abel 可和的[†], 所以, 上述事实也能就 Abel 求和法[†]来叙述. 若把 f 的 Fourier 级数的 Abel 和记为 $f(r, x)$, 则得

$$f(r,x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)r^n$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)P_r(t)dt,$$

其中 $P_r(t)=(1-r^2)/2(1-2r\cos t+r^2)$, $0\leqslant r<1$. $P_r(t)$ 称为 **Poisson 核** (Poisson's kernel). 由于 $f(r, x)$ 在单位圆内是调和函数[†], 又当 $r\to 1$ 时, $f(r,x)$ 在单位圆周的几乎所有点处都收敛于 $f(x)$, 所以它成为关于单位圆的 Dirichlet 问题[†]的解.

【Gibbs 现象】 设 $f(x)$ 是有界变差函数, 0 是它的不连续点, 并设 $f(0)=0$, $f(+0)=l>0$, $f(-0)=-l$. 则部分和 $s_n(x)$ 在 0 的邻域内收敛于 $f(x)$, 但并非一致收敛, 而有

$$\lim_{n\to\infty}s_n\left(\frac{\pi}{n}\right)=\frac{2l}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt=l\times 1.1789\cdots$$

因而 $\lim_{n\to\infty}s_n(\pi/n)>l$, 即发生 $f(x)$ 的近似曲线 $s_n(x)$ 凝聚在比区间 $0\leqslant y\leqslant l$ 为大的区间 $0\leqslant y\leqslant l\times 1.1789\cdots$ 上的现象(在左侧当然关于原点为对称). 这种现象称为 **Gibbs 现象** (Gibbs' phenomenon). 一般地, 设在 a 的邻域内 $f_n(x)\to f(x)$, $f(a+0)>f(a)(<f(a))$, 当使 $x_m\to a+0$, $\lim_{m\to\infty}f_{n_m}(x_m)>f(a+0)(<f(a+0))$ 成立的 $\{x_m\}$ 存在时, 就称 $f_n(x)$ 在 a 的右侧呈现 Gibbs 现象. 有界变差函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数的部分和 $s_n(x)$, 在 $f(x)$ 的(非可去) 不连续点的两侧必呈现这种现象. 但是 Fejér 平均 $\sigma_n(x)$ 不发生这种现象.

【共轭函数】 若 $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$, 则

$$\tilde{f}(x)=-\frac{1}{\pi}\lim_{h\to 0}\int_h^{\pi}\left((f(x+t)-f(x-t))/2\tan\frac{t}{2}\right)dt$$

对几乎所有 x 都存在. $\tilde{f}(x)$ 称为 $f(x)$ 的**共轭函数** (conjugate function). $f(x)$ 的 Fourier 级数的共轭级数 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]$ 对几乎所有 x 都 (C, α) 可和于 $\tilde{f}(x)$ ($\alpha>0$), 因而也是 Abel 可和的. 但即使 $f(x)\in L_1(-\pi,\pi)$, $\tilde{f}(x)$ 也未必属于 $L_1(-\pi,\pi)$. 另外, $f(x)$ 的共轭级数也不一定是某个函数的 Fourier 级数. 例如, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}$ 是某个 $f\in L_1(-\pi,\pi)$ 的 Fourier 级数, 但其共轭级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$ 却不是 $L_1(-\pi,\pi)$ 中的函数的 Fourier 级数. 若 $f(x)\in L_p(p>1)$, 则 $\tilde{f}(x)\in L_p$, $\|\tilde{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$, 且 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]=\mathfrak{S}[\tilde{f}]$. 若 $|f(x)|\cdot\log^+|f(x)|\in L_1$, 则 $\tilde{f}(x)\in L_1$, 且 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]=\mathfrak{S}[\tilde{f}]$. 称这样的 $f(x)$ 为属于 **Zygmund 类** (Zygmund class). 此外, 在这种情况下, 存在常数 A 和 B, 使得

$$\int_0^{2\pi}|\tilde{f}|\,dx\leqslant A\int_0^{2\pi}|f|\log^+|f|dx+B.$$

若 f 只是可积, 则 $|\tilde{f}|^p$ 对任意 $0<p<1$ 可积, 且 $\|\tilde{f}\|_p\leqslant B_p\|f\|(0<p<1)$. 若 $f(x)\in L_1$ 且 $\tilde{f}(x)\in L_1$, 则 $\tilde{\mathfrak{S}}[f]=\mathfrak{S}[\tilde{f}]$, 若 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0<\alpha<1)$, 则 $\tilde{f}(x)\in L_1$ 且 $\tilde{f}(x)\in\mathrm{Lip}\alpha$. 然而, 即使 $f(x)\in\mathrm{Lip}1$, 也未必有 $\tilde{f}(x)\in\mathrm{Lip}1$, 即使 $f(x)\in C$, 也不一定有 $\tilde{f}(x)\in C$. 共轭函数对 Fourier 级数部分和的收敛性是重要的.

【平均收敛】 一般来说, 当 $\int_a^b|f_n(x)-f(x)|^p dx\to 0$ 时, 就称 $f_n(x)$(在 $[a, b]$ 上) p 次

平均收敛[+]于 $f(x)$. 关于这点，我们有：若 $f(x)\in L_p(p>1)$，则 $s_n(x)$ 与 $\tilde{s}_n(x)$ 分别 p 次平均收敛于 $f(x)$ 与 $\tilde{f}(x)$；若 $f\in L_1$，则对每个 $0<p<1$，$s_n(x)$ 和 $\tilde{s}_n(x)$ 分别 p 次平均收敛于 $f(x)$ 和 $\tilde{f}(x)$. 若 $|f(x)|\log^+|f(x)|\in L_1$，则 $s_n(x)$，$\tilde{s}_n(x)$ 分别一次平均收敛于 $f(x)$，$\tilde{f}(x)$. 把 $s_n(x)$ 与 $\tilde{s}_n(x)$ 用各自的 (C, α) 部分和 $(\alpha>0)$ 替换后，相同的结果仍然成立.

从这些关系可以得到推广了的 Parseval 等式：设 $f(x)\in L_p$，$g(x)\in L_q(1/p+1/q=1)$，$f(x)$ 和 $g(x)$ 的 Fourier 系数分别为 a_n，b_n 和 a'_n，b'_n，则

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} fg\,dx=\frac{1}{2}a_0a'_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_na'_n+b_nb'_n).$$

【H_p 的解析函数】 当单位圆内全纯的函数 $\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 对于 $p>0$ 有

$$\lim_{r\to1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(re^{i\theta})|^p d\theta\leqslant M$$

成立时，就称 $\varphi(z)$ 属于 **Hardy 类** (Hardy class) $H_p\ (p>0)$. 对于属于 H_p 的函数 $\varphi(z)$，在单位圆周上的几乎所有点处，非切向极限 $\lim_{z\to e^{i\theta}}\varphi(z)=\varphi(e^{i\theta})$ 都存在. 把它写成 $\varphi(e^{i\theta})=f(\theta)+i\tilde{f}(\theta)$ 时，则 $f(\theta)$，$\tilde{f}(\theta)$ 同属于 $L_p(p>0)$，当 $p\geqslant1$ 时，$\tilde{f}(\theta)$ 还与 $f(\theta)$ 的共轭函数相同，当 $1<p<\infty$ 时，H_p 与 L_p 同构，但当 $p=1$ 或 ∞ 时，H_p 和 L_p 是不同的类.

用 H_p 函数的理论能论述 Fourier 级数的某些性质. 例如，若 $f(\theta)$，$\tilde{f}(\theta)$ 都是有界变差函数，则 $\varphi(e^{i\theta})$ 绝对连续，且其 Fourier 级数绝对收敛. 再设

$$g(\theta)=\left(\int_0^1(1-r)|\varphi'(re^{i\theta})|^2dr\right)^{1/2},$$

$$g^*(\theta)=\left(\int_0^1(1-r)\,dr\times\int_0^{2\pi}|\varphi'(re^{i(\theta+t)})|^2P(r,t)\,dt\right)^{1/2}$$

($P(r,t)$ 为 Poisson 核)，则 $g(\theta)\leqslant 2g^*(\theta)$，并存在常数 A_p，B，C 和 A_μ，使得

$$\int_0^{2\pi}|g(\theta)|^p d\theta\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta,\ p>0,$$

$$\int_0^{2\pi}|g^*(\theta)|^p d\theta\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta,\ p>1,$$

$$\int_0^{2\pi}|g^*(\theta)|d\theta\leqslant B\int_0^{2\pi}|\varphi|\log^+|\varphi|\,d\theta+C,$$

$$\int_0^{2\pi}|g^*(\theta)|^\mu d\theta\leqslant A_\mu\left(\int_0^{2\pi}|\varphi|\,d\theta\right)^\mu,\ 0<\mu<1$$

成立. 设 $\varphi(e^{i\theta})$ 的 Fourier 级数的部分和为 $s_n(\theta)$，Fejér 平均为 $\sigma_n(\theta)$，令

$$\gamma(\theta)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|s_n(\theta)-\sigma_n(\theta)|^2}{n}\right)^{1/2},$$

则有关系式 $0\neq A_1\leqslant g^*(\theta)/\gamma(\theta)\leqslant A_2\neq\infty$. 由此，如果指标 n_k 满足 $\beta>n_{k+1}/n_k>\alpha>1$，则对于 $\varphi(e^{i\theta})\in H_p\ (p\geqslant1)$，$s_{n_k}(\theta)$ 在几乎所有点处收敛于 $\varphi(e^{i\theta})$. 若设 $\Delta_0(\theta)=c_0$，$\Delta_k(\theta)=\sum_{\nu=n_{k-1}+1}^{n_k}c_\nu e^{i\nu\theta}$，$\delta(\theta)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta_k(\theta)|^2\right)^{1/2}$，其中 $\varphi(e^{i\theta})\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu e^{i\nu\theta}$，则有 $\|\delta(\theta)\|_p\leqslant A_p\|\varphi\|_p$ $(p>1)$ 之类的关系式. 若 $f\in L_p(1<p\leqslant2)$，则

$$\int_0^{2\pi}\left(\sup_{0<n<\infty}\left|\frac{s_n(x)}{(\log(n+2))^{1/p}}\right|\right)^p dx\leqslant A_p\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx.$$

若 $\varphi(z)\in H_p\ (0<p<1)$，则 $\sum c_ne^{in\theta}$ 在几乎所有点处 $(C, p^{-1}-1)$ 可和于 $\varphi(e^{i\theta})$. 所有这些结果，起初由 J. E. Littlewood-R. E. A. C. Paley 给出，其后由 A. Zygmund 推广. 而更精确的结果，由 E. Stein ([11])，洲之内源一郎 ([12])，矢野茂樹 ([13]) 等人获得.

【几乎处处收敛和发散】 P. du Bois-Reymond 在 1876 年指出，存在这样的连续函数，它的 Fourier 级数在某一点发散. 但连续函数的 Fourier 级数是否几乎处处收敛(即在几乎所有点处都收敛)这一问题(称为 **du Bois-Reymond 问题**)，长期没有得到解决. 1966 年，L. Carleson 证明，L_2 中的函数的 Fourier 级数几乎处处收敛 ([14]). 因而连续函数的 Fourier 级数几乎处处收敛. 他更进一步指出：若 $f\in L_p(1<p<2)$，则在几乎所有点处，有 $s_n(x)=o(\log\log\log n)$，并且若 $f(\log^+|f|)^{1+\delta}\in L_1(\delta>$

0),则在几乎所有点处,有 $s_n(x)=o(\log\log n)$. R. A. Hunt [16] 用 Carleson [14] 的方法证明了

$$\int_0^{2\pi}(\sup_n|s_n(x)|)^p dx \leqslant A_p\int_0^{2\pi}|f(x)|^p dx,$$

$$1<p<\infty,$$

此式蕴涵 $f\in L_p(1<p<\infty)$ 的 Fourier 级数几乎处处收敛. Hunt 还证明了

$$\int_0^{2\pi}(\sup_n|s_n(x)|)dx$$

$$\leqslant A\int_0^{2\pi}|f(x)|(\log|f(x)|)^2 dx + A.$$

另外, P. Sjölin 证明了:若

$$\int_0^{2\pi}|f|\cdot\log^+|f|\cdot\log\log^+|f|\,dx<\infty,$$

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数几乎处处收敛.

另一方面, A. H. Колмогоров 给出了这样一个函数 $f(x)$ 的例子, $f(x)\in L_1$ 且到处都有 $\lim_{n\to\infty}\sup|s_n(x)|=\infty$ (更精确地说,在几乎所有点处都有 $\lim_{n\to\infty}\sup|s_{2^n}(x)|=\infty$). 把它变形,也已给出在几乎所有点处都有 $\limsup|s_n(x)|<\infty$, 而 $s_n(x)$ 却振动发散的例子 (J. Marcinkiewicz). 在 H_1 中还存在着这样的函数,它的实部的 Fourier 级数 (如前所述 $s_{2^n}(x)$ 几乎处处收敛)在几乎所有点处都发散(G. H. Hardy-W. W. Rogosinski-洲之内). 其次,对任意给定的零集,能作出一个连续函数,使它的 Fourier 级数在所给集合上发散 (J.-P. Kahane-Y. Katznelson [15]).

【绝对收敛】 为使三角级数 $a_0/2+\sum(a_n\times\cos nx+b_n\sin nx)$ 绝对收敛,显然, $\sum(|a_n|+|b_n|)<\infty$ 成立是一个充分条件. 反之,若三角级数在一个正测度集上绝对收敛,则有 $\sum(|a_n|+|b_n|)<\infty$ (**Denjoy-Лузин 定理**). 若 $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha(\alpha>1/2)$, 则其 Fourier 级数绝对收敛. 但当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时,这一结论不一定成立. 然而,若 $f(x)$ 为有界变差且 $\in\mathrm{Lip}\,\alpha(\alpha>0)$, 则其 Fourier 级数绝对收敛. 再设 $f(x)$ 的 Fourier 级数绝对收敛且 $f(x)$ 的值属于 (a,b), 若 $\varphi(z)$ 为复变量函数并在 (a,b) 的所有点处全纯,则 $\varphi(f(x))$ 的 Fourier 级数绝对收敛 (**Wiener-Lévy 定理**). 例如,如果 $f(x)\neq 0$, 且 $f(x)$ 的 Fourier 级数绝对收敛,那末 $1/f(x)$ 的 Fourier 级数也绝对收敛. 反之,设 $\varphi(x)$ 为定义在闭区间 $[-1,1]$ 上的函数,若对于具有绝对收敛的 Fourier 级数的任意函数 $f(x)$ ($|f(x)|\leqslant 1$), $\varphi(f(x))$ 的 Fourier 级数还绝对收敛,则能把 $\varphi(x)$ 开拓为复变量函数 $\varphi(z)$, 且 $\varphi(z)$ 在 $[-1,1]$ 的各点处都是全纯的(Katznelson[10]).

这方面许多问题还没有解决. 特别是,关于确定具有绝对收敛的 Fourier 级数的函数的结构,还没有完满解决.

【唯一性集】 设 $\sum_n(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为任意的三角级数,但不一定是 Fourier 级数. 若在一个正测度集上 $a_n\cos nx+b_n\sin nx\to 0$ 成立,则有 $a_n, b_n\to 0$ (**Cantor-Lebesgue 定理**). 设 E 为 $(-\pi,\pi)$ 中的集合,若仅当三角级数的系数全为 0 时,它才在 E 外处处收敛于 0, 则称 E 为**唯一性集**(set of uniqueness)简称为 **U 集**; 反之,若存在在 E 外收敛于 0, 而其系数不全为 0 的三角级数时,则称 E 为**相重性集**(set of multiplicity) 简称为**M集**. G. Cantor 证明,有限集是U集,而 W. H. Young 证明,可数集也是U集. 显然任意正测度集 E 是M集,但 Д. E. Меньшов 证明,也存在测度为 0 的完全M集. 而 H. K. Бари 证明了存在U型的完全集([4]). 然而,唯一性集的构造问题,尚未完全解决.

如果存在正整数序列 $n_1<n_2<\cdots$ 和区间 I, 使得对每个 $x\in E$; $\{n_k x\}^\infty_{k=1}$ 中任一点 (mod 2π) 都不在 I 内,就称集合 E 为H型的. H集是唯一性集,这一事实是 A. Rajchman 给出的. И. И. Пятецкий-Шапиро 把 H 集推广为 $H^{(m)}$ 集[3].

缺项三角级数是只有很少数的项异于 0 的三角级数. 这种级数可写为

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos n_k x+b_k\sin n_k x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_{n_k}(x)$$

的形式. S. Sidon 确立了这种级数的某些特征性质,他进一步推广了这些性质而得到了 Sidon

集的概念(→调和分析). 我们常更特殊地定义缺项级数为这样的级数,对于它, n_k 满足 Hadamard 空隙条件: $n_{k+1}/n_k > q > 1$. 于是,若 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ 有限,则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k}(x)$ 几乎处处收敛. 反之,若 $\sum_{k=1}^{\infty} A_{n_k}(x)$ 在一个正测度集内收敛,则 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ 收敛. 这一定理与 Rademacher 级数,随机 Fourier 级数有联系[4].

【多重 Fourier 级数】 从单变量 Fourier 级数按常规推广为多重 Fourier 级数是容易的,不过要获得有意义的结果却是困难的. 然而,最近在这个领域里,已有了若干重要成果.

【参】 [1] A. Zygmund, Trigonometrical series, Warsaw, 1935; [2] A. Zygmund, Trigonometric series I, II, Cambridge Univ. Press, 1959; [3] G. H. Hardy-W. W. Rogosinski, Fourier series, Cambridge, Univ. Press, 1950 (中译本: 哈代-洛戈辛斯基, 富里埃级数, 上海科学技术出版社, 1978); [4] H. K. Бари, Тригонометрические ряды, физматгиз, 1958 (英译本: N. K. Bari, A treatise on trigonometric series, Pergamon, 1964;) [5] J.-P. Kahane-R. Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1963; [6] 陳建功, 三角級数論, 岩波, 1930; [7] 陈建功, 三角级数论(上), 上海科学技术出版社, 1964; [8] 洲之内源一郎, フーリエ解析, 現代数学講座, 共立出版, 1956; [9] 土倉保, フーリエ解析, 至文堂, 1964; [10] Y. Katznelson, Sur les fonctions opérant sur l'algèbre des séries de Fourier absolument convergentes, C. R. Acad. Sci. Paris, **247** (1958), 404—406; [11] E. M. Stein, A maximal function with applications to Fourier series, Ann. of Math., (2) **68** (1958), 584—603; [12] G. Sunouchi (洲之内源一郎), Theorems on power series of the class H^p, Tôhoku Math. J., (2) **8** (1956), 125—146; [13] S. Yano (矢野茂樹), On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fouries series, Tôhoku Math.J., (2) **11** (1959) 191—215; [14] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, Acta. Math., **116** (1966), 135—157; [15] J.-P. Kahane-Y. Katznelson, Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques, Studia Math., **26** (1966), 305—306; [16] R. A. Hunt, On the convergence of Fourier series, orthogonal expansions and their continuous analogues, Proc. Conf. Edwardsville, III (1967), Southern Illinois Univ. Press, 1968, p. 235—255; [17] P. Sjölin, An inequality of Paley and convergence a. e. of Walsh-Fourier series, Ark. Mat., **7** (1968), 551—570; [18] R. Salem, Algebraic numbers and Fourier analysis, Heath and Co., 1963; [19] J.-P. Kahane, Some random series of functions, Heath and Co., 1968.

Fourier 变换 [英 Fourier transform 法 transformation de Fourier 德 Fouriersche Transformation 俄 преобразование Фурье 日 フーリエ変換] 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的实值函数,形如 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx$ 的积分,称为**三角积分** (trigonometric integral) 或 **Fourier 积分** (Fourier integral). (设积分为 Lebesgue 积分†.) 如果 $f(x)\in L_1(-\infty, \infty)$, $K(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界,并且 $\int_0^T K(t)\,dt = O(T)$ $(T\to\pm\infty)$, 则 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K(xt)dt$ 存在,且 $\lim_{t\to\pm\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\times K(xt)dx = 0$. 特别是,如果设 $K(t) = e^{-it}$, 则当 $t\to\infty$ 时, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-itx}\,dx\to 0$ (**Riemann-Lebesgue 定理**).

【Fourier 积分定理】 设 $f(x)$ 在 x 的一个邻域中为有界变差†, 或更一般地满足 Fourier 级数收敛的某个条件 (→Fourier 级数). 此时,为使 **Fourier 单积分定理** (single integral theorem of Fourier)

(1) $$(f(x+0)+f(x-0))/2 = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}\,dx$$

成立,只须以下 1), 2), 3) 中之一成立即可: 1) $f(x)/x$ 在 $x=\pm\infty$ 的邻域中属于 L_1. 2) $f(x)/x$ 当 $x\to\pm\infty$ 单调地收敛于 0. 3) $f(x)/x$ 取 $g(x)\sin(px+q)$ 的形式, 而当 $x\to\pm\infty$ 时 $g(x)$ 单调地收敛于 0 (泉信一, 1934). (1) 的右端称为 **Dirichlet 积分** (Dirichlet's integral).

又当 $f(x)$ 在含有 x 的一个区间内为有界变差 (或满足 Fourier 级数在 x 处收敛的别的条件) 时, 则 **Fourier 二重积分定理** (double integral theorem of Fourier)

(2) $$(f(x+0)+f(x-0))/2 = \frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_0^T dt\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos t(u-x)\,du$$

在 $f(x)$ 满足以下条件 1), 2), 3) 中之一时即告成立: 1) $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. 2) $f(x)/(1+|x|)\in L_1(-\infty,\infty)$, 且当 $x\to\pm\infty$ 时,

$f(x)$ 单调递减地趋近于 0. 3) $f(x)/(1+|x|) \in L_1(-\infty,\infty)$, 且 $f(x)$ 取 $g(x)\sin(px+q)$ 的形式,而 $g(x)$ 单调地收敛于 0.

$$f(x)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin^2 A(t-x)}{A(t-x)^2}dx$$

当 $f(x)$ 在 x 处连续时成立,且当 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ 时在几乎所有点处恒成立.

又一般地,为使

$$(3)\quad f(x)=\lim_{A\to\infty}A\int_{-\infty}^{\infty}f(t)K(A(t-x))dt$$
$$=\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x-\frac{t}{A}\right)K(t)dt$$

在所有使 $f(x+0)$ 和 $f(x-0)$ 存在的点 x 处成立,只须 $K(t)\in L_1(-\infty,\infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty}K(t)dt=1$, $|K(t)|<M$, 并且当 $|t|\to\infty$ 时 $K(t)=o(t^{-1})$, 以及 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ 即可.或 $K(t)\in L_1(-\infty,\infty)$, $\int_{-\infty}^{\infty}K(t)dt=1$ 以及 $f(x)$ 有界亦可. 类似地,公式

$$\lim_{A\to 0}\int_0^{\infty}f\left(\frac{x}{A}\right)K(x)\,dx=\mathfrak{M}\{f\}\int_0^{\infty}K(x)dx$$

成立,如果 $\mathfrak{M}\{f\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ 存在, $K(x)$ 可微, 且存在常数 C, D, 使得 $|x^2K(x)|\le C$ $(1\le x)$, $\frac{1}{x}\int_0^x|f(t)|dt\le D$ (**Wiener 公式**).

【Fourier 变换】 (→公式 11 II) 设 $f(x)\in L_1(0,\infty)$, 称 $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\cos ut\,du=F(t)$ 为 $f(x)$ 的**余弦变换**(cosine transform). 在与使(2)成立的条件相同的条件下, 余弦变换的**反演公式** (inversion formula) $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F(t)\cdot\cos xt\,dt$ 成立(但设 $f(x)=(f(x+0)+f(x-0))/2$, 以下都是如此). 如果定义 $f(-x)=f(x)$, 则此式与(2)等价. 同样地, 称 $G(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(u)\sin ut\,du$ 为 $f(x)$ 的**正弦变换** (sine transform). 在与使(2)成立的条件相同的条件下, 反演公式 $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}G(t)\times\sin xt\,dt$ 成立.一般地,对于 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$,

$$F(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixt}dx$$

称为 $f(x)$ 的 **Fourier 变换**. 在与使(2)成立的条件相同的条件下,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}F(t)e^{ixt}dt$$

成立. 余弦变换与正弦变换分别与 $f(x)=f(-x)$ 和 $-f(x)=f(-x)$ 情形下的 Fourier 变换一致. 又一般地,设 $q\ge 1$, 当使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-ixt}dx-F(t)\right|^q dt$$
$$\to 0\quad (T\to\infty)$$

的 $F(t)\in L_q(-\infty,\infty)$ 存在时, 就称 $f(x)$ "在 L_q 内具有 Fourier 变换 $F(t)$". 如果 $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ $(1<p\le 2)$, 则 $f(x)$ 在 L_q 内具有 Fourier 变换 $F(t)$,这里 $1/p+1/q=1$. 另外, 此 $F(t)$ 在 L_p 内具有 Fourier 变换 $f(-x)$ (E. C. Titchmarsh). 又

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(t)|^q dx$$
$$\le\frac{1}{(2\pi)^{(q/2)-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{1/(p-1)}$$

成立. 设 $f(x), G(x)\in L_p(-\infty,\infty)$ $(1<p\le 2)$,它在 L_q 内的 Fourier 变换分别为 $F(t)$, $g(t)$,则

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(t)G(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(-x)dx$$

成立 (**Parseval 等式**). 又关于 f 与 F 之间的关系,我们有

$$\int_0^x F(u)du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{e^{-ixt}-1}{-it}dt,$$
$$\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\frac{e^{ixu}-1}{iu}du.$$

以上的理论对于余弦变换、正弦变换也成立. 特别当 $p=2$ 时, 对于余弦变换而言, 当 $T\to\infty$ 时, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^T f(x)\cos xt\,dt$ 在 L_2 内平均收敛[+]于余弦变换 $F(t)$, 且反之, $F(t)$ 在 L_2 内的余弦变换就是 $f(x)$. 或

$$\int_0^x F(u)\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\,\frac{\sin xt}{t}\,dt,$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F(u)\frac{\sin xu}{u}du.$$

又
$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |F(t)|^2 dt.$$

以上的理论对一般的变换仍然成立，这已为 G. N. Watson 所证明(Proc. London. Math. Soc., **35** (1933)). 即设 $\chi(x)$ 为使 $\chi(x)/x \in L_2(0, \infty)$ 的任意函数，且

(4) $$\int_0^\infty \frac{\chi(xu)\chi(yu)}{u^2}\,du = \min(x, y).$$

如果 $f(x) \in L_2(0, \infty)$，则存在 $f(t) \in L_2(0, \infty)$，使得

$$\int_0^x F(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\chi(xu)f(u)}{u}\,du,$$

且反演公式

$$\int_0^x f(u)du = \int_0^\infty \frac{\chi(xt)F(t)}{t}\,dt$$

成立，也可得到 Parseval 等式

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_0^\infty |F(t)|^2 dt.$$

$F(t)$ 称为 $f(x)$ 的 **Watson 变换**(Watson transform). 为使对于任意的 $f \in L_2$，存在 Watson 变换 F，且上面的反演公式成立，(4) 是必要的. S. Bochner 进一步把这个理论推广到 L_2 中的酉变换†的情形(1934)(→调和分析).

【共轭函数】 对应于 Fourier 二重积分定理(2)，作 $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt\int_{-\infty}^\infty \sin t(u-x)f(u)du$. 称它为(2)右端的积分的**共轭 Fourier 积分** (conjugate Fourier integral). 它在形式上成为

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda t}{t}\,(f(x+t)-f(x-t))dt.$$

如果 $f(x)$ 是充分正则的函数，则当 $\lambda\to\infty$ 时，含 $\cos\lambda t$ 的部分即趋近于 0. 与此相关连，考察

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty,\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt.$$

如果 $f \in L_1(0, \infty)$，则 $g(x)$ 对几乎所有 x 存在，称它为 f 的**共轭函数** (conjugate function) 或 **Hilbert 变换** (Hilbert transform). 如果有 $f \in L_p(p > 1)$，则 $g(x)$ 也属于 $L_p(p > 1)$，且

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\lim_{A\to 0,\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^A \frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}dt$$

成立，并有

$$\int_{-\infty}^\infty |g(x)|^p\,dx \leqslant M\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^p\,dx.$$

其中 M 是只依赖于 p 的常数. 在 $p = 2$ 时，则有

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^\infty |g(x)|^2\,dx.$$

【与解析函数的边界函数的关系】 设 $f(z)$ $(z = x + iy)$ 当 $y > 0$ 时为全纯，对几乎所有 x，当(固定 x) $y \to 0$ 时，$f(z)$ 收敛于一个函数 $f(x)$ (称它为边界函数)，且 $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)(p \geqslant 1)$. 又设 $f(z)$ 可以用 $f(x)$ 的 Cauchy 积分公式†或 Poisson 积分†来表示. 今设 $f(x)$ 为预先给定，$f(x) \in L_p(p \geqslant 1)$ 且具有 Fourier 变换 $F(t)$，或 $f(x)$ 为某个函数 $F(t) \in L_q(q \geqslant 1)$ 在 L_p 内的 Fourier 变换. 为使这个 $f(x)$ 成为上述全纯函数的边界函数的充分必要条件是，$F(t)$ 在几乎所有 $t > 0$ 处取值为 0 (N. Wiener, R. E. A. C. Paley, E. Hille, J. D. Tamarkin).

【广义 Fourier 积分】 设 k 为正整数，$|f(x)|/(1+|x|^k) \in L_1(-\infty, \infty)$，而 $L_k =$

$$L_k(t, x) = \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(-itx)^\nu}{\nu!}\ (|x| \leqslant 1),$$
$$= 0(|x|>1).$$

$$E_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\frac{e^{-itx}-L_k}{(-ix)^k}\,dx$$

或最多与它仅差一 k 次多项式的函数，称为 $f(x)$ 的 **k 变换**. 上面的关系式亦可形式地写成 $f(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{ixt}d^kE_k(t)$. 对积分给予适当的意义，也能使上式实际成立 (H. Hahn, Wiener Berichte, **134** (1925); 泉信一，東北理報，**23** (1935)) (关于 k 变换的理论与应用 →Bochner [2]，第六章.)

【Fourier 变换的应用】 设 $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$，$f(x) = o(e^{-\theta(x)})$，其中 $\theta(x)$ 为正的单调递增函数. 当 $\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^2}\,dx = \infty$ 时，设 $f(x)$ 的 Fourier 变换为 $F(t)$. 如果 $F(t)$ 在某个区间上 $\equiv 0$，则在 $(-\infty, \infty)$ 内 $F(t) \equiv 0$. 如

果 $\int_1^\infty \frac{\theta(x)}{x^2}dx<\infty$，则存在函数 $f(x)$，使得在某个区间上 $F(t)\equiv 0$，而在 $(-\infty,\infty)$ 内 $F(t)$ 不恒等于 0（Wiener, Paley, N. Levinson）. 这些论述在拟解析函数†的理论上有应用.

设 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$. 为使 $L_1(-\infty,\infty)$ 中任意的函数可以用形如 $\sum_{k=1}^N a_k f(x+h_k)$ 的函数关于 L_1 的范数任意精确地逼近的充分必要条件是，$f(x)$ 的 Fourier 变换没有零点. 又以 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ 的函数所作的 $\sum_{k=1}^N a_k \times f(x+h_k)$，关于 L_2 的范数能任意精确地逼近 L_2 的任意函数的充分必要条件是，$f(x)$ 在 L_2 内的 Fourier 变换的零点构成测度为 0 的集合（Wiener）. Wiener 把它应用于以下的**广义 Tauber 型定理**（generalized Tauberian theorem）的证明上：设 $g_1(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，且其 Fourier 变换不为 0. 设 $g_2(x)\in L_1(-\infty,\infty)$，$p(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界. 如果

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-t)p(t)\,dt=A\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\,dt,$$

则有下式成立:

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x-t)p(t)\,dt=A\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\,dt.$$

Wiener 定理的其他类型涉及 Stieltjes 积分.

设 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{Sup}_{n\leq x<n+1}|g_1(x)|<\infty$（从而 $g_1(x)\in L_1$），且 $g_1(x)$ 的 Fourier 变换没有零点. 又设 $g_2(x)$ 也满足 $\sum\operatorname{Sup}_{n\leq x<n+1}|g_2(x)|<\infty$. 如果

$$\int_x^{x+1}|d\alpha(t)|\text{有界},$$

$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-t)d\alpha(t)=A\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)\,dt$，则

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x-t)d\alpha(t)=A\int_{-\infty}^{\infty} g_2(t)\,dt.$$

根据这些定理，可以证明有关级数的许多 Tauber 型定理†. 又这些定理曾由池原止戈夫和 E. Landau 应用于素数定理†的证明（Wiener [1]）. 此外，关于上面的广义 Tauber 型定理中 $p(t)$ 的条件，以单侧有界性来代替有界性，常常是方便的（H. R. Pitt, 1938）. 例如，在第一广义 Tauber 型定理中，把条件改为 $g_1(x)\geq 0$，$g_1(x)$ 的 Fourier 变换不为 0，$g_2(x)$ 满足上面第二定理中 g_2 的条件（g_2 在测度为 0 的集合上不连续亦可），且 $p(x)\geq C$，则该定理仍然成立. 另外，作为与此有关的内容，关于拓扑群上的 Fourier 变换→调和分析，关于广义函数的 Fourier 变换→广义函数.

【参】 [1] N. Wiener, The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933; [2] S. Bochner, Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademische-Verlag, 1932 (英译本: Lectures on Fourier integrals, Ann. of Math. Studies, **42** (1959)); [3] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, 1937; [4] R. E. A. C. Paley-N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1934; [5] S. Bochner-K. Chandrasekharan, Fourier transforms, Ann. Math. Studies, Princeton Univ Press, 1949; [6] M. J. Lighthill, Introduction to Fourier analysis and generalized functions, Cambridge Univ. Press, 1958; [7] И. М. Гельфанд-Г. Е. Шилов, Обобщенные функция, Физматгиз, 1959(中译本: И. М. 盖里范德, Г. Е. 希洛夫, 广义函数, I. IV, 科学出版社, 1965); [8] S. Bochner, Harmonic analysis and the theory of probability, Univ. of California Press, 1955; [9] R. R. Goldberg Fourier transforms, Cambridge tracts, Cambridge Univ. Press, 1961; [10] T. Carleman, L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Almquist & Wiksells, 1944. 又关于 Fourier 变换的具体公式集→积分变换的【参】.

调和分析 [英 harmonic analysis　法 analyse hormonique　德 harmonische Analyse　俄 гармонический анализ　日 調和解析] 【Fourier 变换】 对于函数 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$,

$$(1)\qquad \hat f(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}\,dx$$

存在且在 $(-\infty,\infty)$ 上连续. 我们称 $\hat f$ 为 f 的 Fourier 变换†. 如果 $f(x)\in L_2(-\infty,\infty)$，则对于任意的有限区间 $(-a,a)$ 有 $f(x)\in L_1(-a,a)$；如果令

$$\hat f_a(t)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-a}^{a} f(x)e^{-itx}\,dx,$$

则 $\hat f_a$ 的二次平均收敛†的极限 $\lim_{a\to\infty}\hat f_a=\hat f$ 存在且 $\hat f$ 属于 $L_2(-\infty,\infty)$. 称此 $\hat f$ 为 $f\in L_2(-\infty,\infty)$ 的 Fourier 变换†. 此时，如设

$$f_a(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-a}^{a}\hat f(t)e^{itx}\,dt.$$

则$\lim_{a\to\infty} f_a(x)=f(x)$ (Plancherel 定理†). 在 f 与 $\hat{f}$之间, Parseval 等式† $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(t)|^2dt$ 成立(→Fourier 变换).

在 $f(x)$ 为周期函数的情形,与以上事实相当的命题有如下述: 当 $f(x)$ 具有周期 2π 且 $f(x)\in L_2(-\pi,\pi)$ 时, 如果令 $a_n=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$ (Fourier 系数†),则 Fourier 级数†的部分和 $s_n(x)=\sum_{\nu=-n}^{n}a_\nu e^{i\nu x}$ 二次平均收敛于 $f(x)$,且Parseval 等式† $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2$ 成立. 又如果给出满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2<\infty$ 的任意数列 $\{a_n\}$, 则 $\sum_{\nu=-n}^{n}a_\nu e^{i\nu n}$ 二次平均收敛于某个 $f\in L_2(-\pi,\pi)$, 而 f 的 Fourier 系数即为 $\{a_n\}$, 且 Parseval 等式成立 (→Fourier 级数).

【Bochner 定理, Herglotz 定理】 设 $f(x)$ 为定义在$(-\infty,\infty)$上的函数,如果对于任意有限个实数 $x_1,\cdots,x_n$ 和复数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 恒有 $\sum_{j,k=1}^{n}f(x_j-x_k)\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant 0$, 则称 $f(x)$ 为**正定函数** (positive definite function) 或**正型函数** (function of positive type). 如果 $f(x)$ 在$(-\infty,\infty)$上为可测正定函数, 则存在有界单调递增函数 $\alpha(t)$, 使

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}d\alpha(t)\,(\text{a. e.})\tag{2}$$

成立; 如果 $\alpha(-\infty)=0$ 且 $\alpha(t)$ 右连续, 则 $\alpha(t)$ 唯一确定 (**Bochner 定理**). 反之, 如果 $\alpha(t)$为有界单调递增函数,则(2)所表示的函数 $f(x)$ (称它为 $\alpha(t)$ 的 **Fourier-Stieltjes 变换** (Fourier-Stieltjes transform)) 为连续正定函数.

数列的情形. 对于数列 $\{a_n\}(-\infty<n<\infty)$, 如果对于任意的 n 与任意的复数 $\xi_1,\cdots,\xi_n$, 恒有 $\sum_{j,k=1}^{n}a_{j-k}\xi_j\bar{\xi}_k\geqslant 0$,则称 $\{a_n\}$ 为**正定数列** (positive definite sequence) 或**正型数列** (sequence of positive type). 正定数列 $\{a_n\}$ 可以用 $[-\pi,\pi]$的某个递增有界函数 $\alpha(t)$ 表示为 $a_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}d\alpha(t)$ (**Herglotz 定理**). 反之, 如果 $\alpha(t)$ 为单调递增且有界,而 a_n 由(2)式所给出, 则数列 $\{a_n\}$ 为正定数列.

【Poisson 求和公式】 设 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$为有界变差且连续,其 Fourier 变换为 $\hat{f}(t)$, 则当 $ab=2\pi\,(a>0)$ 时,

$$\sqrt{a}\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(ak)=\sqrt{b}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\hat{f}(bk)$$

成立,称它为 **Poisson 求和公式** (Poisson's summation formula).

【Wiener 的广义 Tauber 型定理】 i) 如果函数 $f(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(t)$ 对于所有实数 t 均不为 0 时,则形如

$$h(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy,\ g\in L_1(-\infty,\infty)$$

的函数 h 的全体在 $L_1(-\infty,\infty)$ 中关于 L_1 范数†为稠密. 由此可以得到下面的定理: ii) Wiener 的广义 Tauber 型定理†. 设函数 $k_1\in L_1(-\infty,\infty)$的 Fourier 变换不取 0 值,$f(x)$为$(-\infty,\infty)$上的有界可测函数,且存在常数$C$,使

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-y)f(y)dy=C\int_{-\infty}^{\infty}k_1(y)dy,$$

则对于任意的函数 $k_2\in L_1(-\infty,\infty)$, 有

$$\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k_2(x-y)f(y)dy=C\int_{-\infty}^{\infty}k_2(y)dy$$

(→Fourier 变换 [Fourier 变换的应用]). 由此定理可以导出 J. E. Littlewood 形式的 Tauber 型定理†([3]).

【调和分析】 设 $\alpha(\lambda)$ 是 $(-\infty,\infty)$ 上的右连续且有界变差的复值函数. 此时,与(2)形式相同的

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}d\alpha(\lambda),\tag{2'}$$

可以看作把函数 $f(t)$ 作为调和振动 $e^{i\lambda t}$ 的叠加的表达式. 反之, 当 $f(t)$ 已给时, 我们就有求如上所述的函数 $\alpha(\lambda)$, 使得 $f(t)$ 可以表为(2′)的形式的问题. 当这样的函数 $\alpha(\lambda)$存在时, 则求固有振动成分的频率 $\alpha(\lambda)-\alpha(\lambda-0)$,

在调和分析中也是一个重要的问题．与这个问题相联系，以下的定理成立：

1）函数 $f(t)$ 可表为(2′)形式的充分必要条件是 $\sup_{n\geq 1}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t/n}{t/n}\right)^2 f(t)e^{-i\lambda t}\,dt\right|d\lambda < \infty$.

2）对于以(2′)给出的 $f(t)$，i）对任意的 λ_0，有

$$\alpha(\lambda_0)-\alpha(\lambda_0-0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(t)e^{-i\lambda_0 t}dt,$$

ii）如果 $\alpha(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_0-\sigma$ 和 $\lambda=\lambda_0+\sigma$ $(\sigma>0)$ 处连续，则

$$\alpha(\lambda_0+\sigma)-\alpha(\lambda_0-\sigma)=\lim_{T\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-T}^{T}\frac{\sin\sigma t}{t}f(t)e^{-i\lambda_0 t}dt.$$

3）设(2′)中的有界变差函数 $\alpha(\lambda)$ 的不连续点为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, a_n=\alpha(\lambda_n)-\alpha(\lambda_n-0)$ $(n=1,2,\cdots)$，则

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_0^S f(t+s)\overline{f(s)}\,ds=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 e^{i\lambda_n t}.$$

【Paley-Wiener 定理】 以复数 $\zeta=t+i\sigma$ 代替(1)中的 t 所得到的函数

$$(3)\qquad F(\zeta)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\zeta x}dx,$$

称为 $f(x)$ 的 **Fourier-Laplace 变换** (Fourier-Laplace transform)．特别是，如果 $f(x)$ 具有有界支集†，则 $F(\zeta)$ 成为整函数．一般地，关于 Fourier-Laplace 变换，R. E. A. C. Paley-N. Wiener 证明了下列定理：

1）为使整函数 $F(\zeta)$ 成为支集包含于有限区间 $[-B,B]$ 内的 C^∞ 类函数 f 的 Fourier-Laplace 变换的充分必要条件是，对于任意的整数 N，存在常数 $C_N>0$，使对所有 $\zeta=t+i\sigma$，

$$|F(\zeta)|\leqslant C_N(1+|\zeta|)^{-N}e^{B|\sigma|}$$

成立．

2）设 $g(t)\in L_2(0,\infty)$，则其单侧 Laplace 变换 $f(z)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty g(t)e^{-tz}dt$，满足：

i) 在右半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$ 内全纯，

ii) $\sup_{x>0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^2dy<\infty$.

反之，对于满足 i), ii) 的函数 $f(z)=f(x+iy)$ $(x>0)$，则其"边界值函数" $f(iy)\in L_2(-\infty,\infty)$ 在

$$\lim_{x\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty}|f(iy)-f(x+iy)|^2dy=0$$

的意义下存在，它在 L_2 内的 Fourier 变换

$$g(t)=\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_{-N}^{N}f(iy)e^{ity}\,dy$$

在 $t<0$ 时几乎处处等于零，且 $f(z)$ 可由 $g(t)$ 的单侧 Laplace 变换得到．

【拓扑 Abel 群上的调和分析】 实数直线上的调和分析理论，包括 Wiener 的广义 Tauber 型定理在内的一般理论，已由 A. Weil, И. М. Гельфанд, Д. А. Райков 等应用赋范环（→Banach 代数）的理论推广到局部紧 Abel 群的情形．这一理论称为"Abel 群上的调和分析"．以下就此理论加以阐述．

【群环】 如果设 $L_1=L_1(G)$ 是关于局部紧 Abel 群 G 上的 Haar 测度†为可积的函数的全体，如果 L_1 中的范数与乘法分别定义为

$$\|f\|=\int|f(x)|dx,\quad f\cdot g(x)=\int f(xy^{-1})g(y)dy,$$

则 L_1 成为 Banach 代数†．(上面的 $f\cdot g$ 称为 f 与 g 的**卷积** (convolution) 或**合成积** (composition product).) 当 G 的拓扑不是离散拓扑†时，由于 L_1 没有乘法单位，因而在 $L_1(G)$ 上附加形式单位元素 $\mathbf{1}$，而在集合

$$R=\{\alpha\mathbf{1}+f\,|\,\alpha\text{ 为复数}, f\in L_1\}$$

中，分别定义范数，加法与乘法为

$$\|\alpha\mathbf{1}+f\|=|\alpha|+\|f\|,$$

$$(\alpha\mathbf{1}+f)+(\beta\mathbf{1}+g)=(\alpha+\beta)\mathbf{1}+(f+g),$$

$$(\alpha\mathbf{1}+f)\cdot(\beta\mathbf{1}+g)=(\alpha\beta)\mathbf{1}+(\beta f+\alpha g+f\cdot g),$$

于是 R 成为具有乘法单位元的交换 Banach 代数．如果 G 的拓扑是离散拓扑，则 $R=L_1$，并是具有乘法单位元的交换 Banach 代数．无论哪种情形，如上所述的 Banach 代数 R 称为群 G 的**群代数** (group algebra)．G 的群代数 R 是半单†的．R 代数同构于 $C(\mathfrak{M})$ 的一个子代数，这里 $\mathfrak{M}$ 是由 R 内的一切极大理想†所成的紧空间，$C(\mathfrak{M})$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的一切连续函数所成的代数（→Banach 代数）．在这个同构下，如果 $\varphi\in R$ 对应到 $\mathfrak{M}$ 上的函数 $\varphi(M)$，则 $\sup_{M\in\mathfrak{M}}|\varphi(M)|\leqslant\|\varphi\|$

成立．当且仅当G的拓扑不是离散拓扑时，L_1才成为$\mathfrak{M}$的元．

【Fourier 变换】 G，$\mathfrak{M}$仍如前节所设，如果按照G的拓扑为离散拓扑或非离散拓扑而分别设$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$或$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}-\{L_1(G)\}$，则$\mathfrak{N}$与$G$的特征标群† $\hat{G}$之间，存在如下的一一对应：如果$M\in\mathfrak{M}$与$\chi\in\hat{G}$对应，则

$$(4)\qquad f(M)=\int\chi(x)f(x)\,dx\ ,\ f\in L_1,$$

$$(5)\qquad \chi(y)=f_y(M)/f(M),$$

其中$f_y(x)=f(xy^{-1})$，而f为满足$f(M)\neq 0$的属于L_1的任意函数，(5)或右端的值与f的取法无关．这个对应$M\longleftrightarrow\chi$是局部紧空间$\mathfrak{N}$与$\hat{G}$之间的同胚．因此，如果将对应的M与x看作相同而令$f(M)=\hat{f}(x)$，则$\hat{f}$就成为特征标群$\hat{G}$上的连续函数，称它为$f(x)$的 **Fourier 变换**(Fourier transform)．由于$f\to f(M)$是代数的同构表示，所以$(f\cdot g)^\wedge(\chi)=\hat{f}(\chi)\hat{g}(\chi)$．又如果$\hat{f}(\chi)\equiv\hat{g}(\chi)$，则$f$与$g$作为$L_1$中的元是相等的．这称为 Fourier 变换的**唯一性定理**或**单一性定理**(unicity theorem)．由此可以导出局部紧 Abel 群的极大殆周期性†．

在G的拓扑不是离散拓扑时，由于$L_1\in\mathfrak{M}$，所以对于$f\in L_1$，有$f(L_1)=0$；从而，将$f(M)$看作(与$\mathfrak{N}=\mathfrak{M}-\{L_1\}$视为同一的)$\hat{G}$上的$\hat{f}(\chi)$，则对任意的$\varepsilon>0$，$\{\chi\,|\,|\hat{f}(\chi)|\geqslant\varepsilon\}$便成为$\hat{G}$的紧子集；即$\hat{f}$是"在$\hat{G}$的无穷远点为零的连续函数"($G=\boldsymbol{R}^1$或$T^1$情形的 Riemann-Lebesgue 定理†的推广)．又在$\hat{G}$上连续，在无穷远点为零的任意函数$u(\chi)$，可以由$f\in L_1(G)$的 Fourier 变换$\hat{f}(\chi)$在$\hat{G}$上一致逼近．

【正定函数】 当群G上的函数$\varphi(x)$对于G的任意有限个元$x_1,\cdots,x_n$以及复数$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$有$\sum_{j,k=1}^{n}\varphi(x_jx_k^{-1})\alpha_j\bar{\alpha}_k\geqslant 0$时，就称$\varphi(x)$为**正定函数**(positive definite function)或**正型函数**(function of positive type)．以下把G上的正定函数的全体记作P_G．如果$\varphi\in P_G$，则$\varphi(e)\geqslant 0$(e为G的单位元)，$|\varphi(x)|\leqslant\varphi(e)$，$\varphi(x^{-1})=\overline{\varphi(x)}$成立．在$G$为局部紧群的情形，我们还假定$\varphi\in P_G$关于$G$的 Haar 测度为可测．此时，对于任意的$f\in L_1(G)$，

$$\iint\varphi(xy^{-1})f(x)\overline{f(y)}\,dxdy\geqslant 0$$

成立．又任意的$\varphi\in P_G$与某个连续的$\varphi_1\in P_G$几乎处处†相等(关于局部紧群上的正定函数与酉表示之间的关系→酉表示．)

【调和分析，对偶定理】 在G为局部紧 Abel 群的情形，为使$\varphi\in P_G$的充分必要条件是，它可以由G的特征标群$\hat{G}$上的满足$\mu(\hat{G})<\infty$的一个非负测度μ表为$\varphi(x)=\int_{\hat{G}}\chi(x)d\mu(\chi)$．(此式在$G=\boldsymbol{R}^1$的情形表现为 Bochner 定理†，又在$G$为整数的全体所成的加法群的情形表现为对于正定数列†的 Herglotz 定理†．)因此，在得到G的酉表示†的同时，我们得到谱分解$U(x)=\int_{\hat{G}}\chi(x)dE(\chi)$(Stone 定理†的推广．)如果$f\in L_1(G)\cap P_G$，则$\hat{f}(\chi)\geqslant 0$，$\hat{f}\in L_1(\hat{G})$，而如果适当选取$\hat{G}$上的 Haar 测度的常数因子，则 Fourier **反演公式**(inversion formula) $f(x)=\int_{\hat{G}}\overline{\chi(x)}\hat{f}(\chi)d\chi$成立．又若$f\in L_1(G)\cap L_2(G)$，则$\hat{f}\in L_2(\hat{G})$，且$\int_{\hat{G}}|f(x)|^2dx=\int_{\hat{G}}|\hat{f}(\chi)|^2\,d\chi$ (**Parseval 等式**)成立．如果令$Uf=\hat{f}$，$V\hat{f}=f$，则U可以唯一地扩张为从 Hilbert 空间$L_2(G)$到$L_2(\hat{G})$上的等距变换，V可以唯一地扩张为它的逆变换(拓扑 Abel 群上的 **Plancherel 定理**)．应用反演公式与 Plancherel 定理，可以证明$\hat{G}$的特征标群$\hat{\hat{G}}$与最初的群G作为拓扑群是同构的．这称为拓扑 Abel 群的**对偶定理**(duality theorem)(→拓扑 Abel 群)．特别是，如果G是紧的，则$\hat{G}$的拓扑是离散拓扑，且可使整个G的 Haar 测度以及$\hat{G}$的每个元的 Haar 测度分别成为 1．此时，Plancherel 定理表明，G的特征标全体成为$L_2(G)$的完备正规正交系†．

【Tauber 型定理】 为使赋范环L_1的闭理想I与L_1一致的充分必要条件是，存在$f\in I$，使得对于所有$\chi\in\hat{G}$，有$\hat{f}(\chi)\neq 0$．在$G=\boldsymbol{R}^1$的情形，它包含 Wiener 的广义 Tauber 型定理

之一(前述的 i)),且是由 Гельфанд 等所作的该定理的抽象化.

【Poisson 求和公式】 当有局部紧 Abel 群 G 的离散子群 H, 使 G/H 为紧时, 则 H 的零化子[†] Γ 是 $\hat{G}$ 的离散子群. 如果对于 G 上的连续函数 $f(x)$, $\sum_{y\in H} f(xy)$ 为绝对一致收敛 (从而 $f\in L_1(G)$), $\sum_{\xi\in\Gamma}\hat{f}(\xi)$ 为绝对收敛, 则 $\sum_{y\in H} f(y) = c\sum_{\xi\in\Gamma}\hat{f}(\xi)$. 这个公式称为拓扑 Abel 群上的 **Poisson 求和公式** (Poisson's summation formula). 这里 c 是由 G 与 $\hat{G}$ 上的 Haar 测度确定的正的常数. (这是 $G=\boldsymbol{R}^1$ 情形的 Poisson 求和公式[†]的推广.)

【$L_1(G)$ 内的闭理想】 对于定义于 G 上的函数 f 和任一 $g\in G$, 由 $\tau_g f(x)=f(x-g)$ 定义平移算子 τ_g. $L_1(G)$ 的闭子空间是 $L_1(G)$ 内的理想当且仅当它在所有平移下不变(N. Wiener). 闭理想 I 与 $L_1(G)$ 相同当且仅当 I 的零点集,即 $Z(I)=\bigcap_{f\in I}\hat{f}^{-1}(0)$ 是空集(Wiener 的 Tauber 定理). 闭理想 I 是极大理想当且仅当 $Z(I)$ 只由单个点所组成. 如果 G 的对偶 $\hat{G}$ 离散,则 $L_1(G)$ 内的闭理想完全由它的零点所刻划, 即谱综合是可能的; 但这种情形一般地说并不成立. P. Malliavin 定理说,如果 $\hat{G}$ 不是离散的, 则在 $\hat{G}$ 内存在集 E 和两个不同的闭理想 I 和 J, 使得 $Z(I)=Z(J)=E$. 这样的集 E 称为非 S 集. 例如,若 $\hat{G}=\boldsymbol{R}^3$, 则单位球面是非 S 集 (L. Schwartz).

【运算函数】 以 $A(\hat{G})$ 表示 $L_1(G)$ 中所有函数的 Fourier 变换的集. 设 $\hat{f}\in A(\hat{G})$, Φ 是在 $\hat{f}$ 的值域的邻域内解析的函数. 此外, 如果 G 不是离散的, 还设 $\Phi(0)=0$. 于是, 存在 $\hat{g}\in A(\hat{G})$, 使对 $\gamma\in\hat{G}$, 有 $\hat{g}(\gamma)=\Phi(\hat{f}(\gamma))$ (Wiener-Lévy 定理). 此定理的逆定理也成立. 设 G 是无限 Abel 群, Φ 是区间$[-1,1]$上的函数.如果对每个 $\hat{f}\in A(\hat{G})$ 有 $\Phi(\hat{f})\in A(\hat{G})$, 则当 G 为紧时, Φ 在原点的一个邻域内解析; 而当 G 非紧时, Φ 在 $[-1, 1]$ 的一个邻域内解析 [18,19]. 如果 Wiener-Lévy 定理对函数 Φ 成立,则称 Φ 为**运算函数**(operating function). 设 E 是 $\hat{G}$ 的子集, I_E 是所有使得在 E 上 $\hat{f}=0$ 的 $\hat{f}\in A(\hat{G})$ 所成的集,则 $A(E)=A(\hat{G})/I_E$是商代数. 如果 $A(E)$ 上的每个运算函数解析, 则称集 E 为**解析性集** (set of analyticity). 关于这种集的特征→[13].

【测度代数】 对于局部紧 Abel 群 G, 设 $M(G)$ 是所有正则有界测度所成的集. 对于 $M(G)$ 内的 λ 和 μ, 卷积 $\lambda*\mu$ 由 $(\lambda*\mu)(E)=\int_G\lambda(E-y)d\mu(y)$ 所定义, 这里 E 是 G 的 Borel 集. 于是 $M(G)$ 是半单交换 Banach 代数, 它的元的积由卷积定义. $\mu\in M(G)$ 的 Fourier-Stieltjes 变换由

$$\hat{\mu}(\gamma)=\int_G(x,\gamma)d\mu(x),\quad \gamma\in\hat{G}$$

定义. $\hat{G}$ 上的连续函数为正定当且仅当它是 $M(G)$ 内的一个正测度的 Fourier-Stieltjes 变换 (Bochner 定理). 设 G 非离散,则区间$[-1,1]$上的一个运算于 $M(G)$ 内的测度的 Fourier-Stieltjes 变换的函数可以开拓为整函数 (Helson, Kahane, Katznelson 和 Rudin [19]). 由这个事实得知, $M(G)$是对称和非正则的. 此外, 存在测度 $\mu\in M(G)$, 使得 $\hat{\mu}(\gamma)\geqslant 1$, 但 $1/\hat{\mu}$ 不是 $M(G)$ 的元的 Fourier-Stieltjes 变换. (还可参看 Wiener 和 Pitt [20], Шрейдер [21], Williamson [22], 以及 Hewitt 和角谷静夫 [23]; 关于测度代数的一般阐述, 参看 Rudin [13] 以及 Hewitt 和 Ross [14].)

【幂等测度】 测度 $\mu\in M(G)$ 称为**幂等的** (idempotent),如果 $\mu*\mu=\mu$, 即对一切 $\gamma\in\hat{G}$, $\hat{\mu}(\gamma)=0$ 或 1. 因而 $\hat{\mu}$ 是集 $\{\gamma\in\hat{G}\mid\hat{\mu}(\gamma)=1\}$ 的定义函数.包含 $\hat{G}$ 内所有开陪集的 $\hat{G}$ 的子集的最小环,称为 $\hat{G}$ 的陪集环. $\hat{G}$ 内的集 E 的定义函数是 $M(G)$内的一个幂等测度的 Fourier-Stieltjes 变换的充分必要条件是, E 属于 $\hat{G}$ 的陪集环 (P. J. Cohen 定理). 伊藤和雨宫给出了这个事实的简单证明 [28]. 当 G 是单位圆时, 陪集环由除有限个点外为周期的序列所组成, 而这种情形下的定理由 H. Helson 得到.

设 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 是不同的整数，$d\mu(x) = \sum_{j=1}^{k} e^{in_jx}\,dx$，则 μ 是单位圆上的幂等测度. J. E. Littlewood 猜想 μ 的范数超过 $c\log k$，其中 c 是不依赖于 $\{n_j\}$ 的选择的正常数. P. J. Cohen [24]就紧连通 Abel 群给出了部分的解答，而H. Davenport [25] 以及 E. Hewitt 和 H. S. Zuckerman [26] 对此作了改进.

【群代数的映射】 设G和H是两个局部紧 Abel 群，φ 是 $L_1(G)$ 到 $M(H)$ 内的非平凡同态. 伴随 φ，存在 $\hat{H}$ 的子集 Y 到 $\hat{G}$ 内的映射 φ^*，使当 $\gamma \in Y$，$\hat{\varphi}(f)(\gamma) = \hat{f}(\varphi^*(\gamma))$，而当 $\gamma \notin Y$，$\hat{\varphi}(f)(\gamma) = 0$；或符号化地写成 $\hat{\varphi}(f) = \hat{f}(\varphi^*)$. Y 到 $\hat{G}$ 内的连续映射 α 称为**分段仿射的** (piecewise affine)，如果存在 $\hat{H}$ 的陪集环的有限个不相交子集 $S_j\ (j = 1, \cdots, n)$ 和映射 α_j，使得 (i) $Y = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$；(ii) α_j 定义于 H 的开陪集 K_j 上，这里 $K_j \supset S_j$；(iii) 在 S_j 上，$\alpha_j = \alpha$；(iv) 对一切 $\gamma, \gamma', \gamma'' \in K_j$，$j = 1, 2, \cdots, n$，有 $\alpha_j(\gamma + \gamma' - \gamma'') = \alpha_j(\gamma) + \alpha_j(\gamma') - \alpha_j(\gamma'')$. P. J. Cohen 定理是：若 φ 是 $L_1(G)$ 到 $M(H)$ 内的同态，则 Y 属于 $\hat{H}$ 的陪集环，且 φ^* 是 Y 到 $\hat{G}$ 内的分段仿射映射. 反之，对每个分段仿射映射 α，存在 $L_1(G)$ 到 $M(H)$ 内的同态 φ，使 $\varphi^* = \alpha$. 与之有关的定理已由 A. Beurling, H. Helson, J. -P. Kahane, Z. L. Leibenson 和 W. Rudin 所研究.

【例外集】 设G是局部紧 Abel 群. 称它的子集 E 是无关的，如果由 $n_1x_1 + \cdots + n_kx_k = 0$ 可得到 $n_jx_j = 0$, $j = 1, \cdots, k$；这里 n_j 是整数，而 $x_j \in E$. G 内的集 E 称为 **Kronecker 集** (Kronecker set)，如果对 E 上的每个绝对值等于 1 的连续函数 φ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $\gamma \in \hat{G}$，使对 $x \in E$，有 $|\varphi(x) - (x, \gamma)| < \varepsilon$. Kronecker 集必是无关的和无限阶的，但无关集不一定是 Kronecker 集. 对于其元都是有限阶 p 的群 G，集 E 称为 K_p 型的，如果对 E 上每一个取值为 $\exp(2\pi ik/p)\ (k = 0, 1, \cdots, p-1)$ 的连续函数 φ，存在 $\gamma \in \hat{G}$，使在 E 上有 $\varphi = \gamma$. 如果 E 是 G 内的紧 Kronecker 集，μ 是支集包含于 E 内的测度，即 $\mu \in M(E)$，则 $\|\mu\| = \|\hat{\mu}\|_\infty$. 紧集 E 称为 **Helson 集** (Helson set)，如果存在常数 C，使对 $\mu \in M(E)$，有 $\|\mu\| \leqslant C\|\hat{\mu}\|_\infty$. K_p 集也是 Helson 集. 对于 Helson 集 E，$C(E) = A(E)$. 在离散情形，类似于 Helson 集的是 Sidon 集. 离散群 $\hat{G}$ 的子集 F 称为 **Sidon 集** (Sidon set)，如果存在常数 C，使对每个多项式 $\sum a_\gamma(x, \gamma)$，有 $\sum_{\gamma \in F} |a_\gamma| \leqslant C \sup_x \left| \sum_{\gamma \in F} a_\gamma (x, \gamma) \right|$. 例如，缺项整数序列 $\{n_k\}$ 是 Sidon 集，这里 $\{n_k\}$ 满足 $n_{k+1}/n_k > q > 1$. 这些集与群上的调和分析有深刻的联系，例如，参阅 [13]，[15].

【张量代数和群代数】 设 X 和 Y 是紧Hausdorff 空间，以 $V(X,Y)$ 表连续函数空间 $C(X)$ 和 $C(Y)$的射影张量乘积 $C(X)\hat{\otimes}C(Y)$. $\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\, g_j(y)$ 的范数定义为 $\|\varphi\| = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_\infty \|g_j\|_\infty$，这里下确界是就 φ 的所有表达式取的. 如果 $\hat{G}$ 是无限紧群，则存在两个子集 K_1 和 K_2，使得 (i) K_1 和 K_2 同胚于 Cantor 三分点集；(ii) 当 $\gamma_1 \in K_1$, $\gamma_2 \in K_2$ 时，$\gamma_1 + \gamma_2$ 的表示是唯一的；(iii) $K_1 \cap K_2 = \varnothing$；(iv) $K_1 \cup K_2$ 是 Kronecker 集或对于某个 p 的 K_p 型集. Varopoulos 定理说，代数 $V(K_1, K_2)$ 同构于 $A(K_1 + K_2)$. 由这条定理，群代数的谱综合和运算函数的问题转化为张量代数的问题. 有关的严谨讨论→[27].

【参】 [1] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Clarendon Press, 1937; [2] A. Zygmund, Trigonometric series I. Cambridge Univ. Press, 第二版 1959; [3] N. Wiener, The Fourier integrals and certain of its applications, Cambridge Univ. Press, 1933; [4] R. E. A. C. Paley-N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1934; [5] K. Yoshida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [6] M. A. Наймарк, Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956, (英译本: M. A. Naĭmark, Normed rings, Noordhoff, 1959); [7] Д. А. Райков, Гармонический анализ на коммитативных группах с мерой Хаара характеров, Труды Мат. Инст. Стеклов, **14** (1945), 1—86; [8] L. H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, van Nostrand, 1953; [9] H. Cartan-R. Godement, Théorie de la dua-

lité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup., **64** (1947), 79—99; [10] R. Godement, Théorèmes taubériens et théorie spectrale, Ann. Sci. École Norm. Sup., **64** (1947), 119—138; [11] A. Weil, L'intégration dans les groups topologiques et ses applications, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1940, 第二版 1951; [12] 淡中忠郎,双对原理,岩波, 1951; [13] W. Rudin, Fourier analgsis on groups, Interscience, 1962; [14] E. Hewitt- K. A. Ross, Abstract harmonic analysis, Springer, I, 1963; II. 1970; [15] J. -P. Kahane-R. Salem, Ensembles parfaits et séries trigonométriques, Actualités, Sci. Ind., Hermann, 1963; [16] L. Ehrenpreis, Fourier analysis in several complex variables, John Wiley, 1970; [17] Y. Katznelson, An introduction to harmonic analysis, John Wiley, 1968; [18] Y. Katznelson, Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach, Ann. Sci. École Norm. Sup., (3) **76** (1959), 83—123; [19] H. Helson-J.-P. Kahane -Y. Katznelson-W. Rudin, The functions which operate on Fourier transforms, Acta Math., **102** (1959), 135—157; [20] N. Wiener -H. R. Pitt, On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms, Duke Math. J., **4** (1938), 420—436; [21] Ю. А. Шрейдер, Строение максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой, Мат. СБ. (Н.С.) **27** (1950), 297—318 (英译本:Yu. A. Šreĭder, The structure of maximal ideals in rings of measures with convolution, Amer. Math. Soc. Transl., **81** (1953); [22] J. H. Williamson, A theorem on algebras of measures on topological groups, Proc. Edinburgh Math. Soc., **11** (1958—1959) 195—206; [23] E. Hewitt- S. Kakutani (角谷静夫), Some multiplicative linear functionals on $M(G)$, Ann. of Math., (2) **79** (1964), 489—505; [24] P. J. Cohen, On a conjecture of Littlewood and idempotent measures, Amer. J. Math., **82** (1960), 191—212; [25] H. Davenport, On a theorem of P. J. Cohen, Mathematika, **7** (1960), 93—97; [26] E. Hewitt-H. S. Zuckerman, On a theorem of P. J. Cohen and H. Davenport, Proc. Amer. Math. Soc., **14** (1963), 847—855; [27] N. T. Varopoulos, Tensor algebras and harmonic analysis, Acta Math., **119** (1967), 51—112; [28] T. Itô-I. Amemiya (伊藤角市-雨宫一郎), A simple proof of the theorem of P. J. Cohen, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 774—776.

殆周期函数 [英 almost periodic function 法 fonction presque-périodique 德 fastperiodische Funktion 俄 почти-периодическая функция 日 概周期関数] 1924年，H. Bohr 从 Dirichlet 级数† 的研究出发，首创了殆周期函数的理论，这一理论提供了研究一类广泛的一般型三角级数的一个方法(→Fourier 级数). 以后 N. Wiener, B. B. Степанов, A. S. Besikovič, S. Bochner 等人完善地推广了这一理论. H. Weyl, J. von Neumann 等人弄清了这一理论与群的表示论之间的关系，特别是拓扑群上的殆周期函数与紧群的表示论之间的关系.

【Bohr 意义下的殆周期函数】 设 $f(x)$ 是对一切实数 x 有定义的复值连续函数. 对于正数 ε, 如果数 τ 满足

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant\varepsilon,$$

则称它为 f 的属于 ε 的**殆周期**或**平移数**(英 translation number 德 Fastperiode). 如果对于任意的 $\varepsilon>0$, 均存在数 $l(\varepsilon)$, 使得长为 $l(\varepsilon)$ 的任意区间都含有 f 的属于 ε 的平移数, 则 $f(x)$ 称为(Bohr 意义下的)**殆周期函数**.下面,将Bohr意义下的殆周期函数的全体记作 $\boldsymbol{B}$.

如果 $f(x)$ 是以 p 为周期的周期函数†, 则因为每个数 $l\geqslant p$ 对任意的 $\varepsilon>0$ 都起着 $l(\varepsilon)$ 的作用,所以 $f\in\boldsymbol{B}$. 每个 $f\in\boldsymbol{B}$ 都在实轴上有界且一致连续. 在整个实轴上有定义的有界连续函数属于 $\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是,对于任意的实数序列 $\{h_n\}$, 存在适当的子序列 $\{h_{n_\nu}\}$, 使得函数序列 $\{f(x+h_{n_\nu})\}$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致收敛,即集合 $\{f(x+h)|h\in(-\infty,\infty)\}$, 在 $(-\infty,\infty)$ 上有界连续函数的全体所成的空间中关于一致范数 $\|f\|=\sup|f(x)|$ 为完全有界, 是 $f\in\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件.

如果 $f(x)\in\boldsymbol{B}$, 则 $f(-x)$, $\overline{f(x)}$, $\alpha f(x)$ (α 为复数)和 $f(x+h)$ (h 为实数) 也都属于 $\boldsymbol{B}$. 如果 $f(x)$, $g(x)\in\boldsymbol{B}$, 则 $f(x)\pm g(x)$ 和 $f(x)g(x)\in\boldsymbol{B}$. 如果 $f_n\in\boldsymbol{B}$ 与 $f_n\to f$ (一致收敛),则 $f\in\boldsymbol{B}$. 对于任意实数 λ, $\exp(i\lambda x)$ (i 为虚数单位†) 为连续周期函数, 从而多项式 $\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\exp i\lambda_n x\in\boldsymbol{B}$.而且,如果它当 m 趋向于∞时一致收敛于 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\exp i\lambda_n x$, 则此极限函数也属于 $\boldsymbol{B}$.多项式 $\sum_{n=1}^{m}\alpha_n\exp i\lambda_n x$ 和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\exp i\lambda_n x$ 分别称为**广义三角多项式** (generalized trigonometric polynomial) 和**广义三角级数** (generalized trigonometric series).

对于任意的 $f\in\boldsymbol{B}$, 它的**平均值** (mean)

$$M[f]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{a}^{a+T}f(x)dx$$

存在．此式右端的收敛关于 $a\in(-\infty,\infty)$ 是一致的，且极限与 a 无关．因此，$M[f]$ 是定义在 $\boldsymbol{B}$ 上的线性泛函†．由于当 $\lambda=0$ 时，$M[\exp i\lambda x]=1$，当 $\lambda\neq 0$ 时，$M[\exp i\lambda x]=0$，所以，函数族 $\{\exp i\lambda x\mid-\infty<\lambda<\infty\}$ 成为关于定义在 $\boldsymbol{B}$ 上的内积†

$$(f,g)=M[f(x)\overline{g(x)}]$$

的正规正交系†．如果对 $f\in\boldsymbol{B}$ 我们令 $\alpha(\lambda)=M[f(x)\exp(-i\lambda x)]$，则使得 $\alpha(\lambda)$ 不等于零的 λ 的个数最多为可数．今以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 记这些 λ 的值，并记 $\alpha(\lambda_n)=\alpha_n$．形式地作三角级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cdot\exp i\lambda_n x$，称它为 $f(x)$ 的 **Fourier 级数**（Fourier series）．数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$ 称为 $f(x)$ 的 **Fourier 系数**（Fourier coefficient）．对于任意的 $f\in\boldsymbol{B}$，**Parseval 等式** $M[|f(x)|^2]=\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$ 成立．对于周期函数，这些定义与通常的 Fourier 级数和 Fourier 系数的定义一致（→Fourier 级数）．Bohr 意义下的殆周期函数由它的 Fourier 系数唯一确定．即，如果两个殆周期函数有相同的 Fourier 级数，则它们是恒等的．任意的 $f\in\boldsymbol{B}$ 的 Fourier 级数不一定一致收敛，但是，如果 $f\in\boldsymbol{B}$，则 $f(x)$ 可由三角多项式的某个序列在 $(-\infty,\infty)$ 上一致逼近．在这种意义下，Bohr 意义下的殆周期函数也称为**一致殆周期函数**（uniformly almost periodic function）

【一般的殆周期函数】 设 $C(-\infty,\infty)$ 为 $(-\infty,\infty)$ 上的有界连续函数的空间，赋以距离 $\rho(f,g)=\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-g(x)|$（→函数空间）．于是，由上所述，Bohr 意义下的殆周期函数是一个三角多项式序列关于距离 ρ 的极限．一般地，设 ρ 是在实轴上的（不一定连续）函数的一个空间中所引进的一个距离函数†，如果一个函数是广义三角多项式关于距离 ρ 的极限，则称该函数为关于 ρ 的殆周期函数．例如，对于 $p\geqslant 1$，令

$$D_{S^p}[f,g]=\sup_{-\infty<a<\infty}\left\{\int_a^{a+1}|f(x)-g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

$$D_{W^p}[f,g]=\lim_{l\to\infty}\sup_{-\infty<a<\infty}\left\{\frac{1}{l}\int_a^{a+l}|f(x)-g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p},$$

它们都是距离函数．相应的殆周期函数的性质以及它们与其它殆周期函数类之间的关系，已为 Besikovič 所研究[1]．

【解析的殆周期函数】 设 D 为复数平面上由 $a<\Re z<b$ 所定义的一个带状域．设 $f(z)$ 是 D 内的全纯† 函数，对于正数 ε，如果数 τ 满足 $\sup_{z\in D}|f(x+i\tau)-f(z)|\leqslant\varepsilon$，则称它为 f 的属于 ε 的**殆周期**或**平移数**（translation number）．如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在数 $l(\varepsilon)>0$，使得长为 $l(\varepsilon)$ 的任意区间都含有 f 的属于 ε 的平移数，则称 $f(z)$ 为 D 内的**解析的殆周期函数**（analytic almost periodic function）．在本条中，$D=\{a<\Re z<b\}$ 内解析的殆周期函数的全体记作 $\boldsymbol{A}(a,b)$．如果在 $a<x<b$ 中固定一个 x，则对于任意的 $f\in\boldsymbol{A}(a,b)$ 显然 $g(y)=f(x+iy)$ 属于 $\boldsymbol{B}$．

对于任意的 $f\in\boldsymbol{A}(a,b)$，都对应着一个 Dirichlet 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\exp(\lambda_n z)$，使得如果对应两个解析的殆周期函数的 Dirichlet 级数相同，则这两个函数恒等．在这里，系数 $\alpha_n=M_y[f(x+iy)\exp(-i\lambda_n y)]$ 是与 $x(a<x<b)$ 无关地确定的，并且 Parseval 等式 $M_y[|f(x+iy)|^2]=\sum|\alpha_n|^2\exp 2\lambda_n x$ 成立（Bohr [3]）．如果级数 $\sum\alpha_n\exp\lambda_n x\exp i\lambda_n y$ 在 $x=a$ 与 $x=b$ 处分别表示 $f_a(y)$ 与 $f_b(y)\in\boldsymbol{B}$ 的 Fourier 级数，则存在 $f\in\boldsymbol{A}(a,b)$，使得 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上连续，且 $f(a+iy)=f_a(y)$，$f(b+iy)=f_b(y)$．又 $f(z)\in\boldsymbol{A}(a,b)$ 在域 $D=\{a<\Re z<b\}$ 的边界或外部的性态，也已为 Besikovič 所探讨[1]．

【群上的殆周期函数】 设 G 是任意的群，von Neumann 推广了 $(-\infty,\infty)$ 上一致殆周期函数的特征，定义群 G 上的殆周期函数如下：设 $B(G)$ 是 G 上的复值有界函数的全体．把 $B(G)$ 看作赋予距离† $\rho(f,g)=\sup_{x\in G}|f(x)-g(x)|$ 的度量空间．若对于 $f\in B(G)$，集合 $A_f=\{f_{a,b}(x)=f(axb)\mid a,b\in G\}$ 是度量空间 $B(G)$ 中的完全有界子集，则称 f 为**群 G 上的殆周期函数**．

这个条件等价于 $B_f=\{f_a(x)=f(xa)|a\in G\}$ 或 $C_f=\{{}_af(x)=f(ax)|a\in G\}$ 的全有界性．以下，将 G 上的殆周期函数的集合记作 $\mathfrak{A}(G)$．

对于 $f(x),g(x)\in\mathfrak{A}(G)$，线性组合 $a\cdot f(x)+b\cdot g(x)$ $(a,\ b\in\boldsymbol{C})$ 与乘积 $f(x)g(x)$ 都属于 $\mathfrak{A}(G)$．如果 $f_n\in\mathfrak{A}(G)$ 且 $\{f_n\}$ 在 G 上一致收敛于 f，则 $f\in\mathfrak{A}(G)$．如果 $f\in\mathfrak{A}(G)$，则 $f_{a},{}_{b}, f_{a}, {}_{a}f$ 亦均 $\in\mathfrak{A}(G)$．也即 $\mathfrak{A}(G)$ 是 Banach 代数† $B(G)$ 的一个闭子代数，且在双侧平移下保持不变．对每个 $f\in\mathfrak{A}(G)$，在 $B(G)$ 内包含集合 A_f 的最小闭凸体†中，即 $A'_f=\left\{\sum_{i=1}^{n}c_if(a_ixb_i)|c_i>0,\ \sum c_i=1,\ a_i,\ b_i\in G\right\}$ 在 $B(G)$ 内关于距离 ρ 的闭包中，只含有一个常数 $M[f]$．这个 $M[f]$ 称为 f 在 G 上的**平均值**．映射 $f\to M[f]$ 是 $\mathfrak{A}(G)$ 上的线性泛函，且若 $f\geqslant 0$，则 $M[f]\geqslant 0$．

【与有界表示的关系】 关于群 G 的有限维的矩阵表示 $D(x)=(d_{ij}(x))$，以下三个条件是等价的： (i) 所有 $d_{ij}(x)$ 是 G 上的有界函数；(ii) 所有 $d_{ij}(x)$ 是 G 上的殆周期函数；(iii) 表示 D 等价†于一个用酉矩阵的表示．在内积 $(f,g)=M[f(x)\overline{g(x)}]$ 下，$\mathfrak{A}(G)$ 构成前 Hilbert 空间†．设 $H(G)$ 为由 $\mathfrak{A}(G)$ 经完备化所得到的 Hilbert 空间．设 L 为 G 的有界不可约表示的等价类的全体，如果从每个 $\lambda\in L$ 各取一个代表 $D^\lambda(x)=(d^\lambda_{ij}(x))$，设 n_λ 为 D^λ 的阶，则函数族 $\{(1/\sqrt{n_\lambda})\,d^\lambda_{ij}(x)\,|1\leqslant i,j\leqslant n_\lambda,\lambda\in L\}$ 是 Hilbert 空间 $H(G)$ 中的一个完全正规正交系．任意的 $f(x)\in\mathfrak{A}(G)$ 可由 $d^\lambda_{ij}(x)$ 的有限线性组合在 G 上一致逼近．

【拓扑群上的殆周期函数】 当 G 是分离的拓扑群†时，所有属于 $\mathfrak{A}(G)$ 且在 G 上连续的函数所成的集记作 $\mathfrak{A}_*(G)$．如果用 $\mathfrak{A}_*(G)$ 来代替 $\mathfrak{A}(G)$，用连续表示来代替表示，则前节叙述的关于 $\mathfrak{A}(G)$ 和表示 D 的定理仍然成立．特别是，如果 G 是实数 $\boldsymbol{R}$ 的加法群，则 $\mathfrak{A}_*(\boldsymbol{R})=\boldsymbol{B}$．

【与紧群的关系】 在紧群 G 上，任意的连续函数是殆周期函数，即 $\mathfrak{A}_*(G)=C(G)$．又 $f\in\mathfrak{A}_*(G)$ 的平均值 $M[f]$ 恒等于基于 Haar 测度 dx 的积分 $\int_G f(x)dx$，这里 Haar 测度已正规化，即使得 $\int_G dx=1$．在这种情形，上述有界表示理论就是 Peter-Weyl 理论（→紧群）．

对一般的拓扑群 G，情形如下．设 G 为分离的拓扑群，则存在紧群 $K=K(G)$ 和 G 到 K 上的一个连续同态 φ，具有下面的性质：对任一紧群 K' 与连续同态 $\varphi':G\to K'$，存在连续同态 $\psi:K\to K'$，使得 $\varphi'=\psi\circ\varphi$．这样的 (K,φ) 不计同构是唯一的．K 或 (K,φ) 称为**拓扑群 G 的万有紧群**(universal compact group of G) 或 G 的 **Bohr 紧化** (Bohr compactification)，而 φ 则称为为标准映射．设 G 为局部紧 Abel 群，G^* 为其特征标群†，在 G^* 上引进离散拓扑的群记作 G'．设 K 为 G' 的特征标群，并设 φ^* 为 G' 到 G^* 的恒等映射，φ 是 G 到 K 的共轭于 φ^* 的连续同态．这时，K 是 G 的万有紧群，且以 φ 为标准映射．为使拓扑群 G 上的函数 f 是 G 上的连续殆周期函数的充分必要条件是，存在 G 的万有紧群 K 上的连续函数 f'，使 $f=f'\circ\varphi$．当这个条件成立时，f 的平均值 $M[f]$ 等于 $\int_K f'(x)\,dx$．对于 K 的任意有限维连续酉表示 D'，$D=D'\circ\varphi$ 是 G 的一个有限维连续酉表示，反之亦然．因此，在分离拓扑群 G 的有限维连续酉表示的等价类与其 G 的万有紧群 K 的有限维连续酉表示的等价之间存在由 $D=D'\circ\varphi$ 所决定的标准同构．又标准映射 φ 的核† 与 G 的所有有限维连续酉表示的核的交相同．

【极大殆周期群】 设 G 为一拓扑群．如果对于 G 的每对不同的元 a,b，都存在 G 上的连续殆周期函数 f（依赖于 a,b），使得 $f(a)\neq f(b)$，则称 G 为**极大殆周期群**(maximally almost periodic group)． G 为极大殆周期群等价于 G 有充分多的有限维连续酉表示．对于连通局部紧群 G，以下六个条件是等价的： 1) G 是极大殆周期群； 2) 存在从 G 到一个紧群中的一个一一连续同态； 3) G 是一个紧群与向量群 $\boldsymbol{R}^n$ 的直积； 4) G 是与紧群局部同构的 Lie 群的射影极限†； 5) 商群 G/Z 为紧，这里 Z 为 G 的中

心; 6) 在G的所有内自同构[†]下不变的邻域的全体形成单位元的一个基本邻域系[†]. 以上,→J. Dixmier [7]. 另外, 任意离散自由群[†]为极大殆周期群.

如果除常数函数外, 不存在其他连续殆周期函数, 则这样的拓扑群称为**极小殆周期群**(minimally almost periodic group). 任何非紧的, 连通的单 Lie 群为极小殆周期群.

【参】 [1] A. S. Besicovitch (Besikovič), Almost periodic functions, Cambridge univ. Press, 1932; [2] S. Bochner, Berträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen I, II. Math. Ann., **96** (1927) 119—147, 383—409; [3] H. Bohr, Fastperiodischen Funktionen, Erg.d-Math., Springer, 1932; [4] V. Stepanov(B. Степанов), Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen, Math. Ann., **95** (1926) 473—498; [5] N. Wiener, On the representation of functions by trigonometrical integrals, Math. Z., **24** (1926), 575—616; [6] J. von Neumann, Almost periodic functions in a group I, Trans. Amer. Math. Soc., **36** (1934), 445—492; [7] J. Dixmier, Les C*-algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, 1964; [8] 淡中忠郎, 位相群論, 岩波, 1948; [9] W. Maak, Fastperiodische Funktionen, Springer, 1950.

Laplace 变换 [英 Laplace transform 法 transformation de Laplace 德 Laplacesche Transformation 俄 преобразование Лапласа 日 ラプラス変換] Laplace 变换是 Dirichlet 级数向积分的推广. 这个变换, 在 P. S. Laplace 以前也曾被 L. Euler 应用于微分方程的解法上(1937), 但 Laplace 则完全独立地在其名著"Theórie analytique des probabilités" (1812) 的第一卷内, 在微分方程以及差分方程的解法中应用了这个变换. 进入本世纪以来, 它被应用于 Heaviside **算子演算**[†]的合理化中而成了应用数学的一个重要工具.

设$\alpha(t)$为在任意有限区间$0 \leqslant t \leqslant R$上有界变差[†]的函数. 如果

$$L(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,d\alpha(t)=\lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-st}\,d\alpha(t)$$

对于s的某个值s_0(一般为复数)收敛, 则它对满足$\Re s>\Re s_0$($\Re s$为s的实部)的所有s收敛. $L(s)$称为$\alpha(t)$的 **Laplace-Stieltjes 变换**(Laplace-Stieltjes transform). 若$\alpha(t)=\int_0^t \varphi(u)du$(设$\varphi(u)$在任意有限区间$0 \leqslant t \leqslant R$上为 Lebesgue 可积), 则称

$$L(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\varphi(t)\,dt$$

为$\varphi(t)$的 **Laplace 变换**(→公式 12 I).

【收敛域】 使$L(s)$收敛的s的范围即收敛域, 是右半平面$\Re s>\sigma_c$. 作为极端情形, 在全平面收敛的场合, 设$\sigma_c=-\infty$, 在全平面发散的场合, 设$\sigma_c=\infty$. 数σ_c称为$L(s)$的**收敛坐标**(abscissa of convergence), 直线$\Re s=\sigma_c$称为**收敛轴**(axis of convergence). 已经知道由$\alpha(t)$确定收敛坐标的公式. 例如, 如果$k=\limsup_{t\to\infty}(\log|\alpha(t)|)/t\neq 0$, 则$\sigma_c=k$; 如果$k=0$, 而当$t\to\infty$时$\lim\alpha(t)$不存在, 则$\sigma_c=0$. 又对$k=\infty$的情形也已进行了研究. 此外, 当收敛坐标$\sigma_c\geqslant 0$或$<0$时, 分别有$\sigma_c=\limsup_{t\to\infty}(\log|\alpha(t)|)/t$, $\sigma_c=\limsup_{t\to\infty}(\log|\alpha(\infty)-\alpha(t)|)/t$ (E. Landau, S. Pincherle). 又一般地$\limsup_{t\to\infty}(\log|\alpha(t)-\alpha([t])|)/t=\sigma_c$(其中[ ]为 Gauss 记号)(黑須康之介-藤原松三郎-魚返正).

当$\int_0^{\infty} e^{-st}|d\alpha(t)|$存在时, 称 Laplace-Stieltjes 变换$L(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}d\alpha(t)$为**绝对收敛**(absolutely convergent). 存在实数σ_a, 使当$\Re s>\sigma_a$时$L(s)$绝对收敛, $\Re s<\sigma_a$时$L(s)$不绝对收敛. 这个σ_a称为$L(s)$的**绝对收敛坐标**(abscissa of absolute convergence). 又存在σ_u, 对于任意的$\varepsilon>0$, $L(s)$在半平面$\Re s\geqslant\sigma_u+\varepsilon$上一致收敛, 而在$\Re s\geqslant\sigma_u-\varepsilon$上不一致收敛. 这个$\sigma_u$称为**一致收敛坐标**(abscissa of uniform convergence). $\sigma_c\leqslant\sigma_u\leqslant\sigma_a$成立. 也已知道确定$\sigma_u$, σ_a的公式. 实际上, 与 Dirichlet 级数情形的小島铁藏, 国枝元治等的公式(→Dirichlet 级数 [收敛域]) 类似的公式成立 (D. V. Widder [1] 第二章).

【正则性】 $L(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}d\alpha(t)$作为复数$s$的函数在收敛域$\Re s>\sigma_c$内全纯[†]. 而且

$L^{(k)}(s) = \int_0^\infty e^{-st}(-t)^k d\alpha(t)$在$\Re s > \sigma_c$内成立. 如果$\alpha(t)$单调,则收敛轴上的实数点$s = \sigma_c$成为$L(s)$的奇点. 然而一般说来, 在收敛轴上不一定存在奇点. 使$L(s)$在$\Re s > \sigma$内为全纯的σ的下确界, 称为**正则坐标** (abscissa of regularity). 对于任意的$\delta > 0$, 在∞的邻域内, 当$|\tau| \to \infty$时, $L(\sigma + i\tau) = O(|\tau|)$在$\sigma_c + \delta \leqslant \sigma < \infty$上一致成立.

在∞处全纯的解析函数可以用 Laplace 变换来表示. 即,如果我们设$f(s) = f(\infty) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}}$ $(|s| > c)$,则由整函数$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$即得$f(s) = f(\infty) + \int_0^\infty e^{-st}\varphi(t)dt$, $\sigma_c > c$.

【反演公式】 当$\alpha(t)$在任意有限区间内为有界变差[†]函数,且$\alpha(0) = 0$, $\alpha(t) = (\alpha(t+0) + \alpha(t-0))/2$时,就称$\alpha(t)$已标准化. 在这种情形, $\alpha(t)(t > 0, \alpha(+0) = 0)$由其 Laplace-Stieltjes 变换$L(s)$唯一确定. 此时, 我们已知由$L(s)$表示$\alpha(t)$的**反演公式** (inversion formula). 即,如果设$L(s) = \int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$, 则当$c > \max(\sigma_c, 0)$, 有

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \frac{L(s)}{s} e^{st}ds = \begin{cases} \alpha(t), & t > 0, \\ \alpha(+0)/2, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

左端也称为 **Bromwich 积分** (Bromwich integral). 又当$\alpha(t) = \int_0^t \varphi(u)du$时,如果$L(s)$在$\Re s = c$上绝对收敛, $\varphi(u)$在$u = t(t \geqslant 0)$的邻域内有界变差,则

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} L(s)e^{st}ds = \begin{cases} (\varphi(t+0) + \varphi(t-0))/2, & t > 0, \\ \varphi(+0)/2, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

另外, 还有由 E. L. Post, Widder 所给出的反演公式的其他形式. 也就是说, 如果对于C^∞类函数$f(x)$, 考察变换

$$L_{k,t}[f(x)] = (-1)^k f^{(k)}(k/t)(k/t)^{k+1}$$

$(t > 0, k$为正整数),则

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^t L_{k,u}[L(x)]du = \alpha(t) - \alpha(+0).$$

在$\alpha(t) = \int_0^t \varphi(u)du$时, 则对于几乎所有$t(>0)$,

$$\lim_{k\to\infty} L_{k,t}[L(x)] = \varphi(t)$$

(→公式 12 I).

【表示定理】 当$f(x)$在(a, b)内为C^∞类函数,而$(-1)^k f^{(k)}(x) \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$时,则$f(x)$称为在(a, b)内**完全单调** (completely monotone). 又若$f(x)$还在$[a, b]$上连续, 则称它为在$[a, b]$上完全单调. 实变量函数$f(x)$在$0 \leqslant x < \infty$上可以表为$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}d\alpha(t)$ $(x > 0, \alpha(t)$为有界的单调递增函数) 的充分必要条件是, $f(x)$在$[0, \infty)$上为完全单调 (**Бернштейн 定理**). 又用上面的变换$L_{k,t}[f(x)]$也能给出表示定理. $f(x)$可表为$\int_0^\infty e^{-xt}\varphi(t)dt$ $(\varphi(t) \in L_p(0, \infty), p > 1)$的充分必要条件是, $f(x)$在$0 < x < \infty$内有各阶导数, 在∞处为 0, 且存在常数M, 使得

$$\int_0^\infty |L_{k,t}[f(x)]|^p dt < M \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

又为使$f(x)$有上述表示,而$\varphi(t)$在$0 < t < \infty$内有界的充分必要条件是, $f(x)$在$0 < x < \infty$内属于C^∞类,且存在常数M, 使得

$$|L_{k,t}[f(x)]| < M, \quad |xf(x)| < M.$$

又$\varphi(t) \in L_1(0 \leqslant t < \infty)$的充分必要条件是, $f(x)$在$0 < x < \infty$内属于C^∞类, 在$x = \infty$处为 0, 且有$\int_0^\infty |L_{k,t}[f(x)]|dt < \infty$以及

$$\lim_{j\to\infty, k\to\infty}\int_0^\infty |L_{k,t}[f(x)] - L_{j,t}[f(x)]|dt = 0$$

(Widder).

【Laplace 变换的运算】 设$f(x)$的 Laplace 变换为$L(s, f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$. 当由$f(t)$经某个运算而作成$\varphi f(t)$时,知道相应的$\varphi f(t)$

的 Laplace 变换的公式，对于算子演算的计算是重要的. 现在举出这方面的主要公式如下：

$L(s, f(at-b)) = (1/a)\exp((-b/a)s) \times L(s/a, f(t))$（设 $at<b$ 时，$f(at-b)=0, a>0, b\geqslant 0$），

$$L(s, \int_0^t f(t)dt) = (1/s)L(s, f(t))$$

（$\Re s > \max(0, \sigma_c)$）. 关于微分，如果 $L(s, f'(t))$ 在 $s>0$ 处收敛，则

$$L(s, f'(t)) = sL(s,t) - f(0).$$

但假设 $f(t)$ 右连续. 一般地，如果 $f(+0), \cdots, f^{(k-1)}(+0)$ 存在，则对使 $L(s, f^{(k)}(t))$ 收敛的 $s>0$，有

$$L(s, f^{(k)}(t)) = s^k L(s, f(t)) - f(+0)s^{k-1} - f'(+0)s^{k-2} - \cdots - f^{(k-1)}(+0).$$

关于 f_1, f_2 的卷积[†]，如果或者 $L(s, f_1), L(s, f_2)$ 同时收敛，且至少有一为绝对收敛，或者 $L(s, f_1), L(s, f_2), L(s, f_1*f_2)$ 都收敛，则

$$L(s, f_1*f_2) = L(s, f_1)L(s, f_2).$$

【渐近性质】 设 $L(s) = \int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ ($s>0$)，则对任意的 $c\geqslant 0$ 和任意的 A，有

$$\limsup_{s\to+0} |s^c L(s) - A| \leqslant \limsup_{t\to\infty} |\alpha(t)t^{-c}\Gamma(c+1) - A|,$$

$$\limsup_{s\to\infty} |s^c L(s) - A| \leqslant \limsup_{t\to+0} |\alpha(t)t^{-c}\Gamma(c+1) - A|.$$

特别是，令 $c=0$，如果 $\alpha(t)\to A(t\to\infty)$，则得 $f(s)\to A(s\to+0)$. 又由 $\alpha(t)\sim At^c/\Gamma(c+1)$ ($t\to\infty$ 或 $t\to+0$) 可得 $f(s)\sim As^{-\tau}$ ($s\to+0$ 或 $s\to\infty$). 这些定理称为 **Abel 型定理** (Abelian theorem). 这是因为，如果特别选取 $\alpha(t)$ 并变换变量，便会得到幂级数的 Abel 定理[†]：若 $\sum a_n = s$ 收敛，则 $\sum a_n x^n \to s$ ($x\to 1-0$). 下面的定理包含上述定理：设 $L(s) = \int_0^\infty e^{-st}d\alpha(t)$ ($s>0$)，且当 $s\to+0$ 时，$L(s)\to A$，则当且仅当 $\beta(t) = \int_0^t u d\alpha(u) = o(t)$ ($t\to\infty$) 时，$\lim_{t\to\infty}\alpha(t) = A$.

【$(-\infty, \infty)$ 上的 Laplace 变换】 设 $\alpha(t)$ 在任意有限区间内为有界变差，当对于某个 s，$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-st}d\alpha(t)$，$\lim_{R'\to\infty}\int_{-R'}^0 e^{-st}d\alpha(t)$ 存在时，就令 $L(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-st}d\alpha(t)$.

如果 $L(s)$ 在 $s_1=\sigma_1+i\tau_1$, $s_2=\sigma_2+i\tau_2$ 处收敛，则 $L(s)$ 在带状域 $\sigma_1<\Re s<\sigma_2$ 内收敛. 当 $L(s)$ 在 $\sigma_c'<\Re s<\sigma_c''$ 内收敛，在 $\Re s>\sigma_c''$ 以及 $\Re s<\sigma_c'$ 内发散时，则 σ_c', σ_c'' 均称为**收敛坐标**. 如果 $\limsup_{t\to+\infty}(\log|\alpha(t)|)/t = k\neq 0$，$\liminf_{t\to-\infty}(\log|\alpha(t)|)/t = l\neq 0$ ($k<l$)，则 k, l 即是收敛坐标. 如果设 $\alpha(t)$ 已标准化，而 $L(s)$ 在 $k<\Re s<l$ 内收敛，则对所有 t，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{L(s)}{s}e^{st}ds = \begin{cases}\alpha(t)-\alpha(-\infty), & c>0,\ k<c<l,\\ \alpha(t)-\alpha(\infty), & c<0,\ k<c<l.\end{cases}$$

又如果 $\alpha(t) = \int_0^t \varphi(u)du$，而 $L(s)$ 在 $\Re s = c$ 上绝对收敛，$\varphi(t)$ 在 $t=t_0$ 的邻域内为有界变差，则

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}L(s)e^{st_0}ds = (\varphi(t_0+0)+\varphi(t_0-0))/2.$$

此外还有对应于通常 Laplace 变换的公式.

【参】 [1] D. V. Widder, Laplace transform, Princeton Univ. Press, 1941; [2] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer, 1937 (中译本：G. 窦志，拉普拉斯变换的理论和应用，科学出版社，1966); [3] B. van der Pol-H. Bremmer, Operational calculus based on the two-sided Laplace integral, Cambridge Univ. Press, 1950, 第二版 1961, 第三版 1965.

积分变换 [英 integral transform 法 transformation intégrale 德 Integraltransformation 俄 интегральное преобразование 日 積分変換]

一般地，对于给定的函数 $K(x, y)$，通过

$$(1)\qquad g(y) = \int_a^b K(x, y)f(x)dx$$

将函数 f 变换为 g，称为以 $K(x, y)$ 为**核** (kernel) 的**积分变换**，而由 g 求 f 称为**逆变换** (inverse transform)，求逆变换的公式称为**反演公式** (reciprocal formula). 在多数情形，核是基于单

元函数 $k(t)$ 而以 $k(xy)$ 或 $k(x-y)$ 的形式所给出的函数. 表 1 列举了应用上重要的积分变换(略去常数因子).

表 1

核	区 间	名 称
e^{ixy}	$(-\infty,\infty)$	Fourier 变换[1]
$\cos xy$	$(0,\infty)$	Fourier 余弦变换[2]
$\sin xy$	$(0,\infty)$	Fourier 正弦变换[3]
e^{-xy}	$(0,\infty)$	Laplace 变换[4]
$\sqrt{xy}\,J_\nu(xy)$	$(0,\infty)$	Hankel 变换[5]
$1/(x-y)$	$(-\infty,\infty)$	○Hilbert 变换[6]
x^{y-1}	$(0,\infty)$	○Mellin 变换
$(x+y)^{-\rho}$	$(0,\infty)$	○Stieltjes 变换[7]
$e^{-(x-y)^2}$	$(-\infty,\infty)$	Gauss 变换

1) 复数型; 2), 3) → Fourier 变换; 4) → Laplace 变换; 5) J_ν 为 Bessel 函数†; 6) 取主值†; 7) $\rho>0$.

Fourier 变换, Laplace 变换分别在相应条目内讨论. 本条阐述广义 Fourier 变换, 以及表 1 中附有○号的变换.

【广义 Fourier 变换】 当变换(1)的核为形如 $k(xy)$ 的函数, 而逆变换也以形状相同的公式

$$(2)\qquad f(x)=\int_a^b k(xy)\,g(y)dy$$

给出时, 则称此积分为对称型的**广义 Fourier 变换**(generalized Fourier transform), 称 $k(t)$ 为 **Fourier 核**(Fourier kernel). 有时也称为 **Watson 变换** (Watson transform). 在区间为 $(0,\infty)$ 时, 取 $k(t)$ 为 $\sqrt{2/\pi}\cos t$, $\sqrt{2/\pi}\sin t$, $\sqrt{t}\times J_\nu(t)$ 等, 就是这样的变换的例子(→Fourier 变换). 最后的核给出 Hankel 变换.

当 $k(x)$, $l(x)$ 为 Fourier 核时, $l(x)$ 关于核 $k(xy)$ 的积分变换 $m(y)$ 称为 k,l 的**合成**(resultant). Fourier 核的合成仍为 Fourier 核.

一般地, 当 $K(1/2+it)$ 满足 $K(1/2+it)\times K(1/2-it)=1$, $|K(1/2+it)|=1$, 且 $K(1/2+it)/(1/2-it)=k(t)\in L_2(-\infty,\infty)$ 时, 由

$$k_1(x)=\frac{x}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}k(t)\,x^{-1/2-it}\,dt$$

(极限是取平方平均收敛†)作函数 $k_1(x)$. 于是对于 $f(t)\in L_2(0,\infty)$,

$$g(x)=\frac{d}{dx}\int_0^\infty k_1(xt)\,f(t)\,\frac{dt}{t}$$

几乎处处有定义, $g(x)\in L_2(0,\infty)$, **反演公式**

$$f(t)=\frac{d}{dt}\int_0^\infty k_1(xt)\,g(x)\,\frac{dx}{x}$$

成立. 此时, **Parseval 等式**

$$\int_0^\infty (f(t))^2\,dt=\int_0^\infty (g(x))^2dx$$

也成立.

在广义 Fourier 变换 (2) 下不变的函数称为**自反函数**(self-reciprocal function). 它是齐次积分方程

$$f(y)=\int_a^b k(xy)f(x)\,dx$$

的解. 例如, $x^{-1/2}$ 是关于 Fourier 余弦变换的自反函数. 应用 Hankel 变换的自反函数, 可以导出以下的数论中的**格点公式**(lattice-point formula). 设 $r(n)$ 为 n 可以表为两个平方数之和的各种可能表法的个数, 考察

$$\bar{P}(x)=\sum_{0\leqslant n\leqslant x}{}' r(n)-\pi x.$$

这里 $\sum'$ 意味着, 当 x 为整数时, 就把 $r(x)$ 的项乘以 1/2 而相加. 此时, $f(x)=x^{-3/2}(\bar{P}(x^2/2\pi)-1)$ 为关于 $\nu=2$ 的 Hankel 变换的自反函数. 从这一点, G. H. Hardy 得到了公式

$$\bar{P}(x)=\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{\sqrt{n}}J_1(2\pi\sqrt{nx})$$

(1925). A. Z. Walfisz (1926) 和 A. Oppenheim (1927) 把这个公式推广到表为 p 个平方数的和的表法个数的情形(→格点问题).

【Mellin 变换】 如果 $f(x)x^{k-1}\in L_1(0,\infty)$, 则

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx,\ s=k+it$$

称为 f 的 **Mellin 变换** (Mellin transform). 如果 $f(x)$ 在 x 的邻域内为有界变差†, 则**反演公式**

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{k-iT}^{k+iT}F(s)x^{-s}ds$$

成立. 又如果 $f(x)\,x^{k-1/2}\in L_2(0,\infty)$, 则

$\int_{1/A}^{A} f(x)x^{s-1}dx\ (s=k+it)$ 作为 t 的函数，在 $L_2(-\infty,\infty)$ 的意义下平均收敛†于 $F(s)$，且 **Parseval 等式**

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2k-1}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(k+it)|^2 dt$$

成立．这个 $F(s)$ 仍称为 $f(x)$ 的 Mellin 变换．如果 $f(x)x^{k-1/2}$，$g(x)x^{1/2-k}$ 属于 $L_2(0,\infty)$，f，g 的 Mellin 变换分别为 $F(s)$，$G(s)$，则

$$\int_0^\infty f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}F(s)G(1-s)ds.$$

函数空间 L_p 中的 Mellin 变换的理论可与 Fourier 变换的情形平行地进行论述(E. C. Titchmarsh [1]，第四章)．

【Stieltjes 变换】 对于有界变差函数 $\alpha(t)$，称

$$f(s)=\int_0^\infty \frac{d\alpha(t)}{(s+t)^\rho},\ \rho>0$$

为 $\alpha(t)$ 的 **Stieltjes 变换** (Stieltjes transform)．通常这一称法用于 $\rho=1$ 的情形．如果接连进行两次 Laplace 变换，则形式上得到 $\rho=1$ 的 Stieltjes 变换．与 Laplace 变换相联系，Stieltjes 变换已由 D. V. Widder, R. P. Boas 等进行了系统的研究．

以下设 $\rho=1$．设复数平面除去负实轴所得的域为 D．如果 Stieltjes 变换在 D 内一点 $s=s_0$ 处收敛，则它必在 D 内任意紧集上一致收敛．**反演公式**取如下形式：

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_0^t (f(-\sigma-i\eta)-f(-\sigma+i\eta))d\sigma$$
$$=(\alpha(t+0)+\alpha(t-0)-(\alpha(+0)+\alpha(-0)))/2,\ t>0.$$

在 $\alpha(t)=\int_0^t \varphi(u)du$ 时，如果单侧极限 $\varphi(t\pm 0)$ 存在，则

$$\lim_{\eta\to+0}\frac{1}{2\pi i}(f(-t-i\eta)-f(-t+i\eta))$$
$$=(\varphi(t+0)+\varphi(t-0))/2,\ t>0.$$

【Hilbert 变换】 在复变量 $z=x+iy$ 的上半平面上全纯的函数 $\varphi(z)=U(x,y)+iV(x,y)$，它在实轴上的边界值 $f(x)=U(x,0)$，$g(x)=-V(x,0)$，当 f，$g\in L_1(-\infty,\infty)$ 时，其间存在如下的关系：

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x+t)}{t}dt,$$

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(x+t)}{t}dt.$$

其中 p.v.是指 Cauchy 主值†：

$$\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\,dt$$
$$=\lim_{A\to\infty,\varepsilon\to 0}\left(\int_{-A}^{-\varepsilon}F(t)\,dt+\int_{\varepsilon}^{A}F(t)\,dt\right).$$

称 g 为 f 的 **Hilbert 变换** (Hilbert transform)．此时，以下**反演公式**、**Parseval 等式**成立：当 f 属于 $L_2(-\infty,\infty)$ 时，则上面的关系几乎处处成立，g 亦属于 $L_2(-\infty,\infty)$，且 f，g 的 L_2 范数相等（→Fourier 变换）．Hilbert 变换的重要性，在于它在解析函数的实部与虚部之间建立了关系(→色散关系)．

【参】 [1] E. C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1937; [2] I. I. Hirschman-D. V. Widder, The convolution transform, Princeton Univ. Press, 1955. 关于具体的积分变换的公式集：[3] A. Erdélyi (ed.), Tables of integral transformations I, II, McGraw-Hill, 1954; [4] G. A. Campbell-R. M. Foster, Fourier integrals for practical applications, Bell Telephone Lab., 1931, 再版 van Nostrand, 1948; [5] 森口繁一-宇田川銈久-一松信，数学公式 II，岩波全書，1957; [6] F. Oberhettinger, Tabellen zur Fourier Transformation, Springer, 1957.

位势论 [英 potential theory 法 théorie du potentiel 德 Potential theorie 俄 теория потенциала 日 ポテンシャル論] 【Newton 位势】 在力学中，在 $n(\geqslant 2)$ 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 内，n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 u 称为**位势** (potential)，如果 $-\mathrm{grad}\,u=-(\partial u/\partial x_1,\cdots,\partial u/\partial x_n)$ 给出一个力场，特别是，设在 $\boldsymbol{R}^n$ 中给定一个测度 μ，则由关于 μ 的积分 $u(P)=-\int\log\overline{PQ}\,d\mu(Q)$，$n=2$；$u(P)=\int\overline{PQ}^{2-n}\,d\mu(Q)$，$n\geqslant 3$ 给出的函数 $u(P)$ 是位势函数的典型例子，分别称为**对数位势** (logarithmic potential) 和 **Newton 位势** (Newtonian potential)（也有人把这个称法局限于 $n=3$ 的情形）．通常设 μ 为具有紧支集†的非负 Radon 测度†．这些位势在 $\boldsymbol{R}^n$ 内为上

调和†，在μ的支集的外部为调和．反之，在$\mathbf{R}^n$的一个区域上定义的任意调和函数均可表为单层位势与双层位势（均见下述）的和．因此，也有把调和函数性质的考察称为位势论的，但我们把这一点放在调和函数这一条中讨论．关于上调和函数的位势表示→次调和函数．

以下暂时在$\mathbf{R}^3$内考察．在$d\tau$为体积元素，且可写成$d\mu=\rho d\tau$的情形，即密度ρ存在的情形，如果ρ充分光滑，则上面所说的μ的Newton位势u满足**Poisson方程**（Poisson's equation）$\Delta u=-4\pi\rho$．在μ的支集包含于某一曲面S内且$d\mu$可以表为$d\mu=\rho d\sigma$的情形，其中$d\sigma$为S的面元素，ρ为密度，则称μ的位势为**单层**（simple layer）位势或**单一分布**（simple distribution）位势．如果ρ在S上连续，则u在全空间连续，且u在点P处沿S在P_0处的法线方向的方向导数，当P沿该法线趋近于P_0时，趋近于

$$-2\pi\rho(P_0)+\int_S\rho\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{\overline{PQ}}\bigg|_{P=P_0}d\sigma(Q).$$

从而，如果固定S上的法线方向，则当动点P在该法线上通过P_0时，法线方向的方向导数有$-4\pi\rho(P_0)$的跳跃．如果ρ在$P_0\in S$处满足Hölder条件†，则u在P处沿S在P_0处的任意固定的切线方向的方向导数，当P沿法线趋于P_0时，必有有限的极限．其次，称

$$u(P)=\int_S\rho\frac{\partial}{\partial n_Q}\frac{1}{\overline{PQ}}d\sigma(Q)$$

为**双层**（double layer）位势或**双重分布**（double distribution）位势．如果ρ在S上连续，则当P沿S在点P_0处的法线从两侧趋于P_0时，u均有极限，且分别等于$2\pi\rho(P_0)+u(P_0)$与$-2\pi\rho(P_0)+u(P_0)$．又如果ρ在S上为C^2类函数，则当P趋于S的内点时，u的所有偏导数都有有限的极限．

【一般位势】　推广上述古典位势的概念，设Ω为一般空间，$\Phi(P,Q)$为定义在积空间$\Omega\times\Omega$上的实值函数．对于某一测度$\mu\geqslant0$，当对于每个点$P\in\Omega$，积分$\int\Phi(P,Q)d\mu(Q)$都有定义时，就称此积分为以Φ为**核**（kernel）的μ的**位势**，记作$\Phi(P,\mu)$或$\Phi_\mu(P)$．$\check{\Phi}(P,Q)=\Phi(Q,P)$称为$\Phi$的**伴随核**（adjoint kernel）．又对于测度$\mu,\nu\geqslant0$，当

$$(\mu,\nu)=\iint\Phi(P,Q)d\mu(Q)d\nu(P)=\int\Phi(P,\mu)d\nu(P)$$

存在时，就称这个值为μ与ν的**相互能量**（mutual energy）（积分），特别称(μ,μ)为μ的**能量**（积分）．由于以上位势的定义过于一般化，以下设Ω为局部紧Hausdorff空间，Φ为$\Omega\times\Omega$上满足$-\infty<\Phi\leqslant\infty$的下半连续†函数．如果事先不加声明，则设测度$\mu$，$\nu$和$\lambda$是具有紧支集的非负Radon测度．特别是在$\mathbf{R}^n$中，以$\Phi(P,Q)=\overline{PQ}^{-\alpha}$（$0\leqslant\alpha<n$）为核的位势，称为**$\alpha$次位势**（potential of degree α）或**Riesz位势**（Riesz potential）．

【最大值原理与连续性原理】　我们把Newton位势的一些性质作为原理列举于后．

1）**Frostman最大值原理**（Frostman's maximum principle）（亦称第一最大值原理）．对任何μ（以下从略），$\sup\limits_{P\in\Omega}\Phi(P,\mu)\leqslant\sup\limits_{P\in S_\mu}\Phi(P,\mu)$，其中$S_\mu$为$\mu$的支集．2）**龟返最大值原理**（亦称**扩大最大值原理**（法 principe du maximum dilaté））．存在常数$c\geqslant0$，使$\sup\limits_{P\in\Omega}\Phi(P,\mu)\leqslant c\sup\limits_{P\in S_\mu}\Phi(P,\mu)$．3）对包含于$\Omega$内的任意紧集$K$，在以$K$代替$\Omega$且设$S_\mu\subset K$的情形，2）仍成立（常数$c$可以依赖于$K$）．4）**上方有界性原理**（upper boundedness principle）．如果$\Phi(P,\mu)$在S_μ上为上方有界，则它在Ω内亦为上方有界．5）对包含于Ω内的任意紧集K，在以K代替Ω且设$S_\mu\subset K$的情形，4）仍成立．6）**连续性原理**（continuity principle）．如果把$\Phi(P,\mu)$看作S_μ上的函数是有限值连续的，则它在Ω内也是这样．在以上各个原理之间，有如图1所示的关系．在图中，$a)\rightarrow b)$表示$a)$蕴涵$b)$，$c)\nrightarrow d)$表示存在$c)$成立但$d)$不成立

(3)

(1) ⇄ (2)　　　　(5) ⇄ (6)

(4)

图　1

的例.

如果对于任意的 μ，在 $\Omega - S_\mu$ 内存在点列 $P_1, P_2, \cdots$，它在 S_μ 上有聚点，而沿着该点列有 $\Phi(P_k, \mu) \to \sup_{\Omega - S_\mu} \Phi(P, \mu)$（例如，如果 $\Omega = \boldsymbol{R}^n$，$\Phi(P, \mu)$ 在 $\boldsymbol{R}^n - S_\mu$ 内为次调和†，当 P 趋于无穷远点时，有 $\limsup \Phi(P, \mu) < \sup_{P \in \boldsymbol{R}^n} \Phi(P, \mu)$，则此条件成立），且核满足连续性原理，则 1) 成立. 关于 2) 与 6) 有魚返正，G. Choquet 及二宫信幸的研究. 例如，魚返证明了，在 $\varphi(r)$ 是定义于 $[0, \infty)$ 中的非负递减函数且满足 $\varphi(0) = \infty$ 的情形，$\boldsymbol{R}^n$ 内的核 $\Phi(P, Q) = \varphi(\overline{PQ})$ 满足 2) ([28]). 大津贺信证明了 5)⇄6) 成立；又如果 Φ 在 $\Omega \times \Omega$ 上为广义（意味着它也可以取 ∞ 值）连续，且在 $\Omega \times \Omega$ 的对角线外为有限，则 5)→6) 亦成立. 下面一些节中所举的例子将表明，在核满足象 6) 这样弱的条件下，可以得到关于位势的相当多的性质. 此外，也存在不满足 6) 的例. 关于文献以及其他有关原理→[26].

【能量原理】 设 E 是能量为有限的测度的全体. 一个对称核称为**正定的**（positive definite）或为**正型**（positive type），如果对任意的 $\mu, \nu \in E$，$(\mu - \nu, \mu - \nu) = (\mu, \mu) + (\nu, \nu) - 2(\mu, \nu) \geqslant 0$ 恒成立. 又如果上式仅当 $\mu = \nu$ 时为 0，则称核满足**能量原理**（energy principle）. 二宫刻划了这两种核的特征，在某个附加条件下，他还用此证明了，满足 Frostman 最大值原理或优势原理（见后述）的对称核为正定. 又 Choquet 和大津更推广了以上的定义与结果([26]).

【测度族上的拓扑】 设 C_0 为 Ω 内的具有紧支集的连续函数的全体所成的族，M_0^+ 为 Ω 内的测度的全体所成的族. 第一，根据半范数† $\mu - \nu \to \left|\int f d\mu - \int f d\nu\right| (f \in C_0)$ 在 M_0^+ 上定义**粗拓扑**（vague topology）. 对于 Ω 的各个点的单位分布所成的族引入粗拓扑，它在 Ω 上诱导的拓扑与 Ω 上原来的拓扑一致. 设 M 是 M_0^+ 的子集，如果属于 M 的测度在 Ω 内的每个紧集上的值为有界，则 M 关于粗拓扑为相对紧. 第二，在 M_0^+ 上引入**细拓扑**（fine topology）. 在 Newton 核的情形，它是由 H. Cartan 引进的（[4]）. 即，以 L 表示对所有 μ，(λ, μ) 为有限的 $\lambda \in M_0^+$ 的全体所成的族，用 M_0^+ 上的半范数 $\mu - \nu \to |(\lambda, \mu) - (\lambda, \nu)| (\lambda \in L)$ 定义细拓扑. 在 L 非空时，对于 Ω 的各个点的单位分布所成的族引入细拓扑，它在 Ω 上诱导的拓扑，仍称为细拓扑. 它是使一切 $\Phi(\lambda, Q) (\lambda \in L)$ 连续的最弱拓扑. 第三，当核为正定时，由半范数 $\mu - \nu \to |(\lambda, \mu) - (\lambda, \nu)| (\lambda \in E)$ 在 E 上引入的拓扑称为**弱拓扑**（weak topology）. 最后，同样地，在核为正定时，以 $\sqrt{(\mu - \nu, \mu - \nu)}$ 为半范数在 E 上定义**强拓扑**（strong topology）.

在 Newton 核的情形，如果在 E 上比较这些拓扑，已知它们是依粗、细、弱、强的顺序排列，排在后面的拓扑强于排在前面的拓扑，而对能量有界的测度的任意序列 $\{\mu_n\}$，细、弱、强收敛是等价的（Cartan [3], [4]）. 对于一般函数核情形下相应的问题，也已进行了研究([26]). 特别是，B. Fuglede 称一个正定核为**相容核**（consistent kernet），如果关于强拓扑的 Cauchy 有向族†关于粗拓扑收敛于某个测度，则这个有向族强收敛于同一测度([15]). 这个概念用于给出使 E 关于强拓扑为完备† 的条件上（[15], [26]）. Fuglede 又称满足能量原理的相容核为**完全核**（perfect kernel）. 他对局部紧拓扑群上的卷积†核为相容核或完全核的情形进行了研究（[15]）. 例如，$\boldsymbol{R}^n$ 内的 $\overline{PQ}^{-\alpha} (0 < \alpha < n)$，以及近年由 N. Aronszajn 与 K. T. Smith 所研究的 Bessel 核，就是完全核.

【位势序列的收敛】 当以某个有向集中的 ω 为指标的测度族 $\{\mu_\omega\}$ 收敛时，就有对应的位势族在 Ω 内是否收敛的问题. 例如，如果所有 S_{μ_ω} 均包含于一定的紧集内，且 μ_ω 关于粗拓扑收敛于 μ_0，则在 Ω 内 $\liminf \Phi(P, \mu_\omega) \geqslant \Phi(P, \mu_0)$ 成立. 而且如果 Φ 广义连续，且 Φ 和 $\check{\Phi}$ 均满足连续性原理，则上面关系式中的等号在 Ω 内 q. p. 成立([26]). 下面定义 q. p. 的概念. 首先，一般地，对于 Ω 中的非空紧集 K，定义 $W(K) = \inf_{S_\mu \subset K, \mu(K)=1} (\mu, \mu)$（对于空集 $\varnothing$，令 $W(\varnothing)$

$=\infty$). 其次，对于Ω中任意的集合X，以$\inf_{K\subset X} W(K)$定义内容量$W_i(X)$;设G为Ω中的开集,以$\sup_{X\subset G} W_i(G)$定义外容量$W_e(X)$.如果一个性质在$W_e(X)$的值为∞的集X以外成立,就称该性质 **q.p.** (法 à quasi-partout) 成立. 又如果一个性质在$W_i(X)$的值为∞的集X以外成立,就称该性质 **p. p. p.** (法 à peu près partout)成立. 此外,**拟处处**(q. p.)与**近乎处处**(p. p. p.)这两个名词也用于容量†理论中,不过它们的意义与此处不同. 关于位势序列的收敛 →[7],[26].

【薄集】 设$X\subset\Omega$. 如果关于Ω的原来的拓扑,或者P_0为$X\cup\{P_0\}$的孤立点,或者存在测度μ,使得当$P\in X-\{P_0\}$而$P\to P_0$时, $\liminf \Phi(P,\mu)>\Phi(P_0,\mu)$ 成立,则称X在P_0处是**薄的**(英 thin 法 effilé). 如果关于强于Ω的拓扑与前述细拓扑的拓扑中的最弱拓扑,P_0是$X\cup\{P_0\}$的孤立点,则X关于伴随核$\check{\Phi}$是薄的,在特殊情形,逆命题也成立([4]). 薄的概念是在1940年由 M. Brelot 所引进的,随后他在 [1] 中进行了详细的研究. 其次,设对于正的递减函数$\varphi(r)$,存在正数r_0, δ, a,使当$0<r<r_0$时,满足$\varphi(r)\leqslant a\varphi((1+\delta)r)$. 设$\Omega$是具有距离$\rho$的度量空间,取$\varphi(\rho(P,Q))$为核$\Phi(P,Q)$. 这时,集合$X$在$P_0$处为薄的充分必要条件是$\sum_{j=1}^{\infty} s^j/W_e(X_j)<\infty\ (s>1)$([27]),其中$X_j=\{P\in X\,|\,s^j\leqslant\varphi(\rho(P,P_0))\leqslant s^{j+1}\}$. 这个准则是 N. Wiener 在1924年得到的,他用这个准则给出了$\boldsymbol{R}^3$内的域D的边界点P_0关于 Dirichlet 问题†为正则†的条件. 即,当且仅当D的补集在P_0为薄时,P_0为正则. 当X的任一紧集均在P_0处为薄时,就称X在P_0处为**内薄的**(innerly thin),其充分必要条件是$\sum s^j/W_i(X_j)<\infty$.

【极集】 如果存在测度μ,使在A上有$\Phi(P,\mu)=\infty$,则称A为**极集**(polar set)(Brelot (1941)). 对于任何μ,集合$X=\{P/\Phi(P,\mu)=\infty\}$总是某种外容量为∞的$G_\delta$集(所谓外容量为∞是指,如同在[位势序列的收敛]中从$W(K)$出发定义$W_e(K)$那样,在容量条目中,从$\check{U}(\Omega,K)=V(K,\Omega)$出发定义的量$\check{U}_e(\Omega,X)$为∞).反之,如果在$\boldsymbol{R}^n(n\geqslant 3)$中给定 Newton 外容量†为零的$G_\delta$集$A$时,则存在测度$\mu$,使得$\mu$的 Newton 位势为∞的点的集合与$A$相同且$\mu(\boldsymbol{R}^n-A)=0$ (Choquet [6]). 特别在A为紧集的情形,这被称为 **Evans 定理**或 **Evans-Selberg 定理**(→容量).

【拟连续性】 给定Ω内的某个函数f,如果能够确定容量可以任意小的开集G,使得f作为$\Omega-G$上的函数为有限值连续,则称f为**拟连续**(quasi-continuous). 一般地,拟连续性依赖于容量的定义. 如果以Φ为核的测度μ的位势作为S_μ上的函数为连续,蕴涵它在Ω内为拟连续,就称核Φ满足**拟连续性原理**(quasi-continuity principle).在Φ满足拟连续性原理的假定下,如果再假定Φ为正对称,并取$1/U_e(\Omega,G)$为G的外容量,则所有位势都在Ω内拟连续(岸正倫[18]). 在非对称核的情形,假定连续性原理,则类似的结果成立 (Choquet [5]).

【Gauss 变分问题】 以下K恒表示紧集,给定K上的函数f,对于满足$S_\mu\subset K$的测度μ,使 Gauss 积分(泛函†)$(\mu,\mu)-2\int f d\mu$为最小的问题,称为 **Gauss 变分问题**(Gauss' variational problem). 当附加条件于μ时,则称为附加条件问题. 关于这个问题,已知种种结果([26]). 作为典型结果之一是,如果Φ为对称,且在K上有能量为有限的非零测度存在,而f为在K上仅取有限值的上半连续函数,则存在μ,使得在K上 p. p. p. $f(P)\leqslant\Phi(P,\mu)$,而在S_μ上有$f(P)\geqslant\Phi(P,\mu)$. 在Φ为非对称的情形,这个方法已不适用,但如果核Φ取正值,$\check{\Phi}$满足连续性原理,则在K上存在某个μ,使在$f(P)$与$\Phi(P,\mu)$之间有与以上相同的关系式成立(岸[22]). 在对称核的情形,如果Φ为正定,取f为$\Phi(P,\nu)(\nu\in E)$,则 Gauss 积分等于$\|\mu-\nu\|^2-\|\nu\|^2$,极小化问题便归结为求从ν到$\{\mu\in E\,|\,S_\mu\subset K\}$的射影. 在某些情形,这个射影等于把$\nu$扫除到$K$上(见下述)所得到的测度. 与 Gauss

泛函相比，二宫的泛函有时更有效([25]).

【平衡分布】 在对称核的情形，由紧集K支撑的单位测度μ称为K上的一个**平衡分布**(equilibrium mass-distribution)，如果$\Phi(P,\mu)$在K上p.p.p.等于常数a，而在Ω内$\Phi(p,\mu)\leqslant a$. 如果任意的紧集K都有平衡分布，则称这个核满足**平衡原理**(equilibrium principle). 当$a>0$时，可以把$1/a$看作(一种)容量†，称μ/a为**容量分布**(capacitary mass-distribution). 对应于一般集合的内、外容量†，可以讨论内、外容量分布或其一致性问题([15]). 当Φ为对称时，Frostman 最大值原理与平衡原理等价.

【扫除】 如果对于任意的紧集K与测度μ，存在由K支撑的测度ν，使在K上p.p.p.满足$\Phi(P,\nu)=\Phi(P,\mu)$，且在Ω内满足$\Phi(P,\nu)\leqslant\Phi(P,\mu)$，则称核$\Phi$满足**扫除原理**(balayage principle, sweeping-out principle). 求得这样的一个ν时，称为把μ**扫除**(sweeping out)到K上. 而求ν则称为**扫除过程**(sweeping out process). 在 Newton 位势的情形，为求K上的平衡分布，很早就用过这样的方法：用可数多个球覆盖K的外部，而把球内的质量反复地扫除到球面上去. 对于任意的一般核，扫除原理蕴涵**优势原理**(domination principle)(亦称 **H. Cartan 最大值原理**)，后者断言，如果对于$\mu\in E$和任意的ν，$\Phi(P,\mu)\leqslant\Phi(P,\nu)$在$S_\mu$上成立，则同样的不等式在$\Omega$内成立. 如果$\Phi$为正，对称，广义连续并在对角线之外为有限，则其逆为真. 与此相平行，如果对于$\mu\in E$与任意的ν，不等式$\Phi(P,\mu)\leqslant\Phi(P,\nu)$在$S_\nu$上成立，蕴涵同样的不等式在$\Omega$内成立，则称$\Phi$满足**逆优势原理**. 在特别情形，优势原理蕴涵 Frostman 最大值原理([25]). 对于非对称核，也可以讨论平衡原理，优势原理([25],[20]).

与上述内、外容量分布相对应，可以考察内、外扫除质量分布以及内、外 Gauss 变分问题及其一致性问题([4],[26]). 在 Newton 位势的情形，如果点P处的单位质量ε_P到集合X上的内、外扫除的质量分布与ε_P不同，则称P为X的内、外**非正则点**(irregular point). 于是X在P处为薄(内薄)的充分必要条件是P为X的外(内)非正则点(Cartan [4]).

此外，松下真一[11] 使用 Крейн-мильман 定理†研究了扫除方法. 如果应用 Choquet 定理，则他的结果更可得到改进. Choquet 定理是：设X为局部凸†实拓扑线性空间†E内的可度量化的†紧凸集，记X的极值点†的全体所成的集合为$e(X)$. 于是，对于X的任意的点x_0，存在X上的单位测度μ，满足$\mu(X-e(X))=0$，并且对于E上任意的连续线性形式f，

$$f(x_0)=\int f(x)d\mu(x)$$

成立.

【其他原理】 如果由$\Phi(P,\mu)=\Phi(P,\nu)$在Ω内p.p.p.成立即可得到$\mu=\nu$的结论，则称核Φ满足**唯一性原理**(unicity principle). 在这方面，有二宫与岸的研究([19]). 又如果对于给定的μ，ν，存在λ，使得$\Phi(P,\lambda)=\min(\Phi(P,\mu),\Phi(P,\nu))$，则称核$\Phi$满足**下包络原理**(lower envelope principle). 如果Φ满足优势原理，$\check{\Phi}$满足连续性原理，则Φ在每个紧集(把它看作空间)上满足下包络原理；反之，如果Φ在每个紧集(把它看作空间)上满足下包络原理，则在某些附加条件下，Φ满足优势原理或逆优势原理(岸[21]). 又如果对于$\mu\in E$，任一ν与$a\geqslant 0$，若不等式$\Phi(P,\mu)\leqslant\Phi(P,\nu)+a$在$S_\mu$上成立蕴涵它在$\Omega$内亦成立，就称$\Phi$满足**完全最大值原理**(complete maximum principle)(Cartan-J. Deny, 1950). 这个原理蕴涵 Frostman 最大值原理和优势原理. 在$\boldsymbol{R}^n$中，α次位势$(n-2\leqslant\alpha<n)$和**汤川位势**(Yukawa potential)($n=3$，核为$ar^{-1}\exp(-\lambda r)$($r=\overline{PQ}$))满足完全最大值原理. 这个原理与其他原理之间的若干关系已由岸进行了研究([20]).

以上所述诸原理都是就整体定义的，而 Choquet 与大津賀信则进行了局部的研究([26]).

【扩散核】 对具有紧支集的一般符号的 Radon 测度所成的族M_0与Ω上的连续函数的全体所成的族C. 由双线性形式$\int fd\mu$ ($f\in C$,

$\mu\in M_0$)引入弱拓扑. 同样地,对不一定具有紧支集的一般测度的全体所成的族M与 C_0 亦引入弱拓扑. 从 M_0 到 M 内的正的线性映射 G,如果它关于这两个弱拓扑连续,就称为**扩散核**(法 noyau diffusion),而由$\int f\,dG\mu=\int G^*f\,d\mu$确定的 C_0 到 C 内的线性映射 G^*, 称为G的**转置映射** (法 transposé). 如同核为函数时那样,如果对于G与G^*分别定义扫除原理与优势原理,则G满足扫除原理的充分必要条件是 G^* 满足优势原理(Choquet-Deny [8]). 又对于 G^* 亦已定义完全最大值原理并已进行了研究([12]). 特别是, G. A. Hunt 得到了关于这个原理与用算子的某个半群† P_t将 G^*f 表为 $\int_0^\infty P_tf\,dt$ 形式之间的一个关系. 他的结果在随机过程† 论中是重要的 (→Марков 过程).

【广义函数核的位势】 如果对于 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数f, 能选取自然数 q, 使体积积分

$$\int f(P)(1+\overline{OP}^2)^{-q}d\tau(P)<\infty,$$

则称 f 在 Deny 意义下缓递增. 当广义函数K的 Fourier 变换† $\mathfrak{F}K$ 是函数 $k\geqslant 0$, 而 k 与 $1/k$ 均在 Deny 意义下缓递增时,就称 K 为**核广义函数** (kernel distribution). 当给定这样的一个K时, 使 $\mathfrak{F}T$ 为函数 t, 且满足 $\|T\|^2=\int k t^2d\tau$(称为T的能量)$<\infty$ 的广义函数T的全体W关于内积 $(T_1, T_2)=\int k t_1\bar{t}_2d\tau$ 形成 Hilbert 空间. 然而,具有有限能量的测度的 Newton 位势族并非 Hilbert 空间 (Cartan [3]). 具有紧支集的 C^∞ 类函数族构成W内的稠密子集. 对于所有 $t\in W$, 函数 kt 是在 Deny 意义下缓递增的. 因此可确定满足 $\mathfrak{F}U=kt$ 的广义函数 $U=U^T$, 称它为T的K位势. 根据W的完备性, 应用射影方法 (见前述), 可以讨论平衡, 扫除以及容量的问题. 例如,如果取核为 Dirac δ 函数†, 则对应的容量为 Lebesgue 测度. 在 Newton 核的情形,对于 $T\in W$, 在 $\boldsymbol{R}^n$ 内 $\partial U^T/\partial x_i=f_i$ 几乎处处确定,且为平方可积,并有 $T=-c_n\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, $\|T\|^2=c_n\sum_{i=1}^n\int|f_i|^2d\tau$, 其中 $1/c_n=2(n-2)\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$. 又 U^T 等于 $(n-2)\int\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)f_i(Q)\times\overline{PQ}^{-n}d\tau(Q)$, 其中 x_i, y_i 分别为 P 与 Q 的分量. 通常的双层位势就是它的特殊情形. 反之,如果 $\boldsymbol{R}^n$ 内的一个函数沿几乎所有平行于各个坐标轴的直线绝对连续的,且其偏导数平方可积,则若不计附加常数,它等于某个 $T\in W$ 的 Newton 位势, 以上结果归于 Deny ([9]). 特别在核为非负测度时, U^T 成为函数,就可讨论完全最大值原理等.

【Dirichlet 空间】 在本节设函数为取复数值的函数. 设 Ω 为局部紧 Hausdorff 空间, $\xi\geqslant 0$ 为 Ω 内的某个 Radon 测度, C_0 为具有紧支集的连续函数的全体所成的族, D 为局部 ξ 可积函数构成的 Hilbert 空间,称D为 **Dirichlet 空间** (Dirichlet space), 如果它满足下列条件: $C\cap D$ 无论在 C_0 内或在D内均处处稠密; 对于 $u\in D$ 和函数 v 在 Ω 内的两个关系 $|v(P)-v(Q)|\leqslant|u(P)-u(Q)|$ 和 $|v(P)|\leqslant|u(P)|$ 蕴涵 $v\in D$ 与 $\|v\|\leqslant\|u\|$; 对于任意的紧集 $K\subset\Omega$, 存在有限常数 $A(K)$, 使对每个 $u\in D$, 有 $\int_K|u|\,d\xi\leqslant A(K)\|u\|$. Dirichlet 空间的概念是由 A. Beurling 引进的. 如果对于给定的 $u\in D$, 存在 Radon 测度 μ, 使对每个 $\varphi\in C_0\cap D$, 恒有 $(u,\varphi)=\int\bar{\varphi}\,d\mu$ 成立,则称 u 为位势;特别当 $\mu\geqslant 0$ 时,称为纯位势. 对于任何纯位势,下包络,平衡,扫除,完全最大值原理等成立([10],[13]). 作为特别情形,设 Ω 为局部紧 Abel 群, D 为 Ω 上的 Dirichlet 空间, 如果对每个 $u\in D$ 和 $y\in\Omega$, 恒有 $U_yu(x)=u(x-y)\in D$ 和 $\|U_yu(x)\|=\|u\|$, 则称D是特殊的. 此时可用 Ω 上的一个实值连续函数刻划D([10]).

关于公理论的位势论→次调和函数.

【参】 [1] M. Brelot, Sur les ensembles effilés, Bull. Sci. Math., (2), **68** (1944), 12—36; [2] M. Brelot, Éléments de la théorie classique du potentiel, Centre Doc. Univ., Paris, 第三版, 1965; [3] H. Cartan, Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de

potentiels, Bull. Soc. Math. France, **73** (1945), 74—106; [4] H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble (N. S.), **22** (1946), 221—280; [5] G. Choquet, Sur les fondements de la théorie fine du potentiel, C. R. Acad. Sci. Paris, **244** (1957), 1606—1609; [6] G. Choquet, Potentiels sur un ensemble de capacité nulle, Suites de potentiels, C. R. Acad. Sci. Paris, **244** (1957), 1707—1710; [7] G. Choquet-J. Deny, Théorèmes de convergence, Sém. Théorie du Potentiel (略记为 STP), Paris, 1958—59, no. 12; [8] G. Choquet-J. Deny, Aspects linéaires de la théorie du potentiel, Théorème de dualité et applications, C. R. Acad. Sci. Paris, **243** (1956), 764—767; [9] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie, Acta Math., **82** (1950), 107—183; [10] J. Deny, Sur les espaces de Dirichlet, STP, 1957, no. 5; [11] J. Deny, Éléments extrémaux et balayage, d'après Matsushita, STP, 1958—59, no. 2; [12] J. Deny, Les principes du maximum en théorie du potentiel, STP, 1961—1962, no. 10; [13] J. Deny, Principe complet du maximum et contractions, Colloque Internat. C. N. R. S., Théorie du potentiel, Orsay, 1964, exposé no. 6 (Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), Fasc. I); [14] O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Thèse, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., **3** (1935); [15] B. Fuglede, On the theory of potentials in locally compact spaces, Acta Math., **103** (1960), 139—215; [16] 井上正雄，ポテンシャル論，共立全書，1952; [17] O. D. Kellogg, Foundations of potential theory, Springer, 1929; [18] M. Kishi (岸正倫), Inferior limit of a sequence of potentials, Proc. Japan Acad., **33** (1957), 314—319; [19] M. Kishi (岸正倫), Unicity principles in the potential theory, Osaka Math. J., **13** (1961), 41—74; [20] M. Kishi (岸正倫), Maximum principles in the potential theory, Nagoya Math. J., **23** (1963), 165—187; [21] M. Kishi (岸正倫), A remark on a lower envelope principle, Ann. Inst. Fourier, **14** (1964), 473—484; [22] M. Kishi (岸正倫), An existence theorem in potential theory, Nagoya Math. J., **27** (1966), 133—137; [23] 二宮信幸-一松信，綜合報告，最近のポテンシャル論，数学，**6** (1954), 100—118; [24] 二宮信幸-岸正倫，綜合報告，最近のポテンシャル論，I, II, 数学，**10** (1959), 165—182; **11** (1959), 88—95; [25] N. Ninomiya (二宮信幸), Étude sur la théorie du potentiel pris par rapport au noyau symétrique, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., **8** (1957), 147—179; [26] M. Ohtsuka (大津賀信), On potentials in locally compact spaces, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-I. Math., **25** (1961), 135—352; [27] M. Ohtsuka (大津賀信), On thin sets in potential theory, Sem. Anal. Functions, Inst. Advanced Study, Princeton, 1957, I, 302—313; [28] T. Ugaheri(魚返正), On the general capacities and potentials, Bull. Tokyo Inst. Tech., B **4** (1953), 149—197; [29] Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, Наука, 1966.

调和函数 [英 harmonic function 法 fonction harmonique 德 harmonische Funktion 俄 гармоническая функция 日 調和関数] 如果在 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n(n \geqslant 2)$ 内的域 D 上定义的实函数 $u(P)$ 为二次连续可微（即 u 属于 C^2 类）且满足

$$\Delta u(P) = \partial^2 u/\partial x_1^2 + \cdots + \partial^2 u/\partial x_n^2 = 0,$$
$$\text{其中 } P = (x_1, \cdots, x_n),$$

则称 u 在 D 内为**调和** (harmonic). 调和函数的线性组合为调和. 调和函数为上调和† 且为次调和†，其逆亦真.

【调和性的不变性】 $\boldsymbol{R}^2$ 内的调和性在保角映射†下是不变的. 即，当 x, y 平面内的域 D 一一保角映射到 ξ, η 平面内的域 D' 时，在 D 内为调和的函数 $u(x, y)$，变换为 (ξ, η) 的在 D' 内调和的函数. 在 $\boldsymbol{R}^n(n \geqslant 3)$ 中，在域的保角映射下，一般说来，调和性并不保持. 但对域 D 进行**反演** (inversion) 时，如对函数 u 施行如下的称为 **Kelvin 变换** (Kelvin transfomation) 的变换，则调和性得以保持. 即，对于反演 $(x_1, \cdots, x_n) \to (x'_1, \cdots, x'_n) = (a^2x_1/r^2, \cdots, a^2x_n/r^2)$（其中 $r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$），$v(x'_1, \cdots, x'_n) = (a/r')^{n-2} u(a^2x'_1/r'^2, \cdots, a^2x'_n/r'^2)$ 在 D 的反演域内为调和. 这里，$r'^2 = x_1'^2 + \cdots + x_n'^2$. 如果函数 $u(P)$ 在一紧集的外部 D 内为调和，且对它施行 Kelvin 变换所得的函数在原点的邻域内也为调和，则称 $u(P)$ **在无穷远点处是正则的** (regular at the point at infinity). 这等价于当 $\overline{OP} \to \infty$ 时，$u(P) \to 0$. 其次，设 $T: x_k = x_k(x'_1, \cdots, x'_n)$ $(k = 1, \cdots, n)$ 是把域 D' 映射到另一域 D 上的一一解析变换，如果在 D' 内存在某个正的函数 $\varphi(x'_1, \cdots, x'_n)$，使得对于 D 内任意的调和函数 $u(x_1, \cdots, x_n)$，$\varphi(x'_1, \cdots, x'_n)\, u(x_1(x'_1, \cdots, x'_n), \cdots, x_n(x'_1, \cdots, x'_n))$ 在 D' 内恒调和，则 T 必为保形变换†. 正如微分几何学中已经证明的那样，保形变换只能是相似变换†，或关于球面（也包括平面）的反演，或这两种变换的有限次组合.

【调和函数的例】 1) 如果关于 $x_1, \cdots, x_n$ 的多项式是调和的，则总括同次项所得的各多项式也都是调和的. 调和的齐次多项式称为**立体(调和)函数** (solid harmonic function, spherical

harmonic function). 2) 在 $\boldsymbol{R}^2$ 内, $\log r$, 在 $\boldsymbol{R}^n(n \geqslant 3)$ 内, r^{2-n}, 在 $r > 0$ 的点处为调和. 3) $\boldsymbol{R}^2$ 内的对数位势†, $\boldsymbol{R}^n(n \geqslant 3)$ 内的 Newton 位势†均在测度的支集†外部为调和. 反之, 当 u 在 D 内为调和时, 则在连同边界在内包含于 D 内的任意域 D' 内, u 可表示为边界 $\partial D'$上的一个测度所产生的对数 ($n = 2$) 或 Newton ($n \geqslant 3$)位势与相应的双层† 位势之和. 4) 平面域内的全纯函数的实部 u 与虚部 v 均为调和. 称 v 为 u 的**共轭调和函数** (conjugate harmonic function). 当 u 在单连通域 D 内为调和时, 与它共轭的 v 由线积分

$$v(x, y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + \text{常数}$$

给出, 其中 $(a, b) \in D$ 为定点, 且积分路线含于 D 中. 在一般的域, 相应于积分路线的同调类, v 一般是多值的.

【Green 公式】 设 D 为由有限个分段 C^1 类曲面 $S=\partial D$ 所包围且在 S 的一侧的有界域. 设 u, v 在 D 内调和, 当趋近于 S 的每个点时, u 与 v 的偏导数有有限的极限. 以下设 n 为在 S 上引的方向向外的法线. 根据 Gauss 定理†容易得到

$$(1) \qquad \int_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma = 0.$$

其中 $d\sigma$ 为 S 上的面素†. 特别当 $v \equiv 1$ 时, 有

$$(2) \qquad \int_S \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0.$$

(1)和(2)都称为 Green 公式. 反之, 如果 u 为某一域 D 内的 C^2 类函数, 且在 D 的每个点 P 处有数列 $r_n \downarrow 0$, 使在以 P 为中心, 以 r_n 为半径的球面上, 有 $\int \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0\ (n = 1, 2, \cdots)$, 则 u 在 D 内为调和, 或, 如果 u 为连续, 且对于每个点 P, 存在 $r_P > 0$, 在以 $r(0 < r < r_P)$为半径, 以 P 为中心的球面上, 有 $\int \frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0$, 则 u 为调和.

【平均值定理】 在本条内, 以下如无另外声明, 则 u 表示调和函数, D 表示 u 的定义域. 在以 D 的点 P 为中心的包含于 D 内的闭球内或在其表面上, u 的平均值等于 $u(P)$. 即

$$u(P) = \frac{1}{\tau_n r^n}\int u d\tau = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int u d\sigma,$$

其中 τ_n 与 σ_n 分别表示 $\boldsymbol{R}^n$ 内单位球的体积与表面积, $d\tau$, $d\sigma$ 表示体积元素与面积元素. 称这些关系式为**平均值定理**(mean value theorem). 反之, 当 u 在域 D 内为连续时, 如果对于各点 $P \in D$, 存在递减趋于 0 的数列 r_n, 使得对于各个 n, u 在以 P 为中心, r_n 为半径的球内或球面上的平均值等于 $u(P)$, 则 u 在 D 内调和(**Gauss 定理**). 根据平均值定理, 调和函数 u 满足**最大值原理**(maximum principle). 即, 如果它不是常数, 则它在 D 的内点处既不取到最大值也不取到最小值. 一般地, 如果当 D 的点 P 趋近于 $Q \in \partial D$ 时, 有 $u(P) \to \alpha$, 则称常数 α 为 u 在 Q 处的**边界值** (boundary value). 如果 u, v 在 D 内调和, 且在 D 的任何边界点处都有相等的有限边界值, 则在 D 内 $u \equiv v$ (**唯一性定理** (unicity theorem)).

【边界值问题】 **第一边界值问题** (first boundary value problem) 或 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem), 就是求 D 内的调和函数, 使它在域 D 的边界 $\partial D = S$ 上取已给的边界值 (→ Dirichlet 问题). **第二边界值问题**(second boundary value problem) 或 **Neumann 问题** (Neumann problem), 就是求调和函数 u, 使它在 S 的各点处的法向导数 $\partial u/\partial n$ 等于给定在 S 上的函数 f. 当对已给函数 f, 第二问题的解 u 存在时, 则在上述 Green 公式(2)成立的情形, 由(2)必有 $\int_S f d\sigma = 0$. **第三边界值问题** (third boundary value problem), 就是对于 S 上已给的函数 f, h 求 D 内的调和函数 u, 使它满足边界条件 $\partial u/\partial n = hu + f$. 这些问题都可归结为 Fredholm 型积分方程†. 此外, 还有混合型边界值问题, 即在边界的一部分上给定 u 的边界值, 而在其余部分给定 u 的法向导数.

【Poisson 积分】 当 u 在具有光滑边界 $\partial D = S$ 的有界域 D 内为调和, 在 $D \cup S$ 上为连续时, 若设 D 内的 Green 函数†为 $G(P, Q)$, 则从

上述 Green 公式(1),容易得到

$$u(P)=-\frac{1}{\sigma_n}\int_S u(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}d\sigma(Q).$$

特别是,如果取 S 为中心是 O、半径是 r 的球面 $S(O,r)$,则得

$$u(P)=\frac{r^2-\overline{OP}^2}{\sigma_n r}\int_S\frac{u(Q)}{\overline{PQ}^n}d\sigma(Q).$$

反之,对于 $S(O,r)$ 上的可积函数 $f(Q)$,作

$$u(P)=\frac{r^2-\overline{OP}^2}{\sigma_n r}\int_{S(O,r)}\frac{f(Q)}{\overline{PQ}^n}d\sigma(Q),$$

则 $u(P)$ 在球内为调和,在 f 的连续点处以 f 为边界值. 称 $u(P)$ 为 **Poisson 积分** (Poisson integral). 在球内调和的函数并非恒能表成 Poisson 积分. 而一般地,为了可以用 $S(O,r)$ 上的一般符号的 Radon 测度† $\alpha(Q)$把 u 表示为

$$u(P)=\frac{r^2-\overline{OP}^2}{\sigma_n r}\int_S\frac{1}{\overline{PQ}^n}d\alpha(Q),$$

其充分必要条件是, $\int_{S(O,r')}|u|d\sigma$ 在 $0<r'<r$ 内是 r' 的有界函数(与之等价的是,次调和函数† $|u|$ 具有调和强函数†). 又 α 为绝对连续是 u 可以表成 Poisson 积分的充分必要条件,但亦可用 u 在球内的值给出条件. 例如, 一个充分必要条件是,存在 $t>0$ 上的正值凸函数 $\varphi(t)$,使当 $t\to\infty$ 时, $\varphi(t)/t\to\infty$, 且 $\varphi(|u|)$ 具有调和强函数. 又一般地,在存在 Green 函数†的域中,正值的调和函数 $u(P)$ 可以唯一地表示为积分 $\int K(P,Q)d\mu(Q)$, 其中 $K(P,Q)$是 Martin 核, μ 是 Martin 边界 B 上的一个 Radon 测度,使得在 B 的极小点集(本质部分)的补集上, μ 取值为 0. 也可以在 Марков 过程的情形考虑类似的积分表示 (→Марков 链 [Марков 链的边界问题]). 这就是上述用 α 的表示式的一个推广. 特别是,当以 $\int K(P,Q)d\nu(Q)$ 表示常数 1 时,与 Poisson 积分表示相对应, $u(P)$ 可以由 $\int K(P,Q)f(Q)d\nu(Q)$ 表示的充分必要条件,可以与上类似地用 φ 给出. 此条件等价于 $u(P)$ 为**拟有界** (quasi-bounded), 即等价于 $u(P)$ 可以表为有界调和函数的递增序列的极限 (M. Parreau [7]).

【展开】 设 D 内任意的点 $P_0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 到边界的距离为 r, 则至少在以 P_0 为中心,半径为 $(\sqrt{2}-1)r$ 的球的内部, u 可唯一地展开为幂级数 $\sum a_{\nu_1,\cdots,\nu_n}(x_1-x_1^0)^{\nu_1}\cdots(x_n-x_n^0)^{\nu_n}$ $(\nu_1,\cdots,\nu_n\geqslant 0)$. 从而, u 在 D 内是(实)解析的†. 将此幂级数中的同次项分别加以总括所得到的各齐次式是立体调和函数, 而这样总括后所得到的级数则在以 P_0 为中心,以 r 为半径的较大的球内收敛.

【调和函数序列】 在本节中, $\{u_m\}$ 表示 D 内的调和函数序列. 首先,如果每个 u_m 在 $D\cup\partial D$ 上连续, $\{u_m\}$ 在 ∂D 上一致收敛, 则 $\{u_m\}$ 在 $D\cup\partial D$ 上一致收敛, 其极限函数 u 在 D 内调和. 而且在 D 的任意紧子集上, $\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}u_m/\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_n^{\nu_n}$ 一致收敛于 $\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}u/\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_n^{\nu_n}$ (**Harnack 第一定理**). 第二, 当 $u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots$ 时,如果 $\{u_m\}$ 在 D 的某一点有界,则 $\{u_m\}$ 在 D 内任意的紧子集上一致收敛(**Harnack 第二定理**). 第二定理的证明应用了广为利用的下面的 **Harnack 引理**: 设 u 在 D 内正值调和, P_0 是 D 内的一点, K 是 D 内的紧子集,则存在只依赖于 P_0 与 K 的常数 c, c', 使得 $0<cu(P_0)\leqslant u(P)\leqslant c'u(P_0)$. 其次, D 上有界调和函数的集合构成正规族†, 但从 Harnack 引理可知, 即使单侧有界亦无不可. 又对于 $p>1$, 如果当 $k,m\to\infty$ 时 $\int_D|u_k-u_m|^p d\tau\to 0$, 则应用 Hölder 不等式†即知 $\{u_m\}$ 在 D 的任意紧子集上一致收敛。利用这个结果可知,如果当 $k,m\to\infty$ 时 $\int_D|\mathrm{grad}(u_k-u_m)|^p d\tau\to 0$, 则存在 D 内的调和函数 u, 使当 $m\to\infty$ 时, $\int|\mathrm{grad}(u_m-u)|^p d\tau\to 0$, 且对于 D 内任意的点 P_0, $u_m(P)-u_m(P_0)$ 在 D 的任意的紧子集上一致收敛于 $u(P)-u(P_0)$. 最后,如果 $\int_D|u_m|^p d\tau\,(p>1)$ 有界, 则 $\{u_m\}$ 构成正规族.

【水平面与正交轨道】 $u=$ 常数 a 的轨迹称为**水平面**(level surface, niveau surface)或**等位面** (equipotential surface). 特别是,当指定常数

a 时,称为 a 水平面. 设 u 为非常数的函数,则使 grad $u=(\partial u/\partial x_1,\cdots,\partial u/\partial x_n)=0$ 的点称为**临界点**(critical point). 一切临界点所成的集合局部地是 $n-2$ 维的, 它可以分解为最多可数个维数 $\leqslant n-2$ 的实解析流形(这里 n 是 D 的维数, 0 维流形理解为一个点),而 D 内的任意紧集仅与这些流形中的有限个相交. 我们把这个事实称为这些流形不聚集于 D 内. 每个流形必包含于某一水平面内, 从水平面除去临界点所得到的余集由 $n-1$ 维的不聚集于 D 内的解析流形所构成. 对每个非临界点, 在 D 内存在一条通过该点的解析曲线, 使得它在各点处的切线平行于 grad u. 具有这样性质的极大曲线称为**正交轨道** (orthogonal trajectory) 或**力线** (line of force). 在各正交轨道上沿两个方向行进时, u 严格单调递增和递减, 从而, 任何正交轨道都不是闭曲线. 对于 D 内每个非临界点,有且只有一条正交轨道通过. 因此,二正交轨道并不相交, 每个正交轨道不会终止于非临界点, 且任一正交轨道在每个方向的极限点的集不含有非临界点. 特别当 u 为 Green 函数 $G(P,Q)$ 时,称正交轨道为 **Green 曲线** (Green line). 又从极点 Q 发出且于其上满足 $\inf G=0$ 的 Green 曲线称为**正则的**(regular). 对于充分大的 a, a 水平面 Σ_a 构成一个包围 Q 的 $n-1$ 维的同胚于球面的闭解析曲面. 当 Σ_a 与自 Q 发出的正交轨道的一个族 E 的交集 A 为 $n-1$ 维可测集时, A 在点 Q 处关于 Σ_a 的内部的调和测度†,称为 E 的 **Green 测度**(Green measure). M. Brelot-G. Choquet 证明了,从 Q 发出的正交轨道,除去属于 Green 测度为零的集合的轨道外, 都是正则的. 关于由互不相交的两个紧集所包围的域, 如果其中一个集关于 D 的调和测度不是常数, 则与以上类似的论述对于它的正交轨道族也成立.

【调和流】 一般地,以 Σ_a^0 表示从 a 水平面 Σ_a 除去全部临界点后的余集. 设 σ 为 Σ_a^0 内由分段 C^{n-2} 类边界所包围的 $n-1$ 维域. 设对某个 $b(>a)$, 在通过 σ 的每条正交轨道上, u 取到值 b, 则在这些正交轨道中,在其上 u 的值属于 (a,b) 的正交轨道的全体所成的集合, 称为以 σ 为下底, Σ_b^0 的一部分为上底的**正则管** (regular tube). 在正则管 T 与 $\Sigma_u\,(a<u<b)$ 的交上,积分 $\int\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$ 为常数, 称为 T 的**流量** (flux). 通过 Σ_a^0 内任意的 $n-1$ 维域 (边界不加限制) 的正交轨道的全体所成的族称为一个**调和流** (harmonic flow). 如果其子族与 Σ_a^0 的交在 Σ_a^0 上为可测, 则称这个子族为调和子流. 交上的积分 $\int\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$ 称为调和子流 (在 Σ_a^0 上) 的流量. 上述 Green 测度与从极点 Q 出发(终止于 Q) 的调和子流的流量除以 σ_n(单位球的表面积)所得的数相等. 调和子流的极值长度†可以精确地加以计算.

【孤立奇点】 当 u 在以点 O 为中心的某球内除 O 点外为调和时, $u(P)$ 可以表为在整个球内调和的函数 $h(P)$ 与 $\sum_{m=1}^{\infty}H_m(P)/\overline{OP}^{2m+1}$ 的和, 其中 H_m 为 m 次的立体调和函数†. 如果对于 $\alpha>0$, 当 $P\to O$ 时 $\overline{OP}^{\alpha}u(P)\to 0$, 则 $u(P)$ 可以表成 $h(P)+c/\overline{OP}+\cdots+H_m(P)/\overline{OP}^{2m+1}$ 的形式, $m<\alpha-1$. 特别是, 如果 $u(P)$ 在 O 的一个邻域内有界, 则 O 是 u 的**可去奇点** (removable singularity). 如果 u 在上述球内上方有界,则可写成 $u(P)=h(P)+c/\overline{OP}\ (c\leqslant 0)$. 如为下方有界, 则 $c\geqslant 0$. 关于容量为零的集合的可去性→函数论的零集.

如果 $u(P)$在无穷远点邻近为调和,即 $u(P)$ 在某个球的外部为调和,则 $u(P)$ 可以表示为在无穷远点处为正则的部分 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{H_m(P)}{\overline{OP}^{2m+1}}$ 与级数 $\sum_{m=0}^{\infty}U_m(P)$ 的和,其中 $U_m(P)$ 为 m 次立体调和函数. 如果对某个 $\alpha\geqslant 0$, 当 $\overline{OP}\to\infty$ 时, 有 $\overline{OP}^{-\alpha}u(P)\to 0$, 则在上面的展开中,对满足 $m>\alpha$ 的 m, 有 $U_m=0$. 如果 u 为上方有界或下方有界,则对所有 $m\geqslant 1$, 有 $U_m=0$. 如果 $u(P)$ 在全空间内为调和,且当 $\overline{OP}\to\infty$ 时,有 $\overline{OP}^{-\alpha}\times u(P)\to 0\ (\alpha\geqslant 0)$,则 $u(P)$ 是 $m(<\alpha)$ 次多项式. 又如果 u 在全空间内为调和且为上方有

界或下方有界，则它必为常数．当在无穷远点邻近可以表为 $u(P)=$ 常数 $+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{H_m(P)}{\overline{OP}^{2m+1}}$（注意 $m\geqslant 1$）时，Brelot 称 $u(P)$ 在无穷远点处调和，并曾就包含无穷远点在内的域内的调和函数进行了研究([1]).

【调和开拓】 如果 u 在 D 的一个子域内为 0，则在 D 内 $u\equiv 0$．设 u_1 在 D_1 内调和，u_2 在 D_2 内调和，如果在非空的 $D_1\cap D_2$ 上，$u_1\equiv u_2$，则 u_1 与 u_2 一起在 $D_1\cup D_2$ 内定义一个调和函数．如果无共同点的两个域 D_1, D_2 在边界上共有一个 C^1 类曲面 S，而 u_1, u_2 分别在 D_1, D_2 内调和，在 S 上具有相等的边界值与只是符号相反的法向导数，则 u_1 与 u_2 在域 $D_1\cup S\cup D_2$ 内定义一个调和函数．即，u_1 与 u_2 互为**调和开拓**(harmonic continuation)．由此，如果 D 的边界包含某 C^1 类曲面 S_0，且在 S_0 上 u 的边界值与 $\partial u/\partial n$ 均存在且均等于 0，则在 D 内 $u\equiv 0$．在 $n=2$ 的情形，如果 Jordan 平面域 D 的边界包含解析曲线弧 C，而 u 或 $\partial u/\partial n$ 在 C 上为 0 时，则 u 可以越过 C 调和开拓到某个域上，但在 $n\geqslant 3$ 的情形，关于空间域 D，除边界含有平面或球面的一部分且于其上 $u=0$ 或 $\partial u/\partial n=0$ 以外，类似的结论成立与否还不清楚．

调和函数 u 的边界值并不一定存在，但如将变量限制在 D 的子集上，则 u 有时有极限(→次调和函数)．除在那里论述的以外，当 u 在球内为调和且为正值时，则在边界上几乎所有点 Q 处，如将变量限制在以 Q 为顶点的任意的角域内，u 就存在有限的极限．

【Green 空间】 Brelot-Choquet 推广了 Riemann 面†而引入了**$\mathscr{E}$空间**($\mathscr{E}$-space)([3])．$\mathscr{E}$ 是可分连通拓扑空间，且满足以下两个条件：1) 在每个点 P，存在 P 的一个邻域 V_P 与 $\boldsymbol{R}^n\cup\{\infty\}$ (Александров 紧化†)内的一个开集 V'_P 之间的同胚．2) 如果 $A=V_{P_1}\cap V_{P_2}\neq\varnothing$，且令 $V_{P'_1}$ 和 $V_{P'_2}$ 中对应于 A 的子集分别为 A'_1 和 A'_2，则以 A 为媒介得到的 A'_1 与 A'_2 之间的对应，当 $n=2$ 时构成保角(也可以方向相反)变换，而当 $n\geqslant 3$ 时构成无穷远点不变的等距变换†．在 $\mathscr{E}$ 上存在 Green 函数†的情形，称 $\mathscr{E}$ 为 **Green 空间**(Green space)，已从各种观点讨论了 Green 空间上的调和函数和 Dirichlet 问题†．

【双调和函数】 满足 $\Delta^k u=0\ (k\geqslant 2)$ 的函数称为**多调和函数**(polyharmonic function)，特别是，如果满足 $\Delta\Delta u=0$，则称 u 为**双调和函数**(biharmonic function)(但也有包括多调和而统称双调和的)．平面域 D 内的双调和函数的特征是，可以用在 D 内全纯的函数 $f(z)$, $g(z)$ 把它写成 $\Re(\bar{z}f(z)+g(z))$ 的形式(Goursat 表示)．这在弹性论和流体力学上有用．

关于按公理论形式引进调和函数→次调和函数．

【参】 [1] M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques, Ann. Sci. École Norm. Sup., 61 (1944), 301—332; [2] M. Brelot, Éléments de la théorie classique du potentiel, Centre de Documentation Universitaire, Paris, 第三版 1965; [3] M. Brelot-G. Choquet, Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier, 3 (1952), 199—263; [4] O. D. Kellogg, Foundations of potential theory, Springer, 1929; [5] M. Nicolescu, Les fonctions polyharmoniques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1936; [6] M. Ohtsuka (大津賀信), Extremal length of level surfaces and orthogonal trajectories, J. Sci. Hiroshima Univ., 28 (1964), 259—270; [7] M. Parreau, Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann, Ann. Inst. Fourier, 3 (1952), 103—197.

次调和函数 [英 subharmonic function 法 fonction sousharmonique 德 subharmonische Funktion 俄 субгармоническая функция 日 劣調和関数] 当定义于 $n(\geqslant 2)$ 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 内域 D 上的实函数 $u(P)$ 满足以下条件时，就称它在 D 内为**次调和**(subharmonic)：1) $-\infty\leqslant u<+\infty$，$u\not\equiv-\infty$；2) u 上半连续†；3) 对于 D 的每个点 P_0，u 在包含于 D 内的以 P_0 为中心的任意的闭球的表面上的平均值不小于 $u(P_0)$，即

$$u(P_0)\leqslant\frac{1}{\sigma_n r^{n-1}}\int u\,d\sigma=L(P_0,r),$$

其中 σ_n 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 内单位球面的面积．条件 3) 也可用以下的 3') 来代替：3') u 在所说闭球上的平均值 $A(P_0,r)\geqslant u(P_0)$．一般地，关于定义于相同域内的一个函数族**最大值原理**(maxi-

mum principle)成立是指,这个族中任一不恒等于常数的函数不能在内点处取到最大值. u 在域D内次调和的充分必要条件是，对于任意的子域 $D'\subset D$ 与在 D' 上调和的 h, $u-h$(所成的族)满足最大值原理.

在u为二次连续可微(即u为 C^2 类)的情形, u 为次调和的充分必要条件是

$$\Delta u=\partial^2u/\partial x_1^2+\cdots+\partial^2u/\partial x_n^2\geqslant 0$$

成立,其中 $P=(x_1,\cdots,x_n)$. 又,即使u在通常意义下不可微,但当u上半连续时,作为广义函数†而微分过的 Δu 为正的测度†，这是u为次调和的充分必要条件. 以下u恒表示定义于域D中的次调和函数. 又次调和函数的符号变更时称为**上调和函数** (superharmonic function).

如果 $u_1,\cdots,u_k$ 为次调和，$a_1,\cdots,a_k$ 为正常数,则 $a_1u_1+\cdots+a_ku_k$ 为次调和. 在包含于u的定义域内的闭球内部，用以u为边界值的 Poisson 积分†代替u所得到的函数为次调和. 如果 $f(t)$ 是 t 的单调递增凸函数,则 $f(u)$ 为次调和. 特别是，如果 $v\geqslant 0$, $\log v$ 为次调和,则v本身为次调和. 设 $f(z)$ 为复变量 z 的全纯函数†, $\lambda>0$,则 $\lambda\log|f(z)|$(从而, $|f(z)|^\lambda$)为次调和. 如果h为调和,则$|h|$为次调和. 又对数位势† $(n=2)$ 和 Newton 位势† $(n\geqslant 3)$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 内为上调和.

【平均值的性质】 条件 3) 或 3′)可以改为,对于任意的P_0, 存在 $r(P_0)>0$, 以满足 $0<r<r(P_0)$ 的 r 为半径, 以 P_0 为中心的球面或球上的平均值 $\geqslant u(P_0)$. 又 $-\infty\leqslant A(P_0,r)\leqslant L(P_0,r)$,而当 $r\downarrow 0$ 时,则A与L均 $\downarrow u(P_0)$. u 在D内任意的紧集†上为可积†. 这两个平均值关于 r 均为单调递增，且为 $-\log r\,(n=2)$ 或 $r^{2-n}\,(n\geqslant 3)$ 的凸函数，因而为 r 的连续函数. 当 $D'\cup\partial D'\subset D$ 时，令 r_0 为从 $\partial D'$ 到 ∂D 的距离. 如果任意固定 r, $0<r<r_0$, 则 $A(P,r)$ 在 D' 内是以P为变量的连续次调和函数. 如果重复取 $A(P,r)$ 的平均 n 次,则得 C^n 类的次调和函数,它当 $r\downarrow 0$ 也递减地趋于 $u(P)$. 如果适当地选取函数 $\varphi_r((x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2})$, 则卷积† $u*\varphi_r$ 为 C^∞ 类次调和函数，且当 $r\downarrow 0$ 时递减地趋于 u.

【次调和函数序列】 次调和函数的单调递减序列(或下方有界的有向族†)的极限,或为次调和，或等于常数$-\infty$. 次调和函数的一致收敛序列的极限为次调和. 如果 $u_1,u_2,\cdots$ 为次调和,则每个 k, $\max(u_1,\cdots,u_k)$为次调和,但 $\sup(u_1,u_2,\cdots)$ 未必为次调和. 然而，在D的每个紧集上为上方有界的任意次调和函数族的**上包络**(upper envelope),即以各点处的值的 sup 所确定的函数，除去容量†为 0 的集合以外，与某个次调和函数一致.

【调和强函数与位势表示】 当在u的定义域D内有满足 $u\leqslant h$ 的调和函数 h 时，就称 h 为 u 的**调和强函数** (harmonic majorant). 如果至少有一个调和强函数，则在其中必有最小的调和强函数存在，把它记作 h_D. 对于D的任一相对紧子域 D', $h_{D'}$ 恒存在,且等于以u为边界值的 D' 内的 Perron-Brelot 解†. 当 D' 递增趋于D时, $h_{D'}$ 递增地趋于函数 h, 它或者是调和的,或者恒等于∞. 如果 h_D 存在，则它与h相同,从而h是调和的. 反之,若h为调和,则 h_D 存在且等于 h. 又对应于u, 可在D内唯一确定满足以下条件的 Radon 测度† μ: 设 δ 是D的任意子域，使得在 δ 内 ($\delta=D$ 亦可) 存在 Green 函数† G_δ 与 h_δ, 则 $h_\delta-u$ 等于位势 $\int_\delta G_\delta\,d\mu$ 且 $u=h_\delta-\int_\delta G_\delta\,d\mu$. 一般地，将上(次)调和函数表为调和函数与位势的和(差),称为 **Riesz 分解** (Riesz decomposition).

【边界极限值】 当u在 Green 函数存在的域D内为负时，考察D附加其 Martin 边界† Δ 所得的紧空间上的细拓扑†. 除去Δ上调和测度为零的集合以外,在Δ的各点处, u 关于细拓扑有有限的极限值 (J. L. Doob). 在D为单位球时，则沿几乎所有半径，u 有通常意义的极限. 然而,即使u有界,也有从任意的角域趋近都不存在极限的情形. 如果在半径小于 1 的同心球面上, $|u|$ 的平均值为有界,则由 Riesz 分解, u 可以表示为正值调和函数与负值次调和函数的和，从而, u 有关于上述细拓扑的极限,

也有沿半径的通常极限.

设D为域, K为D的容量† 为零的紧子集. 如果函数u在$D-K$中为次调和且为上方有界,则可以把u扩张为D内的一个次调和函数. 放宽次调和函数定义中的条件, 如果一个函数几乎处处等于某次调和函数, 则称它为**殆次调和**(法 presque-sousharmonique), 如果一个函数为殆次调和且满足 3′), 则称它为**次中线函数**(法 fonction sousmédiane).

以上都是就 $\boldsymbol{R}^n$ 内的域进行考察的, 但就 Riemann 面† ($n=2$) 或更广地就 Brelot Choquet 意义的 $n(\geqslant 2)$ 维$\mathscr{E}$空间†, 也可同样地进行讨论.

【公理论的处理】 原来主要讨论 Newton 位势†的位势论†, 其相当一部分能够以上调和函数族为基础来进行讨论(例如, [1]). 例如, 所谓极集† 是指在其上存在取值∞的上调和函数的集合; 所谓集合X在点$P_0\notin X$处为薄的†, 是指 P_0 与X 的距离为正或当X上的点P趋近于P_0时,其P_0的某邻域内存在满足$\lim\sup v(P)>v(P_0)$的上调和函数$v(P)$.此外,我们也可讨论扫除†,定义位势并得到 Riesz 分解等. 在此, M. Brelot 于 1957 年推广了 Doob 的结果(1954), 在局部紧 Hausdorff 空间中, 从按公理所定义的调和函数族出发,定义了上调和函数,更进而讨论了上面所说的问题和 Dirichlet 问题†. 后来以 Brelot 为中心,在这方面继续取得了很多进展([3],[5]).

【参】 [1] M. Brelot, Sur la théorie autonome des fonctions sous-harmoniques, Bull. Sci. Math. (2), **65** (1941), 72—98; [2] M. Brelot, Éléments de la théorie classique du potentiel, Centre Doc. Univ., Paris, 第三版 1965; [3] M. Brelot, Lectures on potential theory, Tata Institute, Bombay, 1960; [4] T. Radó, Subharmonic functions, Erg. d. Math., Springer, 1937 (Chelsea, 1970); [5] Colloque Intern. C. N. R. S. Théorie du Potentiel, Orsay, 1964, C. N. R. S. (Ann. Inst. Fourier, **15** (1965). Fasc. I.)

Dirichlet 问题 [英 Dirichlet problem 法 problème de Dirichlet 德 Dirichletsche Aufgabe, Dirichletsches Problem 俄 задача Дирихле 日 ディリクレ問題] 【古典 Dirichlet 问题】 所谓**古典 Dirichlet 问题**,就是当 $\boldsymbol{R}^n(n\geqslant 2)$ 内的域D的边界S为紧时, 求D内的调和函数†, 使它在S上取已给的连续函数值的问题. 这个问题也称为第一边值问题†(→调和函数).以下恒以f表示S上的已给边界值. 当D为有界域时,称为**内部问题**(interior problem), 当D不是有界域时,称为**外部问题**(exterior problem). 关于外部问题,还须要求, 当以D的外点P_0为中心对D进行反演†,且对D内的解(如果它存在)进行 Kelvin 变换†时, 由此得到的D的反演象上的函数在 P_0 处为调和($n\geqslant 3$). 在 $n=2$ 的情形,D中的解已被看作D的反演象上的函数, 同样要求它在P_0处调和. 这样,由于内部问题与外部问题可以互相转化, 因此考察其中任何一个都是可以的. 以下就空间 $\boldsymbol{R}^3$ 简要阐述历史情况.

首先,当D有界,S充分光滑时, G. Green (1828) 认为,对于所给的f, 用D的 Green 函数† $G(P,Q)$, 设n_Q为外法线,则面积分

$$(1)\quad u(P)=-\frac{1}{4\pi}\int_S f(Q)\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}d\sigma(Q)$$

即为 Dirichlet 问题的解. 然而,他的论述的出发点是, Green 函数的存在, 从物理学的观点来看是明显的,因而缺乏严密性. 以后,在适当的条件下,由 A. M. Ляпунов (1898) 改正了这个缺点. 其次, 1840 年, C. F. Gauss 进行了如下的讨论: 当f连续时, 如果把S上由密度$m\geqslant 0$的质量分布产生的 Newton 位势记作u_m, 则关于给出一定的总质量的密度 m, 使积分$\int_S(u_m-2f)md\sigma$为最小的密度m_f存在, 且$u_{m_f}-f$在S上等于常数a. 特别是,如果$f=0$, 则u_{m_0}在S上等于正的常数b, 而$u_{m_f}-ab^{-1}u_{m_0}$便给出解. 然而, 使积分为最小的质量分布的密度函数, 其存在不仅不确定,事实上,即使S为球面,也存在连续函数$f\geqslant 0$, 使得不计常数在球面上几乎处处等于f的位势不存在 (大津賀信 1961). 继 Gauss (1840), Lord Kelvin (W. Thomson) (1847) 之后, G. L. Dirichlet 利用所谓 **Dirichlet 原理** (*Dirichlet's principle*) 给

出了解．关于这个原理以下将详述，但使积分为最小的函数未必存在的例子由 K. Weierstrass (1870)所给出．然而，1899 年，D. Hilbert 在某些条件下，使讨论得以严密化．在当时，C. G. Neumann (1870) 在具有相当光滑边界的凸域D上，对 Dirichlet 问题首次给出了严密的解答．按照这个方法，作为D内的函数首先取双层†位势 $W_1=\frac{1}{2\pi}\int_S f\frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu}d\sigma$，接着取它在$S$上的值除以 2π 所得到的函数为密度的双层位势 W_2，这样继续下去，而级数 $W_1-W_2+W_3-W_4+\cdots$ 加一适当常数即为所求的解．在此以后，1887 年，如同 Dirichlet 那样，H. Poincaré 认为求得 Green 函数即可，并用下面的作法求得了它：设D为有界域，所要求的 Green 函数的极点为O，则对于边界值为 $1/\overline{OP}$ 的 Dirichlet 问题，基于以O为中心的 Kelvin 变换†，变换为由反演所得的非有界域 D' 的边界值为常数 1 的 Dirichlet 问题．当包围 D'的边界 $\partial D'$ 的球上的一致分布给出在球内为 1 的位势时，即可由将此分布扫除†到 $\partial D'$ 而得到解．这个方法在(1)不成立时不能适用，但在 1899 年所著的书([9])中，Poincaré 又给出了另外的解法．即，作为有界域D的边界S上的边界值，只要考察f等于一个多项式g在S上的限制即已足够．这个多项式g可表为在D内以$-\Delta g/(4\pi)$为密度的一般符号测度τ下的 Newton 位势与在 $D\cup S$ 上连续，在D内调和的函数之和．从而，把τ扫除到∂D上去即可求得解． 他指出，可以这样求解的一个充分条件(称为 **Poincaré 条件** (Poincaré's condition)) 是，在S的每个点处，存在以该点为顶点的与D不相交的圆锥体．除以上所述外，尚有转化为积分方程†的 I. Fredholm (1900) 方法．Dirichlet 问题恒能求解的域称为 **Dirichlet 域** (Dirichlet domain)．H. Lebesgue (1912) 证明了，在这样的域内，解可由迭代平均法来计算．

【关于一般域的 Dirichlet 问题】 到以上所说的时代为止，即使对域的边界不附加条件，古典问题一直被认为是可以求解的． 但 1909 年 S. Zaremba 揭示了，在球除去其中心的域中，求解未必可能；又 Lebesgue 于 1913 年给出了一个决定性反例，这个例子中的域同胚于球，而这个域由一张除一点外都充分光滑的曲面所围成．在此以后，在一般域D的边界上给出了连续函数f的情形，就成了以下的问题：求D内的调和函数，使它只依赖于f，而特别在古典解存在的情形，则它与古典解一致．现在在整个空间内连续扩张f，仍以f记所得函数．N. Wiener (1924) 证明，如果以 Dirichlet 域的递增序列 $\{D_n\}$ 来逼近D，则以f为边界值的 D_n 内的解收敛于某个调和函数，而此一般解的存在与f如何扩张以及 $\{D_n\}$ 如何选取无关． 至于这个一般解在边界上在多大程度上取所给的边界值f，以后再讨论．又 O. D. Kellogg(1928)给出了包括 Poincaré 扫除法，Schwarz 交错法的某个情形，以至包括 Wiener 的结果的一般方法．此外，通过前述的 Poincaré 的扫除法以及 Lebesgue 的迭代平均法也能得到 Wiener 的一般解．

【Perron 方法】 我们根据由 M. Brelot(1939) 所改进的形式来阐述 Perron 方法 (1923)．D 可以是 $\boldsymbol{R}^3$ 内任意的域，但为简单起见，以下限于内部问题．如果D内的次调和函数 $u(P)$ 为上方有界，且在每个边界点M处，当 $P\to M$ 时，满足 $\limsup u(P)\leqslant f(M)$，则称$u$为一个**下函数** (hypofunction)．如果没有这样的函数，则令 $\underline{H}_f(P)\equiv-\infty$，如果有这样的函数，则在每个点$P$处，令关于下函数$u$的 $\sup u(P)$ 为 $\underline{H}_f(P)$．$\overline{H}_f(P)$由$-\underline{H}_{-f}(P)$ 或对应于下函数的**上函数** (hyperfunction)来定义．如果 $\underline{H}_f(P)$与$\overline{H}_f(P)$ 相等，则记作 $H_f(P)$，如果它取有限值，则必为调和函数．$H_f(P)$ 称为 **Perron-Brelot 解** (Perron-Brelot solution) (或 Perron-Wiener-Brelot 解，或简称 PWB 解)．又这个方法称为 **Perron 方法** (Perron's method) 或 Perron-Brelot 方法，Perron-Wiener-Brelot 方法．

Wiener 于 1923 年证明，在 Dirichlet 域边界上的f为 Daniell-Stone 可积†的情形，可以把 Daniell (-Stone) 积分看作一般解；1925 年，他

又证明这个结果对一般的域(不一定是 Dirichlet 域)也是对的. 在 f 为连续的情形,他还证明了他的解等于 H_f(1925). 然而,可惜举了错误的例,因而以为即使在 f 为不连续的简单情形,也可能有 $\underline{H}_f \neq \overline{H}_f$,所以他对 Perron 方法不再有兴趣. Brelot (1939) 对此作了修正,证明 Daniell 上、下积分恒分别等于 $\overline{H}_f$, $\underline{H}_f$. 又对于任意的连续的 f,都可以按上面的叙述确定 H_f,并且存在 Radon 测度[†] μ_P 满足 $H_f(P) = \int f d\mu_P$. 此 μ_P 为**调和测度**(harmonic measure)(如果看作 P 的函数,则为调和测度函数). Brelot 指出,$\underline{H}_f = \overline{H}_f$ 为调和的充分必要条件是,对于一个(或所有) P, f 为 μ_P 可积. 特别在 D 为 Dirichlet 域,E 为边界 ∂D 上的闭集的情形,E 的调和测度函数 $\mu_P(E)$ 具有在 E 的内点(把 ∂D 看作空间)处取值为 1,在 E 的外点处取值为 0 的边界值. 又 μ_P 等于把 P 处的单位质量扫除到 ∂D 上去所得的测度.

【正则边界点】 如果 f 连续,则当 $P \to M$ 时,使 $H_f(P) \to f(M)$(即一般解实际取 f)的边界点 M 称为**正则的** (regular),否则称为**非正则的** (irregular). 这是局部性质. 或者,M 的正则性也可说成:当 $P \to M$ 时,μ_P 关于粗拓扑[†]收敛于 M 处的单位测度. 关于 M 为正则的必要条件和充分条件,除前述的 Poincaré 条件以外,已经给出了种种别的条件. 但作为正则性的一个定性的充分必要条件,是在 M 处**闸函数**(barrier)的存在. 闸函数为 Poincaré 所使用,而为 Lebesgue 所命名并加以有效利用. 所谓闸函数,就是 D 内的连续上调和函数,它在 M 处取边界值零,而在所有以 M 为中心的球的外部具有正的下确界. 也可以放宽条件,取在 M 的某邻域与 D 的交内为正值上调和,而在 M 处取边界值零的函数为闸函数. 这包含着 G. Bouligand (1925) 的充分必要条件:在 D 内存在 Green 函数[†],它在 M 处取边界值零. 定量的充分必要条件由 Wiener 所给出,它等价于要求 D 的补集在 M 处成为薄集[†](→位势论). 又 Kellogg 曾猜想非正则边界点的集合是容量为零的集合,并证明了二维的情形(1928). 实际证明三维情形的以 G. C. Evans (1933) 为最早. F. Vasilesco (1935), O. Frostman (1935) 等给出了另外的证明. 显然,在 $n \geqslant 4$ 的情形,这个事实也成立.

【更一般的 Dirichlet 问题】 迄今为止,讨论是在 $\boldsymbol{R}^n$ 内进行的,但 Brelot-G. Choquet 更广泛地在 Green 空间 (→调和函数) $\mathscr{E}$ 上取得了如下的结果([3]):考察包含 $\mathscr{E}$ 且以 $\mathscr{E}$ 为稠密子集的度量空间,并把 $\mathscr{E}$ 关于这个空间的补集记为 Δ. 今设在 $\mathscr{E}$ 上给出了滤子[†]族 $\{F\}$,其中每个 F 收敛于 Δ 的某个点. 如果 u 在 $\mathscr{E}$ 上为次调和,上方有界,且沿每个 F 有 $\limsup u \leqslant 0$,则在 $\mathscr{E}$ 上 $u \leqslant 0$. 又设对于每个 F,在其收敛点 Q 在 $\mathscr{E}$ 内的某邻域内,存在闸函数 v. 即,设 v 为正值上调和,沿 F 趋近于 0,在 Q 的所有邻域外部的下确界为正. 在这些假定下,PWB 解的讨论可与 $\boldsymbol{R}^3$ 情形同样进行. 再者,能找出多种满足上面条件的 Δ 与 $\{F\}$ 的例. 特别是,作为 Δ 取 Martin 边界[†]的情形已由 L. Naïm 进行了详细的研究([6]). Dirichlet 问题也可更为广泛地按公理论方法来处理(→次调和函数).

【Dirichlet 原理】 原来,Dirichlet 原理是说,如果给定函数 f,它在 $\boldsymbol{R}^n$ 具有充分光滑边界的有界域 D 的闭包上为连续,在 D 内为分段 C^1 类,且 **Dirichlet 积分** (Dirichlet integral) $\|f\|^2 = \int_D |\operatorname{grad} f|^2 d\tau$ 为有限,则在具有同样性质与相同边界值(仍记为 f)的函数之中,存在使得 Dirichlet 积分为最小的函数,而且它是边界值为 f 的 Dirichlet 问题的解. 在一般的域内,在 D 内调和函数中,H_f 使 $\|u - f\|$ 为最小. Brelot 对竞争函数族讨论了 Dirichlet 原理,这些函数定义在 $\mathscr{E}$ 上的一个域内,而其边界值不一定由古典方式定义([2]).

【参】 [1] M. Brelot, Familles de Perron et problème de Dirichlet, Acta Sci. Math. Szeged, 9 (1939), 133—153; [2] M. Brelot, Étude et extensions du principe de Dirichlet, Ann. Inst. Fourier, 5 (1955), 371—419; [3] M. Brelot-G. Choquet, Espaces et lignes de Green, Ann. Inst. Fourier, 3 (1952), 199—263; [4] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces, Interscience, 1950; [5] O. D. Kellogg, Foundations of potential theory, Springer, 1929; [6]

L. Naïm, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, Ann. Inst. Fourier, 7 (1957), 183—281; [7] 大津賀信，函数論特論，現代数学講座，共立出版，1957; [8] M. Ohtsuka (大津賀信), Dirichlet problem, extremal length and prime ends, Lecture notes, Washington Univ., St. Louis, 1962—63; [9] H. Poincaré, Théorie du potentiel Newtonien, Leçons professées à la Sorbonne, Gauthier-Villars, 1899.

容量 [英 capacity 法 capacité 德 Kapazität 俄 емкость 日 容量]Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^3$ 内导体的电容量是以给予导体的正电荷与由之而产生的表面上的电位之比来定义的．它的值不依赖于所给的正电荷的总量．集合的容量的概念，最初由 N. Wiener (1924) 进行了数学的探讨，此后，以 Ch. de la Vallée-Poussin, O. Frostman 以及其他一些法国学者为中心，把它与位势论相联系而加以发展．

【能量】 设 Ω 为局部紧 Hausdorff 空间，$\Phi(x, y)$ 为 $\Omega\times\Omega$ 上的下半连续†函数，且 $-\infty<\Phi\leqslant\infty$．作为测度仅考察具有紧支集†的非负 Radon 测度†．当以 Φ 为核的测度 μ 的位势† $\int\Phi(x, y)d\mu(y)$ 与 μ 的能量† $\iint\Phi d\mu d\mu$ 存在时，分别把它们记为 $\Phi(x, \mu)$ 与 (μ, μ)．对 Ω 内任意的集合 X，以 $\mathscr{U}_X$ 表示其支集 S_μ 包含于 X 内的单位测度(全测度 $\mu(\Omega)=1$ 的测度) μ 的全体．设 K 为非空紧集（以下同样）．当 μ 在 $\mathscr{U}_K$ 上变动时，令 $W(K)=\inf(\mu, \mu)$．对于空集 $\varnothing$，令 $W(\varnothing)=\infty$．当 $\Omega=\boldsymbol{R}^3$, $\Phi(x,y)=1/|x-y|$ 时，已经知道，在 K 的补集非有界成分上取边界值 1 的 Dirichlet 问题†(外部问题†)，其一般解 $u(x)$ 等于某个一般的平衡分布†位势．从而，如果 S 是包含 K 于其内部的光滑曲面，则外法向导数的面积分 $-\frac{1}{4\pi}\int_S\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$ 等于 $\frac{1}{W(K)}$．当 K 为闭域时，Wiener 把这个积分值定义为 K 的**容量**([19])．当 E 为有界 Borel 集†时，de la Vallée-Poussin 考虑如下的测度 μ 的全体：μ 的支集包含于 E 内，它的 Newton 位势† $\Phi(x, \mu)$ 在 $\boldsymbol{R}^3$ 内不超过 1．当 μ 遍历上述测度族时 $\mu(\boldsymbol{R}^3)$ 的上确界，称为 E 的 **Newton 容量**(Newton capacity) ([18], p. 225 以下)．如果 E 为紧集，则 Newton 容量与 Wiener 容量一致．当考虑平面 $\boldsymbol{R}^2$ 内的对数位势†时，称 $e^{-W(K)}$ 为 K 的**对数容量** (logarithmic capacity)．当 $\boldsymbol{R}^2$ 内 K 的补集的非有界成分内存在以无穷远点为极点的 Green 函数† $g(z, \infty)$ 时，称 $\lim_{z\to\infty}(g(z,\infty)-\log|z|)$ 为 **Robin 常数** (Robin's constant)，它等于 $W(K)$．关于 Robin 常数与约化极值距离之间的关系→极值长度．在一般核的情形，由于按上述方法用 $W(K)$ 定义容量有困难，所以通常把 $W(K)$ 本身作为研究的问题，并称它为容量(从而如果不注意定义，则大小关系往往变反)．如果 $W(K)=\infty$，则我们可以称 K 的容量为零．Gauss 积分 $(\mu, \mu)-2\int f d\mu$ 的最小值是 $W(K)$ 的一个推广，其中 $\mu\in\mathscr{U}_K$，而 f 则是在 K 上上方有界的上半连续函数．

【极小极大值】 对于任意的集合 $X\subset\Omega$ 与测度 μ，当 x 在 X 内变动时，令 $U(\mu; X)=\sup\Phi(x,\mu)$, $V(\mu;X)=\inf\Phi(x,\mu)$．又设 $Y\subset\Omega$ 为任意的集合，当 μ 在 $\mathscr{U}_Y$ 内变动时，定义 $U(Y)=\inf U(\mu; S_\mu)$, $V(Y)=\sup V(\mu; S_\mu)$, $U(X, Y)=\inf U(\mu; X)$, $V(X, Y)=\sup V(\mu; X)$．当考虑的核不是 $\Phi(x, y)$ 而是 $\check{\Phi}(x,y)=\Phi(y, x)$ 时，则记作 $\check{W}(K)$, $\check{U}(\mu;X)$, $\check{V}(\mu; X)$, $\cdots$．当 K 是 Ω 内的紧集时，有以下的关系：

$$
\begin{aligned}
W(K)=\check{W}(K)&\leqslant U(K)=\check{U}(K)\\
&\leqslant\left\{\begin{array}{l}U(K, K)=\check{V}(K, K)\\ \check{U}(K, K)=V(K, K)\end{array}\right\}\\
&\leqslant\left\{\begin{array}{l}U(\Omega, K)=\check{V}(K, \Omega)\\ \check{U}(\Omega, K)=V(K, \Omega)\\ V(K)=\check{V}(K).\end{array}\right\}
\end{aligned}
$$

在这些关系的证明中，对策论†中的极小极大定理起着重要的作用 (例如[7])．在对称核的情形，有 $W(K)=U(K)$．这些关系不能再改进．在核为正定的情形，不用 $\mathscr{U}_Y$ 而用使 $S_\mu\subset Y$ 且 $(\mu, \mu)=1$ 的 μ 的全体所成的族，也可以考察与以上 $U(Y)$, $V(Y)$ $U(X, Y)$, $V(X, Y)$ 相当的量．

【超限直径】 当 $k\to\infty$ 时，

$$D_k(K) = k^{-1}(k-1)^{-1} \inf_{x_1,\cdots,x_k \in K} \sum_{i \neq j} \Phi(x_i, x_j)$$

递减，其极限 $D(K)$ 等于 $W(K)$. 在 $\boldsymbol{R}^2$ 内对对数核的情形,按照 M. Fekete,称 $e^{-D(K)}$ 为**超限直径** (transfinite diameter). 以波兰的 F. Leja 为中心,详细地研究了它与保角映射†之间的关系. 作为与 $D(K)$ 类似的量,首先,令

$$kR_k(X, Y) = \sup_{x_1,\cdots,x_k \in Y} \inf_{x \in X} \sum_{i=1}^{k} \Phi(x, x_i),$$

可以证明 $R(X, Y) = \lim_{k\to\infty} R_k(X, Y)$ 存在. 在此, $R(K, Y) = V(K, Y)$ 成立. 当 $X = Y$ 时,就把它记作 $R(X)$, $\boldsymbol{R}^2$ 中的 $D(K)$ 与 $R(K)$ 都是 Fekete 在 1923 年引进的. 关于 $\boldsymbol{R}^2$ 和 $\boldsymbol{R}^3$ 内特殊的K与α 核 $r^{-\alpha}(\alpha \geqq 0)$ 的 $D(K)$ 与 $R(K)$,已由 G. Pólya-G. Szegö 计算出来([13]). 对于 $\boldsymbol{R}^2$ 内的对数核和 $\boldsymbol{R}^3$ 内的 Newton 核,等式 $D(K) = R(K)$ 成立. 又在 $\boldsymbol{R}^2$ 内关于K的 k 次 Чебышев 多项式(→多项式逼近),它的绝对值在K上的最大值等于 $\exp(-kR_k(K))$, 也可以用这个极限值导出超限直径.

【Evans 定理】 为使 $\boldsymbol{R}^3$ 内的K的 Newton 容量为 0 的充分必要条件是,存在K上的分布,使它的 Newton 位势在K上处处等于∞. 由于 G. C. Evans 与 H. Selberg 在 1935 年互相独立地证明了这个命题,所以,称它为 **Evans 定理**或 **Evans-Selberg 定理**, $\boldsymbol{R}^2$ 内对应的定理在函数论中往往有所应用. 在一般核的情形, 类似的位势存在的充分必要条件是 $R(K,K) = \infty$.

【容量的非加法性】 有多种容量 (记作 cap)满足不等式 $\mathrm{cap}(\bigcup_n X_n) \leqslant \sum_n \mathrm{cap}\, X_n$. 即使 Newton 容量 C, 一般说来, 也不具有加法性, 但满足 $C(K_1 \cup K_2) + C(K_1 \cap K_2) \leqslant C(K_1) + C(K_2)$ (G. Choquet [2]). Choquet 证明了, 任意的X都可分解为互不相交的集合 X_1 与 X_2, 满足 $C_i(X) = C_i(X_1) = C_i(X_2)$ ([3]). 其中 $C_i(X)$ 为 **Newton 内容量** (Newtonian inner (interior) capacity), 其定义为: 如果 $X = \varnothing$, 则定义它为 0, 如果 $X \neq \varnothing$, 则定义它为 $\sup_{K\subset X} C(K)$.

【与 Hausdorff 测度的关系】 关于容量与 Hausdorff 测度†的关系, 已经进行了种种研究 (例如→[1]). Frostman 在 [6] 中就已引进了容量维数的概念, 并看出它和 Hausdorff 维数是一致的. [11]中研究了积集的容量从上方与从下方的赋值,设 K, K' 分别是 $\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{R}^m$ 内的紧集,其维数分别为 α, β, 又设 $K \times K'$ 的维数为 γ, 则 $\alpha+\beta \leqslant \gamma \leqslant \min(m+\alpha, n+\beta)$ 成立, 等号可由一般的 Cantor 集†来达到. 一般 Cantor 集的容量的赋值亦已得到 ([10], [17]). 已经知道, 平面内对数容量为 1 的连续统K的直径 d, 满足 $2 \leqslant d \leqslant 4$, 面积$A$满足 $A \leqslant \pi$ ([8]); 平面连续统 $K_1, \cdots, K_n$ 的和 $\{z_1 + \cdots + z_n \mid z_k \in K_k, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ 的对数容量, 除去所有 K_k 为凸且相似的情形以外, 严格地大于 K_k 的对数容量的和 ([16]). 又通过各种对称化†也一般地得到了对数容量为递减的结果 (→等周问题; [14]).

【可容性】 今以 Newton 容量为例进行说明. **Newton 外容量** (Newtonian outer (exterior) capacity) $C_e(X)$ 由 $\inf C_i(G)$ 来定义. 其中G遍历包含X的开集. $C_i(X) \leqslant C_e(X)$, 而在等号成立时,则X为**可容的** (capacitable). Choquet 于 1955 年就 Newton 容量证明了所有解析集†,从而,所有 Borel 集†为可容,然而解析集的补集并不一定可容 ([2]). Choquet 又以如下形式推广了这个结果 ([4]): 设 φ 是定义在某抽象空间 Ω 的子集的全体所成的族上的非减函数, $\mathscr{H}$ 是 Ω 内的子集所成的某个族,它关于有限并与可数交是封闭的. 还设,如果 $H_n \in \mathscr{H}$ 且 $H_n \downarrow H$, 则 $\varphi(H_n) \downarrow \varphi(H)$, 如果 $X_n \uparrow X$, 则 $\varphi(X_n) \uparrow \varphi(X)$. 如果 $\sup\{\varphi(H) \mid H \in \mathscr{H}, H \subset X\}$ 等于$\varphi(X)$, 则称X是 $(\varphi, \mathscr{H})$ 可容的. Choquet 定义了 $\mathscr{H}$ Суслин 集, 并证明了它恒为 $(\varphi, \mathscr{H})$ 可容. 关于比 Newton 容量更一般的具体容量的可容性, 有岸正倫([9]), Choquet ([5]), B. Fuglede ([7]) 的结果. 关于由 Gauss 变分问题所定义的量, 我们也能讨

论它的可容性.

【解析容量】 与以上所说的容量有若干差异，平面内 K 的**解析容量**(analytic capacity) $\alpha(K)$可定义如下：设$\mathfrak{G}$为满足下列条件的 $g(z)$ 所成的族：$g(z)$ 在K的补集的非有界成分D内全纯，$|g(z)|<1$，且 $w=g(z)=b_1/z+b_2/z^2+\cdots$，令 $\alpha(K)=\max_{g\in\mathfrak{G}}|b_1|$. 如果令$K$的对数容量为 $C(K)$，则一般地有 $\alpha(K)\leqslant C(K)$. 如果K为连续统，则有 $\alpha(K)=C(K)$，而给出等号的 $g(z)$ 就是D到 $|w|<1$上的使 $z=\infty$ 对应到 $w=0$ 的保角映射([15]).

【参】 [1] L. Carleson, Selected problems on exceptional sets, Mimeographed notes, Uppsala, 1961, van Nostrand, 1967; [2] G. Choquet, Theory of capacities Ann. Inst. Fourier, **5**(1955) 131—295; [3] G. Choquet, Potentiels sur un ensemble de capacité nulle, Suites de potentiels, C. R. Acad. Sci. Paris, **244**(1957), 1707—1710; [4] G. Choquet, Forme abstraite du théorème de capacitabilité, Ann. Inst. Fourier, **9**(1959), 83—89; [5] G. Choquet, Diamètre transfini et comparaison de diverses capacités, Sém. Théorie du Potentiel, Paris, **3** (1958—59), no. 4; [6] O. Frostman, Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions, Thèse, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., **3** (1935); [7] B. Fuglede. Une application du théorème du minimax à la théorie du potentiel, Colloque Internat. C. N. R. S. Théorie du Potentiel, Orsay, 1964, exposé no. 8; [8] Г. М. Голузин. Геометрическая. теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952 (中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956); [9] M. Kishi (岸正倫), Capacitability of analytic sets, Nagoya, Math. J., **16** (1960), 91—109; [10] M. Ohtsuka(大津賀信), Capacité d'ensembles de Cantor généralisés, Nagoya math. J., **11** (1957), 151—160; [11] M. Ohtsuka (大津賀信), Capacité des ensembles produits Nagoya Math. J., **12** (1957), 95—130; [12] 大津賀信，関数論特論，現代数学講座，共立出版，1957; [13] G. Pólya-G. Szegö, Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen, J. Reine Angew. Math., **165** (1931), 4—49; [14] G. Pólya G. Szegö, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton, 1951; [15] C. Pommerenke, Über die analytische Kapazität, Arch. Math., **11** (1960), 270—277; [16] C. Pommerenke, Zwei Bemerkungen zur Kapazität ebener Kontinuen, Arch. Math., **12**(1961), 122—128; [17] M. Tsuji (辻正次), Potential theory in modern function theory, Maruzen, 1959; [18] Ch. de la Vallée-Poussin, Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, Ann. Inst. H. Poincaré, **2**(1932), 169—232; [19] N. Wiener, Certain notions in potential theory, J. Math. and Phys., M. I. T., **3** (1924), 24—51; [20] L. Sario-K. Oikawa (及川広太郎), Capacity functions, Springer, 1969.

函数论的零集 [英 function-theoretic null-set 法 ensemble négligeable au sens de la théorie des fonctions 德 funktionentheoretische Nullmenge 俄 нульмножество в смысле теории функций 日 関数論的零集合] **函数论的零集**是指，在复函数论中，除"少许例外"，某个性质成立的定理中的例外集. 今列举其主要的如下. 为简单起见，限于在 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ $(n\geqslant 2)$ 内讨论.

【调和测度为零的集合】 以 χ_E 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 内有界域D的边界 ∂D 上的集合E的定义函数，它的下，上，函数 $\underline{H}_{\chi_E}(P)$, $\overline{H}_{\chi_E}(P)$ (→Dirichlet 问题)分别称为 E (关于 D) 的内，外调和测度(函数). 当二者一致时，称它为**调和测度** (harmonic measure). E的内调和测度为 0 的充分必要条件是，对于D内上方有界的次调和函数† $u(P)$，如果当 P 趋近于 $\partial D-E$ 的任一点时，u 满足 $\limsup u(P)\leqslant 0$，则在D内 $u(P)\leqslant 0$ 恒成立. 由此可以导出以下的唯一性定理：如果 $h(P)$ 在D内有界调和，当 P 趋近于 ∂D 上除内调和测度为 0 的集合外的各点时，$h(P)\to 0$，则 $h\equiv 0$. 其次，E的外调和测度为 0 的充分必要条件是，在D内存在正的上调和函数† $v(P)$，使当 P 趋近于E的任一点时，有 $v(P)\to\infty$. 关于次调和函数和调和函数†在除去调和测度为 0 的集合以外的各个边界点处的极限的存在性，可参看相应这两个函数的条目.

【容量为零的集合】 有种种容量的定义(→容量)，但我们在这里考察对数容量†与下面定义的 α 容量$(\alpha>0)$. 即，对于 $\boldsymbol{R}^n$ 内的非空紧集 K，令 $W(K)=\inf_{\mu}\iint\overline{PQ}^{-\alpha}d\mu(P)d\mu(Q)$，其中 μ 遍历K上的非负单位 Radon 测度†. 令 $C_\alpha(K)=(W(K))^{-1/\alpha}$. 如果 $K=\varnothing$，则令 $C_\alpha(\varnothing)=0$. 对于一般的集合 $E\subset\boldsymbol{R}^n$，它的内容量由 $\sup_{K\subset E}C_\alpha(K)$ 来定义，外容量由包含E的开集的内容量的下确界来定义. 当二者一致时则称这个共同值为E的 **α 容量** (α-capacity)，记作 $C_\alpha(E)$. E 的对数容量则记为 $C_0(E)$. 对

于紧集 K, $C_0(K)=0$ $(n=2)$ 或 Newton 容量† $C_{n-2}(K)(n\geqslant 3)$ 为零的充分必要条件是，对于包含K的任意的有界域 G, K关于$G-K$的调和测度为零．此时，对于$G-K$上有界或 Dirichlet 积分†有限的调和函数，K是可去的．一般地，K对于某个函数族 $\mathfrak{F}$ 为**可去** (removable) 是指，设G为包含K的域，$f\in\mathfrak{F}$ 在$G-K$内有定义，则存在定义于G内的 $g\in\mathfrak{F}$，使在$G-K$内有g等于f. 设K是 $\boldsymbol{R}^2$ 内的紧集，满足 $C_0(K)=0$, G是包含K的域．设 f 是定义于$G-K$上的全纯†函数，对于它K的每个点都是本性奇点†，则在K的每个点处，对于 f 的例外值†的集合的对数容量为零．如果$f(z)$ 在 $|z|<1$ 内为亚纯†，且满足

$$\iint |f'|^2(1+|f|^2)^{-2}(1-|z|)^{\alpha}dxdy<\infty \quad (0\leqslant\alpha<1),$$

则除去 α 容量 ($\alpha=0$ 时为对数容量)为零的集合外，在 $|z|=1$ 上的每个点处，f 存在从角域内趋向时的有限极限．

【Hausdorff 测度】 设 $\alpha>0$, E是 $\boldsymbol{R}^n$ 中给定的集．用可数个直径小于 $\varepsilon>0$ 的球覆盖集合 E，设它们的直径为 $d_1, d_2, \cdots$. 考虑

$$\inf\sum_k d_k^{\alpha},$$

这里 inf 对满足上述条件的一切覆盖来取．当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\inf\sum\limits_k d_k^{\alpha}$ 是递减的，其极限记为 $\Lambda_\alpha(E)$，称为E的 **α 维(Hausdorff)测度**(Hausdorff measure of dimension α)．对于定义于有界域内且满足 α 次 Lipschitz 条件†的调和函数族，$\boldsymbol{R}^n$ 内的紧集K成为可去的充分必要条件是 $\Lambda_{n-2+\alpha}(K)=0$. 又当平面内的紧集$K$的外部$G$构成域时，对于$G$内的解析函数$f(z)$与$q(1\leqslant q<\infty)$，令

$$\|f\|_q=\left(\iint_G |f|^q dxdy\right)^{1/q}.$$

对于 $q=\infty$，令 $\|f\|_\infty=\sup\limits_G|f|$. 将 $\|f\|_q<\infty$ 的 $f\neq 0$ 的全体所成的集合记为 H^q. 设 $1/p+1/q=1$，当 $2<q<\infty$ 时，若 $\Lambda_{2-p}(K)<\infty$ 则 $H^q=\varnothing$，又当 $q=\infty$ 时，若 $\Lambda_1(K)=0$，则 $H^\infty=\varnothing$. 又当且仅当 $C_0(K)=0$ 时，$H^2=\varnothing$，在 $2<q\leqslant\infty$ 的情形，如果 $H^q=\varnothing$，则 $C_{2-p}(K)=0$ ([2]).

【关于函数族的零集】 反之，L. V. Ahlfors-A. Beurling 用函数族来刻划集合的大小([1])．设D为平面域，一般地，$f(z)$ 表示D内的解析函数．分别以 $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ 表示满足以下条件的 $f(z)$ 的全体所成的集合：$|f(z)|\leqslant 1$;

$$\iint_D |f'(z)|^2dxdy\leqslant\pi;$$

$(f(z)-f(z_0))^{-1}$ 取不到的值的集合的面积$\geqslant\pi$. 其中设 z_0 为D内的定点．属于这些函数族的单叶函数†的全体与常数合并而得到的子函数族，分别记为 $\mathfrak{S}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{E}$. 这六个函数族均以 $\mathfrak{F}$ 作为代表记号，如果以

$$\sup\{|f'(z_0)|\,|\,f\in\mathfrak{F}\}$$

来定义 $M_{\mathfrak{F}}=M_{\mathfrak{F}}(z_0;\ D)$，则 $M_{\mathfrak{B}}=M_{\mathfrak{E}}\geqslant M_{\mathfrak{D}}=M_{\mathfrak{S}\mathfrak{E}}\geqslant M_{\mathfrak{S}\mathfrak{B}}=M_{\mathfrak{S}\mathfrak{D}}$ 成立．如果对于点 $z_0\in D$, $M_{\mathfrak{F}}(z_0;\ D)=0$，则对于任意的 $z\in D$，都有 $M_{\mathfrak{F}}(z;\ D)=0$. 又以 $N_{\mathfrak{F}}$ 表示K的外部 K^c 为域，且使 $M_{\mathfrak{F}}(z;K^c)=0$ 的K的全体所成的集合，属于 $N_{\mathfrak{F}}$ 的K称为：**$N_{\mathfrak{F}}$ 类零集** (null set of class $N_{\mathfrak{F}}$)．K对于 $\mathfrak{B}$ 或 $\mathfrak{D}$ 为可去的充分必要条件分别是$K\in N_{\mathfrak{B}}$或$K\in N_{\mathfrak{D}}$. 一般地，

$$\{K\,|\,C_0(K)=0\}\subsetneqq N_{\mathfrak{B}}\subsetneqq N_{\mathfrak{D}}\subsetneqq N_{\mathfrak{S}\mathfrak{B}}.$$

一维测度为零的集合K属于 $N_{\mathfrak{B}}$，而在K是解析曲线弧A的子集的情形，其逆也成立．又 $N_{\mathfrak{D}}=N_{\mathfrak{S}\mathfrak{B}}$ 也成立，$K\in N_{\mathfrak{D}}$ 的充分必要条件是 $C_0(A)=C_0(A-K)$. 如果一个解析函数以 $K\in N_{\mathfrak{B}}$ 的每个点为本性奇点，则在K的每个点处例外值†的集合 (的任意紧子集)属于 $N_{\mathfrak{B}}$. $K\in N_{\mathfrak{D}}$ 的充分必要条件是，或者为 K^c 所一一保角映射†的域的补集的平面测度恒为零，或者 K^c 的单叶解析函数只限于线性分式函数†.

【参】 [1] L. V. Ahlfors-A. Beurling, Conformal invariants and function-theoretic null-sets, Acta Math **83** (1950), 101—129; [2] L. Carleson, Selected problems on exceptional sets, van Nostrand, 1967; [3] 大津賀信，函数論特論，現代数学講座，共立出版，1957; [4] 及川広太郎，函数論的零集合について，数学 7(1955), 161—170.

变分法 [英 calculus of variations 法 calcul des variations 德 Variationsrechnung 俄 вариационное исчисление 日変分法] 【变分法】 产生微分学的一个原因，就是关于函数极值的理论的系统化. 微分学中处理的极值问题主要是几个独立变量的函数的极值问题，但**变分法**（或**变分学**）中处理的极值问题则是以所谓泛函为其考察对象的. **泛函** （英 functional 法 fonctionelle 德 Funktionenfunktion）是由 J. Hadamard 命名的，指由定义于某个域 B 上的函数所构成的一个函数空间 $\{u\}$ 上的实(或复)值函数. 这样的泛函记作 $J[u|B]$ 或简单地记作 $J[u]$. 此时，相当于独立变量的函数 u 称为**变函数**（argument function），属于定义域的变函数也称为**容许函数**（admissible function）.

例如，表示曲线 $y=y(x)$ 的长，曲面 $z=z(x, y)$ 的面积的积分

$$L[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx,$$

$$S[z]=\iint_B\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

等，都是泛函的具体例子. 又一个质点沿连接两点 (x_0, y_0)，(x_1, y_1) $(y_1>y_0)$ 的适当的曲线 $y=y(x)$，在不变的重力作用于 y 轴正方向的情形下，无摩擦地从 (x_0, y_0) 滑动到 (x_1, y_1) 所需的时间，是以

$$(1)\quad J[y]=k\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{(1+y'^2)/(y-y_0)}\,dx \qquad (k=\text{常数})$$

的形式表示的泛函.

变分法的典型问题是取实值的泛函的极值问题，特别是由积分所表示的泛函的极值问题，这些积分的被积函数是由若干独立变量，作为这些变量的函数的变函数，以及变函数的一定阶数的导数所成的已知式；例如以 $F(\cdots)$ 为已给函数的泛函

$$J[u]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,u(x),u'(x),\cdots,u^{(m)}(x))dx,$$

$$J[u,v]=\iint_B F(x,y,u(x,y),u_x,u_y,\cdots,v(x,y),v_x,v_y,\cdots)dxdy$$

的极值问题. 例如，使 (1) 最小的曲线是**最速下降曲线**（curve of steepest descent）.

关于极值问题，随着对应情况，对变函数附加适当的边界条件. 此外，还有**条件变分问题**（conditional problem of variation）. 其典型例子是，在平面上具有给定长度的曲线中，求使得它所包围的域的面积为最大的曲线，即所谓等周问题†. 一般说来，在使另一泛函的值一定的附加条件下，求某一泛函的极值这种类型的问题，也称为**广义等周问题**（generalized isoperimetric problem）. 作为附加条件，还有附加有限条件的情形（**Lagrange 问题**（Lagrange's problem）），或附加由 D. Hilbert 所讨论的微分方程条件的情形.

变分法几乎是与微积分学的诞生同时问世的. 自从 Johann Bernoulli†, Jacob Bernoulli 以及 L. Euler† 等探讨变分法的种种具体问题以来，及至 1760 年，J. L. Lagrange 与力学相联系引进了变分问题的一般处理方法. 于是，以 Euler 命名的方程才开始得到清楚的论述.

【Euler 方程】 现在以最简单的变分问题

$$(2)\quad J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y(x),y'(x))dx=\min$$

为例. 设对变函数 $y(x)$ 再附加边界条件 $y(x_0)=y_0$，$y(x_1)=y_1$. 此时，考察含有在端点处取值为 0 的任意函数 $\eta(x)$ 与参数 ε 的容许函数族 $Y(x;\varepsilon)=y(x)+\varepsilon\eta(x)$. 如果 $y(x)$ 是给出 $J[y]$ 的最小值的函数，则 ε 的函数 $J[Y]$ 对于 $\varepsilon=0$ 就应成为最小. 如果写出条件

$$(\partial J[Y]/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}=0,$$

注意边界条件，就得到

$$0=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\eta+F_{y'}\eta')\,dx=\int_{x_0}^{x_1}\eta\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)dx.$$

利用 $\eta(x)$ 的任意性，根据下面的引理，即得

$$(3)\quad 0=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=F_y-F_{y'x}-y'F_{y'y}-y''F_{y'y'}$$

的结论.

引理：设 $\varphi(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上连续，$\eta(x)$

为在此区间内属于 C^p 类且满足条件

$$\eta(x_0)=\eta'(x_0)=\cdots=\eta^{(q)}(x_0)=0,$$
$$\eta(x_1)=\eta'(x_1)=\cdots$$
$$=\eta^{(q)}(x_1)=0(0\leqslant q\leqslant p)$$

的任意函数,如果对这样的 $\eta(x)$ 恒有

$$\int_{x_0}^{x_1}\eta(x)\varphi(x)dx=0,$$

则 $\varphi(x)=0$. (又这里 C^p 类亦可为 C^∞ 类,但设 $q<\infty$. 如果 η 为 C^∞ 类,则 $q=\infty$ 亦可.)这个引理称为**变分法的基本引理**(fundamental lemma of the calculus of variations). (3) 称为关于极值函数的 **Euler-Lagrange 微分方程**(Euler-Lagrange differential equation)或 **Euler 方程**. 由于这个方程一般为二阶,所以根据边界条件或可决定它的一个解.

上述方程中出现的量

$$[F]_y=F_y-\frac{d}{dx}F_{y'},$$

称为 F 关于 y 的**变分导(函)数**(variational derivative). 又 $\delta y=\eta\varepsilon$ 称为变函数 y 的第一变分,而 $\delta J=(\partial J[Y]/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=0}\varepsilon$ 称为泛函 $J[y]$ 的**第一变分**(first variation). 在不附加 $\eta(x)$ 在端点处取值为 0 的边界条件时,则有关系

$$\delta J=\int_{x_0}^{x_1}[F]_y dx+[F_{y'}\delta_y]_{x_0}^{x_1}.$$

与微分学中通常的极值问题 $f(x_1,\cdots,x_n)=\min$ 相比较,则$[F]_y$和 δJ 分别与 grad$f$, df 相当. 一般地, Euler-Lagrange 微分方程 $[F]_y=0$ 的解称为关于变分问题的**平稳函数**(stationary function),而它的图象称为**平稳曲线**(stationary curve).

至于含有多个变函数的变分问题,只须将关于各个变函数的 Euler-Lagrange 微分方程联立起来即可. 对于含有高阶导数的问题

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(m)})dx=\min,$$

则 Euler-Lagrange 微分方程形如

$$[F]_y=\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^\mu\frac{d^\mu}{dx^\mu}F_{y^{(\mu)}}=0.$$

再者,关于二重积分的变分问题

$$J[u]=\iint_B F(x,y,u,u_x,u_y)\,dxdy=\min,$$
$$u=u(x,y)$$

相应的 Euler-Lagrange 微分方程成为

$$0=[F]_u=F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}.$$

关于广义等周问题,例如,对于 $J[y]=\min$, $K[y]=c$ 这样的问题,加上所谓 **Lagrange 乘数**(Lagrange multiplier)λ, Euler-Lagrange 方程就成为

$$[F+\lambda G]_y=0$$

的形式. 其中 F,G 分别表示 J,K 的被积函数. 这个二阶微分方程的两个积分常数与未定常数 λ,例如可由边界条件

$$y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

与附加条件 $K[y]=c$ 来决定. 例如,对于原来的古典等周问题 $F=y$, $G=\sqrt{1+y'^2}$, 则方程成为 $1-\lambda(y'/\sqrt{1+y'^2})'=0$, 积分后即得 $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda^2$(→等周问题).

此外,除固定端点的边界条件情形外,例如,还出现变函数 $y=y(x)$ 的终点 (x_1,y_1) 总是位于一条曲线 $T(x,y)=0$ 上的所谓可动端点的情形. 此时,对于极值函数,可以导出所谓**横截性**(transversality)**条件**

$$(F-y'F_{y'})T_y-F_{y'}T_x=0,\ x=x_1.$$

【充分条件】 首先仿照微分学的二阶导数引进第二变分,并考察充分条件的是 A. M. Legendre. 就 (2) 进行讨论,则 $y_0(x)$ 使 (2) 取到最小值的必要条件是,

$$F_{y'y'}(x,y_0(x),y_0'(x))\geqslant 0.$$

反之,如果 $F_{y'y'}>0$ 且满足 **Jacobi 条件**(Jacobi's condition),即二阶线性常微分方程

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'y'}\frac{du}{dx}\right)-\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{y'y'}\right)u=0,$$
$$u(x_0)=0$$

的解 $u(x)$ 的大于 x_0 的最小零点(x_0 的**共轭点**(conjugate point))大于区间的右端点 x_1 时,则 $y=y_0(x)$ 给出**弱极小**(weak minimum). 所谓弱极小是指取满足

$$\{|y-y_0|<\varepsilon,\ |y'-y_0'|<\varepsilon\}$$

的函数族作为 y_0 的邻域时的极小。将比较函数的范围扩张为 $\{|y-y_0|<\varepsilon\}$ 而给出强极小的充分条件的是 K. Weierstrass. 在此以前所得到的结果通常称为**古典变分法**（classical theories in the calculus of variations）.

对于变分问题（2），如果对于 xy 平面上某个域的每个点，属于泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx$$

的单参数平稳曲线族的曲线，只有一条通过该点，则称这个域为平稳曲线的**场**（field）. 设在这样的平稳曲线族 $y=\varphi(x;\alpha)$ 中，通过点 (x,y) 的曲线的参数值为 $\alpha=\alpha(x,y)$，则该点处的斜率 $p(x,y)=[\varphi'(x;\alpha)]_{\alpha=\alpha(x,y)}$ 称为在该点处场的斜率，而把 (x,y) 看作变量时，就称 $p(x,y)$ 为场的**斜率函数**（slope function）. 此时，曲线积分

$$\begin{aligned}I_C&=I[y]\\&=\int_C(F(x,y,p)-(y'-p)F_{y'}(x,y,p))dx\end{aligned}$$

的值只由曲线 C 的两个端点来决定. I_C 称为 **Hilbert 不变积分**（Hilbert's invariant integral）. 利用这个性质，一般地，如果以 J_C 表示泛函 $J[y]$ 对于表示曲线 C 的函数 $y=y(x)$ 的值，则对于通过嵌入平稳曲线 C_0 的场的任意比较曲线 C，可以导出形如

$$0<\Delta J=J_C-J_{C_0}=\int_C\mathscr{E}(x,y;p,y')dx$$

的关系. 其中

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(x,y;p,y')&=F(x,y,y')\\&\quad-F(x,y,p)-(y'-p)F_{y'}(x,y,p)\end{aligned}$$

是由 Weierstrass 所引进的**$\mathscr{E}$函数**（$\mathscr{E}$-function）. C_0 给出 $J[y]$ 的极小值的充分条件是，对于场的所有点 (x,y) 与所有的值 y'，有 $\mathscr{E}\geqslant 0$.

【最优控制】 给定包含参数 $u_1,\cdots,u_k$ 的微分方程组

(4) $dx_i/dt=f_i(x_1,\cdots,x_n;u_1,\cdots,u_k)$,
$(u_1,\cdots,u_k)\in\Omega;\ x_i(t_0)=x_i^0,\ i=1,\cdots,n$,

一般地说，所谓**最优控制**（optimal control）问题，就是要确定 $u_i=u_i(t)\ (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$，使泛函

$$J[u]=\int_{t_0}^{t_1}F(x_1,\cdots,x_n;u_1,\cdots,u_k)dt$$

的值为最小，其中 $x_i(t)$ 是（4）的解，并且把它作为 $u_1,\cdots,u_k$ 和 t 的函数. 这是一种附加条件的变分问题，但是由于 u 的存在域受到限制，不等式附有约束条件以及 u 也可以不连续等原因，所以在许多情形下只用古典变分法已不能解决问题（→控制论）.

【变分法的直接法】 如同在数学物理中导出变分原理[†]那样，讨论使之平稳的泛函 $J[u]$ 与对于 $J[u]$ 的 Euler 方程之间的形式的对应，也是变分法的主要课题之一，但与此相对照，也可以不诉诸 Euler 方程，而立足于平稳性本身去寻求平稳函数 u_0，这就是变分法的称为**直接法**（direct method）的研究方法. 直接法从解的存在性、唯一性等理论的观点看来也在起着重要的作用，而它同时作为近似解法或数值解法的手段也具有重要的意义. 即使与变分法无关地提出的微分方程问题，如果能构造以所提微分方程为 Euler 方程的泛函，则根据直接法求解也是可能的.

设 D 为 m 维空间的有界域，$f\in L_2(D)$ 为给定的实值函数. 考虑使泛函

$$J[u]=\int_D|\text{grad }u|^2dx-2\int_D fu dx$$

为最小的变分问题. 这里作为容许函数的集合，是取函数空间 $C_0^\infty(D)$ 关于范数

$$N(u)=\left(\int_D|\text{grad }u|^2dx+\int_D u^2dx\right)^{1/2}$$

加以完备化而得到的 Hilbert 空间[†]，我们以 $\tilde{A}_J$ 表示这个集合. 这时，应用关于 Hilbert 空间的 F. Riesz（表示）定理[†]等，可以证明，在 $\tilde{A}_J$ 中最小值 l 存在，且此最小值可唯一地由某个 $u_0\in\tilde{A}_J$ 来实现. 由于函数 u_0 属于 $\tilde{A}_J$，可以证明，在某种一般的意义下，它满足边界条件

(5) $$u|_{\partial D}=0;$$

另一方面，由于 $J[u_0]\leqslant J[u_0+\varphi]$ 对于任意的 $\varphi\in C_0^\infty(D)$ 成立，可以证明，在关于广义函数[†]微分的意义下，它在 D 内满足方程

(6) $$-\Delta u=f.$$

即平稳函数 u_0 就是由（5），（6）所表述的 Pois-

son 方程†的古典边值问题的广义解†(弱解). 作为容许函数的集合, 在采用满足

$$\widetilde{A}_J \supset A_J \supset C_0^\infty(D)$$

的任意函数空间 A_J 时, 上述 $l = J[u_0]$ 是 J 在 A_J 内的下确界. 此时, 如果 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是从 A_J 中取的**最小序列** (minimizing sequence), 即若函数序列

$u_n \in A_J, n=1,2,\cdots;\ J[u_n] \to l(n\to\infty)$, 则 u_n 在

(7) $\qquad N(u_n - u_0) \to 0(n \to \infty)$

的意义下收敛于 u_0. 换句话说, 边界值问题的广义解 u_0, 可以由在边界上取值为 0 的充分光滑的函数所作的最小序列的极限来构成. 关于作为平稳函数所得到的广义解 u_0, 在 f, ∂D 适当光滑的假定下, 就是边界值问题的古典解这一事实的证明方面, 已经建立了证明广义解的正则性的标准的论证方法.

上述取最小序列的极限以求解边界值问题的方法, 是关于古典 Dirichlet 问题的由 B. Riemann 所提出而由 D. Hilbert 等所完成的做法, 它成为关于边界值问题的最近的 Hilbert 空间论的研究方法的先导. 关于自伴的边界值问题, 也可以把上面例子中所述的内容几乎原封不动地推广到高阶和变系数的情形. 又如果引用辅助的论述, 则它在诸如关于复函数论中各种映射函数的构成, 第二类积分方程的解法等方面, 也得到了广泛的应用([3],[4],[7],[8]).

用 Hilbert 空间的自伴算子† H, 由

(8) $\qquad Hu = \lambda u,\ \ u \neq 0$

所表示的特征值问题, 也可以变换成为关于 Rayleigh 商†

(9) $\qquad R[u] = (Hu,u)/\|u\|^2$

的变分问题(→特征值的数值计算法).

【基于直接法的微分方程解法】 根据收敛性 (7), 可以把最小序列看作边界值问题的解或平稳函数 u_0 的近似序列. 今设以 n 个分量的向量 $c = (c_1, \cdots, c_n)$ 为参数的函数

(10) $\quad u_n = u_n(x;c) = u_n(x;c_1,c_2,\cdots,c_n)$,

对于任意 c 是容许函数. 如果 c^0 为使

$$J[u_n(\cdot\,;c)] = F(c)(J[u_n(\cdot\,;c)]$$

(系由这些 u_n 代入 J 而得)为最小的 c 值, 则可以把 $u_n(\cdot\,;c^0)$ 看作在函数族 $\{u_n(\cdot\,;c)\}$ 中最近似于 u_0 的函数. 一般地, c^0 可由解方程组

(11) $\partial J[u_n(\cdot\,;c)]/\partial c_j = 0, j = 1,2,\cdots,n$

得到. 关于 (10) 中的 u_n, 往往取所谓线性容许函数. 即如就上述的例来说, 预先确定在 $\widetilde{A}_J$ 中完全†的独立函数系 $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, 令

(12) $\qquad u_n = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n$.

由 (11) 来确定 (12) 中的 c, 从而构成最小序列, 这样的方法称为 **Ritz 方法** (Ritz's method), 而 φ_k 称为关于 Ritz 方法的坐标函数. 关于 Ritz 方法的近似收敛速度以及误差估计, 除有 E. Trefftz 的考察之外, 俄国学派所作的研究颇多([3],[5]). 关于最小序列的其他构成方法, 在[3]中有详细的论述. 又关于与 Галёркин 方法的联系→偏微分方程的数值解法.

适用于特征值问题的 Ritz 方法称为 **Rayleigh-Ritz 方法** (Rayleigh-Ritz method) ([7]). 此时, 由于 Rayleigh 商 $R[u]$ 的平稳值本身就是特征值, 特征值的近似的精确度, 比起特征函数的近似程度要好得多, 所以它作为特征值的近似计算法是方便的.

此外, 作为以直接方法为基础的近似解法的一个分支, 有给出与边界值问题的解 u_0 相联系的某种量的上、下界的理论([7],[8]).

【参】 [1] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Interscience, I. 1953, II. 1962 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, 科学出版社, 卷 I, 1958, 卷 II, 1977); [2] P. Funk, Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik, Springer, 1962; [3] Л. В. Канторович-В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, 1952 (中译本: Л. В. 康脱洛维奇, В. И. 克雷洛夫, 高等分析近似方法, 上册, 科学出版社, 1966); [4] С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, Гостехиздат 1957 (中译本: С. Г. 米赫林, 数学物理中的直接方法, 高等教育出版社, 1957); [5] С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952 (中译本: С. Г. 米赫林, 二次泛函的极小问题, 科学出版社, 1964); [6] С. Л. Соболев, некоторые применения функционального анализа в математической физике, Издат. Ленинграл. Гос. Унив., 1950 (中译本: С. Л. 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959); [7] 寺沢寛一編, 自然科学者のための数学概論(応用編), 岩波, 1960; [8] 吉田耕作-加藤敏夫, 応用数学 I, 裳華房, 1961; [9] O. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, Teubner, 1909; [10] И. М. Гельфанд-С. В. Фомин, Вариационное исчисление, физматгиз, 1961

(英译本: Calculus of variations, Prentice-Hall, 1963); [11] 小松勇作, 变分学, 東海書房, 1947; [12] 南雲道夫, 变分学, 朝倉, 1951.

Plateau 问题 [英 Plateau's problem 法 problème de Plateau 德 Plateausches Problem 俄 вопрос Плато 日 プラトー問題] 在空间内以给定的闭曲线为边缘而张肥皂膜时，膜因表面张力而呈现使表面积为最小的形状. 这种表面积最小的曲面就是所谓极小曲面. 这个实验是为了实现极小曲面而由比利时自然科学家 J. A. Plateau (1873) 所采用的方法. 因此,求空间内以所给闭曲线为边界的极小曲面的问题，称为 Plateau 问题. 这个问题可用变分法†来解.

设 Γ 为 (x, y, z) 空间中给定的简单闭曲线，且它在 xy 平面上的射影 C 仍为简单闭曲线. 设 C 所包围的域为 D. 考虑具有共同边界 Γ 的曲面 $z = z(x,y)$, 在关于函数 $z(x,y)$ 光滑性的适当假定下,所提问题就是使泛函

$$J[z] = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy;$$
$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

在 $z = z(x, y)$ 以 Γ 为边界的条件下成为最小. 关于泛函 $J[z]$ 的 Euler-Lagrange 微分方程†是

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = 0,$$

即椭圆型二阶拟线性偏微分方程

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$
$$r = \partial^2 z/\partial x^2 \text{ 等.}$$

这个方程的几何意义,由 J. B. M. C. Meusnier (1776) 给出.

为了推广这个问题，用参数 (u,v) 的向量 $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ 表示曲面,则其第一基本形式成为 $d\mathfrak{x}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, 应用单位法向量 $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(u,v)$, 则得第二基本形式

$$-d\mathfrak{x}d\mathfrak{n} = Ldu^2 + 2M\,dudv + Ndv^2.$$

从而,如果令面积泛函

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

由于法线方向的无穷小变位而产生的第一变分为 0,则 Euler-Lagrange 微分方程取如下形式:

$$2H = (NE - 2MF + LG)/(EG - F^2) = 0.$$

其中 $H = (R_1^{-1} + R_2^{-1})/2$ 为曲面的平均曲率† (R_1, R_2 为主曲率半径†). 由于 Beltrami 第二微分形式满足 $\Delta_2\mathfrak{x} = H\mathfrak{n}$, 特别是,如果选取使 $E = G$, $F = 0$ 的**等温参数** (isothermal parameter) u, v, 则关于极小曲面的条件就成为 $\Delta\mathfrak{x} = 0$ (Δ 为 Laplace 算子); 即表示极小曲面的向量 $\mathfrak{x}(u,v)$ 为调和 (即向量 $\mathfrak{x}(u, v)$ 的分量是 u, v 的调和函数). 如设 $\mathfrak{x}(u,v)$ 的共轭调和向量为 $\mathfrak{y}(u,v)$, 则等温性的条件成为解析向量

$$\mathfrak{F}(w) = \mathfrak{x}(u,v) + i\mathfrak{y}(u,v)$$
$$(w = u + iv, i = \sqrt{-1})$$

满足 $\mathfrak{F}'(w)^2 = 0$ (K. Weierstrass). 一般地,称平均曲率处处为 0 的曲面为**极小曲面** (minimal surface). 确定以空间内给定的闭曲线为边界的极小曲面的问题,称为 **Plateau 问题**. 用这样的形式阐述,即使空间为 m 维的一般情形,也不会出现实质性的困难.

【解的存在性】 把 Plateau 问题解的存在性，当作所举椭圆型偏微分方程的第一边值问题†来加以探讨的是 С. Н. Бернштейн (1910). A. Haar (1927) 则将泛函 $J[z]$ 的最小问题用变分法的直接法†加以处理. 然而,这些都只限于 D 为凸域的情形. 在此以前, B. Riemann, Weierstrass, H. A. Schwarz 等把所给空间曲线 Γ 为多角形的情形，与关于二阶线性常微分方程的单值群†相联系而进行了研究,继承这项工作的 R. Garnier (1928) 又用极限过程研究了 Γ 为具有有界曲率的简单闭曲线时解的存在性. 然而,在 Γ 为可求长的情形,最初用极限过程证明了解存在的是 T. Radó (1930). 他的研究更进而达到了 Γ 是有限面积曲面的边界的情形. 另一方面, J. Douglas (1931) 代替面积泛函而引进了关于边界值的新的泛函，从而使解的存在得到完全的解决. R. Courant (1937) 把 Plateau 问题与 Dirichlet 问题†相联系而讨论了解的存在性([2]).

现在，讨论 Plateau 问题解的存在性的方法,大体可以分为由 Radó, Courant, Douglas 所

代表的以下三种:

1) 面积泛函. 这是直接使**面积泛函**(areal functional) $\iint\sqrt{EG-F^2}\,dudv$ 为最小的方法. 此时,变分方程成为 $H=0$.

2) Dirichlet 泛函. 对于纯量函数 $f(u,v)$,它的 **Dirichlet 泛函** (Dirichlet's functional)定义为 $D[f]=\iint(f_u^2+f_v^2)dudv$. 对于以 $f_j(u,v)$ $(j=1,\cdots,m)$ 为分量的 m 维向量函数 $\mathfrak{f}(u,v)$,它的 Dirichlet 泛函定义为 $D[\mathfrak{f}]=\sum_{j=1}^{m}D[f_j]$.

这个方法是从使 $D[\mathfrak{f}]$ 为最小的变分问题出发,探讨 Plateau 问题解的存在性. 使 $D[\mathfrak{f}]$ 为最小的问题的 Euler-Lagrange 微分方程是 $\Delta\mathfrak{f}=0$.

3) Douglas 泛函. 解析向量 $\mathfrak{F}(w)$ 可以用它的实部的边界值来表示. 例如,如果变量域是单位圆 $|w|<1$,则可以利用具有边界值 $\mathfrak{h}(\theta)(w=e^{i\theta})$ 的 Poisson 积分公式[†]

$$\mathfrak{F}(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathfrak{h}(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}\,d\theta+iI_m\mathfrak{F}(w).$$

又对于固定的边界值,可以证明,使 Dirichlet 积分为最小的向量函数是调和的. 基于这些事实,Douglas 在变函数 $\mathfrak{h}$ 为调和的情形,把 Dirichlet 泛函转化为关于边界值的泛函. 即从 **Douglas 泛函** (Douglas'functional)

$$A[\mathfrak{h}]=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(\mathfrak{h}(\theta)-\mathfrak{h}(\varphi))^2}{4\sin^2(\theta-\varphi)/2}\,d\theta d\varphi$$

的最小问题出发,完满地证明了 Plateau 问题的解是存在的.

以上所述是所给边界只是一条简单闭曲线的情形. 然而, Douglas, Courant 等揭示了,在有限条边界曲线的情形,又当指定了作为曲面的拓扑结构的亏格[†]以及可否定向时,推广的 Plateau 问题的解是存在的. 还可推广到边界不是固定的曲线而仅仅位于已给流形上的情形.

在 $m=2$ 的情形, Plateau 问题与保角映射之间,有一个值得注意的关系. 即关于 Jordan 域的 Plateau 问题解的存在性的证明,蕴涵 Riemann 映射定理[†]连同 W. F. Osgood 和 C. Carathéodory 关于边界对应的结果(→保角映射).

【新的进展】 在 Plateau 问题研究的最近文献中,涌现出以下值得注意的结果. 其中之一与 Douglas (1939) 关于解曲面存在的最后结果有关. 确定关于有限条 Jordan 曲线的 Plateau 问题的 Douglas 解的二维有边流形到 $\boldsymbol{R}^n$ 内的映射,可能除去使它不成为浸入的孤立点外,是最小浸入. 这些除外的点称为支点. R. Osserman (1970) 证明,对于定义了具有一个支点 $p\in M$ 的广义极小曲面的映射 $f:M\to\boldsymbol{R}^3$,存在映射 $g:M\to\boldsymbol{R}^3$,使在 p 的任意的邻域之外,它与 f 相同,而且定义了一张面积比 f 所定义的曲面的面积更小的曲面. 这个结果保证了,当 $n=3$,由 Douglas 定理的映射给出的解没有真支点. Osserman 也给出了 $\boldsymbol{R}^n(n>3)$ 中具有真支点的广义极小曲面的例,并且与其学生共同证明了一条提供解曲面只有真支点的充分条件的定理. 与此相关,我们也要提到 R. D. Gulliver (1973) 在研究关于具有常平均曲率的曲面的类似问题时所得的结果.

与 Plateau 问题有关的进一步的进展出现在 F. R. Reifenberg (1960) 等人的论著之中,他们用测度论的方法,在不是作为参数化的流形,而是作为 Euclid 空间的子集的适当意义下,求出最小测度的集合. 用这样的观点对 Plateau 问题解的存在性进行探讨的,还有 H. Federer (1969) 等人.

【参】 [1] T. Radó, On the problem of Plateau, Erg. Math., Springer, 1933; [2] R. Courant, Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience, 1950; [3] J. Douglas, Minimal surfaces of higher topological structure, Ann. of Math., **40**(1939), 205—298; [4] H. Federer, Geometric measure theory, Springer, 1969; [5] R. Osserman, A Proof of the regularity every where of the classical solution to plateau's problem, Ann. of Math., **91**(1970), 550—569.

等周问题 [英 isoperimetric problem 法 problème isopérimétrique 德 isoperimetrische Aufgabe 俄 изопериметрическая задача 日 等周問題]

【古典等周问题】 二曲线在它们的周长相等时称为等周. 在给定长 L 的 Jordan 曲线[†] J 中,求所围面积为最大的曲线,这就是古典**等周问题**,

亦称**特殊等周问题**（special isoperimetric problem）或 **Dido 问题**（Dido's problem）等．这个问题的解答是圆周．对应于三维空间，问题的解答是球面．也就是说，在具有给定的表面积的闭曲面之中，球有最大的体积．把它推广为变分法†问题，"在积分值$\int_C G(x,y,y')dx =$ 常数的条件下，求使泛函$\int_C F(x,y,y')dx$ 为最大的曲线 C：$y = y(x)$" 这一条件变分问题，有时也称为**广义等周问题**（generalized isoperimetric problem）.

古典的等周问题，除根据变分法外，也可以从图形的各种量之间的不等式来证明．例如，关于 Jordan 曲线 J 所围的面积 F 和它的周长 L，恒有

(1) $$L^2 - 4\pi F \geqslant 0,$$

而等号则仅限于圆的情形．这就是古典的**等周不等式**（isoperimetric inequality）．作为(1)的精确化，如果令内接于 J 的最大圆与外切于 J 的最小圆的半径分别为 r 与 R，则

$$L^2 - 4\pi F \geqslant (L - 2\pi r)^2,$$
$$L^2 - 4\pi F \geqslant (2\pi R - L)^2,$$
$$L^2 - 4\pi F \geqslant \pi^2(R - r)^2$$

成立（T. Bonnesen, 1921)，它们也给出等周问题的解．又关于半径为 a 的球面上的 J，

$$L^2 - 4\pi F + F^2a^{-2}$$
$$\geqslant 8\pi a^2 \sin(R - r)/4a(1 + 2\pi)$$

成立（F. Bernstein, 1905)．关于具有负曲率 $-1/a^2$ 的常曲率曲面上的 J，则

$$L^2 - 4\pi F - F^2a^{-2} \geqslant$$
$$a^2(4\pi + Fa^{-2})^2(\tanh R/2a - \tanh r/2a)^2/4$$

成立（L. A. Santaló [2]）．可见在这样的非 Euclid 平面上，等周问题的解仍为圆周.

在三维情形，问题变难，但对于卵形面† J，如令表面积为 S，内部的体积为 V，则

$$S^3 - 36\pi V^2 \geqslant 0,$$

等号的成立限于 J 为球面的情形.

【关于特征值的等周不等式】 近年来，"等周不等式"一语已从古典的意义得到了很大的推广，它包括了依赖于图形的形状和大小的一定的几何或物理量之间的不等式，例如，关于图形的边值问题的特征值†之间的不等式关系.

有关这种"等周不等式"的最早的问题，是关于面积为 F 的域 D 的膜振动方程 $\Delta u + \lambda u = 0$（在边界 J 上 $u = 0$），其第一特征值 λ_1 必当 D 为圆时为最小的 Lord Rayleigh 猜想(1877)．这个猜想是正确的．实际上，在 1923 年 Faber 和 E. Krahn各自独立地证明了

(2) $$\lambda_1 \geqslant (\pi/F)j$$

（$j = 2.4048\cdots$ 为 Bessel 函数† $J_0(x)$ 的最小的正零点)，且(2)中的等号仅在圆的情形成立．又关于第二特征值 λ_2，圆并不给出最小值．洪妊植证明，$\lambda_2 \geqslant (2\pi/F)j^2$，当 D 接近于由相切的两个等圆构成的图形时，λ_2 渐近于它的下确界（[4])．关于第 n 个特征值 λ_n，用使相应的特征函数等于零的曲线把 D 分割成为 $s(\leqslant n)$ 个域时，就有 $\lambda_n \geqslant (s\pi/F)j^2$．对于诸如 $\partial u/\partial n = 0$ 的其他边界条件以及诸如 $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$ 的其他方程，已有很多的研究.

在此种等周不等式的研究中，有效地使用着 J. Steiner 的"对称化"方法．关于直线 l 的 Steiner **对称化**（symmetrization）就是把平面域 P 变为另一平面域 Q，Q 的特征如下：Q 关于 l 对称，与 l 垂直的任一直线，只要和 P, Q 之一相交，就必和另一个相交，且两条截线段具有相同的长度，Q 的截线段为 l 所平分．在高维情形，取 l 为超平面亦可进行同样的操作．Q 与 P 为等积，其周长(或表面积)并不比 P 的为大．这一性质在古典的等周问题的证明中，为 J. Steiner 所首次利用(1838)，以后，G. Pólya-G. Szegö 发现通过对称化容量并不增加(1945)．利用这个性质，各种特征值的等周不等式以及特征值的估计问题都统一地得到了解决.

【参】 关于古典等周问题，[1] W. Blaschke, Kreis und Kugel, Verlag von Veit, 1916 (Chelsea, 1949); [2] L. A. Santaló, La desigualdad isoperimetrica sobre superificies de curvatura constante negativa, Rev. Univ. Tucumán, **3** (1942), 243—259. 关于特征值的等周不等式，[3] G. Pólya-G. Szegö, Isoperimetric inequalities in mathematical physics, Princeton Univ., Press, 1951; [4] I. S. Hong (洪妊植), On an inequality concerning the eigenvalue problem of membrane, Kôdai Math. Sem. Rep., **4** (1954), 113—114; [5] 久保忠雄，対称化とその応用，数学，**9**(1957)，45—55.

十一、 复 变 函 数

全纯函数 [英 regular function, holomorphic function 法 fonction holomorphe 德 reguläre Funktion 俄 регулярная функция, голоморфная функция 日 正则関数] 【复函数的微分法】设 $f(z)$ 是在复平面†上的开集D内有定义并取复数值的函数. $f(z)$ 在 $z \in D$ 处**可微**(differentiable) 是指: 当复数 h (以任意方式) 趋近于 0 时,

(1) $\lim\limits_{h\to 0}(f(z+h)-f(z))/h=f'(z)$

存在且有限. 我们称 $f'(z)$ 是 $f(z)$ 在 z 处的**导数** (derivative). 虽然这是把一个实变量情形的可微性的定义形式地推广到复变量的情形(→微分学),但是因为在(1)中 $z+h$ 可以是 z 的二维邻域内任意的点, 这个条件比实函数情形的可微性强得多,所以由此能推导出许多结果. 特别是, 若 $f'(z)\neq 0$, 如果取 z 的邻域内的两点 $z+h$ 和 $z+k$, 则由(1)得到

$$(f(z+k)-f(z))/(f(z+h)-f(z))\doteqdot k/h,$$

因此以 z, $z+h$, $z+k$ 为顶点的三角形在映射 f 下的象, 近似地与原三角形同向相似. 从而这个映射是保角映射†.

当 $f(z)$ 在开集D的每个点处都可微时, 就称 $f(z)$ 在D内是**全纯的** (holomorphic) 或**正则的** (regular), 或称 $f(z)$ 是 D 上的**全纯函数**. (关于多复变量复值函数的全纯性的定义及其各种性质 → 多变量解析函数 [可微性].)

$f(z)$ 在不一定是开集的非空集合 E(E 也可以由一点构成) 上全纯是指, $f(z)$ 在包含 E 的某个开集内有定义且在其内全纯. 但是也有人把在一点 p 处可微称为"在 p 处全纯". 从实函数的可微性能形式地推出的许多结果, 对于全纯函数也成立. 例如, 在一点处全纯的函数在该点连续. 在一个域D内全纯的函数族形成一个环†.

对于在开集 D 内定义的函数 $f=u+iv$ ($u=\Re f, v=\Im f$), 下面的条件 1)—4) 是互相等价的: 1) f 在D内全纯. 2) $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在D的每个点 $z=x+iy$ 处是完全可微的†, 并且满足 **Cauchy-Riemann 微分方程** (Cauchy-Riemann differential equation)

$$\partial u/\partial x=\partial v/\partial y,\quad \partial u/\partial y=-\partial v/\partial x.$$

3) 在D的每个点 a 的一个邻域内, f 可用幂级数† $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 表示. 这时也常称作"$f(z)$ 在D内是**解析的** (analytic)" (→ 解析函数). 4) 当D内的某可求长 Jordan 曲线† C 及其内部包含于D内时, $\int_C f(z)dz=0$. 称从 1) 推出 4) 的命题为 **Cauchy 积分定理** (Cauchy's integral theorem), 称从 4) 推出 1) 的命题为 **Morera定理**.

2) 中的完全可微分性, 可由假定 u, v 对 x, y 的偏导数都存在且连续导出; 关于放宽偏导函数的连续性的限制, 有下面的 **Looman-Меньшов 定理**: 若 u, v 在域D内连续, 最多除去D的可数个点外, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial y$ 存在, 且在D内除去二维测度†为零的集合外 Cauchy-Riemann 微分方程成立, 则 $u+iv$ 在D内全纯. Д. Е. Меньшов 推广了这个定理, 并导出了使全纯性成立的各种条件. 其中有代表性的是, 若 f 是给出D的一个拓扑映射†的函数, 且除去D的可数个点外, 这个映射是保角的, 也即 $\lim\limits_{h\to 0}\arg((f(z+h)-f(z))/h)$存在, 则 f 在D内全纯.

【Cauchy 积分定理】 **Cauchy 积分定理**也可陈述如下: 当 $f(z)$ 是单连通†域D内的全纯函数时, 对D内任意的(可求长的)闭曲线 C,

等式$\int_C f(z)dz=0$ 恒成立；从而当积分路径限于D内时，积分$\int_\alpha^\beta f(z)dz(\alpha,\beta\in D)$ 由α和β唯一确定．A. L. Cauchy 开始证明积分定理时，还假定了$f(z)$在D内具有连续的导函数$f'(z)$．E.Goursat在把"全纯"一词仅理解为"$f'(z)$存在"这个意义的情形下，证明了该定理也成立．事实上，基于后述的积分公式，从$f'(z)$在域内的存在性，可以推出$f'(z)$的连续性．有时也把这一命题特别地称为 **Goursat 定理**．设可求长的 Jordan 曲线 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 中，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 在C的内部，而其中任意两个都互相在外部．若$f(z)$在以这$n+1$条曲线为边界的域D内全纯，在$D\cup C\cup C_1\cup\cdots\cup C_n=\bar{D}$上连续，则有

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz+\cdots+\int_{C_n} f(z)dz.$$

这里曲线积分是顺**正向**（positive direction）取的．C的正向是指它的这样一个方向，使当a是C的内部的一个点时，有$\int_C \frac{dz}{z-a}=2\pi i$．以下，如事先没有特别说明，则沿闭曲线的线积分总是顺正向取的．对于只要求$f(z)$在边界上连续这个条件的 Cauchy 积分定理，往往特别称它为**较强形式的 Cauchy 积分定理**（stronger form of Cauchy's integral theorem）．

在相同的假定下，当$z\in D$时，**Cauchy 积分公式**（Cauchy's integral formula）

$$(2)\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\cdots-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

成立．这个积分公式不外乎是用$f(z)$在域D的边界上的值来表示$f(z)$在D内的点z处的值．$f(z)$能被这样的积分公式表示，也是f是全纯函数的一个充分必要条件．在$n=0$的情形，积分公式就成为

$$(3)\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

特别在C是圆周$|z|=R$，也即D是圆盘$|z|<R$的情形，把它变形，即可得到 **Poisson 积分公式**（Poisson's integral formula）

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi})\times\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}d\varphi,$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re f(Re^{i\varphi})\times\frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z}d\varphi+i\Im f(0),$$

$$z=re^{i\theta},\quad 0\leqslant r<R.$$

这里第一个公式对$f(z)$是调和函数[†]的情形也成立．如果D是圆环$0<r<|z|<R$，则下面的 **Villat 积分公式**（Villat's integral formula）成立：

$$f(z)=\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}(\Re f(Re^{i\varphi}))\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi i}\log\frac{z}{R}-\frac{\omega_1}{\pi}\varphi\right)d\varphi-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}(\Re f(re^{i\varphi}))\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi i}\log\frac{z}{R}-\frac{\omega_1}{\pi}\varphi\right)d\varphi+i\Im f(0).$$

这里$\zeta(u)$是 Weierstrass ζ函数[†]，$\zeta_3(u)$是由$\zeta_3(u)=\sigma_3'(u)/\sigma_3(u)$所定义的函数，其"半周期"$\omega_1$，$\omega_3$由条件

$$r/R=\exp(-\pi\omega_3/\omega_1 i),\quad \omega_1>0,\quad \omega_3/i>0$$

确定．

还可以放宽 Morera 定理的假定如下：设$f(z)$在域D内连续，C是D内的矩形，它的边平行于坐标轴且它的内部只含有D的点，如果对D内满足上述条件的任意的矩形C，都有$\int_C f(z)dz=0$，则$f(z)$在D内全纯．在上面的陈述中，取C为任意的圆，也得到同样的结论．

【零点】 若全纯函数$f(z)$不恒等于零，而$f(a)=0$，则a是孤立零点，且使

$$(4)\quad f(z)=(z-a)^k g(z),\quad g(a)\neq 0$$

的正整数 k 是唯一确定的. 称 k 为**零点** (zero point) a 的**阶** (order), 这时也称 a 为 **k 阶零点** (zero point of k-th order). (4) 意味着 $f(z)$ 在点 a 处的 Taylor 级数† 从 $c_k(z-a)^k$ 这一项开始. 当 $f(a)=\gamma$, 而 $f(z)-\gamma$ 以 $z=a$ 为 k 阶零点时, 称 a 为 **k 阶 γ 点** (γ-point of k-th order), 可以把它看作 $f(z)$ 在 a 处取 γ 值 k 次.

对于在无穷远点†的一个邻域内有定义的函数 $f(z)$, 令 $1/z=w$, 设 $f(1/w)=g(w)$ ($f(\infty)=g(0)$), 则 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 处的全纯性和阶数等, 由 $g(w)$ 在 $w=0$ 处的相应性态来定义.

【孤立奇点】 复函数 $f(z)$ 的全纯性被破坏的点一般称为**奇点** (singular point, singularity). 当 $f(z)$ 在 $D=\{z\mid 0<|z-a|<R\}$ 内 ($a=\infty$ 时在 $\{z\mid R^{-1}<|z|<+\infty\}$ 内) 单值全纯, 而在 $D\cup\{a\}$ 内未必全纯时, 称 a 为 $f(z)$ 的**孤立奇点** (isolated singularity). 使用局部典范参数† $t=z-a$ ($a=\infty$ 时 $t=z^{-1}$), $f(z)$ 在 $0<|t|<R$ 内就能展开为 Laurent 级数†

$$(5)\qquad \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n t^n+\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

称它为 $f(z)$ 的 **Laurent 展开式** (Laurent expansion). (5) 的第二项是普通的幂级数†, 称它为 $f(z)$ 的**全纯部分** (holomorphic part). 第一项是没有常数项的 $1/t$ 的幂级数, 称它为 $f(z)$ 在 a 处的**奇异部分** (singular part), 或奇点的 (或在 a 处 Laurent 展开式的) **主要部分** (principal part).

若 $\lim_{t\to 0} tf(z)=0$, 则 (5) 没有奇异部分, 而且当 $t\to 0$ ($z\to a$) 时 $f(z)$ 的极限存在并等于 c_0. 如果定义 $f(a)=c_0$, 则 $f(z)$ 在 $D\cup\{a\}$ 内就成为全纯的. 此时称 a 为**可去奇点** (removable singularity). 特别若 $f(z)$ 在 a 的一个邻域内有界, 则 $tf(z)\to 0$, 所以 a 是可去的 (**Riemann 定理**). 在分析学中, 对于可去奇点, 习惯上总是象上面那样预先除去奇异性.

在实际上存在奇异部分的情形, 当它是有限多项时称 a 为**极点** (pole), 当它是无穷多项时称 a 为**本性奇点** (essential singularity). 如果 a 是极点, 则在 a 的一个邻域内, $f(z)$ 可用 Laurent 级数 $\sum_{n=-k}^{\infty} c_n t^n$ ($c_{-k}\neq 0$) 表示, 而当 $z\to a$ 时, $f(z)\to\infty$. k 称为极点 a 的**阶** (order). 因为这时如果换 k 为 $-k$, 形如 (4) 的表达式成立, 所以有时也称它为 **$-k$ 阶零点**. 如果 a 是 $f(z)$ 的本性奇点, 则对任意的复数 c, 存在收敛到 a 的序列 z_n, 使 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=c$ (**Casorati-Weierstrass 定理**, 也简称为 **Weierstrass 定理**). 更精确地描述函数 $f(z)$ 在它的本性奇点邻近的性态的, 是 Picard 定理†. 换言之, 在 a 处的内部聚值集† S_a 为:

可去 ⟷ 有限的一点

极点 ⟷ 无穷远一点

本性奇点 ⟷ 整个复数平面.

【残数】 称 Laurent 展开式 (5) 中 $(z-a)^{-1}$ 的系数 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 a 处的**残数**或**留数** (residue), 以 $\mathrm{Res}[f]_a$, $R(a;f)$ 表示, 或者, 如果不必写 f, 就以 $R(a)$ 表示. 我们有

$$R(a)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta)d\zeta;$$

这里 $0<r<R$, 积分是沿圆周正向一周的路径取的. 特别当 $f(z)$ 在 $z=a$ 处全纯时, $R(a)=0$. 如果 $f(z)$ 在 a 处具有一阶极点, 则

$$R(a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

在无穷远点 ∞ 处的残数定义为在 ∞ 处的 Laurent 展开式 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ 的系数 a_{-1} 变号:

$$-a_{-1}=\frac{-1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} f(\zeta)d\zeta,$$

$$R^{-1}<r<+\infty.$$

这是因为实际上残数不是对函数 $f(z)$ 本身, 而应是对微分形式 $f(z)dz$ 定义的量.

从上述的积分定理, 可以推出下面的**残数定理** (residue theorem) (Cauchy, 1825): 设 C 是复数平面上的可求长 Jordan 曲线, $a_1,\cdots,a_m$ 是位于 C 的内部的有限个点, D 是包含 C 和 C 的内部的一个域, 若 $f(z)$ 是 $D-\{a_1,\cdots,a_m\}$

内的全纯函数,则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^{m} R(a_n).$$

还有,设 $f(z)$ 在包含无穷远点的整个复数平面上最多除去有限个奇点外都全纯,则它的所有残数的和等于零.

【残数演算】 残数的应用称为**残数演算**(residue calculus). 计算定积分是其中之一. 本来 Cauchy 考虑复函数的动机之一,就在于定积分的统一的计算方法. 举一个例:对于在实轴上没有极点,且以无穷远点 ∞ 作为至少二阶零点的有理函数 φ,有

$$(6)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx = 2\pi i\sum_{\Im a>0} R(\alpha;\varphi(z)),$$

$$(7)\quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{ix}\varphi(x)dx = 2\pi i\sum_{\Im a>0} R(\alpha;e^{iz}\varphi(z)).$$

这里求和对上半平面内的所有极点进行. 对于式(7), ∞ 是 φ 的一阶零点时也成立. 还有,如果积分路径上有一阶极点 a,则在 a 处取积分的主值[†],再在右边加 $\pi iR(a)$即可.此外还能求出许多定积分. 有时根据残数定理,可用积分表示级数的和,并用于计算(例: Gauss 和[†]).

设 $f(z)$ 是任意域D内的单值亚纯[†]且 $\not\equiv 0$ 的函数, $\varphi(z)$ 是D内的全纯函数. 设在D内画一条可求长的 Jordan 曲线 C,使C的内部包含于D内,且在C上没有 $f(z)$ 的零点和极点. 如果 $f(z)$ 在C的内部有零点 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$,极点 $\beta_1,\cdots,\beta_P$(但是,关于每个零点和极点,写出时都要按照它们的阶数来列举,是几阶就写几次),则

$$\sum_{n=1}^{N}\varphi(\alpha_n)-\sum_{p=1}^{P}\varphi(\beta_p) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

特别当 $\varphi(z)=1$ 时,就有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C d\arg f(z) = N-P,$$

称它为**辐角原理**(argument principle). 还有,设 $f(z)$ 在 $|z|<R\leqslant+\infty$ 内亚纯, $f(0)\neq 0$, $\neq\infty$,令 $\varphi(z)=\log z$,设C为闭曲线,它由圆环 $0<\rho<|z|<r<R$ (ρ 充分小)的边界,以及连结 $|z|=\rho$ 上的一点和 $z=r$ 的适当的截线[†]的两侧所构成,则可得到如下的 **Jensen 公式**:

$$\log\left|\frac{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_N}{\beta_1\beta_2\cdots\beta_P}\right| = \log|f(0)|+(N-P)\times\log r-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\phi})|d\phi.$$

作为它的应用,设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在包含可求长 Jordan 曲线C及其内部的域D内全纯,且对所有满足 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 的 λ, $f(z)+\lambda g(z)$ 在C上没有零点. 这时在C的内部, $f(z)$ 的零点个数与 $f(z)+g(z)$ 的零点个数相等(**Rouché 定理**).特别是,若假定在C上 $|f(z)|>|g(z)|$或在C上 $\arg f(z)-\arg g(z)\neq(2n+1)\pi$ (n 是整数),则 Rouché 定理的假设得到满足. 这条定理对证明复函数(例如多项式)的零点的存在性以及求出它们的位置等是有用的.

关于全纯函数的各种性质,另外 → 解析函数、有界函数、超越整函数.

【参】 关于函数论的通论,[1] 吉田洋一,函数論,岩波全書,初版 1938,修订版 1965; [2] 辻正次,函数論,上,下,朝倉, 1952,修订版 1968; [3] 一松信,函数論入門,培風館, 1956; [4] 楠幸男,解析函数,広川書店, 1962; [5] É. Borel, Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, Gauthier-Villars, 1917; [6] A. Hurwitz-R. Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 1922; 第四版 1964; [7] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, I, Teubner, 1930; [8] E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford Univ. Press, 第二版 1939 (中译本: E. C. 梯其玛希,函数论,科学出版社, 1962); [9] C. Carathéodory, Funktionentheorie I, II, Birkhäuser, 1950 (英译本: Theory of functions, Chelsea, I, 1958; II, 1960); [10] S. Saks-A. Zygmund, Analytic functions, Warsaw, 1952; [11] L. V. Ahlfors, Complex analysis, McGraw-Hill, 1953 (中译本: 阿尔福斯,复分析,上海科学技术出版社, 1962); 第三版 1979; [12] H. Behnke-F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Springer, 1955, 第二版 1962; [13] H. Kneser, Funktionentheorie, Vandenhoeck & Ruprecht, 1958; [14] E. Hille, Analytic function theory, Ginn, I, 1959; II, 1962; [15] H. P. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961 (英译本: Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables, Addison-Wesley, 1963); [16] M. Heins, Complex function theory, Academic Press, 1968; [17] Б. А. Фукс- В. И. Левин, Функции комплексного переменного и их приложения, Гостехиздат, I, II, 1951 (中译本: 富克斯、勒维,复变函数及其应用,高等教育

出版社,1958); [18] W. H. I. Fuchs, Topics in the theory of functions of one complex variable, van Nostrand, 1967. 特别关于 Looman-Меньшов 定理, [19] D. Menchoff (Д. Меньшов), Les conditions de monogénéité, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1936; [20] D. Menchoff (Д. Меньшов), Sur la généralisation des conditions de Cauchy-Riemann, Fund. Math., **25** (1935), 59—97; [21] S. Saks, Theory of the integral, Warsaw, 第二版 1937, p. 188—201; [22] 功力金二郎, 複素函数論, 岩波講座現代応用数学, 1958 (中译本: 功力金二郎, 复变函数论, 上海科学技术出版社, 1963). 关于 Cauchy 积分定理的新证明, [23] E. Artin, On the theory of complex functions, Notre Dame Mathematical Lectures, 1944, p. 57—70(全集, p. 513—522). 关于较强形式的 Cauchy 积分定理, [24]辻正次, 複素変数函数論, 共立出版, 1934, p. 310—316. 关于 Villat 积分公式, [25] 佐々木達治郎, 等角写像の応用, 下, 富山房, 1939, p. 256—261; [26] 小松勇作, 等角写像論, 下, 共立出版, 1949, p. 103—112, p. 361—362. 关于残数演算, [27] E. Lindelöf, Le calcul de résidue et ses applications à la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, 1905. 作为古典的解说书, [28] 吉川実夫, 函数論, 富山房, 1913; [29] 竹内端三, 函数論, 上, 下, 裳華房, 1926, 新版 1966; [30] 掛谷宗一, 一般函数論, 岩波, 1930.

解析函数 [英 analytic function 法 fonction analytique 德 analytische Funktion 俄 аналитическая функция 日 解析関数] "解析函数"一词, 根据情况不同而在多少有点不同的意义下使用.

在实变量 t 的实值函数 $f(t)$ 的情形, $f(t)$ 在点 $t=t_0$ 处是**解析的** (analytic) 是指, 对 t_0 (在 $\boldsymbol{R}$ 内) 的一个邻域内的 t, $f(t)$ 的值可以用 $t-t_0$ 的幂级数表示. 如果 $f(t)$ 定义在 $\boldsymbol{R}$ 的一个开集†上, 且在其定义域的每个点处都解析, 则称 $f(t)$ 为**解析函数**. 这种情形也特别地称为**实解析函数** (real analytic function).

把上面的定义推广到复变量 z 的函数 $f(z)$ 的情形, 如果定义于复数平面的域 D 内的单值复值函数 $f(z)$ 在 D 的点 z_0 的一个邻域内可以用 $z-z_0$ 的幂级数表示, 则称 $f(z)$ 在点 $z=z_0$ 处解析; 如果 $f(z)$ 在 D 的每个点处都解析, 则称 $f(z)$ 是 D 内的**解析函数**. 为与实的情形相区别, 也称为**复解析函数** (complex analytic function). 本条涉及的解析函数都是这种意义下的解析函数. 这时 $f(z)$ 在 D 内可微, 从而成为全纯函数†, 反之亦然. 也就是说, 如果只是涉及定义于某个域内的复值函数, 那么"解析函数"与"全纯函数"是等价的. 为了同全纯函数只是作为复变量之间的对应加以区别, "解析函数"一词, 虽常在以上意义下使用, 但在复变函数中还增添下面叙述的意义.

【解析开拓】 对于在复数平面的域 G 内全纯的函数 $f(z)$, 如果存在函数 $F(z)$, 它在以 G 为真子集的域 $G^* \supset G$ 内全纯, 且在 G 内与 $f(z)$ 相等, 则称 $F(z)$ 是 $f(z)$ 的从 G 到 G^* 的**解析开拓** (analytic continuation, analytic prolongation). 因为全纯函数的零点†是孤立的, 所以如果域 D 内的两个全纯函数 f, g, 在具有位于 D 内的聚点的集合 (特别是开子集) E 上相等, 则在 D 内 f 恒等于 g (**恒等定理** (theorem of identity)). 因而给定了 G, G^*, $f(z)$ 后, 如果这样的解析开拓 $F(z)$ 存在, 那末它就是唯一的.

用具有收敛半径 $r_1\neq 0$ 的幂级数 $P(z;a)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 表示的函数 $f_1(z)$, 在域 D_1: $|z-a|<r_1$ 内全纯, 在域 D_1 的点 b 处又可展开为具有收敛半径 $r_2\geqslant r_1-|b-a|$ 的幂级数 $P(z;b)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-b)^n$, 在 $r_2>r_1-|b-a|$ 的情形, 域 D_2: $|z-b|<r_2$ 不全包含于 D_1 内. 这时, 设 $f_2(z)$ 是 $P(z;b)$ 所表示的全纯函数, 如果令 $F(z)$ 是在 D_1 内等于 $f_1(z)$, 在 D_2 内等于 $f_2(z)$ 的函数, 则 $F(z)$ 就成为 $f_1(z)$ 的从 D_1 到 $D_1\cup D_2$ 的解析开拓 (由幂级数作成的**直接解析开拓** (direct analytic continuation)).

有关解析开拓的古典定理, 还可举出下面一些. 设没有公共点的域 D_1, D_2 的边界分别为可求长的简单闭曲线† C_1, C_2, 当 C_1 同 C_2 共有一段开弧 Γ 时, 若分别定义于 D_1 和 D_2 内的全纯函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 在 Γ 的各点处具有有限的公共边界值†, 则 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 $D_1\cup\Gamma\cup D_2$ 内的解析开拓 $F(z)$ 存在 (**Painlevé 定理**). 在这种情形下, 常说 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 的"越过 Γ 的开拓". 在 Γ 是不可求长曲线的情形, 一般地说不能越过 Γ 开拓. 设 D 是边界含有实轴上的开区间 I 且位于实轴一侧的 Jordan 域, 若 $f(z)$ 在 D 内全纯, 且在 I 的各点处具有有限的实边界

值，则 $f(z)$ 能越过开区间 I 解析开拓到实轴的另一侧，且开拓的函数由 $\overline{f(\bar{z})}$ 给出 (**Schwarz 反射原理** (Schwarz's principle of reflection))。这个定理也能推广到用解析曲线†代替区间的情形。

对于调和函数†，类似于解析开拓，可以定义**调和开拓** (harmonic continuation)。设 D 是以实轴上的开区间 I 为边界的一部分，且位于实轴一侧的 Jordan 域，若 $u(z)$ 在 D 内调和，且在开区间 I 的各点处具有零边界值，则 $u(z)$ 能越过 I 调和开拓。

【Weierstrass 意义下的解析函数】 设 a 是 z 球面上的点，t 是 a 处的局部典范参数，即，若 $a \neq \infty$，则令 $t = z - a$，若 $a = \infty$，则令 $t = z^{-1}$。当幂级数 $P(z;a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ 具有非零的收敛半径时，K. Weierstrass 把它称作以 z 球面上的点 a 为中心的**函数元素** (function element)。若 $a \neq \infty$，则

$$P(z;a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n;$$

若 $a = \infty$，则

$$P(z;a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}.$$

它们分别在 $|z-a| < r_a$ 或 $r_a^{-1} < |z| \leqslant \infty$ 内表示 z 的一个全纯函数。在函数元素 $P(z;a)$ 的收敛圆内的点 $z = b$ 处作 Taylor 展开，可以得到 $z - b$ 的幂级数 $P(z;b)$，它是 $P(z;a)$ 的直接解析开拓。设 C: $z = z(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ (这里 $z(0) = a$, $z(1) = b$) 是连接 Riemann 球面†上两点 a 和 b 的曲线，如果对属于 $[0,1]$ 的所有 s，有以 $z(s)$ 为中心的函数元素 $P(z;z(s))$ 与之对应；而在 s 的任意的值 s_0 处，能确定 C 的适当的子弧 $z = z(s)$ $(|s - s_0| \leqslant \varepsilon$，$\varepsilon$ 是适当的正数)，使它包含于函数元素 $P(z;z(s_0))$ 的收敛圆的内部，且满足 $|s - s_0| \leqslant \varepsilon$ 的所有函数元素 $P(z;z(s))$ 都是 $P(z;z(s_0))$ 的直接解析开拓，则称 $P(z;a)$ 沿曲线 C 是**可解析开拓的** (analytically continuable)，并说成："如果沿曲线 C 解析开拓 $P(z;a)$，则在终点 b 处得到 $P(z;b)$"。在 $P(z;a)$ 沿曲线 C 可解析开拓的情形下，如果 $P(z;a)$ 和 C 给定，则沿 C 的解析开拓是唯一确定的(**解析开拓的唯一性定理**)。

给定以点 a 为中心的函数元素 $P(z;a)$，对以点 a 为起点的所有曲线，只要可能，都进行解析开拓，这样得到的全部函数元素的集合，称为由 $P(z;a)$ 确定的 **Weierstrass 意义下的解析函数**。在这个定义中，即使不用"所有曲线"而用"所有折线"，也是一样的。这种意义下的解析函数，由属于它的任意函数元素所确定。也就是说，两个解析函数，如果共有一个函数元素，就是恒等的。

全纯函数的芽†和函数元素相一致，其全体具有自然层† $\mathscr{O}$ 的结构。如果使用层的概念，所谓解析函数，无非是 $\mathscr{O}$ 内的连通分支，而**沿曲线 C 的解析开拓**(analytic continuation along a curve C)，无非是 $\mathscr{O}$ 内的连续曲线 Γ，其射影是 C。

【解析函数的值和分枝】 解析函数在点 b 处的值，是指它的以 b 为中心的函数元素(假设它存在，但不一定唯一)在点 b 处的值。因为从点 a 到点 b 进行解析开拓时，可能会由于道路的不同达到不同的函数元素，所以解析函数一般是多值的。如果对任取的点，解析函数 $f(z)$ 以这个点为中心的函数元素的个数都不超过 n，且有这样的点，$f(z)$ 以该点为中心的函数元素恰有 n 个，则称 $f(z)$ 是 **n 值的** (n-valued)。$n \geqslant 2$ 的情形统称为**多值的**(many valued)。就是 $f(z)$ 在一点处的函数元素有无穷多个的情形，因为这个集合是可数†的，所以解析函数在一点处的值形成至多可数的集 (**Poincaré-Volterra 定理**)。基于把函数的定义域从复数平面扩张到 Riemann 面†，也能把多值函数看作适当的 Riemann 面上的单值函数 (→ Riemann 面)。

设 $f(z)$ 是解析函数，$P(z;a)$ 是以域 D 的点 a 为中心的 $f(z)$ 的一个函数元素。以点 a 为起点沿 D 内的所有曲线进行一切可能的解析开拓所得到的全部函数元素的集合，称为由函数元素 $P(z;a)$ 确定的 $f(z)$ 在 D 内的一个**分枝** (branch)。当 D 是整个复数平面时，$f(z)$ 的分

枝就是解析函数 $f(z)$ 本身．在域 D 内全纯的函数，能以 D 的任一点为中心展开为幂级数，这些幂级数(函数元素)的集合，成为一个解析函数的分枝．

沿连接 a, b 两点的两条互相同伦†的道路的开拓(如果这是可能的话)，给出相同的结果(**单值定理** (monodromy theorem))．特别当 D 是单连通†域时，如果解析函数 $f(z)$ 的以 D 的点 a 为中心的函数元素 $P(z;a)$ 沿 D 内以点 a 为起点的所有曲线都可解析开拓，则 $f(z)$ 在 D 内由 $P(z;a)$ 确定的分枝是单值的．

【函数关系不变性定理】 设当两个复变量 z, w 分别在域 Δ_1, Δ_2 内时，$F(z,w)$ 作为两个变量的函数是全纯的．再设给定以曲线 C: $z = z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1, z(0) = a, z(1) = b)$ 的各点 $z(t)$ 为中心的两组函数元素 $P(z;z(t))$ 和 $Q(z;z(t))$，使 $P(z;a)$ 和 $Q(z;a)$ 能分别用这些函数元素从点 a 沿 C 解析开拓到点 b．还假定能确定这样的正数 $R(t)$，使得在 C 的各点 $z(t)$ 处，若 $|z - z(t)| < R(t)$，则 $P(z;z(t))$，$Q(z;z(t))$ 的值分别属于 Δ_1, Δ_2．在这些条件下，如果等式 $F(P(z;a), Q(z;a)) = 0$ 在 $|z-a| < R(0)$ 内成立，则等式 $F(P(z;b), Q(z;b)) = 0$ 在 $|z-b| < R(1)$ 内也成立．也即，在曲线 C 的起点 a 的一个邻域内成立的、属于两个解析函数的函数元素 $P(z;a), Q(z;a)$ 之间的一个解析关系，在终点 b 的一个邻域内，在属于这两个解析函数的以 b 为中心的函数元素之间照样成立．这称为**函数关系不变性定理** (theorem of invariance of analytic relations)．对于两个以上的解析函数或含有导数的关系(微分方程)，同样的定理也成立．

【反函数】 设以 $a \neq \infty$ 为中心的函数元素 $P(z;a)$ 属于解析函数 $f(z)$，且 $P'(a;a) \neq 0$，在点 $z = a$ 的一个邻域内作全纯函数 $w = P(z;a)$ 的反函数；令 $\alpha = P(a;a)$，以 $\mathfrak{P}(w;\alpha)$ 记这个反函数在 α 处展开的 $w - \alpha$ 的幂级数．称 $\mathfrak{P}(w;\alpha)$ 为函数元素 $P(z;a)$ 的**反(函数)元素** (inverse (function) element)．由函数元素 $\mathfrak{P}(w;\alpha)$ 确定的解析函数，称为原先的解析函数 $f(z)$ 的(**解析**)**反函数** (inverse (analytic) function)．这个反函数由 $f(z)$ 决定，不取决于用 $f(z)$ 所属的哪个函数元素作为出发点．例如，由 $\sqrt{w}$ 或 $\log w$ 所表示的解析函数，分别定义为 z^2 或 e^z 的反函数．

【解析函数的奇点】 今后说到曲线 C 时，总是指 z 平面上以 a 为起点，以 ω 为终点的曲线 $z = z(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$．设 K_r 是开圆盘 $|z - \omega| < r$ $(0 < r < |a - \omega|)$，以 C_r 表示 C 的子集 $C \cap K_r$ 的含有 ω 的连通分支†．如果以 a 为中心的函数元素 $P(z;a)$，能沿 C 的任一子弧(它以与终点 ω 任意接近的点 $z(s)$ 为终点)进行解析开拓，但是不能沿整个 C 进行解析开拓，则称 $P(z;a)$ 沿 C 的解析开拓确定了坐标 ω 的**奇点** (singularity) Ω，并称 Ω 处于点 ω 之上．例如 $P(z;a)$ 具有有限收敛半径时，如果在收敛圆的圆周上取适当的点 ω，则 $P(z;a)$ 沿半径 $a\omega$ 的解析开拓确定了 ω 上的奇点．现在，取 C_r 上的一点 z_r，把 $P(z;a)$ 在 z_r 处的解析开拓 $P(z;z_r)$ 在 K_r 内确定的解析函数的分枝记作 $F_r(z)$．设 Ω 是由 C 和 $P(z;a)$ 确定的奇点，如果以 ω 为终点的别的曲线 C^* 和别的函数元素 $P^*(z;a^*)$ 所给出的 ω 上的奇点 Ω^*，在任意的 K_r 内确定相同的分枝 $F_r(z)$，则定义为 $\Omega = \Omega^*$．$F_r(z)$ 确定了 z 平面的圆盘 K_r 上的非分歧覆盖面† W_r，可以认为它在 W_r 上是单值函数．

根据 W_r 的几何结构和 $F_r(z)$ 在 W_r 上的值分布，能对奇点加以分类．首先，如果对于适当的 r，W_r 在 $K_r - \{\omega\}$ 即 $0 < |z - \omega| < r$ 上没有相对边界†，则称 Ω 是所述解析函数的**孤立奇点** (isolated singularity)．这时，W_r 内处于基础面 $K_r - \{\omega\}$ 的点 z 之上的点的个数 k 是常数．当 $k = \infty$ 时，W_r 在 ω 上具有对数分歧点†，称 Ω 为**对数奇点** (logarithmic singularity)．若 $k < \infty$，如果令 $z = \omega + t^k$，则 $F_r(z)$ 在 $0 < |t| < r^{1/k}$ 内可以表示为 t 的单值全纯函数．在这种情形下，若把对应 $z = \omega$ 的点 P_0 添加到 W_r 上，则 $W_r \cup \{P_0\}$ 在 ω 上最多只能有代数分歧点†．再把对 $m = F_r(z)$ 的值的考察也包括在内，如果 $\lim m$ 存在，则称 Ω 为**代数奇点**

(algebraic singularity). 在这种情形,因为可以表示为 $F_r(z)=\sum_{n=l}^{\infty}c_nt^n$, 所以如果允许进行下面所说的广义解析开拓,则 $P(z;a)$ 可以沿整个 C 开拓到 ω.

【自然边界】 给定在域 D 内全纯的解析函数 $f(z)$, 如果 D 的边界点都是 $f(z)$ 的奇点,不可能把 $f(z)$ 开拓到 D 的外部去,则称 D 的边界为 $f(z)$ 的**自然边界** (natural boundary). 在关于椭圆模函数†的研究中,第一次发现了这个现象. 关于以收敛圆周作为自然边界的幂级数,有许多研究 (→ 幂级数). 关于单复变量解析函数,恒存在在任意给定的域 D 内全纯且以 D 的边界为自然边界的解析函数. 这一事实 Weierstrass 已试图证明,其不完全处已由 J. Besse 修正 ([5]).

【广义解析开拓】 解析开拓时,可以不只使用全纯的函数元素,而作如下的推广. 当用参变量 t 表示的两个 Laurent 级数† $z=P(t)=\sum_{n=k}^{\infty}a_nt^n$, $w=Q(t)=\sum_{n=l}^{\infty}b_nt^n$ (k, l 是整数, $a_kb_l\neq 0$) 在 $0<|t|<r$ 内收敛,且若 $t_1\neq t_2$, 必满足 $(P(t_1),Q(t_1))\neq(P(t_2),Q(t_2))$ 时,就称级数对 (P,Q) 确定了一个**广义函数元素** (function element in the wider sense). 如果参变量的变换 $\tau=r_1t+r_2t^2+\cdots$ ($r_1\neq 0$, 收敛半径 >0) 给出 $P(t)=\Pi(\tau)$, $Q(t)=K(\tau)$, 就认为 (Π,K) 和 (P,Q) 确定相同的函数元素. 如果适当地选择参变量 t,则每个函数元素都可取 $z=t^k+a$ (或 $z=t^{-k}$), $w=\sum_{n=l}^{\infty}b_nt^n$ 的形式;因此如果消去 t,就能用 z 的 Puiseux 级数†表示 w. 因而,如果 $k=1$, $l\geqslant 0$, 它就成为全纯的函数元素. 如果 $k=1$ (也包括 $l<0$ 的情形), 则称上述元素为**有理元素** (rational element); $k>1$ 时称为**分歧元素** (ramified element), $l<0$ 时称为**极元素** (polar element).

如果 P, Q 在满足 $0<|t_0|<r$ 的 t_0 处的直接开拓即 P, Q 在 t_0 处的 Taylor 展开式分别为 P', Q', 则称函数元素 (P',Q') 是 (P,Q) 的直接开拓. (P,Q) 本身也算作 (P,Q) 的直接开拓. 对确定的 r, 如果把这样得到的直接开拓的全体作为 (P,Q) 的一个**解析邻域** (analytic neighbourhood), 则能在所有函数元素构成的集合上引进一个拓扑. 这样的拓扑空间内的一条曲线,就称为一个**广义解析开拓** (analytic continuation in the wider sense), 而这个空间的一个连通分支†就称为一个**广义解析函数** (analytic function in the wider sense). 因此,广义解析函数是广义函数元素的集合,但也可以把它看作由各个函数元素 $p(z,w): z=P(t), w=Q(t)$ 确定的 (以 z 为自变量, w 为应变量的) 函数 $w=f(z)$. 当给定广义解析开拓

$$p(s)=p(z,w;s);$$
$$z=z(s)+t^{k(s)},\quad w=\sum_{n=l(s)}^{\infty}c_n(s)t^n,$$
$$0\leqslant s\leqslant 1$$

时,有时称它为沿 z 平面上的曲线 $C: z=z(s)$ ($0\leqslant s\leqslant 1$) 的解析开拓. 当 $p(s)$ 都只由全纯元素组成时,它就与沿 C 的狭义解析开拓一致;并非如此时,即使 $p(0)$ 和 C 确定, $p(1)$ 也不能唯一确定. 事实上,广义解析函数,无非就是在狭义解析函数上,添加不超过可数个的分歧元素和极元素.

【广义解析函数的奇点】 设对 C 上除 ω 外的每个点 $z(s)$ ($0\leqslant s<1$)都给定了广义函数元素 $p(z,w;s)$; 并设对于任意的正数 $\lambda<1$, $p(z,w;s)$ ($0\leqslant s\leqslant\lambda$)作成广义解析开拓,但不可能找到函数元素 $p(z,w;1)$, 使得 $p(z,w;s)$ ($0\leqslant s\leqslant 1$) 是广义的解析开拓;这时,我们称 $p(z,w;s)$ ($0\leqslant s\leqslant 1$) 确定了坐标为 ω 的**超越奇点** (transcendental singularity) Ω. 对于以 ω 为中心的开圆盘 K_r, 确定广义解析函数的分枝 $w=F_r(z)$ 的方法,与全纯解析函数的情形相同; 但因为 $F_r(z)$ 中可以含有广义的函数元素,所以由 $F_r(z)$ 确定的 K_r 的覆盖面 W_r 往往出现代数分歧点. 如果对于适当的 r, W_r 在 $K_r-\{\omega\}$ 上非分歧且没有相对边界,则称 Ω 为广义解析函数的**孤立奇点**. 特别当 W_r 在 ω 上有对数分歧点时,与上面所说的一样,称 Ω 为对

数奇点. 又如果对于适当的 r, W_r 没有处于 ω 之上的点,则称 Ω 为**直接超越奇点**(direct transcendental singularity), 反之就称为**间接超越奇点** (indirect transcendental singularity). 孤立奇点都是直接奇点. 再把对 $w = F_r(z)$ 在 W_r 上的值的考察也包括进来, 如果 $F_r(z)$ 在 Ω 处的聚值集† S_Ω 即 $\bigcap_{r>0}\overline{\{F_r(z)\}}$ 仅由一点构成, 则称 Ω 为**寻常奇点** (ordinary singularity), 反之则称为**本性奇点**(essential singularity). 在 $|w| < +\infty$ 内单值亚纯的函数 $z = \varphi(w)$ 的解析反函数没有本性超越奇点. 例如 $z = w \sin w$ 的反函数在 $z = \infty$ 上具有非对数奇点的直接奇点, $z = (\sin w)/w$ 的反函数在 $z = 0$ 上具有间接奇点.

【解析函数概念的历史和推广】 按照 A. L. Cauchy 的意义, 所谓复变量函数是单演的, 是指它在其定义域的每个点处都可微. 继承并发展了 A. L. Cauchy 思想的是 B. Riemann, 他抓住了解析函数是 Riemann 面即一维复解析流形上的函数这一点. 另一方面, Weierstrass 以幂级数为出发点形成了解析函数理论. 对定义于复平面的域内的单值函数, Cauchy 的单演函数同 Weierstrass 的解析函数是相同的. 虽然解析函数是相当特殊的函数, 但习惯上总是把这种复变量的复值解析函数的研究, 称为**单复变量函数论**或简称为**函数论** (theory of functions).

然而, É. Borel 揭示了, 如下地考虑比域更一般的点集 C, 在 C 上单演的函数就不一定是通常意义下的全纯函数. 也即, 在域 D 的子域 D' 内取定稠密的可数点集 $\{z_n\}$, 取正数的二重数列 $\{r_n^{(h)}\}$, 以 $S_n^{(h)}$ 表示开圆盘 $|z - z_n| < r_n^{(h)}$, 设 $C^{(h)}$ 为 $D - \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^{(h)}$. 如果 $r_n^{(h)}$ 取得适当, 就能使 $C^{(h)}$ 都是连通集, 且关于 h 单调递增. 令 $C = \bigcup_{h=1}^{\infty} C^{(h)}$, 如果在 C 上有定义的函数对所有 h 在 $C^{(h)}$ 上都可微, 则称它在 C 上是**单演的**(法 monogène). 关于这种函数, Cauchy 积分公式在某种推广的形式下成立, 并能证明这种函数的无穷次可微性. 在 C 上单演的两个函数 $f(z)$, $g(z)$, 如果在包含于 C 内的一条曲线上相等, 则必在 C 上恒等. 令 D 为集 $\{z \mid 0 < \Re z < 1,\ 0 < \Im z < 1\}$, $\{z_n\}$ 为 D 内所有有理点 ($z_n = (p + iq)/m$) 构成的集合, 对于任意的自然数 h, 如果以 $C^{(h)}$ 表示 D 除去所有以 $(p + iq)/m$ 为中心、以 $\exp(-e^{m^2})/h$ 为半径的开圆盘后所得的集合, 则函数

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{m} \sum_{q=0}^{m} \frac{\exp(-e^{m^4})}{z - (p + iq)/m}$$

在 C 上在上述意义下是单演的, 但不是全纯的. 对于这种函数的研究, 就发展成为拟解析函数†理论.

多复变量解析函数†的概念, 形式上可以同单变量情形类似地定义, 但因为这时出现了一般地不能单值化的奇点, 所以必须推广流形†这样的概念 (→ 解析空间).

【参】 [1] 吉田洋一, 函数論, 岩波全書, 1938, 修订版 1965; [2] 能代清, 解析接続入門, 共立出版, 1964; [3] 能代清, 近代函数論, 岩波, 1954; [4] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 1913, 修订第三版 1955 (英译本: The concept of a Riemann surface, Addison-Wesley, 1964); [5] J. Besse, Sur le domaine d'existence d'une fonction analytique, Comment. Math. Helv., **10** (1937), 302—305. 其他→全纯函数的[参]. 特别是, 关于 Borel 理论, [6] É. Borel, Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe, Gauthier-Villars, 1917. 关于解析函数的概念和历史, [7] G. Julia, Essai sur les développements de la théorie de fonction de variable complexe, Gauthier-Villars, 1933.

幂级数 [英 power series 法 série de puissances, série entière 德 Potenzreihe 俄 степенный ряд 日 ベキ級数] 设 a 和 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 是域 K 的元, z 是变量, 则称级数 $P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 为(单变量)**幂级数**或**整级数**(法 série entière). 以下设 K 是复数域. 这时对于幂级数 P, 具有下述性质的实数 R 是唯一确定的: $0 \leqslant R \leqslant \infty$; 若 $|z - a| < R$, 则 P 收敛; 若 $R < |z - a|$, 则 P 发散. 称这样的 R 为幂级数 P 的**收敛半径** (radius of convergence), 称圆 $|z - a| < R$ 为 P 的**收敛圆** (circle of convergence). R 的值由

$$R = 1/\limsup \sqrt[n]{|c_n|}$$

给出 (**Cauchy-Hadamard 公式**).

幂级数在其收敛圆内广义一致绝对收敛†，在其内确定了一个单值复函数. 因为幂级数在收敛圆内可以逐项微分，所以它在收敛圆内是全纯的. 反之，在一个域内全纯的函数 $f(z)$，在这个域的每个点 a 的一个邻域内，都可以用幂级数表示(→ 全纯函数)，称此幂级数为 $f(z)$ 在 a 处(或 a 的邻域内)的 **Taylor 展开式** (Taylor expansion). 表示全纯函数的幂级数称为全纯**函数元素** (function element). K. Weierstrass 把从一个函数元素解析开拓†而得到的元素的全体，命名为解析函数(→ 解析函数).

除了上面说的幂级数以外，我们把形如 $Q=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ 的级数称为**以无穷远点为中心的幂级数** (power series with center at the point at infinity)，定义它在 ∞ 处的值为 c_0. 以有限的 a 为中心时令 $z-a=t$，以 ∞ 为中心时令 $z^{-1}=t$，这样每个幂级数就都能写成 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ 的形式. 这样的 t 称为**局部典范参数** (local canonical parameter).

使用局部典范参数 t 而由 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n t^n$ 表示的级数，称为 **Laurent 级数** (Laurent series); 当 k 是自然数时，由 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n t^{n/k}$ 表示的级数，称为 **Puiseux 级数** (Puiseux series). 这些名称分别来自法国的数学家 A. Laurent (1813—54) 和 V. A. Puiseux (1823—83). 相对这两个名称，往往称幂级数为 **Taylor 级数** (Taylor series).

从幂级数的中心沿收敛圆的半径进行解析开拓时，至少沿一个半径，在收敛圆周上出现奇点†. 在收敛圆周 $|z|=R$ 上，离点 $z=R$ 最近的奇点的辐角可给出如下. 为简单起见，设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径 R 为 1，如果令

$$\rho_n(h)=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu} c_{n-\nu} h^{\nu},$$

$$P(h)=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\rho_n(h)|},$$

则所求辐角 α 由

$$\cos\alpha=P'_{+}(0)=\lim_{h\to+0}(P(h)-1)/h$$

确定 (S. Mandelbrojt, 1937). 特别是，如果 c_n 是非负实数，则 $z=R$ 是奇点 (**Vivanti 定理**).

【Abel 连续性定理】 在收敛圆周上，**Abel 连续性定理** (Abel's continuity theorem) 成立: 如果 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，其和为 A，或者 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 可 $k(>-1)$ 次 Cesàro 求和到 A，则当 z 从单位圆内部沿位于通过 $z=1$ 的两弦之间的某条道路 (Stolz 道路†) 趋近于 1 时，有 $f(z)\to A$.

这条定理的逆不一定成立. 也就是说，即使 $\lim_{z\to 1} f(z)$ 存在，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 也不一定收敛，甚至不一定能 Cesàro 求和. 但是，如果 $a_n=o(1/n)$，且沿以 1 为终点的曲线 $z\to 1$ 时有 $f(z)\to A$，则 $\sum a_n$ 收敛，其和为 A (A. Tauber, 1897). 一般地，为使 Abel 定理的逆定理成立而附带充分条件的各种定理，统称为 **Tauber 型定理** (theorems of Tauberian type, Tauberian theorems). 也可以把上面的 Tauber 定理的条件放宽为 $a_n=O(1/n)$，或 $n\Re a_n$, $n\Im a_n$ 上方有界(下方不加条件) (G. H. Hardy-J. E. Littlewood); 但条件 $a_n=O(1/n)$ 不能再减弱 (Littlewood). 也已求出为使 $\sum a_n$ 对各种求和法成为可求和的充分条件.

【Lambert 级数】 形如

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{1-z^n}, \quad |z|\neq 1 \tag{1}$$

的级数称为 **Lambert 级数** (Lambert series). 若 $\sum a_n$ 收敛，则(1)当 $|z|\neq 1$ 时收敛，且分别在 $|z|<1$ 或 $|z|>1$ 内任意的紧集上一致收敛. 若 $\sum a_n$ 发散，则(1)当 $|z|\neq 1$ 时与幂级数 $\sum a_n z^n$ 同时收敛或发散.

Lambert 级数由 K. Knopp (1913) 详细地

研究过．设$\sum a_n z^n$的收敛半径为R，取遍n的全部约数的和记作$\sum_{d|n} a_d = A_n$，则在$|z| < \min(R, 1)$内，互反关系

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

成立．设μ，φ分别是 Möbius 函数†和 Euler 函数†，则下面的关系可以看作上式的特殊情形：

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{z^n}{1-z^n},$$

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{z^n}{1-z^n}.$$

当na_n都是实数且下方有界时，如下的 Tauber 型定理成立：若

$$\lim_{z \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (1-z) n a_n \frac{z^n}{1-z^n} = s,$$

则$\sum a_n = s$．Hardy-Littlewood（1921）证明了它与素数定理†是等价的．

【幂级数与奇点】 设幂级数$P = \sum a_n z^n$确定的解析函数的分枝†$f(z)$在$|z| < R^*$内是单值亚纯的，而当$R' > R^*$时，就在$|z| < R'$内出现极点以外的奇点．这时，称R^*为P的**亚纯半径**（radius of meromorphy），称$|z| < R^*$为P的**亚纯圆**（circle of meromorphy）．R^*能求得如下：若令

$$l_p = \limsup_{n\to\infty} \left| \sqrt[n]{D_n^{(p)}} \right|,$$

$$D_n^{(p)} = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+p} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+p} & a_{n+p+1} & \cdots & a_{n+2p} \end{vmatrix},$$

则数列l_{p-1}/l_p单调递增，且$\lim l_{p-1}/l_p = R^*$．又如果$R_1, R_2, \cdots$是l_{p-1}/l_p的不同的值，则$f(z)$在$|z| = R_n$以外的点处全纯（**Hadamard 定理**，1892）．

给定复数平面上的点a和点集A，能用不含有A的点的线段同a相连的点z的集合，称为由点a和集合A确定的**星形域**（star region），以a为起点的半直线上的点从a向远处移动时，首次出现的A的点称为**顶点**（vertex）．特别是，从原点O沿半直线解析开拓幂级数$\sum c_n z^n$所得到的函数元素的中心构成的集合，称为幂级数$\sum c_n z^n$关于原点的星形域．设$\sum a_n z^n$，$\sum b_n z^n$关于原点的星形域的顶点的集合分别为$\{\alpha\}$，$\{\beta\}$，则由原点和$\{\alpha\beta\}$确定的星形域包含于$\sum a_n b_n z^n$的星形域之内（**Hadamard 乘法定理**（Hadamard's multiplication theorem），1892）．

关于使得幂级数的收敛圆周成为自然边界†的条件有，例如，当a_n是正数，b是大于1的自然数时，若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{b^n}$的收敛圆周是$|z| = 1$，则$|z| = 1$是自然边界（Weierstrass, E. I. Fredholm）．J. Hadamard 证明了下面的 **Hadamard 空隙定理**（Hadamard's gap theorem）：当$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$（$\lambda_n$是单调递增的自然数列）的收敛半径为1时，若$\liminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)/\lambda_n > 0$，则$|z| = 1$是自然边界（1892）．这个条件由 E. Borel 推广为$\liminf_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)/\sqrt{\lambda_n} > 0$（1896）．E. Fabry 还（1896）证明，在$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$的收敛半径为1的情形下，如果存在适当的自然数列$m_1 < m_2 < \cdots$和适当的数$\theta (0 < \theta < 1)$，使得$\lim s_i/m_i = 0$（这里$s_i$表示含于区间$(m_i(1-\theta), m_i(1+\theta))$内的非零系数$a_n$的数目），则$\sum a_n z^n$具有自然边界$|z| = 1$．由这条定理得知，当$\sum a_n z^{\lambda_n}$的收敛半径为1时，若$\lim \lambda_n / n = \infty$，则$|z| = 1$是自然边界．这种定理，因为都是关于指数空缺的某种幂级数的，所以总称为**空隙定理或缺项定理**（英 gap theorem 德 Lückensatz）．Fabry 定理还由 G. Pólya 所推广（1929）．也已经知道，上面叙述的最后一个条件在某种意义下是最好的（Pólya，1942）．

【过度收敛】 当$f(z) = \sum a_n z^n$的收敛半径为1时，若$|z| > 1$，虽然幂级数的部分和$S(n, z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$的序列$S(1, z), S(2, z), \cdots$发散，但是它的适当的子序列$S(n_k, z)$（$k = 1$，

2,…)却可能收敛. A. Ostrowski ([8],[9]) 把这种现象称为**过度收敛**(英 overconvergence 法 ultraconvergence),并证明了下述结果:对 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^{\lambda_n}$,当存在$\{\lambda_n\}$的子序列$\{\lambda_{n_k}\}$,使得 $\lambda_{n_k+1}>\lambda_{n_k}(1+\theta)$ $(\theta>0)$ 时,称这幂级数具有**空隙型**(法 structure lacunaire). 这时,在 $|z|=1$ 上 $f(z)$ 的全纯点的充分小的邻域内,$S(\lambda_{n_k},z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 一致收敛. 由此可直接推出上述的 Hadamard 空隙定理. 反之,具有过度收敛的子序列的幂级数是一个空隙型幂级数与一个收敛半径大于 1 的幂级数的和. G. Bourion 利用上调和函数†统一地重新证明了上面的各种结果([10]).

R. Jentsch 证明了([11]),幂级数的收敛圆周上的所有奇点都是它的部分和的零点的聚点;当它的一个子序列 $S(n_k,z)$ 的零点在 $|z|=1$ 上没有聚点时,这个幂级数必是空隙型的,且对于 $S(n_k,z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 出现过度收敛. 还有,若 $\log n_{k+1}=O(n_k)$ 并且 $S(n_k,z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 过度收敛,则其过度收敛域的所有边界点是 $S(n_k,z)$ 的零点的聚点 (Ostrowski [9]).

关于幂级数与自然边界,此外还知道,当 $\sum a_nz^n$ 的收敛半径为 1 时,如果取适当的数列 $\{\varepsilon_n\}$ $(\varepsilon_n=\pm1)$,则 $\sum\varepsilon_na_nz^n$ 能以 $|z|=1$ 为自然边界 (A. Hurwitz, P. Fatou, Pólya).

幂级数当然由它的系数确定,可是关于系数序列的算术性质和它所表示的函数的函数论性质之间的关系,还没有很好地了解. 作为一个例子,如果有理系数的幂级数 $\sum c_nz^n$ 表示一个代数函数†的分枝,则能求得适当的整数 γ,使得 $c_n\gamma^n$ $(n\geqslant1)$ 全是整数 (Eisenstein 定理, 1852).

关于多变量幂级数 → 多变量解析函数,关于形式幂级数 → 幂级数环.

【参】 关于幂级数的一般理论, [1] E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Springer, 第二版, 1929; [2] P. Dienes, The Taylor series, Clarendon Press, 1931. 又→全纯函数的[参]. 关于幂级数的奇点, [3] S. Mandelbrojt, Les singularités des fonctions analytiques représentées par une série de Taylor, Gauthier-Villars, 1932; [4] 小松勇作, 一般函数論, 角川全書, 1952. 关于 Tauber 型定理, [5] 辻正次,解析雑論,共立出版, 1935; [6] N. Wiener, Tauberian theorems, Ann. of Math. **33** (1932), 1—100; [7] H. R. Pitt, Tauberian theorems, Oxford Univ. Press, 1958. 关于过度收敛, [8] A. Ostrowski, Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendliche vielen verschwinden Koeffizienten, S.-B. Preuss. Akad. Wiss, 1921, 557—565; [9] A. Ostrowski, Über vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **1** (1922), 327—350; [10] G. Bourion, L'ultraconvergence dans les séries de Taylor, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1937; [11] R. Jentsch, Fortgesetzte Untersuchungen über die Abschnitte von Potenzreihen, Acta Math., **41** (1918), 253—270.

Dirichlet 级数 [英 Dirichlet series 法 séries de Dirichlet 德 Dirichletsche Reihe 俄 ряд Дирихле 日 ディリクレ級数] 对于 $z=x+iy$, $0<\lambda_n\uparrow\infty$, 称形如

$$(1)\qquad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp(-\lambda_nz)$$

的级数为 **Dirichlet 级数**(详细地说,**$\{\lambda_n\}$ 型的 Dirichlet 级数**). 特别当 $\lambda_n=n$ 时,(1) 成为 e^{-z} 的幂级数. 当 $\lambda_n=\log n$ 时,即是

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z},$$

称为**通常 Dirichlet 级数**或**特殊 Dirichlet 级数** (ordinary Dirichlet series). 当 $a_n=1$ 时,(2)是 Riemann ζ 函数†. 形如(2)的级数,是 P. G. L. Dirichlet (1839) 为应用于解析数论的问题而引入的. 以后, J. L. W. V. Jensen (1884) 和 E. Cohen (1894) 等把变量扩张为复变量,在应用于解析数论的同时,把 Dirichlet 级数作为幂级数的一个推广,也能从级数论这个方面来研究.此外,把 Laplace 变换†看作 Dirichlet 级数到积分的推广,两者之间有很多类似的公式.

【收敛域】 若(1)在 $z=z_0$ 处收敛,则它在半平面 $\Re z>\Re z_0$ 内也收敛. 因而可以唯一地确定这样的实数 S,使得(1)在 $\Re z>S$ 内收敛,在 $\Re z<S$ 内发散. 但当(1)恒收敛时,令 $S=-\infty$;恒发散时,令 $S=+\infty$. 称 S 为**收敛坐标** (abscissa of convergence) 或**简单收敛**

坐标 (abscissa of simple convergence). 与此类似,可以唯一地确定实数 A, 使得 (1) 在 $\Re z > A$ 内绝对收敛, 在 $\Re z < A$ 内不绝对收敛. 称 A 为**绝对收敛坐标** (abscissa of absolute convergence). 还能唯一地确定如下的实数 U: 对任意的 $U' > U$, (1) 在 $\Re z \geqslant U'$ 上一致收敛, 而对任意的 $U'' < U$, (1) 在 $\Re z \geqslant U''$ 上不一致收敛. 称 U 为**一致收敛坐标** (abscissa of uniform convergence). 这些坐标之间恒成立关系式 $-\infty \leqslant S \leqslant U \leqslant A \leqslant +\infty$, $A - S \leqslant \limsup_{n\to\infty} (\log n)/\lambda_n$. 后一公式归于 Cohen (1894). S, A, U 由 a_n, λ_n 用下面的公式确定:

$$(3) \qquad S = \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log\left| \sum_{[x]\leqslant\lambda_n<x} a_n \right|,$$

$$(4) \qquad A = \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log\left(\sum_{[x]\leqslant\lambda_n<x} |a_n| \right),$$

$$(5) \qquad U = \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log T_x,$$

$$T_x = \sup_{-\infty<y<\infty} \left| \sum_{[x]\leqslant\lambda_n<x} a_n \exp(-i\lambda_n y) \right|,$$

(3)、(4) 归于小島鉄蔵 (1914), (5) 归于国枝元治 (1916). 这里 $[x]$ 是 Gauss 记号†. 特别当 $\lim_{n\to\infty} (\log n)/\lambda_n = 0$ 时, 有

$$(6) \quad S = U = A = \limsup_{n\to\infty} (\log |a_n|)/\lambda_n$$

(O. Szász, 1922; G. Valiron, 1924).

设点 z_0 满足 $\Re z_0 = S$, 则 (1) 在以 z_0 为顶点的角域 $|\arg(z - z_0)| < \alpha < \pi/2$ 的内部一致收敛; 因此它在 $\Re z > S$ 内表示一个全纯函数†, 但在 $\Re z = S$ 上不一定有奇点. 例如, 在 (2) 中取 $a_n = (-1)^n$ 时, $S = 0$, 而和是整函数† $(2^{1-z} - 1)\zeta(z)$. 解析开拓 (1) 的和 $f(z)$ 时, 使 $f(z)$ 在 $\Re z > \rho$ 内全纯的 ρ 的下确界 R, 称为 (1) 的**正则坐标** (abscissa of regularity). 但在 $\Re z = R$ 上不一定存在 $f(z)$ 的奇点. 恒有 $R \leqslant S$, 而 R 由下面的公式给出:

$$(7) \ R = \sup_{-\infty<y<\infty} \limsup_{x\to-\infty} (\log\log^{+} |\varphi(x+iy)| + x),$$

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \exp(-\lambda_n z)/\Gamma(1 + \lambda_n)),$$

这里 $\log^{+} a = \max(\log a, 0)$(田中忠二, 1951). 还把使 $f(z)$ 在 $\Re z > \rho$ 内有界的 ρ 的下确界 B 称为 (1) 的**有界坐标** (abscissa of boundedness). 恒有 $R \leqslant B \leqslant A$. H. Bohr 得到了下面三个结果: 若 $\{\lambda_n\}$ 关于整数线性无关, 则 $A = B$ (1911); 若对任意的 $\varepsilon > 0$, 都有 $(\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} = O(\exp e^{\lambda_n \varepsilon})$, 则 $U = B$ (1913); 若

$$\limsup (\log n)/\lambda_n = 0,$$

则 $S = U = A = B$ (1913), 这时这些数值由 (6) 给出.

【用 Dirichlet 级数表示的函数的性质】(1) 的系数 a_n 由 $f(z)$ 用下面的公式表示:

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(z) \frac{e^{\omega z}}{z} dz.$$

这里 $c > \max(S, 0)$, $\lambda_n < \omega < \lambda_{n+1}$, 积分路径不通过 $\{\lambda_n\}$. 当 $\omega = \lambda_n$ 时, 在左端的和中, 要把 a_n 换为 $a_n/2$ (O. Perron, 1908). 又当 $S < x$ 时, 有

$$(9) \ a_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{a_0}^{a_0+T} f(x+iy) \exp(\lambda_n(x+iy)) dy$$

(J. Hadamard, 1908; 田中, 1952).

当 $x = \Re z > S$ 时, 有 $f(z) = o(|y|)$ ($|y| \to \infty$). 为了更详细地考察这时 $f(z)$ 的性态, Bohr 在他的学位论文 (1910) 中引进了

$$\mu(x) = \limsup_{|y|\to+\infty} \log |f(x + iy)| / \log |y|,$$

称它为 $\Re z = x$ 上的**阶** (order). $\mu(x)$ 是 x 的非负非增且凸的连续函数. 他还发现 $f(z)$ 在 $\Re z = x_0$ 上的值具有某种周期性; 后来它成为殆周期函数†的肇始.

关于 $f(z)$ 的零点, 已知下面的事实: 当 $f(z)$ 不恒等于零时, 设 ε, M 是任意正数, 则 $f(z)$ 在 $x \geqslant S + \varepsilon$, $e^{-Mx} \leqslant y \leqslant e^{Mx}$ 内的零点数是有限的 (Perron, 1908). 如果设它在 $x > S + \varepsilon$, $T < y < T + 2\delta \log T$ 内的零点数为 $N(T)$, 则 $\limsup_{T\to\infty} N(T)/(\log T)^2 \leqslant \delta/\varepsilon$ (E. Landau, 1927).

关于 $f(z)$ 的奇点与系数的关系有许多研究. 若 a_n 是正实数, 则 $z = S$ 必是 $f(z)$ 的奇点. 作为它的推广, 我们有: 若 $S = 0$, $\Re a_n \geqslant 0$, $\lim_{n\to\infty} (\cos(\arg a_n))^{1/\lambda_n} = 1$, 则 $z = 0$ 是奇点

(C.Biggeri, 1939). 若 $\lambda_n/n\to\infty$, $\liminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$, 则 $\Re z=S$ 是 $f(z)$ 的自然边界† (F. Carleson-Landau, 1921, A. Ostrowski, 1923). 若 $S=0$, $\liminf_{n\to\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)=q>0$, 则在虚轴上长为 $2\pi/q$ 的区间内必有奇点 (G. Pólya, 1923). S. Mandelbrojt (1954, 1963) 还得到了整函数的 Fourier 变换†与(1)的奇点之间的有趣关系.

如果 $U=-\infty$, 则 $f(z)$ 是整函数, 它(作为整函数)的阶 ρ 由

$$\rho=\limsup_{x\to-\infty}(\log^+\log^+M(x))/|x|,$$
$$M(x)=\sup_{-\infty<y<\infty}|f(x+iy)|$$

给出. 关于这种情形下 $f(z)$ 的 Julia 方向†以及与之有关的概念, Mandelbrojt, Valiron, 田中等做了许多研究.

【Tauber 型定理】 与幂级数的情形相同, 若级数 $\sum a_n$ 收敛到 s, 则 $f(+0)=s$ (**Abel 连续性定理**), 其逆一般不成立. 也与幂级数的情形相同, 对 $\{a_n\}$, $\{\lambda_n\}$ 赋予适当的附加条件以使逆命题成立的这类定理, 称为 **Tauber 型定理**. 已经知道这方面的许多结果, 作为附加条件, $\lim_{n\to\infty}\lambda_n a_n/(\lambda_n-\lambda_{n-1})=0$ (Landau, 1926); $a_n=O((\lambda_n-\lambda_{n-1})/\lambda_n)$ (K. Ananda-Rau, 1928) 等是著名的. 又关于 Dirichlet 级数的其他求和法, 特别关于 Riesz 求和法, → 求和法.

【与 Dirichlet 级数有关的其他级数】 称形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!a_n}{z(z+1)\cdots(z+n)},$$
$$z\neq 0,-1,-2,\cdots$$

的级数为具有系数 $\{a_n\}$ 的**阶乘级数** (factorial series, faculty series). 除 $z=0$ 和负整数外, 它与通常 Dirichlet 级数 $\sum a_n/n^z$ 同时收敛或发散 (Landau, 1906). 再者, 除 $z=0$ 和正整数外, **二项式系数的级数** (binomial coefficient series)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}{n!}a_n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\binom{z-1}{n}$$

也与通常 Dirichlet 级数 $\sum(-1)^n a_n/n^z$ 同时收敛或发散.

【参】 [1] 泉信一, ディリクレ級数論, 岩波, 1931; [2] V. Bernstein, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Gauthier-Villars, 1933; [3] K. Chandrasekharan-S. Minakshisundaram, Typical means, Oxford Univ. Press, Bombay, 1952; [4] G. H. Hardy-M. Riesz, The general theory of Dirichlet series, Cambridge, 1915; [5] S. Mandelbrojt, Séries lacunaires, Actualités Sci. Ind., 305, Hermann, 1936; [6] S. Mandelbrojt, Séries adhérentes, régularisation des suites, applications, Gauthier-Villars, 1952; [7] G. Valiron, Théorie générale des séries de Dirichlet, Mémor. Sci. Math., 17, Gauthier-Villars, 1926.

有界函数 [英 bounded function 法 fonction bornée 德 beschränkte Funktion 俄 ограниченная функция 日 有界関数] 对于在复数 z 平面的集合 E 上有定义的复值函数 $f(z)$, 如果它的值域 $f(E)$ 有界, 即如果存在正常数 M, 使在 E 的每个点 z 处, $|f(z)|\leqslant M$ 都成立, 则称 $f(z)$ 为定义于 E 上的**有界函数**. 然而所谓"有界函数论"的对象, 不是一般的复值函数, 通常它只限于解析函数或与之关系很深的调和函数. 此外, 不用有界性条件 $|f(z)|\leqslant M$, 而用形如 $\Re f(z)>0$ 或 $\alpha<\arg f(z)<\beta$ 等条件限定的函数族, 可以用类似于研究有界函数的方法来研究.

作为有界函数论的古典定理, 有 Schwarz 引理, 关于整函数退化的 Liouville 定理†, 关于可去奇点的 Riemann 定理†, 等等.

【最大模原理】 一般地, 若在复数平面的域 D 内全纯的函数 $f(z)$ 不是常数, 则 $|f(z)|$ 在 D 内取不到极大值. 特别是, 若 $f(z)$ 在闭域 $\overline{D}=D\cup\partial D$ 上连续, 则 $|f(z)|$ 在 $\overline{D}$ 上的最大值在边界 ∂D 上取到. 这个事实称为**最大模原理** (maximum (modulus) principle).

作为最大模原理的直接应用, 可以由它推出 **Schwarz 引理**: 若 $f(z)$ 在 $|z|<R$ 内全纯并满足 $|f(z)|\leqslant M$, 且 $f(0)=0$, 则 $|f(z)|\leqslant M|z|/R$ $(|z|<R)$ 成立. 这里对于满足 $0<|z_0|<R$ 的一点 z_0 出现等号只限于 $f(z)=$

$e^{i\lambda}Mz/R$ (λ 是实常数)的情形.

【Lindelöf 定理】 E. Lindelöf 把 Schwarz 引理推广到一般域的情形，还把最大模原理推广为各种形式. 他基于这些结果，和 E. Phragmén 一起，推出了关于在边界的邻域内单值解析函数的性态的几条有用的定理. 下面举出其中有代表性的定理.

设 $z=\varphi(\zeta)$ 和 $w=\psi(\zeta)$ 在 $|\zeta|<1$ 内亚纯†，单叶†，分别把 $|\zeta|<1$ 映射到 D_z, D_w, 且 $\varphi(0)=z_0$, $\psi(0)=w_0$. 设 $|\zeta|\leqslant\rho$ $(0<\rho<1)$ 在这些映射下的象分别为 $D_z(\rho)$, $D_w(\rho)$. 这时，如果在 D_z 内全纯的函数 $f(z)$ 满足 $f(D_z)\subset D_w$, $f(z_0)=w_0$, 则 $f(D_z(\rho))\subset D_w(\rho)$. 而且，只要 $w=f(z)$ 不是把 D_z 单叶地映射到 D_w 的函数，$f(D_z(\rho))$ 就包含于 $D_w(\rho)$ 的内部 (Schwarz 引理的推广).

设在有界域 D 内解析函数 $f(z)$ 不一定是单值的，但假定 $|f(z)|$ 是单值的. 如果存在正常数 M，使得除去 D 的有限个边界点外，在每个边界点 ζ 处，对任意的正数 ε，都能取到 ζ 的适当的邻域，使在这个邻域与 D 的交内，$|f(z)|<M+\varepsilon$ 成立；而对被除外的边界点，在它的某个邻域与 D 的交内，$f(z)$ 有界. 在以上这些假定下，在 D 内 $|f(z)|\leqslant M$ 成立. 并且，若在 D 内的点 z_0 处 $|f(z_0)|=M$ 成立，则 $f(z)$ 是一个常数(最大模原理的推广).

设 $f(z)$ 在角域 W: $|\arg z|<\alpha\pi/2$ 内全纯，如果存在常数 M，使对任意的正数 ε，每个有限的边界点都有适当的邻域，使得在该邻域与 W 的交内，有 $|f(z)|<M+\varepsilon$；且对于某个正数 $\beta>\alpha$ 和所有充分大的 $|z|$，有 $|f(z)|<\exp|z|^{1/\beta}$，则在 W 内 $|f(z)|\leqslant M$ 成立 (**Phragmén-Lindelöf 定理**).

设 $f(z)$ 在闭角域 $\overline{W}$: $\alpha\leqslant\arg z\leqslant\beta$ 内除无穷远点外全纯有界，若在角的一边上当 $z\to\infty$ 时有 $f(z)\to a$，而在另一边上当 $z\to\infty$ 时有 $f(z)\to b$，则 $a=b$，且在 W 内当 $z\to\infty$ 时一致地有 $f(z)\to a$ (**Lindelöf 渐近值定理** (Lindelöf's asymptotic value theorem)).

此外还能得到很多这种类型的定理.

【圆内有界函数】 若 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内是有界全纯函数，则除去一维测度为零的某个集合外，对圆周 C: $|z|=1$ 上的每个点 z_0，在以 z_0 为顶点的包含于 $|z|<1$ 内的角内 (即沿以 z_0 为顶点的 Stolz 道路†) $z\to z_0$ 时，$f(z)$ 的极限存在 (**Fatou 定理**). 在同样的假定下，如果基于 Fatou 定理存在的边界值函数 $f(e^{i\theta})=\lim_{r\to1-0}f(re^{i\theta})$，在关于 θ $(0\leqslant\theta<2\pi)$ 的一个正测度集上取常数值 a，则在 $|z|<1$ 内 $f(z)\equiv a$ (**F. Riesz 和 M. Riesz 定理**). 这些定理可以原封不动地推广到 $|z|<1$ 内的亚纯函数.

【三圆定理及有关定理】 对于在同心圆环 $\rho<|z|<R$ 内不恒等于零的单值全纯函数 $f(z)$，若令 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$ $(\rho<r<R)$，则 $\log M(r)$ 在 $\log\rho<\log r<\log R$ 内是 $\log r$ 的凸函数† (**Hadamard 三圆定理** (Hadamard's three-circle theorem)). 在这条定理的假定中，也可以设 $|f(z)|$ 单值，而 $f(z)$ 不一定单值. 特别是，限于 $f(z)$ 单值的情形，结论可以随之精密化 (O. Teichmüller).

下面这些定理，可以看作 Hadamard 三圆定理关于各种类型基础域的类似结果.

对于在带形域 $\alpha<\Re z<\beta$ 内有界的全纯函数 $f(z)$，若令 $L(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|f(\sigma+it)|$ $(\alpha<\sigma<\beta)$，则 $\log L(\sigma)$ 在 $\alpha<\sigma<\beta$ 内是 σ 的凸函数 (**Doetsch 三线定理** (Doetsch's three-line theorem)).

对于在半带形域 $\alpha<\Re z<\beta$, $\Im z>0$ 内有界的全纯函数 $f(z)$，若令 $l(\sigma)=\limsup_{t\to\infty}|f(\sigma+it)|$ $(\alpha<\sigma<\beta)$，则 $\log l(\sigma)$ 在 $\alpha<\sigma<\beta$ 内是 σ 的凸函数 (**Hardy-Littlewood 定理**).

对于在圆盘 $|z|<R$ 内全纯的函数 $f(z)$，若令

$$I_p(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,d\theta,$$

则对所有 $p>0$，$\log I_p(r)$ 在 $-\infty<\log r<\log R$ 内是 $\log r$ 的递增凸函数 (**Hardy 定理**).

【最大模原理的应用】 下面这种类型的定

理,能有效地应用于全纯函数的某些问题.

设在以域D内的点z_0为中心、以R为半径的圆周上,有不包含于D内的中心角为α的弧,以C表示D的边界与圆盘$|z-z_0|<R$的交.如果$f(z)$在D内单值全纯,满足$|f(z)|\leqslant M$,并对于任意的点$\zeta\in C$,有$\limsup_{z\to\zeta}|f(z)|\leqslant m$,则对满足$2\pi/n\leqslant\alpha$的自然数$n$,就有$|f(z_0)|\leqslant M^{1-1/n}m^{1/n}$成立(**Lindelöf 定理**).

设D是由从一点O出发张角为$\pi\alpha$的两条线段OA, OB与Jordan弧$\widehat{AB}$围成的域,以R表示O到$\widehat{AB}$上的点的最大距离.若函数$f(z)$在D内全纯,且当$z\in D$, $z\to\zeta\in\partial D$时,对于$\zeta\in OA\cup OB$, $\limsup|f(z)|$不超过M,而对于$\zeta\in\widehat{AB}$,它不超过m,则对D内位于$\angle AOB$的平分线上的点,$|f(z)|\leqslant M^{1-(|z|/R)^{1/\alpha}}\times m^{(|z|/R)^{1/\alpha}}$成立(**Carleman 定理**).

【具有正实部的全纯函数】 具有正实部的全纯函数与有界函数有密切的关系.例如关于它同Schwarz引理相当的古典结果,就如下述:若$f(z)$在$|z|<R$内全纯,在其内满足$\Re f(z)\geqslant 0$,且$f(0)=1$,则有$(R-|z|)/(R+|z|)\leqslant\Re f(z)\leqslant(R+|z|)/(R-|z|)$ $(|z|<R)$.其中左端或右端对满足$0<|z_0|<R$的点z_0变为等号分别只限于$f(z)=(Rz_0\mp|z_0|z)/(Rz_0\pm|z_0|z)$的情形.

为了推导关于在圆内具有正实部的上述函数族的各种结果,可以有效地应用由Poisson积分表示[†]得到的 **Herglotz 积分表示**(Herglotz's integral representation),它表征了这个函数族的特性. Herglotz表示的形式是

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}\,d\rho(\varphi),\quad |z|<R.$$

这里$\rho(\varphi)$是除了附加常数不计外由$f(z)$唯一确定的、全变差等于1的递增(实值)函数.对于在同心圆环内具有正实部的单值全纯函数,也能导出类似的积分表示.

一般地,对于全纯函数$f(z)$, $\Re f(z)$是调和[†]的.特别是,若$f(z)\neq 0$,则$\log|f(z)|$也是调和的.反之,任意的调和函数可以看作全纯函数的实部.基于这个关系,全纯函数的一些性质可以转化为调和函数的有关性质.例如,关于$|f(z)|$的最大值的最大模原理,可以容易地转述为调和函数的最大值原理.不过,必须注意,在多连通域的情形,单值调和函数的共轭调和函数不一定是单值的.然而,极大值只与局部性质有关,一般地说多连通性的影响并不大.最大值原理更一般地对于次调和函数[†](作为函数值本身的最大值)也成立.

【系数问题】 关于圆内有界函数的Taylor展开式的部分和与系数,很早以来就已得到许多结果.设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$是$|z|<1$内一个全纯函数的Taylor展开式,令其部分和为$s_n(z)=\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu z^\nu$ $(n=0,1,\cdots)$,令由部分和序列作出的算术平均序列(Fejér和序列)为$t_n(z)=\left(\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu(z)\right)\Big/(n+1)$ $(n=0,1,\cdots)$.这时,在$|z|<1$内使$|f(z)|\leqslant 1$成立的充分必要条件是,在$|z|=1$上,$|t_n(z)|\leqslant 1$ $(n=0,1,\cdots)$成立(L. Fejér).这样,对于有界函数,序列$\{t_n(z)\}$一致有界,但是序列$\{s_n(z)\}$却不是一致有界的.事实上,取遍在$|z|<1$内满足$|f(z)|\leqslant 1$的函数族,$|s_n(1)|$的最大值等于

$$G_n=1+\sum_{j=1}^{n}\binom{-1/2}{j}^2=\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2j-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot2j}\right)^2.$$

当$n\to\infty$时,$G_n\sim\pi^{-1}\log n$.

关于系数问题,下面的结果是有决定性的:对于在$|z|<1$内全纯的$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$,令$h_{\mu\nu}=\sum_{j=0}^{\mu}\bar{c}_{\mu-j}c_{\nu-j}$ $(\mu\leqslant\nu)$, $h_{\nu\mu}=\bar{h}_{\mu\nu}$,设Hermite矩阵$(-h_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0}^{n}$的最大特征值(非负实数)为$m_n^2$,令$m=\lim m_n$ $(\geqslant 0)$.再作无穷多个变量的Hermite型

$$H = m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{x}_\nu x_\nu - \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} h_{\mu\nu} \bar{x}_\mu x_\nu$$
$$= m^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|^2 - \sum_{\mu=0}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x_{\mu+\nu} \right|^2.$$

这时，在 $|z| < 1$ 内使 $|f(z)| \leqslant 1$ 成立的充分必要条件是 H 为半正定；也即，或者主子行列式[†]的序列 $\Delta\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$ $(m = 1,2,\cdots)$ 全是正的，或者最初有限个是正的而剩下的都是零 (I. Schur).

关于在圆内具有正实部的函数，相应的结果能表示为更简单的形式：在 $|z| < 1$ 内全纯的函数 $f(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ 满足 $\Re f(z) \geqslant 0$ 的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} 1 & c_1 & \cdots & c_n \\ \bar{c}_1 & 1 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \bar{c}_n & \bar{c}_{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad n = 1,2,\cdots$$

成立 (C. Carathéodory). 而且，如果对每个自然数 n，把 $(c_1, \cdots, c_n)$ 看作复 n 维 Euclid 空间的点，则我们能够确定当 $f(z)$ 取遍问题中所说的函数族时，这样的点的存在范围. 这个结果可以推广到在同心圆环内单值全纯且具有正实部的函数的 Laurent 展开式的系数的情形.

关于不取两个值的全纯函数，还有下面的结果：若 $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots$ $(a_1 \neq 0)$ 在 $|z| < R$ 内全纯且在该圆内 $f(z) \neq 0,1$，则存在只由 a_0, a_1 确定的常数 $L(a_0, a_1)$，使得 $R \leqslant L(a_0, a_1)$ (**Landau 定理**). 这时还有，对于 $0 < \theta < 1$，存在只由 a_0 和 θ 确定的常数 $S(a_0, \theta)$，使在 $|z| \leqslant \theta R$ 内，有 $|f(z)| \leqslant S(a_0, \theta)$ (**Schottky 定理**). 这些都可应用于值分布理论.

【角微商】 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内全纯，如果沿以单位圆周上的点 z_0 为终点的 Stolz 道路 $z \to z_0$ 时，一致地有 $f(z) \to w_0$，且极限 $\lim_{z \to z_0} (f(z) - w_0)/(z - z_0) = D$ 存在，则称 D 为 $f(z)$ 在 z_0 处的**角微商** (angular derivative). 在域是半平面 $\Re z > 0$ 的情形，对虚轴上的点 z_0 也可同样地定义角微商. 但是，当 $w_0 = \infty$ 时，在上式中要用 $1/f(z)$ 代替 $f(z) - w_0$，而当 $z_0 = \infty$ 时，要用 z 代替 $1/(z - z_0)$. 在后面这种情形，Stolz 道路理解为包含于角域 $|\arg z| \leqslant \alpha$ $(< \pi/2)$ 内的趋于 ∞ 的道路. 角微商的研究由 G. Julia (1920), J. Wolff (1926) 开始，而由 Carathéodory (1929), E. Landau-G. Valiron (1929) 推进.

关于角微商的基本定理可叙述如下：若在 $\Re z > 0$ 内全纯的函数 $f(z)$ 满足 $\Re f(z) \geqslant 0$，则存在常数 $c(0 \leqslant c < +\infty)$，使当 z 沿 Stolz 道路趋于 ∞ 时，一致地有 $f(z)/z \to c$ 和 $f'(z) \to c$；且对任意的正整数 p，对于 $f(z)$ 的 p 阶导数 $D^p f(z)$，还一致地成立 $z^{p-1} D^p f(z) \to c/\Gamma(2-p)$. 此外，在 $\Re z > 0$ 内，处处成立 $\Re f(z) \geqslant c \Re z$. 单位圆的情形也有类似的定理.

对于保角映射理论，研究把 z 平面上的单位圆(或半平面) D 映射到 w 平面的单连通域 B 上的函数 $w = f(z)$，在 D 的边界上的一点 z_0 处具有非零的有限角微商的条件，也即在边界上兼有保角性和线素比不变性的条件，是重要的. Carathéodory 指出，使这一点成立的一个充分条件是：存在分别在 B 的外部和内部的两个圆周，它们在 B 的边界点 $w_0 = f(z_0) \neq \infty$ 处互相外切或内切. 接着，L. Ahlfors 利用关于带形域的畸变定理[†]，导出了角微商存在的充分必要条件. Wolff 在保角映射的迭代的研究中应用了角微商.

【参】 [1] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II, Teubner, 1931 (Johnson Reprint Co., 1969); [2] C. Carathéodory, Funktionentheorie I, II, Birkhäuser, Basel, 1950 (英译本：Theory of functions, Chelsea, I, 1958, II, 1960); [3] 小松勇作，等角写像論，上，共立出版，1944; [4] 小松勇作，函数論，函数論演習，朝倉，1960; [5] E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionen theorie, Springer, 1929; [6] J. E. Littlewood, Lectures on the theory of functions I, Oxford Univ. Press, 1944; [7] 辻正次，複素変数函数論，共立出版，1934; [8] 辻正次-小松勇作編，函数論，裳華房，1959.

单叶函数和多叶函数 [英 schlicht (simple, univalent) function and multivalent function 法

fonction univalente et fonction multivalente 德 schlichte Funktion und multivalente Funktion 俄 однолистная функция и многолистная функция 日 単葉関数．多葉関数］ 在复数平面上的域 D 内有定义的单值解析函数† $f(z)$，如果对 D 内不同的两点 z_1, z_2，恒有 $f(z_1) \neq f(z_2)$，则称它在 D 内是**单叶的**（schlicht，simple，univalent）．即使当 $f(z)$ 在 D 内多值时，如果不同的函数元素在其中心处必取不同的值，则也称它为单叶的．单叶函数的导数必定不等于零．一致收敛的单叶函数序列的极限函数，如果它不是常数，则必为单叶函数．在 $f(z)$ 是单值的情形，单叶函数 $w = f(z)$ 给出了 D 和值域 $f(D)$ 之间的一一保角映射†．单叶函数理论是保角映射理论的一个重要组成部分．

【单位圆内的单叶函数】 在单位圆内全纯的单叶函数族的理论，肇源于 P. Koebe (1909) 所得到的与解析函数单值化†问题相联系的**畸变定理**（英 distortion theorem 德 Verzerrungssatz）．所谓畸变定理，一般地是指确定关于所考虑的单叶函数族的泛函，例如 $|f(z)|$，$|f'(z)|$，$\arg f'(z)$ 等的界限的定理．特别是，称关于 $f(z)$ 和 $f'(z)$ 的辐角的界限的畸变定理为**旋转定理**（rotation theorem）． 可是那些结果最早是定性的，而使之定量化的则是 L. Bieberbach (1916)，G. Faber (1916) 等人．对于单位圆内满足 $f(0) = 0$，$f'(0) = 1$ 的全纯单叶函数，我们有下面的**畸变不等式**（distortion inequalities）：

$$|z|/(1+|z|)^2 \leqslant |f(z)| \leqslant |z|/(1-|z|)^2,$$

$$(1-|z|)/(1+|z|)^3 \leqslant |f'(z)| \leqslant (1+|z|)/(1-|z|)^3;$$

这里等号只限于 $f(z)$ 形如 $z/(1-\varepsilon z)^2$ $(|\varepsilon| = 1)$ 的情形才成立．在推导这些不等式时，Bieberbach 以**面积定理**（德 Flächensatz）作为基础，这条定理表征了由单位圆外部 $|\zeta| > 1$ 内亚纯单叶的函数 $g(\zeta) = \zeta + \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \zeta^{-\nu}$ 所映得的象域的余集的面积是非负的：$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu |b_\nu|^2 \leqslant 1$． 基于面积定理，Bieberbach，R. Nevanlinna (1919—20) 等建立了单位圆内单叶函数的一个系统的理论． Bieberbach (1916) 更证明了，对于单叶函数 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ $(|z| < 1)$，有 $|a_2| \leqslant 2$．

Bieberbach 还基于各种畸变定理中的极值函数常是 **Koebe 极值函数**（Koebe's extremal function）$\dfrac{z}{(1-\varepsilon z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon^{n-1} z^n$ $(|\varepsilon| = 1)$ 这一事实，猜想 $|a_n| \leqslant n$ $(n = 2, 3, \cdots)$ 成立．围绕这个 **Bieberbach 猜想**（Bieberbach's conjecture），尽管从各个方面对**系数问题**（coefficient problem）进行了研究，可是现在还没有达到完全的解决． 在这方面，J. E. Littlewood (1925) 的结果 $|a_n| < en$，E. Landau (1929) 的结果 $\limsup_{n\to\infty} (\sup_f |a_n|/n) \leqslant (1/2 + 1/\pi)e$ 等是著名的．

【Löwner 微分方程】 与基于 Bieberbach 面积定理的单叶函数理论不同，K. Löwner (1923) 从新的观点出发，在这个理论中引进了重要的方法．即是，如果用 C. Carathéodory (1912) 关于域核的定理，为了估计关于单位圆内全纯单叶函数族的连续泛函，只要考察处处稠密的子族即可． Löwner 为了确定这样的子族，采用了把单位圆盘映到所谓有界截线域上的映射函数．这个子族中每个函数的象域是由单位圆盘除去从单位圆周上的一点出发而不通过原点的 Jordan 弧后所得到的域；具有这种性质的映射函数是 **Löwner 微分方程**（Löwner's differential equation）

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial t} = -f(z,t)\frac{1+\kappa(t)f(z,t)}{1-\kappa(t)f(z,t)},$$

$$0 \leqslant t \leqslant t_0$$

在初始条件 $f(z, 0) = z$ 下的积分 $f(z, t_0)$． 在这里 $\kappa(t)$ 是绝对值等于 1 的连续函数． 满足 $f(0) = 0$，$f'(0) = 1$ 的单位圆内的全纯单叶函数，可以用形如 $e^{t_0} f(z, t_0)$ 的函数任意精确地逼近． Löwner 用这个微分方程证明了 $|a_3| \leqslant 3$，推出了关于反函数的系数问题的决定性的估计 (Math. Ann., **89** (1923))．

Г. М. Голузин (1935), И. Е. Базилевич (1936) 等的苏联学派首先认识到这个 Löwner 方法对畸变定理也是有力的. 他们揭示了，关于古典的畸变定理，可以得到更精密的形式 (Голузин, Мат. Сб., **2** (1937), 685). 特别是，Голузин (1938) 得到了关于旋转定理的精确估计:

$$|\arg f'(z)| \leqslant \begin{cases} 4\arcsin|z|, \\ \quad |z| \leqslant 1/\sqrt{2}, \\ \pi + \log(|z|^2/(1-|z|^2)), \\ \quad 1/\sqrt{2} \leqslant |z| < 1. \end{cases}$$

还有从更一般的观点研究 Löwner 的方法，这方面有 A. C. Schaeffer-D. C. Spencer (1945) ([4])，小松勇作-名倉昌平 (1949) 的工作.

M. Schiffer (1938) 基于在单叶函数族内给出特殊的变分，导出了对于某种泛函给出极值的函数所满足的微分方程，并讨论了种种极值问题. 在单叶函数的研究中，这个方法可与 Löwner 方法并列，都是有力的. P. R. Garabedian-Schiffer (1956) 把 Schiffer 的方法与 Löwner 的方法结合起来，援用常微分方程中关于 Sturm-Liouville 问题[†]的理论，使用大规模的数值计算，证明了 Bieberbach 猜想中的 $|a_4| \leqslant 4$. 以后 Z. Charzynski-Schiffer (1960) 对 $|a_4| \leqslant 4$ 给出了另一简单的证明. 另一方面，W. K. Hayman ([5]) 完全初等地证明了，对于在 $|z| < 1$ 内全纯单叶的 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$，如果它不是 Koebe 极值函数 $z/(1-e^{i\theta}z)^2$，就有 $\limsup_{n\to\infty}|a_n|/n < 1$. Базилевич (1951) 还改进了 Голузин 的方法和结果，关于 n 固定时 $|a_n|$ 的最大值 A_n，他证明了 $A_n < (e/2)n + 1.51$，并证明了存在 $K_0 = \lim_{n\to\infty} A_n/n$，且有 $1 \leqslant K_0 < e/2$.

【其他单叶函数族】 以上是关于单位圆内一般的单叶函数族的定理，然而关于满足有界性条件，象对于原点是星形域[†]或象是凸[†]域等条件的子族，还可以得到有关畸变定理和系数问题等方面的许多结果. 例如，若 $w = f(z) = z + \cdots$ 在 $|z| < 1$ 内全纯单叶且象域是凸的，则

$$|z|/(1+|z|) \leqslant |f(z)| \leqslant |z|/(1-|z|),$$
$$1/(1+|z|)^2 \leqslant |f'(z)| \leqslant 1/(1-|z|)^2,$$

在这里对于 z_0 $(0 < |z_0| < 1)$ 等号成立只限于形如 $f(z) = z/(1+\varepsilon z)$, $\varepsilon = \pm|z_0|/z_0$ 的函数.

另一方面，多连通域的保角映射问题，与单连通的情形相比，具有本质的困难. 对于这个问题，Bieberbach 方法不再适用，但 Löwner 和 Schiffer 的变分方法依然是有力的 (→ 保角映射).

【多叶函数】 多叶函数是单叶函数的一个自然的推广. 关于多叶函数，可以得到单叶函数的许多古典结果的推广.

如果函数 $f(z)$ 在域 D 内取所有的值至多 p 次，且恰取到某个值 p 次，则称 $f(z)$ 在 D 内是 **p 叶的** (p-valent)，$p > 1$ 时称 $f(z)$ 为**多叶函数**. 为使 $|z| \leqslant 1$ 上全纯的 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在其上 p 叶，一个充分条件是，在圆周 $|z| = 1$ 上，

$$p - 1 < \Re(zf'(z)/f(z)) < p + 1$$

成立. 从而，例如关系

$$|a_p| - \sum_{n=2}^{p} n|a_{p+1-n}| > \sum_{n=2}^{\infty} n|a_{p-1+n}|$$

是充分的. 又如果 $f(z) = (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)/z^p$ 在 $0 < |z| \leqslant 1$ 内是全纯 p 叶的，则对任意的在 $\rho \geqslant 0$ 内递增的函数 $F(\rho)$,

$$\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} F(|f(re^{i\theta})|)d\theta \leqslant 0$$

成立. 特别取 $F(\rho) = \rho^2$，它就成为一条面积定理，由此可以得到 p 叶函数的系数估计等.

其次，如果 $f(z)$ 在 D 内为 p 叶，而且对任意的常数 $c_0, \cdots, c_p$, $c_0 + c_1 z + \cdots + c_{p-1}z^{p-1} + c_p f(z)$ 在 D 内至多为 p 叶，则称 $f(z)$ 在 D 内是**绝对(或完全) p 叶的** (absolutely p-valent). 如果在凸域 K 内全纯的 $f(z)$，对某个实常数 α 满足 $\Re(e^{i\alpha}f^{(p)}(z)) > 0$，则 $f(z)$ 在 K 内是绝对 p 叶的. 如果 $f(z)$ 在 D 内是绝对 p 叶的，则对任

意的常数 b_k, c_k,

$$\left(\sum_{k=0}^{p-1} b_k z^k + b_p f(z)\right) \Big/ \left(\sum_{k=0}^{p-1} c_k z^k + c_p f(z)\right)$$

在 D 内至多是 p 叶的.

如果 $f(z)$ 在以 D 的每个点为中心、具有固定半径 ρ 的圆和 D 的交内为 p 叶, 则称 $f(z)$ 是**局部 p 叶的** (locally p-valent), ρ 称为它的**模** (modulus). 为使在 D 内全纯的 $f(z)$ 至多局部 p 叶的充分必要条件是, $f'(z), \cdots, f^{(p)}(z)$ 不能同时为 0; 而为使它**局部绝对 p 叶的** (locally absolutely p-valent) 充分必要条件是 $f^{(p)}(z) \neq 0$. 以 $n(D, Re^{i\varphi})$ 表示 $f(z)$ 在 D 内的 $Re^{i\varphi}$ 点的个数, 如果对所有 R 有

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} n(D, Re^{i\varphi}) R dR d\varphi \leqslant p\pi R^2,$$

则称 $f(z)$ 在 D 内是**平均 p 叶的** (mean p-valent). 若 $f(z)^q$ $(q > 1)$ 在 D 内平均 p 叶, 则 $f(z)$ 在 D 内平均 p/q 叶. 若 $f(z) = (1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)/z^\lambda$ 在 $0 < |z| \leqslant 1$ 内全纯且平均 λ 叶, 则面积定理 $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)|a_n|^2 \leqslant \lambda$ 成立.

设 E 是至少具有三个点的集. 如果 $f(z)$ 在 D 内取 E 的所有的值最多不超过 p 次, 且取 E 的某个值恰好 p 次 (而取 E 外的值可能在 p 次以上), 则称 $w = f(z)$ 在 D 内是**拟 p 叶的** (quasi p-valent). 若 $w = f(z)$ 在 D 内 p 叶, $g(w)$ 在相应的域 $f(D)$ 内拟 q 叶, 则 $g(f(z))$ 在 D 内至多是拟 pq 叶的.

【参】 [1] P. A. Montel, Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, Gauthier-Villars, 1933; [2] 小松勇作, 等角写像論, 共立出版, 上 1944, 下 1949; [3] M. Biernacki, Les fonctions multivalentes, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1938; [4] A. C. Schaeffer-D. C. Spencer, Coefficient regions for schlicht functions, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1950; [5] W. K. Hayman, The asymptotic behaviour of p-valent functions, Proc. London Math. Soc., **5** (1955), 257—284; [6] W. K. Hayman, Multivalent functions, Cambridge Tracts, 1958; [7] J. A. Jenkins, Univalent functions and conformal mapping, Springer, 1958; [8] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952 (中译本: Г. М. 戈鲁辛, 复变函数的几何理论, 科学出版社, 1956).

超越整函数 [英 transcendental integral function, transcendental entire function 法 fonction entière transcendente 德 ganze transzendente Funktion 俄 трансцендентная целая функция 日 超越整関数] 如果复变量 z 的复值函数 $f(z)$ 在所有不等于 ∞ 的点 z 处全纯, 则称 $f(z)$ 为**整函数** (integral function, entire function). 在 ∞ 是 $f(z)$ 的极点的情形, 它就成为多项式; 称多项式为**有理整函数** (rational integral function). 有界整函数是常数 (Liouville 定理[†]). 不是多项式的整函数是**超越整函数**, 例如 $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$. 整函数 $f(z)$ 可展开为收敛半径为 ∞ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 如果 $f(z)$ 是超越整函数, 则这个级数是无穷级数.

【整函数的阶】 若 $z = 0$ 是超越整函数 $f(z)$ 的 m 阶零点 $(m \geqslant 0)$, 而 $f(z)$ 的其他零点是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots$ $(0 < |\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant |\alpha_3| \leqslant \cdots \to \infty)$, 多重零点按它的阶数重复排列, 则 $f(z)$ 可表示为

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{g_k(z:\alpha_k)}$$

(Weierstrass **典范乘积** (canonical product)). 这里 $g(z)$ 是整函数, $g_k(z;\alpha_k) = (z/\alpha_k) + (1/2)(z/\alpha_k)^2 + (1/3)(z/\alpha_k)^3 + \cdots + (1/p_k) \times (z/\alpha_k)^{p_k}$, 而 $p_1, p_2, \cdots$ 是使得 $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{p_k+1}$ 对所有 z 都收敛的自然数列.

为确定 $g(z)$, 有必要研究 $f(z)$ 的零点以外的性质. E. N. Laguerre 引进了亏格的概念. 设 p 是使 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_k|^{p+1}}$ 收敛的最小整数, 且设 $f(z)$ 的上述表示式中, 当 $p_1 = p_2 = \cdots = p$ 时, $g(z)$ 退化为 q 次多项式; 则称 $\max(p, q)$ 为 $f(z)$ 的**亏格** (genus). 然而对于超越整函数, **阶** (order) ρ 比亏格是更本质的. 超越整函数 $f(z)$ 的阶由

$$\rho = \limsup_{r \to \infty} \log \log M(r) / \log r$$

所定义, 这里 $M(r)$ 是 $|f(z)|$ 在 $|z| = r$ 上的最大值. 使用 $f(z) = \sum a_n z^n$ 的系数, 阶还可

以表示为

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} n\log n/\log(1/|a_n|).$$

当一个超越整函数的阶 ρ 为有限时，就称为**有限阶** (finite order) 函数，而当 ρ 无限时，称为**无限阶** (infinite order) 函数. 关于无限阶函数，有 A. Denjoy, G. Valiron 等人的研究. 对于有限阶整函数，按照 $\limsup_{r\to\infty} \log M(r)/r^\rho$ 为正有限数、零或无穷大，分别称它为**正规型** (normal)、**最小型** (minimal) 或**最大型** (maximal). Valiron 等研究过阶为零的函数，指出它具有类似于多项式的性质；阶小于 1/2 的整函数，对于适当的递增数列 $r_n\uparrow\infty$，满足 $\lim_{r_n\to\infty}\min_{|z|=r_n}|f(z)|=\infty$ (**Wiman 定理**). 因之，阶小于 1/2 的整函数在延伸到无穷远的域内不会是有界的. 给定角域 D: $\alpha<\arg z<\alpha+\pi/\mu$，在阶大于 1/2 的函数中，存在在 D 内有界的函数. 若在 D 内有 $|f(z)|<\exp r^\rho$ $(\rho<\mu)$，且 $f(z)$ 在 D 的边界上有界，则 $f(z)$ 在这个角域内有界 (→ 亚纯函数). 特别当 $f(z)$ 的阶 ρ 是整数 p 时，阶与亏格相等，$g(z)$ 成为次数不超过 p 的多项式 (J. Hadamard). 这些定理是在 Riemann ζ 函数†的零点的研究的刺激下发展起来的，它们成为整函数理论的一个起源.

按照阶是不是整数，在整函数的性质上能观察到某种差别. 一般地，使 $f(z)=w$ 的 z 称为 $f(z)$ 的 **w 点** (w-point). 设原点以外的 w 点是 $\{z_n\}$，则使 $\sum 1/|z_n|^k$ 收敛的 k 的下确界 $\rho_1(w)$，称为 $f-w$ 的**收敛指数** (exponent of convergence). 如果整函数的阶 ρ 是整数，则最多除去一个值外，对所有其他的 w 值，都有 $\rho_1(w)=\rho$；如果 ρ 不是整数，则对所有 w 值，$\rho_1(w)=\rho$ (É. Borel). 因而任意超越整函数 $f(z)$，最多除去一个值 (称为 $f(z)$ 的**例外值** (exceptional value)) 外，对所有其他 w 值，都有无穷多个 w 点 (**Picard 定理**). 特别是，如果 ρ 不是整数，则例外值不存在. 例如，$\sin z$, $\cos z$ 没有例外值，e^z 有例外值 0. 因为超越整函数没有极点，所以也可以把 ∞ 算做例外值. 这时在 Picard 定理的叙述中必须改为"最多有两个例外值". E. Picard 在 1879 年得到了这条定理. 以后，沿着这个方向，完成了非常多的研究 (→ 亚纯函数、聚值集). Picard 本人是用模函数†的反函数来证明的，以后出现了几种用别的方法的证明. 有利用 Landau-Schottky 定理、Bloch 定理†等的证明，也有利用正规族†的证明，等等. Picard 定理也被推广到亚纯函数，对定义在更一般的域内的解析函数也已进行了研究. 详细的定量研究也很多. 例如，Valiron 基于整函数在取到它的绝对值的最大值的点的邻域上的精密计算，得到了详细的定量的定理 (Valiron [4]).

此后，许多人研究了在本性奇点的邻域内 w 点的分布状态，它们由 1925 年关于亚纯函数†的 R. Nevanlinna 理论统一了起来，成为这个理论的核心的是冠以 Nevanlinna 名字的两条基本定理 (→ 亚纯函数).

【Julia 方向】 G. Julia 应用全纯函数正规族的理论，证明了作为 Picard 定理的精密化的 Julia 方向的存在 ([6]): 对超越整函数 $f(z)$，至少存在一个方向 $\arg z=\theta$，使对任意给定的正数 ε，在角域 $\theta-\varepsilon<\arg z<\theta+\varepsilon$ 内，最多除去一个值外，$f(z)$ 无限次地取所有其他 (有限) 值. 称 $\arg z=\theta$ 这个方向为 $f(z)$ 的 **Julia 方向** (Julia's direction).

【渐近值】 整函数的渐近值†，渐近路线†等，同亚纯函数情形一样地定义. 关于反函数的 Iversen 定理†，Gross 定理†，其聚值集†，寻常奇点†，还有把孤立奇点†分为直接超越奇点†和间接超越奇点†等等，与亚纯函数情形完全相同.

Picard 定理中的例外值，是定理中所说的函数的渐近值，而 ∞ 是所有超越整函数的渐近值. 因此，如果沿着趋向 ∞ 的适当的曲线前进，就有 $f(z)\to\infty$. 在对应不同的两个渐近值的两条渐近路线之间，必存在以 ∞ 为渐近值的渐近路线. A. Bloch 从 Bloch 定理†出发证明了，超越整函数的反函数的 Riemann 面†包含半径任意大的圆盘. 设整函数的阶是 ρ，不同的有限渐近值的个数是 μ，Denjoy (1907) 猜想 $\mu\leqslant$

2ρ, L. V. Ahlfors 首次给出了证明(1929). 这个结果包含 Wiman 定理. 实际达到 $\mu=2\rho$ 的超越整函数是存在的. W. Gross 揭示了,在无限阶整函数中,存在以所有的值为渐近值的整函数.

【参】[1] 辻正次,複素変数函数論,共立出版,1934; [2] E. C. Titchmarsh, The theory of functions, Clarendon Press, 第二版 1939 (中译本: E. C. 梯其玛希,函数论,科学出版社, 1962); [3] R. P. Boas, Jr., Entire functions, Academic Press,1954; [4] G. Valiron, Lectures on the general theory of integral functions, Librairie de l'Université, Toulouse,1923 (Chelsea, 1949); [5] L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie II. Teubner, 1931 (Johnson Reprint Co., 1969); [6] G. Julia, Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes, Ann. Sci. École Norm. Sup., **36** (1919), 93—125.

亚纯函数 [英 meromorphic function 法 fonction méromorphe 德 meromorphe Funktion 俄 мероморфная функция 日 有理形関数] 在复数平面的域D内有定义,且除极点†以外没有其他奇点的单值解析函数,称为在D内**亚纯** (meromorphic). 在含有无穷远点的全平面上亚纯的函数是有理函数 (**Liouville 定理**). 在不含有无穷远点的全有限平面内亚纯的函数简称为**亚纯函数**. 不是有理函数的亚纯函数称为**超越亚纯函数**(transcendental meromorphic function). 对这种情形,不再事先一一说明定义域是$|z|<\infty$. 亚纯函数可以表示为两个整函数†的商. 设亚纯函数 $f(z)$ 的极点是 $\{z_k\}$ $(k=1,2,\cdots)$, 在 z_k 处的奇异部分†是 $f_k(z)=a_{n_k}^{(k)}/(z-z_k)^{n_k}+\cdots+a_1^{(k)}/(z-z_k)$, 则能适当地选择一个整函数 $g(z)$ 和有理整函数 $p_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$, 使得 $f(z)$ 可表示为

$$f(z)=g(z)+\sum_{k=1}^{\infty}(f_k(z)-p_k(z))$$

的形状 (**Weierstrass 定理**). 又设 $\{z_k\}$ 是只以∞为聚点的点列, $f_k(1/(z-z_k))$是$1/(z-z_k)$的缺常数项的有理整函数, 则存在 z 的亚纯函数, 它在 z_k 处以 $f_k(1/(z-z_k))$ 为奇异部分 (**Mittag-Leffler 定理**).

【Nevanlinna 理论】 可以把亚纯函数理论看作整函数理论的推广;而以 Picard 定理†为起源的值分布理论, 特别有很多人进行了研究. 1925 年, R. Nevanlinna 对之进行了统一的论述,被称为 **Nevanlinna 理论**.

以下设 $f(z)$ 是 $|z|<R\leqslant+\infty$ 内的亚纯函数, 且说到"$f(z)$ 取的值"时也包括 ∞ 在内. 从 $n(r,\alpha)$ 表示 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r<R$ 范围内取值为 α 的点即 **α 点** (α-point) 的个数, 在计数时它的阶是多少就重复多少次. 现在, 当 $\alpha\neq\infty$ 时, 令

$$N(r,\alpha)=\int_0^r\frac{n(t,\alpha)-n(0,\alpha)}{t}dt+n(0,\alpha)\log r,$$

$$m(r,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\theta})-\alpha}\right|d\theta$$

(其中 $\log^+a=\max(\log a,0)$); 当 $\alpha=\infty$ 时, 令

$$N(r,\infty)=\int_0^r\frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}dt+n(0,\infty)\log r,$$

$$m(r,\infty)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

称N为 $f(z)$ 的**计数函数** (德 Anzahlfunktion), 称m为 $f(z)$ 的**迫近函数** (德 Schmiegungsfunktion). 还把 $T(r)=m(r,\infty)+N(r,\infty)$ 称为 $f(z)$的**阶函数** (order function) 或**特征函数** (德 charakteristische Funktion). $T(r)$ 是 r 的单调递增函数, 是 $\log r$ 的凸函数†; 它对表 $f(z)$ 为无穷乘积等是有用的.

这些函数之间有下面的关系: 对任意的α,

(1) $T(r)=m(r,\alpha)+N(r,\alpha)+O(1)$.

这里 $O(1)$ 是 Landau 符号† (**Nevanlinna 第一基本定理**). 这条定理表明, 对任意的 α, 如果不计有界的余项, 则 $m(r,\alpha)+N(r,\alpha)$ 都等于 $T(r)$, 这就显示出 α 点的分布是平衡的.

$N(r,\alpha)$ 是 $|z|\leqslant r$ 内 α 点的个数的一种平均, $m(r,\alpha)$ 是 $|z|=r$ 上 $f(z)$ 接近 α 的程度的一种平均. 此外, 如果用 $f(re^{i\theta})$与 α 之间在复数球面上的弦距离的倒数的对数来代替 $\log^+$ 这一项, 则(1) 就没有余项, 所以常用这种形式来定义迫近函数.

【亚纯函数的阶】 诸如无穷乘积展开等等, 一用上述的 Nevanlinna 记号 $T(r)$, 就能用

整齐的形式表示。对于整函数 $f(z)$，令 $M(r)=\max_{|z|=r}|f(z)|$，就可以得到关系式

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r)}{\log r}=\limsup_{r\to\infty}\frac{\log\log M(r)}{\log r}.$$

因为右端是 $f(z)$ 的阶（→超越整函数），所以对于亚纯函数 $f(z)$，定义它的**阶**（order）为

$$\limsup_{r\to\infty}\log T(r)/\log r=\rho.$$

对于在 $|z|<R$ 内亚纯的函数，也用

$$\limsup_{r\to R}\log T(r)/\log(1/(R-r))=\rho$$

来定义它的**阶**.

【在圆盘内亚纯的函数】 为使 $T(r)$ 有界的充分必要条件是，在 $|z|<R$ 内可以把 $f(z)$ 表示为有界全纯函数 $h_1(z),h_2(z)$ 的商（Nevanlinna）。若 $T(r)$ 有界，则从 θ 的区间 $0\leqslant\theta<2\pi$ 内至多除去一维测度†为 0 的集合，$\lim_{r\to R}f(re^{i\theta})$ 都存在且有限（P. Fatou-Nevanlinna）。在满足 $\lim_{r\to R}T(r)=\infty$ 的函数中，使得 $\limsup_{r\to R}T(r)/\log(1/(R-r))=\infty$ 的函数具有与超越亚纯函数相近的各种性质.

【在全平面内亚纯的函数】 满足 $\limsup_{r\to\infty}T(r)/\log r<K$ 的亚纯函数是有理函数。如果 $f(z)$ 是 ρ 阶亚纯函数，$\{r_j(\alpha)\}$ 是它的 α 点的绝对值的集合，且 $r_j(\alpha)\leqslant r_{j+1}(\alpha)$ $(j=1,2,\cdots)$，则 $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r_j(\alpha)}\right)^{\rho+\varepsilon}$ 对任意的 α 都收敛（**Hadamard 定理**）。设 $f(z)$ 是 ρ 阶亚纯函数，则

$$f(z)=z^k e^{P(z)}\times\lim_{r\to\infty}\prod_{\substack{|a_\mu|\leqslant r\\|b_\nu|\leqslant r}}\frac{(1-z/a_\mu)\exp(z/a_\mu+\cdots+z^p/pa_\mu^p)}{(1-z/b_\nu)\exp(z/b_\nu+\cdots+z^p/pb_\nu^p)}$$

这里 p 是使得 $p+1>\rho$ 的最小整数，a_μ 是 $f(z)$ 的零点，b_ν 是 $f(z)$ 的极点，k 是整数，$P(z)$ 是至多 p 次的多项式（**Hadamard 定理**）.

设 $a_1,\cdots a_q$ $(q\geqslant 3)$ 是不同的值，则对在 $|z|<R\leqslant\infty$ 内亚纯的任一函数 $f(z)$，在 $0\leqslant r<R$ 内，有

$$(q-2)T(r)<\sum_{j=1}^{q}N(r,a_j)-N_1(r)+D(r).$$

其中 $N_1(r)=\int_0^r\frac{n_1(t)-n_1(0)}{t}dt+n_1(0)\log r$，而 $n_1(r)$ 是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 内多重点†的个数（阶为 k 时算作 $k-1$ 个）。关于余项 $D(r)$，对于充分大的 K，当 $R=\infty$ 时，最多除去属于长度的和为有限的可数个区间中的 r，$D(r)<K(\log T(r)+\log r)$ 成立；而当 R 有限时，最多除去属于使得 $\sum_j\int_{I_j}d\left(\frac{1}{R-r}\right)<\infty$ 的可数个区间 $\{I_j\}$ 中的 r，$D(r)<K(\log T(r)+\log(1/(R-r)))$ 成立（**Nevanlinna 第二基本定理**）.

从这条定理出发，可以直接推出关于亚纯函数的值分布的种种定理。例如，若 $f(z)$ 是超越亚纯函数，则最多除去两个值（称为 **Picard 例外值**(Picard's exceptional value)）外，对所有其他的值 α，$f(z)=\alpha$ 的根都有无穷多个（**Picard 定理**）。对于 ρ 阶亚纯函数，最多除去两个值，对所有其他的值 α，$\lim_{r\to\infty}\sum_{r_j\leqslant r}(r_j(\alpha))^{-\lambda}$ $(\lambda<\rho)$ 都发散（**Borel 定理**）。称使这个级数收敛的 α 为 **Borel 例外值**(Borel's exceptional value)。称 $\delta(\alpha)=1-\limsup_{r\to\infty}N(r,\alpha)/T(r)$ 为 f 的**亏量**(defect)。恒有 $0\leqslant\delta(\alpha)\leqslant 1$。使 $\delta(\alpha)>0$ 的 α 称为 **Nevanlinna 例外值**(Nevanlinna's exceptional value)。若 $f(z)$ 是亚纯函数，则使 $\delta(\alpha)>0$ 的 α（包括 ∞）最多只有可数个，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\delta(\alpha_i)\leqslant 2$. 关于使 $\delta(\alpha)=0$ 的 α 值的研究也不少。也常称亏量为**亏指数**.

【Julia 方向】 在以无穷远点为本性奇点，且在全有限平面内亚纯的函数中，存在不具有 Julia 方向†的函数。称它为 **Julia 例外函数**(Julia's exceptional function)，它是零阶的。为使 $f(z)$ 是 Julia 例外函数的充分必要条件是，$f(z)$ 具有 $z^m\prod_\mu(1-z/a_\mu)\Big/\prod_\nu(1-z/b_\nu)$ 的形状（A. Ostrowski, 1925）。关于 $f(z)$ 的零点 a_μ，极点 b_ν，若分别以 $n(r,\infty)$，$n(r,0)$ 表示 $|z|\leqslant r$ 内 $f(z)$ 的极点和零点的个数，则从 P. Montel 的正规族理论可以得到下面三个性质：1）存在

与 r 无关的常数 K_1, K_2, K_3，使得 $|n(r,\infty)-n(r,0)|<K_1$，$n(2r,\infty)-n(r,\infty)<K_2$，$n(2r,0)-n(r,0)<K_3$；2) 存在常数 K_4 和 K_5，使对任意的 p, q，有

$$|a_p|^m \prod_{|a_\mu|<|a_p|} |a_p/a_\mu| \Big/ \prod_{|b_\nu|<|a_p|} |a_p/b_\nu| < K_4,$$

$$|b_q|^{-m} \prod_{|b_\nu|<|b_q|} |b_q/b_\nu| \Big/ \prod_{|a_\mu|<|b_q|} |b_q/a_\mu| < K_5;$$

3) 存在 $\varepsilon>0$，使对所有 p, q，有 $|a_p/b_q-1|\geqslant\varepsilon>0$.

G. Valiron 给出了 Julia 方向的一个精确形式，它与 Borel 定理相对应（[6]; Acta Math., **52** (1928)）. 也即，设 $f(z)$ 是 $|z|<\infty$ 内的亚纯函数，ρ 是它的阶†，$\rho>0$ 且有限，于是存在某个方向 J: $\arg z=\alpha$，设 $f(z)-a$ 在包含 J 的任意角域 Δ: $|\arg z-\alpha|<\delta$ 内的零点是 $z_\nu(a,\Delta)$，则最多除去 a 的两个例外值，对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sum_\nu |z_\nu(a,\Delta)|^{-(\rho-\varepsilon)}=\infty$. 称这个方向 J 为 **Borel 方向** (Borel's direction).

【两个或多个亚纯函数之间的关系】 没有零点的整函数 $f_1(z), f_2(z), f_3(z)$，如果满足 $c_1f_1(z)+c_2f_2(z)+c_3f_3(z)\equiv 0$，则其中每两个函数的商都是常数 (E. Borel). 如果对于五个不同的值 $\alpha_j\ (j=1,\cdots,5)$，两个亚纯函数 $f_1(z)$, $f_2(z)$ 具有相同的 α_j 点（重复度不包括在考虑之中），则这两个函数处处相等. 如果由关于 z, w 的多项式 $P(z,w)=0$ 定义的代数函数† $w(z)$ 的 Riemann 面† 的亏格† >1，则不可能有两个亚纯函数 $z=f(\zeta), w=g(\zeta)$，满足 $P(f(\zeta), g(\zeta))=0$（由亚纯函数所作的单值化†）.

【渐近值】 对于亚纯函数 $f(z)$，如果沿一条曲线 C 当 $z\to\infty$ 时有 $f(z)\to\alpha$，则称 α 为**渐近值**（英 asymptotic value 德 Zielwert），称 C 为**渐近路线** (asymptotic path). 虽然 $f(z)$ 的 (Picard) 例外值是渐近值，但还不知道亚纯函数渐近值的个数同阶之间的简单关系. 即使阶为零，也存在具有无穷多个有限渐近值的亚纯函数. 应用正规族理论，在亚纯函数理论中得到了与整函数理论的某些结果相类似的命题. F. Marty 使用球面距离，建立了亚纯函数正规族的统一理论.

【反函数】 亚纯函数 $w=f(z)$ 的反函数一般是无穷多值的. 考察反函数的以 w_0 为中心的函数元素 $P(w, w_0)$. 以 w_0 为起点任意地画一条曲线 C，设 C 的终点为 ω，则当用任意的域 S 包围 C 时，$P(w, w_0)$ 能在域 S 之内解析开拓到任意邻近 ω 的点 (**Iversen 定理**). 沿着从该函数元素的中心出发的所有半直线解析开拓这个元素时，在有限点处遇到奇点的半直线的幅角的集合，其测度为 0 (**Gross 定理**). 如果在反函数的 Riemann 面上添加适当的截线而考察 z 平面上的原象，则能把 z 平面分割为具有下述性质的基本域：每个域是全 w 平面（除掉适当的裂纹）的原象，边界是从内部可达的†，且基本域的边界曲线不聚集于有限点处. 对于亚纯函数 $f(z)$，由 $f(z')=f(z)$ 定义的函数 $z'=\varphi(z)$（即给出 $f(z)$ 的相同函数值的点之间的变换）的集合，具有超群† 的性质. 如果 $\varphi(z)$ 是单值函数，则它是一次整函数；如果 $\varphi(z)$ 是有限多值的，则它只能是代数函数. 反函数的超越奇点的聚值集† 只由一点 ∞ 构成（即是通常超越奇点†）. 沿确定反函数的超越奇点的曲线的解析开拓，对应 z 平面上以 ∞ 为终点的曲线，它是 $f(z)$ 的渐近路线. 即，沿渐近路线 $z\to\infty$ 时，$f(z)$ 的值收敛到反函数的超越奇点的坐标即渐近值. 超越亚纯函数 $w=f(z)$ 的每个渐近值对应于它的反函数 $z=\varphi(w)$ 的一个超越奇点，并且如果把对应 $w=f(z)$ 的同一超越奇点的渐近路线看作相同，则渐近路线的集合与反函数的超越奇点的集合是一一对应的. 阶 $\rho\geqslant 1/2$ 的亚纯函数的反函数，最多有 2ρ 个直接超越奇点†，而当 $1/2>\rho$ 时，最多有一个这样的奇点 (L. V. Ahlfors).

【覆盖面理论】 单连通的开 Riemann 面可以保角映射到圆的内部或全有限平面. 前者是双曲型† Riemann 面，后者是抛物型† Riemann 面. 从作为球面的覆盖面†的 Riemann 面的结构来决定 Riemann 面的型的问题，开始于 A. Spei-

ser 的研究,其后有很多工作.例如,在单连通开 Riemann 面在有限点处只有代数分歧点的情形,以 $n(\rho)$ 表示从一点出发,长度最大为 ρ 的道路能达到的子域内的分歧点的个数,若 $\int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho n(\rho)} = \infty$,则此 Riemann 面是抛物型的 (Ahlfors). Ahlfors 还用拓扑方法建立了覆盖面的理论,作为它的应用,得到了 Nevanlinna 理论和亚纯函数的其他许多结果.

以 F_r 表示半径为 1/2 的 Riemann 球面 F_0 的覆盖面; F_r 是 $|z| \leqslant r$ 在亚纯函数 $w = f(z)$ 下的象. 用 F_0 的面积 π 去除 F_r 的面积所得的值

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \iint_{|z|<r} \frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2} \rho d\rho d\theta,$$
$$z = \rho e^{i\theta},$$

称为 F_r 的**平均叶数** (mean number of sheets). F_r 的边界的长度是

$$L(r) = \int_{|z|=r} \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} |dz|.$$

这时关系

$$T(r) = \int \frac{A(r)}{r} dr + O(1)$$

成立(清水辰次郎, Ahlfors).

考虑 $|z| < R \leqslant +\infty$ 内的亚纯函数 $w = f(z)$ 的反函数的 Riemann 面. 它在 w 平面的一个域上具有可数个分支 Ω_ν. Ω_ν 在 z 平面上的原象 Δ_ν, 可以分为连同边界包含或不包含在 $|z| < R$ 内两种情形,对应这两种情形的 Ω_ν 分别称为**岛** (island) 和**半岛** (英 peninsula 德 Zunge).

设 D 是 w 平面上的单连通域,若以 $n(r,D)$ 表示 F_r 在 D 上的岛的叶数的和,以 $m(r,D)$ 表示 F_r 在 D 上的半岛的面积的和除以 D 的面积,则有

$$m(r,D) + n(r,D) = A(r) + O(L(r)).$$

设 D_j $(j=1,\cdots,q)$ $(q \geqslant 3)$ 是 w 平面上互不相交的单连通域,则

$$\sum_{j=1}^{q} n(r,D_j) - \sum_{j=1}^{q} n_1(r,D_j)$$
$$> (q-2)A(r) - O(L(r)),$$

其中 $n_1(D)$ 表示包含于 F_r 在 D 上的岛内的分歧点的分歧度的和.

对于亚纯函数 $f(z)$,如果从 $0 \leqslant r < \infty$ 内除去适当的区间序列,则有 $L(r) < A(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$,所以特别当 D_j 是点 α_j 时,不等式

$$\sum_{j=1}^{q} n(r,\alpha_j) - \sum_{j=1}^{q} n_1(r,\alpha_j)$$
$$> (q-2)A(r) - O(A(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

除去除外区间成立. 这是与 Nevanlinna 第二基本定理相当的定理. 由于这是取值 α_j 的点的个数之间的关系,所以是重要的公式. 设 D_j $(j=1,\cdots,q)$ $(q \geqslant 3)$ 是 w 平面上互不相交的单连通域,若 D_j 上的单连通岛都至少是 μ_j 叶的,则 $\sum_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_j}\right) \leqslant 2$ (**圆盘定理** (德 Scheibensatz)). 由此可知,若在 Riemann 球面上给定三个互不相交的 D_j,则至少有一个 D_j,在其上有无穷多个岛. 还有,如果取五个 D_j,则至少有一个 D_j,在其上有单叶的岛 (**Ahlfors 五圆盘定理** (Ahlfors' five-disc theorem)). 这相当于整函数的 Bloch 定理†. 对于圆内的亚纯函数,对应这些定理的命题也成立.

Ahlfors 还引进了微分度量,建立了关于覆盖面的更重要的理论.

【历史】 亚纯函数的值分布理论,以古典的 Picard 定理为其契机,通过整函数的值分布理论,基于上述的 Nevanlinna 理论, Ahlfors 覆盖面理论,达到了统一的处理. 近年来,关于开 Riemann 面上的亚纯函数的性质,也已经有许多研究(→ Riemann 面). 另一方面,几个亚纯函数所成的亚纯函数组的值分布理论,从 Bloch 的研究开始,进而发展到 Ahlfors 和 Weyl 父子 (H. Weyl, J. Weyl) 的**亚纯曲线** (meromorphic curve) 的研究([4]). 此外,也已研究亚纯函数在一般奇点的邻域内的性态,聚值集†理论是其一例.

【参】 [1] 能代清,最近の函数論,岩波, 1941; [2] 清水辰次郎,輓近函数論,岩波講座数学, 1935; [3] R. H. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Springer, 1935, 修订版, 1953 (英译本: Analytic functions, Springer, 1970); [4] H. Weyl-J. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves, Princeton Univ. Press, 1943; [5] 能

代清,近代函数論,岩波,1954; [6] G. Valiron, Directions de Borel des fonctions méromorphes, Mém. Sci. Math., Gauthier-Villars, 1938; [7] W. K. Hayman, Meromorphic functions, Clarendon Press, 1964. 另→值分布理论的【参】.

值分布理论 [英 value distribution theorey 法 théorie de la distribution des valeurs 德 Wertverteilungstheorie 俄 теория распределения значений 日 值分布論] 函数 $f(z)$ 取某个值 w 的点 z 的分布状态,称为它的**值分布**(value distribution). 对于函数 $f(z)$,如果知道了使 $f(z)=w$ 的 z 的分布,当然也就明白了 $f(z)$ 的性质. 通常说到"值分布理论"时,以复解析函数 $f(z)$ 作为对象.

【历史】 当 $f(z)$ 是超越整函数†时, Weierstrass 定理断言,包括 ∞ 在内的所有值,是 $f(z)$ 在无穷远点处的聚值†. 1879 年, E. Picard 作出了巨大的改进:最多除去一个有限值外,对于所有有限值 w,超越整函数 $f(z)$ 都具有无穷多个 w 点 (Picard 定理). E. Borel 使之精密化,而 G. Julia 揭示了 Julia 方向†的存在(→超越整函数,亚纯函数). 此外 J. Hadamard, G. Valiron 等在值分布理论中也取得了许多成果. 其中最大的成果,是 1925 年由 R. Nevanlinna 发表的关于 $|z|<R\leqslant\infty$ 内的亚纯函数的所谓 Nevanlinna 理论,它把在此以前所得到的结果统一了起来(→亚纯函数). 清水辰次郎, L. V. Ahlfors 明确了 Nevanlinna 特征函数 $T(r)$ 的几何意义. 1935 年, Ahlfors 更用拓扑的方法,建立了覆盖面的理论,作为它的应用,得到了 Nevanlinna 理论和关于亚纯函数的其他许多结果. 由这个理论还辨明了 Picard 例外值的个数 2 的拓扑意义, 它是与球面的 Euler 示性数† 一2 相联系着的. H. Selberg 建立了关于代数体函数的值分布理论,使在代数体函数中对应 Picard 定理的 G. Rémoundos 定理精密化.

【一般域上的值分布理论】 定义于一般域或开 Riemann 面上的亚纯函数的值分布,受到奇点集的函数论尺度(→函数论的零集)或 Riemann 面的型 (→Riemann 面) 的巨大影响. 例如,我们有下面的 Picard 型定理: 具有对数容量†为零的奇点集的单值亚纯函数,在每个奇点的邻域内,最多除去属于对数容量为零的 F_σ 集的值外, 取所有的值无穷多次 (G. af Hällström-亀谷俊司定理). 关于一般的奇点,根据聚值集的研究可以讨论值的分布(→聚值集). 为了推广 Nevanlinna 理论到一般域或 Riemann 面的情形, 我们用实参数 r 来表示一般域或 Riemann 面的近似,并定义计数函数†(→亚纯函数). Hällström 用对于对数容量为零的紧集 E 的 Evans 位势 $v(z)$ (即对应 E 上总质量为 1 的正质量分布 μ 的位势, 它当 z 趋于 E 的任一点时趋于 $+\infty$), 取 $D_r=\{z\,|\,v(z)<r\}$ 作为 E 的补集 D 的近似, 建立了在 D 内亚纯的函数的值分布理论. 由此, Picard 例外值的个数不超过 $2+\xi$,这里 $\xi=\limsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{F(r)}{T(r)}$, $F(r)=\displaystyle\int_{r_0}^{r}n(r)dr$, 其中 $n(r)$ 是 D_r 的 Euler 示性数 (Hällström-辻正次定理). 关于 Riemann 面上的亚纯函数的值分布理论, 有田村二郎, L. Sario 等的研究. Sario 对于从 Riemann 面 $\mathfrak{R}$ 到 Riemann 面 $\mathfrak{S}$ 的解析映射, 在 $\mathfrak{S}$ 上适当地赋予(对迫近函数†的定义是必要的)度量, 成功地推广了 Nevanlinna 的理论.

在一般域的 Nevanlinna 理论方面,为了得到具体的结果,有时必须在函数上设置条件,例如, Hällström-辻定理中 ξ 为有限的条件. 但相反地确定不在函数上设置任何附加条件而能得到某种结果的域, 这在值分布理论中也是一个重要的观点. 上面的 Hällström-亀谷定理是其一例. 虽然这个定理中例外值的集合, 一般地不能代之以比对数容量为零的 F_σ 集更小的集, 但我们有下面的定理: 设 E 是 Cantor 集†, l_n 是在定义 E 时经过 n 次操作所剩下的线段的长, 令 $\xi_n=2l_n/l_{n-1}$, 则以 E 为奇点集的任意单值亚纯函数的 Picard 例外值的个数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=0$, 就不超过 3; 若 $\xi_{n+1}=o(\xi_n^2)$, 就不超过 20 (L. Carleson-松本幾久二).

有一些结果表明了 Nevanlinna 例外值†同函数的阶或渐近值之间的关系. 此外, 对于高

维流形上的解析映射，S. S. Chern（陈省身）等正试图推广 Nevanlinna 的理论.

【参】［1］能代清，近代函数論，岩波，1954；［2］A. Dinghas, Vorlesungen über Funktionentheorie, Springer, 1961；［3］L. Sario, Value distribution under analytic mappings of arbitrary Riemann surfaces, Acta Math., **109** (1963), 1—10；［4］K. Matsumoto（松本幾久二），Existence of perfect Picard sets, Nagoya Math. J., **27** (1966), 213—222；［5］栗田稔．複素解析写像の値分布に関する一定理，数学，**16** (1965)，195—202；［6］W. K. Hayman, Meromorphic functions, Clarendon Press, Oxford, 1964；［7］L. Sario-K. Noshiro（能代清），Value distribution theory, van Nostrand, 1966.；［8］杨乐，值分布理论及其新研究，科学出版社，1982.

聚值集［英 cluster set　法 ensemble d'accumulation　德 Häufungsbereich　俄 производное множество　日 集積値集合］设D是复数平面上任意的域，Γ是它的边界，E是包含于Γ内的完全不连通闭集，$w=f(z)$是定义于D内的单值亚纯函数†．这时，对于Γ的每个点z_0，可在w复数平面（或w复数球面）上定义与映射$w=f(z)$相联系的如下的点集．

1）聚值集．若存在点列$\{z_n\}$，使得

$$z_n\in D,\quad z_n\to z_0,\quad f(z_n)\to\alpha,$$

则这样的值α称为$f(z)$在z_0处的一个**聚值**（cluster value），它的全体$C_D(f,z_0)$称为f在z_0处的**聚值集**；或者，为与其他聚值集相区别，称为**内部聚值集**（inner cluster set）．它是非空闭集，但不一定是连通的．

2）边界聚值集．若存在属于$\Gamma-\{z_0\}$（或$\Gamma-E-\{z_0\}$）的点列$\{\zeta_n\}$和w平面上的点列$\{w_n\}$，使得

$$\zeta_n\to z_0,\quad w_n\in C_D(f,\zeta_n),\quad w_n\to\alpha,$$

则这样的值α的集合称为$f(z)$在z_0处的**边界聚值集**（boundary cluster set），记作$C_\Gamma(f,z_0)$（或$C_{\Gamma-E}(f,z_0)$）．它们都是闭集，且恒有

$$C_{\Gamma-E}(f,z_0)\subset C_\Gamma(f,z_0)\subset C_D(f,z_0).$$

若$z_0\in\Gamma-E$或z_0是E的孤立点，则$C_{\Gamma-E}(f,z_0)=C_\Gamma(f,z_0)$．$C_\Gamma(f,z_0)$（或$C_{\Gamma-E}(f,z_0)$）是空集等价于$z_0$是孤立边界点（或$z_0$是$\Gamma-E$的外点）．

3）值的范围．在z_0的邻域内$f(z)$无穷次地取到的值，即使得

$$z_n\in D,\quad z_n\to z_0,\quad f(z_n)=\alpha$$

的值α的集合$R_D(f,z_0)$，称为**值的范围**（range of values）．它是G_δ集†．

4）渐近值集．设z_0是D的可达†边界点，如果当z沿D内以z_0为终点的某条简单弧†趋于z_0时，$f(z)$收敛到α，则这样的值α称为f在z_0处的**渐近值**（asymptotic value），渐近值的全体所成的集合$A_D(f,z_0)$，称为f在z_0处的**渐近值集**（set of asymptotic values）．当z_0为不可达边界点时，约定$A_D(f,z_0)$为空集．

【对于对数容量为零的集合的聚值集】在本节内，设E是包含于域D的边界Γ内的对数容量†为零的闭集，$z_0\in E$．令

$$\Omega=C_D(f,z_0)-C_{\Gamma-E}(f,z_0).$$

若$\alpha\in\Omega$是$f(z)$在z_0的某个邻域内的例外值，则或者α是f在z_0处的渐近值，或者存在收敛到z_0的点列$\zeta_n\in E$，使得α是f在每个ζ_n处的渐近值（能代清，1937）．此外，如果z_0属于$\Gamma-E$的闭包，则Ω是闭集，$\Omega-R_D(f,z_0)$的对数容量是零（也包括空集的情形）（辻正次，1943）．这些定理相当于 Iversen 定理†的推广．

若E只包含于边界Γ的一个分支Γ_0内，z_0属于$\Gamma-E$的闭包，Ω非空，则对Ω的每个分支Ω_n，最多除去两个例外值，$w=f(z)$在z_0的邻域内取Ω_n中所有的值无穷多次（能代，1950）．特别是，如果f在z_0的一个邻域内有界，则例外值最多只有一个．如果E的每个点属于由至少含有两个点的连续统†所成的边界分支内，且Ω非空，则同样的结果成立（M. Hervé, 1955）．但是一去掉关于E的假定，这个结果就不一定成立（松本幾久二，1960）．这个结果是E只由一个点z_0组成时的 **Beurling-功力定理**（功力金二郎，1940）的推广，也是孤立本性奇点处的 Picard 定理†的一般化．

【单位圆周上的聚值集】在本节内，设D是单位圆盘$\{|z|<1\}$，$z_0=e^{i\theta_0}$是单位圆周Γ上的一个点，A是Γ上含有z_0的开弧，E是使$z_0\in E\subset A$的一维测度为零的集合．对$A-E$的每个点$z=e^{i\theta}$，任作一条以它为终点的位于D内的简单弧Λ_θ，令$C_{\Lambda_\theta}(f,e^{i\theta})$为满足$z_n\in\Lambda_\theta$，

$z_n \to e^{i\theta}$, $f(z_n) \to \alpha$ 的值 α 的集合. 设 M_r 是 $C_{A_\theta}(f, e^{i\theta})$ 对属于 $(A-E)\cap\{|z-z_0|<r\}$ 的所有 $e^{i\theta}$ 的并的闭包, 如果用一般的边界聚值集

$$C^*_{\Gamma-E}(f, z_0) = \bigcap_{r>0} M_r$$

来代替边界聚值集 $C_{\Gamma-E}(f, z_0)$, 则与上节各结果类似的结果也成立. 此外, 关于单位圆内的亚纯函数的聚值集, F. Bagemihl-W. Seidel, E. F. Collingwood, O. Lehto-K. I. Virtanen 等人得到了许多有趣的结果.

上述聚值集的定义, 对于完全任意(不假定全纯性及连续性等)的映射 $w=f(z)$ 也能适用. 如果存在单位圆 D 内的两条简单弧 Λ_1, Λ_2, 其终点都是 D 的边界点 $z=e^{i\theta}$, 使得

$$C_{\Lambda_1}(f, e^{i\theta}) \cap C_{\Lambda_2}(f, e^{i\theta}) = \phi,$$

则称 $z=e^{i\theta}$ 为 f 的**岐点** (ambiguous point). Bagemihl 证明, 单位圆内任意复值函数的歧点最多是可数个([2]). 在相同的条件下, 使 $C_D(f, e^{i\theta}) \neq C_\Gamma(f, e^{i\theta})$ 的 $e^{i\theta}$ 最多是可数个 (Collingwood, 1960). 这个结果也显示了引进上述一般边界聚值集 $C^*_{\Gamma-E}(f, z_0)$ 的重要性.

【历史】 聚值集的理论, 本来起源于解析函数在本性奇点邻域内的值分布理论, 它的系统的研究, 最初有赖于 1920 年左右 F. Iversen, W. Gross 的结果. 继而 Seidel, J. L. Doob, M. L. Cartwright, A. Beurling 等作出了重要贡献, 而 1940 年以后, 功力, 入江盛一, 遠木幸成, 津村善郎, 亀谷俊司, 辻, 能代等日本数学家, 进行了许多研究. 然而许多结果可以推广到伪解析函数, 如果进一步观察 Bagemihl 关于歧点的结果等, 就可看出迄今已知的聚值集的某些性质, 似乎不一定是解析映射所特有的 ([2], [4]). 另一方面, 可以推测, 把聚值集理论推广到开 Riemann 面之间的解析映射的情形, 当是今后的一个有趣课题.

【参】 [1] K. Noshiro (能代清), Cluster sets, Erg. d. Math., Springer, 1960; [2] F. Bagemihl, Curvilinear cluster sets of arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **41** (1955), 379—382; [3] 能代清, 近代函数論, 岩波, 1954; [4] E. F. Collingwood-A. J. Lohwater, The theory of cluster sets, Cambridge, 1960.

代数函数 [英 algebraic function 法 fonction algébrique 德 algebraische Funktion 俄 алгебраическая функция 日 代数関数] 以复数为系数的二元不可约多项式构成的方程 $P(z, w)=0$ 所确定的(多值)解析函数† $w(z)$, 称为**代数函数**.

【历史和研究方法】 代数函数论开始于十九世纪初 C. F. Gauss, N. H. Abel 和 C. G. J. Jacobi 等人关于椭圆函数†的研究, 随着 B. Riemann, K. Weierstrass 关于函数论基础的确立, 它就形成了完美的理论.

方程 $P(z, w)=0$ 确定了以 z, w 为(非齐次)坐标的二维复射影空间†中的曲线. 从这个角度来研究的, 开始于 Riemann, A. Clebsch 和 P. Gordan 等人, 经过 A. Brill, M. Noether 和意大利学派 (F. Severi, C. Segre 等), 和今天的代数几何理论联系了起来(→ 代数几何, 代数曲线).

满足方程 $P(z, w)=0$ 的函数元素† $w(z)$ 的全体形成一个复流形† $\mathfrak{R}$, 这是一个紧 Riemann 面†, 即所谓闭 Riemann 面. 函数 $z(p)$, $w(p)$ $(p\in\mathfrak{R})$ 是 $\mathfrak{R}$ 上的亚纯函数, 而且由 $\mathfrak{R}$ 上所有亚纯函数构成的域 $K_\mathfrak{R}$ 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的单变量代数函数域†, 且 $K_\mathfrak{R} = \boldsymbol{C}(z, w)$. 反之, 设给了闭 Riemann 面 $\mathfrak{R}$, 则 $K_\mathfrak{R}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的单变量代数函数域†, 并且由 $K_\mathfrak{R} = \boldsymbol{C}(z, w)$ 的 z, w 所满足的方程 $P(z, w)=0$ 的不可约多项式 P 按上述方式所确定的 Riemann 面和 $\mathfrak{R}$ 保角等价. 再者, 由方程 $P_1=0$, $P_2=0$ 确定的两个 Riemann 面 $K_{\mathfrak{R}_1}$, $K_{\mathfrak{R}_2}$ 保角等价的充分必要条件是, 存在 $K_{\mathfrak{R}_1}$ 和 $K_{\mathfrak{R}_2}$ 之间的使 $\boldsymbol{C}$ 的每个元均保持不变的同构, 这等价于存在代数曲线 $P_1=0$ 和 $P_2=0$ 之间的双有理变换†. 这种把代数函数作为 Riemann 面上的函数来研究的所谓"解析方法", 乃是 Riemann 的基本思想, 它由 F. Klein, D. Hilbert 等人所继承, 进一步由 H. Weyl 在 [4] 中整理成完美而严密的形式.

任意给定复数域 $\boldsymbol{C}$ 上的单变量代数函数域 K, 以它的素除子†的全体作为 $\mathfrak{R}$, 引入适当的拓扑和解析结构, $\mathfrak{R}$ 就成为闭 Riemann 面,

并且其上的$K_{\mathfrak{R}}$和给定的K一致. 通过代数函数域$C(z, w)$来研究代数函数的"代数方法",开始于上世纪末 J. W. Dedekind 和 H. Weber 的研究,随着本世纪中抽象代数的发展,这个方法取得了包括一般系数域和多变量代数函数理论在内的许多成果. 特别是认识到了代数函数论和数论之间的类似之处,因而也促进了数论本身的发展.

闭 Riemann 面$\mathfrak{R}$的万有覆盖面† $\tilde{\mathfrak{R}}$,根据唯一性定理,当$\mathfrak{R}$的亏格† g为0, 1或≥ 2时,可以分别保角映射为 Riemann 球面、全有限平面或单位圆(或上半平面). 覆盖变换群† G由在$\tilde{\mathfrak{R}}$中没有不动点的线性分式变换所组成,它是纯不连续†的,且基本域是紧的. 反之,从上述三类域D和满足上述条件的某个群G所得到的$\mathfrak{R} = D/G$是闭 Riemann 面,而D就是以G为覆盖变换群的$\mathfrak{R}$的万有覆盖面. $\mathfrak{R}$上的亚纯函数可表示为在$\tilde{\mathfrak{R}}$上亚纯的关于G的自守函数†. 若$g = 0$,则$G = \{1\}$, $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R}$,且$K_{\mathfrak{R}}$为有理函数域;若$g = 1$,则$K_{\mathfrak{R}}$为椭圆函数域. 从自守函数的角度研究代数函数,开始于 H. Poincaré, F. Klein 等人. 最近,多变量的自守函数也受到重视, C. L. Siegel 等人在这方面取得了显著成就. 自守函数从数论角度看也是重要的, E. Hecke, M. Eichler, 志村五郎等人的研究是应该重视的(→ 自守函数,复数乘法论).

这里主要阐述单变量代数函数理论的解析方法. 关于两个变量的代数函数论 → [10].

【Abel 微分】 闭 Riemann 面$\mathfrak{R}$上的复微分形式† ω,如果在$\mathfrak{R}$上的每个点的邻域内能用局部参数z表示为$\omega = a(z)dz$ ($a(z)$为z的亚纯函数†), ω就称为 **Abel 微分** (Abelian differential). 其中$a(z)$在每个点的邻域内都全纯的,称为**第一种** (first kind) **Abel 微分**; $a(z)$虽有极点而残数均为零的,称为**第二种** (second kind) **Abel 微分**; 其余的称为**第三种** (third kind) **Abel 微分**. ω的残数在$\mathfrak{R}$上的总和为0.

Abel 微分的不定积分$W(p) = \int_{p_0}^{p} \omega$ (其中p_0不是ω的极点)称为 **Abel 积分** (Abelian integral). 第一种、第二种、第三种 Abel 微分的积分,分别称为**第一种、第二种、第三种 Abel 积分**. $\mathfrak{R}$上的一维闭链† γ上的积分$\int_\gamma \omega$称为ω关于γ的**周期** (period). 如果 Riemann 面$\mathfrak{R}$的亏格为1,则$\mathfrak{R}$上的 Abel 积分就称为**椭圆积分** (elliptic integral). 例如定义方程$P(z, w) = 0$关于w是二次,而关于z是三次或四次时,就是这种情形. 又当具有一般亏格g的$\mathfrak{R}$上存在具有两个极点的亚纯函数时,即P关于w为二次时, $\mathfrak{R}$就称为**超椭圆的** (hyperelliptic),这样的 Riemann 面上的 Abel 积分称为**超椭圆积分** (hyperelliptic integral).

以V_a表示$\mathfrak{R}$上所有第一种 Abel 微分所形成的$\boldsymbol{C}$上的线性空间. 对于$\mathfrak{R}$的任意一维闭链† α,存在唯一的$\omega_\alpha \in V_a$,使得$\mathrm{Re}\int_\gamma \omega_\alpha = (\alpha, \gamma)$ (右端表示α和γ的相交数†)对于所有一维闭链γ都成立. ω_α也可刻划为V_a中使

$$\int_{\mathfrak{R}} \omega \wedge * \bar{\omega}_\alpha = 2\pi\sqrt{-1}\int_\alpha \omega$$

对所有$\omega \in V_a$都成立的元. 对于作为$\mathfrak{R}$的一维整系数同调群†的基的闭链$\alpha_1, \cdots \alpha_{2g}$所得到的$\mathrm{Re}\, \omega_{\alpha_i}$ ($i = 1, \cdots, 2g$),是$\mathfrak{R}$上所有调和微分†所成的实数域上的线性空间V_h的基,也是实数域上空间$\{\mathrm{Re}\, \omega \mid \omega \in V_a\}$的基. 从而有

$$\dim_{\boldsymbol{C}} V_a = g, \quad \dim_{\boldsymbol{R}} V_h = 2g.$$

这样, $\mathfrak{R}$的拓扑结构和$\mathfrak{R}$上的 Abel 微分所成的空间之间有密切的关系(→ 调和积分).

设$\alpha_1, \cdots, \alpha_{2g}$为一维整系数同调群的任意一个基, $\omega_1, \cdots, \omega_g$为$V_a$在$\boldsymbol{C}$上的任意一个基,以$\int_{\alpha_j} \omega_i$为$(i, j)$位置上的元所构成的$g \times 2g$矩阵$\Omega$,称为**周期矩阵** (period matrix). 关于另外的(α)和(ω)的周期矩阵为$A\Omega M$; 其中A为g阶正则复矩阵, M为行列式等于± 1的$2g$阶整数矩阵. 反之,两个亏格相同的 Riemann 面,如果它们具有可按上述关系变换的周期矩阵,就是互相保角等价的(**Torelli 定理**). 在复g维线性空间$\boldsymbol{C}^g$上考虑Ω的$2g$个

列向量所生成的子群,仍把这个子群记作 Ω.由于它的秩为 $2g$ 且为固有不连续,所以可定义群流形 C^g/Ω. 它在不计 $\mathfrak{R}$ 的解析同构的意义下是唯一确定的,称为 $\mathfrak{R}$ 的 **Jacobi 簇** (Jacobian variety). 再者,利用第二种和第三种 Abel 微分也可类似地引进**广义 Jacobi 簇** (generalized Jacobian variety) (→ 代数曲线).

【Riemann-Roch 定理】 $\mathfrak{R}$ 上的**除子** (divisor) 是指整系数 0 维链†: $\mathfrak{d}=\sum n_i p_i$ ($p_i\in\mathfrak{R}$, n_i 为整数). 特别地,如果在约简了的表示式中 $n_i\geqslant 0$, 则称 $\mathfrak{d}$ 为**整除子** (integral divisor) 或**正除子** (positive divisor). 只有一个 p_1 且 $n_1=1$ 的情形则称为**素除子** (prime divisor). 所谓 $\mathfrak{d}$ 为亚纯函数 f 或 Abel 微分 ω 的除子是指, $\{p_i\}$ 是它的全部零点和极点, 且若 p_i 为零点, 则 n_i 为其阶数, 若 p_i 为极点, 则 $-n_i$ 为其阶数. $\mathfrak{R}$ 上的所有除子构成 Abel 群 $\mathfrak{D}$, 而所有亚纯函数的除子(称为**主除子** (principal divisor) 构成它的一个子群 $\mathfrak{P}$. 商群 $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ 称为**除子类群** (divisor class group), 而它的元称为**除子类** (divisor class). 所有 Abel 微分的除子组成一个除子类, 这个类称为**标准除子类** (canonical divisor class) 或**微分除子类** (differential divisor class). 除子类 D 的**次数** (degree) $\deg D$ 和**维数** (dimension) $\dim D$ 定义如下: $\deg D=\sum n_i$, $\dim D=\dim_{\mathbf{C}}\{f|f$ 为亚纯函数, (f 的除子) $+\mathfrak{d}$ 为整除子$\}$, 它们不依赖于代表 $\mathfrak{d}=\sum n_i p_i\in D$ 的取法. 例如,主除子类的次数为零.

使用上面的术语, **Riemann-Roch 定理**可叙述为: 对于闭 Riemann 面 $\mathfrak{R}$ 上的任意除子类 D 和任意整数 n, 有

$$\dim(D+nW)-\dim(-D-(1-n)W)=\deg D+(2n-1)(g-1),$$

这里 W 为标准除子类, 而 g 为 $\mathfrak{R}$ 的亏格 (→ 代数曲线).

从这条定理可推出下面的事实: 1) $\deg W=2g-2$. 2) 所有全纯不变微分形式 φdz^2 (正确地说是二阶解析张量, 称为**二次微分** (quadratic differential)) 组成的复线性空间的维数为 0 (若 $g=0$), 1 (若 $g=1$), $3g-3$ (若 $g\geqslant 2$). 3) 对于 $p\in\mathfrak{R}$, 如果不存在以 p 为 m 阶极点而在其他点处为全纯的函数, 则称 m 为 p 的**间隙值** (gap value). 若 $g=0$, 则任何点都没有间隙值, 若 $g\geqslant 1$, 则每个点 p 恰有 g 个间隙值, 但此时 p 也有一个非间隙值 $m\leqslant g+1$; 间隙值为 $1,2,\cdots,g$ 的点 $p\in\mathfrak{R}$ 称为正常点, 其他点称为 **Weierstrass 点** (Weierstrass' point), Weierstrass 点的个数 $\geqslant 2g+2$ 而 $\leqslant(g-1)\cdot g(g+1)$. 4) 设 f 是 $\mathfrak{R}$ 到它本身的保角映射, 如果对于所有一维整系数闭链 γ, $f(\gamma)$ 都同调于 γ, 则 f 只能是恒等映射. 再者, 亏格 $g\geqslant 2$ 的闭 Riemann 面 $\mathfrak{R}$ 到它本身的保角映射只能有有限个,其个数不超过 $84(g-1)$.

【Abel 定理】 次数为零的除子 $\mathfrak{d}$ 为主除子的充分必要条件是它可表示成 $\mathfrak{d}=\partial\gamma$, 这里 γ 是使得 $\int_\gamma\omega=0$ 对于所有 $\omega\in V_a$ 都成立的一维链†. 这个命题称为 **Abel 定理**.

给了次数为零的除子类 D 时, 对于任意的一维闭链 α,

$$\chi_\alpha(D)=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\ \mathrm{Re}\int_\gamma\omega_\alpha\right)$$

是确定的,它不依赖于 $\mathfrak{d}\in D$ 以及使得 $\mathfrak{d}=\partial\gamma$ 的 γ 的选取. 这是在一维整系数同调群†上定义的特征标†,称为**积分特征标** (integral character). 反之, 同调群上的特征标总可表示为某个 D 的积分特征标. 用这个概念, Abel 定理可叙述为: D 为主除子类的充分必要条件是 $\chi_\alpha(D)=1$ 对所有 α 都成立;这个事实表明, $\mathfrak{R}$ 的一维整系数同调群和 $\mathfrak{R}$ 的次数为零的除子类的群(赋予后者以紧拓扑)是关于积分特征标在 Понтрягин 意义下互相对偶的拓扑 Abel 群 (→ 拓扑 Abel 群). 关于 Abel 积分和 Jacobi 簇的关系(特别是 Jacobi 逆问题, Abel 函数, Riemann Θ 函数) → Abel 簇 [解析理论].

【Riemann 面的参模】 用 $\boldsymbol{M}_g$ 表示亏格为 g 的闭 Riemann 面的保角等价类的全体, $m(g)$ 相应地表示 0 (当 $g=0$), 1 (当 $g=1$), $3g-3$ (当 $g\geqslant 2$). Riemann (1857) 提出, 能够用称为**参模** (modulus) 的 $m(g)$ 个复参数来表示 $\boldsymbol{M}_g$ 的点,不过他没有严格地论述理由. 对于在 $\boldsymbol{M}_g$

内引进自然拓扑和 $m(g)$ 维复解析结构有各种论述，这里说明一下 O. Teichmüller ([15], [16]), L. V. Ahlfors ([11], [12]), L. Bers ([13],[14]) 等人的方法. 另外还有代数几何方法(→ 代数曲线).

在 $g=0$ 的情形，因为 $\boldsymbol{M}_g$ 仅由一点组成，所以是不成问题的. 取定一个 $g \geqslant 1$ 的闭 Riemann 面 $\mathfrak{R}_0$, 对于亏格为 g 的任意闭 Riemann 面 $\mathfrak{R}$, 考虑由 $\mathfrak{R}$ 和 $\mathfrak{R}_0$ 到 $\mathfrak{R}$ 上的保持定向同胚的同伦类 H 所成的偶 $(\mathfrak{R},H)$ 的全体. $(\mathfrak{R},H)$ 和 $(\mathfrak{R}',H')$ 保角等价定义为同伦类 $H'H^{-1}$ 含有一个保角映射，保角等价类 $\langle\mathfrak{R},H\rangle$ 的全体 $\boldsymbol{T}_g$ 称为(以 $\mathfrak{R}_0$ 为中心的) **Teichmüller 空间** (Teichmüller space). 设 $\mathfrak{H}_g$ 为 $\mathfrak{R}_0$ 到它本身的保持定向同胚的同伦类的群，则 $\eta \in \mathfrak{H}_g$ 通过 $\langle\mathfrak{R},H\rangle \to \langle\mathfrak{R},H\eta\rangle$ 诱导出 $\boldsymbol{T}_g$ 的变换，由此就有 $\boldsymbol{T}_g/\mathfrak{H}_g=\boldsymbol{M}_g$. $\mathfrak{H}_g$ 中诱导出恒等映射的元的全体 $\mathfrak{I}_g$, 若 $g \geqslant 3$, 就只含有单位元，若 $g=1,2$, 则它是二阶正规子群. 以下就 $g \geqslant 2$ 来阐述. 当 $g=1$ 时，需要一些技巧性的变形，然而能够平行地进行讨论，所得结果和 $\boldsymbol{T}_1$ 为上半平面而 $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{I}_1$ 为模群的情形是相同的.

把 $\mathfrak{R}_0$ 上满足 μ 可测且 $\|\mu\|_\infty<1$ 的不变微分形式 $\mu\, d\bar{z}\, dz^{-1}$ 的全体记作 $B(\mathfrak{R}_0)$. 对于任意的 $\mu \in B(\mathfrak{R}_0)$, 能选取 $(\mathfrak{R},H)$, 使存在拟保角映射 $h \in H$, 满足 $h_{\bar{z}}=\mu h_z$ (→ 拟保角映射). $\langle\mathfrak{R},H\rangle$ 只由 μ 决定而与 h 的选取无关，对应

$$\mu \in B(\mathfrak{R}_0) \to \langle\mathfrak{R},H\rangle \in \boldsymbol{T}_g$$

为满射. 其次，用 $Q(\mathfrak{R}_0)$ 表示 $\mathfrak{R}_0$ 上的全纯二次微分的全体，作对应

$$\mu \in B(\mathfrak{R}_0) \to \varphi \in Q(\mathfrak{R}_0)$$

如下：设 U(上半平面) 为 $\mathfrak{R}_0$ 的万有覆盖面†, G 为覆盖变换群，那么 μ 就能够在 U 上来考虑. 令它在 U^*(下半平面) 上 $\equiv 0$ 而扩张到整个平面，考虑从全平面到它本身的满足 $f_{\bar{z}}=\mu f_z$ 的拟保角映射 f. 因为 f 在 U^* 上是全纯的，于是就可以作 Schwarz 导数† $\phi=\{f,z\}$, 它成为 $\mathfrak{R}_0$ 的"里侧" U^*/G 上的全纯二次微分. 要求的 φ 由在 U 上 $\varphi(z)=\phi(\bar{z})$ 所给出. 已经验证，两个 μ 诱导相同的 φ 当且仅当对应于 μ 的是相同的 $(\mathfrak{R},H)$. 从而就得到单射

$$\langle\mathfrak{R},H\rangle \in \boldsymbol{T}_g \to \varphi \in Q(\mathfrak{R}_0).$$

由 Riemann-Roch 定理，可以认为 $Q(\mathfrak{R}_0)=\boldsymbol{C}^{m(g)}$, 所以这个单射确定了一个嵌入

$$\boldsymbol{T}_g \subset \boldsymbol{C}^{m(g)}.$$

能证明 $\boldsymbol{T}_g$ 形成域，于是由上就引进了 $\boldsymbol{T}_g$ 的拓扑和 $m(g)$ 维复解析结构. $\mathfrak{H}_g$ 成为固有不连续的解析变换群，从而 $\boldsymbol{M}_g$ 就成为 $m(g)$ 维的正规解析空间†; 然而，它 ($g \geqslant 2$ 时) 并不成为流形. 再者，$\boldsymbol{T}_g$ 是 $\boldsymbol{C}^{m(g)}$ 中的有界全纯域†.

设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_{2g}\}$ 是 $\mathfrak{R}_0$ 内的具有整系数的一维同调基，使得相交数为 $(\alpha_i,\alpha_j)=(\alpha_{g+i},\alpha_{g+j})=0$, $(\alpha_i,\alpha_{g+j})=\delta_{ij}$, $i,j=1,\cdots,g$. 任意给定 $\langle\mathfrak{R},H\rangle \in \boldsymbol{T}_g$, 考虑 $\mathfrak{R}$ 关于同调基 $H\alpha_1,\cdots,H\alpha_{2g}$ 和 V_a 的基 $\omega_1,\cdots,\omega_g$ $\left(\text{具有性质} \int_{H\alpha_j}\omega_i=\delta_{ij}\right)$ 的周期矩阵 Ω, 则 Ω 是 $\boldsymbol{T}_g$ 上的全纯函数. 此外，上面引进的 Teichmüller 空间的解析结构是使周期矩阵成为全纯函数(关于上面定义的拓扑)的唯一解析结构.

在 $\boldsymbol{T}_g$ 中可引进自然 Kähler 度量†, 在 $\boldsymbol{T}_1$ 的情形(把它看作上半平面), 它正是 Poincaré 度量. 这个度量的 Ricci 曲率†、全纯截面曲率†和纯量曲率†都是负的.

采用极值拟保角映射†在 $\boldsymbol{T}_g$ 中引进完备距离，就能给出 $\boldsymbol{T}_g$ 到 $Q(\mathfrak{R}_0)$ 上的一个(与上面所用的对应不同的)同胚. 根据后者就可证明 $\boldsymbol{T}_g$ 和实 $2m(g)$ 维单位球同胚.

上面 $\boldsymbol{M}_g$ 的覆盖空间 $\boldsymbol{T}_g$ 是着眼于同伦来得到的，而 W. L. Baily 的方法则可说是着眼于同调的.

【参】[1] P. E. Appell-E. Goursat, Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales, Gauthier-Villars, 第二版 1929; [2] 岩沢健吉, 代数函数論, 岩波, 1952; [3] W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, Teubner, 1932; [4] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 初版 1913, 第三版 1955 (英译本: The concept of a Riemann surface, Addison-Wesley, 1964); [5] R. Dedekind-H. Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, J. Reine Angew. Math., 92 (1882), 181—290 (Gesammelte math. Werke, F. Vieweg, 1930, vol. 1, p. 238—350); [6] K. Hensel-G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven

und Abelsche Integrale, Teubner, 1902; [7] M. Eichler, Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen, Birkhäuser, 1963; [8] C. Chevalley, Introduction to the theory of algebraic functions of one variable, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1951. 特别是,关于代数函数论的详细历史及文献. [9] A. Brill-M. Noether, Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen, Jber. Deutsch. Math. Verein., **3** (1894), 107—566. 关于两个变量代数函数的古典理论, [10] E. Picard-G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes, Gauthier-Villars, I 1897, II 1906. 关于参模, [11] L. V. Ahlfors, The complex analytic structure of the space of closed Riemann surfaces, Analytic functions, Princeton Univ. Press, 1960, p. 45—66; [12] L. V. Ahlfors, Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces, Ann. of Math., **74** (1961), 171—191; [13] L. Bers, The space of Riemann surfaces, Proc. Internat. Congr. Math., Edinburgh, 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, p. 349—361; [14] L. Bers, Correction to "Spaces of Riemann surfaces as bounded domains", Bull. Amer. Math. Soc., **67** (1961), 465—466; [15] O. Teichmüller, Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abh. Preuss. Akad. Wiss., **22** (1939); [16] O. Teichmüller, Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen, Abh. Preuss. Akad. Wiss., **24** (1943). 另一拟保角映射和 Riemann 面的[参].

Riemann 面 [英 Riemann surface 法 surface de Riemann 德 Riemannsche Fläche 俄 риманова поверхность 日 リーマン面] 【定义】对于在平面域上定义的多值解析函数†,将定义域适当地改变,使所给函数可以看作其上的单值解析函数的一般域,就是由 Riemann 引进的、以他的姓命名的 Riemann 面. 例如,设 w 是复变量,考虑 $z=f(w)=w^2$ 的反函数 $w=g(z)=\sqrt{z}$,则 $g(0)=0$, $g(\infty)=\infty$,对于 $z\neq 0,\infty$,有两个 w 的值满足 $g(z)=w$. 现在设 $z=re^{i\theta}$ $(r>0, 0\leqslant\theta<2\pi)$,则与它对应的 w 的值为 $w_1=\sqrt{r}\,e^{(\theta/2)i}$ 和 $w_2=\sqrt{r}\,e^{(\theta/2+\pi)i}$. 现在,将两个复数平面 π_1, π_2 从原点到无穷远点沿实轴正半轴剪开,再沿切口将 π_1 与 π_2 交叉连接作成面 R,则除原点和无穷远点外,R 局部同胚于平面,而在原点和无穷远点的连接状态如图 1. 对于 $z\neq 0,\infty$,在 π_1, π_2 内分别有点 z_1, z_2,它们具有相同的坐标 z. 如果使 w_1 对应于 z_1, w_2 对应于 z_2,则 $w=\sqrt{z}$ 在这样的面 R 上是单值的,w_1 是 z_1 的全纯函数,w_2 是 z_2 的全纯函数.这样的 R 称为由 $w=\sqrt{z}$

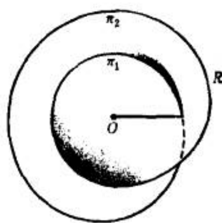


图 1

确定的 Riemann 面.

基于上例那种设想来给出 Riemann 面的精确定义,最早是由 H. Weyl 和 T. Radó 给出的.有几种互相等价的定义,而通常的定义则有如下述:设 $\mathfrak{A}$ 是连通† Hausdorff 空间† R 的开集 U 和从 U 到平面域的拓扑映射 ϕ_U 的组 (U, ϕ_U) 所形成的集合,满足下列两个条件:1) $R=\bigcup_{(U,\phi_U)\in\mathfrak{A}} U$; 2) 对于使 $V=U_1\cap U_2\neq\varnothing$ 的任意 (U_1,ϕ_{U_1}), $(U_2,\phi_{U_2})\in\mathfrak{A}$, $\phi_{U_1}\circ\phi_{U_2}^{-1}$ 总是从 $\phi_{U_2}(V)$ 的各个连通分支到 $\phi_{U_1}(V)$ 的相应的连通分支的保持方向不变的保角映射†. 两个这样的集合 $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ 等价是指,$\mathfrak{A}_1\cup\mathfrak{A}_2$ 也满足上述 1), 2) 两个条件. 这样的 $\mathfrak{A}$ 的等价类 $(\mathfrak{A})$ 称为 R 上的一个**保角结构** (conformal structure) 或**解析结构**(analytic structure). 连通 Hausdorff 空间 R 和它上面的保角结构 $(\mathfrak{A})$ 所成的组 $\mathfrak{R}=(R,(\mathfrak{A}))$ 称为 **Riemann 面**. R 称为它的**底空间** (base space), $(\mathfrak{A})$ 称为它的保角结构.在这种意义下的 Riemann 面有时特别地称为**抽象 Riemann 面** (abstract Riemann surface),它是复一维的复解析流形†. 对于属于 $\mathfrak{A}\in(\mathfrak{A})$ 的 (U,ϕ_U),称它(有时也指 U 本身)为**解析邻域** (analytic neighbourhood), ϕ_U 称为它的**局部单值化参数** (local uniformizing parameter) 或**局部参数** (local parameter). 常常将 $\mathfrak{R}$ 与 R 混同,把 R 本身称为 Riemann 面,以下就这样混用.

根据条件 1), Riemann 面 R 是实二维拓扑流形†,由 2) 可证明它满足第二可数公理†,因而成为曲面†并可单形剖分†. 它还是"可定向的"(一曲面). 因此,R 是局部紧†度量空间. 虽然不可能在 R 上定义与保角结构相容的曲线

长度，但由于角是可以规定的，因而可以把R看作实二维保形联络[†]空间．按照函数论的习惯，把紧 Riemann 面R称为**闭** (closed) Riemann 面，而非紧的R则称为**开** (open) Riemann 面．对于平面域D，基于只由D和从D到它本身的恒等映射所成的一个组作为保角结构$\mathfrak{A}$，可以把它看作一个开 Riemann 面．对于球面，如果按球极平面射影[†]用自然的方法规定解析邻域，则可把它看作自然地保持角度不变的闭 Riemann 面．

设f是 Riemann 面R上的函数，如果对于任意的解析邻域(U, ϕ_U)，$f\circ\phi_U^{-1}$在$\phi_U(U)$上在通常意义下为亚纯[†]，全纯[†]或调和[†]，则称f在R上为亚纯，全纯或调和．再者，一般地对于从平面域到平面域的映射的性质$\mathfrak{P}$，如果$\mathfrak{P}$在定义域和象域的保角映射下不变，那么，一个 Riemann 面R_1到另一个 Riemann 面R_2的映射T具有性质$\mathfrak{P}$就定义为：对于R_1和R_2的任意解析邻域(U_1, ϕ_{U_1})，(U_2, ϕ_{U_2})，从$\phi_{U_1}(U_1)$到$\phi_{U_2}(U_2)$的映射$\phi_{U_2}\circ T\circ\phi_{U_1}^{-1}$具有性质$\mathfrak{P}$．这样就能规定从 Riemann 面到 Riemann 面的保角映射（解析映射[†]），拟保角映射[†]和调和映射等概念．如果存在从 Riemann 面R_1到R_2上的一一保角映射，则称R_1与R_2是**保角等价的** (conformally equivalent)．必要时可以把这样两个 Riemann 面作为同一个 Riemann 面看待．

【覆盖面】 函数论的主要课题是研究从一个 Riemann 面R到另一个 Riemann 面R_0的解析映射．它还要研究R覆盖R_0的方法，因而拓扑学中的覆盖面理论是重要的．

一般地说，设有两曲面R, R_0，如果R到R_0的映射T是连续开映射[†]，且R_0的一点的原象是R的孤点集[†]，则称T为 Stoïlow 意义下的**内部变换** (inner transformation)，而$(R, R_0; T)$称为**覆盖面** (covering surface)，R_0称为它的**基础面** (basic surface)，T称为它的**射影** (projection)．但也常常简单地称R为R_0的覆盖面．当$p_0=T(p)$时，就称p_0是p的射影，p处于p_0之上．这时，分别存在p, p_0处的曲面坐标(U, ϕ)，(U_0, ϕ_0)，使得$\phi(U)=(|z|<1)$，$\phi(p)=0$；$\phi_0(U_0)=(|w|<1)$，$\phi(p_0)=0$，且$w=(\phi_0\circ T\circ\phi^{-1})(z)=z^n$，而自然数$n$是唯一确定的，不依赖于坐标邻域的取法．如果$n>1$，则$p$称为**分歧点** (branch point)，n称为**相重数** (multiplicity)，$n-1$称为**分歧度** (degree of ramification)．分歧点的全体是由至多可数个孤立点构成的集合．如果没有分歧点，则称覆盖面$(R, R_0; T)$或射影T是**非分歧的** (unramified)．给定R_0上的曲线C_0和R的处于C_0的始点之上的点p，如果以p为始点的R上的曲线[†]C满足关系$T(C)=C_0$，则称C是以p为始点沿C_0的**开拓** (prolongation)．如果沿与C_0有共同始点的任何真子弧，都存在以p为始点的开拓，但沿整个C_0不存在以p为始点的开拓，则称R在C_0的终点上有**相对边界** (relative boundary)．没有相对边界的覆盖面称为**无界的** (unbounded)．如果单连通[†]曲面R^∞是R_0的非分歧无界覆盖面，则称R^∞为R_0的**万有覆盖面** (universal covering surface)．对于任意的R_0，恒存在万有覆盖面R^∞．R_0的非分歧无界覆盖面R到它本身的拓扑映射S中满足$T\circ S=T$的映射，称为**覆盖变换** (covering transformation)．R_0的万有覆盖面的覆盖变换的全体所构成的群和R_0的基本群[†]（一维同伦群）同构．

对于基础面R_0是 Riemann 面的覆盖面$(R, R_0; T)$，用自然方法在R上给予解析结构，则可把T看作从R到R_0上的解析映射．特别当R_0是球面时，它的覆盖面是上述意义下的 Riemann 面．反之，可以把任意 Riemann 面看作球面的覆盖面．这个事实对于闭 Riemann 面很早就已知道，但对于开 Riemann 面，则是由 H. Behnke-K. Stein 等根据解析函数的存在定理（意味着开 Riemann 面恒为 Stein 流形[†]）所证明的．通常所说的"Riemann 面"，是前述的抽象 Riemann 面和具体化为球面的覆盖面这两种意义混用的，而这两者之间有上述关系．设R是z球面R_0基于射影$T: R\to R_0$的覆盖面，R_a是处于$0<|z-a|<r_0$之上的域，如果存在R_a到$\{(r,\theta)|0<r<r_0, -\infty<\theta<\infty\}$上的拓扑映射$\phi$，使得$a+re^{i\theta}=T(\phi^{-1}(r,$

θ)), 则称 R 在 a 上具有**对数分歧点** (logarithmic branch point). 相对于这种分歧点, 前述的分歧点也称为**代数分歧点** (algebraic branch point).

不仅从拓扑的观点, 而且结合度量的观点来研究覆盖面 $(R, R_0; T)$ 的 **Ahlfors 覆盖面理论** (Ahlfors' theory of covering surface) 是特别重要的. 设 R, R_0 都是可单形分解的紧曲面, 或是由一维单形和顶点组成其边界的闭子域, 使得 T 保持单形分解不变. R 的边界中射影到 R_0 内部的那部分可称为相对边界. 在 R_0 上引进适当的度量, 设 R 和 R_0 的面积之比为 S, 相对边界的长度为 L, R 和 R_0 的 Euler 示性数[†] 分别为 ρ 和 ρ_0, 则 $\max(0, \rho) \geqslant \rho_0 S - hL$ (这里 $h > 0$ 是只由 R_0 确定的常数) 成立, 这就是 **Ahlfors 基本定理** (Ahlfors' principal theorem). 这条定理广泛地应用于 Riemann 面之间的解析映射的值分布理论以及其他各个方面.

【单值化】 作为把多值解析函数看作其上的单值函数的一般域的 Riemann 面可构成如下. 对于广义函数元素[†] $p_0 = (z, w)(z = P(t), w = Q(t))$ 的集合, 如果以元素 p_0 的直接开拓的集合作为 p_0 的解析邻域, 则广义函数元素集中的一个连通分支 f 就是一个 Riemann 面 (→ 解析函数). 对于 f 上的点 $p = (z, w)(z = P(t), w = Q(t))$, 设 $z = F(p) = P(0)$, $w = G(p) = Q(0)$, 于是得到 f 上的两个亚纯函数 $z = F(p)$, $w = G(p)$, f 可看作 z 球面 (以及 w 球面) 的覆盖面. 称 f 为广义的解析函数. 属于 f 的各个函数元素可以看作是 z 平面到 w 平面的对应, 记为 $w = f(z)$. 它一般是多值的, 但可看作基于射影 F 作为球面的覆盖面的 Riemann 面 f 上的单值函数 $w = G(p)$. 设在 ζ 平面的域 D 上有两个亚纯函数 $z = \varphi(\zeta)$, $w = \phi(\zeta)$, 如果对于 z 和 w 在 D 上的各点 ζ_0 处的 Laurent 展开式[†] $z = P(\zeta - \zeta_0)$, $w = Q(\zeta - \zeta_0)$, 函数元素 $p_{\zeta_0} = (z, w)$ $(z = P(t), w = Q(t))$ 属于 f, 则由函数元素 p_{ζ_0} 确定的 $w = f(z)$ 称为由 $z = \varphi(\zeta)$, $w = \phi(\zeta)$ (在 D 上) **局部单值化** (local uniformization). 特别是, 如果 $\{p_\zeta | \zeta \in D\} = f$, 则称 f 由 $z = \varphi(\zeta)$, $w = \phi(\zeta)$ **单值化** (uniformization). 如果将广义的解析函数 f 看作 Riemann 面, 且它与 ζ 平面的域 D 保角等价, 则 f 可由 $z = F(p)$, $w = G(p)$ 单值化. f 不一定和平面域保角等价, 但如果 f 的非分歧无界覆盖面 $(\hat{f}, f; T)$ 和 ζ 平面的域 D 保角等价, 则 f 可由 $z = F \circ T(\zeta)$, $w = G \circ T(\zeta)$ 单值化 (**Schottky 单值化** (Schottky's uniformization)). 特别是, 由于 f 的万有覆盖面 $(f^\infty, f; T)$ 是单连通的, 根据 P. Koebe 保角映射基本定理, 它与球面 $|\zeta| \leqslant \infty$, 有限平面 $|\zeta| < \infty$ 或单位圆盘 $|\zeta| < 1$ 保角等价. 因而 f 可由 $z = F \circ T(\zeta)$, $w = G \circ T(\zeta)$ 单值化. 这样, 广义的解析函数总是可单值化的.

例如, 对于代数函数[†] $w = f(z)$, 看作 Riemann 面的 f 恒为闭的. 如果它的亏格[†] $g = 0$, 则 f 是球面, 因而可由 $z = F(\zeta)$, $w = G(\zeta)$ 单值化. 如果 $g > 0$, 则 $(f^\infty, f; T)$ 与 $|\zeta| < 1$ 或 $|\zeta| < \infty$ 保角等价, 因而 f 可由 $z = F \circ T(\zeta)$, $w = G \circ T(\zeta)$ 单值化. 当 $|\zeta| < 1$ 时, 这些函数是关于使 $|\zeta| < 1$ 不变的线性变换群的自守函数[†], 而当 $|\zeta| < \infty$ 时则是椭圆函数[†].

【类型问题】 如上所述, 单连通 Riemann 面 R 保角等价于球面、有限平面或单位圆盘. 相应这三种情形, R 分别称为**椭圆型的** (elliptic)、**抛物型的** (parabolic) 或**双曲型的** (hyperbolic). 就是看广义的解析函数单值化的情形便可知道, 确定所给单连通 Riemann 面的型, 这是一个重要的问题. 特别是, 由球面的单连通覆盖面的分歧点的分布等的结构来决定它的型的问题, 称为 Riemann 面的**类型问题** (type problem). 一般地, 我们研究只在 z 平面的有限个点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 上具有代数或对数分歧点的**单叶性** (英 of planar character 德 schlichtartig) (即与平面域同胚) 的覆盖面 R. 在 z 平面上顺次通过 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 画一条简单闭曲线 C, 把 C 分成 n 条弧 $\widehat{z_1 z_2}, \widehat{z_2 z_3}, \cdots, \widehat{z_n z_1}$, 在 C 的内部取一点○, 在 C 的外部取一点×, 设 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 是连结 ○ 与 × 的 n 条曲线, $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 分别与 $\widehat{z_1 z_2}, \widehat{z_2 z_3}, \cdots, \widehat{z_n z_1}$ 只相交一次, 则 R 的处于

$l_1 \cup l_2 \cup \cdots \cup l_n$ 之上的点所成的集合形成一个网．平面上的一个一维复形†，当它是一个网在 R 与 z 平面之间的同胚下的象时，就称为 R 的**线段复形**（德 streckenkomplex）或**拓扑树**（topological tree）（图 2）．它对于了解单叶性覆盖面的结构很方便（例如能代清（[3]）p. 84—90）．小林善一对它作了推广，他引进了所谓“小林网”，并利用它求出了 Riemann 面为抛物型的充分条件，角谷静夫利用拟保角映射求出了 R 为双曲型的充分条件，这是类型问题中突出的结果．

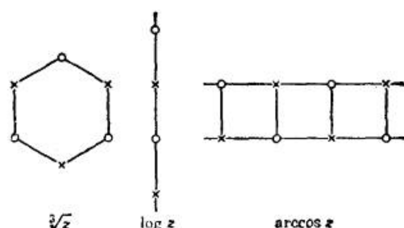


图 2　线段复形的例

【Riemann 面的分类理论】 正如 H. Weyl 所指出的，Riemann 面“不只是使解析函数的多值性直观化的手段，而且是这个理论的本质部分……，是解析函数能在其上生长和繁荣的唯一土壤．”因此，把单复变量解析函数论的各种结果尽可能推广到 Riemann 面之间的解析映射，这就成为主要的研究课题．但开的且亏格为 ∞ 的 Riemann 面是多种多样的，为了得到比较普遍的结论，有必要限制 Riemann 面的种类．为此，就有比类型问题更一般的，从具有某种性质的函数是否存在来对 Riemann 面进行分类的 **Riemann 面的分类理论**（classification theory of Riemann surface），它由 R. Nevanlinna, L. Sario 等创始，有许多人在这方面作过研究．

把 Riemann 面 R 上具有某种性质 $\mathfrak{X}$ 的函数的全体记作 $\mathfrak{X}(R)$，使 $\mathfrak{X}(R)$ 不含有常数以外的函数的 Riemann 面 R 的全体记作 $O_{\mathfrak{X}}$．解析函数族或调和函数族分别记作 $A(R)$ 或 $H(R)$．正函数族，有界函数族或 Dirichlet 积分为有限的函数族分别记作 $P(R)$，$B(R)$ 或 $D(R)$．从这些族出发，我们还考虑诸如 $ABD(R) = A(R) \cap B(R) \cap D(R)$ 等族．通常 O_{HB}，O_{HD}，O_{HBD}，O_{AB}，O_{AD}，O_{ABD}，还有不存在 Green 函数的 Riemann 面的族 O_G 等是主要的族．由遠木幸成，Sario, K. I. Virtanen, H. L. Royden, M. Parreau 等的工作得知，在这些族之间有如图 3 所示的包含关系．在 O_{AB} 与 O_{HD} 之间没有包含关系．O_{AD} 与 O_{ABD} 是否相同还未解决，但如果限定单叶性†的 Riemann 面，则 $O_{AD} = O_{ABD}$．又对于亏格为有限的 Riemann 面，有 $O_G = O_{HD}$．闭 Riemann 面都属于 O_G．称属于 O_G 的开 Riemann 面为**零边界的**（of null boundary），否则称为**正边界的**（of positive boundary）．类似于类型问题的说法，也有人把属于 O_G 的开 Riemann 面称为**抛物型**，而不属于 O_G 的则称为**双曲型**．

$$O_G \subsetneqq O_{HP} \subsetneqq O_{HB} \begin{array}{c} \subsetneqq O_{HD} = O_{HBD} \subsetneqq \\ \subsetneqq \; O_{AB} \; \subsetneqq \end{array} O_{AD} \subset O_{ABD}$$

图 3

用同样的观点对子域分类的问题，也由 Parreau，森明，黒田正等人详细研究过．如果一个域 Ω 是 Riemann 面 R 的一个紧子集的补集，这个域就称为 Heins **端**（end）．M. H. Heins 把在 Heins 端 Ω 的边界上连续地变为 0 的 HP 函数的加法族构成的半群的生成元的最小个数（$\leqslant \infty$），称为 Ω 的**调和维数**（harmonic dimension）．它的性质由倉持善治郎、小沢満等人研究过．更一般地，设 f 是族 $\mathfrak{X}(R)$ 中的正值函数，如果对于 $\mathfrak{X}(R)$ 中满足 $f \geqslant g \geqslant 0$ 的任何函数 g，都存在常数 C_g，使 g 在 R 上可表示为 $g = C_g f$，则称 f 为 **$\mathfrak{X}$ 极小的**（$\mathfrak{X}$ minimal）．有 $\mathfrak{X}$ 极小函数存在但又不属于 O_G 的 Reimann 面的族记作 $U_{\mathfrak{X}}$．C. Constantinescu-A. Cornea 等研究了属于 U_{HB}，U_{HD} 的 Riemann 面．但是，如果用 $\underline{HD}$ 表示非负的 HD 函数以及由这样的函数的单调递减序列的极限构成的 H 函数族，则 $U_{\underline{HD}}$ 特别记作 U_{HD}．我们有关系 $U_{HB} \subsetneqq O_{HB} - O_G$，$U_{HD} \subsetneqq O_{HD} - O_G$ 和 $U_{HD} \subsetneqq U_{HB}$．由倉持发现的 $U_{HB} \subset O_{AB}$ 和 $U_{HD} \subset O_{AD}$，是分类理

论中非常有趣的结果之一．松本幾久二等人还得出了属于 $O_{AB}-O_G-U_{HB}$（$O_{AD}-O_G-U_{HD}$）的 Riemann 面的例子． 在能用 $\mathfrak{X}$ 极小函数生成 $\mathfrak{X}$ 的情形下（$\mathfrak{X}=HB$，HD），则可定义一种调和维数．

分类理论还与 Riemann 面的理想边界† 理论有密切不可分的关系．又族 O_G，O_{HD} 在拟保角映射下不变这个事实分别由 A. Pfluger, Royden 所证明，但 O_{HB} 在这种意义下的不变性则尚未解决．

【Riemann 面的开拓】 正如分类理论所表明的，从平面函数论的观点看来，Riemann 面出现了不寻常的现象，而这是由于 Riemann 面的理想边界的复杂性，特别是由于 Riemann 面的环柄（具有不同调于 0 的闭链的部分）所集积的理想边界点的集合的复杂性． 在这种意义下，尽量将 Riemann 面扩大，使不是环柄的聚点的理想边界点转化为内点，希望由此搞清楚问题的本质．当 Riemann 面 R 与另一 Riemann 面 R_1 的真子域 R' 保角等价时，就称 R_1 是 R 的**开拓** (prolongation)，称 R 是**可开拓的** (prolongable)．不可开拓的 Riemann 面称为**极大的** (maximal)．闭 Riemann 面总是极大的，但也存在极大的开 Riemann 面(Radó)．然而，任意开 Riemann 面恒同胚于某个可开拓的 Riemann 面 (S. Bochner)．关于极大 Riemann 面的特征以及上述各种零族与开拓之间的关系等，R. de Possel，田村二郎等作过种种研究．

【Riemann 面上的解析映射】 在对于作为考察解析函数的场所的 Riemann 面本身如前所述地进行研究的同时，也可把平面域上的函数论的各种结果推广到从一个 Riemann 面到另一个 Riemann 面的解析映射的情形．Sario 的**正规算子** (normal operator) 理论是这种推广的基本工具，这种算子是用来构成 Riemann 面上的调和函数，使它在 Riemann 面的理想边界上具有给定的奇异性． Sario 把 Nevanlinna 基本定理推广到了任意开 Riemann 面之间的解析映射的情形（→ 值分布理论）． Constantinescu-Cornea 和倉持等人应用由 Heins 引进的作为解析映射的特殊类的 Lindelöf 型和 Blaschke 型等概念，把聚值集理论的各种结果（→ 聚值集）推广到解析映射在 Riemann 面的理想边界上的性态，并发展了理想边界的容量†理论．

另一方面，把闭 Riemann 面上的亚纯函数理论（→ 代数函数）推广到开 Riemann 面上去，也有过种种尝试． 闭 Riemann 面的结构由其上所有亚纯函数构成的域（代数函数域）的代数结构来确定． H. Iss'sa 得到了一个很值得注意的结果，这个结果表明，开 Riemann 面同样被其上的亚纯函数域所确定 [28]． 也已经知道，开 Riemann 面由它的全纯函数环确定．

【Riemann 面上的微分形式】 Riemann 面自然可以看作实二维 C^∞ 流形，因而可在它上面定义（一阶）微分形式 $\omega=udx+vdy$，二阶微分形式 $\Omega=c\,dx\wedge dy$，也可定义外微分 $d\omega=(\partial v/\partial x-\partial u/\partial y)dx\wedge dy$ 和外积等运算（→ 微分流形）． 又因坐标变换满足 Cauchy-Riemann 微分方程，所以对于 ω 可定义它的**共轭微分** (conjugate differential) $*\omega=-vdx+udy$．满足 $d\omega=d*\omega=0$ 的微分形式称为**调和微分** (harmonic differential)，满足 $*\omega=-i\omega$ 的微分形式称为**纯的** (pure)． 纯微分形式可用 $\omega=fdz$ 表示． 如果其中的 f 是全纯函数，则称 ω 为**全纯微分** (holomorphic differential) 或**解析微分** (analytic differential)． 如果 f 是亚纯函数，则称 ω 为**亚纯微分** (meromorphic differential)． ω 是全纯微分等价于它是闭的（$d\omega=0$）且是纯的．又对可测的微分形式 ω，使得

$$\|\omega\|^2=\iint_R \omega\wedge\overline{*\omega}<\infty$$

的 ω 的全体构成以 $\|\omega\|$ 为模的 Hilbert 空间†．对于这种空间及其适当的子空间，以 Hilbert 空间论中的正交分解†为主要工具，可得到具有种种性质的调和微分、解析微分的存在定理（→ 调和积分）．

【开 Riemann 面上的 Abel 积分】 把闭 Riemann 面上的 Abel 积分理论推广到开 Riemann 面上并进行系统的研究，这是由 Nevanlinna (1940) 开始的．起初对于少边界的 Rie-

mann 面 (O_G 或 O_{HD}) 进行了研究，后来和半恰当微分（见后述）概念一道进行了一般化研究.

设 R 是任意开 Riemann 面，C 是 R 上的闭链. 如果对 R 内的任意紧集，在该紧集外部都存在同调于 C 的闭链，则 C 称为**分割闭链** (dividing cycle). 沿任意分割闭链周期为 0 的微分† 称为**半恰当的** (semi-exact). R 上使 $\iint_R |f|^2 dxdy$ 为有限的全纯微分 fdz 的全体构成 Hilbert 空间 Γ. 把 Γ 的恰当微分和半恰当微分所成的子空间分别记为 Γ_1, Γ_1', 考虑正交分解 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$. 这里 Γ_2, Γ_3 分别是 Γ_1, Γ_1' 在 Γ_1', Γ 内的正交补空间，也已经知道 Γ_2 和 Γ_3 的其他特征 ([12], [5]). 具有与第一种 Abel 微分类似性质的是 Γ_2 及其子空间的元. 事实上，如果 $R \in O_{HD}$, 则 Γ_1 和 Γ_3 是空集. 对于第二种，第三种 Abel 微分，在紧集外部平方可积的半恰当微分是重要的，应用这三种 Abel 微分的子族可推广 Abel 定理† ([12], [26]). 又当 R 的亏格† 是有限时，Riemann-Roch 定理† 也可以推广 (楠幸男 [26], Royden [27]). 对于闭 Riemann 面情形的这条定理，可从除掉一点的开 Riemann 面的 Riemann-Roch 定理导出. 也对于种种微分族研究了 R 上的 Riemann 周期关系式，但对周期为无限的情形，还不知道确定的结果. 关于有无穷多个奇点的 Abel 微分也是同样情况. 另一方面，如果对 R 上的微分不加限制，则将完全丧失和古典理论的类似性. 特别是，下列结果是著名的 ([25]): 1) 存在 R 上的第一种 Abel 微分，使它具有无穷多个给定的周期；2) 对于 R 内的两个离散点列 $\{p_n\}$, $\{q_m\}$, 存在单值亚纯函数，使它在各个 p_n 处具有零点，在各个 q_m 处具有极点. 即 Abel 定理无条件地成立.

【参】 关于 Riemann 面的定义、一般理论和覆盖面，[1] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 1913, 第三版, 1955 (英译本: The concept of a Riemann surface, Addison-Wesley, 1964); [2] S. Stoilow, Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Gauthier-Villars, 1938; [3] 能代清，解析接続入門，共立出版，1964; [4] 岩沢健吉，代数函数論，岩波，1952; [5] R. Nevanlinna, Uniformisierung, Springer, 1953 (中译本: R. 尼凡林那，单值化，科学出版社，1960); [6] 能代清，近代函数論，岩波，1954; [7] H. Behnke-F. Sommer, Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, Springer, 1955, 修订版，1962; [8] A. Pfluger, Theorie der Riemannschen Flächen, Springer, 1957; [9] G. Springer, Introduction to Riemann surfaces, Addison-Wesley, 1957; [10] 遠木幸成，幾何学的函数論，現代数学講座，共立出版，1957; [11] L. V. Ahlfors 编, Contribution to the theory of Riemann surfaces, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1953; [12] L. V. Ahlfors-L. Sario, Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1960; [13] M. Schiffer-D. C. Spencer, Functionals of finite Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1954; [14] R. C. Gunning, Lectures on Riemann surfaces, mathematical notes, Princeton Univ. Press, 1966. 关于 Riemann 面的开拓; [15] 田村二郎，Riemann 面の接続について，数学，**9** (1957), 1—7. 关于 Riemann 面的分类以及围绕这方面的问题，除 [6], [10], [11], [12] 外，还有: [16] 森明，Riemann 面の分類について，数学，**5** (1953), 42—51; [17] M. Tsuji (辻正次), Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959; [18] K. Noshiro (能代清), Cluster sets, Erg. Math., Springer, 1960; [19] 中井三留，Riemann 面における函数環の方法について，数学，**13** (1962), 129—140; [20] C. Constantinescu-A. Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963; [21] 倉持善治郎，Riemann 面の境界について，数学，**16** (1964), 80—94; [22] L. Sario-M. Nakai (中井三留), Classification theory of Riemann surfaces, Springer, 1970. 关于代数函数论和 Abel 积分论的推广，除 [4], [8], [12] 外，还有: [23] M. H. Heins, Algebraic structure and conformal mapping, Trans. Amer. Math. Soc., **89** (1958), 267—276; [24] 楠幸男，Abel 積分の理論，数学，**7** (1955), 32—45; [25] H. Behnke-K. Stein, Entwicklung analytischer Functionen auf Riemannschen Flächen, Math, Ann., **120** (1947—1949), 430—461; [26] Y. Kusunoki (楠幸男), Theory of Abelian integrals and its applications to conformal mappings, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto, Ser A. Math., **32** (1959), 235—258; [27] H. L. Royden, The Riemann-Roch theorem, Comment. Math. Helv., **34** (1960), 37—51; [28] H. Iss'sa, On the meromorphic function field of a Stein variety, Ann. of Math., (2) **83** (1966), 34—46. 另 → 代数函数的[参].

理想边界 [英 ideal boundary　法 frontière idéal　德 idealen Rand　俄 идеальная граница　日 理想境界] 对于给定的 Hausdorff 空间 R, 一般地说，包含 R 且以 R 作为稠密子空间的一个紧 Hausdorff 空间† R^*, 称为 R 的一个**紧化** (compactification), 而 $\Delta = R^* - R$ 称为 R 的一个**理想边界**. 然而在本条内，专门把 Riemann 面† R 的理想边界，特别是它的函数论性质作为讨论的问题.

【调和边界】 对 Riemann 面 R 上所有位势 P (也即正的上调和† 函数，而比它小的非负调和

函数†只能是常数 0)，Δ中使得 $\liminf_{R\ni p\to p^*} P(p)=0$ 的点 p^* 的全体 Γ 是 R^* 的紧子集，称它为 R 关于 R^* 的**调和边界** (harmonic boundary). 对于 $\Delta-\Gamma$ 的任意紧子集 K，存在 R 上的有限值位势 P_K，使得 $\lim_{R\ni p\to p^*} P_K(p)=\infty$ $(p^*\in K)$. 由此可推出各种最大值原理.

只要 R 本身不是紧的，R 的紧化就有无穷多个. 对于 R 的紧化 $R_i^*(i=1,2)$，如果 R 的恒等映射能扩张为从 R_1^* 到 R_2^* 上的连续映射，则称 R_1^* **大于** (greater than) R_2^*，或 R_1^* **处于** R_2^* **之上** (lies over). 为使精密的函数论讨论成为可能，还在 R^* 上附加种种条件. 紧化 R^* 为 **Stoïlow 型** (of Stoïlow type) 是指，如果 R^* 的连通†开子集 G^* 关于 R^* 的边界包含在 R 内，则 $G^*-\Delta$ 仍然是连通的. 其次，当 $R\notin O_G$ (→ Riemann 面 [Riemann 面的分类理论]) 时，对于 Δ 上的实值函数 f，以 $\overline{\mathfrak{U}}_f^{R,R^*}$ (或 $\underline{\mathfrak{U}}_f^{R,R^*}$) 表示满足下述条件的下方有界上调和函数（或上方有界次调和函数）s 的全体：对于每个 $p^*\in\Delta$，$\liminf_{R\ni p\to p^*} s(p)\geqslant f(p^*)$ (或 $\limsup_{R\ni p\to p^*} s(p)\leqslant f(p^*)$) 成立. 当这些族非空时，$\overline{H}_f^{R,R^*}(p)=\inf\{s(p)\mid s\in\overline{\mathfrak{U}}_f^{R,R^*}\}$ 和 $\underline{H}_f^{R,R^*}(p)=\sup\{s(p)\mid s\in\underline{\mathfrak{U}}_f^{R,R^*}\}$ 都在 R 内调和，且有 $\underline{H}_f^{R,R^*}\leqslant\overline{H}_f^{R,R^*}$. 特别当 $\underline{H}_f^{R,R^*}=\overline{H}_f^{R,R^*}$ 时，以 H_f^{R,R^*} 记这个共同的调和函数，并称 f 关于 R^* **是可解的** (resolutive). 使 Δ 上所有有界连续函数都可解的 R^* 称为**可解紧化** (resolutive compactification). 这时 Δ 的点 p^* 关于 Dirichlet 问题为**正则** (regular) 是指，对于 Δ 上任意的有界连续函数 f，有 $\lim_{R\ni p\to p^*} H_f^{R,R^*}(p)=f(p^*)$ (→ Dirichlet 问题). Δ 的正则点所成的集合 Δ_r 包含于调和边界 Γ 之内. 对于可解紧化 R^*，在 Δ 上存在唯一的正的正则 Borel 测度† μ_p，使对 Δ 上每个有界连续函数 f，都有 $H_f^{R,R^*}(p)=\int_\Delta f(p^*)d\mu_p(p^*)$. 称这个测度为 Δ 上关于 $p\in R$ 的**调和测度** (harmonic measure). 对 R 的任意固定的点 o，存在 $R\times\Delta$ 上的函数 $P(p,p^*)$，满足下面三个条件，且有 $d\mu_p(p^*)=P(p,p^*)d\mu_o(p^*)$：1) $P(p,p^*)$ 作为 p 的函数在 R 上是调和的；2) $P(p,p^*)$ 作为 p^* 的函数是 Borel 可测的；3) $k(o,p)^{-1}\leqslant P(p,p^*)\leqslant k(o,p)$ ($k(o,p)$ 是 $\{o,p\}$ 关于 R 的 Harnack 常数) ([5]).

【由函数族确定的紧化】 设 F 是 R 上（允许取无穷值）的实值连续函数的某个族，如果对于 R 的任意两个不同的点 p,q，总存在 $f\in F$，使得 $f(p)\neq f(q)$，则称 F 为 R 上的**分离族** (separating family). 对于紧化 R^*，如果 F 的每个函数能扩张为 R^* 上的连续函数，且扩张的函数族又成为 R^* 上的分离族，则称 R^* 为 ***F* 紧化** (F-compactification)，记作 R_F^*. 映射 $\varphi: F\to R_F^*$ 定义了从 R 上的分离族的全体到 F 紧化的全体上的单值映射. 若 $F_1\supset F_2$，则 $\varphi(F_1)$ 处于 $\varphi(F_2)$ 之上. 对于任意的 R^*，$\varphi^{-1}(R^*)$ 含有无穷多个分离族，其中成为代数的分离族是重要的 ([3]). 下面我们举出由这个方法确定的 Riemann 面的紧化的有代表性的例子.

1) **Александров 紧化** (Aleksandrov compactification) $R_{\mathfrak{A}}^*$. 就是说取在 R 上有界且具有紧支集的连续函数的全体 $\mathfrak{A}$ 作为分离族时的 $R_{\mathfrak{A}}^*$. 这是 R 的最小紧化，在函数论里讨论非相对紧子域关于相对边界†的 Dirichlet 问题时，常用到这种紧化.

2) **Stone-Čech 紧化** (Stone-Čech compactification) $R_{\mathfrak{C}}^*$. 就是说取 R 上有界连续函数的全体 $\mathfrak{C}$ 作为分离族时的 $R_{\mathfrak{C}}^*$. 这是 R 的最大紧化. 在函数论中不怎么使用，作为它的有效应用的例子，有中井三留所做的工作 ([4]).

3) **Kerékjártó-Stoïlow 紧化** (Kerékjártó-Stoïlow compactification) $R_{\mathfrak{S}}^*$. 就是说以如下的 f 的全体 $\mathfrak{S}$ 作为分离族时的 $R_{\mathfrak{S}}^*$：f 在 R 上是有界连续的，且存在 R 的某个紧集 K_f，使 f 在 $R-K_f$ 的各个连通分支上取常数值. 这是最小的 Stoïlow 型紧化，所有比它大的紧化都是 Stoïlow 型的. 在函数论中常用到这种紧化，其中典型的是大津贺信关于 Dirichlet 问题和保角映射的研究.

4) **Royden 紧化** (Royden compactification)

$R^*_{\mathfrak{R}}$. 就是说以如下的 f 的全体 $\mathfrak{R}$ 作为分离族时的 $R^*_{\mathfrak{R}}$: f 是 R 上的有界 C^∞ 类函数，且它在 R 上的 Dirichlet 积分† $\iint_R df\wedge{}^*df$ 为有限．它是由 H. L. Royden 引进的，由于森真一，太田稔，楠幸男，中井等所做的研究，它提供了研究 HD 函数和 Riemann 面分类问题等的有力工具 (→ Riemann 面).

5) **Wiener 紧化** (Wiener compactification) $R^*_{\mathfrak{W}}$. 就是说以如下的 f 的全体 $\mathfrak{W}$ 作为分离族时的 $R^*_{\mathfrak{W}}$: f 在 R 上有界连续，对于不属于 O_G 的任意固定的子域 G，设 $\{G_n\}$ 是由 G 的相对紧子域组成的任意近似序列，则 $\{H_f^{G_n}\}$ 收敛到不依赖于此近似域序列的确定的调和函数．这是最大的可解紧化，比它小的紧化都是可解的．它为森，林一道，楠，C. Constantinescu-A. Cornea 等所研究，在 HB 函数和 Riemann 面的分类等方面是有效的.

6) **Martin 紧化** (Martin compactification) $R^*_{\mathfrak{M}}$. 就是说以如下的 f 的全体 $\mathfrak{M}$ 作为分离族时的 $R^*_{\mathfrak{M}}$: f 在 R 上有界连续，且存在相对紧的域 R_f，使得 $f=H_{f^*}^{R-\bar{R}_f,R^*_{\mathfrak{M}}-R_f}/H_{1^*}^{R-\bar{R}_f,R^*_{\mathfrak{M}}-R_f}$ 在 $R-R_f$ 上成立(f^* 是在 R_f 内等于 f，在 $R^*_{\mathfrak{M}}-R$ 内等于零的函数，1^* 也类似)．$R^*_{\mathfrak{M}}-R$ 称为 R 的 **Martin 边界** (Martin boundary)．当 R 具有 Green 函数† g 时，固定一点 $o\in R$，若令 $m(p,q)=g(p,q)/g(o,q)$，则这个函数能连续扩张到 $R\times R^*_{\mathfrak{M}}$ 上，称它为 **Martin 核** (Martin kernel)．采用距离 $d_{\mathfrak{M}}(q,r)=\sup_{r\in R_0}|m(p,q)/(1+m(p,q))-m(p,r)/(1+m(p,r))|$ (R_0 是 R 的参数圆盘)，$R^*_{\mathfrak{M}}$ 就成为可度量化†的．这个紧化是由 R. S. Martin 引进的，M. H. Heins, M. Brelot, G. Choquet, M. Parreau, L. Naïm，倉持善治郎，J. L. Doob, Constantinescu-Cornea 等人，在 HP 函数、位势理论、聚值集†理论等方面作出了它的许多应用.

7) **倉持紧化** (Kuramochi compactification) $R^*_{\mathfrak{K}}$. 对于 R 上的函数 f，如果存在相对紧的子域 R_f，使 f 在 R_f 外侧为 C^∞ 类，并且它在 $R-R_f$ 上的 Dirichlet 积分，不大于任一在 $R-R_f$ 上为 C^∞ 类而在 R_f 的边界上与 f 相等的函数在 $R-R_f$ 上的 Dirichlet 积分，则写作 $(R)\partial f/\partial n=0$．取 R 上有界连续且 $(R)\partial f/\partial n=0$ 的 f 的全体作为分离族 $\mathfrak{K}$ 时的 $R^*_{\mathfrak{K}}$，称为倉持紧化．如果 R 上的连续函数 $k(p,q)$ 满足下列条件：在 R 内的固定参数圆盘 R_0 中取值零，在点 q 处具有正对数奇点†，$(R)\partial k/\partial n=0$，且在 $R-\bar{R}_0$ 内除点 q 外调和，它就可以连续扩张到 $R\times R^*_{\mathfrak{K}}$ 上，则称它为**倉持核**(Kuramochi kernel)．利用这个函数，如同 Martin 紧化的情形，$R^*_{\mathfrak{K}}$ 就是可度量化的．这个紧化是由倉持引进的．他和 Constantinescu-Cornea 等一起，给出了它在 HD 函数、位势理论、聚值集理论等方面的重要应用.

在上面的例子中，2)，4) 或 5) 中任何边界点都不满足第一可数公理†，除这些例子外，别的都是可度量化的．在 4) 和 5) 中，$\Delta_1=\Gamma$.

图 1 表示了上述七例的大小关系．在这里，$A\to B$ 意味着"A 不小于 B"，$A\neq B$ 意味着"一般地说，A 和 B 之间没有大小关系".

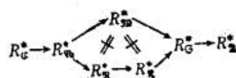


图 1

【参】 [1] C. Constantinescu-A. Cornea, Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer, 1963; [2] 倉持善治郎，Riemann 面の境界について，数学，**16**(1964)，80—94; [3] 中井三留，Riemann 面における函数環の方法について，数学，**13** (1962)，129—140; [4] M. Nakai (中井三留)，On Evans potential, Proc. Japan. Acad., **38** (1962)，624—629; [5] M. Nakai (中井三留)，Radon-Nikodym densities between harmonic measures on the ideal boundary of an open Riemann surface, Nagoya Math. J., **27** (1966)，71—76; [6] F. Maeda (前田文友)-M. Ohtsuka (大津賀信)，et al., Kuramochi boundaries of Riemann surfaces, Lecture notes in math., 58, Springer, 1968.

代数体函数 [英 algebroidal function 法 fonction algébroïde 德 algebroide Funktion 俄 алгеброидная функция 日 代数型関数] 如果 f 的代数方程†

(1) $A_0(z)f^k+A_1(z)f^{k-1}+\cdots+A_k(z)=0$

(其中系数 $A_i(z)$ 是在复数 z 平面的域 G 内单值亚纯[†]的函数)为**不可约**(irreducible),也即(1)的左端不能分解为以单值函数为系数的多项式的积,则称由(1)确定的 z 的解析函数 f 为 **k 值**(k-valued)**代数体函数**. 不妨设 $A_i(z)$ 没有共同的零点,且乘以适当的因子,也可以设所有 $A_i(z)$ 在 G 内全纯,因此以下假定这两个条件成立. 特别是,在 $k=1$ 的情形,(1)的解成为 G 内的单值亚纯函数;如果系数 $A_i(z)$ 都是多项式,则(1)的解成为代数函数[†]. 也就是说,可以把代数体函数看作单值函数到多值函数的推广,同时也可以把它看作代数函数到超越函数的推广. 因为(1)是不可约方程,所以它的判别式 $D(z)$ 不恒等于 0. 在使 $D(a)\neq 0$, $A_0(a)\neq 0$ 的点 $a\in G$ 处,(1)确定了 k 个全纯函数元素,它们在 a 的适当的邻域内确定了解析函数 f 的单值全纯分枝 $f_1(z),\cdots,f_k(z)$. $f_1(z),\cdots,f_k(z)$ 在 D 内可以进行广义解析开拓[†],除了在 $A_0(z)=0$ 的点处至少有一个成为极元素外,在 $D(z)=0$ 的点处,至多不过出现分歧元素. 因而,代数体函数也可定义为在域 G 内除了极点和代数分歧点外全纯的有限多值解析函数. 如果把代数体函数 $f(z)$ 确定的 Riemann 面看作平面域 G 的覆盖面[†] $\mathfrak{F}$,则 $\mathfrak{F}$ 是 G 上的除代数分歧点外没有其他奇点的 k 叶覆盖面. f 在 $\mathfrak{F}$ 上成为单值亚纯函数,且在 G 的一点 z 上的函数元素全不相同. 这个性质也能刻划 k 值代数体函数的特征.

由于这两种定义方式的不同,研究的方法也就不同起来.按照前一种定义,象 G. Rémoundos 和 G. Valiron 等那样,便于原封不动地利用关于单值函数所得到的结果. 采用后一种定义,象 H. Selberg 和 E. Ullrich 那样,优点是能使用在单值函数情形用过的方法.

【函数值的绝对值】 关于代数体函数的已知结果,大都是单值函数的结果的推广,特有的性质很少. 整函数[†]理论首先扩张到单值函数,然后扩张到在全有限平面 $|z|<+\infty$ 内亚纯的代数体函数. 最基本的最大模原理[†]在 Riemann 面 $\mathfrak{F}$ 上成立. 再者,在 $A_i(z)$ 和 $|f_\nu(z)|$ 之间,有下面的常用的关系:当(1)取

$$(1')\qquad f^k+A_1(z)f^{k-1}+\cdots+A_k(z)=0$$

的形状时,若设 $A(z)=\max|A_i(z)|$, $F(z)=\max|f_\nu(z)|$,则 $\log(1+A(z))/\log(1+F(z))$ 有界.

在全有限平面 $|z|<+\infty$ 内有定义的没有极点的代数体函数,称为**整代数体函数**(英 integral algebroidal function 法 fonction algébroïde entière). 它关于 z 的导数在分歧点处可以有极点,从而它的高阶导数在分歧点处可以有极点,这与单值整函数的情形不同. 确定这种函数的(1)或(1′)的系数都是整函数,且 $A_0(z)$ 没有零点. 从而得知,整代数体函数的阶、型和类与系数 $A_i(z)$ 中最高的阶、型和类相同(→ 超越整函数).

对于阶小于 1/2 的整代数体函数,虽然在适当的同心圆序列 $|z|=r_n$ ($r_n\to\infty$)上, $F(z)$ 一致趋向于无穷大,但是不能说在 Riemann 面上所有的分枝都趋向于无穷大;在这个意义下, Wiman 定理[†]不再成立.

【Picard 定理及其推广】 首先把 Picard 定理[†]和 Borel 定理[†]推广到代数体函数的是 Rémoundos. 也即,全有限平面上的 k 值超越代数体函数,最多除去 $2k$ 个值外,取所有的值无穷多次. 事实上,因为可以作出具有 $2k$ 个例外值的函数,所以这个定理不能再改进. 此外,使 $f(z)-w=0$ 的根的收敛指数[†]小于函数 f 的阶的值不超过 $2k$ 个,对所有其他的值,两者恒相等(É. Borel). 也能证明,最多只能有 $2k$ 个多项式 $P(z)$,使 $f(z)-P(z)=0$ 至多只存在有限个根(Borel).

首先把关于亚纯函数的 Nevanlinna 理论推广到代数体函数的是 Selberg. 几乎与此同时, Valiron 从(1)的系数出发达到了相同的结果;接着 Ullrich 考虑了 Riemann 面 $\mathfrak{F}$ 的分歧点数的影响,改进了结果.

设 $\mathfrak{F}_r$ 是 Riemann 面 $\mathfrak{F}$ 处于圆 $|z|<r$ 上的部分,以 $n(r,w)$ 表示 $f(z)-w=0$ 在 $\mathfrak{F}_r$ 内的根的个数,以 $n(r,\mathfrak{F})$ 表示 $\mathfrak{F}_r$ 的分歧点的个数. 用这些来定义

$$N(r,w)=\frac{1}{k}\int_0^r(n(t,w)-n(0,w))\frac{dt}{t}+\frac{n(0,w)}{k}\log r,$$

$$m(r,w)=\frac{1}{2k\pi}\int_{|z|=r}\log^+\frac{1}{|f(re^{i\varphi})-w|}d\varphi,\quad w\neq\infty,$$

$$T(r,w)=m(r,w)+N(r,w),$$

如果还作 3 在映射 $w=f(z)$ 下的象域的球面面积的对数积分

$$T(r,f)=\frac{1}{k}\int_0^r\frac{dt}{t}\iint_{3_t}\frac{|f'(te^{i\varphi})|^2}{1+|f(te^{i\varphi})|^2}t\,dt\,d\varphi$$

和 $n(r,3)$ 的对数积分 $N(r,3)$，则

$$T(r,w)=T(r,f)+O(1)$$

和分歧定理

$$N(r,3)<(2k-2)T(r,f)+O(1)$$

成立；而 $T(r,f)=O(\log r)$ 成立当且仅当 f 是代数函数．设 $A(z)$ 是 $|A_j(z)|$ 的最大值，令

$$\mu(r)=\frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\log^+A(re^{i\varphi})d\varphi,$$

则有

$$T(r,f)=\mu(r)+O(1).$$

作为第二基本定理，我们有

$$\sum_{\nu=1}^{q}N(r,w_\nu)>(q-2)T(r,f)-N(r,3)+\sum_{\nu=1}^{q}N_1(r,w_\nu)+O(\log rT)>(q-2k)T(r,f)+\sum_{\nu=1}^{q}N_1(r,w_\nu)+O(\log rT);$$

在这里，$n_1(r,w)$ 表示从 $f(z)-w=0$ 的根的重数减去 1 后所作的和，而 $N_1(r,w)$ 是它的对数积分．此外，如果令 $f(z)$ 的亏格，分歧指数和 Riemann 面 3 的分歧指数顺次为

$$\delta(w)=1-\limsup N(r,w)/T(r,f)=\liminf m(r,w)/T(r,f),$$

$$\mathfrak{D}(w)=\liminf N_1(r,w)/T(r,f),$$

$$\xi=\liminf N(r,3)/T(r,f),$$

则得到

$$\sum\delta(w_\nu)+\sum\mathfrak{D}(w_\nu)\leqslant 2+\xi\leqslant 2k.$$

这些结果包括了上述 Picard 定理和 Borel 定理．此外，由于考虑到分歧点的影响，Ahlfors 的覆盖面理论也能适用于代数体函数（津村善郎）．从这个结果可直接推出 Bloch 定理†．

【渐近值及其他研究】 在单值函数情形，以 Valiron，L. V. Ahlfors 为中心，研究了 Borel 方向†以及渐近值†的个数等等；但在代数体函数中，能举出反例表明，与这些结果对应的命题，很多不能成立．

还有，与整函数不同，整代数体函数的阶与有限渐近值的个数之间完全没有关系，阶为零的函数也能有无穷多个渐近值．关于渐近值的个数，只不过知道，满足 $\liminf T(r,f)/(\log r)^2<+\infty$ 的亚纯代数体函数，最多只能有 k 个渐近值（Valiron-津村）．在单值函数中有名的关于反函数的直接超越奇点† 的个数和函数的阶的 Ahlfors 基本定理，对代数体函数尚未解决．

同样，由于代数体函数存在分歧点，定义 Borel 方向也有困难．对于整代数体函数，A. Rauch 证明了，如果 $\int^\infty\frac{T(r,f)}{r^{\rho+1}}dr$ 发散，则使

$$L(\varphi)=\int^\infty\frac{\log^+F(re^{i\varphi})}{r^{\rho+1}}dr$$ 发散的方向 φ 至少形成开度为 π/ρ 的角．离开值分布理论，Selberg 求得了使某种 Abel 积分的反函数成为代数体函数的两三个条件．

【参】 [1] G. Rémoundos, Extensions aux fonctions algébroides multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations, Gauthier-Villars, 1927; [2] H. Selberg, Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale, Avhandl. Norske Videnskaps-Akad., Oslo, 8 (1934), 1—72; [3] 津村善郎，代数型函数論，数物会誌，15 (1941), 77—96.

保角映射 [英 conformal mapping, conformal representation　法 représentation conforme　德 konforme Abbildung　俄 конформное отображение　日 等角写像] 设函数 $w=f(z)$ 同胚地把 z 复数平面上的域 D 对应到 w 复数平面上的域 Δ，满足：1）以 D 的任一点 z_0 为起点且在 z_0 处具有切线的曲线 C_z：$z=z(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的象曲线 C_w：$w=w(t)=f(z(t))$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 在象点 $w_0=f(z_0)$ 处仍然具有切线，并且，2）在 z_0 处具有切线的两条曲线 $C_z^{(1)}$，$C_z^{(2)}$ 的夹角

与象曲线 $C_w^{(1)}$, $C_w^{(2)}$ 的夹角同向相等. 这时，称这个从D到Δ上的映射是**保角的**(conformal). 此时 $w=f(z)$ 在D内必是解析函数† (Д. Е. Меньшов, 1931). 因此,保角映射理论是解析函数理论的一个分支. 函数 $w=f(z)$ 把域D保角映射到域Δ上,无非就是 $w=f(z)$ 在D内是单叶†亚纯函数†，其值域是Δ. 这时在D的每个(有限)点处,$f'(z)\neq 0$,且连接曲线 C_w 上的两点 $w_0=w(0)$ 和 $w(t)$ 的线段的长度与连接曲线 C_z 上的两点 $z_0=z(0)$ 和 $z(t)$ 的线段的长度之比，当 $t\to 0$ 时,具有不依赖于 C_z 的选择方法的一定的非零极限 $|f'(z_0)|$. 从而,如果在两条曲线 $C_z^{(1)}$, $C_z^{(2)}$ 上分别各取一点 z_1, z_2, 设 z_1, z_2 在象曲线 $C_w^{(1)}$, $C_w^{(2)}$ 上的象点分别为 w_1, w_2, 则当 z_1 和 z_2 充分接近 z_0 时，两个三角形 $\triangle z_1z_0z_2$ 和 $\triangle w_1w_0w_2$ 近似地正向相似，即保角映射成为保形映射(→ 公式 13).

【到单位圆盘上的保角映射】 保角映射论的基本定理是 **Riemann 映射定理** (Riemann's mapping theorem)，它断言，至少具有两个边界点的任意单连通域D能保角映射到单位圆的内部Δ上. 这条定理等价于D的 Green 函数†的存在性,可用各种方法证明. G. F. B. Riemann (Dissertation, 1851) 基于 C. F. Gauss 的思想，假定使 Dirichlet 积分†取最小值的变分问题的解存在,证明了这条定理,然而他的论证是不完备的, 以后由 D. Hilbert 等补足. 现今被认为最简单的证明方法，是应用正规族†理论的 L. Fejér-F. Riesz 的方法 (T. Radó, 1922, 1923). 还有 P. Koebe (1912) 的**密切法** (*法* procédé d'osculation *德* Schmiegungsverfahren)，这是证明存在性的纯构造性方法，也可用于多连通的情形. 对 Riemann 映射定理中的映射函数 $w=f(z)$ 加以在D的一点 z_0 处的正规化条件 $f(z_0)=0$, $\arg f'(z_0)=\theta_0$, 就是唯一确定的.

设 $w=f(z)$ 是把z平面上的单连通域D保角映射到w平面上的单连通域Δ上的函数. 这时,如果D内的点列 $\{z_\nu\}$ 收敛到D的边界上的一点ζ, 则对应的点列 $\{w_\nu\}$ $(w_\nu=f(z_\nu))$ 在Δ的内部没有聚点. 然而,$\{w_\nu\}$ 不一定趋向于边界上的一点. 对于收敛到同一边界点ζ的点列 $\{z_\nu\}$, $\{z'_\nu\}$, $\{f(z_\nu)\}$ 和 $\{f(z'_\nu)\}$ 不一定存在极限，即使存在极限，两者也不一定相等. 如果对于收敛到ζ的所有 $\{z_\nu\}$, $\{f(z_\nu)\}$ 恒收敛到Δ边界上的一点ω, 则称 $f(z)$ 在ζ处具有**边界值** (boundary value) ω. 为了研究序列 $\{w_\nu\}$ 的性状，或者当z沿D内的曲线趋近边界时象曲线的性态等，可以作如下的简化: 如果用至少具有两个边界点的单连通域可由初等函数†保角映射到有界域这一事实和 Riemann 映射定理,问题就归结为研究D是有界单连通域,Δ是单位圆 $|w|<1$ 的情形.

【边界的对应】 由 $w=f(z)$ 把有界单连通域D保角映射到单位圆 $|w|<1$ 上时，关于边界的对应,下面的定理成立:

1) D的可达†边界点 z_C 对应到单位圆周 $|w|=1$ 上唯一的一点，不同的可达边界点 z_{C_1}, z_{C_2} 对应到单位圆周上不同的点. 而且单位圆周上所有对应于D的可达边界点的点所成的集合,其角测度为 2π.

2) D的边界元素†与单位圆周上的点之间是一一对应的 (C. Carathéodory).

3) 设 $w=f(z)$ 是把 Jordan 曲线C的内部D保角映射到单位圆内部Δ: $|w|<1$ 的函数,则 $w=f(z)$ 在C的每个点ζ处都具有边界值,如果用 $f(\zeta)$ 表示这个边界值,则 $|f(\zeta)|=1$. 因而 $f(z)$ 在闭域 $\bar{D}=D\cup C$ 上连续，且把 $\bar{D}$ 一一映射到闭圆盘 $\bar{\Delta}$: $|w|\leqslant 1$ 上. 同样的命题对反函数 $z=\varphi(w)$ 也成立, $z=\varphi(w)$ 把 $\bar{\Delta}$ 一一连续地映射到 $\bar{D}$ 上. 也即，如果 Jordan 曲线的内部保角映射到单位圆的内部，那么可以把这个映射扩张为 $\bar{D}$ 到 $\bar{\Delta}$ 的一个同胚 (Carathéodory).

在这种情形,如果 Jordan 曲线C含有正则的解析曲线†弧Γ, 则映射函数 $w=f(z)$ 能越过Γ(除去Γ的两个端点)解析开拓†到D的外部,从而 $w=f(z)$ 在Γ的内点处也有保角性.

关于在边界上更详细地审察角的对应问题，Carathéodory, S. Warschawski, J. Wolff 等进行了研究. 这个问题与角微商†有密切关系.

【多连通域的情形】 在多连通域的情形，与上面不同，也在下述意义下使用保角映射这一术语．一般地，如果对域D内处处亚纯（单值或多值）的解析函数的分枝† $w=f(z)$，属于这个分枝的两个不同的函数元素在各自的中心处必取不同的值，则称$w=f(z)$在D内是**单叶的**（univalent）．当存在D内的（单值或多值）亚纯单叶函数$w=f(z)$，其值域是Δ时，就称$w=f(z)$把D保角映射到Δ上．在这种情形，$w=f(z)$的反函数$z=\varphi(w)$在Δ内必是单值的．如果$w=f(z)$在D内单值，则和前述的保角映射相同．特别是，在D是单连通的情形，由于单值定理†，$w=f(z)$必是单值的．然而$w=f(z)$在D内一般可以是多值的，为了同它区别，称前述的保角映射为**一一保角映射**．

多连通域情形的 Riemann 映射定理可叙述为下面的形式．

4）设D是至少具有三个边界点的多连通域．这时存在D内的单叶全纯多值函数$w=f(z)$，其值域Δ恰和单位圆盘$|w|<1$相同（即D能保角映射到单位圆盘Δ：$|w|<1$上）．而且，在D的一点z_0处，$w=f(z)$（的一个分枝）能满足$f(z_0)=0$，$\arg f'(z_0)=\theta_0$，且在这样的条件下，映射函数是唯一确定的．

这条定理中的映射函数必定是无穷多值的，并且它具有下面的性质：当固定D内任意一点z_0时，如果设$P(z;z_0)$是$w=f(z)$的以z_0为中心的一个函数元素，则它在z_0处的所有函数元素都能表示为$L_k[P(z;z_0)]$（$k=0,1,\cdots$），这里L_k是保持单位圆内部不变的线性变换†．这些线性变换L_k的集合构成一个群G（称为 Fuchs 群†），$w=f(z)$的反函数$z=\varphi(w)$是关于群G的自守函数†．群G不含有椭圆变换†．如果D有孤立边界点，则G含有抛物变换†．

【Riemann 面之间的保角映射】 设F_1和F_2是两个 Riemann 面†，并设给出了把F_1一一连续地变换到F_2的映射$p_2=\Phi(p_1)$．设F_1的各点p_1^0在F_2上的象点是p_2^0，用分别属于p_1^0和p_2^0的局部单值化参数† $z_1=T_1(p_1)$和$z_2=T_2(p_2)$，作使$z_1\to p_1\to p_2\to z_2$的函数$z_2=\varphi(z_1)$，如果$z_2=\varphi(z_1)$把$z_1^0=T(p_1^0)$的某个邻域一一保角映射到$z_2^0=T_2(p_2^0)$的一个邻域，则称$p_2=\Phi(p_1)$把F_1一一保角映射到F_2上．

对于上述多连通域的映射函数$w=f(z)$，如果把它的各个函数元素看作点，就可以得到基础面D的万有覆盖面† $\widetilde{D}$，而$w=f(z)$在$\widetilde{D}$上成为单值全纯单叶函数．因而定理4)可以换成下面的说法：设D是至少有三个边界点的多连通域，则能把D的万有覆盖面$\widetilde{D}$一一保角映射到单位圆盘$|w|<1$上．在这种情形，关于覆盖面$\widetilde{D}$的可达边界点，类似于1)的定理成立．因为$\widetilde{D}$是z平面的单连通覆盖面，所以可以把上述定理4)看作 Koebe 定理的特殊情形，后者断言，任一单连通开 Riemann 面可保角映射到单位圆内部或全有限平面上．

【多连通域的保角映射】 把z平面的多连通域D一一保角映射到w平面的适当的多连通域$\mathfrak{D}$的问题也是重要的．在这种情形，D和$\mathfrak{D}$必须是同胚的，然而即使D和$\mathfrak{D}$同胚，它们之间也不一定能一一保角映射．设D和$\mathfrak{D}$分别是z和w平面上至少具有三个边界点的多连通域．根据定理4)把D和$\mathfrak{D}$保角映射到单位圆盘上时，如果分别以G和$\mathfrak{G}$表示属于D和$\mathfrak{D}$的 Fuchs 群，则D可以一一保角映射到$\mathfrak{D}$上的充分必要条件是，在适当的线性变换下，群$\mathfrak{G}$可以变换为群G．

对于边界分支只由连续统组成的有限连通域，在二连通情形有一个实参数，在$n(>2)$连通情形有$3n-6$个实参数，作为属于域的**保角不变量**（conformal invariant, modulus）．只在这些不变量相同的类内，保角映射才是可能的．

相应于采用圆盘作为单连通的典型域，在二连通的情形常用同心圆环作为典型域．在后一情形，两个边界圆的半径之比（>1）的对数，通常称为**模数**（modulus）．它是这个域的保角不变量．一般地，作为n（$\geqslant 2$）连通的典型域，可以取种种类型：沿几个同心圆弧或射线切开全平面、圆盘或同心圆环所得的域，具有平行裂纹的平面，等等．把给定的域一一保角映射到这些典型域的可能性，Hilbert, Koebe 等给出了

位势论†的证明，E. Rengel, R. de Possel, H. Grunsky 等给出了函数论的证明。Koebe 还证明了一一保角映射到从全平面除去互不相交的圆盘后所得到的域的可能性，以后 J. Douglas, R. Courant 把它作为 Plateau 问题†解的存在性的特殊情形予以导出。L. Bieberbach, Grunsky 还证明了从其他类型的 n 连通域映射到 n 叶圆盘的可能性。在二连通域方面有 O. Teichmüller，小松勇作等的细致研究。当 $3 \leqslant n < \infty$ 时，起初 L. V. Ahlfors (1947) 作出了 Schwarz 引理†的推广，而近年来基于核函数†或 Schiffer 变分等，在这方面取得了相当的成果。无限连通情形与有限连通情形有本质的差别，已由 de Possel, H. Grötzsch 等进行了研究。

【通用常数】 在保角映射理论中出现的**通用常数** (universal constant) 中，Bloch 常数是有名的。A. Bloch (1924) 证明，由 $|z| < 1$ 内的全纯函数 $w = F(z) = z + \cdots$ 所作的一一保角映射所得到的 w 平面的覆盖面，都包含一个单叶圆盘，这个圆盘的半径是与各个函数 F 无关的正数 B (**Bloch 定理**)。这样的常数 B 的上确界 $\mathfrak{B}$ 称为 **Bloch 常数** (Bloch's constant)。$\mathfrak{B}$ 的准确值至今还不知道，但 Ahlfors-Grunsky 得到了

$$\frac{\sqrt{3}}{4} < \mathfrak{B} \leqslant \sqrt{\pi}\, 2^{1/4} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(1/4)} \times \left(\frac{\Gamma(11/12)}{\Gamma(1/12)}\right)^{1/2} = 0.4719\cdots.$$

关于限定单叶函数†时的 Bloch 常数 $\mathfrak{A}$，有 $0.5666 < \mathfrak{A} < 0.65647$。象圆盘不一定是单叶时，与 Bloch 常数相当的是 **Landau 常数** (Landau's constant) $\mathfrak{L}$，关于它已经知道 $0.5 \leqslant \mathfrak{L} < 0.54326$ (参阅小松[5]，上，第 12 章)。

关于多角形域的保角映射，→ Schwarz-Christoffel 变换。关于畸变定理以及系数问题等，→ 单叶函数和多叶函数。

【参】 [1] G. Julia, Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes, Gauthier-Villars, 1931; [2] G. Julia, Leçons sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, Gauthier-Villars, 1934, [3] C. Carathéodory, Conformal representation, Cambridge Univ. Press, 1932; [4] S. Bergman, The kernel function and conformal mapping, Amer. Math. Soc. Math. Surveys, 1950 (中译本：施梯芬·柏格曼，核函数和共形映射，科学出版社，1958); [5] 小松勇作，等角写像論，共立出版，上 1944，下 1949; [6] Z. Nehari, Conformal mapping, McGraw-Hill, 1952; [7] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, 1952 (中译本：Г. М. 戈鲁辛，复变函数的几何理论，科学出版社，1956); [8] D. Gaier, Konstruktive Methoden der konformen Abbildung, Springer, 1964; [9] L. Sario-K. Oikawa (及川広太郎), Capacity functions, Springer, 1969. 又 → 全纯函数的 [参]，单叶函数和多叶函数的 [参]。

Schwarz-Christoffel 变换 [英 Schwarz-Christoffel transformation 法 transformation de Schwarz-Christoffel 德 Schwarz-Christoffelsche Transformation 俄 преобразование Шварца-Христоффеля 日 シュワルツ-クリストッフェルの変換] 确定把圆的内部或半平面保角映射†到多角形内部的解析函数的形状问题，是由 H. A. Schwarz 和 E. B. Christoffel (1869) 首次研究的 (→ 保角映射，公式 13)。

设复 w 平面上 m 角形 P 的顶点 b_μ ($\mu = 1, \cdots, m$) 处内角为 $\alpha_\mu \pi$，则把 z 平面上的圆盘或半平面保角映射到 P 的内部的函数 $w = f(z)$ 由

$$f(z) = C\int^z \prod_{\mu=1}^{m} (a_\mu - z)^{\alpha_\mu - 1} dz + C'$$

给出。在这里 $b_\mu = f(a_\mu)$，C，C' 是与多角形 P 的位置和大小有关的常数。但当 z 平面上的基础域是半平面，且有一个 a_μ 与无穷远点相同时，要除去与之相应的因子。上面的表示式称为 **Schwarz-Christoffel 变换公式** (transformation formula of Schwarz-Christoffel)。这个公式是 Christoffel 为解二维平稳温度分布问题而求出的，它在处理有关多角形域的保角映射的各种问题中，在确定静电学和流体力学的二维问题里场的力线 (流线) 和等位线等问题中，有极为广泛的应用。

关于把圆的内部或半平面映射到多角形外部的函数，也可导出类似的公式。与此有关，把圆的内部映射到由圆弧多角形围成的域的函数所满足的三阶微分方程，对于自守函数†理论是有用的。如果把特殊形状的圆弧多角形向别的

方向推广，考察以原点为渐近点的对数螺线弧所围成的曲线多角形，则对于把圆的内部映射到这样的多角形的内部的函数，可以得到类似于 Schwarz-Christoffel 变换公式的表示式．

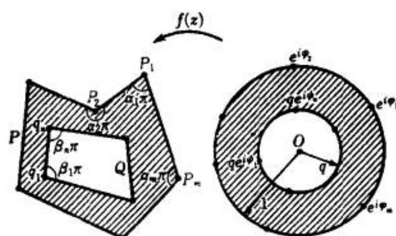


图 1

【二连通域的情形】 可以往各种方向推广 Schwarz-Christoffel 变换．例如，把二连通的典型基础域 $0<q<|z|<1$ 保角映射到 m 角形 P 和 n 角形 Q 所围成的环形域的函数 $w=f(z)$ (图 1)，如果 $|z|=1$, $|z|=q$ 分别对应到 P, Q，而 P, Q 的顶点的原象点是 $e^{i\varphi_\mu}(\mu=1,\cdots,m)$, $qe^{i\psi_\nu}$ $(\nu=1,\cdots,n)$, P, Q 的内角分别等于 $\alpha_\mu\pi$, $\beta_\nu\pi$, 则映射函数可表示为

$$f(z)=C\int^z z^{ic^*-1}\left(\prod_{\mu=1}^{m}\sigma(i\log z+\varphi_\mu)^{\alpha_\mu-1}\Big/\prod_{\nu=1}^{n}\sigma_3(i\log z+\psi_\nu)^{\beta_\nu-1}\right)dz+C'$$

的形状．这里 $\sigma(z)$ 和 $\sigma_3(z)$ 表示 Weierstrass 椭圆函数†论中以 2π 和 $-2i\log q$ 为基本周期的 σ 函数和余 σ 函数；常数 c^* 由

$$c^*=\frac{\eta_1}{\pi}\left(\sum_{\mu=1}^{m}(1-\alpha_\mu)\varphi_\mu-\sum_{\nu=1}^{n}(1-\beta_\nu)\psi_\nu\right)$$

给出．

【参】 [1] Y. Komatu (小松勇作), Darstellungen der in einem Kreisringe analytischen Funktionen nebst den Anwendungen auf konforme Abbildung über Polygonalringgebiete, Japan. J. Math., **19** (1945), 203—215; [2] Y. Komatu(小松勇作)-H. Nishimiya (西宮範), Conformal mapping onto polygons bounded by spiral arcs, Kôdai Math. Sem. Rep., **16** (1964), 243—248; [3] 小松勇作, 等角写像論, 共立出版, 上 1944, 下 1949; [4] W. von Koppenfels-F. Stallmann, Praxis der konformen Abbildung, Springer, 1959.

极值长度 〔英 extremal length 法 longueur extrémale 德 Extremallänge 俄 экстремальная длина 日 極値的長さ〕 【极值长度】 关于一个平面域内的某个曲线族，其长度和域的面积的关系，在函数论中早已得到种种应用．为使之一般化，L. V. Ahlfors 和 A. Beurling 引进了称为关于曲线族的极值长度的量（[1]）．此后虽然给出了各种定义，但除了 J. Hersch ([4]), A. Pfluger（[3]）的定义以外，这些定义本质上是相同的．

开区间或圆周的连续象称为曲线，如果包含于该曲线内的任一连通弧†的长度恒有限，则称这曲线是**局部可求长的** (locally rectifiable)．设 C 是至多可数个这样的曲线所成的族，$\rho(z)$ $(0\leqslant\rho(z)\leqslant\infty)$ 是在全平面上有定义的 Baire 函数†．在 C 上可以用弧长 s 作为典范参数（→长度和面积），定义 $\langle C,\rho\rangle=\int_C\rho ds$．设 Γ 为这样的 C 的某个集合．对 Γ 内所有 C 都满足 $\langle C,\rho\rangle\geqslant1$ 的 ρ，称为对于 Γ 是**容许的**(admissible)．如果假定 Γ 中不存在由至多可数个点形成的 C，则 $\rho\equiv\infty$ 对于 Γ 总是容许的．$\iint\rho^2dxdy$ 关于容许的 ρ 的下确界 $M(\Gamma)$，称为 Γ 的**模** (module)，它的倒数 $\lambda(\Gamma)$ 称为 Γ 的**极值长度**．特别是，如果给出下确界 $M(\Gamma)$ 的 ρ 存在，则称 $\rho|dz|$ 为 Γ 的**极值度量** (extremal metric)．即使把 ρ 限定为下半连续†函数，也能得到相同的 $\lambda(\Gamma)$．在 Γ 的元的长度的下确界为正的情形，在这个定义中限制 $\rho(z)$ 为连续函数而得到的量，是 Γ 的 **Hersch-Pfluger 极值长度**．两者事实上不同的例子是存在的（下面叙述的例 1)）．由于 Beurling 的工作，已经知道极值度量存在的充分必要条件．

我们列举按照 [1] 定义的极值长度的性质．1) 若 $\Gamma_1\subset\Gamma_2$，则 $\lambda(\Gamma_1)\geqslant\lambda(\Gamma_2)$．2) $M\left(\bigcup_n\Gamma_n\right)\leqslant\sum_n M(\Gamma_n)$．3) 设对于给定的 $\{\Gamma_n\}$ 和 Γ，存在互不相交的平面可测集 $\{E_n\}$，使得每个 $C_n\in\Gamma_n$ 包含于 E_n 内．如果 $\bigcup_n\Gamma_n$ 的每个元至少包含一个 $C\in\Gamma$，则 $M(\Gamma)\geqslant\sum_n M(\Gamma_n)$，

从而 $M\left(\bigcup_n \Gamma_n\right)=\sum_n M(\Gamma_n)$. 如果对每个 n, 任一 $C\in\Gamma$ 至少包含一个 $C_n\in\Gamma_n$, 则 $\lambda(\Gamma)\geqslant\sum_n \lambda(\Gamma_n)$. 4) 设 $f(z)$ 在平面域 Ω 内全纯, 每个 $C\in\Gamma$ 包含于 Ω 内, 如果以 $f(C)$ 表示 C 的象, 则 $\lambda(\Gamma)\leqslant\lambda(\{f(C)\})$. 特别是, 若 $f(z)$ 单叶†, 则等号成立, 也即 $\lambda(\Gamma)$ 在一一保角映射†下是不变的.

【极值距离】 设 Ω 是平面域, $\partial\Omega$ 是它的边界, X_1 和 X_2 是 $\Omega\cup\partial\Omega$ 中的集合. 连接 X_1 的点和 X_2 的点且最多除去端点都在 Ω 中的曲线的全体所形成的族的极值长度 $\lambda_\Omega(X_1,X_2)$, 称为 X^1 和 X_2 (关于 Ω) 的**极值距离** (extremal distance).

例 1) 设 $\Omega=\{z\,|\,|z|<2\}$, $X_1=\partial\Omega$, X_2 是 $|z|<1$ 中的可数集, 以 $|z|=1$ 作为它的聚点集, 则 $\lambda_\Omega(X_1,X_2)=\infty$, 但 Hersch-Pfluger 意义下的极值距离是 $(2\pi)^{-1}\log 2$, 两者不相等. 例 2) 关于边长为 a, b 的长方形, 边长为 a 的两边间的极值距离为 b/a. 例 3) 关于半径为 r_1, r_2 $(r_1<r_2)$ 的圆环域 Ω, 两边界圆周间的极值距离为 $(2\pi)^{-1}\log(r_2/r_1)$; 而 Ω 内与圆周同伦的闭曲线族的极值长度, 等于此极值距离的倒数. 例 4) 设 Ω 为扩张 z 平面上含有无穷远点作为内点的域, $z_0\in\Omega$, $\{|z-z_0|=r\}\subset\Omega$. 以 λ_r 表示 $\{|z-z_0|=r\}$ 和集 $X\subset\partial\Omega$ 之间关于 Ω 的极值距离, 则 $\lambda_r-(2\pi)^{-1}\log r$ 是 r 的递增函数, 它当 $r\to\infty$ 时的极限 $\tilde{\lambda}_\Omega(X,\infty)$, 称为**约化极值距离** (reduced extremal distance). Ω 的以 $z=\infty$ 为极点的 Green 函数†的 Robin 常数† γ 等于 $2\pi\tilde{\lambda}_\Omega(\partial\Omega,\infty)$.

也可以在 Riemann 面上定义极值长度的概念. 这个概念是许多古典保角映射不变量的统一的推广, 它对函数论的各个分支, 特别是保角映射†、拟保角映射†、Phragmén-Lindelöf 定理、系数问题、Riemann 面的型问题等等, 有广泛的应用. 它还可以用于微分几何学†问题. 推广极值长度的概念, 还可以定义**加权极值长度** (extremal length with weight) (大津賀信), 高维空间的一般的模 (B. Fuglede, [7]) 等, 这些概念具有有用的性质和应用.

【参】[1] L. V. Ahlfors-A. Beurling, Conformal invariants and function-theoretic null-sets, Acta Math., **83** (1950), 101—129; [2] V. Wolontis, Properties of conformal invariants, Amer. J. Math., **74** (1952), 587—606; [3] A. Pfluger, Extremallängen und Kapazität, Comment. Math. Helv., **29** (1955), 120—131; [4] J. Hersch, Longueurs extrémales et théorie des fonctions, Comment. Math. Helv., **29** (1955), 301—337; [5] 大津賀信, 函数論特論, 現代数学講座, 共立出版, 1957; [6] M. Ohtsuka (大津賀信), Dirichlet problem, extremal length and prime ends, van Nostrand, 1970; [7] B. Fuglede, Extremal length and functional completion, Acta Math., **98** (1957), 171—219; [8] J. A. Jenkins, Univalent functions and conformal mapping, Erg. Math., Springer, 1958.

拟保角映射 [英 quasi-conformal mapping 法 représentation quasi-conforme 德 quasikonforme Abbildung 俄 квазиконформное отображение 日 擬等角写像] 【历史】 拟保角映射, 作为保角映射†的推广, 是由 H. Grötzsch 引进的 (1928). 当平面域之间的同胚 f 为连续可微且其函数行列式为正时, 如果用复变量 z 来考察, 则微圆 $|dz|=$ 常数的象是以 $(|f_z|+|f_{\bar z}|)\times|dz|$ 为长轴, 以 $(|f_z|-|f_{\bar z}|)|dz|$ 为短轴的微椭圆, 而当长轴和短轴之比 $K(z)=(|f_z|+|f_{\bar z}|)/(|f_z|-|f_{\bar z}|)$ 在 f 的定义域内有界时, 就称 f 为**拟保角映射**. 如果 $K(z)$ 恒等于 1, 则 f 是保角映射. Grötzsch 除研究了拟保角映射与保角映射之间的类似点外, 还求出了平面上给定的两个长方形之间使 $K(z)$ 的上确界达到最小的拟保角映射, 也即求出了最接近保角映射的拟保角映射.

以后, 也有些人研究了拟保角映射与保角映射的类似点, 但是宁可说, 拟保角映射的重要性在于它的应用方面. 如后所述, 角谷静夫, O. Teichmüller 等把它应用于 Reimann 面的类型问题†, M. A. Лаврентьев, L. Bers 等把它应用于椭圆型偏微分方程†理论, Teichmüller, L. V. Ahlfors, Bers 等把它应用于 Riemann 面的参模问题 (→ 代数函数).

【推广的定义】 由于上述拟保角映射的定义中可微性等条件过强, 所以可进行各种推广. 现在我们给出下面的定义. 如果复数平面的域 D 到 Δ 上的拓扑映射 f 在广义函数的意义下具

有 L_2 偏导数，且存在在D内可测的 μ，使得 f 满足 **Beltrami 微分方程**（Beltrami's differential equation）

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z,$$

则称 f 为 **μ 保角映射**（μ-conformal mapping）. 如果 $\|\mu\|_\infty < 1$，则称 f 为**拟保角映射**. 这时称 $K = (1 + \|\mu\|_\infty)/(1 - \|\mu\|_\infty)$ 为 f 的**最大膨胀率**（maximal dilatation）. 关于 Riemann 面之间的映射也能定义这些概念；但这时 μ 应是使 $\mu\, dz d\bar{z}^{-1}$ 不依赖于局部参数 z 的选择的函数.

如果把上面的假定中的"拓扑映射"改为"连续映射"，则称 f 为 **μ 保角函数**（μ-conformal function）；如果还有 $\|\mu\|_\infty < 1$，则称它为**伪解析函数**（pseudo-analytic function）. μ 保角函数可表示为全纯函数 g 和 μ 保角映射 h 的合成 $g \circ h$.

也可以用下面的方式来定义拟保角映射：任意的曲线四边形（即具有四个指定点的简单闭曲线）Q 的内部能保角映射到矩形域 I，使它的四个点映为 I 的顶点；这时 I 的长宽之比（$\geqslant 1$）是唯一确定的，称它为Q的**模**，记作 mod Q. 如果从D到Δ上的拓扑映射 f 保持方向，且对连同边界包含于D内的任意曲线四边形 Q，mod $f(Q) \leqslant K$ mod Q 成立，则 f 是最大膨胀率不超过K的拟保角映射. 森明（[8]）和 Bers（[5]）证明了它同上面的定义是等价的.

【拟保角映射的主要性质】 由 Weyl 引理†得知，$K = 1$（或 $\mu = 0$）的拟保角映射是保角映射. 拟保角映射几乎处处完全可微分，函数行列式几乎处处为正，且 $(|f_z| + |f_{\bar{z}}|)/(|f_z| - |f_{\bar{z}}|) \leqslant K$ 几乎处处成立.

从 $|z| < 1$ 到 $|w| < 1$ 上的具有最大膨胀率K的拟保角映射 f 可以扩张为 $|z| \leqslant 1$ 到 $|w| \leqslant 1$ 上的拓扑映射. 如果还假设$f(0)=0$，则对于 $|z_1| \leqslant 1$，$|z_2| \leqslant 1$，Hölder 条件

$$(|z_1 - z_2|/16)^K \leqslant |f(z_1) - f(z_2)| \leqslant 16|z_1 - z_2|^{1/K}$$

成立，而且 16 作为与K无关的系数是最好的（森）. 因而这样的 f 的全体特别形成正规族. Ahlfors-A. Beurling 给出了由 f 给定的 $|z| = 1 \to |w| = 1$ 的对应的特征（[3]）. 关于其他主要的几何性质，⇀ Ahlfors [1]，森 [8].

给定在D内可测的 μ（$\|\mu\|_\infty < 1$）时，必定存在从D到w平面的域Δ上的μ保角映射，且若不计Δ的保角映射，则它是唯一的（C. B. Morrey [9]）. 在μ为实解析，且取通常意义下的微分的情形，很早以前就已知道 Beltrami 微分方程 $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ 的解的存在定理与曲面的保形（保角）变换†相关联.

关于μ保角映射对μ的依赖性，下面的 Ahlfors-Bers 的结果是重要的（[2]）：以 f^μ 表示全有限平面到它本身上且保持 0, 1 不变的 μ 保角映射，在μ的空间中引进 L_∞ 范数，在 f^μ 的空间中引进某种范数，使双方成为 Banach 空间. 于是，若μ的族 $\{\mu(t) = \mu(z,t)\}$ 中满足 $\|\mu(t)\|_\infty \leqslant k < 1$ 的函数 $\mu(t)$ 关于 t 为连续，连续可微，实解析或复解析，则关于 $f^{\mu(t)}$ 同样的事实也成立.

如果给定两个同胚的闭 Riemann 面且给出从其中之一到另一个的保持方向的同胚的同伦类†，则在属于这个同伦类的拟保角映射中，使最大膨胀率为最小的拟保角映射，称为**极值拟保角映射**（extremal quasi-conformal mapping）. 它恒存在且唯一的证明，以及与之对应的μ的特征，均由 Teichmüller 所给出（[10]，[11]）. 这个结果对 Riemann 面的参模问题是重要的. 在 Riemann 面的参模问题中，拟保角映射的重要性不止这一点，它实际上起着本质的作用（⇀代数函数）.

【应用】 角谷（1937）和 Teichmüller（1938）把拟保角映射应用于 Riemann 面的类型问题†. 这种应用是基于下述事实：给定边界对应，求拟保角映射要比求保角映射容易得多；并且类似于保角映射，Riemann 面属于 O_G 或 O_{HD} 类（⇀ Riemann 面）的性质在拟保角映射下是不变的.

Лаврентьев（[7]）和 Bers（[4]）等把拟保角映射应用于偏微分方程理论，特别是关于流体的问题. 这是基于下述事实：在二维可压缩

流体†的定常流中，如果密度及其倒数有界，则从物理平面到位势面（以速度位势†和流函数†为坐标的面）的映射是拟保角的；如果还假设Mach 数†的上确界小于1，则从物理平面到速端平面†上的映射是伪解析的.

【类似的各种概念】 与上面的叙述有区别，Лаврентьев 如下地使用**拟保角映射**这一术语：如果拓扑映射 $f=u+iv$ 的 u, v 满足某个一阶偏微分方程组，则称 f 为关于这个方程组的拟保角映射．在方程也包括不是 Beltrami 微分方程的情形这种意义下，这是更为一般化了．然而反过来，如果方程满足强椭圆型条件，则它必成为（本条所述意义下的）拟保角映射．Bers 也是在表示与线性椭圆型偏微分方程相联系的某种函数的意义下使用**伪解析函数**这一术语的．在每个相对紧子集上，它成为(本条所述意义下的)伪解析函数，并具有与解析函数类似的性质.

还有些人把多变量函数的解析变换称为"拟保角映射"，还有拟解析函数†这样类似的术语，可是这些概念与这里叙述的完全不同.

【参】 [1] L. V. Ahlfors, On quasiconformal mappings, J. Analyse Math., **3** (1953—54), 1—58, 207—208; [2] L. V. Ahlfors-L. Bers, Riemann's mapping theorem for variable metrics, Ann. of Math., **72** (1960), 385—404; [3] A. Beurling-L. V. Ahlfors, The boundary correspondence under quasiconformal mappings, Acta Math., **96** (1956), 125—142; [4] L. Bers, Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, John Wiley, 1958; [5] L. Bers, On a theorem of Mori and the definition of quasi-conformality, Trans. Amer. Math. Soc., **84** (1957), 78—84; [6] H. P. Künzi, Quasikonforme Abbildungen, Erg. Math., Springer, 1960; [7] M. A. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Издат. Акад. Наук СССР, 1962(英译本：M. A. Lavrentieff (Lavrent'ev), Variational methods for boundary value problems for systems of elliptic equations, Noordhoff, 1963); [8] A. Mori (森明), On quasiconformality and pseudoanalyticity, Trans. Amer. Math. Soc., **84** (1957) 56—77; 数学, **7** (1955), 75—89; [9] C. B. Morrey, On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., **43** (1938), 126—166; [10] O. Teichmüller, Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl., **22** (1939), 1—197; [11] D. Teichmüller, Bestimmung der extremalen quasikonformen Abbildungen bei geschlossenen orientierten Riemannschen Flächen, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Math.-Nat Kl., **24** (1943), 1—42; [12] L. V. Ahlfors, Lectures on quasiconformal mappings, van Nostrand, 1966; [13] O. Lehto-K. I. Virtanen, Quasikonforme Abbildungen, Springer, 1965.

多变量解析函数 [英 analytic function of several variables 法 fonction analytique de plusieurs variables 德 analytische Funktion mehrerer Veränderlichen 俄 аналитическая функция многих переменных 日 多変数解析関数] **多(复)变量解析函数**的定义，与单复变量情形相同，可以用基于可微性的 G. F. B. Riemann 方式，也可以用基于幂级数的 K. Weierstrass 方式，两者是等价的．我们从后者出发进行阐述.

【幂级数】 把 n 个复变量所成的组 $(z_1, \cdots, z_n)$ 简记为 z，把 $(z_1-c_1, \cdots, z_n-c_n)$ 简记为 $z-c$．还把 0 和正整数的集合 $\boldsymbol{N}$ 的 n 个元所成的组 $(k_1, \cdots, k_n)$ 简记为 k，把单项式 $a_{k_1\cdots k_n}z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}$ 简记为 a_kz^k．以 $a_k(z-c)^k$ 为项的级数 P，称为以 c 为中心，以 a_k 为系数的(多变量)**幂级数**或**整级数**(power series)．当 P 在 z 处绝对收敛时，无论用哪种次序把它改写为单级数，其和不变．这一点如果严格地说，就如下述：适当地选取从 $\boldsymbol{N}$ 到 $\boldsymbol{N}^n$ 上的双射 φ 时，如果单级数 $\sum|a_{\varphi(P)}(z-c)^{\varphi(P)}|$ 收敛，则单级数 $\sum a_{\varphi(P)}(z-c)^{\varphi(P)}$ 的和与 $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}^n$ 的双射 φ 的选择方法无关．这个一定的值称为 P 在 z 处的和，记作 $\sum a_k(z-c)^k$．若 P 的项在点 $z^0=(z_j^0)\ (z_j^0\neq c_j)$ 处一致有界，则 P 在开**多圆柱**(polydisc)

$S=\{z\,|\,|z_j-c_j|<|z_j^0-c_j|,\ j=1,\cdots,n\}$

的每个点处绝对收敛，且在 S 内的任意紧集上一致收敛(N. H. Abel).

对于幂级数 P，具有下述性质的点 z^0 的全体 D，称为 P 的**收敛域**(convergence domain)：在 z^0 的某个邻域内的所有点处，P 都绝对收敛．使 P 的项一致有界的点所成的集合 B 的内部等于 D．设 D 是 $\boldsymbol{C}^n$ 内的域，如果当 D 含有 z^0 时，D 也包含环面 $\{z\,|\,|z_j-c_j|=|z_j^0-c_j|,\ j=1,\cdots,n\}$，则称域 D 为以 c 为中心的 **Reinhardt 域**(Reinhardt domain)；如果当 D 含有 z^0 时，D 也包含闭多圆柱 $\{z\,|\,|z_j-c_j|\leqslant|z_j^0-c_j|,$

$j=1,\cdots,n\}$，则称域D为以C为中心的**完全 Reinhardt 域**(complete Reinhardt domain). 如果幂级数P的收敛域非空,则它必是完全 Reinhardt 域. 收敛域D还是**对数凸的**(logarithmically convex), 即在映射$z_j \to \log|z_j-c_j|$ $(j=1,\cdots,n)$下,集合$D-\bigcup_j\{z|z_j=c_j\}$映为$\boldsymbol{R}^n$的凸域. 使幂级数P绝对收敛的点的全体$\widetilde{D}$一般地比D大,有时$\widetilde{D}$含有D的外点. D的位于平面$\{z|z_j=c_j\}$上且含于$\widetilde{D}$内的外点所成的集合,有时称为收敛域的**刺**(德 Stachel). 如果P在$\{|z_j-c_j|<r_j,\ j=1,\cdots,n\}$的每个点处绝对收敛,而在$\{|z_j-c_j|>r_j,\ j=1,\cdots,n\}$内不是这样, 则称$(r_1,\cdots,r_n)$为$P$的**相伴收敛半径**(associated convergence radii). 当然$(r_1,\cdots,r_n)$不是唯一确定的,但对任意的相伴收敛半径$(r_1,\cdots,r_n)$, 恒有 $\limsup_{|k|\to+\infty}(|a_k|r^k)^{1/|k|}=1$ $(|k|=k_1+\cdots+k_n)$ (B. Lemaire).

在$z^0\in\boldsymbol{C}^n$的某个邻域内有定义的复值函数f, 如果它在z^0的一个邻域内的每个点处可表示为以z^0为中心的绝对收敛的幂级数P的和,则称f在z^0处是(在 Weierstrass 意义下)**解析的**(analytic). 称P为f在z^0处的 **Taylor 展开式** (Taylor expansion).

【可微性】 如果在$z^0\in\boldsymbol{C}^n$的某个邻域内有定义的复值函数f在z^0的一个邻域内可表示为

$$(1)\quad f(z)-f(z^0)=\alpha_1(z_1-z_1^0)+\cdots+\alpha_n(z_n-z_n^0)+\varepsilon,$$
$$\lim_{z\to z^0}\varepsilon/(|z_1-z_1^0|+\cdots+|z_n-z_n^0|)=0,$$

则称它在z^0处是**完全可微分的**(totally differentiable). 这时f在z^0处连续, 偏导数$\partial f/\partial z_j$ $(j=1,\cdots,n)$存在,且 **Cauchy-Riemann 微分方程** (Cauchy-Riemann differential equation) $\partial f/\partial\bar{z}_j=0$ $(j=1,\cdots,n)$ 成立. 这里对于$z_k=x_k+iy_k$, 令$\partial f/\partial z_k=(1/2)(\partial f/\partial x_k-i\partial f/\partial y_k)$, $\partial f/\partial\bar{z}_k=(1/2)(\partial f/\partial x_k+i\partial f/\partial y_k)$. 如果$f$在$z^0$的某个邻域的每个点处都完全可微分, 则称它在$z^0$处是(在 Riemann 意义下)**全纯的**(holomorphic, regular). 如果在 Weierstrass 意义下解析, 则在 Riemann 意义下全纯; 反之亦然. 更进一步,即使去掉连续性的假定,只假定偏导数$\partial f/\partial z_j$ $(j=1,\cdots,n)$在各点处存在,也能证明它是全纯的(F. Hartogs, 1906). 即如果f对每个变量z_j $(1\leqslant j\leqslant n)$是全纯的,则它也是在 Weierstrass 意义下解析的,特别是连续的(**Hartogs 全纯性定理**(Hartogs' theorem of holomorphy)).

在域$G\subset\boldsymbol{C}^n$的每个点处解析的函数称为在G内**全纯**或**解析的**函数, 以$H(G)$表示它的全体. 当$f=u+iv\in H(G)$时, u, v在G内满足微分方程$\partial^2u(z,\bar{z})/\partial z_j\partial\bar{z}_k=0$, 即

$$(2)\qquad \frac{\partial^2u}{\partial x_j\partial x_k}+\frac{\partial^2u}{\partial y_j\partial y_k}=0,$$
$$\frac{\partial^2u}{\partial x_j\partial y_k}-\frac{\partial^2u}{\partial x_k\partial y_j}=0,$$
$$j,k=1,\cdots,n.$$

一般地, 如果广义函数† $T\in\mathscr{D}'(G)$满足(2), 则称T在G内是**多重调和的**(pluriharmonic), 这时T是调和函数,从而是实解析函数.

设G_j是z_j平面上由分段光滑闭曲线C_j围成的域, $G=\prod_{j=1}^n G_j$. 若$f\in H(G)$在$\bar{G}$上连续,则

$$(3)\quad \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{C_1\times\cdots\times C_n}\frac{f(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n=\begin{cases}f(z), & z\in G,\\ 0, & z\notin\bar{G}\end{cases}$$

(**Cauchy 积分表示**(Cauchy's integral representation)). 因而,当$n\geqslant 2$时,只由f在边界∂G的真子集$C=C_1\times\cdots\times C_n$上的值,就确定了$f$的值. 这个$C$称为$G$的**骨架**(skeleton)或**决定集**(determining set). 多变量(多重调和)函数的边值问题,照旧按古典形式一般是解决不了的, 对于它没有象对于单变量函数论的 Dirichlet 问题那样有力的手段.

对于在平面圆环域的直积内解析的函数, Laurent 展开式†象单变量时一样成立. 设G_1, $G_2\subset\boldsymbol{C}^n$是域, $G_1\cap G_2$非空且连通, $f_1\in H(G_1)$, $f_2\in H(G_2)$, $z^0=x^0+iy^0\in G_1\cap G_2$. 若在$\{z|\,|z_j-z_j^0|<r_j,\ y=y^0,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$内$f_1=f_2$,

则存在唯一的$f\in H(G_1\cup G_2)$，使在G_1内$f=f_1$，在G_2内$f=f_2$（**唯一性定理**（theorem of unicity）），因而能象单变量情形一样地定义解析开拓†．$n=1$时成立的许多基本定理，例如关于整函数的 Liouville 定理†，最大模原理†等等，都可以推广到$n\geq 2$的情形．可是也有解析函数的零点集（解析的集，→解析空间[解析的集]）当$n\geq 2$时没有孤立点等著名的不同的性质．研究这些问题也是多复变量解析函数论的一个目的．

【Шилов 边界】 在域G内全纯的函数$f(z_1,\cdots,z_n)$满足最大模原理，可是取到最大模的范围往往只是边界的一个真子集S．例如对上述的直积域$G=\Pi G_j$，可以取S为它的骨架．Г. Е. Шилов 联系赋范环†理论，证明了下面的定理．在包含于有界域G的边界内且满足下述条件的闭集S中，存在唯一的最小的S_0：对于在G内全纯，在$\bar{G}$上连续的所有函数f，有$\sup\{|f(z)|\,|\,z\in S\}=\sup\{|f(z)|\,|\,z\in G\}$．称这个$S_0$为$G$的 **Шилов 边界**（Šilov boundary）．关于S_0的具体结构，与后面叙述的伪凸性相联系，已被详细地研究．H.-J. Bremermann 把 Dirichlet 问题的 Perron 方法†应用于多重次调和函数和 Шилов 边界，解决了一类边值问题．

【局部理论】 在$S\subset \mathbf{C}^n$的邻域内有定义的解析函数f,g，若在S的某个邻域内有$f=g$，则称f和g关于S是等价的，称相应的等价类f_S为由f确定的S上的**解析函数的芽**（germ of analytic function），它的全体记作$H(S)$．$H(0)=H(\{0\})$同构于在0的某邻域内绝对收敛的幂级数（简称为收敛幂级数）的全体所成的环H_n．对$f\in H_n$，$f\neq 0$，如果取以0为中心的适当的坐标$z_1,\cdots,z_n$，使在$z_n=0$的一个邻域内有$f(0,\cdots,0,z_n)\neq 0$，则在0的一个邻域内，f等于H_n的一个可逆元和一个**特异伪多项式**（distinguished pseudo-polynomial）

$$z_n^p+a_1(z_1,\cdots,z_{n-1})z_n^{p-1}+\cdots$$
$$+a_p(z_1,\cdots,z_{n-1})\in H_{n-1}[z_n],$$
$$a_1(0,\cdots,0)=\cdots=a_p(0,\cdots,0)=0$$

的积．而且这样的特异伪多项式由f和坐标系$z_1,\cdots,z_n$唯一确定（**Weierstrass 预备定理**（Weierstrass' preparation theorem））．由此表明，H_n是n维正则局部环†．H. Cartan 把$H(0)$看作局部凸†环$H(U)$（(U)是0的开邻域基）的归纳限，在更精密的形式中证明了这条预备定理，其中包含了对应$f\to a_i(z)$关于上确界范数是连续的．在细致考虑这种情况的基础上，冈潔证明了一条重要的基本定理：由$\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n,z}=H(z)$（$z\in\mathbf{C}^n$）定义的$\mathbf{C}^n$上的环层†$\mathcal{O}_{\mathbf{C}^n}$是凝聚的†．

【全纯域】 给定域$G\subset\mathbf{C}^n$（$n\geq 2$），可能存在真比G大的域G'，使得所有在G内全纯的函数可以解析开拓到G'内．这样的现象常称为**解析扩张**（analytic extension）．例如，设$S=S'\times\sigma$，这里S'和σ分别是$(z_1,\cdots,z_{n-1})$空间和z_n空间内的开多圆柱，设$T\subset\mathbf{C}^n$是开集．如果存在开集$U(\neq\phi)\subset S'$，使得$(U\times\sigma)\cup(S'\times\partial\sigma)\subset T$，且$S\cap T$连通，则在$S$上全纯的函数全都可以唯一地解析开拓到$S\cup T$上（**Hartogs 开拓定理**（Hartogs' continuation theorem））．特别是，如果A是域$G\subset\mathbf{C}^n$内的解析的集†，$\dim A\leq n-2$，则所有$f\in H(G-A)$能唯一地解析开拓到G上．还有，当A是G内解析的集而不是G本身时，则在A的各点的邻域内有界的$f\in H(G-A)$都能唯一地解析开拓到G上（$n\geq 2$时的 **Riemann 开拓定理**（Riemann's continuation theorem））．对于f的全纯域$\tilde{G}_f$定义为f可以解析开拓到它上面的最大的域．对于域G，如果存在$f\in H(G)$，使得$G=\tilde{G}_f$，则称G为**全纯域**（domain of holomorphy）或**正则域**．但是$\tilde{G}_f$一般不是$\mathbf{C}^n$的子域，而是$\mathbf{C}^n$上的覆盖域．也即$\tilde{G}_f$是连通的n维复解析流形，且存在具有最大 Jacobi 行列式秩的解析映射$\varphi:\tilde{G}_f\to\mathbf{C}^n$（从而$\varphi$是开映射）．关于几个$f_i\in H(G)$的公共存在域也有同样的事实．特别称属于$H(G)$的所有函数的公共存在域$\tilde{G}$为$G$的**全纯包**（英 envelope of holomorphy 德 Holomorphiehülle）；当$\tilde{G}=G$时，就称G为**解析完备的**（analytically complete）（以上这些概念也可以转到G是$\mathbf{C}^n$上的覆盖域的情形．）给定域

$G \subset \boldsymbol{C}^n$，研究它在什么条件下是解析完备的，称为（一般）**Levi 问题**（Levi's problem），这是多复变量函数论的重要课题．为此研究了解析完备域的种种伪凸性．

【伪凸性】 在域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 内有定义的实值函数 $u(-\infty \leqslant u < +\infty)$ 称为**多重次调和函数**（phurisubharmonic function），如果它在 G 内上半连续，并且对任意的 $z^0 \in G$ 和任意的 $a \in \boldsymbol{C}^n$，一个变量 t 的函数 $u(z^0+ta)$ 在 $\{t \mid z^0+ta \in G\}$ 的各个连通分支内关于 t 恒为次调和．设 $d_G(z)$ 是从域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 的点 z 到边界的距离（可以用 $\boldsymbol{C}^n$ 的任意范数量度）．如果 $u = -\log d_G$ 在 G 内为多重次调和，则称 G 是**伪凸的**（pseudoconvex）．但是因为有各种伪凸性的定义，所以在需与其他伪凸性区别时就称为 d 伪凸的．伪凸域族的交的内部的每个连通分支是伪凸的，伪凸域的单调递增序列的并是伪凸的．设 u 在 $\overline{G}$ 的一个邻域内属于 C^2 类，使得 $G = \{z \mid u(z) < 0\}$，且存在 $\varepsilon > 0$，使得 $\sum(\partial^2 u(z,\bar{z})/\partial z_j \partial \bar{z}_k) \cdot a_j \bar{a}_k \geqslant \varepsilon |a|^2$，则称 G 是**强伪凸的**（strongly pseudoconvex）．强伪凸性蕴涵伪凸性．伪凸域可以用强伪凸域的单调递增序列从内部逼近．开集 $P \subset \boldsymbol{C}^n$ 可以用 $\chi_\alpha \in H(\overline{P})$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant N)$ 由 $P = \{z \mid |\chi_\alpha(z)| < 1,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant N\}$ 给出时，就称为**解析多面体**（analytic polyhedron）．它的各个连通分支是伪凸的．特别是，连通且有界的解析多面体称为 **Weil 域**（Weil domain），如果 $N \geqslant n$，且对所有的 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$，超曲面 $|\chi_{\alpha_i}(z)| = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ 的交的维数 $\leqslant 2n-k$．

【全纯凸性】 称域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 为**全纯凸或解析凸的**（holomorphically convex），如果对所有紧集 $K \subset G$，$\hat{K} = \bigcap_{f \in H(G)} \{z \mid |f(z)| \leqslant \sup_{z \in K} |f(z)|\}$（$K$ 的全纯包）是 G 的紧集．（对于包含于解析的集内的域 G，可以类似地定义它的全纯凸性．）全纯凸域族的交的连通分支是全纯凸的．全纯凸域可以用 Weil 域的单调递增序列从内部逼近．由定义，解析完备性蕴涵全纯凸性．对 $\boldsymbol{C}^n$ 中的域，逆命题也成立．也就是说，如果 G 是全纯凸的，则对 ∂G 的每个点 ζ，存在 $f \in H(G)$，使它在点 ζ 处不是局部有界的（**H. Cartan-Thullen 定理**，1932）．由此还得到，全纯凸域是全纯域，也即 $\boldsymbol{C}^n$ 内的域是全纯凸域当且仅当它是全纯域（关于 $\boldsymbol{C}^n$ 上的非分歧覆盖域也有同样的事实（岡，1953））．此外，全纯域的单调递增序列的并是全纯域（**Behnke-Stein 定理**，1938）．

设给定域 G 和域 S_α，$T_\alpha \subset \boldsymbol{C}^n$ $(\alpha = 1, 2, \cdots)$，使得 $\overline{S_\alpha \cup T_\alpha} \subset G$，且对所有 $f \in H(G)$，$\sup_{T_\alpha} |f| = \sup_{S_\alpha \cup T_\alpha} |f|$ $(\alpha = 1, 2, \cdots)$ 成立，还设 $S_0 = \lim S_\alpha$ 有界，$T_0 = \lim T_\alpha$．如果 $\overline{T}_0 \subset G$ 蕴涵 $\overline{S}_0 \subset G$，则称**连续性原理**（continuity principle）在 G 上成立．在全纯域上，连续性原理成立（**Hartogs 连续性定理**（Hartogs' theorem of continuity））．因此，若 f 在单连通的有界域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ $(n > 2)$ 的边界 ∂G 的一个邻域内全纯，且 ∂G 为连通，则 f 可开拓为 G 内的全纯函数（**Hartogs-Osgood 定理**）．从而当 $n \geqslant 2$ 时，解析函数没有孤立奇点．连续性原理成立还是伪凸性的充分条件，因而全纯域是伪凸的．

【Levi 问题】 对于域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 的边界 ∂G 的点 z^0，如果存在 z^0 的某个开邻域 U，使 $G \cap U$ 的各个连通分支都是全纯域，则称 G 在 z^0 处是 **Cartan 伪凸的**（Cartan pseudoconvex）．还有，如果含有 z^0 作为寻常点†的每个一维解析的集在 z^0 的所有邻域内含有 $\notin G \cup \{z^0\}$ 的点，则称 G 在 z^0 处是 **Levi 伪凸的**（Levi pseudoconvex）．如果 ∂G 的所有点都满足这些条件，则分别称 G 为局部 Cartan 伪凸或局部 Levi 伪凸的．全纯域是局部 Cartan 伪凸的．如果 G 是伪凸的，并且存在 z^0 的邻域 U，使得 $G \cap U = \{z \mid \varphi(z) < 0\}$，其中 $\varphi \in C^1(U)$，则 G 在 z^0 处是 Levi 伪凸的．

反过来，伪凸域是不是全纯域的问题，称为（本来的）**Levi 问题**（Levi's problem）．1911 年 Levi 提出了这个问题．作为许多研究的结果，首先 $n = 2$ 时由岡（1942），然后 $n \geqslant 2$ 时由岡（1953）（对 $\boldsymbol{C}^n$ 上的覆盖域），F. Norguet 和 Bremermann 肯定地解决．Levi 问题的解决，可以归结为下面的岡的**粘合定理**（德 Heftungs-

satz)：设 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 是有界域，若对 $a < b$，$G_1 = \{z | x_1 > a\} \cap G$，$G_2 = \{z | x_1 < b\} \cap G$ 的各个连通分支都是全纯域，则 G 是全纯域. 由伪凸域是有界局部 Cartan 伪凸域的单调递增序列的并这个事实和 Behnke-Stein 定理，只须就有界局部 Cartan 伪凸域的情形来解 Levi 问题即已足够，而这一点可用粘合定理来解.

除了前面叙述的形如(3)的 Cauchy 表示以外，还能对各种形式的域，得到解析函数的积分表示. 作为解 Levi 问题等的辅助手段，对于 Weil 域的 Bergmann-Weil 积分表示是重要的.

【解析映射】 近年来定义了在拟完备†局部凸复线性空间 E 中取值的解析函数，上面所说的古典理论有些也能推广到这种情形，并已看到了种种应用. 在域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 上的 E 值函数 f 为解析的充分必要条件是，对 E 上的所有连续线性泛函 u，$u \circ f$: $G \to \boldsymbol{C}$ 是全纯函数. 由此关于 E 值全纯函数的很多问题可以归结到通常的全纯函数. G 内的通常全纯函数的全体 $H(G)$ 还是 F 空间†.

$\boldsymbol{C}^p$ 空间和复 Banach 空间等属于上述 E 的范畴. 特别称定义在域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 内的 $\boldsymbol{C}^p$ 值解析函数 φ 为 G 到 $\boldsymbol{C}^p$ 的**解析映射**(analytic mapping). 域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 和解析映射所形成的范畴†中的同构称为**解析同构**(analytic isomorphism)或**双全纯映射**(biholomorphic mapping). 如果域 G 伴以 G 上的全纯函数的芽层† $\mathscr{O}_G$，则 $(G, \mathscr{O}_G)$ 是环式空间†. 复解析流形†可定义为局部同构于某个 $(G, \mathscr{O}_G)$ 的分离(Hausdorff 的)环式空间.

G 上的**亚纯函数**(meromorphic function)可以定义为局部地能表示为两个全纯函数之比(分母 $\neq 0$)的函数，还可以更严格地把它定义为 G 到 $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ 内的亚纯映射(→ 解析空间 [修改操作]).

【Cousin 问题】 简单地说，Cousin 问题就是给定零点、极点而作出相应的亚纯函数的问题. 用层†的概念，可叙述如下. 设 $\mathscr{K}_G$ 是域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 上亚纯函数的芽层. 由层的正合序列 $0 \to \mathscr{O}_G \to \mathscr{K}_G \to \mathscr{P}_G \to 0$ $(\mathscr{P}_G = \mathscr{K}_G / \mathscr{O}_G)$ 诱导的映射 $\Gamma(G, \mathscr{K}_G) \to \Gamma(G, \mathscr{P}_G)$ 是不是满射的问题，称为 **Cousin 第一问题**(first problem of Cousin)(这里 $\Gamma(G, \mathscr{F})$ 是 G 上的层 $\mathscr{F}$ 的截面†的全体所成的模 → 层 [层空间]). 又设不恒等于零的亚纯函数的芽的乘法群的层为 $\mathscr{K}_G^*$，其内不等于零的全纯函数的芽所成的子层为 $\mathscr{O}_G^*$，关于 $\mathscr{D}_G = \mathscr{K}_G^* / \mathscr{O}_G^*$ 同样得到的映射 $\Gamma(G, \mathscr{K}_G^*) \to \Gamma(G, \mathscr{D}_G)$ 是不是满射的问题，称为 **Cousin 第二问题**(second problem of Cousin).

P. Cousin (1895) 解决了 G 是 $\boldsymbol{C}^n$ 或 $\prod_{i=1}^{n} G_i \subset \boldsymbol{C}^n$ 时的第一问题和 $G = \boldsymbol{C}^n$ 时的第二问题. 冈证明了 Cousin 第一问题对所有全纯域可解(1935). 他还指出，解第二问题归结为解析主纤维丛†的解析平凡性，而对于全纯域，它等价于拓扑平凡性. 这一事实称为**冈原理**(Oka's principle). 冈从 Cousin 问题的解出发，证明了前述的粘合定理.

【Stein 流形】 K. Stein 把全纯域具有的明显性质抽象出来，引进了下面的复流形. 若 $(X, \mathscr{O}_X)$ 是连通 n 维复流形，1) X 具有可数开集基；2) X 的点可用 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ 中的函数来分离；3) 对每个点 $x \in X$，在 x 的邻近，都存在由 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ 中的函数组成的局部坐标系；4) X 是全纯凸的. 这时，称 $(X, \mathscr{O}_X)$ 为 **Stein 流形**(Stein manifold). 以后 H. Grauert 发现，如果有了 2)，4)，则 1)，3) 是不必要的.

Cartan, J.-P. Serre 在 Stein 流形的研究中引进了层系数的上同调理论，得到了下面的基本定理：对于 X 上所有解析凝聚层† $\mathscr{F}$，A) $\mathscr{F}$ 的点 x 上的茎† $\mathscr{F}_x (x \in X)$ 可以用 $\Gamma(X, \mathscr{F})$ 在 $\mathscr{O}_{X,x}$ 上生成；B) $H^p(X, \mathscr{F}) = 0$ $(p \geq 1)$(→ 层 [层系数的上同调理论]). 这个事实称为 **Stein 流形基本定理 A, B**(fundamental theorem A, B on Stein manifold). 反之，设 X 是复解析流形，如果对 X 内零维解析的集(即 X 的离散子集)所定义的理想的解析凝聚层 $\mathscr{I}$，有 $H^1(X, \mathscr{I}) = 0$，则 X 是 Stein 流形. 此外，如同 $X \subset \boldsymbol{C}^n$ 的情形，设存在某个 Stein 流形 Y，使 $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) = \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y)$，如果定理 A 对于每

个理想的解析凝聚层成立，则X是 Stein 流形.

由这条基本定理就能证明，在全纯域成立的许多主要结果，对 Stein 流形仍然成立. 例如，在 Stein 流形X上，Cousin 第一问题恒可解. 使 Cousin 第二问题可解的充分必要条件是$H^2(X,\boldsymbol{Z})=0$. n维 Stein 流形还可以作为$\boldsymbol{C}^n$上的覆盖全纯域来实现. 对于微分流形成立的一些定理，对于 Stein 流形也有类似的定理成立. 例如，Stein 流形X的全纯微分形式所成的复形的上同调群同构于上同调群$H^*(X,\boldsymbol{C})$（与 de Rham 定理†类似的定理）. n维 Stein 流形X能作为$\boldsymbol{C}^{2n+1}$的一个闭复解析子流形来实现，也即存在单射的、正常的†且$df\neq 0$的解析映射$f: X\to\boldsymbol{C}^{2n+1}$. 设$P$是 Stein 流形$X$上的解析主纤维丛†（纤维是复 Lie 群），则$P$的解析同构类与$H^1(X,G^a)$（$G^a$是$X$到$G$的解析映射的芽层）的元一一对应. 关于$P$的拓扑同构类与$H^1(X,G^c)$（$G^c$是$X$到$G$的连续映射的芽层）的元，也有同样的事实. 这时从自然单射$G^a\to G^c$得到的$H^1(X,G^a)\to H^1(X,G^c)$是双射（Grauert）. 若复解析流形X的相对紧域D是强伪凸的，则D是全纯凸的，从而它本身是 Stein 流形（Grauert）. 由此可以证明，具有可数开集基的实解析流形可以作为某个$\boldsymbol{R}^n$的闭实解析子流形来实现.

【解析的集的开拓】 层系数的上同调理论有种种应用，不一定限于 Stein 流形. 设$G_0=\{z\,|\,|z_j|<1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$ $(n\geqslant 3)$，$G_1=\{z\,|\,|z_1|<\varepsilon,\ |z_j|<1,\ 2\leqslant j\leqslant n\}$，$G^{(m)}=G_1\cup G_0-\{z\,|\,z_2=\cdots=z_m=0\}$ $(3\leqslant m\leqslant n)$，我们有$H^p(G^{(m)},\mathcal{O}_{G^{(m)}})=0$ $(1\leqslant p\leqslant m-2)$ (**Scheja 定理**). 由此，当有域$G\subset\boldsymbol{C}^n$上的解析连接层$\mathscr{F}$，G的解析的集$A\neq G$时，若在所有点$z\in A$处，有$\mathscr{F}_z=\{0\}$或$p\leqslant n-\dim_z A-2-\mathrm{hd}_z\mathscr{F}$（$\mathrm{hd}_z\mathscr{F}$是$\mathcal{O}_{G,z}$模$\mathscr{F}_z$的同调维数†），则由自然映射$G-A\to G$所诱导的映射$H^p(G,\mathscr{F})\to H^p(G-A,\mathscr{F})$是双射. 因为$p=0$时这是 Riemann 关于解析函数的开拓定理，所以上面说的命题是 Riemann 开拓定理的推广.

与解析函数的开拓问题并列，可以考虑解析的集的开拓问题. 设A是域$G\subset\boldsymbol{C}^n$内的解析的集，S是$G-A$内的解析的集. 如果S在G内的闭包$\bar{S}$在$z\in G$处是解析的，则称z关于S**是正则的**（regular）；否则称z是S的**本性奇点**（essential singularity）. 若对所有$z\in S$有$\dim A<\dim_z S$，则$\bar{S}$在G内是解析的. 设S为纯d维，A'是A的一个d维不可约分支，若$\bar{S}$在A'的一点处是解析的，则$\bar{S}$在A'的每个不属于A的任一别的不可约分支的点处是解析的. 此外，当S是纯d维，$\dim A\leqslant\dim S$时，1）若S的本性奇点集$E\neq\phi$，则它是G内的纯d维解析的集，E是A的一些不可约分支的并；2）若A的每个不可约分支含有E的不属于A的别的不可约分支的点，则$A\subset E$，且若$A\neq\phi$，则A是纯d维的；3）若A的每个d维不可约分支含有关于S为正则的点，则$\bar{S}$是G内的纯d维解析的集（以上属于 P. Thullen-R. Remmert-Stein）. 由此特别可以给出周（炜良）定理†的另外的证明，周（炜良）的定理说，n维复射影空间$\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})$内的解析的集是代数的.

解析函数的开拓也可以考虑为它的图象（这是解析的集）的开拓问题. 随着这个对应，W. Rothstein 讨论了一般的解析的集的开拓. 例如类似于 Hartogs 连续性定理的下述定理成立：设$n\geqslant 3$，$G=G_1\cup G_2$，$G_1=\left\{z\,\middle|\,|z_1|<\frac{1}{2},\ \sum_{2}^{n}|z_j|^2<1\right\}$，$G_2=\left\{z\,\middle|\,|z_1|<1,\ \frac{1}{2}<\sum_{2}^{n}|z_j|^2<1\right\}$，$\tilde{G}=\left\{z\,\middle|\,|z_1|<1,\ \sum_{2}^{n}|z_j|^2<1\right\}$（$G$的全纯包），则$G$内的每个纯$n-1$维解析的集$A$能解析地扩张到$\tilde{G}$内，即有$\tilde{G}$内的纯$n-1$维解析的集$\tilde{A}$，使得$A=\tilde{A}\cap G$. 近年来，笠原乾吉、藤本坦孝等把这条定理推广到了解析空间的情形.

【历史】 虽然从 Riemann, Weierstrass 时代起，与 Abel 函数相联系，对多复变量解析函数已有片断的研究（H. Poincaré, Cousin），然而

只是由于 Hartogs 的一系列的工作(Math. Ann., **62** (1906) 及其他),明确了多复变量解析函数与单复变量情形的差异之后,它才开始正式形成. 继而 Levi (1910—11) 把 Hartogs 的结果推广到亚纯函数的情形,引进了伪凸性,留下了 Levi 问题. 以后研究出现了暂时的中断,然而 1920 年以后,又出现了许多研究. 例如 K. Reinhardt (1921) 开创的解析自同构的研究,由 C. Carathéodory 和 H. Behnke 等人所继承. 由 S. Bochner 和 S. Bergman (1922) 所引进的核函数[†],产生了许多显著的结果. P. Fatou 还作出了与单复变量情形的 Picard 定理[†]相反的例子: 虽然解析映射 $f: \boldsymbol{C}^2 \to \boldsymbol{C}^2$ 的函数行列式处处不为零,但象 $f(\boldsymbol{C}^2)$ 却具有外点. 以 1926 年为界,研究活跃起来. 在闵斯特, Behnke, Thullen, 在巴黎, G. Julia, H. Cartan 等都很活跃. 例如,多复变量解析函数的正规族(Julia, 1926),解析映射的唯一性定理(Cartan, 1930),由全纯凸性刻划全纯域(Cartan-Thullen, 1932)等等,是其中最显著的结果. 1934 年 Behnke-Thullen 的[2]出版,汇集了在此以前的结果. 1936 年开始的岡的一系列研究([8]),带来了当时还没有解决的三大问题—— Cousin 问题,近似问题, Levi 问题的全盘的决定性的解决. H. Cartan 关于解析函数的理想的研究(1944),连同岡的具有不定域的理想的研究,发展为解析凝聚层的理论. 由 Behnke-Stein (1951) 所引进的解析空间的概念,导致了近年来多复变量解析函数论的繁荣发展. H. Cartan 和 Serre (1951—52)有效地应用了层系数的上同调理论. 与此同时,引进了 Stein 流形的概念(1951). Grauert 从 1955 年开始进行的深入研究,和 Remmert, Stein 等的工作一起,大大地发展了多复变量函数论特别是解析空间的理论. 在六十年代,美国学派也开始活跃起来([6]). 还由于 C. L. Siegel, 佐武一郎等的工作,与数论相联系,多复变量自守函数理论的研究得到了发展. 也已成功地把解析开拓过程应用于基本粒子理论.

【参】 [1] W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, II. 1, Teubner, 初版 1924, 改订版 1929 (Chelsea 1965); [2] H. Behnke-P. Thullen, Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Erg. d. Math., Springer, 1934; 第二版, 1970; [3] S. Bochner-W. T. Martin, Several complex variables, Princeton, 1948; [4] 一松信, 多変数解析函数論, 培風館, 1960; [5] Б. А. Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, 1962 (英译本: B. A. Fuks, Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables, Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs, 1965); [6] R. C. Gunning-H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall, 1965; [7] 酒井栄一, 多変数関数論, 共立全書, 1966; [8] K. Oka (岡潔), Sur Les fonctions analytiques de plusieurs variables (論文集), 岩波, 1961; [9] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, van Nostrand, 1966; [10] L. Bers, Introduction to several complex variables, Courant Institute, 1964; [11] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Gordon and Breach, 1968; [12] L. Nachbin, Holomorphic functions, domains of holomorphy and local properties, North-Holland, 1970. 关于应用于基本粒子理论: [13] В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, Наука, Москва, 1964 (英译本: V. S. Vladimirov, Methods of the theory of functions of several complex variables, MIT Press, 1966); [14] 华罗庚,多复变函数论中的典型域的调和分析,科学出版社, 1957; 修订版 1965. 另一解析空间的[参].

解析空间 [英 analytic space 法 espace analytique 德 analytischer Raum 俄 аналитическое пространство 日 解析空間] 对于单复变量解析函数, Riemann 面[†],即一维复流形[†],是自然的定义域;然而关于多复变量解析函数,它的零点集,用解析自同构的纯不连续群[†]除域所得到的商空间,代数体解析函数的存在域等等,严格地说,都不是复解析流形,而是"具有奇点的流形". 解析空间就是以这些例子为模型而定义的概念,最近的多复变量解析函数理论,就是在解析空间上展开的.

【解析的集】 设 A 是复解析流形 G 的子集. 如果 A 是闭的,且 A 的每个点有一个邻域 U,使得 $U \cap A$ 是有限个在 U 内全纯的函数的公共零点的集合,则称 A 为 G 的**解析的集**(analytic set)(因为这与集合论中的解析集[†]是名称相同而内容相异的概念,所以在这里特别地称作"解析的集"以示区别). 特别是,如果 A 局部地只是单个不恒等零的解析函数的零点的集合,则称它为**主解析的集**(principal analytic

set). 对于两个集合 S_1, S_2, 当存在点 p 的适当的邻域 U, 使得 $S_1\cap U=S_2\cap U$ 时, 就认为 S_1, S_2在点 p 处等价.用这个等价关系分类时,称集合 S 所属的等价类为在点 p 处由 S 确定的芽. 如果 S 是解析的集, 则称它的芽为**解析的集的芽** (germ of analytic set). 每个在点 $0\in G$ 处解析的集的芽 A_0, 有在 0 处解析的函数的芽环 $H(0)$ 内的理想 $I(A_0)=\{f|f\in H(0),\ f|A_0=0\}$ 与之对应. 如果 A_0 可以表示为 $A_0=A_0'\cup A_0''$ (A_0', A_0'' 是在 0 处解析的集的芽, 且均 $\neq A_0$), 则称 A_0 是**可约的** (reducible), 否则称它为**不可约的** (irreducible). 如果由解析的集 A 确定的在 0 处解析的集的芽 A_0 为不可约, 则称 A **在 0 处不可约** (irreducible at 0). A_0 的性质可归结为 $I(A_0)$ 的性质. 例如, A_0 为不可约等价于 $I(A_0)$ 为素理想.

因为 $H(0)$ 是 Noether 环†, 所以解析的集 A 在 $z^0\in A$ 的一个邻域内, 可以表示为有限个在 z^0 处不可约的解析的集 A_i 的并, $\{A_i\}$ 本质上是唯一确定的.如果解析的集 A 在 z^0 处不可约, 则存在以 z^0 为中心的 $\boldsymbol{C}^n$ 的局部坐标 $(z_1,\cdots,z_n)$ 以及自然数 $d\leqslant n$ 和 k, 使得基于 $A\to\boldsymbol{C}^d$ 的映射 φ: $(z_1,\cdots,z_n)\to(z_1,\cdots,z_d)$, A 在 z^0 的一个邻域内是 k 叶**分歧覆盖空间** (ramified covering space). 也即, 存在 $0\in\boldsymbol{C}^d$ 的邻域内的解析的集 R, 使在 z^0 的一个邻域内, $A-\varphi^{-1}(R)$ 是连通的 d 维复解析流形, φ: $A-\varphi^{-1}(R)\to\boldsymbol{C}^d-R$ 在 z^0 的这个邻域内是 k 叶的覆盖映射, 而且属于 $A-\varphi^{-1}(R)$ 而映到 $(z_1,\cdots,z_d)$ 的 k 个点的坐标关于 $z_1,\cdots,z_d$ 是解析的. 这时, 称 d 为 A 在 z^0 处的**维数** (dimension) (详细地说是**局部维数** (local dimension)), 记作 $d=\dim_{z^0}A$. 基于解析的集的这样的局部表示, $H(0)$ 的素理想 $\mathfrak{P}$ 是由某个在 0 处不可约的解析的集的芽 A_0 所确定的理想 $I(A_0)$ (**Rückert 零点定理** (Rückert's zero point theorem)). 定义 A_0 的解析的集 A 在 0 处的维数等于局部环† $H(0)/\mathfrak{P}$ 的 Krull 维数†. 在解析的集的芽的研究中, 局部环的理论是重要的. 一般的解析的集 A 在 z^0 处的维数, 当在 z^0 的一个邻域内有 $A=\bigcup A_i$ (A_i 在 z^0 处不可约)时, 由 $\dim_{z^0}A=\sup_i\dim_{z^0}A_i$ 所定义.如果所有 $\dim_{z^0}A_i$ 等于 d, 则称 A 在 z^0 处是**纯 d 维的**(pure d-dimensional), 还称 $\dim A=\sup_{z\in A}\dim_z A$ 为 A 的**维数**. 如果一个解析的集在它的每个点处都是纯 d 维的, 则称它为**纯 d 维解析的集** (analytic set of pure dimension d).

如果 A 在 z^0 的一个邻域内具有复解析子流形的结构, 则称 z^0 为**正则点或寻常点** (ordinary point), 或称**单点** (simple point). A 的寻常点的集合 A' 在 A 内是稠密的开集. A 的奇点(非寻常点) 的集合 $A^*=A-A'$ 是 G 的解析的集, 若 A 为纯 d 维, 则 A' 是 d 维复解析流形, 而 A^* 是维数 $\leqslant d-1$ 的解析的集.

设 Y 是 X 内维数小于 n 的解析的集, Z 是 $X-Y$ 内纯 n 维解析的集, 则 Z 对于 X 的闭包 $\bar{Z}$ 是 X 内纯 n 维解析的集 (**Remmert-Stein 开拓定理** (continuation theorem of Remmert-Stein)).

对 G 内每个解析的集 A, 在 A 上取值为 0 的 G 上的全纯函数的芽所成的层† $\mathscr{I}(A)$ 是解析的凝聚层† (H. Cartan). 称 $\mathscr{I}(A)$ 为由解析的集 A 确定的理想的层. 由此可知, $\mathcal{O}_A=(\mathcal{O}_G/\mathscr{I}(A))|A$ 也是凝聚的. 称 $\mathcal{O}_A$ 为解析的集 A 上的全纯函数的芽层.

【解析空间】 对于环式空间† $(X,\mathcal{O}_X)$, 如果 X 是 Hausdorff 空间, 且对于每个点 $x\in X$, 都存在 x 的开邻域 U, 使得 $(U,\mathcal{O}_X|U)$ 与某个 $(A,\mathcal{O}_A)$ (A 是某个开集 $G\subset\boldsymbol{C}^n$ 的解析的集) 作为环式空间同构, 则称 $(X,\mathcal{O}_X)$ 或 X 为**解析空间**, 称 $\mathcal{O}_X$ 为 X 上的**解析函数的芽层** (sheaf of germs of analytic functions) 或**全纯函数的芽层** (sheaf of germs of holomorphic functions). 从 $\boldsymbol{C}^n$ 的一个开集到另一个开集的全纯映射的概念可推广到从一个解析的集到另一个解析的集的映射的情形. 解析空间 X 内的解析的集 Y 和 Y 上全纯函数的芽层 $\mathcal{O}_Y$, 如同 X 是流形的情形一样地定义. 环式空间 $(Y,\mathcal{O}_Y)$ 是解析空间, 称它为 X 的**解析子空间** (analytic subspace). 解析空间 X 在点 x 处的维数 $\dim_x X$, X 的维数 $\dim X$, 不可约性, 以及纯维数等等, 都同解析的集 $A\subset$

$G \subset C^n$ 的情形一样地定义．解析空间 X 可分解为不可约的解析子空间 X_i 的局部有限族的并．这时，每个 X_i 称为 X 的**不可约分支**（irreducible component）．

对于解析空间 X, Y 之间的解析映射 $\varphi: X \to Y$，称 $r_\varphi(x) = \dim_x X - \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x))$ 为 φ 在 x 处的**秩**（rank），称 $r_\varphi = \sup_{x \in X} r_\varphi(x)$ 为 φ 的**秩**．集合 $E_\varphi = \{x \in X \mid \exists(X$ 的通过 x 的不可约分支 $X')\ r_{\varphi|X'}(x) < r_{\varphi|X'}\}$ 称为 φ 的**退化点集**（英 set of degeneracy 德 Entartungsmenge），如果 $E_\varphi = \phi$，则称 φ 为**非退化的**（nondegenerate）．对于任意的整数 k，$\{x \in X \mid r_\varphi(x) \leqslant k\}$ 是解析的集（R. Remmert）．特别 E_φ 是解析的集．当存在解析映射 $\varphi: X \to Y$ 时，Y 的解析的集的原象是 X 的解析的集，但是 X 的解析的集的象不一定是解析的集．如果解析映射 $\varphi: X \to Y$ 是正常映射†，则 X 的解析的集 X' 的象 $\varphi(X')$ 是 $r_{\varphi|X'}$ 维的解析的集．如果 X' 还是不可约的，则 $\varphi(X')$ 也是不可约的（**Remmert 定理**）．

【修改操作】 设 M 是解析空间 X 的子集，如果对于每个点 $x \in X$，都存在 x 的开邻域 U 和 U 的解析的集 M^*，它包含 $U \cap M$ 且使得 $U - M^*$ 在 U 内稠密，则称 M 为**解析薄的**（analytically thin）．对于解析映射 $\varphi: X \to Y$，如果存在解析薄集 $M \subset X$ 和 $N \subset Y$，使得 $X - M$ 在映射 φ 下同构于 $Y - N$，则称 X 为 Y 的一个**解析修改**（analytic modification）．如果 φ 还是正常映射，则称 X 为 Y 的一个**正常修改**（proper modification）．解析空间 X 关于理想的凝聚层 $\mathscr{I}$ 的**单项变换**（monoidal transformation）如同复流形情形一样地定义．它是正常修改 $f: X^* \to X$，使得 $f^*\mathscr{I}$ 是局部主要的，而且确切地说，它依赖于解析的集 $Y = \mathrm{supp}(\mathscr{I}_X/\mathscr{I})$，而不是依赖于 $\mathscr{I}$．常称它为 X 的以 Y 为中心的**吹胀**（blowing-up）．

H. Hironaka（広中平祐）[8] 证明了，若 X 是解析空间，在无穷远处可数（即是紧集的可数并），则存在正常修改 $\pi: X' \to X$，这里 X' 是光滑的（即没有奇点）．更有，在 X 的任一相对紧开集 U 上，π 是吹胀 $\pi_i: X'_i \to X'_{i-1}$（$X'_0 = X$）的有限序列的乘积，这里 π_i 具有光滑中心 Y'_{i-1}，X'_{i-1} 沿 Y'_{i-1} 是正规平坦†的．这个深刻的结果使我们能从复流形的性质导出解析空间的性质．

对于解析空间 X, Y 和解析的集 $G \subset X \times Y$，如果典范射影 $\pi: G \to X$ 是解析（或正常）修改映射，则我们就说定义了从 X 到 Y 的一个**亚纯映射**（meromorphic mapping）（或正常亚纯映射）μ，而称 G 为 μ 的图象．解析映射 $\varphi: X \to Y$ 是正常亚纯映射．

设有正常亚纯映射 $\mu: X \to Y$，则对于每个 $x \in X$，$\mu(x)$（$= \pi^{-1}(x)$ 到 Y 的射影）是 Y 的非空解析的集，且存在 X 的解析的集 N，使得 $X - N$ 在 X 内稠密，且 μ 把 $X - N$ 解析地映到 Y 内．具有这种性质的最小的集合 N，称为 μ 的**不确定点集**（set of points of indeterminacy）或**奇点集**（singularity set）．设 f 是从 X 到 Riemann 球面† $\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C})$ 的亚纯映射，如果 X 的任一不可约分支在映射 f 下都不只是映为无穷远点，则称 f 为 X 上的**亚纯函数**（meromorphic function）．$f^{-1}(0) = \pi((X \times \{0\}) \cap G)$ 称为 f 的**零点集**（set of zero point），$f^{-1}(\infty)$ 称为 f 的**极点集**（set of poles）．它们都是 X 的解析的集．设 $f_1, \cdots, f_k$ 是 X 上的亚纯函数，则可以正常修改 X，使得由 $x \to (f_1(x), \cdots, f_k(x))$ 所定义的 $f: X \to (\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{C}))^k$ 是解析的，即没有不确定点．亚纯函数环在这样的正常修改下是不变的．特别是，如果 X 是不可约的且是紧的，则 X 上的亚纯函数域是 k（$k \leqslant \dim X$）个变量的有理函数域的单纯代数扩张（**周（炜良）定理**）．

设 $(X, \mathscr{O}_X)$ 是解析空间．如果 $\mathscr{O}_{X,x}$ 是正规†局部环，则称点 x 对于 X 是**正规的**（normal）．X 的非正规点的集合形成 X 的（解析薄的）解析的集（岡潔）．寻常点是正规点．如果 X 的每个点是正规的，则称 X 是正规的．从不可约的 X 到不可约正规 m 维的 Y 的秩为 m 的非退化解析映射是开映射（Remmert）．对于解析空间 X，存在正规解析空间 $\tilde{X}$ 和正常修改映射 $\tilde{\pi}: \tilde{X} \to X$，使得 $\tilde{\pi}$ 是非退化的，且 $\tilde{\pi} | \tilde{X} - \tilde{\pi}^{-1}(S)$ 是一个同

构，这里 S 是 X 的奇点集. 不计同构，这样的 $\tilde{X}$ 是唯一确定的. 称 $\tilde{X}$ 为 X 的由正规化映射 $\tilde{\pi}$ 所作的**正规化**(normalization).

设 φ: $X \to Y$ 是解析修改，对于 $x^0 \in X$，当 Y 在 $\varphi(x^0)$ 处为正规时，如果 $\varphi^{-1}(\varphi(x^0))$ 含有孤立点，则 $\varphi^{-1}(\varphi(x^0)) = x^0$，且 φ 在 x^0 的某个邻域内是同构(与 Zariski 基本定理†类似的定理). 特别是，如果 φ: $X \to Y$ 是解析修改，Y 是正规的，则 $X - E_\varphi$ 基于映射 φ 同构于 Y 的稠密开集 $\varphi(X - E_\varphi)$. 设 X, Y 是不可约正规 n 维的，如果解析映射 φ: $X \to Y$ 是单射，则 $\varphi(X)$ 是开集，且 φ^{-1}: $\varphi(X) \to X$ 也是解析的.

【Behnke-Stein 解析空间】 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 内的域，$\tilde{G}$ 是连通局部紧空间，φ 是 $\tilde{G}$ 到 G 上的正常连续映射. 称 $\mathfrak{G} = (\tilde{G}, \varphi, G)$ 是 G 上的一个**解析覆盖空间** (analytic covering space)，如果下述条件成立：对于所有 $z^0 \in G$，$\varphi^{-1}(z^0)$ 是有限集；存在维数 $\leqslant n-1$ 的解析的集 $A \subset G$，使 φ: $\tilde{G} - \varphi^{-1}(A) \to G - A$ 是局部同胚，且 $\varphi^{-1}(A)$ 的每个点具有基本邻域系 $\{U\}$，其中 U 和 $U - \varphi^{-1}(A) \neq \phi$ 均为连通. $\mathfrak{G}$ 在 $G-A$ 上是非分歧的，对于 $z^0 \in G - A$，$\varphi^{-1}(z^0)$ 的点的个数是常数. 称这个常数为 $\mathfrak{G}$ 的**叶数**(德 Blätterzahl). φ 不是局部同胚映射的点 $\tilde{z} \in \tilde{G}$ 称为 $\mathfrak{G}$ 的**分歧点** (ramification point). 设 B 是 $\mathfrak{G}$ 的分歧点集，则 $\varphi(B)(\subset A)$ 是 $n-1$ 维解析的集. 设 D 是 $\tilde{G}$ 的开集，f 是在 D 内定义的复值函数. 如果 f 连续，且对所有 $z^0 \in D - B$ 和 $z^0 = \varphi(\tilde{z}^0)$ 的所有使 φ 在其上为同胚的开邻域 V，$f \circ \varphi^{-1}$ 都在 V 内解析，则称 f 在 D 内是**解析的** (analytic). 设 $\tilde{G}$ 上解析函数的芽层是 $\mathcal{O}_{\tilde{G}}$，则 $(\tilde{G}, \mathcal{O}_{\tilde{G}})$ 是环式空间. 局部地与这样的 $(\tilde{G}, \mathcal{O}_{\tilde{G}})$(作为环式空间)同构的分离环式空间 $(X, \mathcal{O}_X)$，称为 **Behnke-Stein 解析空间** (analytic space in the sense of Behnke-Stein). 在这样的空间中，关于可去奇点的 Riemann 开拓定理成立. 正规解析空间是 Behnke-Stein 解析空间. 解析覆盖空间 $\mathfrak{G} = (\tilde{G}, \varphi, G)$ 称为 **C 覆盖空间** (covering space in the sense of Cartan)，如果对于每个点 $z^0 \in G$，存在 z^0 的开邻域 V 和 $U = \varphi^{-1}(V)$ 内的解析函数 g，使得 g 可表示为以 V 内的解析函数为系数且最高次项系数为 1 的 k 次多项式，而这里的 k 等于 $\mathfrak{G}$ 的叶数. 局部地与 C 覆盖空间同构的 Behnke-Stein 解析空间称为 **C 解析空间** (C-analytic space). 正规解析空间和 C 解析空间是相同的. 还已证明所有解析覆盖空间是 C 覆盖空间 (H. Grauert-Remmert ([1])),因而 Behnke-Stein 解析空间和正规解析空间是相同的.

设 R 是解析空间 X 中的一个等价关系. 如果对所有紧集 K，与 K 的某个点等价的点所成的集合 $R[K]$ 必为紧集，则称 R 是**正常的** (proper). 设 φ: $X \to Y$ 是正常解析映射，如果用 $\varphi(x) = \varphi(x')$ 来定义 $x \equiv x'(R)$，则 R 是正常等价关系. 设 p 是射影 $X \to X/R$，对商空间 X/R 的开集 U，附以在 $p^{-1}(U)$ 内解析且在所有 $p^{-1}(\bar{x})(\bar{x} \in U)$ 上取常数值的函数所成的环，可以得到 X/R 上的环层 $\mathcal{O}_X/R$. 环式空间 $(X/R, \mathcal{O}_X/R)$ 是解析空间. 在此命题的证明中应用了下述 **Grauert 定理** [5]：由正常解析映射 φ: $X \to Y$ 作出的 X 上的解析凝聚层的各次直接象是凝聚的. 更一般地，设 R 是解析空间 X 上的正常等价关系，则为使环式空间 $(X/R, \mathcal{O}_X/R)$ 是解析空间的充分必要条件是，对于每个点 $\bar{x} \in X/R$，存在 $\bar{x}$ 的开邻域 V，使 V 的点可用 $\Gamma(V, \mathcal{O}_X/R)$ 中的函数来分离 (H. Cartan).

【Stein 空间】 对于解析空间 $(X, \mathcal{O}_X)$，1) X 的任意两点可用属于截面 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 的函数来分离；如果 1) 成立，则有 2) X 是 K 完备的，即是，对每个点 $x \in X$，存在有限个 $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)(i = 1, 2, \cdots, k)$，使得解析映射 $f = (f_i)$: $X \to \mathbf{C}^k$ 在 x 处是非退化的. 由 2) 可得 3) X 的紧解析的集是有限集. 当解析空间 X 为不可约时，若 X 是 K 完备的，则 X 是可数个紧集的并 (Grauert). 事实上，如果设 $\dim X = n$，则存在 n 个 $f_i \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$，使得解析映射 $f = (f_i)$: $X \to \mathbf{C}^n$ 是非退化的. 对于解析空间 X，也可以象流形情形一样地定义全纯凸†性. 对全纯凸解析空间，条件 1), 2), 3) 等价 (Grauert).

对于全纯凸的 $(X, \mathcal{O}_X)$，1′) 设 $x, x' \in X$，以"对所有 $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$，$f(x) = f(x')$"来定义 $x \equiv x'(R)$，这样定义的等价关系 R 是正常的；2′) X/R 是解析空间，基于射影 $p: X \to X/R$，$\Gamma(X/R, \mathcal{O}_X/R)$ 同构于 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$；3′) X/R 是全纯凸的，且满足 1). 全纯凸且满足 1), 2) 或 3) 的解析空间称为 **Stein 空间** (Stein space) 或 **解析完备空间** (analytically complete space). Stein 空间是 Stein 流形†的推广，在其上关于解析凝聚层的 Stein 流形基本定理 A, B 也成立 (→ 多变量解析函数 [Stein 流形]). 因而在 Stein 流形内成立的命题，在 Stein 空间内几乎都成立. 设 $\varphi: X \to Y$ 是解析映射，如果对所有的点 $x \in X$，$\varphi^{-1}(\varphi(x))$ 的连通分支都是紧的，则由这些连通分支所定义的等价关系 R' (即对 X 内的 x 和 x'，$x \equiv x'(R')$ 当且仅当 x 和 x' 属于 $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ 的同一连通分支) 是正常的，且环式空间 $(X/R', \mathcal{O}_X/R')$ 是解析空间. 因而对全纯凸的不可约解析空间，如果用前述的等价关系 R 来分类，则射影 $p: X \to X/R$ 的所有纤维都是连通的.

【其他问题和推广】 在解析空间内，对 Levi 问题†也以各种形式进行了讨论. 在这里，解析凝聚层和伪凸性的深入考察起了主要的作用. 也可以在解析空间上定义全纯向量场和微分形式†的概念，并有种种应用.

解析空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 的定义可以作如下的推广 ([5]). 环式空间 $(X, \mathcal{O}_X)$ 称为**广义解析空间** (generalized analytic space)，如果它局部同构于环式空间 $(A, \mathscr{H}_A)$，这里 A 是域 $G \subset \boldsymbol{C}^n$ 的解析的集，$\mathscr{H}_A = (\mathcal{O}_G | \mathscr{J}) | A$，$\mathscr{J} \subset \mathscr{I}(A)$ 是 $\mathscr{I}(A)$ 的某个使得 $\mathrm{Supp}(\mathcal{O}_G | \mathscr{J}) = A$ 的凝聚解析子层. 还可以定义复 Banach 空间的开集的解析的集，由此引进 Banach 解析空间. 这些推广，对于讨论复解析结构的变形是重要的.

【参】 [1] H. Grauert-R. Remmert, Komplexe Räume, Math. Ann., **136** (1958), 245—318; [2] S. S. Abhyankar, Local analytic geometry, Academic Press, 1964; [3] Séminaire H. Cartan, Ecole Norm. Sup., 1953-54, 1957-58, 1960-61; [4] M. Hervé, Several complex variables, local theory, Tata Inst. Studies in Math., Oxford Univ. Press, 1963; [5] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Publ. Math. Inst. HES, no. 5, 1960; [6] L. Bers, Introduction to several complex variables, Courant Institute, 1963; [7] R. Narasimhan, Introduction to the theory of analytic spaces, Lecture notes in math. 25, Springer, 1966; [8] H. Hironaka (広中平祐), Desingularization of complex-analytic varieties, Act. Congr. Intern. Math., Nice, 1972, Gauthier-Villars, vol. 2, 627—632. 另 → 多变量解析函数的[参].

十二、泛函分析

函数空间 [英 function space 法 espace fonctionnel 德 Funktionenraum 俄 функциональное пространство 日 関数空間] 把空间Ω到另一空间A的映射的全体 A^{Ω} 看作一个空间 (→集合[映射]),而把它的元,即Ω到A的映射看作A^{Ω}的一个点,这种几何的处理方法是近代分析学的一般方法. 特别地,Ω是拓扑空间† 或测度空间†,而A是实数域$\boldsymbol{R}$或复数域$\boldsymbol{C}$的情形,即在Ω上定义的实值或复值函数的集合的情形是重要的. 我们将考察满足某些条件,诸如连续性、可测性等条件的这样的函数所成的空间.这些空间统称为**函数空间**. 它们形成拓扑线性空间 (→Banach 空间,拓扑线性空间).

【函数空间的例】 以下列举重要的函数空间的例. 本条中的"函数"都是指实值函数或复值函数. 在考虑测度空间上的函数空间时,把几乎处处†相等的两个函数看作相同.

1) $\boldsymbol{C(\Omega)}$. 设Ω为紧 Hausdorff 空间†,在Ω上定义的连续函数$f(x)$的全体,用 $C(\Omega)$ 表示. 当$f+g$,αf (α为实数或复数)分别表示函数 $f(x)+g(x)$, $\alpha f(x)$ 时, $C(\Omega)$ 就形成一个线性空间†. 进而用 $\|f\|=\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|$ 定义f的范数†时, $C(\Omega)$ 关于此范数 (所定义的距离)是完备的†,因而形成 Banach 空间. 此时,$\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ 等价于 $f_n(x)$ 在Ω上一致收敛于$f(x)$. 设R为 $C(\Omega)$ 的子集,满足: i)R关于普通的函数加法和乘法形成复数域上的环,且含有恒等于 1 的函数; ii) 对于任意的不同的两点 $x,y\in\Omega$, 存在 $f\in R$, 使得 $f(x)\neq f(y)$; iii) 对于任一$f\in R$,存在$f^*\in R$, 使得在Ω上,$f^*(x)=\overline{f(x)}$ 成立. 在这些条件下,R在 $C(\Omega)$ 中关于范数(即在一致收敛的意义下)是稠密的. 这称为 **Weierstrass-Stone 定理**或 **Stone-Гельфанд 定理**. 若Ω为紧一致空间†, 则 $C(\Omega)$ 的子集E是全有界†(即属于E的函数的任意的序列必含有在Ω上一致收敛的子序列) 的充分必要条件是, E为一致有界†且为等度连续† (Ascoli-Arzelà 定理). 当Ω是拓扑空间但不一定是紧空间时, 在Ω上的有界连续函数的全体也用 $C(\Omega)$ 表示. 它也由范数 $\|f\|=\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|$ 形成 Banach 空间. 特别当Ω是局部紧空间时,用 $\boldsymbol{C_0(\Omega)}$ 表示具有紧支集的连续函数的全体. 这里所谓函数的**支集** (support, carrier), 是指Ω中的集合$\{x\mid f(x)\neq 0\}$的闭包†,通常用 $\mathrm{supp} f$ 表示. $C_0(\Omega)$ 关于前述的范数不是完备的, 从而不是 Banach 空间.

2) $\boldsymbol{L_p(\Omega)}$ $(1\leqslant p<\infty)$. 设在Ω上定义了测度μ, 以 $L_p(\Omega)$ 表示满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体: $f(x)$ 是Ω上的可测函数†, 且 $|f(x)|^p$ 可积,即

$$\int_{\Omega}|f(x)|^p d\mu(x)<\infty.$$

特别当Ω是区间 (a,b)时,写作 $L_p(a,b)$. 由 Minkowski 不等式†得知,若 $f,g\in L_p(\Omega)$, 则 $f+g\in L_p(\Omega)$. 从而 $L_p(\Omega)$成为线性空间. 当定义f的范数为

$$\|f\|=\|f\|_p=\left\{\int_{\Omega}|f(x)|^p d\mu(x)\right\}^{1/p}$$

时,$L_p(\Omega)$成为 Banach 空间. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_p=0$时,称 $f_n(x)$ 为 **p 阶平均收敛**(mean convergence of order p) 于 $f(x)$, 也称为 **p 次方平均收敛**,写作 $\mathrm{l.i.m.} f_n=f$ ("l. i. m." 是 "limit in mean" 的缩写). 特别当 $p=2$ 即**二阶(平方)平均收敛**时,常简称为**平均收敛** (mean convergence). $p=2$ 时,由 Schwarz 不等式†, 对任意的 $f,g\in L_2(\Omega)$, 可以定义

$$(f,g)=\int_{\Omega}f(x)\overline{g(x)}d\mu(x),$$

由于它具有内积†的性质,所以 $L_2(\Omega)$ 成为 Hil-

bert 空间†.

$L_p(1<p<\infty)$ 空间可按如下方式推广：设 $\Phi(s)$ 是 $[0,\infty)$ 上的凸的非减函数，满足 $\Phi(0)=0$，且当 $s\to\infty$ 时，$\Phi(s)/s\to\infty$. 用 $L_\Phi(\Omega)$ $(L_\Phi^*(\Omega))$ 表示使得 $\Phi(|f(x)|)$ 是可积的（对于某个 $k>0$，$\Phi(k|f(x)|)$ 是可积的）所有函数 $f(x)$ 的集合. 如果 $\Phi(2s)\leqslant C\Phi(s)$，则 $L_\Phi(\Omega)=L_\Phi^*(\Omega)$. 在范数

$$\|f\|=\inf\{\lambda>0\,|\int\Phi(\lambda^{-1}|f(x)|)d\mu(x)\leqslant 1\}$$

之下，$L_\Phi^*(\Omega)$ 是 Banach 空间，称它为 **Orlicz 空间** (Orlicz space). $L_p(\Omega)(1<p<\infty)$ 是关于函数 $\Phi(s)=s^p$ 的 Orlicz 空间.

3) $\boldsymbol{M(\Omega)}$. 设在空间 Ω 上定义了一个测度 μ，对于在 Ω 上可测的函数 $f(x)$，若存在正数 α，使得 $|f(x)|\leqslant\alpha$ 在 Ω 上几乎处处成立，就称 $f(x)$ 为**本质有界的** (essentially bounded). 这样的 α 的下确界，称为 $f(x)$ 的**本质上确界** (essential supremum)，用 $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$ 表示. 以 $M(\Omega)$ 表示 Ω 上的本质有界可测函数的全体，以 $\|f\|=\|f\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|$ 作为范数，$M(\Omega)$ 就成为 Banach 空间. 当 $\mu(\Omega)<\infty$ 时，对一切 $p\geqslant 1$，$M(\Omega)\subset L_p(\Omega)$ 成立；对任意的 $f\in M(\Omega)$，$\|f\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\|f\|_p$ 成立. 因此，甚至当 $\mu(\Omega)=\infty$ 时，也有把 $M(\Omega)$ 写为 $L_\infty(\Omega)$ 的. 这也是对于 $M(\Omega)$ 的范数使用符号 $\|\cdot\|_\infty$ 的理由.

4) $\boldsymbol{S(\Omega)}$. 设在空间 Ω 上定义了满足 $\mu(\Omega)<\infty$ 的测度 μ. 如果把在 Ω 上几乎处处取有限值的可测函数 $f(x)$ 的全体记作 $S(\Omega)$，则对于 $f\in S(\Omega)$，

$$\|f\|=\int_\Omega\frac{|f(x)|}{1+|f(x)|}d\mu(x)$$

具有拟范数†的性质，且 $S(\Omega)$ 构成 Fréchet 空间†. $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$ 等价于，对任意的正数 ε，

$$\lim_{n\to\infty}\mu(\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\})=0.$$

称这样意义下的收敛为**渐近收敛** (asymptotic convergence). 这种收敛与随机变量†序列的依概率收敛†是相同的概念（→概率论）. 一般地说，若 $f_n(x)\in L_p(\Omega)$ p 阶平均收敛于 $f(x)$，则它渐近收敛于 $f(x)$，但其逆不真. 又若 $f_n(x)\in S(\Omega)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$，则它渐近收敛于 $f(x)$，反之，若 $f_n(x)$ 渐近收敛于 $f(x)$，则可选取适当的子序列 $f_{n_\nu}(x)$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

5) **数列空间 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{l_p}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{s}$.** 当 Ω 为紧空间 $\{1,1/2,1/3,\cdots 1/n,\cdots,0\}$ 时，我们把 $C(\Omega)$ 写做 (c) 或 c. 当 $\Omega=\{1,2,3,\cdots n,\cdots\}$ 且各点的测度取 1 时，分别把 $L_p(\Omega)$，$M(\Omega)$ 写做 (l_p)，(m) 或 l_p，m. 又在同样的空间 Ω 上，取点 n 的测度为 $1/2^n$，这样得到的 $S(\Omega)$ 写做 (s) 或 s. 当 2) 中所述的 $L_2(\Omega)$ 为可分†时，设 $\{\varphi_n\}$ 为 $L_2(\Omega)$ 内的一个完备正规正交系†，若对任意的 $f\in L_2(\Omega)$，令

$$\xi_n=\int_\Omega f(x)\overline{\varphi_n(x)}d\mu(x)$$

(Fourier 系数†)，则 $\{\xi_n\}\in l_2$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2=\|f\|^2.$$

反之，对任意的 $\{\xi_n\}\in l_2$，存在以它为 Fourier 系数的函数

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\varphi_n\in L_2(\Omega)$$

(**F. Riesz-Fischer 定理**) 基于这个对应关系，可分的 $L_2(\Omega)$ 和 l_2 作为 Hilbert 空间是同构的.

6) $\boldsymbol{A(\Omega)}$，$\boldsymbol{A_p(\Omega)}$ $(p\geqslant 1)$. 设 Ω 为复平面上的域. 把在 Ω 内单值全纯并在 Ω 的闭包上连续的函数的全体，记作 $A(\Omega)$. 对于 $f\in A(\Omega)$ 定义其范数为 $\|f\|=\sup_{z\in\Omega}|f(z)|$ 时，$A(\Omega)$ 形成 Banach 空间. 又对于 $p\geqslant 1$，把在 Ω 内单值全纯且满足

$$\int_\Omega|f(z)|^p dxdy<\infty$$

($z=x+iy$，$dxdy$ 为二维 Lebesgue 测度) 的函数 f 的全体，写作 $A_p(\Omega)$. $A_p(\Omega)$ 也由范数

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega|f(z)|^p\,dxdy\right)^{1/p}$$

构成 Banach 空间. 特别当 $p=2$ 时构成 Hil-

bert 空间.

为了叙述在 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的子域上的种种函数空间，引入下列符号. 对 $\boldsymbol{R}^n$ 的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，令 $|x|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$；又对非负整数的 n 项数列 $(\alpha_1,\cdots\alpha_n)$，令 $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n, D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$（其中 $D_j=\partial/\partial x_j$）. 以下当无特别说明时，$\Omega$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的子域.

7) $\boldsymbol{C}^l(\boldsymbol{\Omega})$，$\boldsymbol{C}_0^l(\boldsymbol{\Omega})$ $(l=0,1,2,\cdots,\infty)$，$\mathscr{D}(\boldsymbol{\Omega})$，$\mathscr{E}(\boldsymbol{\Omega})$. 把在 Ω 中 l 次连续可微的函数即 C^l 类函数†的全体，写作 $C^l(\Omega)$. 所谓 $C^l(\Omega)$ 中的函数序列 $\{f_\nu\}$ 在 $C^l(\Omega)$ 内收敛于 0 是指，对满足 $0\leqslant|\alpha|\leqslant l$($l=\infty$ 时，$0\leqslant|\alpha|<\infty$)的任意的 α 和任意的紧集 $K\subset\Omega$，$|D^\alpha f_\nu(x)|$ 在 K 上一致收敛于 0. 把 $C^l(\Omega)$ 中其支集为 Ω 的紧子集的函数的全体，记作 $C_0^l(\Omega)$. $C_0^l(\Omega)$ 中的函数序列 $\{f_\nu\}$ 在 $C_0^l(\Omega)$ 内收敛于 0 是指，$\mathrm{supp}f_\nu$ $(\nu=1,2,\cdots)$ 包含在 Ω 的一个与 ν 无关的紧子集内，且 $\{f_\nu\}$ 在 $C^l(\Omega)$ 内收敛于 0. 又常用 $\mathscr{D}(\Omega)$ 表示 $C_0^\infty(\Omega)$，$\mathscr{E}(\Omega)$ 表示 $C^\infty(\Omega)$.

在 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子域的闭包的情形，对于满足 $0\leqslant|\alpha|\leqslant l$ 的任意的 α，使得 $D^\alpha f(x)$ 在 Ω 的内部存在并且一致连续（从而能连续扩张到 Ω 的边界）的函数 $f(x)$ 的全体，记作 $C^l(\Omega)$. 在 $C^l(\Omega)$ 中按前述的方式定义收敛时，它和按范数

$$\|f\|=\sup\{|D^\alpha f(x)|\,|\,x\in\Omega,|\alpha|\leqslant l\}$$

的收敛是等价的. 从而，特别当 Ω 为紧时，$C^0(\Omega)$ 和 1) 的 $C(\Omega)$ 是相同的.

8) $\mathscr{D}_{L_p}(\boldsymbol{\Omega})$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$，$\mathscr{B}(\Omega)$. 以 $\mathscr{D}_{L_p}(\Omega)$ 表示满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体：$f(x)$ 属于 $C^\infty(\Omega)$，且对所有 α，$D^\alpha f$ 属于关于 Lebesgue 测度†的 $L_p(\Omega)$. $\mathscr{D}_{L_p}(\Omega)$ 的 0 点的邻域 $V_{l,\varepsilon}$，定义为对满足 $|\alpha|\leqslant l$ 的任意的 α，使得 $\|D^\alpha f\|_p<\varepsilon$ 成立的 f 的全体. 特别地，也把 $\mathscr{D}_{L_\infty}(\Omega)$ 写做 $\mathscr{B}(\Omega)$.

7)，8) 所述的各个空间，在 $\Omega=\boldsymbol{R}^n$ 的情形，常把 $(\boldsymbol{R}^n)$ 省略，例如写成 $\mathscr{D}$，$\mathscr{D}_{L_p}$.

9) $\mathscr{S}$. 设 $f(x)$ 为属于 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 的函数，如果它对一切 α 和一切自然数 k，满足

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^k|D^\alpha f(x)|=0,$$

就称 $f(x)$ 为**急减 C$^\infty$ 类函数**(rapidly decreasing C$^\infty$-fuction). 急减 C$^\infty$ 类函数的全体用 $\mathscr{S}$ 表示. 在 $\mathscr{S}$ 内 0 点的邻域 $V_{l,k,\varepsilon}$，定义为满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体：对满足 $|\alpha|<l$ 的任意的 α，有 $(1+|x|^2)^k|D^\alpha f(x)|<\varepsilon$.

10) $\mathscr{O}_M$. 设 $f(x)$ 是属于 $C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ 的函数，若对每个 α，$|D^\alpha f(x)|$ 以 $|x|$ 的某个多项式（可以和 α 有关）为其上界，则称 $f(x)$ 为**缓增 C$^\infty$ 类函数** (slowly increasing C$^\infty$-function). （当存在 x 的某一多项式 $P(x)$，使 $|f(x)|\leqslant|P(x)|$ 成立时，也常称 $f(x)$ 为**缓增函数**.）用 $\mathscr{O}_M$ 表示缓增 C$^\infty$ 类函数的全体. $\mathscr{O}_M$ 中的函数序列 $\{f_\nu\}$ 在 $\mathscr{O}_M$ 内收敛于 0 是指，对任意的 α 和任意的 $\varphi\in\mathscr{S}$，$\{\varphi(x)D^\alpha f_\nu(x)\}$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上一致收敛于 0.

11) $\mathscr{O}'_C$ 和**广义函数空间** (space of distribution). $\mathscr{D}$，$\mathscr{S}$，$\mathscr{B}$ 的共轭空间(→拓扑线性空间)分别写做 $\mathscr{D}'$，$\mathscr{S}'$，$\mathscr{B}'$. $\mathscr{D}'$ 是 Schwartz 广义函数（→广义函数）的全体. 由关系 $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{B}$ 导致关系 $\mathscr{D}'\supset\mathscr{S}'\supset\mathscr{B}'$. 若广义函数 T 满足：对任意的自然数 k，有 $(1+|x|^2)^k\,T\in\mathscr{B}'$，则称 T 为**急减广义函数**(rapidly decreasing distribution). 急减广义函数的全体用 $\mathscr{O}'_C$ 表示. $T\in\mathscr{O}'_C$ 等价于由任意的 $\varphi\in\mathscr{D}$ 所作的 T 的正则化† $T*\varphi$ 属于 $\mathscr{S}$. 从而，特别当广义函数 T_f 是由 $f\in\mathscr{S}$ 定义时，T_f 属于 $\mathscr{O}'_C$.

12) $\boldsymbol{W}_p^l(\boldsymbol{\Omega})$. 设 Ω 为 Lebesgue 测度空间，以 $W_p^l(\Omega)$ 表示满足下列条件的函数 $f(x)$ 的全体：$f(x)$ 属于 $L_p(\Omega)$，且对满足 $|\alpha|\leqslant l$ 的任意的 α，在广义函数意义下的导数 $D^\alpha f(x)$（→广义函数）都属于 $L_p(\Omega)$. $W_p^l(\Omega)$ 由范数

$$\|f\|=\|f\|_{W_p^l}=\Big(\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}\int_\Omega|D^\alpha f(x)|^p dx\Big)^{1/p}$$

构成 Banach 空间. 显然，$W_p^0(\Omega)=L_p(\Omega)$. 特别地，以

$$(f,g)=\int_\Omega\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant l}D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)}dx$$

为内积，$W_2^l(\Omega)$ 成为 Hilbert 空间.（有时也

把 $W_2^l(\Omega)$ 记作 $H^l(\Omega)$.) 若 $l > n/p + k$, 则 $W_p^l(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ (把只在测度为 0 的集合上取不同值的两个函数看作同一函数)成立 (**Соболев 定理**).

13) $\boldsymbol{H}_0^l(\boldsymbol{\Omega})$. 空间 $\mathscr{D}(\Omega)$ 关于范数

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{0 \leq |\alpha| \leq l} |D^\alpha f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

完备化而得到的 Hilbert 空间,以 $H_0^l(\Omega)$ 表示. $H_0^0(\Omega) = W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ 成立. 当 $l \geq 1$ 时, $H_0^l(\Omega) \subset W_2^l(\Omega)$ 成立, 但这两个空间并不相等.

【共轭空间】 以下, 用 $\|\Phi\|$ 表示有界线性泛函† Φ 的范数† (→Banach 空间).

$C(\Omega)$ (Ω 是紧 Hausdorff 空间)上的有界线性泛函 Φ 可以用 Stieltjes 积分†

$$(1) \qquad \Phi(f) = \int_{\Omega} f(x) d\varphi(x), \ f \in C(\Omega)$$

表示. 这里 φ 是 Ω 中 Borel 集†上定义的 (实值或复值) 有界变差†完全加性集函数†. 把这样的 φ 的全体写作 $\boldsymbol{BV(\Omega)}$. 反之,对任意的 $\varphi \in BV(\Omega)$, 由 (1) 给出 $C(\Omega)$ 上的有界线性泛函 Φ, 且

$$(2) \qquad \|\Phi\| = \varphi \text{ 在 } \Omega \text{ 上的全变差}$$

成立.因此 $C(\Omega)$ 的共轭空间†同构于在 $BV(\Omega)$ 内由 (2) 定义范数所得到的 Banach 空间.

$L_1(\Omega)$ 上的任一有界线性泛函 Φ, 可由某一 $\varphi \in M(\Omega)$ 用

$$(3) \quad \Phi(f) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) d\mu(x), \ f \in L_1(\Omega)$$

表示, 且有 $\|\Phi\| = \|\varphi\|_\infty$; 其逆也成立. 从而, $L_1(\Omega)$ 的共轭空间和 $M(\Omega)$ 同构.

$L_p(\Omega)(1 < p < \infty)$ 的共轭空间和 $L_q(\Omega)$ 同构. 这里 q 是由 $1/p + 1/q = 1$ 所决定的实数 (从而 $1 < q < \infty$), q 称为 p 的**共轭指数** (conjugate exponent). $L_p(\Omega)$ 上的有界线性泛函 Φ 由与(3)形式相同的公式(其中 $f \in L_p(\Omega)$)给出, $\varphi \in L_q(\Omega)$, 且 $\|\Phi\| = \|\varphi\|_q$ 成立.

$M(\Omega)$ 的共轭空间与满足下述条件的有限加性集函数 φ 所成的赋范线性空间同构: φ 是在 Ω 内一切可测集上有定义的(实值或复值)有限加性集函数,它在 Ω 上是有界变差的,并且关于 Ω 上最初赋与的测度 μ 是绝对连续的 (即 $\mu(N) = 0$ 蕴涵 $\varphi(N) = 0$) (这里范数 $\|\varphi\|$ 是 φ 的全变差). $M(\Omega)$ 上的有界线性泛函 Φ 由与 (1) 式同样的公式所给出, 这里右端的积分的确切意义如下: 当 f, φ 都取实值时, 对闭区间 $[-\|f\|, \|f\|]$ 作分割:

$(\Delta) \quad -\|f\| = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = \|f\|$,

令 $\varepsilon_\Delta = \sup_i(\alpha_i - \alpha_{i-1})$, $A_i = \{x \mid \alpha_{i-1} < f(x) \leq \alpha_i\}$, 于是当 $\varepsilon_\Delta \to 0$ 时,

$$s_\Delta = \sum_i \alpha_i \varphi(A_i)$$

趋于一定的值. 定义这个值为 $\int_{\Omega} f d\varphi$. 当 f, φ 取复值时,可以考虑这些函数的实部和虚部,并把上述定义方法用于它们的各个组合.

除在 $S(\Omega)$ 上恒等于 0 的泛函外, 在 $S(\Omega)$ 上不存在别的有界线性泛函.

数列空间 c, $l_p(1 \leq p < \infty)$, m, s 分别是 $C(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $M(\Omega)$, $S(\Omega)$ 的特殊情形,从而它们的共轭空间的情况是已知的. 例如 c, l_1 的共轭空间分别是 l_1, m; 当 $1 < p < \infty$ 时, l_p 的共轭空间是 $l_q(1/p + 1/q = 1)$.

由上得知,当 $1 < p < \infty$ 时, $L_p(\Omega)$, l_p 是自反的†, 特别 $L_2(\Omega)$, l_2 分别具有与它本身同构的共轭空间,但 $C(\Omega)$, $L_1(\Omega)$, $M(\Omega)$, c, l_1, m 都不是自反空间.

$\mathscr{D}$ 的共轭空间 $\mathscr{D}'$ 是 Schwartz 广义函数的全体所成的空间, $\mathscr{D}_{L_p}$, $\mathscr{S}$ 等的共轭空间是 $\mathscr{D}'$ 的(代数)线性子空间, 进一步有下面的表所示的关系. 表中 $E \subset F$ 表示 E 包含在 F 内, E 的拓扑比 F 在 E 上的诱导拓扑强†.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \mathscr{D} & \subset & \mathscr{S} & \subset & \mathscr{D}_{L_p} & \subset & \mathscr{D}_{L_q} & \subset & \mathscr{B} & \subset & \mathscr{O}_M & \subset & \mathscr{E} \\ \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\ \mathscr{E}' & \subset & \mathscr{O}'_C & \subset & \mathscr{D}_{L'_p} & \subset & \mathscr{D}_{L'_q} & \subset & \mathscr{B}' & \subset & \mathscr{S}' & \subset & \mathscr{D}' \end{array}$$

这里 $1 \leq p \leq q < \infty$, 这个表是 $\boldsymbol{R}^n$ 上的函数空间的种种关系, 其中删去 $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{O}_M$, $\mathscr{O}'_C$ 后,对任意域 $\Omega(\subset \boldsymbol{R}^n)$ 上的函数空间也成立.

【算子的插值】 设 (Ω, μ) 和 (Ω', ν) 是 σ 有限的测度空间, 用 $\mathrm{Simp}(\Omega)$ 表示 Ω 上具有有限测度支集的 μ 可测简单函数的空间, 又用

Meas(Ω') 表示 Ω' 上 ν 可测函数的空间. 算子 T: Simp (Ω) → Meas (Ω') 称为**强 (p, q) 型** (strong type (p, q)), $p, q \in [1, \infty]$, 如果它满足

(4) $\|Tf\|_{L_q(\Omega')} \leqslant M\|f\|_{L_p(\Omega)}$, $f \in \mathrm{Simp}(\Omega)$,

这里M是不依赖于 f 的常数.

设线性算子 T:Simp(Ω) → Meas(Ω') 同时为 (p_0, q_0) 型和 (p_1, q_1) 型,则T对于所有由

(5)
$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad (0 < \theta < 1)$$

决定的 p 和 q 是 (p,q) 型的,且有

(6) $\|Tf\|_{L_q(\Omega')} = M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{L_p(\Omega)}$, $f \in \mathrm{Simp}(\Omega)$.

这里, M_i 是 (p_i, q_i) 的界 (Riesz-Thorin 定理).

当 $f \in$ Meas (Ω) 时, **分布函数** (distribution function) $\mu_f(s)$, **重列** (rearrangement) $f^*(t)$ 和**平均函数** (average function) $f^{**}(t)$ 定义为:

$$\mu_f(s) = \mu\{x \in \Omega \mid |f(x)| > s\}, s > 0,$$
$$f^*(t) = \inf\{s > 0 \mid \mu_f(s) \leqslant t\}, t > 0,$$
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds.$$

用 $L_p^*(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 表示 $(0, \infty)$ 上的函数相对于测度 dt/t 的 L_p 空间, 则对于任意的 $p, q \in [1, \infty]$, **Lorentz 空间** $L_{(p,q)}(X)$ 定义为所有使得

$$\|f\|_{(p,q)}^* = \|t^{1/p}f^*(t)\|_{L_q^*} < \infty$$

的 $f \in$ Meas(X) 的空间.

$L_{(p,q)}(X)$ 是 Meas(X) 的一个线性子空间, 如果 $q_0 \leqslant q_1$, 则包含关系 $L_{(p,q_0)}(X) \subset L_{(p,q_1)}(X)$ 成立.

如果 $p = q$, 则 $\|f\|_{(p,q)}^*$ 与范数 $\|f\|_{L_p(X)}$ 相同, 因而 $L_{(p,q)}(X) = L_p(X)$. 否则 $\|f\|_{(p,q)}^*$ 不一定满足三角不等式.

然而,如果 $1<p<\infty$, 则 $L_{p,q}(X)$ 在范数

$$\|f\|_{L_{(p,q)}(X)} = \|t^{1/p}f^{**}(t)\|_{L_q^*}$$

下成为 Banach 空间, 这个范数与 $\|f\|_{(p,q)}^*$ 在下面的意义下是等价的:

$$\|f\|_{(p,q)}^* \leqslant \|f\|_{L_{(p,q)}(X)} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{(p,q)}^*.$$

把 Meas (Ω)的一个线性子空间映射到Meas (Ω') 内的一个算子T称为**拟线性的** (quasilinear),如果当 Tf, Tg 确定时, $T(f+g)$ 唯一确定,且有

$|T(f+g)(y)| \leqslant K(|Tf(y)| + |Tg(y)|)$,

这里K是不依赖于 f 和 g 的常数.如果 $K = 1$, T称为**次线性的** (sublinear).

设拟线性算子 T 满足

$$\|Tf\|_{(q_i,s_i)}^* \leqslant M_i\|f\|_{(p_i,r_i)}^*, \ f \in L_{(p_i,r_i)}(\Omega),$$

$i = 0, 1$, 这里 $p_0 < p_1, q_0 \neq q_1$, 则对于每个 $0 < \theta < 1$ 和 $s \geqslant r$, 有

$$\|Tf\|_{(q,s)}^* \leqslant K_\theta M_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|f\|_{(p,r)}^*, f \in L_{(p,r)}(\Omega),$$

这里 p 和 q 由 (5) 式决定, 且 $K_\theta = O(\theta^{-1} + (1-\theta)^{-1})$ (**Marcinkiewicz-Hunt 定理**).

算子T称为**弱 (p, q) 型** (weak type (p, q)), 如果存在一个不依赖于 $f \in L_p(\Omega)$ 的常数 M, 使得

$$\sup_{0<s<\infty} s \cdot \nu_{Tf}(s)^{1/q} \leqslant M\|f\|_{L_p(\Omega)}, \ q < \infty,$$

(7) $\|Tf\|_{L_\infty(\Omega')} \leqslant M\|f\|_{L_p(\Omega)}$, $q = \infty$

(J. Marcinkiewicz); 算子T称为**限制 (p, q) 型** (restricted type (p,q)) (**限制弱 (p, q) 型** (restricted weak type (p, q))),如果 (4) (相应地, (7)) 对于有限测度集的定义函数成立 (E. M. Stein 和 G. Weiss). 一个算子T是弱 (p,q) 型当且仅当

$$\|Tf\|_{(q,\infty)}^* \leqslant M\|f\|_{L_p(X)}.$$

如果 $1 \leqslant p < \infty$, $1 < q \leqslant \infty$, 则次线性算子 T: Simp(Ω) → Meas(Ω') 是限制弱 (p, q) 型当且仅当

$$\|Tf\|_{(q,\infty)}^* \leqslant M\|f\|_{(p,1)}^*, \quad f \in \mathrm{Simp}(\Omega).$$

因而我们有下面的定理.

设次线性算子 T:Simp(Ω) → Meas (Ω')同时为限制弱 (p_0, q_0) 型和 (p_1, q_1) 型, $p_i \leqslant q_i$, $p_0 < p_1$, $q_0 \neq q_1$, 则T对于由 (5) 决定的 p, q 是强 (p,q) 型 (**Stein-Weiss 定理**).

这些定理被卓有成效地用来证明诸如 Fourier 变换及其推广 (A. P. Calderón 和 A Zygmund) 那样的(奇异)积分算子的有界性和 Hardy-Littlewood-Соболев 不等式.

【参】[1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932 (Chelsea, 1963); [2] N. Dunford-J. Schwartz, Linear operators, Interscience, I 1958, II 1963, III 1971; [3] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, I 1950, II 1951, 修订版, 1966; [4] A. Friedman, Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, 1963; [5] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград, 1950 (中译本: С. Л. 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959); [6] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [7] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge Univ. Press, 第二版 1959; [8] R. A. Hunt, On $L(p, q)$ spaces, Enseignement Math., (2) **12** (1966), 249—276.

Hilbert 空间 [英 Hilbert space 法 espace hilbertien 德 Hilbertscher Raum 俄 гильбертово пространство 日 ヒルベルト空間] Hilbert 空间的理论是由积分方程问题引起的. Hilbert 注意到, 一个线性积分方程可以转化为含有它的未知函数的 Fourier 系数的无穷多个一次方程的方程组,他把具有有限的 $\sum|x_n|^2$ 的无穷数列 $\{x_n\}$ 的全体所成的线性空间称为 l_2 空间,定义其内任意两个元 $x=\{x_n\}$, $y=\{y_n\}$ 的内积为

$$(x,y)=\sum_n x_n\bar{y}_n.$$

空间 l_2 可以看作 Euclid 空间向无限维的推广. F. Riesz 进一步直接讨论了由函数形成的空间, 即现在所说的 L_2 空间, J. von Neumann 把这些空间的性质加以抽象, 给出了下面所述的 Hilbert 空间的定义.

【Hilbert 空间的定义】 命 K 为复数域或实数域, 其元用 α, β 等表示. 设对于以 K 为系数域的线性空间† H 的任意两个元 x,y, 有一数 $(x,y)\in K$ 与之对应, 满足下列条件: i) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$, ii) $(\alpha x, y)=\alpha(x,y)$, iii) $(x,y)=\overline{(y,x)}$, iv) $(x,x)\geqslant 0$, v) $(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$, 则称 H 为**准 Hilbert 空间** (pre-Hilbert space), 而称 (x,y) 为 x 和 y 的**内积** (inner product, scalar product).

令 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$, 则 H 成为以 $\|x\|$ 为范数的赋范空间†. 当 H 关于距离 $\|x-y\|$ 为完备†时, 即当 $\|x_n-x_m\|\to 0(m, n\to\infty)$ 蕴涵 $\lim x_n=x$ 存在时, 则称 H 为 **Hilbert 空间**. 按照 K 为复数域或实数域, 对应地称 H 为**复 Hilbert 空间或实 Hilbert 空间**. Hilbert 空间是 Banach 空间†的一种.

为使以 $\|x\|$ 为范数的赋范空间的任意两个元 x,y, 能定义它们的内积 (x,y), 使得所给空间成为准 Hilbert 空间, 并使 $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ 成立,其充分必要条件为等式 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ 成立.

【正规正交系】 当 $(x, y)=0$ 时,称 x 和 y 互相正交;若 H 的子集 Σ 不含有 0, 且它的任意两个相异的元都互相正交, 则称 Σ 为**正交系** (orthogonal system). 只由范数为 1 的元所组成的正交系, 称为**正规正交系** (orthonormal system). 由任意正交系 $\Sigma=\{x_i\}$, 作正规正交系 $\{x_i/\|x_i\|\}$, 称为对 Σ 加以**正规化** (normalize). 极大正规正交系称为**完备** (complete) 正规正交系. 对给定的 H, 它的所有完备正规正交系的基数是同一个常数, 称它为 H 的**维数** (dimension). 两个维数相等的 Hilbert 空间彼此同构.

当 $\Sigma=\{x_i\}$ 为正规正交系时, H 内任一元 x 关于 Σ 的 Fourier 系数 (x, x_i) 至多有可数个不等于 0, 且

$$\|x\|^2\geqslant\sum_i|(x,x_i)|^2$$

成立 (**Bessel 不等式**). 在 Hilbert 空间中,下列三个陈述是等价的: 1) Σ 是完备的; 2) 对每个 x, **Parseval 等式**

$$\|x\|^2=\sum_i|(x,x_i)|^2$$

成立; 3) 每个 x 能展开为 Fourier 级数

$$x=\sum_i (x, x_i)x_i.$$

【Hilbert 空间的例】 数列空间 l_2, 由

$$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_n x_n\bar{y}_n$$

定义内积,就成为 $\aleph_0$ 维 Hilbert 空间.

测度空间 (X,μ) 上的函数空间 L_2，由

$$(f,g)=\int_X f\bar{g}d\mu$$

定义内积，就成为 Hilbert 空间．在 Euclid 空间的 Lebesgue 测度的情形，L_2 是 $\aleph_0$ 维的，从而成为与 l_2 同构的 Hilbert 空间．又 $A_2(\Omega)$，$W_2^l(\Omega)$，$H_0^l(\Omega)$ 也都是 Hilbert 空间(→函数空间)．

【闭子空间和射影算子】 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间简称为**闭子空间** (closed linear subspace)．对于闭子空间 M，取与 M 的一切元素正交的 $x\in H$ 作成一闭子空间 M'，H 成为 M 和 M' 的直和．称 M' 为 M 的**正交补空间** (orthogonal complement)．M' 的正交补空间是 M，即 $M''=M$．对任意的 x，作其直和分解 $x=y+y'(y\in M,y'\in M')$．使 y 对应于 x 的算子 P_M，称为射影于 M 的**射影算子** (projection operator)．射影 P 具有下列性质：$P^2=P$(幂等)；有界；对一切 $x,y\in H$，$(Px,y)=(x,Py)$ (自伴)成立．反之，具有这三条性质的算子是射影算子(→线性算子)．

【共轭空间】 由 Hilbert 空间到实数(或复数)域的线性算子称为**线性泛函** (linear functional)．连续线性泛函的全体 H' 由范数

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|$$

形成 Hilbert 空间．对每个 $f\in H'$，存在唯一的 $y\in H$，使得对一切 $x\in H$，有 $f(x)=(x,y)$，且有 $\|f\|=\|y\|$ (**Riesz 定理**)，映射 $f\to y$ 是由 H' 到 H 的反线性等距算子 (关于 Hilbert 空间上的线性算子，→紧算子，特征值问题，线性算子)．

【参】 [1] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner, 第二版, 1924, Chelsea, 1953; [2] E. Hellinger-O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Enzykl. der Math., 1928, Chelsea, 1953; [3] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, 1932 (有英译本); [4] Collected works of J. von Neumann II, III, Pergamon, 1961; [5] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932; [6] B. Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Springer, 1942; [7] F. Riesz-B. Sz. Nagy, Leçons d'analyse fonctionelle, Akademiai Kaidó, Budapest, 第三版, 1955 (中译本：F. 黎茨，B. 塞克佛尔维-纳吉，泛函分析讲义，第一卷，科学出版社，1963); [8] Н. И. Ахиезер-И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Москва, «Наука», 1966; [9] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [10] 吉田耕作，ヒルベルト空間論，共立出版，1955; [11] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, 第二版 1957; [12] H. Meschkowski, Hilbertsche Räume mit Kernfunktion, Springer, 1962; [13] B. Sz. Nagy-C. Foias, Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert, Masson, 1967; [14] P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, van Nostrand, 1967.

Banach 空间 [英 Banach space 法 espace de Banach 德 Banachraum 俄 пространство Банаха 日 バナッハ空間] 所谓 **Banach 空间**，是为了用拓扑的和代数的方法，把分析学的基本问题，作为无限维函数空间中的映射问题加以研究，而由 Banach 和 Wiener 各自独立地引进的空间 (1922) (→函数空间，线性算子，Hilbert 空间)．

【Banach 空间的定义】 设对实数(或复数)域上的线性空间† X 的每个元 x，有一实数 $\|x\|$ 与之对应，且满足下列三个条件：i) $\|x\|\geqslant 0$，并且 $\|x\|=0$ 和 $x=0$ 是等价的；ii) 对于实数 (或复数) α，有 $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$；iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$．这时，称 $\|x\|$ 为 x 的**范数** (norm)，而称 X 为**赋范空间** (normed linear space)．范数是 Euclid 空间的向量 x 的长度概念的推广．赋范空间 X 由距离 $\rho(x,y)=\|x-y\|$ 形成度量空间，把 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ 写做 $\text{s-}\lim_{n\to\infty}x_n=x$ (**强收敛** (strong convergence)，简写为 $x_n\to x$)，就可以在 X 内引进收敛概念．此时，如果 X 是完备†度量空间，则称 X 为 **Banach 空间**．

例：函数空间 $C,L_p(1\leqslant p<\infty),M,c,l_p,m,A_p,W_p^l,H_0^l,BV$ 等都是 Banach 空间的例(→函数空间)．

在赋范空间中，当 $\alpha_n\to\alpha$，$\beta_n\to\beta$，$x_n\to x$，$y_n\to y$ 时，

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty}(\alpha_n x_n+\beta_n y_n)=\alpha x+\beta y$$

成立. 即使把前面的 ii) 式减弱为 ii') $\|-x\| = \|x\|$ 且当 $\alpha_n \to \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ 时, 有 $\lim \|\alpha_n x_n - \alpha x\| = 0$, 上面这个极限式仍然成立. 满足 i) ii') iii) 的 $\|x\|$ 称为 x 的**拟范数** (quasi-norm); **拟赋范空间** (quasi-normed linear space) X 关于距离 $\rho(x, y) = \|x - y\|$ 为完备时,就称为 **Fréchet 空间** (Fréchet space). (N. Bourbaki 把同时是完备拟赋范空间和局部凸†拓扑线性空间†的 X 称为 Fréchet 空间[6].) 在闭区间 $[0,1]$ 上几乎处处有限的(实值或复值)可测函数 $x(t)$ 形成的空间 $S(0,1)$

$$\left(\|x\| = \int_0^1 |x(t)|(1 + |x(t)|)^{-1} dt\right)$$

是 Fréchet 空间的典型例子.

Fréchet 空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为 X 的一个**基** (basis 或 base), 如果对于每个 $x \in X$, 存在唯一的实数(或复数)序列 $\{\alpha_\nu\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu \right\| = 0.$$

在分析中出现的许多可分 Fréchet 空间是有基的 [10], 然而也存在没有基的 Banach 空间 [11].

【线性算子和线性泛函】 以线性空间 X 的线性子空间 $D(T)$ 为定义域, 取值于线性空间 X_1 的映射 T, 当它满足 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ 时, 就称为**线性算子** (linear operator). 特别当 T 的值域 $R(T) = \{Tx \in X_1 | x \in D(T)\}$ 是实数(或复数)域的子集时, 我们称 T 为**线性泛函** (linear functional). 若 X, X_1 是拟赋范空间, 则 T 的连续性由 $\text{s-}\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$ (当

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

时)定义. 当 X, X_1 都是赋范空间时, 线性算子 T 的连续性等价于条件 $\sup_{x \in D(T), \|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$. 又当 $D(T) = X$ 时, 线性算子 T 的连续性等价于 $\|Tx\|$ 在 $\|x\| \leq 1$ 上有界. 此时称 T 为 X 上的**有界线性算子** (bounded linear operator), 并称 $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ 为 T 的**范数** (norm). 线性算子的和, α 倍与乘积分别用 $(T + S)x = Tx + Sx$, $(\alpha T)x = \alpha(Tx)$, $(ST)x = S(Tx)$ 来定义. 对一切 $x \in X$ 使得 $Ix = x$ 的 I 称为 X 的**单位算子** (unit operator) 或**恒等算子** (identity operator). 当映射 $x \to Tx$ 具有逆映射时, 我们把逆映射写作 T^{-1}, 称它为 T 的**逆算子** (inverse operator).

【对偶空间和对偶算子】 在赋范空间 X 上定义的连续线性泛函 f 的全体, 依前述的线性运算和范数 $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ 形成 Banach 空间 X'. 称 X' 为 X 的**对偶空间** (dual space) 或**共轭空间** (conjugate space). 由于 Hilbert 空间中内积的有用性质, 把 $f(x)$ 写做 $\langle x, f\rangle$ 往往是方便的. 设 X, Y 为赋范空间, 线性算子 T 的定义域 $D(T)$ 在 X 内稠密†, T 的值域 $R(T) \subset Y$. 此时, 如果对一切 $x \in D(T)$ 使得 $\langle Tx, f\rangle = \langle x, g\rangle$ 成立的 $f \in Y'$, $g \in X'$ 存在, 则 g 由 f 唯一决定. 由 $T'f = g$ 所定义的线性算子 T', 称为 T 的**对偶算子** (dual operator) 或**共轭算子** (conjugate operator). 这是矩阵运算中的转置矩阵概念的推广, 当 T 为有界算子时, T' 也是有界算子, 且 $\|T'\| = \|T\|$ 成立.

【强拓扑和弱拓扑】 在赋范空间 X 的对偶空间 X' 内任取有限个 $x_1', x_2', \cdots x_n'$, 考虑形如 $\{x \in X | \sup_{1 \leq j \leq n} |\langle x, x_j'\rangle| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ 的集合, 如果把 X 的这样的子集的全体作为 X 的 0 的基本邻域系†, 则 X 形成局部凸†拓扑线性空间†. 我们把这个拓扑空间记作 X_w, 称此拓扑为 X 的**弱拓扑** (weak topology). 点列 $\{x_n\}$ 关于弱拓扑收敛于 x 时称为**弱收敛** (weak convergence), 写做 $\text{w-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 相对于弱拓扑, 由原来的范数所确定的拓扑称为 X 的**强拓扑** (strong topology), 为了强调用强拓扑来考虑, 有时把 X 写做 X_s. 在 X 内任取有限个 $x_1, x_2, \cdots x_n$, 考虑形如 $\{x' \in X' | \sup_{1 \leq j \leq n} |\langle x_j, x'\rangle| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ 的集合, 如果把 X' 的这样的子集的全体作为 X' 的 0 的基本邻域系, 则 X' 形成局部凸拓扑线性空间. 我们把这个拓扑空间记作 X'_{w*}, 称此拓扑为 X' 的**泛函弱拓扑** (weak topology as functionals). 由范数 $\|f\|$ 确定的 X' 的拓扑称为

X' 的强拓扑,为了明确表示用这种拓扑来考虑,有时把 X' 写做 X'_s.

【Hahn-Banach 扩张定理】 1) 设M为赋范空间X的线性子空间，则对任意的 $f_1 \in M'$，能作一 $f \in X'$，使得对于任意的 $x \in M$，恒有

$$f(x) = f_1(x),$$

且 $\|f\| = \|f_1\|$. 2) 对赋范空间X的任一元 $x_0 \neq 0$,存在 $f_0 \in X'$，使得 $f_0(x_0) = \|x_0\|$，且有 $\|f_0\| = 1$. 3) 对赋范空间 X 的闭线性子空间M和 $x_0 \in X - M$，存在 $f_0 \in X'$,使得 $f_0(x_0) > 1$，$\|f_0\| \leqslant d^{-1}$，且当 $x \in M$，恒有 $f_0(x) = 0$. 此式中 $d = \sup_{m \in M} \|x_0 - m\|$. 以上这些命题统称为 **Hahn-Banach 扩张定理**(Hahn-Banach extension theorem). 比 3) 更为一般的 **Mazur 定理**也很有用. 这条定理是: 4) 设赋范空间X的闭集M为凸集(若 $x, y \in M$，则当 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 时，有 $\alpha x + (1-\alpha) y \in M$)，并设它是**球形的**(英 balanced，法 equilibré (Bourbaki 学派的术语))，即当 $|\alpha| \leqslant 1$，$x \in M$ 时，$\alpha x \in M$ 成立. 此时对 $x_0 \notin M$，存在 $f_0 \in X'$，使得 $f_0(x_0) > 1$，且 $\sup_{x \in M} |f_0(x)| \leqslant 1$. 由这些定理可得,例如，如果赋范空间的凸集$M$在强拓扑下是闭集，则它在弱拓扑下也是闭集.又对于有界实数序列$\{\xi_n\}$，可以证明存在**广义极限** (generalized limit) $\operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n$，使得 $\liminf_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} \xi_n$，并且 $\operatorname{Lim}_{n\to\infty}(\alpha\xi_n + \beta\eta_n) = \alpha \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \xi_n + \beta \operatorname{Lim}_{n\to\infty} \eta_n$ 成立,这是 1) 的一个应用.

【Banach 空间的对偶性】 取赋范空间X的元 x_0，由 $\langle x_0, x' \rangle = \langle x', x_0'' \rangle$ (对一切 $x' \in X'_s$) 确定 $(X'_s)'$ 的元 x_0''. 如果令 $x_0'' = Jx_0$，则 J 是线性算子,且由前述的 2)，得 $\|Jx\| = \|x\|$，从而 X_s 和 $(X'_s)'_s$ 的一个线性子空间(作为赋范空间)等距同构 (isomorphic). 特别当 X_s 能认为与 $(X'_s)'_s$ 等同时，X称为**自反的** (reflexive) 或**正则的** (regular). 赋范空间X是自反的充分必要条件是: X是 Banach 空间,并且X的依范数有界的点列 $\{x_n\}$ 含有一个子序列，它弱收敛(即依弱拓扑收敛)于X的某一点 (**Eberlein-Шмульян 定理**). 一个赋范空间称为**一致凸的** (uniformly convex)，如果对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$，使得当 $\|x\| \leqslant 1$，$\|y\| \leqslant 1$ 并且 $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ 时，$\|x + y\| \leqslant 2 - \delta$ 成立. 空间 L_p $(1 < p < \infty)$ 是一致凸的. 一致凸的 Banach 空间是自反的 (**Мильман 定理**).

【共鸣定理】 对于由 Banach 空间X到赋范空间 Y 的有界算子序列 $\{T_n\}$，如果对一切 $x \in X$，有 $\sup_n \|T_n x\| < \infty$，则 $\sup_n \|T_n\| < \infty$ 成立. 这称为**共鸣定理** (resonance theorem). 作为此定理的推论，当 $\{x_n\}$ 是X的弱收敛序列时,就有 $\sup_n \|x_n\| < \infty$ 成立. 又集合

$$\{x \in X \mid \limsup_{n\to\infty} \|T_n x\| < \infty\}$$

或者与X相同，或者是X的一个第一范畴的子集.这也为讨论呈现种种奇异性的函数(例如其 Fourier 级数在一个具有连续统的基数的完备集上发散的连续函数)的存在性给出了一般的原理，即所谓**奇异性凝聚原理** (principle of the condensation of singularities). 又给定由 Banach 空间X到 Fréchet 空间 $S(\Omega)$ 的有界线性算子的一个序列$\{T_n\}$,使当 x 属于X的一个固定的第二范畴的子集时,$\limsup_{n\to\infty} |(T_n x)(t)| < \infty$ 对几乎所有 $t \in \Omega$ 成立,则使有限的 $\lim_{n\to\infty}(T_n x)(t)$ 在Ω上几乎处处存在的 x 的全体所成的集合，或者与X相同，或者是X的一个第一范畴的子集 (**Banach-Mazur 收敛定理** (Banach-Mazur convergence theorem)). 这一定理在正交函数论和遍历理论中起着重要作用.

【开映射定理及闭图象定理】 由 Fréchet 空间X到 Fréchet 空间Y上的连续线性映射把X的开集映射为Y的开集. 这称为**开映射定理** (open mapping theorem).作为此定理的应用,可以得到**闭图象定理**(closed graph theorem): 设线性算子 T 是由 Fréchet 空间X到 Fréchet 空间Y内的**闭算子** (closed operator)，即 $\text{s-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} Tx_n = y$ 蕴涵 $Tx = y$，则T是连续的. 特别地，这一定理在现代线性偏微分方程的研究中起着重要的作用.

【闭值域定理】 设 X，Y 为 Banach 空间，

T 为闭算子，其定义域 $D(T)$ 在 X 内稠密，而其值域 $R(T)\subset Y$. 这时下列四个条件是互相等价的：1) $R(T)$ 是 Y 的闭集. 2) $R(T')$ 是 X' 的闭集. 3) $R(T)=\{y\in Y\mid$ 对所有使得 $T'y^*=0$ 的 $y^*\in Y'$, $\langle y,y^*\rangle=0\}$. 4) $R(T')=\{x^*\in X'\mid$ 对所有使得 $Tx=0$ 的 $x\in X,\langle x,x^*\rangle=0\}$. 以上所述汇总起来称为**闭值域定理** (closed range theorem). 作为它的推论，有 5) 为使 $R(T)=Y$ 成立的充分必要条件是 T' 具有连续逆算子. 6) 为使 $R(T')=X'$ 成立的充分必要条件是 T 具有连续逆算子.

Hahn-Banach 扩张定理，共鸣定理，开映射定理，闭图象定理，闭值域定理等组合起来，构成了 Banach 空间论，这些定理都可以推广到各种类型的局部凸拓扑线性空间，这不仅使分析学中许多基本问题能够用现代的方法去处理，而且使泛函分析本身的理论得到发展，为分析学的这个分支开创了新的研究方向（→拓扑线性空间；关于 Banach 空间上的线性算子→紧算子，特征值问题，线性算子）.

【Banach 空间的插值】 Riesz-Thorin 和 Marcinkiewicz-Hunt 插值定理（→函数空间）已被推广到把一个 Banach 空间对映到另一个 Banach 空间对的任意的线性算子的情形.

设 (X_0,X_1) 是 Banach 空间对，使得这些空间可连续嵌入到一个 Hausdorff 拓扑线性空间中. 这样的一个对，就称为一个**插值偶** (interpolation couple). 此时空间 $X_0\cap X_1$ 和 X_0+X_1 在范数

$$\|x\|_{X_0\cap X_1}=\max\{\|x\|_{X_0},\|x\|_{X_1}\},$$

$$\|x\|_{X_0+X_1}=\inf\{\|x_0\|_{X_0}+\|x_1\|_{X_1}\mid x=x_0+x_1\}$$

之下，是 Banach 空间.

称一个 Banach 空间 X 对于此插值偶是一个**中间空间** (intermediate space)，如果它满足

$$X_0\cap X_1\subset X\subset X_0+X_1,$$

且都是连续嵌入. 一个**插值方法** (interpolation method) 是一个函子[†]，它对于每个插值偶 (X_0,X_1)，指定一个中间空间 X，称 X 为**插值空间** (interpolation space). 插值方法有两种重要的类型，即复方法和实方法，它们分别对应于 Riesz-Thorin 定理和 Marcinkiewicz-Hunt 定理.

复方法 (complex method) 属于 A. P. Calderón [8], С. Г. Крейн 和 J.-L. Lions.

设 $F(X_0,X_1)$ 是所有满足下列条件的函数 $f(\zeta)(\zeta=\xi+i\eta)$ 所成的空间；$f(\zeta)$ 在带形 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 中有定义，取值于 X_0+X_1 中，在 $0<\xi<1$ 内全纯，在 $0\leqslant\xi\leqslant1$ 上连续且有界，并使得 $f(i\eta)$ 是一个取值于 X_0 中的连续有界函数，$f(1+i\eta)$ 是一个取值于 X_1 中的连续有界函数. $F(X_0,X_1)$ 在范数

$$\|f\|_{F(X_0,X_1)}=\max\{\sup\|f(i\eta)\|_{X_0},\sup\|f(1+i\eta)\|_{X_1}\}$$

之下，是一个 Banach 空间.

复插值空间 (complex interpolation space) $[X_0,X_1]_\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant1)$ 定义为 $f\in F(X_0,X_1)$ 的值 $f(\theta)$ 的空间，具有范数

$$\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta}=\inf\{\|f\|_{F(X_0,X_1)}\mid x=f(\theta)\}.$$

$[X_0,X_1]_\theta$ 是一个中间空间，$X_0\cap X_1$ 在 $[X_0,X_1]_\theta$ 是稠密的，并且下面的**插值定理** (interpolation theorem) 成立：设 (X_0,X_1), (Y_0,Y_1) 是两个插值偶，$T:X_0+X_1\to Y_0+Y_1$ 是一个线性算子，使得

$$\|Tx\|_{Y_i}\leqslant M_i\|x\|_{X_i},\ x\in X_i,\ i=0,1,$$

则 T 把 $[X_0,X_1]_\theta$ 映射到 $[Y_0,Y_1]_\theta$ 中，且

$$\|Tx\|_{[Y_0,Y_1]_\theta}\leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|x\|_{[X_0,X_1]_\theta},$$
$$x\in[X_0,X_1]_\theta.$$

假设 $X_0\cap X_1$ 在 $X_{\theta_0}\cap X_{\theta_1}$ 内稠密，这里

$$X_{\theta_0}=[X_0,X_1]_{\theta_0},\ X_{\theta_1}=[X_0,X_1]_{\theta_1},$$
$$0\leqslant\theta_0\leqslant\theta_1\leqslant1,$$

则 $[X_{\theta_0},X_{\theta_1}]_{\theta'}=[X_0,X_1]_\theta$，其中 $\theta=(1-\theta')\theta_0+\theta'\theta_1$（**反复定理** (reiteration theorem)).

假设 $X_0\cap X_1$ 在 X_0 和 X_1 内都是稠密的，那么 $[X_0,X_1]_\theta$ 的对偶是空间 $[X_0',X_1']^\theta$，这个空间类似地由 $(X_0\cap X_1)'$ 中的插值偶 (X_0',X_1') 构造出来，且若 X_0' 及 X_1' 之一是自反的，则它与 $[X_0',X_1']_\theta$ 相同(**对偶性定理** (duality theorem)).

如果空间 X_0 和 X_1 之一是自反的，那么 $[X_0,X_1]_\theta\,(0<\theta<1)$ 也是自反的.

设 $1\leqslant p_0\leqslant p_1\leqslant\infty$, $0<\theta<1$，则我们有

$$[L_{p_0}(\Omega), L_{p_1}(\Omega)]_\theta = L_p(\Omega),$$

这里 $$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

这证明了,Riesz-Thorin 定理是插值定理的一个推论. **实插值空间** (real interpolation space)是由 Lions 作为迹空间并由 E. Gagliardo 用不同的方法引进的，两者都在 1959 年. 这些工作开创了算子插值的现代理论. 后来 Lions 和 J. Peetre [9] 引进了平均空间并且证明了这些不同的定义是等价的.

当 X 是 Banach 空间且 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 时，以 $L_p^*(X)$ 表示取值于 X 中的使得 $\|f\|_{L_p^*(X)} < \infty$ 的 $(0,\infty)$ 上强可测函数 f 所成的空间,这里

$$\|f\|_{L_p^*(X)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \|f(t)\|_X^p dt/t\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{0<t<\infty} \|f(t)\|_X, & p = \infty. \end{cases}$$

设 (X_0, X_1) 是 Banach 空间的一个插值偶，对于 $0<\theta<1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, **平均空间** (mean space) $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ (或者用 [9] 中的符号, $s(p, \theta, X_0; p, \theta-1, X_1)$)定义为在 X_0+X_1 中,平均值

$$x = \int_0^\infty u(t)\,dt/t$$

所成的空间，这里 $u(t)$ 在取值于 $X_0 \cap X_1$ 中的强可测函数所成的空间上变化,且使得

$$\|t^\theta u(t)\| L_p^*(X_0) < \infty,$$

$$\|t^{\theta-1} u(t)\| L_p^*(X_1) < \infty;$$

或者等价地 (Pee c), 使得

$$\|t^\theta u(t)\|_{L_{p_0}^*(X_0)} < \infty,$$

$$\|t^{\theta-1} u(t)\|_{L_{p_1}^*(X_1)} < \infty;$$

其中

(1) $$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

$(X_0,X_1)_{\theta,p}$ 在范数

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}^S} = \inf\left\{\max\{\|t^\theta u(t)\|_{L_p^*(X_0)}, \|t^{\theta-1}u(t)\|_{L_p^*(X_1)}\} \,\middle|\, x = \int u(t)\,dt/t\right\}$$

之下,是一个 Banach 空间.

元 $x \in X_0 + X_1$ 属于 $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ 当且仅当存在 $(0,\infty)$ 上的函数 $v_0(t)$ 和 $v_1(t)$, 使得关于 t

$x = v_0(t) + v_1(t)$ a.e., 且

$$\|t^\theta v_0(t)\|_{L_{p_0}^*(X_0)} < \infty,$$

$$\|t^{\theta-1} v_1(t)\|_{L_{p_1}^*(X_1)} < \infty,$$

这里 p_0, p_1 和 p 满足 (1). 范数 $\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}^S}$ 等价于范数

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}^{\underline{S}}} = \inf\{\max\{\|t^\theta v_0(t)\|_{L_p^*(X_0)}, \|t^{\theta-1}v_1(t)\|_{L_p^*(X_1)}\} \mid x = v_0(t) + v_1(t), \text{对几乎所有 } t\}.$$

当 $x \in X_0 + X_1$, $0 < t < \infty$ 时,定义

$$K(t,x) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t^{-1}\|x_1\|_{X_1} \mid x = x_0 + x_1\}$$

(用 Peetre 的符号, $= K(t^{-1}, x)$). 容易证明, $K(t,x)$ 是连续函数且 $\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}^S}$ 等价于

$$\|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}^K} = \|t^\theta K(t,x)\|_{L_p^*}.$$

这时 $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ 显然是一个中间空间.

设 (X_0,X_1) 及 (Y_0,Y_1) 是两个插值偶, T: $X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ 是一个线性算子，使得

$$\|Tx\|_{Y_i} \leqslant M_i\|x\|_{X_i},\ x \in X_i,\ i = 0, 1,$$

则 T 把 $(X_0,X_1)_{\theta,p}$ 映射到 $(Y_0,Y_1)_{\theta,p}$ 中，并且

$$\|Tx\|_{(Y_0,Y_1)_{\theta,p}^*} \leqslant M_0^{1-\theta}M_1^\theta \|x\|_{(X_0,X_1)_{\theta,p}^*}, \quad x \in (X_0, X_1)_{\theta,p},$$

这里 * 是 S, $\underline{S}$ 和 K 中的任一个(**插值定理**(interpolation theorem)).

如果 $1 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant \infty$, 那么 $(X_0,X_1)_{\theta,p_0} \subset (X_0, X_1)_{\theta,p_1}$, 且这个嵌入是连续的. 如果 $X_0 \supset X_1$, $\theta_0 < \theta_1$, 那么对任意的 p 和 q, $(X_0, X_1)_{\theta_0,p} \supset (X_0,X_1)_{\theta_1,q}$ 成立. 再者,对于 $1 \leqslant p < \infty$, $X_0 \cap X_1$ 在 $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ 内是稠密的(**稠密性定理**) (density theorem)).

假设 X 是一个中间空间,那么 $(X_0,X_1)_{\theta,1} \subset X$ 成立当且仅当

$$\|x\|_X \leqslant C\|x\|_{X_0}^{1-\theta}\|x\|_{X_1}, \quad x \in X_0 \cap X_1.$$

类似地, $X \subset (X_0,X_1)_{\theta,\infty}$ 成立当且仅当

$$t^\theta K(t,x) \leqslant C\|x\|_X, \quad x \in X;$$

或等价地，对于每个 $x \in X$ 和 $0 < t < \infty$,

存在 $x_i \in X_i$，使得 $x = x_0 + x_1$ 且

$\|x_0\|_{X_0} \leqslant Ct^{-\theta}\|x\|_X$，$\|x_1\|_{X_1} \leqslant Ct^{1-\theta}\|x\|_X$.

我们说 X 是 $K_\theta(X_0, X_1)$ **类**的，如果

$$(X_0, X_1)_{\theta,1} \subset X \subset (X_0, X_1)_{\theta,\infty}.$$

复插值空间 $[X_0, X_1]_\theta$ 是 $K_\theta(X_0, X_1)$ 类的 Banach 空间的一个例子.

假设 Y_0 是 $K_{\theta_0}(X_0, X_1)$ 类的，Y_1 是 $K_{\theta_1}(X_0, X_1)$ 类的，其中 $\theta_0 < \theta_1$，那么

$$(Y_0, Y_1)_{\theta',p} = (X_0, X_1)_{\theta,p},$$

这里

$$\theta = (1 - \theta')\theta_0 + \theta'\theta_1,$$

并且这两个空间具有等价的范数(反复定理).

假设 $X_0 \cap X_1$ 在 X_0 和 X_1 内都是稠密的，且 $1 \leqslant p < \infty$，那么 $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ 的对偶与 $(X_0', X_1')_{\theta,p'}$ 是等同的，这里 $p^{-1} + p'^{-1} = 1$（对偶性定理）(Lions, Lions 和 Peetre).

如果 X_0 和 X_1 中之一是自反的，那么对任意的 $0 < \theta < 1$ 和 $1 \leqslant p < \infty$，$(X_0, X_1)_{\theta,p}$ 是自反的 (H. Morimoto（森本光生）).

设 $m > 0$ 是一个整数，$1 \leqslant p_i \leqslant \infty$，$\alpha_0$，$\alpha_1$ 是实数，用 $U^m(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ 表示定义在 $(0, \infty)$ 上，取值于 $X_0 + X_1$ 中，且使得

$$\|t^{\alpha_0}u(t)\|_{L^*_{p_0}(X_0)} < \infty,$$

$$\|t^{\alpha_1+m}u^{(m)}(t)\|_{L^*_{p_1}(X_0)} < \infty$$

的函数 $u(t)$ 所成的空间，这里 $u^{(m)}$ 是 u 的在广义函数意义下的 m 阶导数.

假设 $j \geqslant 0$ 是一个整数，$\alpha_0 + j > 0$，$\alpha_1 + j < 0$，那么对任意的 $u \in U^m$ $(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$，**迹**(trace) $u^{(j)}(0)$ 存在，**迹空间** (trace space) $T_j^m(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$（用 Lions-Peetre [9] 的符号，$= T_j^m(p_0, \alpha_0 + p_0^{-1}, X_0; p_1, \alpha_1 + p_1^{-1} - m, X_1)$）定义为对于 $u \in U^m(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ 的迹 $u^{(j)}(0)$ 所成的空间，赋以范数

$$\|x\|_{T_j^m(p_0,\alpha_0,X_0;p_1,\alpha_1,X_1)} = \inf\{\max\{\|t^{\alpha_0}u\|_{L_p^*(X_0)}, \|t^{\alpha_1+m}u^{(m)}\|_{L^*_{p_1}(X_1)}\} \mid x = u^{(j)}(0)\}.$$

迹空间 $T_j^m(p_0, \alpha_0, X_0; p_1, \alpha_1, X_1)$ 与平均空间 $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ 重合，这里

$$\theta = \frac{\alpha_0 + j}{\alpha_0 - \alpha_1}, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

并且这两个空间具有等价的范数(**迹定理** (trace theorem); Lions 和 Peetre, P. Grisvard).

设 Ω 是 σ 有限测度空间. 对于 Ω 上的每个可测函数 f，平均函数 $f^{**}(t)$（→函数空间）与对于偶 $(L_\infty(\Omega), L_1(\Omega))$ 的 $K(t, f)$ 是相等的. 因而，Lorentz 空间 $L_{(p,q)}(\Omega)$ $(1 < p < \infty$，$1 \leqslant q \leqslant \infty)$ 与实插值空间 $(L_\infty(\Omega), L_1(\Omega))_{p^{-1},q}$ 重合. 特别地，对于线性算子的 Marcinkiewicz-Hunt 定理由实插值定理推出 (Peetre, Calderón).

Banach 空间 X 和 X 中的线性算子 A 的幂的区域 $D(A^m)$（赋予图象范数）的实插值空间也是重要的. 情形 A: A 是闭线性算子，使得对于 $0 < \lambda < \infty$，预解式 $(\lambda + A)^{-1}$ 存在，并满足

$$\|(\lambda + A)^{-1}\| \leqslant M\lambda^{-1};$$

情形 B: $-A$ 生成一个等度连续的 C^0 类半群 T_t; 情形 C: $-A$ 生成一个在扇形 $|\arg t| < \omega$ 上有界的全纯半群.

Lions 和 Peetre 讨论了情形 B; Grisvard 和 H. Komatsu（小松彦三郎）讨论了情形 A; H. Berens 和 P. L. Butzer, Komatsu（小松）讨论了情形 C.

设 $0 < \sigma < m$，m 是一个整数，那么 x 属于 $(X, D(A^m))_{\sigma/m,p}$ 当且仅当

$\lambda^\sigma(A(\lambda + A)^{-1})^m x \in L_p^*(X)$，情形 A, B 和 C;

$t^{-\sigma}(1 - T_t)^m x \in L_p^*(X)$，情形 B 和 C;

$t^{-\sigma+m}A^m T_t x \in L_p^*(X)$，　情形 C.

再者，$(X, D(A^m))_{\sigma/m,p}$ 不依赖于 $m > \sigma$.

设 $0 < k < \sigma$，k 是整数(或者，当 $D(A)$ 稠密时，k 是有理数)，那么 $x \in (X, D(A^m))_{\sigma/m,p}$ 当且仅当 $x \in D(A^k)$ 且

$$A^k x \in (X, D(A^m))_{(\sigma-k)/m,p}.$$

Berens 和 Butzer 还考虑了满足 $\sigma = m$ 时的上述条件的元 x.

当 $A = -\Delta$（在 $L_p(\boldsymbol{R}^n)$ 中）时，上述命题给出了 C. M. Никольский, O. B. Бесов 和 M. H. Taibleson 所考虑的分数 Соболев 空间中的元的种种等价的刻划.

把它和 L_p空间的插值联系起来，我们不难得到分数 Соболев 嵌入定理（Grisvard, Peetre, 吉川敦）.

【参】［1］S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932 (Chelsea, 1963)；［2］E. Hille-R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1957(中译本：E. 希尔，R. S.菲列浦斯，泛函分析与半群(上册)，上海科学技术出版社，1964)；［3］N. Dunford-J. Schwartz, Linear operators I, Interscience, 1958；［4］K. Yosida(吉田耕作)，Functional analysis, Springer, 1965；［5］吉田耕作，位相解析，岩波，1951；［6］N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques, Actualités Sci. Ind., 1189a, 1229b, 1230a, Hermann, 1966, 1967, 1955；［7］A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, John Wiley, 1958；［8］A. P. Calderón, Intermediate spaces and interpolation, the complex method, Studia Math., **24** (1964), 113—190；［9］J. -L. Lions-J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ. Math. Inst. HES, no. 19, 1964, 5—68；［10］I. Singer, Bases in Banach spaces I, Springer, 1970；［11］P. Enflo, A counter example to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., **130** (1973), 309—317.

有序线性空间［英 ordered linear space 法 espace semi-ordonné linéaire 德 geordneter linearer Raum 俄 упорядоченное линейное пространство 日 順序線形空間］［定义］设E是以实数域为系数域的线性空间†，并且由序关系$\geqslant$构成有序集†，当其间存在下列关系 1) 2) 时，就称E为**有序线性空间**：1) $x\geqslant y\Rightarrow x+z\geqslant y+z$；2) $x\geqslant y, \lambda\geqslant 0$ (λ为实数) $\Rightarrow \lambda x\geqslant \lambda y$. 进一步当$E$在这个序关系下是格†时，就称$E$为**格序线性空间**（lattice-ordered linear space）或**向量格**（vector lattice）. 本条专门讨论向量格，对$x, y\in E$，它们的并和交依次表为$x\cup y$和$x\cap y$. 由 1) 和 2)，得 3) $(x+z)\cup(y+z)=x\cup y+z$；4) $(\lambda x)\cup(\lambda y)=\lambda(x\cup y)(\lambda\geqslant 0)$；5) $(\lambda x)\cup(\lambda y)=\lambda(x\cap y)\ (\lambda<0)$；在 3), 4), 5) 式中，把$\cup$和$\cap$交换，公式仍然成立. 又$E$形成分配格†. $x\cup 0=x_+$, $(-x)\cup 0=x_-$, $x\cup(-x)=|x|$分别称为x的**正部分**（positive part），**负部分**（negative part），**绝对值**（absolute value）. 此时恒等式$x=x_+-x_-$（**Jordan 分解**（Jordan decomposition）），$|x|=x_++x_-$, $x_+\cap x_-=0$成立. 进一步$x+y=x\cup y+x\cap y$, $|\lambda x|=|\lambda||x|$, $|x-y|=x\cup y-x\cap y$等类似于实数情形的法则成立. 对于$a,b\in E$ $(a\leqslant b)$，$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为**区间**（interval），用$[a,b]$表示. 若$E$的子集$F$是某一区间的子集，则称它在$E$内（在序的意义下）**有界**（bounded）. 设e为E的一个元，如果对E的任一元，$x\geqslant 0$，存在自然数n，使$x\leqslant ne$成立，则称e为E的（Archimedes 的）**单位**（unit）.

【顺序极限】对于E的有限个或无穷个元所成的族$\{x_\alpha\}$，当它的上界的最小元x存在时，即$x\in E$是$\{x_\alpha\}$的一个上界且$\{x_\alpha\}$的任一上界y满足$y\geqslant x$时，就称此x为$\{x_\alpha\}$的**上确界**（least upper bound），用$\sup\limits_\alpha x_\alpha$或$\bigcup\limits_\alpha x_\alpha$表示. 对应地定义**下确界**（greatest lower bound），并用$\inf\limits_\alpha x_\alpha$或$\bigcap\limits_\alpha x_\alpha$表示. 对于点列$\{x_n\}(x_n\in E)$，若存在单调递减点列$\{u_n\}(u_n\in E)$，满足$|x_n-x|\leqslant u_n$, $\bigcap\limits_n u_n=0$，则称$\{x_n\}$**顺序收敛**（order convergent）于x，称x为x_n的**顺序极限**（order limit），写作$x=\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 当$x_n$, y_n顺序收敛时，$\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n+\mu y_n)=\lambda(\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n)+\mu(\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}y_n)$, $\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \overset{\cup}{\cap} y_n)=(\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n)\overset{\cup}{\cap}(\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}y_n)$成立. 当$x,y\in E$，如果$0\leqslant nx\leqslant y$ $(n=1,2,\cdots)$蕴涵$x=0$，则E称为 **Archimedes 的**（Archimedean）. 当E为 Archimedes 的，则$x=\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$蕴涵$\lambda x=\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n x_n$.

如果E的任一上方有界的子集总存在上确界，则称E为**完备的**（complete）；当上述的子集限于可数集时，称为**σ完备的**（σ-complete）. σ完备的向量格是 Archimedes 的. 当E为σ完备时，如果对于上方有界族$\{x_n\}$定义

$$\text{o-}\lim_{n\to\infty}\sup x_n=\bigcap_n\bigcup_{m\geqslant n}x_m,$$

对于下方有界族$\{x_n\}$定义

$$\text{o-}\lim_{n\to\infty}\inf x_n=\bigcup_n\bigcap_{m\geqslant n}x_m,$$

则 $x=\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n$和$x=\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n=\text{o-}\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n$

是等价的．和基于分割由有理数构成无理数一样，Archimedes 向量格可以扩张为完备向量格．

【向量格的例】 多数的具体的数列空间† 如 c, m, $l_p(p\geqslant 1)$ 等以及函数空间†如 C, M, $L_p(p\geqslant 1)$ 等，按照自然的序(即当这些空间的一个元在每个点处都≥0时，就定义它为≥0)形成向量格(→函数空间)．在这些空间中，c, C 不是 σ 完备的，其他都是完备的． 对定义在集合 Ω 的子集的一个完全加法族† Σ 上的有限完全加性集函数† μ 的全体 $A(\Omega,\Sigma)$，定义 $\mu_1\geqslant\mu_2$，如果对于属于 Σ 的一切 S, $\mu_1(S)\geqslant\mu_2(S)$ 成立． 这时 $A(\Omega,\Sigma)$ 成为完备向量格． 又对 Hilbert 空间 H 上的有界对称算子† T 的全体，定义 $T_1\geqslant T_2$，如果对 H 的任意元 x, $(T_1x,x)\geqslant(T_2x,x)$ 成立．这时它形成有序线性空间，但一般说不是向量格．但是如果 $\mathfrak{A}$ 为 H 的交换 C^* 代数†，$\mathfrak{S}$ 为属于 $\mathfrak{A}$ 的对称算子的集合，则 $\mathfrak{S}$ 在上述序关系下形成完备向量格． 又对上面的 $A(\Omega,\Sigma)$ 以及 $\mathfrak{S}$，减弱有限或有界的条件，同样的事实也成立． 把 $A(\Omega,\Sigma)$ 中的 Radon-Nikodym 定理†和 $\mathfrak{S}$ 内对称算子的谱分解†定理推广到一般向量格，就能得到一般向量格的谱表示†定理．→[3]，[8]，[12]，[13]．

设 E_1 是定义在集 Ω 上的函数所成的线性空间并赋于自然的序．如果存在向量格 E 到 E_1 上的一个双射，它并且是线性的和序同构的，则我们把 E_1 称作 E 的一个**表示** (representation)．如果 E 有一个 Archimedes 单位且是单纯的(就是说 $\{0\}$ 和 E 是 E 的仅有的理想)，那么 E 可以表示为实数集，且使得 E 的 Archimedes 单位用数 1 表示 [3, 8, 9]．

【对偶空间】设 $\mathfrak{L}(E,F)$ 是向量格 E 到向量格 F 的序有界线性映射†的全体所成的集合，这里序有界性是指 E 的任一(在序的意义下)有界集映为 F 的有界集． 对任意的 $\varphi_1,\varphi_2\in\mathfrak{L}(E,F)$，我们定义 $\varphi_1\geqslant\varphi_2$，如果当 $x\geqslant 0$, $x\in E$ 时有 $\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)$． 在这样定义的序关系下，$\mathfrak{L}(E,F)$ 成为向量格，当 F 是完备时，$\mathfrak{L}(E,F)$ 也是完备的．一个元 $\varphi\in\mathfrak{L}(E,F)$ 称为**正算子** (positive operator)，如果 $\varphi\geqslant 0$． 如果 F 为实数集 $\boldsymbol{R}$，那么 $\mathfrak{L}(E,F)$ 是 E 上所有(序)有界线性泛函†所成的集，称它为向量格 E 的**对偶格** (dual lattice)，记作 E'． E' 是完备向量格． $f\in E'$ 的正部分 f^+，负部分 f^- 和绝对值 $|f|$，分别满足下列式子．

$$f^+(x)=\sup_{0\leqslant y\leqslant x}f(y),\ f^-(x)=-\inf_{0\leqslant y\leqslant x}f(y),$$
$$|f|(x)=\sup_{-x\leqslant y\leqslant x}f(y),$$

这里设 $x\in E$, $x\geqslant 0$．

【Banach 格】 若向量格 E 同时是 Banach 空间†，而且它的序和范数之间存在着关系

$$|x|\leqslant|y|\Rightarrow\|x\|\leqslant\|y\|,$$

则称 E 为**格序 Banach 空间** 或 **Banach 格** (Banach lattice)． 迄今为止所举的例，都是 Banach 格(对于 $A(\Omega,\Sigma)\ni\mu$，定义

$$\|\mu\|=|\mu|(\Omega)).$$

在 Banach 格中，当 $\|x_n-x\|\to 0$, $\|y_n-y\|\to 0$ 时，

$$\|x_n\mathop{\cup}_{\cap}y_n-x\mathop{\cup}_{\cap}y\|\to 0$$

成立．关于 Banach 格中两种收敛

$$x=\text{o-}\lim_{n\to\infty}x_n\ \text{和}\ \|x_n-x\|\to 0$$

的强弱的比较，各个空间有种种不同的情形．其中有一条如下的最重要的定理：$\|x_n-x\|\to 0$ 和 $\{x_n\}$ **相对一致 * 收敛** (relative uniform star convergence) 于 x 是等价的． 这里所说的相对一致*收敛是指： 对于 $\{x_n\}$ 的任意的子序列 $\{x_{n(m)}\}$，存在此子序列的一个子序列 $\{x_{n(m(l))}\}$ 和某一 $z\in E$，使 $|x_{n(m(l))}-x|<z/l$ 成立($l=1,2,\cdots$)．又在序意义下的有界集是在范数意义下的有界集，但其逆一般不成立．然而对于线性泛函，这两种有界性的概念是一致的，且 E 的序对偶与 E 的范数对偶相同． 再者，Banach 格(在序意义下或在范数意义下)的对偶仍是 Banach 格．

【抽象 M 空间、抽象 L 空间和抽象 L_p 空间】 设 E 为 Banach 格，我们考虑下列条件：

M) $x,y\geqslant 0\Rightarrow\|x\cup y\|=\max(\|x\|,\|y\|)$,

L) $x,y\geqslant 0\Rightarrow\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$,

L_p) $x\cap y=0\Rightarrow\|x+y\|^p=\|x\|^p+\|y\|^p$

$(1 < p < \infty)$

当E满足上述条件 M), L) 或 L_p)之一时，分别称它为**抽象 M 空间** (abstract M space)，**抽象 L 空间** (abstract L space)，**抽象 L_p 空间** (abstract L_p space)，并用 AM，AL，AL_p 表示. 如果一个 AM 空间E的单位球有一最大元，则称此最大元为E的**角谷静夫单位** (Kakutani unit). AM 空间，AL 空间，AL_p 空间的对偶分别是 AL 空间，具有角谷静夫单位的 AM空间和 AL_q 空间 $(1/p + 1/q = 1)$. 具有角谷静夫单位的 AM 空间能用某个紧空间Ω上的 $C(\Omega)$ 表示. AL，AL_p 可以分别用某一测度空间†Ω上的 L，L_p 表示. 这里 Banach 格的表示，是指向量格的保范表示.

在向量格E同时是拓扑线性空间†，特别是局部凸†空间的情形，关于E的拓扑收敛和序收敛之间的关系，如同 Banach 格的情形一样，作了种种研究. 关于这一点→[11].

抽象空间的理论，是把 Euclid 空间的距离抽象化而得到 Hilbert 空间，Banach 空间，拓扑线性空间等概念. 另一方面，用实数的大小关系为序作为基础而考察函数空间，就产生了有序线性空间的概念. 它的一般理论开始于 F.Riesz 在 1928 年国际数学家会议上的报告([1])，而以积分论，对称算子的谱分解，遍历理论†等格论的考察为其契机，由此发展了这种理论.

【参】 [1] F. Riesz, Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, 1928, Bologna, 3, p. 143—148; [2] F. Riesz, Sur quelques notions fondamentales dans la théorie générale des opérations linéaires, Ann. of Math., **41** (1940), 174—206; [3] H. Freudenthal, Teilweise geordnete Moduln, Proc. Akad. Amsterdam, **39** (1936), 641—655; [4] Л. В. Канторович, Lineare halbgeordnete Räume, Мат. сб., **2** (44), (1937), 121—168; [5] S. Kakutani (角谷静夫), Concrete representations of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, Ann. of Math., **42** (1941), 523—537; [6] S. Kakutani (角谷静夫), Concrete representations of abstract (M)-spaces, Ann. of Math., **42** (1941), 994—1024; [7] Б. З. Вулих, Применение теории полупорядоченных пространств к исследованию самосопряженных операторов в Гильбертором пространстве, Успехи матем. наук **12** (1957) (73) 169—172 (英译本: B. Z. Vulih, Application of the theory of partially ordered spaces to the study of self-adjoint operators in Hilbert space, Amer. Math. Soc. Transl. S. 2, vol. 16, Amer. Math. Soc., 1960, p. 382—385; [8] G. Birkhoff, Lattice theory, Amer. Math. Soc., 1948; [9] H. Nakano (中野秀五郎), Modulared semi-ordered linear spaces, Maruzen, 1950; [10] M. Day, Normed linear spaces, Springer, 1957; [11] I. Namioka, Partially ordered linear topological spaces, Amer. Math. Soc. Mem., 24, 1957; [12] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [13] 小笠原藤次郎, 束論 II, 岩波, 1948; [14] 吉田耕作, 位相解析 I, 岩波, 1951; [15] J. L. Kelley, I. Namioka, et al., Linear topological spaces, van Nostrand, 1963; [16] A. L. Peressini, Ordered topological vector spaces, Harper & Row, 1967; [17] H. H. Schaefer, Topological vector spaces, Macmillan, 1966.

拓扑线性空间 [英 linear topological space 法 espace vectoriel topologique 德 linearer topologische Raum 俄 линейное топологическое пространство 日 線形位相空間] 【定义】 如果实数域或复数域K上的线性空间†E同时是拓扑空间†，并且线性空间的基本运算 $x + y$ 和 αx $(x, y \in E, \alpha \in K)$，分别作为 $E \times E$ 和 $K \times E$ 到E中的映射是连续的，则E称为**拓扑线性空间**. 通常系数域K都假设是实数域 $\boldsymbol{R}$ 或复数域 $\boldsymbol{C}$，然而取一般的拓扑域†也是可以的. $K = \boldsymbol{R}$ 时称为**实拓扑线性空间**，$K = \boldsymbol{C}$ 时称为**复拓扑线性空间**. 拓扑线性空间是 Banach 空间的推广，是研究诸如广义函数空间等非 Banach 空间的函数空间†的重要手段.

在拓扑线性空间E内，把原点的所有邻域平移的象作为一致邻域族†，这样E就具有一致拓扑†的结构，而 $x + y$ 和 αx 关于此一致拓扑是一致连续的. 特别地，如果对一切 $x \neq 0$，存在原点的不含有 x 的邻域，则E满足 T_1 分离公理†，从而形成完全正则空间†. E的完备化† $\hat{E}$ 也是拓扑线性空间.

以下假定K为实数域或复数域，而E是满足 T_1 空间公理的K上的拓扑线性空间. E是有限维空间的充分必要条件是它具有全有界的† 0 的邻域. E的拓扑是可度量化的充分必要条件是它满足第一可数公理†.

【线性泛函】 E上的K值函数 $f(x)$ 满足 i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$，ii) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ 时，就称为**线性泛函** (linear functional) 关于E和

K 是连续的线性泛函 $f(x)$ 称为连续线性泛函.（也有人把连续线性泛函简称为线性泛函，而称线性泛函为代数线性泛函.）关于线性泛函 $f(x)$，下列三个陈述是等价的：$f(x)$ 是连续的；半空间 $\{x \in E | \Re f(x) > 0\}$ 是开集；超平面 $\{x \in E | f(x) = 0\}$ 是闭集.

【Hahn-Banach 定理】 在 E 的子空间 F 上定义的线性泛函 $f(x)$ 能扩张为 E 上的线性连续泛函的充分必要条件是：存在 E 的原点的凸邻域† V，使它和 $\{x \in F | f(x) = 1\}$ 不相交. 此外，如果 $f(x)$ 能够扩张，则至少有一个扩张 $f(x)$ 在 V 上决不取 1 的值（**Hahn-Banach 定理**）.

【对偶空间】 对 E 上的连续线性泛函的全体所成的集合 E'，由 $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ 和 $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ $(f, g \in E', \alpha \in K, x \in E)$ 定义 $f+g$ 和 αf，则 E' 也是 K 上的线性空间，称它为 E 的**对偶空间**（dual space）或**共轭空间**（conjugate space）.

【局部凸空间】 一个拓扑线性空间，如果能取凸集的一个族作为它的 0 的基本邻域系†，就称为**局部凸**（locally convex）拓扑线性空间. 由 Hahn-Banach 定理，对于局部凸空间 E 内任意的元 $x \neq 0$，存在连续线性泛函 f，使 $f(x) \neq 0$ 成立. 称 E 的子集 M 为**圆形的**（英 circled 法 equilibré），如果对于满足 $|\alpha| \leqslant 1$ 的一切 $\alpha \in K$，$M \supset \alpha M = \{\alpha x | x \in M\}$ 成立. 圆形的并且是凸的集合称为**绝对凸的**（英 absolutely convex 法 disqué）. 在局部凸空间内，可以取绝对凸闭集的一个族作为它的原点的一个基本邻域系. 对于 $A, B \subset E$，若存在某一 $\alpha > 0$ 使 $\alpha A \supset B$ 成立，则称为 A **吸收**（absorb）B. 任意 $x \in E$ 都被集合 V 吸收时，称 V 为**吸收的**（法 absorbant）. 0 的邻域是吸收的.

【半范数】 设 $p(x)$ 为定义于 E 上的实值函数，当它满足下列三个条件时，称为**半范数**（pseudo-norm, semi-norm）：i) $0 \leqslant p(x) < +\infty$ $(x \in E)$；ii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$；iii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$. 设 V 是绝对凸且吸收的集合，并设它与通过原点的直线的交是闭集，则 V 与半范数 $p(x)$ 之间存在着一一对应关系 $V = \{x | p(x) \leqslant 1\}$. 使用半范数，Hahn-Banach 定理可表述如下：设 $p(x)$ 为定义于线性空间 E 上的半范数，F 为 E 的子空间. 如果在 F 上定义的线性泛函 $f(x)$ 满足 $|f(x)| \leqslant p(x)$，则能把 $f(x)$ 扩张到全空间 E，使得所述不等式在 E 上成立.

局部凸空间的拓扑可以由此空间上的连续半范数的族来决定. 反之，对 K 上的线性空间 E，如果存在半范数的一个族 $\{p_\lambda(x)\}(\lambda \in \Lambda)$，满足 iv) 对一切 λ，$p_\lambda(x) = 0$ 蕴涵 $x = 0$，则在 E 上能确定使这些半范数都连续的最弱的局部凸拓扑. 这种拓扑称为由 $\{p_\lambda(x)\}$ 确定的局部凸拓扑.

以下假定 E 是局部凸空间，其拓扑由半范数族 $\{p_\lambda(x)\}(\lambda \in \Lambda)$ 确定. E 中的有向点族† x_ν 收敛于 x 等价于：对一切 $\lambda \in \Lambda$，$p_\lambda(x_\nu - x) \to 0$. 设 F 为由半范数族 $\{q_\mu(y)\}$ 确定其拓扑的局部凸空间，为使线性映射 $u: E \to F$ 为连续的充分必要条件是：对任意的 $q_\mu(y)$，存在有限个 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n \in \Lambda$ 和常数 C，使不等式 $q_\mu(u(x)) \leqslant C(p_{\lambda_1}(x) + \cdots + p_{\lambda_n}(x))$ $(x \in E)$ 成立.

被 0 的每个邻域吸收的集合称为**有界的**（bounded）. 全有界集是有界的. 赋范空间的单位球是 0 的有界邻域，反之，一个局部凸空间，如果它具有 0 的一个有界邻域，就是可赋范的. 一个局部凸空间称为**拟完备的**（quasi-complete），如果它的一切有界闭集都是完备的. 由于 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 是全有界的，因之拟完备空间内一切 Cauchy 序列都收敛（序列完备）.

【线性空间对】 设 E，F 为同一域 K 上的两个线性空间，$B(x, y)$ 是 $E \times F$ 上的 K 值函数 $(x \in E, y \in F)$. 如果当 $y \in F$ 或 $x \in E$ 固定时，$B(x, y)$ 分别作为 x 或 y 的函数是线性泛函，则称 $B(x, y)$ 为**双线性泛函**（bilinear functional）或**双线性型**（bilinear form）. 在两个线性空间 E，F 上，如果存在满足下列条件的双线性泛函 $\langle x, y \rangle$：对一切 $y \in F$（一切 $x \in E$），$\langle x, y \rangle = 0$ 蕴涵 $x = 0$ $(y = 0)$，则称 E 和 F 由双线性泛函 $\langle x, y \rangle$ 形成**对**（pairing）. 称此

双线性泛函 $\langle x, y\rangle$ 为**内积**(inner product). 局部凸空间 E 及其对偶空间 E' 由其自然的内积$\langle x, x'\rangle = x'(x)(x \in E, x' \in E')$ 形成对.

【弱拓扑】 当 E, F 由内积 $\langle x, y\rangle$ 构成对时,由半范数族 $\{|\langle x, y\rangle| \mid y \in F\}$ 确定的 E 上的局部凸拓扑称为 **(关于对 E, F 的)弱拓扑** (weak topology), 用 $\sigma(E, F)$ 表示. E的有向点族关于弱拓扑收敛时, 称为**弱收敛** (weak convergence). 当 E, E' 是局部凸空间并且是对偶空间时, $\sigma(E, E')$ 称为 E 的**弱拓扑** (英 weak topology 法 topologie affaiblie), $\sigma(E', E)$ 称为 E' 的**弱 * 拓扑** (英 weak * topology 法 topologie faible). E的弱拓扑比 E 的原来的拓扑 (亦称强拓扑)弱. 从而弱闭集总是闭集;关于凸集其逆成立, 即凸闭集是弱闭的. 如果用弱拓扑代替原来的拓扑,有界性也保持不变,从而弱有界集是有界的.

E, F 关于 $\langle x, y\rangle$ 成为空间对, 当集合 $A \subset E$ 时,对一切 $x \in A$ 满足 $\Re\langle x, y\rangle \geqslant -1$ 的点 $y \in F$ 的全体所成的集合 A°, 称为A的 (关于所说的空间对的)**极集** (polar). 当 A 为绝对凸时, A°也是绝对凸的,且和对一切 $x \in A$, 满足 $|\langle x, y\rangle| \leqslant 1$ 的 y 所成的集合相同. 当 A 为含有 0 的凸集时,其(弱)闭包等于**双极集**(bipolar) $A^{\circ\circ} = (A^{\circ})^{\circ}$ (**双极定理**(法 théorème de bipolaire)).

对偶空间 E' 的子集 B 在 E 上等度连续[†]的充分必要条件是: B 包含在 E 内 0 的一个邻域 V 的极集 V° 内. V° 在 E' 中是弱 * 紧的(**Banach-Alaoglu 定理**).

【桶型空间和有界型空间】 在局部凸空间 E 内, 吸收的绝对凸闭集称为**桶集** (英 barrel 法 tonneau). 在序列完备空间内,因而在拟完备空间内, 桶集吸收每个有界集. 如果一个局部凸空间的每个桶集都是 0 的邻域, 则此空间称为**桶型**(法 tonnelé) 空间. 在一个局部凸空间内, 如果每个吸收一切有界集的桶集都是 0 的邻域, 则这样的局部凸空间称为**拟桶型** (法 quasi-tonnelé) 空间. 又当吸收每个有界集的绝对凸集是 0 的邻域时, 这种局部凸空间就称为**有界型的** (法 bornologique). 有界型空间是拟桶型的, 但不一定是桶型的. 桶型空间也不一定是有界型的. 可度量化局部凸空间, 即其拓扑由至多可数个半范数所确定的空间, 是有界型空间. 完备的并且可度量化的局部凸空间称为**局部凸 Fréchet 空间** (locally convex Fréchet space) 或 **F 空间** ((F)-space). F 空间又简称 **Fréchet 空间** (Fréchet space). 为了和 Banach 空间那一条中的 Fréchet 空间[†]有所区别, 有时称后者为 **Banach 意义下的 Fréchet 空间**(Fréchet space in the sense of Banach). F 空间是有界型的并且是桶型的.

两个局部凸空间之间的连续线性映射 $u: E \to F$ 把 E的有界集映为 F 的有界集. 反之, 当 E 是有界型空间时, 把 E 的每个有界点列映成 F 的有界点列的线性映射是连续的.

【Banach-Steinhaus 定理】 在桶型空间 E 的对偶空间内,弱 * 有界集是等度连续的. 从而, 如果 E 到局部凸空间 F 的连续线性映射序列 $\{u_n\}$ 在 E的各点收敛, 则 $\{u_n\}$ 在 E 的每个完全有界集上一致收敛, 且其极限线性映射也是连续的 (**Banach-Steinhaus 定理**).

【S 拓扑】 设 E, F 关于内积 $\langle x, y\rangle$ 形成线性空间对. 当 F 的(弱)有界集的族 S 生成 F 的稠密子空间时,半范数族 $\{\sup_{y \in B}|\langle x, y\rangle| \mid B \in S\}$ 确定了 E 上的一个局部凸拓扑.这个拓扑称为 **S 拓扑或在 S 的集合上一致收敛的拓扑** (topology of uniform convergence on members of S), 取后一名称是因为在 S 拓扑下 $x_\nu \to x$ 等价于在每个 $B \in S$ 上,一致地有 $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. 我们把赋以 S 拓扑的 E 写作 E_S. 弱拓扑和点点收敛拓扑是相同的. 用 F 的有界集的全体作为 S 时的 S 拓扑称为**强拓扑** (strong topology), 记作 $\beta(E, F)$. 通常把局部凸空间 E 的对偶空间 E' 看作具有强拓扑 $\beta(E', E)$ 的局部凸空间. 局部凸空间 E 的拓扑就是在 E' 的各个等度连续集上一致收敛的拓扑. 桶型空间 E 的拓扑和强拓扑 $\beta(E, E')$ 是一致的.

【Grothendieck 定理】 设 E, F 为线性空间对, S 为 F 的绝对凸有界集的一个族,满足下列

条件: i) S 的集合生成 F; ii) 若 $B_1, B_2 \in S$, 则存在 $B_3 \in S$, 使得 $B_3 \supset B_1$, $B_3 \supset B_2$. 此时,为使 E_S 为完备的充分必要条件是: 若 F 上的代数线性泛函 $f(y)$ 在每个 $B \in S$ 上弱连续, 则存在 $x \in E$, 使得 $f(y)$ 可以表示为 $f(y) = \langle x, y \rangle$. 当 E_S 不完备时, 上述线性泛函的全体所构成的空间给出 E_S 的完备化 $\hat{E}_S$ (**Grothendieck 定理**).

【Mackey 定理】 设 E, F, S 满足前述定理中同样的假设,则 E_S 的对偶空间等于 $\lambda B(\lambda > 0, B \in S)$ 的弱完备化的并 (**Mackey 定理**).

【Mackey 拓扑】 当 E, F 构成空间对时, 在 F 的每个凸弱紧集上一致收敛的拓扑称为 **Mackey 拓扑**(Mackey topology),记作 $\tau(E,F)$. 赋予局部凸拓扑 T 的 E 的对偶空间 E' 和 F 一致的充分必要条件是, T 比弱拓扑 $\sigma(E,F)$ 强, 而比 Mackey 拓扑 $\tau(E, F)$ 弱 (**Mackey-Arens 定理**). 原来的拓扑和 Mackey 拓扑 $\tau(E,E')$ 相等的局部凸空间称为 **Mackey 空间** (Mackey space). 拟桶型空间是 Mackey 空间.

【自反性】 设 E 为局部凸空间. 赋予强拓扑的对偶空间 E' 的对偶空间 E'' 包含原来的空间 E. 当 $E'' = E$ 时,称 E 为**半自反的** (semi-reflexive), 进一步当 E 的拓扑和强拓扑 $\beta(E, E')$ 一致时, 称 E 为**自反的** (reflexive). 为使 E 为半自反的充分必要条件是 E 的任意有界弱闭凸集是弱紧的. E 为自反的充分必要条件是 E 为半自反的且是(拟)桶型的.

如果桶型空间内任意的有界闭集是紧集, 则称它为 **Montel 空间** (Montel space) 或 **M 空间** ((M)-space). M 空间是自反的, 其对偶空间也是M空间.

应用上出现的函数空间多半是 F 空间或是它的对偶空间.对于这些空间的可数性公理,自来就熟知详细的结果. 为使 F 空间 E 的对偶空间 E' 的凸集 C 是弱 * 闭的, 其充分必要条件是: 对 E 内 0 的任意的邻域 V, $C \cap V^0$ 是弱 * 闭的 (**Banach-Dieudonné 定理**). F 空间 E 的强对偶空间 E' 为桶型和为有界型是等价的. 特别, 自反的 F 空间的对偶空间是有界型的.

【DF 空间】 满足下面两个条件的局部凸空间称为 **DF 空间** ((DF)-space): i) 具有有界集的可数基, ii) 如果 0 的可数个绝对凸且闭的邻域的交 V 吸收一切有界集, 则 V 也是 0 的邻域. F 空间的对偶空间是 DF 空间, DF 空间的对偶空间是 F 空间. 为使 DF 空间 E 到局部凸空间 F 内的线性映射是连续的, 其充分必要条件是此映射在任一有界集上的限制是连续的. 拟完备 DF 空间是完备空间.

由两个局部凸空间 E, F 到局部凸空间 G 的双线性映射 $b(x,y)$ $(x \in E, y \in F)$, 如果固定 $y \in F$ 或 $x \in E$ 时, $b(x, y)$ 分别是 x 或 y 的连续映射, 就称它为**分别连续的** (separately continuous). 我们把由 $b(x, y)$ 固定 x 或 y 时所得到的线性映射,记作 $b_x(y)$ 或 $b_y(x)$. 如果对于 E 的任意有界集 B 和 F 的任意有界集 B', $\{b_x(y) | x \in B\}$ 和 $\{b_y(x) | y \in B'\}$ 为等度连续, 则称 $b(x, y)$ 为**亚连续的** (hypocontinuous). 连续的双线性映射是亚连续的, 其逆不一定成立. 分别连续的双线性映射未必是亚连续的. 但当 E, F 都是桶型空间时,分别连续的双线性映射是亚连续的. 当 E 是 F 空间, F 是可度量化空间时, 分别连续的双线性映射是连续的. 又当 E, F 都是 DF 空间时, 亚连续的双线性映射是连续的.

【张量积】 在两个局部凸空间 E, F 的张量积† $E \otimes F$ 中,能引入种种拓扑. **拓扑 π** 定义为使自然双线性映射 $E \times F \to E \otimes F$ 为连续的最强拓扑. $E \otimes_\pi F$ 的共轭空间等同于 $E \times F$ 上的连续双线性泛函的全体所成的空间 $B(E,F)$. $E \otimes_\pi F$ 的完备化写作 $E \hat{\otimes} F$. **拓扑 ε** 如下定义: 考虑 $E \otimes F$ 和 $E' \otimes F'$ 由自然内积所作成的对, V, U 分别是 E 和 F 的 0 的邻域, 在形如 $V^\circ \otimes U^\circ \subset E' \otimes F'$ 的集合上一致收敛的拓扑, 就定义为拓扑 ε. $E \otimes_\varepsilon F$ 的完备化写作 $E \hat{\hat{\otimes}} F$. $E \otimes_\varepsilon F$ 的共轭空间等同于 $B(E, F)$ 中等度连续集的积 $V^\circ \otimes U^\circ$ 的绝对凸包的并所形成的子空间 $J(E, F)$. $J(E, F)$ 的元称为**积分双线性泛函**(法 forme bilinéaire intégrale).

【核型空间】 设 E 为局部凸空间，F 为 Banach 空间†，由 E 上等度连续的线性泛函序列 $\{y_i\}$，F 中的有界点列 $\{f_i\}$ 以及属于 l_1 的非负数列 $\{c_i\}$，用

$$Tx = \text{s-}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i\langle x, y_i\rangle f_i,$$

s-lim 表强敛，所定义的算子 T，是由 E 到 F 的连续算子. 这种形式的算子 T 称为**核型算子**(nuclear operator). 属于迹族†的 Hilbert 空间的紧算子是核型算子.

设 E 为局部凸空间，V 为 E 的原点的绝对凸闭邻域，$p(x)$ 为对应于 V 的半范数. 此时，把满足 $p(x-y)=\theta$ 的 x,y 视为同一元，而这样由 E 得到的以 $p(x)$ 为范数的赋范空间，记作 EV，当 $U\subset V$ 时，能定义自然线性映射 $\varphi_{U,V}$: $E_U\to E_V$.

如果对 0 的任意的绝对凸闭邻域 V，能取另一 U，使 $\varphi_{U,V}$ 作为由 E_U 到 E_V 的完备化内的算子是核型算子(对应地，紧算子)，则称这样的空间为**核型空间** (nuclear space) (对应地，**Schwartz 空间** (Schwartz space) 或 **S 空间** ((S)-space)). 若一 S 空间是拟桶型的并且拟完备的核型空间，则 S 空间是M空间.

E 是核型空间的充分必要条件是：在 E 和任意局部凸空间 F 的张量积 $E\otimes F$ 上，两种拓扑 π 和 ε 是一致的. 从而 $B(E,F)=J(E,F)$ 成立. 这是 Schwartz **核定理** (法 théorème de noyaux) 的推广，所谓核定理乃是：$\mathscr{D}_x\times\mathscr{D}_y$ 上的连续双线性泛函能由以 D'_{xy} 的元为核的积分表示. 核型空间还有许多有趣的性质，例如关于有限加性测度的扩张的 Колмогоров 定理†(的推广)成立.

【端点定理】 设 A 为线性空间 E 的子集. 点 $x\in A$ 是 A 的**端点** (extremal point) 是指，如果含有点 x 的任一实线段包含在 A 内，则 x 是该线段的端点. 当 A 是局部凸空间 E 的紧凸集时，A 是和 A 的端点的全体所成的集合的凸闭包相同的 (**Крейн-Мильман 端点定理**). 在应用中，知道 A 的每个点是否可用其端点的积分唯一地表示出来，这是重要的. 对此 G. Choquet 进行过研究.

【弱紧集】 拟完备局部凸空间的子集成为相对弱紧的充分必要条件是：该集合中任意点列具有弱聚点 (**Eberlein 定理**). 如果 E 是可度量化的局部凸空间，则 E 的相对弱紧集是弱点列紧†的(**Шмульян 定理**). 拟完备局部凸空间 E 的弱紧集的凸闭包仍是弱紧的 (**Крейн 定理**). 但当 E 不是拟完备时，上述定理不一定成立.

【遗传性等】 局部凸空间(族)的子空间，商空间，直积，直和，射影极限以及归纳极限只能引入一种自然的局部凸拓扑. 这些空间，除商空间和归纳极限外，总是分离的，而商空间只限于对于闭子空间的商空间才是分离的. 序列 $E_1\subset E_2\subset\cdots$，当 E_n 具有作为 E_{n+1} 的子空间的诱导拓扑时，其极限称为**严格归纳极限** (strict inductive limit). 如果 E 是严格归纳极限，或如果在序列 $E_1\subset E_2\subset\cdots$ 中，映射 $E_n\to E_{n+1}$ 把 0 的某一邻域映为相对弱紧集，则此序列的归纳极限 E 是分离的，并且 E 的每个有界集是某个 E_n 中的一个有界集的像. 当 $E=\bigcup E_n$ 是序列 E_n 的严格归纳极限时，E_n 的拓扑和 $E_n\subset E$ 的相对拓扑是一致的. F 空间序列的严格归纳极限称为 **LF 空间** ((LF)-space).

一切(完备)局部凸空间都是 (Banach) 赋范空间的射影极限. 可度量化的局部凸空间是赋范空间序列 $E_1\leftarrow E_2\leftarrow\cdots$ 的射影极限. 特别当映射 $E\to E_n$ 都是一一的并且把 $E\subset E_n$ 作为子空间考虑，$\|x\|_n\leqslant\|x\|_{n+1}$ 对一切 $x\in E$ 成立时，E 称为**可列赋范空间** (countably normed space). 通常都假设 E_n 是 Banach 空间. 特别当 E_n 是 Hilbert 空间时，称 E 为**可列 Hilbert 空间** (countably Hilbertian space). 至少具有一个连续范数的 F 空间成为核型空间的充分必要条件是：它是可列 Hilbert 空间，使得映射 $E_{n+1}\to E_n$ 属于 Hilbert-Schmidt 族或迹族.

局部凸空间当且仅当它成为赋范空间的归纳极限时，才是有界型空间. 局部凸空间称为**超有界型的** (法 ultrabornologique)，如果它是 Banach 空间的归纳极限，或者特别地，如果它是

拟完备和有界型的.

空间的完备性,拟完备性,半自反性,有界闭集的紧性等对于从原来的空间形成的闭子空间,直积,射影极限,直和,严格归纳极限,都保持不变. 空间是 Mackey 型,拟桶型,桶型有界型等性质,对于从原来的空间形成的商空间,直和,归纳极限,直积,都保持不变(对于有界型空间的高基数的直积,涉及性质的遗传问题还未解决). F 空间的商空间是 F 空间,一般的完备局部凸空间的商空间则不一定是完备的. 有 Montel F 空间而其商空间非自反的例,也有 Montel DF 空间而其闭子空间既非 Mackey 型空间又非 DF 空间的例. 空间为 Schwartz 空间和核型空间的性质,对于从原来的空间形成的完备化,子空间,对于闭子空间的商空间,直积,射影极限,可列个的直和,可列个的归纳极限等,都保持不变. 核型空间的张量积是核型的. 但是高村幸男给出了拟完备且桶型的核型空间(从而是 Montel 空间)但不是完备空间的例.

【开映射定理及闭图象定理】 置 E, F 为拓扑线性空间. 由 E 到 F 上的连续线性映射是开映射,这一命题称为**开映射定理** (open mapping theorem) 或同态定理;在 F 上处处有定义的线性映射 $u: F\to E$, 如果它的图象在 $F\times E$ 上是闭集,则它是连续的,这一命题称为**闭图象定理** (closed graph theorem). 当 E, F 都是完备的并且是可度量化的空间时,这些定理都成立 (S. Banach).

局部凸空间 E 称为 **B 完备的** (B-complete, fully complete),如果对于 E 的 0 的任意邻域 V, 使 $C\cap V^\circ$ 为弱 * 闭的 E' 的线性子空间 C 都是弱 * 闭的. F 空间和自反的 F 空间的对偶空间是 B 完备的. B 完备空间是完备的,其闭子空间以及对于闭子空间的商空间也是 B 完备的. 当 E 为 B 完备, F 为桶型空间时,开映射定理和闭图象定理成立 (V. Pták).

在 E 是由一族 (F) 空间进行有限次取闭子空间,由闭子空间构造商空间,可列直积,可列射影极限,可列直和,可列归纳极限的操作所得到的空间, F 是超有界型空间的情形,这两条定理也成立 (Д. А. Райков). 作为上述空间 E 的例有 LF 空间, Schwartz F 空间的对偶空间,广义函数空间 $\mathscr{D}'$ 等空间.

【拓扑线性空间的系统】 图 1 的空间都是局部凸并且满足 T_1 空间公理的,在实或复数域上的拓扑线性空间. $A\to B$ 表示具有 A 性质的空间具有 B 性质.

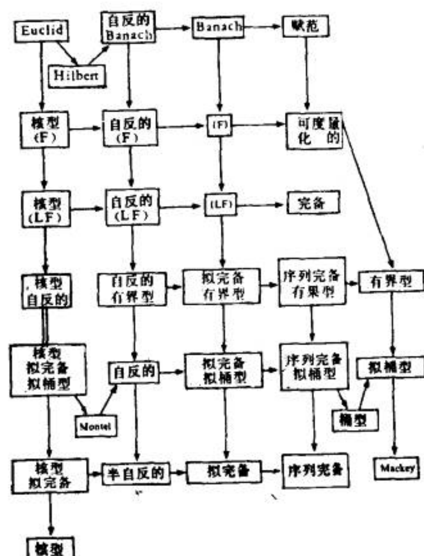


图 1

共轭空间具有何种性质,其主要部分如表 1 所示.

表 1

E	半自反的	自反的	拟桶型	有界型	自反的, F
E'	桶型	自反的	拟完备	完备	有界型
E	F DF	M	核型, LF 或 DF		完备, S
E'	DF F	M	核型,自反的		超有界型

【参】 [1] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Espaces vectoriels topologiques, Actualité's Sci. Ind., Hermann, 1189a, 1966; 1229b, 1967; 1230a, 1955; [2] A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques, Lecture notes, São Paulo, 1954; [3] G. Köthe, Lineare topologische Räume I, Springer, 第二版 1966; [4] И. М. Гельфанд-Г. Е. Шилов, Обобщенные функции II, IV, 1958 (IV 的中译本: И. М. 盖勒范德, Н. Я. 维列金,广义函数,第四卷,调和分析的某些应用,装备希尔伯特空间,科学出版社, 1965); [5] H. H. Schaeffer, Linear topolo

gical spaces, Macmillan, 1966; [6] A. P. Robertson-W. Robertson, Topological vector spaces, Cambridge Univ. Press, 1964; [7] J. Dieudonné-L. Schwartz, La dualité dans les espaces ($\mathscr{F}$) et ($\mathscr{LF}$), Ann. Inst. Fourier, **1** (1949), 61—101; [8] A. Grothendieck, Sur les espaces (F) et (DF), Summa Brasil. Math., **3** (1954), 57—123; [9] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., 1955; [10] G. Choquet, La théorie des représentations intégrales dans les ensembles convexes compacts, Ann. Inst. Fourier, **10** (1960), 334—344; [11] 高村幸男, 線型位相空間に関する二, 三の問題, 数学, **15** (1964), 218—220; [12] J. L. Kelley, I. Namioka, et al., Linear topological spaces, van Nostrand, 1963; [13] R. E. Edwards, Founctional analysis; theory and applications, Holt, Rinehart and Winston, 1965; [14] J. Horváth, Topological vector spaces and distributions I, Addison-Wesley, 1966; [15] F. Treves, Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, 1967.

广义函数 [英 distribution 法 distribution 德 Distribution 俄 обобщённая функция 日 超関数] 【发展史】 分析学特别是偏微分方程的研究,有必要推广函数概念. Dirac δ 函数, Heaviside 函数等,在古典分析中是无法赋予它意义的,可是物理学者和工程师以前就使用了它.这就是函数概念有必要推广的一个例子. J. Hadamard 在研究波动方程的基本解时所使用的发散积分的有限部分(1932), M. Riesz 的 Riemann-Liouville 积分(1938),都是广义函数理论的开端,而在此以前,广义函数想法的萌芽即已出现. S. Bochner (1932) 和 T. Carleman (1944) 讨论了定义在实直线上的,其增长有如多项式的局部可积函数的 Fourier 变换. С. Л. Соболев 在研究双曲型方程的初值问题时,通过分部积分引进了广义导数的概念(1936),并引进了微分方程的广义解. J. Leray (1934), K. O. Friedrichs (1939) 和 C. B. Morrey, Jr. (1940) 也曾讨论过广义导数. 另一方面, L. Fantappié (1943) 研究过解析泛函,它们是解析函数空间的对偶空间中的元,并把它用于偏微分方程理论. L. Schwartz 系统地推广了这些研究,巧妙地结合 Соболев 的微分概念的扩充,推广了函数概念,首创"distribution"的理论(1945). 广义函数的理论不仅为物理学及偏微分方程已经应用的方法提供了数学的基础,而且为偏微分方程和 Fourier 变换理论提供了新的方法,进而在局部紧群的表示论,概率论,流形理论方面也得到了应用. 特别在流形的同调论中,流动形式(以广义函数为系数的微分形式)起着重要作用. 如以下所述,广义函数可以定义为某种函数空间上的连续泛函,而适应所讨论的问题,适当地选择函数空间,这是很重要的. И. М. Гельфанд-Г. Е. Шилов 定义了各种类型的广义函数 (generalized function)([13]).

【广义函数的定义】 对于 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义的复值函数

$$\varphi(x)(x=(x_1, x_2, \cdots x_n)),$$

我们称 $\{x|\varphi(x)\neq 0\}$ 的闭包†为 $\varphi(x)$ 的**支集**(英 carrier 法 support),用 $\mathrm{supp}\,\varphi$ 表示. 对于 n 个非负整数的有序组 $p=(p_1,\cdots p_n)$. 记

$$|p|=p_1+p_2+\cdots+p_n,$$

对 $|p|\leqslant k$ 的 p 和 C^k 类的 φ, 记

(1) $(D^p\varphi)(x)=\partial^{|p|}\varphi(x)/\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}$,

特别地, $D^{(0,\cdots 0)}\varphi=\varphi$. 若要表示变量 x 时,就添上 x 而写为 D_x^p.

定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的具有紧†支集的 C^∞ 类复值函数的全体,我们用 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{R}^n}$ 表示. 在函数空间通常的运算下, $\mathscr{D}_{\boldsymbol{R}^n}$ 形成线性空间†. $\mathscr{D}_{\boldsymbol{R}^n}$ 的点列 $\{\varphi_m\}$ 当 $m\to\infty$ 时收敛于 0 (即恒等于 0 的函数)(写作 $\varphi_m\Rightarrow 0$) 定义如下: 存在紧集 E, 使得对一切 m, φ_m 的支集都包含在 E 内,并且对一切 p, 函数序列 $\{D^p\varphi_m\}$ 一致收敛于 0.

把 $\mathscr{D}_{\boldsymbol{R}^n}$ 简记为 $\mathscr{D}$. 当需要明确表示它是变量 x 的函数的空间时,在 $\mathscr{D}$ 下方标以 x, 写作 $\mathscr{D}_x$. 当定义在 $\mathscr{D}$ 上的复值线性泛函† T 具有连续性(即 $\varphi_m\Rightarrow 0$ 蕴涵 $T(\varphi_m)\to 0$) 时,就称 T 为**广义函数** (Schwartz). 广义函数的全体用 $\mathscr{D}'_{\boldsymbol{R}^n}$ 表示. 对于广义函数 S, T, 由

$$(S+T)(\varphi)=S(\varphi)+T(\varphi),$$
$$(\alpha T)(\varphi)=\alpha T(\varphi)$$

所确定的 αT, $S+T$ 仍为广义函数,因而 $\mathscr{D}'_{\boldsymbol{R}^n}$ 形成线性空间†.

【广义函数的例】 1) 设 $f(x)$ 是可测†且局部可积†的函数. 由

$$T_f(\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx$$

定义的 T_f 是广义函数. 这里 dx 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的体积元素，积分范围为全空间 $\boldsymbol{R}^n$ (实际上是 φ 的支集). 若 $T_f=T_g$, 则几乎处处†有 $f(x)=g(x)$. 从而常常把 T_f 与 f 看作相同，并代替 T_f 用 f 表示广义函数. 2) $\boldsymbol{R}^n$ 的可测集†上的复值完全加性集函数† (测度) $\mu(M)$, 当它对紧集取有限值时，由 $T_\mu(\varphi)=\int\varphi(x)\mu(dx)$ 定义的 T_μ 是广义函数. 例 1) 是 $\mu(dx)=f(x)dx$ 的特殊情形. 特别当测度集中在原点 0 时，就有

$$T_\mu(\varphi)=c\varphi(0).$$

我们把这一广义函数写作 $c\delta$. δ 称为 **Dirac 广义函数** (Dirac's distribution). 为了表示在变量 x 的函数的空间上考虑，也可以写作 $\delta_x,\delta_{(x)}$, $\delta(x)$ 等. 3) 给定 p 时同样可以用

$$T(\varphi)=(-1)^{|p|}D^p\varphi(0)$$

定义 T. 把它写作 $\delta^{(p)}$. $\delta^{(0,0,\cdots0)}=\delta$. 4) 设 $g(x)$ 在区间 (a,b) 上不可积，但对任意的 $\varepsilon>0$, 它在 $(a+\varepsilon,b)$ 上可积，还设

$$g(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}}+h(x)$$

(此处 $\Re\lambda_\nu>1$, $\lambda_\nu\neq$ 整数, $h(x)$ 在 (a,b) 上可积), 如果写

$$\int_{a+\varepsilon}^{b}g(x)dx=\sum_\nu\frac{A_\nu}{\lambda_\nu-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_\nu-1}+F(\varepsilon),$$

则有限的 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}F(\varepsilon)$ 存在. 此极限称为积分

$$\int_a^b g(x)dx$$

的**有限部分** (英 finite part 法 partie finie), 写作 $\mathrm{Pf}\int_a^b g(x)dx$. 也就是

$$\mathrm{Pf}\int_a^b g(x)dx=-\sum_\nu\frac{A_\nu}{\lambda_\nu-1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu-1}+\int_a^b h(x)dx.$$

又当 $\varphi\in\mathscr{D}_{\boldsymbol{R}^1}$ 时，对于上述的 $g(x)$ 同样可定义 $T(\varphi)=\mathrm{Pf}\int_a^b g(x)\varphi(x)dx$, T 成为广义函数. 这样的广义函数写做 $\mathrm{Pf}g$, 也简称为**伪函数**(pseudo-function). 这个概念也可推广到 n 维的情形，并应用于双曲型偏微分方程的基本解 (关于基本解在后面阐述；又参看→公式 15 V).

【广义函数的支集】 如果对于其支集包含在开集 Ω 内的一切 $\varphi\in\mathscr{D}_{\boldsymbol{R}^n}$ 有 $T(\varphi)=0$, 则称 T 在 Ω 上为 0. 所有这样的开集的并 Ω_0 是使 T 为 0 的最大开集. Ω_0 的补集称为广义函数 T 的**支集**. 例 1) 的广义函数 f 的支集和函数 f 的支集是一致的. $\delta^{(p)}$ 的支集是原点.

广义函数 T 的支集 F_0 称为**正则的** (regular), 如果对 F_0 的任意一点 x^0, 可以选择常数 $d>0$, $\omega\geqslant0$ 和 $q\geqslant1$, 使得对于 F_0 内到 x^0 的距离最多为 d 的任意两点 x, x', 总能有 F_0 内的其长度 $l\leqslant\omega|x'-x|^{1/q}$ 的曲线连结这两点. 当 T 的支集 F_0 正则时，T 可以表示为

$$T=\sum_{j=1}^{N}D^{p_j}T_{\mu_j},\ N=1,2,\cdots,\infty$$

的形式 (但未必是唯一的). 这里 μ_j 是其支集包含在 F_0 内的复值测度. 特别对于以一个点 x^0 为支集的广义函数 T,

$$T=\sum_{|p|\leqslant m}C_pD^pT_{\delta_{x^0}}$$

成立，即 T 由用 $T_{\delta_{x^0}}(\varphi)=\varphi(x^0)$ 所定义的广义函数的导数的有限线性组合唯一地表示出来 (D^pT 是广义函数的导数).

【流形上的流动形】 为简单起见，考虑 n 维可定向的 C^∞ 类微分流形 X (→流形) 对于 X 上的 k 次外微分形式† α, 称 $\{x\,|\,\alpha_x\neq0\}$ 的闭包† 为 α 的支集 (α_x 为 α 在 x 处的值). 用 $\Phi_k(X)$ 表示具有紧支集的 k 次 C^∞ 类外微分形式的全体. 对于 $\Phi_k(X)$ 内的序列 $\{\alpha_m\}$, 收敛 $\alpha_m\Rightarrow0$ $(m\to\infty)$ 定义如下：所有 α_m 的支集都包含在某紧集 E 内，取有限个坐标邻域 Ω_1, $\Omega_2,\cdots,\Omega_N$, 覆盖 E, 在每个 Ω_i 内用局部坐标表示 α_m 时，它的一切系数及其偏导数在 Ω_i 内都一致收敛于 0. 如果 $\Phi_k(X)$ 上的线性泛函† T 是连续的(即当 $\alpha_m\Rightarrow0$ 时，$T(\alpha_m)\to0$ 成立),

则T称为 $n-k$ 次**流动形**（英 current 法 courant 德 Strömung）.

【流动形的例】 1) 设 β 为以局部可积函数为系数的 $n-k$ 次外微分形式,由

$$T_\beta(\alpha)=\beta(\alpha)=\int_X \beta\wedge\alpha$$

定义 T_β. 2) 设C为 p 维链†,由

$$T_C(\alpha)=C(\alpha)=\int_C \alpha$$

定义 T_C.

【流形上的广义函数】 以$\mathscr{D}_X$记X上具有紧支集的 C^∞ 类函数的全体. $\mathscr{D}_X=\Phi_0(X)$, $\mathscr{D}_X$上的连续线性泛函†即n次流动形，称为X上的广义函数. X上的广义函数的全体用$\mathscr{D}'_X$表示. 特别是，如果预先指定X上的体积元素 dx，而把局部可积函数 $f(x)$ 看作n次外微分形式 $f(x)dx$，则由上述例 1) 就定义了广义函数f.

【广义函数的局部化】 对于 X 的开集Ω，每个 $\varphi\in\mathscr{D}_\Omega$ 可以通过在 $x\notin\Omega$ 处令$\tilde\varphi(x)=0$而扩张到 $\tilde\varphi\in\mathscr{D}_X$. 从而当 $T\in\mathscr{D}'_X$ 时，如果用对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}_\Omega$, $S(\varphi)=T(\tilde\varphi)$ 来定义 S，则 $S\in\mathscr{D}'_\Omega$. 称S为T在Ω上的**局部化**（localization）或**限制**（restriction）. 流动形也能以同样的方式局部化. 两个广义函数在开集Ω上相等是指，它们在Ω上的局部化相等. 若 T, S 在每个点的邻域上相等,则 $S=T$. 虽然广义函数没有通常函数那样在各点处的值的意义，但是在上面所说的意义下，广义函数完全由各点邻域上的值所确定. 又在以下的意义下，把局部的"值"集在一起能作出广义函数：给定X的开覆盖†$\{\Omega_j\}$和 $T_j\in\mathscr{D}'_{\Omega_j}$，如果对任意 j, k, T_j 与 T_k 在 $\Omega_j\cap\Omega_k$ 上相等，则存在 $T\in\mathscr{D}'_X$，使T在Ω_j上等于T_j. T由$\{T_j\}$唯一决定. 对流动形也是如此. 流动形可以局部地用广义函数为系数的微分形式表示出来.

【广义函数的微分】 在广义函数的例 1) 中,如果 $f(x)$ 为 C^k 类的,则由分部积分,

$$T_{D^pf}(\varphi)=(-1)^{|p|}T_f(D^p\varphi)$$

当 $|p|\leqslant k$时成立. 即使f不是 C^k 类，式子的右端也给出一个广义函数. 由此得到启发，任意广义函数T的**偏导(函)数**（partial derivative） D^pT 由下式定义：

(2) $(D^pT)(\varphi)=(-1)^{|p|}T(D^p\varphi)$, $\varphi\in\mathscr{D}$.

广义函数是无限次可微的. 局部可积函数在广义函数的意义下是任意次可微的. D^pT_f 称为f的**广义函数意义下的(偏)导(函)数**（derivative in the sense of distribution）. 例 1) $D^p\delta=\delta^{(p)}$. 例 2) 一维的例：$dx_+/dx=\mathbf{1}$, $d\mathbf{1}/dx=\delta$. 这里函数 x_+ 当 $x\geqslant 0$ 时等于x，当 $x<0$ 时等于 0，$\mathbf{1}(x)$ 称为 **Heaviside 函数**（Heaviside's function)，它当 $x\geqslant 0$ 时等于 1，当$x<0$ 时等于 0.

【流动形的外微分和同调论】 当 $d\beta$ 表示 $n-k-1$ 次外微分形式β的外微分†时，有

$$T_{d\beta}(\alpha)=d\beta(\alpha)=\int_X d\beta\wedge\alpha$$
$$=(-1)^{n-k}\int_X\beta\wedge d\alpha=(-1)^{n-k}T_\beta(d\alpha).$$

由此式的启发,我们用

$$dT(\alpha)=(-1)^{n-k}T(d\alpha)$$

来定义流动形T的外微分. 对于 k 维链† C，由 Stokes 公式†$\int_C d\alpha=\int_{\partial C}\alpha$，得

$$dT_C=(-1)^{n-k-1}T_{\partial C}$$

(∂C 表示C的边界†). 从而可以把外微分形式和链看作流动形的特殊情形，而外微分形式的外微分和链的边界的概念都由流动形的外微分概念统一了起来. 沿着这种类似性能展开流动形的同调论. 满足 $dT=0$ 的流动形式T称为**闭**（closed）流动形；能由流动形S表示为 $T=dS$ 时，T称为**同调于 0**（homologous to 0）. 由此可定义流动形的同调群，用$\partial T=(-1)^{n-k-1}dT$（$T$为 $n-k$ 次）定义∂时一方面可以把流动形看作关于∂的链，另一方面又可以把它看作关于d的上链. 从而由流动形能得到流形的同调群和它的上同调群之间的对应关系. 把它与相交数†的理论相结合，可以得到 G. de Rham 的流形的同调论（→微分流形）.

【流动形在调和积分论中的应用】 对于 Riemann 流形†上的外微分形式 α，可以定义其共轭形式†$*\alpha$（→调和积分）．此时可定义流动形和外微分形式 α 的内积为 $(T,\alpha)=T(*\alpha)$（T 与 α 次数相同）．用 $(T,d\varphi)=(\delta T,\varphi)$ 定义流动形 T 的**上微分**（co-differential）δT．引进 Laplace 算子 $\Delta=d\delta+\delta d$ 之后，在紧 C^∞ 类 Riemann 流形 Ω 上，任意的流动形 T 可以分解为 $T=T_1+\Delta T_2$，$\Delta T_1=0$．在这种情形下，如下的 Weyl 引理的推广成立：对于流动形 T，如果 ΔT 在 Ω 上为 C^∞ 类，则流动形 T 也是 C^∞ 类的（小平邦彦，de Rham）．从而在 T 的分解中，T_1 等于一个 C^∞ 类的外微分形式．流动形在调和积分论中非常有效的理由，同广义函数概念是研究椭圆型偏微分算子的有力工具是类似的．

【$\mathscr{D}_{R^n}$ 和 $\mathscr{D}'_{R^n}$ 的拓扑】 对于正数的非减序列 $\{a\}=\{a_0,a_1,\cdots\}$和非负整数的非减序列 $\{k\}=\{k_0,k_1,\cdots\}$，定义：

$$(3)\quad \rho_{\{a\},\{k\}}(\varphi)=\sup_{i\geqslant 0}\ \sup_{|p|\leqslant k_i}\ \sup_{|x|\geqslant i} a_i|D^p\varphi(x)|.$$

把半范数† $\rho_{\{a\},\{k\}}$ 的全体作为连续半范数的一个基本系，由此确定**空间 $\mathscr{D}$ 的拓扑**，这样 $\mathscr{D}$ 形成局部凸†拓扑线性空间†(→拓扑线性空间)；而对于序列 $\{\varphi_m\}$，$\varphi_m\Rightarrow 0$ 和在此拓扑下 $\varphi_m\to 0$ 是一致的．在此拓扑下 $\mathscr{D}$ 的子集 B 为有界的充分必要条件是：存在紧集 E，使得一切 $\varphi\in B$ 的支集都包含在 E 内，且对任意的 p，存在正数 M_p，使得对一切 $\varphi\in B$ 和一切 $x\in \boldsymbol{R}^n$，

$$|D^p\varphi(x)|\leqslant M_p$$

成立．**广义函数空间 $\mathscr{D}'$ 的拓扑**是取 $\mathscr{D}$ 的共轭空间†的强拓扑†，也就是取在 $\mathscr{D}$ 的每个有界集上一致收敛的拓扑†．在这些拓扑下，$\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{D}'$ 形成自反的†拓扑线性空间(→[直积])．

【广义函数与函数的积】 对于 C^∞ 类函数 $\alpha(x)$ 和广义函数 T，由 $(\alpha T)(\varphi)=T(\alpha\varphi)$ 定义广义函数 αT．由于当 $\varphi\in\mathscr{D}$ 时 $\alpha\varphi\in\mathscr{D}$，所以这个定义是可能的．

【偏微分算子对广义函数的运算】 对于以 C^∞类函数为系数的偏微分算子

$$P(x,D)=\sum_{|p|\leqslant m}a_p(x)D^p,$$

定义其**伴随算子**（adjoint operator）$P'(x,D)$ 如下：

$$(4)\quad P'(x,D)\varphi=\sum(-1)^{|p|}D^p(a_p(x)\varphi(x)).$$

把广义函数的偏微分，它与 C^∞ 类函数的积以及广义函数的加法结合起来，可以对广义函数施行 $P(x,D)$ 运算．此时

$$(P(x,D)T)(\varphi)=T(P'(x,D)\varphi)$$

成立．

【收敛定理】 由于下面的收敛定理，涉及广义函数的种种极限过程可以顺利进行：若广义函数序列 $\{T_j\}$ 对于任意 $\varphi\in\mathscr{D}$ 都存在有限的极限 $\lim T_j(\varphi)=T(\varphi)$，则 $T\in\mathscr{D}'$．这时 $\{T_j\}$ 弱收敛† 于T（**收敛定理**（convergence theorem））．进一步，对任意的 p，D^pT_j 弱收敛于 D^pT（**逐项微分定理**（theorem on termwise differentiation））．$\mathscr{D}$ 的有界集实际上是全有界†的．从而 $\{T_j\}$ 的弱收敛性蕴涵强收敛性（即按 $\mathscr{D}'$ 的拓扑的收敛）（**强收敛定理**（strong convergence theorem））．

【含参数的广义函数】 设广义函数 T_λ 对应于参数 λ，λ 在实数、复数或更一般地在某个 Euclid 空间的域内变动．当 $\lambda\to\lambda_0$ 时，关于 $\{T_\lambda\}$ 的收敛定理，强收敛定理成立．

如果对于任意的 $\varphi\in\mathscr{D}$，$T_\lambda(\varphi)$ 在 λ 的某一（与 φ 无关的）范围内关于参数 λ 连续(可微)，就称 T_λ为**关于参数 λ 连续(关于参数 λ 可微)**．当 T_λ 定义于 $[a,b]$ 上且连续时，由

$$\int_a^b T_\lambda(\varphi)d\lambda=T(\varphi)$$

能定义 $T\in\mathscr{D}'$，称它为 T_λ **关于参数 λ 的积分**，用 $\int_a^b T_\lambda d\lambda=T$ 表示．当以实数 λ 为参数的 T_λ 在 $\lambda=\lambda_0$ 处可微时，由对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}$，

$$(5)\quad \frac{d}{d\lambda}T_\lambda(\varphi)=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\left(\frac{T_\lambda-T_{\lambda_0}}{\lambda-\lambda_0}\right)(\varphi)=S(\varphi)$$

所定义的广义函数 S，称为 **T_λ 在 λ_0 处关于参数 λ 的导数**，用 $\dfrac{\partial T_\lambda}{\partial\lambda}$ 表示．公式

(6) $$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}T_\lambda\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}T_\lambda\right)$$

成立．关于以实多变量为参数的广义函数，同样的事实成立．如果 T_λ 关于 λ 连续，则 $D_x^p T_\lambda$ 关于 λ 也连续，特别是，如果它在区间 $[a,b]$ 上连续，则

(7) $$\int_a^b D_x^p T_\lambda d\lambda = D_x^p\int_a^b T_\lambda d\lambda$$

成立．

对于以复数 λ 为参数的广义函数 T_λ，如果对任意的 $\varphi\in\mathscr{D}$，$T_\lambda(\varphi)$ 对 λ 是解析的†，则称 **T_λ 关于参数 λ 解析**．解析函数的基本性质此时仍然成立．

【广义函数解析开拓的例】 **广义函数 x_+^λ** 在 $\Re\lambda>-1$ 内由局部可积函数 x_+^λ 所定义，它关于 λ 是解析的，并能解析开拓到 $\lambda\neq-1,-2,\cdots$ 的域上．当 $-n-1<\Re\lambda<-n$ 时，

(8) $$x_+^\lambda(\varphi)=\int_0^\infty x^\lambda\Big(\varphi(x)-\varphi(0)-\cdots-\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(0)\Big)dx$$

成立．x_+^λ 在 $\lambda=-k$ 处有一阶极点，在该点处的残数是 $(-1)^{k-1}\delta_x^{(k-1)}/(k-1)!$ $(k=1,2,\cdots)$．对于 $\lambda\ (\lambda\neq-1,-2,\cdots)$，

(9) $$dx_+^\lambda/dx=\lambda x_+^{\lambda-1}$$

成立．$x_+^\lambda/\Gamma(\lambda)$ 在全复平面上是解析的．

$$x_-^\lambda=(-x)_+^\lambda\quad(\Re\lambda>-1)$$

也能同样地解析开拓．当定义 $(x\pm i0)^\lambda=\lim\limits_{y\to+0}(x\pm iy)^\lambda$ 时，$(x\pm i0)^\lambda=x_+^\lambda+e^{\pm i\lambda\pi}x_-^\lambda$，这里设 $\Re\lambda>-1$．$(x\pm i0)^\lambda$ 能解析开拓到全平面．

对 n 维点 x，记

$$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

当 $\Re\lambda>-n$ 时，$|x|^\lambda$ 局部可积．因此能定义**广义函数 $|x|^\lambda$**，它在 $\Re\lambda>-n$ 的域内解析．$|x|^\lambda$ 可解析开拓到 $\lambda\neq-n-2k$ 处 $(k=0,1,2,\cdots)$，它在 $\lambda=-n-2k$ 处有一阶极点，其残数为 $\omega_n\Delta^k\delta_x/2^k k!n(n+2)\cdots(n+2k-2)$．这里 Δ 表示 Laplace 算子，ω_n 表示 n 维空间单位球的表面积．因为当 $\Re\lambda>2-n$ 时，$\Delta|x|^\lambda=\lambda(\lambda+n-2)|x|^{\lambda-2}$，所以进行解析开拓，就得到此式当 $\lambda\neq2-n-2k$ 时成立．因为 $|x|^\lambda/\omega_n\Gamma((\lambda+n)/2)$ 是 λ 的整函数，所以对 λ 进行解析开拓，就得到对一切 λ，下列公式成立：

(10) $$\Delta\left(\frac{|x|^\lambda}{\omega_n\Gamma((\lambda+n)/2)}\right)=\frac{2\lambda|x|^{\lambda-2}}{\omega_n\Gamma((\lambda+n-2)/2)}.$$

特别当 $\lambda=2-n$ 时，

(10′) $$\Delta(|x|^{2-n}/\omega_n)=(2-n)\delta_x$$

成立．对于 $\varphi\in\mathscr{D}_x$，$y\in\boldsymbol{R}^n$，用 (10′) 的广义函数对 x 的函数 $\varphi(x+y)$ 进行运算，在左端作变数更换 $x+y\to x$，即得

(10″) $$\Delta\int\frac{\varphi(x)}{|x-y|^{n-2}}dx=-(n-2)\omega_n\varphi(y).$$

这就是作为位势论†中基本定理的 Poisson 方程†，使用广义函数能达到使人一目了然的表现形式(10′)．一般地，对偏微分算子 $P(x,D)$，使 $P(x,D)T=\delta_x$ 的广义函数 T，称为该算子的**基本解** (elementary solution)．(10′) 式表明，Laplace 算子 Δ 的基本解由 $|x|^{2-n}/\omega_n(2-n)$ 给出，这里设 $n>2$．同法可以求出多重 Laplace 算子 Δ^k 的基本解 (→公式 15V)．

解析开拓这一巧妙的构思归于 M. Riesz. Hadamard 在研究双曲型偏微分方程†理论时 (1932) 使用的发散积分的有限部分，也能用广义函数的想法赋予它恰当的意义(→[广义函数的例] 4))，用解析开拓的想法也能圆满地进行讨论．

【$|x|^\lambda$ 的平面波展开】 设 ω 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的单位球面上的一点，λ 为复数．当 $\Re\lambda>-1$ 时，

$$|x\omega|^\lambda\ (x\omega=x_1\omega_1+\cdots+x_n\omega_n)$$

定义了一个以 ω，λ 为参数的广义函数．它对 λ 是解析的，从而能解析开拓．当 $\Re\lambda>-1$ 时，

(11) $$\frac{1}{\pi^{(n-1)/2}\Gamma((\lambda+1)/2)}\int_{|\omega|=1}|x\omega|^\lambda d\omega$$

$$= \frac{2|x|^\lambda}{\Gamma((\lambda+n)/2)}$$

成立．由解析开拓的唯一性，此式对其他的 λ 也成立．这里 $d\omega$ 表示单位球面 $|\omega|=1$ 的面元素．(11) 式称为 $|x|^\lambda$ 的**平面波展开**，可以用它求常系数椭圆型偏微分算子的基本解．

【代入】 给定由 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的 C^∞ 类映射 $f=(f_1,\cdots f_m)$，设在 $\boldsymbol{R}^m$ 的广义函数

$$S=S_{(y)}\in\mathscr{D}'_{R^m}$$

的支集的原象†E 的邻域内，函数矩阵

$$(\partial f_i/\partial x_j)(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$$

的秩†为 m．在 E 的点的充分小邻域 U 内，对

$$y_1=f_1(x),\cdots,y_m=f_m(x)$$

适当地补加

$$u_1=g_1(x),\cdots u_{n-m}=g_{n-m}(x),$$

则可使变换 $(y,u)=(f(x),g(x))$ 具有 C^∞ 类逆变换 $x=\phi(y,u)$．当 $\varphi\in\mathscr{D}_{R^n}$ 的支集包含在 U 内时，若由

$$\tilde\varphi(y)=\int_{R^{n-m}}\varphi(\phi(y,u))J(y,u)\,du,$$

$$(=\varphi(\phi(y))J(y),\ 当\ n=m\ 时)$$

定义 $\tilde\varphi$，则 $\tilde\varphi\in\mathscr{D}_y=\mathscr{D}_{R^m}$．这里 $J(y,u)$ 是变换 $x=\phi(y,u)$ 的函数行列式†的绝对值．$\tilde\varphi$ 不依赖于 $g_1,\cdots,g_{n-m}$ 的选取．此时我们定义，当 $\mathrm{supp}\varphi\subset U$ 时，$T(\varphi)=S(\tilde\varphi)$；当 $\mathrm{supp}\varphi$ 与 E 不相交时，$T(\varphi)=0$．由广义函数的局部性，我们能定义以 E 为支集的广义函数 $T\in\mathscr{D}'_{R^n}$，记作 $T=S\circ f=S(f)=S_{(f(x))}$，称它为在 $S_{(y)}$ 中**代入** $y=f(x)$ 的**广义函数**．合成函数的微分公式

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(S\circ f)=\sum_{i=1}^m\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial S}{\partial y_i}\circ f\right)$$

成立．

例 1) 当 $S=\delta^{(q)}_{(y)}\ (y\in\boldsymbol{R}^m)$ 时，E 是曲面 $f_1(x)=\cdots=f_m(x)=0$．若 $(f_1,f_2,\cdots,f_m)$ 满足上述的条件，则可以定义**具有包含在曲面内的支集的广义函数** $\delta^{(q)}(f_1,\cdots,f_m)$．因为 $\delta^{(q)}=D_y^q\delta$，所以它也可以表示为

$$\delta^{(q)}(f_1,\cdots,f_m)$$
$$=\partial^{|q|}\delta(f_1,\cdots,f_m)/(\partial f_1)^{q_1}\cdots(\partial f_m)^{q_m}$$

(Гельфанд-Шилов 的符号)．

例 2) $\quad f(x)=Ax+b$

(A 是 $n\times n$ 正则矩阵†，b 为向量)能代入任何 $S\in\mathscr{D}'_{R^n}$．例如 $\delta_{(x-b)}(\varphi)=\varphi(b)$，$\delta_{(x^2-c^2)}=(2c)^{-1}(\delta_{(x-c)}+\delta_{(x+c)})\ (c>0,x\in\boldsymbol{R}^1)$．

【直积】 以 x 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 的点，y 表示 $\boldsymbol{R}^m$ 的点，并记 $\mathscr{D}_{R^n}=\mathscr{D}_x$，$\mathscr{D}_{R^m}=\mathscr{D}_y$．如果 $\mathscr{D}_x\times\mathscr{D}_y$ 上的双线性泛函† $B(\varphi,\psi)$ 分别对 φ,ψ 连续，则存在 $\mathscr{D}_{(x,y)}$ 上的广义函数 W，满足 $B(\varphi,\psi)=W(\varphi(x)\psi(y))$ (**核定理**(法 théorème de noyaux))．W 是唯一确定的．对于 $T\in\mathscr{D}'_x$，$S\in\mathscr{D}'_y$，应用此定理于 $B(\varphi,\psi)=T(\varphi)S(\psi)$，即知存在唯一的 $W\in\mathscr{D}'_{(x,y)}$，使得 $W(\varphi(x)\psi(y))=T(\varphi)S(\psi)$．称此 W 为**直积** (direct product) $T_{(x)}\times S_{(y)}$ 或 $S_{(y)}\times T_{(x)}$ (下标 (x) 表示 T 是作用于 x 的函数的广义函数)．Fubini 定理成立：

$$(T_{(x)}\times S_{(y)})(\varphi(x,y))$$
$$=S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x,y)))$$
$$=T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x,y)))(\varphi\in\mathscr{D}_{(x,y)}).$$

【卷积】 设广义函数 S,T 中之一的支集是紧的．对于任意 $\varphi\in\mathscr{D}$，使 $(S_{(x)}\times T_{(y)})(\varphi(x+y))$ 与之对应．这样就定义了一个广义函数，称为 S 和 T 的**卷积** (英 convolution 法 produit de composition 德 Faltung)，记作 $S*T$．特别地，如果 S 和 T 分别是由函数 $f(x)$，$g(x)$ 所定义的广义函数，则 $S*T$ 是由 f,g 的卷积† $f*g$ 所定义的广义函数．例：

$$T*\delta=\delta*T=T,\ D^pT*S=T*(D^pS)$$
$$=D^p(T*S).$$

从而，如果设 E 是常系数偏微分算子 $P(D)$ 的基本解，则方程 $P(D)T=S$ 的解由 $S*E$ (设能取卷积)给出．

对于 $T\in\mathscr{D}'$，$\varphi\in\mathscr{D}$，$T*\varphi$ 等于一个 C^∞ 类函数 f (由 f 定义的广义函数)，且

$$f(y)=T_{(x)}(\varphi(y-x))$$

成立．称 f 为 T 的**正则化** (法 régularisée)．对于广义函数 S,T，如果关于任意的 $\varphi,\psi\in\mathscr{D}$ 的正则化 $f=S*\varphi$，$g=T*\psi$，$|f(x)g(y-x)|$ 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的积分为有限，则存在唯一的 $V\in\mathscr{D}'$，

使得 $V*(\varphi*\psi)(y)=\int f(x)g(y-x)dx$. 称 V 为**广义卷积** (generalized convolution), 写作 $S*T$ (C. Chevalley).

【用测度表示的广义函数】 我们以 $\mathscr{C}_{R^n}=\mathscr{C}$ 表示定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 内的具有紧支集的连续复值函数的全体. $\mathscr{C}$ 形成线性空间. $\mathscr{C}$ 中的序列 $\{\varphi_m\}$ 收敛于 0 的定义如下: 所有 φ_m 的支集包含在某一与 m 无关的紧集内, 且 $\varphi_m(x)$ 一致收敛于 0. 关于这种收敛连续的 $\mathscr{C}$ 上的线性泛函的全体, 记作 $\mathscr{C}'$. $\mathscr{C}'\subset\mathscr{D}'$ 成立. $T\in\mathscr{C}'$ 可以用对 $\boldsymbol{R}^n$ 的一切有界 Borel 集有定义的复值完全加性集函数[†] μ 表示为 $T=T_\mu$ (广义函数的例 2). 广义函数 T 称为**正广义函数** (positive distribution), 如果对在所有点 x 处取非负值的 $\varphi\in\mathscr{D}$, 有 $T(\varphi)\geqslant 0$. 正广义函数能由正测度 μ 表示为 $T=T_\mu$.

【具有紧支集的广义函数】 用 $\mathscr{E}_{R^n}=\mathscr{E}$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 上的 C^∞ 类复值函数 (支集不加限制) 的全体. $\mathscr{E}$ 形成线性空间. 在 $\mathscr{E}$ 上由

(13)　$$\rho_{p,n}(\varphi)=\sup_{|x|\leqslant n}|D^p\varphi(x)|$$

定义一个半范数族, 这里 p 遍历所有非负整数组, n 遍历所有非负整数. 以这个族为连续半范数基本系确定**空间 $\mathscr{E}$ 的拓扑**, $\mathscr{E}$ 就成为局部凸拓扑线性空间. 序列 $\{\varphi_m\}$ 在 $\mathscr{E}$ 的拓扑下收敛于 0 等价于, 对于任意的紧集 E 及任意的 p, $D^p\varphi_m(x)$ 在 E 上一致收敛于 0. 我们把关于这个拓扑连续的 $\mathscr{E}$ 上的线性泛函的全体记作 $\mathscr{E}'$. $\mathscr{E}'$ 是 $\mathscr{E}$ 的共轭空间. 引入共轭空间的强拓扑作为**空间 $\mathscr{E}'$ 的拓扑**. 在这些拓扑下, $\mathscr{E}$ 和 $\mathscr{E}'$ 是自反的. 对于具有紧支集的广义函数 T, 选取在 T 的支集上取值为 1 的任意函数 $\alpha(x)\in\mathscr{D}$, 对 $\varphi\in\mathscr{E}$, 令 $S(\varphi)=T(\alpha\varphi)$, 则 $S\in\mathscr{E}'$. S 与 α 的选取无关. 在这个意义下, 可以把 S 看作 T 在 $\mathscr{E}$ 上的扩张, 并把它们看作相同. 因而具有紧支集的广义函数的全体与 $\mathscr{E}'$ 是一致的.

【函数空间 $\mathscr{S}$】 我们简记

$$x^p=x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}.$$

若 $\varphi(x)$ 为 C^∞ 类函数, 且对任意的 p,q,

(14)　$$\rho_{p,q}(\varphi)=\sup_x|x^pD^q\varphi(x)|<\infty$$

成立, 则称 $\varphi(x)$ 为急减 C^∞ 类函数[†]. 把此种 φ 的全体记作 $\mathscr{S}$, 取 $\rho_{p,q}$ 为连续半范数的基本系而确定**空间 $\mathscr{S}$ 的拓扑**, 这样 $\mathscr{S}$ 成为局部凸拓扑线性空间. $\mathscr{S}$ 的共轭空间用 $\mathscr{S}'$ 表示. **空间 $\mathscr{S}'$ 的拓扑**也取它作为 $\mathscr{S}$ 的共轭空间的强拓扑.

【缓增广义函数】 当广义函数 $T\in\mathscr{D}'$ 能扩张为 $\mathscr{S}$ 上的连续线性泛函时, 其扩张是唯一的. 为使这种扩张成为可能的充分条件是 T 的任意正则化 $T*\varphi=f$ 为缓增连续函数(即存在多项式 $P(x)$ 使 $|f(x)|\leqslant|P(x)|$). 此时称 T 为**缓增广义函数** (英 slowly increasing distribution　法 distribution temperée). 这样的广义函数的全体和 $\mathscr{S}'$ 一致. $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}\subset\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$ 成立.

【Fourier 变换】 如果 $\varphi\in\mathscr{S}$, 则

$$\mathscr{F}\varphi(x)=(\sqrt{2\pi})^{-n}\int\varphi(y)\exp(-ixy)dy$$

$$(i=\sqrt{-1},\ xy=x_1y_1+\cdots+x_ny_n)$$

收敛. 对 $T\in\mathscr{S}'$, T 的 **Fourier 变换** (Fourier transform) $\mathscr{F}T$ 由

(15)　$(\mathscr{F}T)(\varphi)=T(\mathscr{F}\varphi)$, $\varphi\in\mathscr{S}$

定义. Fourier 逆变换以同样的方式定义, 但用 i 代替 $-i$. 例 1)

$$\mathscr{F}\cdot 1=(\sqrt{2\pi})^n\delta_x,$$

此处 1 是由恒等于 1 的函数定义的广义函数. 2) $\mathscr{F}(D^pT)=i^{|p|}x^p\mathscr{F}T$.

称 C^∞ 类函数 φ 为缓增 C^∞ 类函数[†], 如果它本身和它的一切偏导数均为缓增连续函数. 这样的函数的全体以 $\mathscr{O}_M$ 表示. 当 $\alpha\in\mathscr{O}_M$, $T\in\mathscr{S}'$ 时, $\alpha T\in\mathscr{S}'$ 成立.

$$\mathscr{F}(\alpha T)=\mathscr{F}\alpha*\mathscr{F}T,$$

$$\mathscr{F}(ix_jT)=-\partial(\mathscr{F}T)/\partial x_j.$$

对于 $\alpha\in\mathscr{O}_M$, $\mathscr{F}\alpha$ 称为**急减广义函数** (rapidly decreasing distribution), 这样的广义函数的集合与所有正规化均为急减 C^∞ 类函数的广义函数的集合是一致的, 我们用 $\mathscr{O}'_C$ 表示这个集合.

【环面群上的广义函数, Fourier 级数】 n 维环面群[†] X 是紧 C^∞ 流形, 因而 $\mathscr{D}_X=\mathscr{E}_X$, $\mathscr{D}'_X=\mathscr{E}'_X$. X 是 $\boldsymbol{R}^n$ 关于等价关系

$$x_j \equiv y_j \mod \boldsymbol{Z}\ (j = 1, 2, \cdots, n)$$

的商空间．由 $\boldsymbol{R}^n$ 的体积元素引入 X 的体积元素 dx．从而能对可积函数 f，由

$$T_f(\varphi) = \int_X f(x)\varphi(x)dx\ (\varphi \in \mathscr{D}_X)$$

定义广义函数 T_f．考虑函数

$$f_p(x) = \exp 2i\pi px$$

当 p 遍历所有 n 个整数的组时所成的族，则 X 上的任意广义函数 T 可展开为 **Fourier 级数** (Fourier series) $T = \sum c_p f_p$．反之，当给定数列 $\{c_p\}$ 时，若它是缓增的(即存在 k，使

$$|c_p| = O((1 + |p|^2)^k)),$$

则 $T = \sum c_p f_p$ 成为 X 上的广义函数．

【广义函数的结构】 具有紧支集的广义函数可表示为连续函数(在广义函数意义下)的偏导数的有限线性组合．设开集 Ω 的闭包是紧集，则任意广义函数 T 在 Ω 上的局部化具有同样的性质．在这种意义下，广义函数概念是函数概念的推广．又对任意的广义函数 T，存在序列 $\{\varphi_i\} \subset \mathscr{D}$，使在广义函数的收敛意义下，$T = \lim \varphi_i$．

【用广义函数对拟函数赋与意义】 在古典分析中不能称为函数的，但在应用上认为它的存在是便利的"函数"，一般称为**拟函数**(英 improper function　法 fonction impropre　德 uneigentliche Funktion)．把它们看作广义函数时，可赋予严格的意义．

例 1) **Dirac δ 函数** $\delta(x)$．$\delta(x)$ 是在 0 处取值为∞，在其他点处取值为 0 的"函数"，它具有下列性质．

$$\delta(-x) = \delta(x),\ \mathbf{1}'(x) = \delta(x),$$

$$\delta(cx) = |c|^{-1}\delta(x),$$

$$\delta(x^2 - c^2) = (2|c|)^{-1}\{\delta(x - c) + \delta(x + c)\},$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$$

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = f(c)\quad (f(x)$$

为区间 $[a,b]$ 上的连续函数，$a < c < b$)，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\delta(x-b)dx = \delta(a-b),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x-c)dx = -f'(c)$$

($f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上为 C' 类，$a < c < b$)，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(2\pi icx)dx = \delta(c).$$

如果把这些公式考虑为广义函数的有关公式，就都能加以说明．就是说，令

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx$$

即可，这里左边的 δ 是已讲过的广义函数的例．

例 2) **不变 δ 函数** $D(x, y, z, t)$．此函数用于场论[†]，具有下列性质：

$$D(x,y,z,t) = (2\pi)^{-2}\iiint \sin(\xi x + \eta y + \zeta z - \omega ct)\omega^{-1}d\xi d\eta d\zeta$$

(这里积分范围是全空间，

$$\omega = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \kappa^2},$$

c 为光速度，$\kappa \geqslant 0$ 是常数)．

$$D(x,y,z,0) = 0,$$

$$(\partial D/\partial t)_{t=0} = -4\pi c\delta(x,y,z).$$

$D(x,y,z,t)$ 对特征 Lorentz 群[†]是不变的．

$$D(x,y,z,-t) = -D(x,y,z,t).$$

$$(\Delta - (1/c^2)(\partial^2/\partial t^2) - \kappa^2)D = 0.$$

$$D = r^{-1}\partial F/\partial r,$$

此处

$$F = J_0(\kappa(c^2t^2 - r^2)^{1/2})(ct > r),$$

$$F = 0(r > ct > -r),$$

$$F = -J_0(\kappa(c^2t^2 - r^2)^{1/2})(ct < -r),$$

而 J_0 为 Bessel 函数[†]，

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$D(x, y, z, t)$ 是在光圆锥 ($ct = \pm r$) 上取值为∞，在其外部取值为 0 的"函数"，它也能由广义函数赋予基础．

【Гельфанд-Шилов 广义函数】 Гельфанд 和 Шилов 把 $\boldsymbol{R}^n$ 或 $\boldsymbol{C}^n$ 上的一个函数空间称为**基本空间** (fundamental space)，如果它是可数赋范空间或这样的空间的可数并，且它的拓扑

强于点点收敛拓扑. 属于基本空间的函数称为**基本函数** (fundamental function), 基本空间上的连续线性泛函定义为**广义函数** (generalized function) ([13],[14]), 也称为 **Гельфанд-Шилов 广义函数**. 已考察了各种基本空间及其上的广义函数, 并用于偏微分方程的问题. 以下叙述基本空间的例.

【基本空间 $K\{M_k\}$, $K(a)$】 给定定义在 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 S_M 上的实值函数的序列

$$1 \leqslant M_1(x) \leqslant M_2(x) \leqslant \cdots.$$

以 $\boldsymbol{K}\{\boldsymbol{M}_k\}$ 表示满足下述条件的 φ 的全体所形成的线性空间: φ 是 C^∞ 类函数, 在 S_M 之外为 0, 且对 $k=1,2,\cdots$,

$$(16) \quad \rho_k(\varphi) = \sup_{|p|\leqslant k}\sup_{x\in S_M} M_k(x)|D^p\varphi(x)| < \infty.$$

(16) 式的 $\rho_k(k=0,1,2,\cdots)$ 形成一个半范数族, 用它确定 $K\{M_k\}$ 的拓扑. 例 1) $S_M = E$($\boldsymbol{R}^n$ 的紧集), $M_k(x)=1$ $(k=1,2,\cdots)$. 此时 $K\{M_k\}$ 是其支集包含于 E 内的 C^∞ 类函数的全体, 把这个基本空间记作 $K(E)$. $E=\{x \mid |x_j| \leqslant a_j, j=1,2,\cdots,n\}$ 时, 把 $K(E)$ 写作 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a})(a=(a_1,a_2,\cdots,a_n))$. 例 2)

$$S_M = \boldsymbol{R}^n, \ M_k(x) = (1+|x|)^k.$$

此时 $K\{M_k\} = \mathscr{S}$.

【基本空间 $Z\{M_k\}$, $Z(a)$】 给定定义在 $\boldsymbol{C}^n$ 上的实值函数的序列

$$0 < C(y) \leqslant M_1(z) \leqslant M_2(z) \leqslant \cdots.$$

此处 $z=x+iy$, $C(y)$ 是连续函数. 以 $\boldsymbol{Z}\{\boldsymbol{M}_k\}$ 表示满足下述条件的 φ 的全体所成的空间: $\varphi(x)$ 是 C^∞ 类函数, 并可开拓为 $\boldsymbol{C}^n$ 上的整函数 $\varphi(z)$, 且对 $k=1,2,\cdots$,

$$(17) \quad \rho_k(\varphi) = \sup_{z\in\boldsymbol{C}^n} M_k(z)|\varphi(z)| < \infty.$$

(17) 式的 $\rho_k(k=1,2,\cdots)$ 构成-半范数族, 用它确定 $Z\{M_k\}$ 的拓扑. 例: 命

$$M_k(z) = e^{-a|y|}(1+|z|)^k,$$

得到空间 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{a})$. 此处

$$e^{-a|y|} = e^{-a_1|y_1|}e^{-a_2|y_2|}\cdots e^{-a_n|y_n|}(a_j > 0).$$

【S 型基本空间】 设 $\alpha, \beta, A, B, \bar{A}, \bar{B}$ 为 n 维向量. $A \geqslant B$ 表示

$$A_j \geqslant B_j (j=1,2,\cdots,n).$$

为简单起见, 记

$$A^p = A_1^{p_1}\cdots A_n^{p_n}, \ p^{p\alpha} = p_1^{p_1\alpha_1}\cdots p_n^{p_n\alpha_n}.$$

i) 给定 $\alpha \geqslant 0$, $A > 0$, 以 $\boldsymbol{S}_{\alpha,A}$ 表示满足下述条件的 φ 的全体所成的空间: φ 是 C^∞ 类函数, 且对任意的 q 和 $\bar{A} > A$, 有

$$(18) \quad \rho_{q,\bar{A}}(\varphi) = \sup_x \sup_p \frac{|x^p D^q \varphi(x)|}{\bar{A}^p p^{p\alpha}} < \infty.$$

例: $S_{0,A} = K(A)$.

ii) 给定 $\beta \geqslant 0$, $B > 0$, 以 $\boldsymbol{S}^{\beta,B}$ 表示满足下述条件的 φ 的全体所成的空间: φ 是 C^∞ 类函数, 且对于任意的 p 和 $\bar{B} > B$, 有

$$(19) \quad \rho_{p,\bar{B}}(\varphi) = \sup_x \sup_q \frac{|x^p D^q \varphi(x)|}{\bar{B}^q q^{q\beta}} < \infty.$$

iii) 给定 $\alpha, \beta \geqslant 0$, $A, B > 0$, 以 $\boldsymbol{S}_{\alpha,A}^{\beta,B}$ 表示满足下述条件的 φ 的全体所成的空间: φ 是 C^∞ 类函数, 且对任意的 $\bar{A} > A$, $\bar{B} > B$, 有

$$(20) \quad \rho_{\bar{A},\bar{B}}(\varphi) = \sup_x \sup_p \sup_q \frac{|x^p D^q \varphi(x)|}{\bar{A}^p \bar{B}^q p^{p\alpha} q^{q\beta}} < \infty.$$

这些空间的拓扑分别由 (18), (19), (20) 的半范数族引入. $S_{\alpha,A}$, $S^{\beta,B}$, $S_{\alpha,A}^{\beta,B}$ 总称为 **S 型基本空间**.

$$\mathscr{F}(S_{\alpha,A}) = S^{\alpha,A}(\alpha > 0),$$

$$\mathscr{F}(S^{\beta,B}) = S_{\beta,B}(\beta > 0),$$

$$\mathscr{F}(S_{\alpha,A}^{\beta,B}) = S_{\beta,B}^{\alpha,A}(\alpha+\beta > 1),$$

$$\mathscr{F}(S_{0,A}) = S^{0,A'},$$

$$\mathscr{F}(S^{0,B}) = S_{0,B'},$$

$$\mathscr{F}(S_{\alpha,A}^{\beta,B}) = S_{\beta,B'}^{\alpha,A'}(\alpha+\beta = 1),$$

这里 $A' = A\exp(1/A)$, $B' = B\exp(1/B)$. 当 $\alpha+\beta < 1$ 时, $S_{\alpha,A}^{\beta,B} = \{0\}$.

记 $\bigcup S_{\alpha,A} = S_\alpha$, $\bigcup S^{\beta,B} = S^\beta$, $\bigcup S_{\alpha,A}^{\beta,B} = S_\alpha^\beta$, 这里 A, B 遍历所有正 n 维向量.

【指数型整函数】 整函数 $f(z)$ 称为**指数型 $\leqslant \boldsymbol{b}$** (exponential type $\leqslant b$)

$$(b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)),$$

如果对任意的 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) > 0$, 存在常数 c_ε, 使对一切 z, 有 $|f(z)| \leqslant c_\varepsilon e^{(b+\varepsilon)|z|}$. 如果 $\varphi \in \mathscr{S}$ 能扩张为指数型 $\leqslant b$ 的整函数, 则对任

意的 $\varepsilon > 0$, $\varphi \in Z(b+\varepsilon)$（由 Phragmén-Lindelöf 定理†而得）. 由于

$$\mathscr{F}(K(b)) = Z(b)$$

和
$$\bigcap_{\varepsilon>0} K(b+\varepsilon) = K(b),$$

所以 $Z(b) = \bigcap Z(b+\varepsilon)$. 从而，可扩张为指数型 $\leqslant b$ 的整函数的急减 C^∞ 类函数的全体是 $\mathscr{F}(K(b))$ (**Paley-Wiener 定理**). 把这定理作进一步的推广，得到下面的定理：缓增连续函数 f 可扩张为指数型 $\leqslant b$ 的整函数的充分必要条件是它的 Fourier 变换 $\mathscr{F}f$（把它看作 $\mathscr{S}'$ 的元)的支集包含在

$$\{x \mid |x_1| \leqslant b_1, \cdots, |x_n| \leqslant b_n\}$$

内. 把在 $B = \{z \mid |z_1| \leqslant b_1, \cdots, |z_n| \leqslant b_n\}$ 上解析的函数的全体记作 $Z(b)$, $Z(b)$ 内的序列 $\{\varphi_m\}$ 收敛于 0 是指，存在与 m 无关的 B 的邻域 Ω，使一切 φ_m 在 Ω 上解析而且 $\{\varphi_m\}$ 在 Ω 上一致收敛于 0. 指数型 $\leqslant b$ 的整函数全体，与 $Z(b)$ 上在上述意义下连续的线性泛函的 Fourier 变换的全体是一致的（Гельфанд-Шилов).

【广义函数空间的核型性】 空间 $K\{M_p\}$ 的情形. 命 $M_p(x) = M_p(|x|)$ 为单调递增函数，设对任意 n 和 k 能决定 c 与 p，使

$$|M_n^{(k)}(t)| \leqslant cM_p(t)$$

成立，且对任意的 n 能决定 p，使得当 $t \to \infty$ 时，$m_{np}(t) = M_n(t)/M_p(t)$ 收敛于 0，并设 $m_{np}(|x|)$ 关于 x 在 $\boldsymbol{R}^n$ 上可积，在上述这些条件下，$K\{M_p\}$ 是核型空间†. 特别 $\mathscr{S}$, $K(m)$ 是核型空间. 因为 $K\{M_p\}$ 是 F 空间†，所以，如果 $K\{M_p\}$ 是核型空间，则 $K\{M_p\}$ 上的广义函数的空间(即 $K\{M_p\}$ 的共轭空间)是核型空间. 因为 $\mathscr{D}$ 是可以表示为 $\{K(m)\}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 的归纳极限的 LF 空间†，所以它是核型空间，$\mathscr{D}'$ 也是核型空间. 又空间 S_α^β 既是核型空间，也是 LF 空间. 从而 $(S_\alpha^\beta)'$ 是核型空间. 空间 $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}'$, $\mathscr{O}_M$, $\mathscr{O}'_C$ 也是核型空间. 因为 $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}'$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{D}'$ 是 F 空间或 LF 空间，或这两种空间的共轭空间，所以它们都是 Montel 空间†(→拓扑线性空间).

【佐藤超函数】 在实解析流形上可定义比 Schwartz 广义函数更为一般的佐藤幹夫超函数. 把 $\boldsymbol{R}^1$ 看做嵌入在 $\boldsymbol{C}^1$（=复数平面)内. 考虑在 $\boldsymbol{R}^1$ 的复邻域（包含 $\boldsymbol{R}^1$ 的开集）U 除掉 $\boldsymbol{R}^1$ 的集合 $U - \boldsymbol{R}^1$ 上解析的函数 $F(z)$，这样两个函数 $G(z)$ 和 $F(z)$ 之间的等价关系†定义为，$F(z) - G(z)$ 能开拓为在 $\boldsymbol{R}^1$ 的某个复邻域上解析的函数. 关于这种等价关系的等价类†称为 $\boldsymbol{R}^1$ 上的**佐藤超函数** (hyperfunction)，$F(z)$ 所属的类，形式地写作 $F(x+i0) - F(x-i0)$. 这可以说是解析函数边界值概念的推广. 超函数 $F(x+i0) - F(x-i0)$ 的广义导数，可以由 $dF(z)/dz$ 所属的类自然地给予定义.

把这个定义推广到 $\boldsymbol{R}^n$. 命 $U_1, U_2, \cdots, U_n$, $V_1, V_2, \cdots, V_n$, $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 为 $\boldsymbol{R}^1$ 的复邻域. $\varphi(z)$, $\psi(z)$ 为分别在

$$(U_1 - \boldsymbol{R}^1) \times \cdots \times (U_n - \boldsymbol{R}^1), (V_1 - \boldsymbol{R}^1) \times \cdots (V_n - \boldsymbol{R}^1)$$

上解析的函数. φ 和 ψ 之间的等价关系定义如下：当存在 $W_j \subset U_j \cap V_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$，又存在在 $(W_1 - \boldsymbol{R}^1) \times \cdots \times W_j \times \cdots \times (W_n - \boldsymbol{R}^1)$（第 j 个只有 W_j）上解析的函数 $\chi_j(z)$，使得

$$\varphi(z) - \psi(z) = \chi_1(z) + \cdots + \chi_n(z)$$

时，则 $\varphi \sim \psi$. 关于这个等价关系的等价类称为佐藤超函数. 在 $\boldsymbol{R}^n$ 的开集 Ω 上也可以用同样的方式定义超函数.

用系数在解析函数的层†中的相对上同调理论(→层)，可以给出与坐标系选择无关的，更自然的且与上面的定义等价的定义([11]). 也能揭示，佐藤超函数具有局部性.

开集上的佐藤超函数，不能定义为一个拓扑线性空间的共轭空间的元. 然而，支集在紧集 K 中的佐藤超函数与支集在 K 中的解析泛函等同，即，所有这样的佐藤超函数的空间，是定义在 K 的一个邻域上的局部解析函数空间的共轭空间，由于佐藤超函数层是松散的，我们也可以把佐藤超函数定义为支集在 $\boldsymbol{R}^n$ 中的解析泛函的局部有限和.

把一个广义函数表示为解析函数的边界值，这个想法并不新鲜. 这实际上是 Fourier 分

析的复方法的出发点. 正如我们早就注意到的, T. Carleman 曾经考虑过边界值不是函数的情形. 另外的例子可以在谱分解定理的 Carleman 证明中找到. 与此密切相关的是在物理中出现的色散关系. G. Köthe 曾进一步证明, $\boldsymbol{C}$ 中的一条简单闭解析曲线 C 上的任一广义函数是 $\boldsymbol{C}$-C 上的一个解析函数的边界值. 然而, 佐藤幹夫第一个证明了佐藤超函数的局部性质, 并且把这个理论推广到高维情形.

【超广义函数】 设 M_p 是一个正数序列, 使得 $C(M_p)$ 不是拟解析的(→拟解析函数), 空间

$$\mathscr{D}_{\{M_p\}} = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \exists h \exists C \text{ 使得 (21) 成立}\},$$

$$\mathscr{D}_{(M_p)} = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \forall h > 0 \exists C \text{ “(21)”}\} \ (*)$$

其中

$$(21) \qquad \sup|D^p\varphi(x)| \leqslant Ch^{|p|}M_p,$$

有自然的局部凸拓扑. 通常我们在 M_p 上附加条件使得乘法和微分是连续的. 特别重要的是 Gevrey 序列 $M_p = (p!)^s$ 的情形, 其中 $s > 1$.

这些空间上的连续线性泛函称为**超广义函数** (ultradistribution)(分别称为 C. Roumieu 型和 A. Beurling 型), 广义函数是超广义函数, 而超广义函数可嵌入到佐藤超函数中. 超广义函数有如同广义函数一样的局部性质. 佐藤超函数和超广义函数在微分方程理论中常常是有用的.

【参】 [1] L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, I 1950, II 1951; 修订版, 1966; [2] G. de Rham, Variétés différentiables, Hermann, 1955; [3] C. Chevalley, Theory of distributions, Columbia Univ. Lectures 1950—51; [4] L. Schwartz-I. Halperin, Introduction to the theory of distributions, Univ. of Toronto Press, 1952; [5] 岩村聯, 超函数, 岩波, 1958 (中译本: 岩村联, 广义函数, 上海科学技术出版社, 1961); [6] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [7] L. Schwartz, Transformation de Laplace des distributions, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., tome suppl. à M. Riesz (1952), 196—206; [8] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles 1, Ann. Inst. Fourier, **7** (1957), 1—141; [9] B. Malgrange, Equations aux dérivées partielles à coefficients constants I, II, C.R. Acad. Sci. Paris, **237** (1953), 1620—1622, **238** (1954), 196—198; [10] L. Ehrenpreis, Analytic functions and Fourier transform of distributions I, Ann. of Math., **63** (1956), 129—159; [11] 佐藤幹夫, 超函数の理論について, 数学, **10**(1958), 1—27; [12] M. Sato (佐藤幹夫), Theory of hyperfunctions I, II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8** (1959), 139—193, 387—437; [13] И. М. Гельфанд- Г. Е. Шилов, Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши, Успехи матем. наук, **9** (61) (1954), 141—148 (英译本: Fourier transforms of rapidly increasing functions and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem, Amer. Math. Soc. Transl., (2) **5** (1957), 221—274; [14] И. М. Гельфанд-Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, Физматгиз, 1958—1966 (中译本: И. М. 盖尔芳特, Г. Е. 希洛夫, 广义函数 I, IV, 科学出版社, 1965); [15] С. Л. Соболев, Sur un théorème d'analyse fonctionnelle, Мат. сб., **45** (1938), 471—496; [16] A. Friedman, Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, 1963; [17] L. Ehrenpreis, Fourier analysis in several complex variables, John Wiley, 1970; [18] В. П. Паламодов, Линейные дифференциальные операторы постоянными коэффициетами, Наука, 1967; [19] P. Schapira, Théorie des hyperfonctions, Lecture notes in math. 126, Springer, 1970; [20] 小松彦三郎, 超関数と定係数微分方程式, Lecture notes, Univ. of Tokyo, 1968; [21] 佐藤幹夫-柏原正樹, 超関数の構造について, 数学のあゆみ, **15** (1970), 9—72; [22] Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Proceedings of a conference at Katata, 1971, Lecture notes in math., Springer, 1973; [23] M. Sato-T. Kawai-M. Kashiwara (佐藤幹夫-河合隆裕-柏原正樹), Microfunctions and pseudo-differential equations, 发表于 [22] 内; [24] J. L. Lions and E. Magenes, Non-homogeneous boundary value problems-applications, vol. 3, Springer, 1973.

抽象积分 [英 abstract integral 法 intégrale abstraite 德 abstrakte Integral 俄 абстрактный интеграл 日 抽象積分] 积分的概念可从不同的观点出发向各种不同的方向抽象化. 它大致可以分为两个方向. 一个方向是对取值于局部凸拓扑线性空间†(不一定是数空间) 的函数或测度定义积分 (简称为在拓扑线性空间上的积分), 另外一个方向是把和序关系有关的积分抽象化. 我们对各方向取其有代表性的两三个积分予以叙述.

【拓扑线性空间上的积分】 【Bochner 积分】 设 $x(s)$ 为定义在 σ 有限测度空间† $(S, \mathfrak{S}, \mu)$ 上, 取值于 Banach 空间 X 中的函数, 如果在使

$$S = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

的互不相交的 $\mathfrak{S}$ 可测†集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 上, $x(s)$ 分别取常量 $c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$, 就称它

为**阶梯函数**（step function）或**有限值函数**（finite-valued function）．使用A_i的定义函数† $\chi_{A_i}(s)$，可以把这个阶梯函数表示为

$$x(s)=\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(s)c_j.$$

如果对于$x(s)$能选取适当的阶梯函数序列$\{x_n(s)\}$，使得在S上对几乎一切s，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n(s)-x(s)\|=0$$

成立，则称$x(s)$为**强可测的**（strongly measurable）．当$x(s)$为强可测，且$\|x(s)\|$作为S上的实值函数为 Lebesgue 可积†时，则定义$x(s)$为 **Bochner 可积的**（Bochner integrable）（由$x(s)$的强可测性可以得到$\|x(s)\|$的可测性）．特别当$x(s)$是 Bochner 可积的阶梯函数

$$\sum_{j=1}^{n}\chi_{A_j}(s)c_j$$

时，其 Bochner 积分定义为

$$\int_S x(s)d\mu=\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)c_j.$$

一般地说，对于 Bochner 可积函数$x(s)$，可以证明，存在满足下列条件的 Bochner 可积的阶梯函数序列$\{x_n(s)\}$：i）对几乎一切S，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n(s)-x(s)\|=0;$$

ii）$$\lim_{n\to\infty}\int_S\|x_n(s)-x(s)\|d\mu=0.$$

（例如，由$x(s)$的强可测性得到，存在阶梯函数序列$\{y_n(s)\}$，对几乎一切s，它强收敛于$x(s)$．对此$y_n(s)$，如下地定义阶梯函数序列$\{x_n(s)\}$：当$\|y_n(s)\|\leqslant 2\|x(s)\|$时，令$x_n(s)=y_n(s)$；当$\|y_n(s)\|>2\|x(s)\|$时，令$x_n(s)=0$；则$\{x_n(s)\}$满足上述条件 i)，ii)．）从而对于这样的$\{x_n(s)\}$，$\int x_n(s)d\mu$强收敛，且其极限不依赖于$\{x_n(s)\}$的选择方法．而$x(s)$的 **Bochner 积分**（Bochner integral），就定义为

$$\int_S x(s)d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_S x_n(s)d\mu.$$

为了和其他积分加以区别，有时把 Bochner 积分写作 (Bn)$\int_S x(s)d\mu$．Bochner 可积函数在任意的$\mathfrak{S}$可测集上都是 Bochner 可积的，除此之外，Lebesgue 积分的几乎所有性质（线性，完全可加性，绝对连续†性，Lebesgue 收敛定理†，Fubini 定理†等），把绝对值换以范数之后都照样成立．但是 Radon-Nikodym 定理†不成立．当T是由 Banach 空间X到 Banach 空间Y的连续线性算子†时，若S上取值于X中的函数$x(s)$是 Bochner 可积的，则$T(x(s))$作为S上取值于Y中的函数是 Bochner 可积的，且

$$\int_S T(x(s))d\mu=T\left\{\int_S x(s)d\mu\right\}$$

成立．特别当S是n维 Euclid 空间时，Bochner 积分具有强可微性（[13]，[21]，[6]）．

【Birkhoff 积分】 Birkhoff 积分是关于在σ有限测度空间$(S,\mathfrak{S},\mu)$上定义的，在 Banach 空间X中取值的函数$x(s)$，按 Lebesgue 积分的构造方法定义的积分．首先，对于X的元的可列族$\{x_i\}$，当级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_i$在其各项的次序任意改变之后仍然强收敛时，称$\sum_{j=1}^{\infty}x_i$为**无条件收敛**（unconditionally converge）．当$\sum_{j=1}^{\infty}x_i$无条件收敛时，可以证明，它的和不依赖于相加的顺序，总是一定的．特别当X是数空间时，无条件收敛和绝对收敛的概念是一致的；但一般地说，无条件收敛的级数并不一定绝对收敛$\left(\text{绝对收敛是指}\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|\text{收敛}\right)$．给定$S$的一个可列分割

$$\Delta: S=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_i(A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)),$$

$$\mu(A_j)<+\infty,$$

若函数$x(s)$在每个A_i上有界且

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)x(s_j)\quad(s_j\in A_j)$$

无条件收敛，则称$x(s)$**关于Δ可求和**，此种和的全体

$$\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j)x(s_j)\,|\,s_j\in A_j\right\}$$

的凸闭包†，称为 $x(s)$ 对于 Δ 的**积分值域**（integral range），记作 $J(x,\Delta)$. 于是，如果对任意的正数 ε，可选取 S 的可列分割 Δ，使 $x(s)$ 关于 Δ 可求和，且 $J(x,\Delta)$ 的直径†小于 ε，则称 $x(s)$ 为 **Birkhoff 可积的**（Birkhoff integrable）. 若 $x(s)$ 关于某一可列分割 Δ 可求和，则可以证明，它对 Δ 的任一加细† Δ' 仍然是可求和的，且 $J(x,\Delta')\subset J(x,\Delta)$. 从而当 $x(s)$ 是 Birkhoff 可积时，

$$\bigcap_{\Delta} J(x,\Delta)$$

成为只含有 X 的一个点的集合. 此

$$\bigcap_{\Delta} J(x,\Delta)$$

定义为 $x(s)$ 的 **Birkhoff 积分**（Birkhoff integral），写作

$$(\mathrm{Bk})\int_S x(s)d\mu$$

或简写为

$$\int_S x(s)d\mu.$$

Birkhoff 可积函数在任意的 $\mathfrak{S}$ 可测子集上仍为 Birkhoff 可积函数. Birkhoff 积分作为集函数具有完全可加性和绝对连续性，对于被积函数具有线性性质. 但 Fubini 定理不成立. 又对于收敛定理来说不能得到 Bochner 积分那样好的结果（[4]）. Bochner 可积函数必是 Birkhoff 可积的，但其逆不成立.

以此 Birkhoff 积分的构造法为基础，G. Birkhoff 和 R. S. Phillips 对取值于局部凸拓扑线性空间中的函数的积分作了定义（[5]，[18]）. 用此种积分的理论，使得 Birkhoff 积分以及下面要说明的 Гельфанд-Pettis 积分等，都成为这种积分基于在 Banach 空间上引入拓扑的方法，不同而得到的特殊情形（例如，引入弱拓扑†时就变成了 Гельфанд-Pettis 积分）. 进一步 C. E. Rickart 把 Birkhoff 积分推广到取值为局部凸拓扑线性空间的子集的函数，并求得了 Radon-Nikodym 定理（[20]）.

【Гельфанд-Pettis 积分】 Гельфанд-Pettis 积分是关于定义在 σ 有限测度空间 $(S,\mathfrak{S},\mu)$ 上而取值于 Banach 空间 X 中的函数 $x(s)$ 的积分，这种积分较之 Birkhoff 积分更为一般. 设 X^* 是 X 的共轭空间†，如果对于任意的 $x^*\in X^*$，$x^*(x(s))$ 作为 S 上的实值函数是 $\mathfrak{S}$ 可测的，则称 $x(s)$ 为**弱可测的**（weakly measurable）. 当 X 是可分†空间时，弱可测和强可测是等价的概念. 对于弱可测函数 $x(s)$，所谓 $x(s)$ 在 $\mathfrak{S}$ 可测集 A 上为 **Гельфанд-Pettis 可积的**（Gel'fand-Pettis integrable）或**弱可积的**（weakly integrable），是指对任意的 $x^*\in X^*$，$x^*(x(s))$ 作为 S 上的实值函数是 Lebesgue 可积†的，而且存在 $x_A\in X$，使

$$x^*(x_A)=\int_A x^*(x(s))d\mu$$

成立. 我们称 x_A 为 $x(s)$ 在 A 上的 **Гельфанд-Pettis 积分**（Gel'fand-Pettis integral）或**弱积分**（weak integral），记作

$$\int_A x(s)d\mu \text{ 或 } (\mathrm{G\text{-}P})\int_A x(s)d\mu.$$

在任意的 $\mathfrak{S}$ 可测集上 Гельфанд-Pettis 可积时，简称为 Гельфанд-Pettis 可积. 此积分和 Birkhoff 积分的性质大体上是相同的. 但是 Fubini 定理和 Radon-Nikodym 定理对此积分也是不成立的（[13]，[17]，[21]）. Birkhoff 可积函数必定 Гельфанд-Pettis 可积，但其逆不成立（[18]）.

作为比 Гельфанд-Pettis 积分更一般的积分概念，有如下的定义：对任意的 $x^*\in X^*$，只要求 $x^*(x(s))$ Lebesgue 可积，以此定义 $x(s)$ 的**弱可积性**（weak integrability）. 此时可证

$$\int_A x^*(x(s))d\mu$$

是 X^* 上的连续线性泛函，而 $x(s)$ 在 A 上的**弱积分**定义为 X^{**} 的元 x_A^{**}：

$$x_A^{**}(x^*)=\int_A x^*(x(s))d\mu$$

（[9]，[11]）. 一般地说，即使 X 是局部凸拓扑线性空间，同样能定义弱可积性，但此时以 X^* 上的代数的线性泛函来确定积分（[7]）.

实值函数关于定义在抽象空间 S 的完全加法族† $\mathfrak{S}$ 上且取值于拓扑线性空间的集函数的

积分，曾由 R. G. Bartle, N. Dunford, J. Schwartz 和 N. Bourbaki 等考虑过([3]). 这些结果推广到向量值被积函数的情形见[23].

【基于序关系的抽象积分】【Daniel-Stone 积分】 在抽象空间 S 上定义的实值函数 $f(s)$ 的集合 $\mathfrak{E}$，按函数通常的序，加法以及数乘构成格序线性空间†，再在 $\mathfrak{E}$ 上定义满足下面三个条件的泛函 $E(f)$: i) 加法性，即

$$E(f+g)=E(f)+E(g);$$

ii) 正值性，即 $f\geqslant 0$ 蕴涵 $E(f)\geqslant 0$; iii) 若 $f, f_n\in\mathfrak{E}(n=1,2,\cdots)$,

$$|f|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|,$$

则

$$E(|f|)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}E(|f_n|).$$

(其中 $|f|=f\cup(-f)$. →有序线性空间.)i), ii) 意味着 $E(f)$ 是 $\mathfrak{E}$ 上的正线性泛函. iii) 的等价条件是 iii′) 若 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}E(f_n)=0$. iii) 是由 M. H. Stone 给出的, iii′) 是 P. J. Daniel 给出的. 以下对于在 S 上定义的取实数值或 $\pm\infty$ 值的函数 φ，按下式确定 $N(\varphi)$:

$$N(\varphi)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}E(|f_n|)\,|\,f_n\in\mathfrak{E},\ |\varphi|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|\right\},$$

但当使得

$$|\varphi|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|f_n|$$

的 $f_n\in\mathfrak{E}$ 不存在时，命 $N(\varphi)=+\infty$. 当 $N(\varphi)=0$ 时，称 φ 为**零函数** (null function). 集合 A 的定义函数是零函数时，称 A 为**零集** (null set). 因为属于 $\mathfrak{F}_0=\{\varphi\,|\,N(\varphi)<+\infty\}$ 的函数，除一个零集外都取有限值，所以对于 $\mathfrak{F}_0$ 的函数，除了一个零集外，能规定其加法和数乘演算. 当 $N(\varphi-\phi)=0$ 时，就定义 $\varphi\sim\phi$，设 $\mathfrak{F}$ 是关于这个等价关系的等价类的集，则可以证明 $\mathfrak{F}$ 是以 N 为范数†的 Banach 格†. 这里 $\mathfrak{E}$ (把 $\mathfrak{E}$ 中满足 $E(|f-g|)=0$ 的 f, g 看作相同)包含在 $\mathfrak{F}$ 内. 令 $\mathfrak{L}$ 为 $\mathfrak{E}$ 关于范数 N 的闭包，称属于 $\mathfrak{L}$ 的函数 φ 为 **Daniel-Stone 可积** (Daniel-Stone integrable) 函数. φ 的 **Daniel-Stone 积分** (Daniel-Stone integral) $L(\varphi)$ 定义为

$$L(\varphi)=N(\varphi^+)-N(\varphi^-).$$

其中，$\varphi^+=(|\varphi|+\varphi)/2, \varphi^-=(|\varphi|-\varphi)/2$. L 是 $\mathfrak{E}$ 上的泛函到 $\mathfrak{L}$ 上的扩张. 对于这种积分，容易证明 Lebesgue 收敛定理成立. 就是关于 Fubini 定理也可以得到某种结果([19]). 此外，可以用 $\mathfrak{L}$ 和 L 来定义可测函数，可测集以及测度的概念，由这种测度，还能求出 L 和 Lebesgue 积分的关系([19]). 由于 $\mathfrak{L}$ 满足抽象 L 空间†的条件，因而适当地构造测度空间，$L(\varphi)$ 就能用 φ 在所构造的测度空间上的 Lebesgue 积分表示出来(→有序线性空间). 这里所介绍的 Daniel-Stone 积分、是 Stone 的工作([19]). Daniel 则从 E 出发定义上积分 $\bar{I}(\varphi)$，而 $\mathfrak{L}$ 是由 $\mathfrak{L}=\{\varphi\,|\,\bar{I}(\varphi)=-\bar{I}(-\varphi)\}$ 求得的([8]). Banach 也曾对于 E 的条件 iii) 换以 iii″) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=0$, $|f_n|\leqslant g$, f_n, $g\in\mathfrak{E}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}E(f_n)=0$: Banach 用此条件构成了和 Daniel 积分同样的积分([1]). 进一步，Bourbaki (Stone [19] IV) 和 E. J. McShane ([15]) 把 iii′) 中的序列换以用一般的有向集作为指标集的函数族† $\{f_\alpha\}(\alpha\in A)$，并使用广义极限†求得同样条件，用和 Daniel 同样的构造法把 Daniel-Stone 积分更一般化了.

对于 Daniel-Stone 积分，特别当 S 为局部紧† Hausdorff 空间†时，取具有紧支集†的连续函数的全体作为 $\mathfrak{E}$，若 $\mathfrak{E}$ 上的泛函 $E(f)$ 满足 i), ii)，则可以证明它也满足 iii′)，由 $E(f)$ 能够构造 Daniel-Stone 积分 $L(\varphi)$ ([7], →测度[Randon 测度]).

【Banach 积分】 Banach 除上述 Daniel-Stone 流派的积分之外，对于 $[0,1)$ 上的一切实值有界函数应用 Hahn-Banach 扩张定理†定义

了积分([2]). 令$\mathfrak{F}$为[0,1)上实值有界函数的全体,把这样的函数以周期1开拓到$(-\infty,\infty)$,令$\mathfrak{A}$为任意有限实数组$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$的全体. 对于$x(s)\in\mathfrak{F}$及$\alpha\in\mathfrak{A}$, 命实值函数$M(x,\alpha)$为:

$$M(x,\alpha)=\sup_{\infty<s<\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}x(S+\alpha_k)\right)\Big/n.$$

于是在$\mathfrak{F}$上由

$$p(x)=\inf_{\alpha\in\mathfrak{A}}M(x,\alpha)$$

定义泛函$p(x)$. 使用 Hahn-Banach 扩张定理,可知存在一定义在$\mathfrak{F}$上的满足$F(x)\leqslant p(x)$的线性泛函$F(x)$. 把这个$F(x)$写做

$$\int x(s)ds,$$

由它的定义方法可以证明$\int x(s)ds$具有下列性质.

1) $\int\{ax(s)+by(s)\}ds$

$$=a\int x(s)ds+b\int y(s)ds,$$

2) $x(s)\geqslant 0$ 蕴涵 $\int x(s)ds\geqslant 0$,

3) $\int x(s+s_0)ds=\int x(s)ds$,

4) $\int 1ds=1$,

其中a, b和s_0都是任意常数. 再者,若有必要,令

$$(F(x(s))+F(x(1-s))/2=\int x(s)ds,$$

则除上述性质1)—4)之外,还有性质

5) $\int x(1-s)ds=\int x(s)ds.$

这样的$\int x(s)ds$称为$x(s)$的**Banach 积分**(Banach integral).

比 Daniel-Stone 积分和 Banach 积分等更一般的构造法,有取值于格序线性空间的函数的积分,更有把格序线性空间到格序线性空间的变换(或是由有序集到有序集的变换)作为积分等,由序关系产生了多种抽象积分([14],[16]).

除本条所说明的积分之外,还有为数很多的积分应当罗列进去,作为关于这些积分的很好的综合说明书可举出参文考献[12].

【参】[1] S. Banach, The Lebesgue integral in abstract spaces, in S. Saks, Theory of the integral, Warsaw, 1937, p. 320—330; [2] S. Banach, Théorie des operations linéaires, Warsaw, 1932, p. 30—32 (Chelsea, 1963); [3] R. G. Bartle-N. Dunford-J. Schwartz, Weak compactness and vector measures, Canad. J. Math., 7 (1955), 289—305; [4] G. Birkhoff, Integration of functions with values in a Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., **38** (1935), 357—378; [5] G. Birkhoff, Moore-Smith convergence in general topology, Ann. of Math., (2) **38** (1937), 39—56; [6] S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, Fund. Math., **20** (1933), 262—276; [7] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Integration, ch. 1—9, Actualités Sci. Ind., Hermann: ch. 1—4, 1175a, 第二版 1965; ch. 5, 1244b, 第二版 1967; ch. 6, 1281a, 1959; ch. 7,8, 1306, 1963; ch. 9, 1343, 1969; [8] P. J. Daniel, A general form of integral, Ann. of Math., (2) **19** (1917—18), 279—294; P. J. Daniel, Further properties of the general integral, Ann. of Math., (2) **21** (1919—20), 203—220; [9] N. Dunford, Integration of vector valued functions (abstract), Bull. Amer. Math. Soc., **43** (1937), 24; [10] N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators, part I, Interscience, 1958, [11] И. Гельфанд, Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren, Мат. сб., **4** (46) (1938), 235—286; [12] T. H. Hildebrandt, Integration in abstract spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **59** (1953), 111—139; [13] E. Hille-R. S. Phillips, Functional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31** (1957) p. 58—92 (中译本: E. 希尔, R. S. 菲列浦斯,泛函分析与半群,上海科学技术出版社, 1964, 77—114 页); [14] S. Izumi-N. Matuyama-M. Nakamura-M. Orihara-G. Sunouchi (泉信一, 松山昇, 中村正弘, 折原正江, 洲之内源一郎), An abstract integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo, I—III, **16** (1940), 21—25, 87—89, 518—523; IV, **17** (1941), 1—4, V—X, **18** (1942), 45—49, 50—52, 53—56, 535—538, 539—542, 543—547; [15] E.J. McShane, Remark concerning integration, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **35** (1949), 46—49; [16] E. J. McShane, Order-preserving maps and integration processes, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press 1953; [17] B. J. Pettis, On integration in vector spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **44**(1938), 277—304; [18] R. S. Phillips, Integration in a convex linear topological space, Trans. Amer. Math. Soc., **47** (1940), 114—145; [19] M. H. Stone, Notes on integration, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. I, II, III, **34**(1948), 336—342, 447—455, 483—490; IV, **35** (1949), 50—58; [20] C. E. Rickart, An abstract Radon-Nikodym theorem, Trans. Amer. Math. Soc., **56** (1944), 50—66; [21] 吉田耕作, 位相解析, 岩波, 1951, p. 78—85; [22] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965, p. 131—136; [23] N. Dinculeanu, Vector measures, Pergamon, 1966.

线性算子 [英 linear operator 法 opérateur li-

néaire 德 linearer Operator 俄 линейный оператор 日 線形作用素] 使某一空间 $\mathfrak{X}$ 的某个子集的每个元对应到另一空间 $\mathfrak{Y}$ 的元 $y=Tx$ 的映射 T，在泛函分析中习惯上称为**算子**(operator). 在泛函分析中使用算子这一术语的场合，其定义域 $\mathfrak{D}(T)$，值域 $\mathfrak{R}(T)$ 是什么，同时它们又是什么样的空间的子集，常常起着重要的作用. 当 $\mathfrak{D}(T)$ 和 $\mathfrak{R}(T)$ 同时都是实或复线性空间†，而且

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Tx_1+\beta Tx_2$$

成立时，T 称为**线性算子**或**可加算子**(additive operator)(“线性”一词常在“具有可加性且连续”这个意义下使用). 在本条中，我们讨论 $\mathfrak{D}(T)$ 和 $\mathfrak{R}(T)$ 分别是 Banach 空间† $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ 的子空间且 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{X}$ 内稠密†的线性算子.

$$\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{X}$$

而且连续的线性算子 T 的全体所成的集合，用符号 $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ 来表示. 又用 $B(\mathfrak{X})$ 表示 $B(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$. 关于属于 $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ 的线性算子(→Banach 空间). 线性算子的例在本条的末尾总的写出来.

【算子的运算】 设 T_1, T_2 都是由 $\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{Y}$ 内的线性算子，则它们的和 T_1+T_2 由

$$\mathfrak{D}(T_1+T_2)=\mathfrak{D}(T_1)\cap\mathfrak{D}(T_2),$$

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$$

来定义. 又设 T_1 是由 $\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{Y}$ 的线性算子，T_2 是由 $\mathfrak{Y}$ 到 $\mathfrak{Z}$ 的线性算子，则积 T_2T_1 由

$$\mathfrak{D}(T_2T_1)=\{x\in\mathfrak{D}(T_1)\mid T_1x\in\mathfrak{D}(T_2)\},$$

$$T_2T_1x=T_2(T_1x)$$

来定义. 和、积都是线性算子. 数量乘法 αT 的定义也类似. 当 $\mathfrak{D}(T_1)\subset\mathfrak{D}(T_2)$ 而且

$$T_1x=T_2x,\quad x\in\mathfrak{D}(T_1)$$

时，称算子 T_2 为算子 T_1 的**扩张**(extension)，在不会误解为集合包含关系的情形下，写作 $T_1\subset T_2$. 若线性算子 T 满足条件“$x\neq 0$ 蕴涵 $Tx\neq 0$”，则 T 具有**逆算子**(inverse operator) T^{-1}. T^{-1} 是以 $\mathfrak{R}(T)$ 为定义域，以 $\mathfrak{D}(T)$ 为值域的线性算子. 积空间 $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ 的子集

$$\Gamma(T)=\{(x,Tx)\mid x\in\mathfrak{D}(T)\}$$

称为算子 T 的**图象**(graph).

【算子的收敛】 对线性空间 $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$，最常用的是下述三种拓扑. 在这三种拓扑下，$B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ 都成为局部凸拓扑线性空间†: (1) **一致算子拓扑**(uniform operator topology), (2) **强算子拓扑**(strong operator topology), (3) **弱算子拓扑**(weak operator topology). 这些拓扑依次由 0 的三种基本邻域系所决定，而这三种基本邻域系依次由所有形如 (1) $\{T\mid \|T\|<\varepsilon\}$, (2) $\{T\mid \|Tx\|<\varepsilon, x\in X\}$, (3) $\{T\mid |f(Tx)|<\varepsilon, x\in X, f\in Y'\}$ 的集合所组成，其中 ε 取遍所有正数，X 取遍 $\mathfrak{X}$ 的所有有穷子集而 Y' 取遍 $\mathfrak{Y}$ 的对偶空间† $\mathfrak{Y}'$ 的所有有穷子集. 这样，一致算子拓扑是由 $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ 内的范数†(→Banach 空间[线性算子和线性泛函])所确定的度量拓扑. 算子序列 $\{T_n\}$ 关于这些拓扑收敛于 T 时依次称为 (1) **一致收敛**(uniform convergence), (2) **强收敛**(strong convergence), (3) **弱收敛**(weak convergence). 我们有这三种收敛，依次当且仅当: (1) $\|T_n-T\|\to 0$, (2) 对每个 $x\in\mathfrak{X}$,

$$\|(T_n-T)x\|\to 0,$$

(3) 对每个 $x\in\mathfrak{X}$ 和每个 $f\in\mathfrak{Y}'$,

$$|f(T_nx-Tx)|\to 0.$$

【闭算子】 在讨论不一定属于 $B(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})$ 的线性算子时，比 T 的连续性

$$\lim Tx_n=Tx(n\to\infty)$$

的概念更为一般的闭算子的概念是重要的. 当 T 的图象是 $\mathfrak{X}\times\mathfrak{Y}$ 的闭集时，即 $x_n\in\mathfrak{D}(T)$, $x_n\to x$ 且 $Tx_n\to y$ 蕴涵 $x\in\mathfrak{D}(T)$ 且 $Tx=y$ 时，则 T 称为**闭算子**(closed operator). 如果 T 连续且 $\mathfrak{D}(T)$ 是闭的，则 T 是闭算子. 又 $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{X}$ 的闭算子是连续算子(**闭图象定理**(closed graph theorem)). 由 $\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{Y}$ 的算子 T 称为**可闭算子**(closable operator)，如果 T 有一个闭扩张，或等价地，如果 $x_n\in\mathfrak{D}(T)$, $x_n\to 0$, 且 $Tx_n\to y$ 蕴涵 $y=0$. 当 T 是由 $\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{Y}$ 的线性算子且 $\mathfrak{D}(T)$ 在 $\mathfrak{X}$ 内稠密时，那么 T 的对偶算子†(dual operator)或**伴随算子**(adjoint operator) T' 定义如下: T' 是由 $\mathfrak{Y}'$ 到 $\mathfrak{X}'$ 的一个算子，它由关系 $\mathfrak{D}(T')=\{f\in\mathfrak{Y}'\mid$ 存在 $g\in\mathfrak{X}'$, 使对所有 $x\in\mathfrak{D}(T)$, 有 $g(x)=f(Tx)\}$ 和

$T'f = g$, $f \in \mathfrak{D}(T')$ 来决定. 简言之

$$(T'f)(x) = f(Tx) \quad (\forall x \in \mathfrak{D}(T))$$

(→Banach 空间). T' 必为闭算子,但 $\mathfrak{D}(T')$ 不一定在 $\mathfrak{Y}'$ 内稠密.

【Hilbert 空间的算子】 本节将叙述 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 都是复 Hilbert 空间†的情形. 设 T 是由 $\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{Y}$ 的稠定线性算子. 此时常用 T^* 代替 T',而 T^* 是由 $(x, T^*y) = (Tx, y)$ $(x \in \mathfrak{D}(T))$ 所决定的由 $\mathfrak{Y}$ 到 $\mathfrak{X}$ 的算子. 由 F. Riesz 定理†确定由 $\mathfrak{X}$ 到 $\mathfrak{X}'$ 上的一个反线性映射 $\pi_{\mathfrak{X}}$: $(\pi_{\mathfrak{X}} x)u = (u, x)$, $\pi_{\mathfrak{X}}$ 给出了 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{X}'$ 之间的一个同构对应,用它即有 $T^* = \pi_{\mathfrak{X}}^{-1} T' \pi_{\mathfrak{Y}}$ 成立. T^* 称为 T 的**伴随算子** (adjoint operator). 对应 $T \to T'$ 是线性的,而对应 $T \to T^*$ 是反线性的. $\mathfrak{D}(T^*)$ 在 $\mathfrak{Y}$ 内稠密和 T 具有闭算子扩张是等价的,此时 T 的最小闭扩张 $\bar{T}$ 和 $T^{**} = (T^*)^*$ 是一致的. $\bar{T}$ 称为 T 的**闭包** (closure).

在 Hilbert 空间中,和伴随算子这一概念相联系,可以定义各种类型的算子,它们起着重要的作用. $\mathfrak{X}$ 内的稠定线性算子 $T(\mathfrak{Y} = \mathfrak{X})$ 满足 $T \subset T^*$ 时, T 称为**对称算子** (symmetric operator) 或 **Hermite 算子**(Hermitian operator). 特别当 $T = T^*$ 时, T 称为**自伴算子** (self-adjoint operator) 或**自共轭算子**. 对称算子是可闭的. 对称算子 T 称为本质自伴的,如果 T 的闭包 $\bar{T}$ 是自伴的. 如果 $T \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ 在 $\mathfrak{X}$ 的子空间 $\mathfrak{M}$ 上为等距的 ($\|Tx\| = \|x\|$ $(x \in \mathfrak{M})$), 且在 $\mathfrak{M}$ 的正交补空间†上为 0, 则 T 称为以 $\mathfrak{M}$ 为始集,以 $\mathfrak{N} = T\mathfrak{M}$ 为终集的**部分等距算子** (partially isometric operator). 这一性质等价于 T^*T, TT^* 分别是 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 上的射影算子†. 当 $\mathfrak{M} = \mathfrak{X}$ 时, T 称为**等距算子** (isometric operator); 当 $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = \mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ 时, T 称为**酉算子** (unitary operator). T 为酉算子和 $T^* = T^{-1}$ 是等价的. 当 $T^*T = TT^*$ 时, T 称为**正规算子** (normal operator). 自伴算子,酉算子都是正规算子的特殊情形. 正规算子,特别是自伴算子的构造,通过谱分解定理已有详细研究 (→特征值问题). 对任意的稠定闭算子 T, 存在正自伴算子 P (这里"正"是指$(Px, x) \geqslant 0$, $x \in \mathfrak{D}(T)$) 和以 $\mathfrak{R}(P)^a = \mathfrak{R}(T^*)^a$ (a 表示闭包)为始集的部分等距算子 W, 使得 $T = WP$. 算子 W 和 P 由上述要求唯一确定. 这称为 T 的**标准分解** (canonical decomposition).

$\mathfrak{X}$ 的一个闭子空间 $\mathfrak{M}$ 称为算子 $T \in B(\mathfrak{X})$ 的一个**不变子空间** (invariant subspace), 如果 T 映 $\mathfrak{M}$ 于 $\mathfrak{M}$ 内. 关于 Hilbert 空间内的不变子空间的问题曾由许多人研究过 (见 Helson [14]). 对 L_2 空间 (或所谓 Hardy 空间 H_2) 内单位圆上的移位算子, A. Beurling 的一条定理给出了它的所有闭子空间的一个函数论的特征. 一个无限维可分 Hilbert 空间内的任一有界线性算子是否有非平凡的不变子空间, 这一问题还没有解决.

【谱、预解式】 命 T 为复 Banach 空间 $\mathfrak{X}$ 上的闭算子 $(\mathfrak{Y} = \mathfrak{X})$. I 为单位算子. 使 $\lambda I - T$ 在 $B(\mathfrak{X})$ 内有一个逆的复数 λ 的全体, 记作 $\rho(T)$. $\rho(T)$ 称为 T 的**预解集** (resolvent set). $\rho(T)$ 的补集 $\sigma(T)$ 称为 T 的**谱** (spectrum). 当 $\lambda \in \rho(T)$ 时,

$$R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1} \in B(\mathfrak{X})$$

称为 T 的**预解式算子**或简称为 T 的**预解式** (resolvent) (也有称 $-R(\lambda; T)$ 为预解式的). 如果 $\lambda_0 \in \rho(T)$, 则 $\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| < \|R(\lambda_0; T)\|^{-1}\} \subset \rho(T)$, 所以 $\rho(T)$ 是开集, $\sigma(T)$ 是闭集. T 是闭算子, 因而 $\sigma(T) \neq \varnothing$, 但 $\rho(T)$ 是空集的情形也是存在的 (→[线性算子的例]例 2). 对于 $\lambda_1, \lambda_2 \in \rho(T)$, **预解方程** (resolvent equation)

$$R(\lambda_1; T) - R(\lambda_2; T) = (\lambda_2 - \lambda_1) R(\lambda_1; T) R(\lambda_2; T)$$

成立, $R(\lambda; T)$ 在 $\rho(T)$ 内是 λ 的全纯函数. (关于向量值函数的解析性→[向量值函数的微积分].) 当 $T \in B(\mathfrak{X})$ 时, 谱半径†

$$r(T) = \lim \|T^n\|^{1/n} \leqslant \|T\| \quad (n \to \infty)$$

存在, 且 $\{\lambda \mid |\lambda| > r(T)\} \subset \rho(T)$, 并有 $\lambda \in \sigma(T)$, 满足 $|\lambda| = r(T)$. 又 $\rho(T') = \rho(T)$, 并且 $R(\lambda; T') = R(\lambda; T)'$ 成立, 在 Hilbert 空间的情形, 有 $\rho(T^*) = \overline{\rho(T)}$ ($\overline{}$ 表示复数的共轭), 且 $R(\lambda; T^*) = R(\bar{\lambda}; T)^*$.

【向量值函数的微积分】 在域 Ω 的每个点

t 处有定义的取值于 Banach 空间 $\mathfrak{X}$ 的函数的微积分，在算子理论中是一个有效的工具．因为在微分积分中必然包含着 $\mathfrak{X}$ 内的极限的概念，所以就有用 $\mathfrak{X}$ 的什么样的拓扑的问题．通常既用范数拓扑，也用弱拓扑†，而当 $\mathfrak{X}$ 是由算子形成的 Banach 空间时，也用强算子拓扑或弱算子拓扑．对于一种拓扑的可微性、可积性等，蕴涵对于较弱拓扑的同样的性质．相反的陈述有时也成立，(但可能要在某些附加条件之下．(例如，有限测度空间上的 $\mathfrak{X}$ 值函数为 Bochner 可积†，当且仅当它为 Гельфанд-Pettis 可积†，且殆遍分离取值．)当然，拓扑越强，概念就越容易使用．

在 Ω 是区间的情形，$x(t)$ 的强（弱）可微性，可用范数拓扑(弱拓扑)下的收敛，像通常那样来定义．当 $\Omega=[a,b]$，$x(t)$ 为强连续

$$(\|x(t')-x(t)\|\to 0(t'\to t))$$

时，$x(t)$ 的 Riemann 积分由部分和按范数的极限来定义：

$$\int_a^b x(t)\,dt=\lim\sum x(\tilde{t}_i)(t_{i+1}-t_i),$$

微积分基本定理，即不定积分的强可微性定理，仍然成立．在算子理论中利用积分时，多数情形下 Riemann 积分是够用的(→算子半群和发展方程)．作为一般测度空间†Ω 上的 $x(t)$ 的 Lebesgue 积分，相当于弱积分的有 Гельфанд-Pettis 积分†，相当于强积分的有 Bochner 积分†(→抽象积分)．

设 Ω 是复数平面上的一个域，$\mathfrak{X}$ 是复 Banach 空间．如果对任意的 $f\in\mathfrak{X}'$，$f(x(t))$ 在 Ω 内全纯†，则存在 Ω 上的取值于 $\mathfrak{X}$ 中的函数 y，使 $\|\delta^{-1}(x(t+\delta)-x(t))-y(t)\|\to 0$ $(\delta\to 0)$ 成立（在 $\mathfrak{X}=B(\mathfrak{Y},\mathfrak{Z})$ 的情形，代替 $x(t)$ 而写作 $T(t)$，此时只须假设 $g(T(t)y)(y\in\mathfrak{Y},g\in\mathfrak{Z}')$ 的全纯性即可)．就是说，关于全纯性强与弱是没有区别的．对于这样的 $x(t)$，Cauchy 积分定理†

$$\int_C x(t)\,dt=0$$

成立，从而能作 Laurent 展开†

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(t-t_0)^n$$

$$\left(a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C x(t)(t-t_0)^{-n-1}dt\right)$$

(积分是 Riemann 积分)，这样就能和复函数论平行地进行讨论．例如，关于最大模原理以及由此导出的定理，相类似的定理多数情形都是成立的(→全纯函数，有界函数)．(关于本节，[1] 的第 3 章，[2] 的第 3 章有详细的叙述．)

同样可定义多变量的全纯函数．设 $x(t)$ 是定义在复（或实）解析流形†的域 Ω 上，取值于 Banach 空间 $\mathfrak{X}$ 中的函数，当它在 Ω 的每个点 t 的一个邻域内能够展开为复(或实)解析局部坐标的强收敛的幂级数时，就称为 Ω 上取值于 $\mathfrak{X}$ 中的全纯函数或(实)解析函数．这是不依赖于所用的局部坐标的概念．

当 $f:\Omega\to\mathfrak{X}$ 的定义域 Ω 是复 Banach 空间 $\mathfrak{Y}$ 的开集时，我们仍然可以考虑 f 的导数．设对每个 $t\in\Omega$ 和每个 $h\in\mathfrak{Y}$，极限

$$\delta x(t;h)=\operatorname{s-}\lim_{\delta\to 0}(x(t+\delta h)-x(t))/\delta$$

存在，则称 $x(t)$ 在 Ω 内是 **Gâteaux 可微的** (Gâteaux differentiable)，且称 $\delta x(t;h)$ 为 x 在 t 处的 **Gâteaux 微分** (Gâteaux differential)．函数 $\delta x(t;h)$ 对 h 是线性的．如果存在 $\delta x(t)\in B(\mathfrak{Y},\mathfrak{X})$，$t\in\Omega$，使

$$\lim_{\|h\|\to 0}\|x(t+h)-x(t)-\delta x(t)h\|/\|h\|=0,$$

则称 $x(t)$ 在 t 处是 **Fréchet 可微的** (Fréchet differentiable)，且称 $\delta x(t)$ 为 x 在 t 处的 **Fréchet 导数** (Fréchet derivative)．于是 $x(t)$ 在 Ω 内 Fréchet 可微，当且仅当它是 Gâteaux 可微的且对每一 $t\in\Omega$，$\delta x(t;h)$ 在 $\{h\mid\|h\|=1\}$ 上有界．在此情形下 $\delta x(t;h)$ 可以写成

$$\delta x(t;h)=\delta x(t)h,$$

并把它称为 x 的 **Fréchet 微分** (Fréchet differential)．当 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 为实 Banach 空间时，要把 $\delta x(t,h)$ 关于 h 为线性作为定义的一部分．

【算子演算】 在算子理论中，**算子演算** (operational calculus) 一般是指定义算子 T 的"函数"$f(T)$的一种方法，使之能在复值函数 f 的一个集合和相应的算子 $f(T)$ 的集合之间建立某种代数同构．按照对 T 和 f 的范围的选择方式的

不同，就有各种理论．以下叙述有代表性的两种．1) 取T为 Hilbert 空间$\mathfrak{X}$内的自伴算子，设$T=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)$为它的谱分解†．取$f(\lambda)$为$\boldsymbol{R}$上的复值 Borel 可测函数时，若对于满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d(E(\lambda)x,x)<\infty$$

的$x\in\mathfrak{X}$，$f(T)x$ 由

$$(f(T)x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)d(E(\lambda)x,\ y)$$

定义时(→特征值问题)，则$f(T)$是正规算子，且下列诸关系成立：

i) $(\alpha f+\beta g)(T)\supset\alpha f(T)+\beta g(T)$;

ii) $(fg)(T)\supset f(T)g(T)$;

iii) $f(T)^*=\bar{f}(T)$.

特别是，例如当g为有界时，i)，ii) 中等号成立．2) 取$\mathfrak{X}$为复 Banach 空间，设$T\in B(\mathfrak{X})$，把在$\sigma(T)$的一个邻域内全纯的函数的全体写作$\mathfrak{F}(T)$．对于$f\in\mathfrak{F}(T)$，由

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)R(t;T)dt$$

定义算子$f(T)\in B(\mathfrak{X})$，这里C是由有限条可求长 Jordan 弧组成的闭曲线，包含$\sigma(T)$在其内部，且C及其内部完全包含在f为全纯的域之内．当$f,g\in\mathfrak{F}(T)$时，上面的 i)，ii) 中，等号成立．代替 iii)，有 iv) $\mathfrak{F}(T)=\mathfrak{F}(T')$，且$f(T')=f(T)'$．此种形式的积分常常称为 **Dunford 积分**(Dunford integral)．$T\in B(\mathfrak{X})$为自伴时，这两种定义是一致的．在 1)，2) 两种情形下，**谱映射定理** (spectral mapping theorem) $\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$ 都成立．

可以构造其他种类的算子演算，例如T为算子半群的生成算子的情形(→算子半群和发展方程)．

【预解式的孤立奇点】 设T为$\mathfrak{X}$上的闭算子，λ_0为$\sigma(T)$的孤立点．在λ_0的邻域内，取充分小的圆C，并命

$$E=\frac{1}{2\pi i}\int_C R(\lambda;T)d\lambda,$$

则$R(\lambda;T)$在λ_0邻域内的 Laurent 展开是

$$R(\lambda;T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n(\lambda-\lambda_0)^n,$$

其中$A_n=(-1)^{n+1}(\lambda_0 I-T)^{-(n+1)}E(n<0)$．$E$是属于$\lambda_0$的主子空间†上的射影，在$\mathfrak{R}(E)$的维数$\nu<\infty$的情形，$\lambda_0$成为$R(\lambda;T)$的极点，它的阶数不超过$\nu$，且$\lambda_0$是$T$的一个特征值，其重数不超过$\nu$．

【对称算子的扩张】 对 Hilbert 空间$\mathfrak{X}$上的闭对称算子T，在应用上常有必要求其自伴扩张．这里先从扩张的一般讨论开始．对于闭对称算子T，$T\pm iI$是一对一的，其值域$\mathfrak{R}_\pm$是$\mathfrak{X}$的闭子空间．由$\mathfrak{R}_+$到$\mathfrak{R}_-$的算子

$$V_T=(T-iI)(T+iI)^{-1}$$

是等距的，而且$(I-V_T)\mathfrak{R}_+$在$\mathfrak{X}$内是稠密的．V_T称为T的 **Cayley 变换** (Cayley transform)．反之，如果V是由$\mathfrak{X}$的闭子空间$\mathfrak{M}$到另一闭子空间$\mathfrak{N}$上的等距算子，$(I-V)\mathfrak{M}$在$\mathfrak{X}$内稠密，则使得$V_T=V$的闭对称算子T能由

$$I=i(I+V)(I-V)^{-1}$$

确定．这样，$V\longleftrightarrow V_T$的对应是一对一的，$T\subset S$和$V_T\subset V_s$是等价的，又T是自伴算子和V_T是$\mathfrak{X}$的酉算子是等价的．当把$\pm i$换成λ，$\lambda(\Im\lambda\neq 0)$时，这样的讨论几乎同样成立．子空间$\mathfrak{X}-\mathfrak{R}_\pm=\{x\,|\,T^*x=\pm ix\}$的维数$n_\pm$称为$T$的**亏指数** (deficiency index)．在此种情形，设$\sigma_r(T)$是T的剩余谱†，$\Pi_\pm=\{\lambda\,|\,\Im\lambda\gtrless 0\}$，则下列结论成立：i) 对应$n_+>0$或$=0$，有$\Pi_+\subset\sigma_r(T)$或$\subset\rho(T)$，关于$n_-,\Pi_-$也有同样结果；ii) T具有自伴扩张$\Leftrightarrow n_+=n_-$；iii) T为自伴$\Leftrightarrow n_+=n_-=0\Leftrightarrow\Pi_\pm\subset\rho(T)$．在$T$为对称但非闭的情形，可以把上面的讨论用于$T$的最小闭扩张$\bar{T}$，并称$\bar{T}$的亏指数为$T$的亏指数．

T具有自伴扩张的具体条件是：1)半有界算子，即当存在实数γ，使$(Tx,\ x)\geqslant\gamma\|x\|^2$ $(x\in\mathfrak{D}(T))$时，T就具有满足同样不等式(γ相同)的自伴扩张．2)实算子．即当存在$\mathfrak{X}$到$\mathfrak{X}$上的反线性映射J，满足$(Jx,\ Jy)=(y,\ x)$，$J^2=I$，$JT=TJ$时，T就具有自伴扩张(参看下节的例 2)．

【线性算子的例】 1) 积分算子. 设 E, E' 分别是测度空间 Ω, Ω' 上的函数空间†, $k(t, s)$ 为 $\Omega' \times \Omega$ 上的可测函数. 把满足下列条件的函数 $x(s)$ 的全体记为 $\mathfrak{D}(K)$: $x(s) \in E$, 且

$$(Kx)(t) = \int_{\Omega} k(t,s)x(s)d\mu(s)$$

作为 t 的函数属于 E' 其中积分假设为绝对收敛,把 $x \in \mathfrak{D}(K)$对应到 Kx 的映射K是由 $\mathfrak{D}(K)$ 到 E' 的线性算子. 这种用积分定义的算子称为**积分算子**(integral operator). 定义这种算子的函数 $k(t, s)$ 称为**积分核** (integral kernel) 或简称为**核** (kernel). 特别是当 $E = L_p(\Omega)$, $E' = L_p(\Omega')$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 时, 如果存在M, 使

$$\int_{\Omega} |K(t,s)| d\mu(s) \leqslant M,$$

$$\int_{\Omega'} |K(t,s)| d\mu'(t) \leqslant M,$$

则上面定义的算子 K 是由 $L_p(\Omega)$ 到 $L_p(\Omega')$ 的有界线性算子,且 $\|K\| \leqslant M$ 成立(此外→紧算子[紧算子的例]).

2) 微分算子. 设 $\mathfrak{X} = L_2(0,1)$, 把 $x \in C^2(0,1)$ 且在 $t=0, 1$ 的邻域内取值为 0 的 x 的全体记为 $\mathfrak{D}(T_0)$, 又把 $x \in C^1(0, 1)$, $x'(t)$ 绝对连续且 $x'' \in \mathfrak{X}$ 的 $x \in \mathfrak{X}$ 的全体记为 $\mathfrak{D}(T_1)$. 若定义 T_0, T_1 为:

$$(T_i x)(t) = -x''(t), \quad i = 0, 1,$$

$x \in \mathfrak{D}(T_i)$,则 $T_0^* = T_1$, 所以 T_0 是对称算子. 此外, T_0 关于对合 $x \to \bar{x}$ 为实算子. 因为

$$(T_1 - \lambda I)x = 0$$

有两个属于 $\mathfrak{X}$ 的独立解, 所以 $\rho(T_1) = \varnothing$, T_0 的亏指数 $n_\pm$ 都是 2. T_0的自伴扩张, 可以由"边界条件"限制下的定义域而得到 (→微分算子).

3) Fourier 变换†. 对于 $x \in L_p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$,

$$(Ux)(s) \lim_{m\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{|t|<m} \exp(-ist)x(t)dt$$

在 $L_q(\boldsymbol{R}^n)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ 的范数意义下收敛,这样定义的算子 $U \in B(L_p, L_q)$. $p = q = 2$ 时, U 为 L_2 的酉算子 ([5], [8]).

4) **奇异积分算子** (singular integral operator). 命 $k(t)$ 为在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义的 0 次齐次有界可测函数, 且在单位球面上积分等于零, 对于 $x \in L_p(\boldsymbol{R}^n)$ $(1 < p < \infty)$,

$$(Tx)(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|t-s|>\varepsilon} \frac{k(t-s)}{|t-s|^n} x(t) ds$$

在 $L_p(\boldsymbol{R}^n)$ 的范数下收敛, 这样定义的算子 $T \in B(L_p)$. 这种算子称为 Calderón-Zygmund 奇异积分算子,它构成称为伪微分算子†的更一般的一类算子的子类. Hilbert 变换†是它的特殊情形. 它们为研究椭圆型偏微分方程解的唯一开拓定理†提供了有力的手段 [10, 11](→椭圆型偏微分方程[解的唯一开拓定理]).

【参】 [1] N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators I, II, Interscience-John Wiley, 1958, 1963; [2] E. Hille-R.S. Phillips, Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 第二版 1957 (中译本: E. 希尔, R. S. 菲列浦斯,泛函分析与半群(上册), 上海科学技术出版社, 1964); [3] F. Riesz-B. Sz. Nagy, Leçons d'analyse fonctionelle, Akadémiai Kiadó, 第三版,1955 (中译本: F. 黎茨, B. 塞克佛尔维-纳吉, 泛函分析讲义, 第一卷, 科学出版社, 1963); [4] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932; [5] 洲之内源一郎, フーリエ解析, 共立出版, 1956; [6] 吉田耕作, 位相解析, 岩波, 1951; [7] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1964; [8] E.C. Titchmarsh, Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford, 1937; [9] A.P. Calderón-A. Zygmund, Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., **79** (1957), 901—921; [10] A. P. Calderón, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. Math., **80** (1958), 16—36; [11] S. Mizobata (溝畑茂), Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto, **31** (1958), 219—239; [12] Л. В. Канторович-Г.Р. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Москва, 1959 (英译本: L. V. Kantorovič-G. R. Akilov, Functional analysis in normed spaces, Pergamon, 1964); [13] И. Ц. Гохберг-М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Наука, 1965(英译本: I. C. Gohberg and M.G. Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs, 1969, vol. 18); [14] H. Helson, Lectures on invariant theory, Academic Press, 1964. 又→Hilbert 空间的[参].

紧算子 [英 compact operator 法 opérateur compact 德 kompakter Operator 俄 компактный оператор 日コンパクト作用素] 由 Banach

空间† X 到 Banach 空间Y的线性算子†T 为**紧的**（compact）或**完全连续的**(英 completely continuous 德 vollstetig）是指，T把X的任意有界集映射为Y的相对紧†集，换言之，任意的有界点列 $\{x_n\}$ 的象 $\{Tx_n\}$ 含有强收敛†的子序列. 紧算子是有界的，从而也是连续的，且把弱收敛†点列映射为强收敛点列. 如果X是自反的†，则这条件也是充分的，即可以用此性质定义紧算子.

【紧算子的例】 1) **退化算子**（degenerate operator). 当一算子的值域† $R(T)$ 为有限维时，就称此算子为退化算子，这样的算子是紧的. 当$X=Y$时，恒等算子†I当且仅当此空间为有限维时是紧的. 2) 连续核积分算子. 设 E，F为 Euclid空间的有界闭域，$k=k(t,s)$为$F\times E$上的连续函数（$t\in F$, $s\in E$)，以k为核†的**积分算子**（integral operator)，即由

$$(Tx)(t)=\int_E k(t,s)x(s)ds,\ \ t\in F$$

定义的 T，是 Banach 空间 $C(E)$ 到 Banach 空间 $C(F)$ 的紧算子. 3) **Hilbert-Schmidt 型积分算子**. 在前例中，设E, F是 Lebesgue可测集，$k\in L_2(F\times E)$，则积分算子T是 Hilbert 空间 $L_2(E)$ 到 Hilbert 空间 $L_2(F)$ 的紧算子. 4) 设Ω是 Euclid 空间的有界域，p是自然数，由 $H^p(\Omega)$ 到 $H^{p-1}(\Omega)$（→函数空间)的自然单射是紧算子.

【紧算子的性质】 紧算子的线性组合仍是紧算子，(在一致算子拓扑下) 收敛的紧算子序列的极限仍然是紧算子. 即，如果分别用 $\boldsymbol{B}(X,Y)$ 和 $\boldsymbol{B}^{(c)}(X,Y)$ 表示由X到Y的有界算子的全体和紧算子的全体，则 $\boldsymbol{B}^{(c)}(X,Y)$ 是以算子的范数为范数的 Banach 空间 $\boldsymbol{B}(X,Y)$ 的闭子空间. 紧算子和有界算子的积是紧的，即，$A\in\boldsymbol{B}^{(c)}(X,Y)$, $B\in\boldsymbol{B}(Y,Z)$, $C\in\boldsymbol{B}(Z,X)$ 蕴涵 $BA\in\boldsymbol{B}^{(c)}(X,Z)$, $AC\in\boldsymbol{B}^{(c)}(Z,Y)$. 特别地，$\boldsymbol{B}^{(c)}(X)=\boldsymbol{B}^{(c)}(X,X)$ 形成

$$\boldsymbol{B}(X)=\boldsymbol{B}(X,X)$$

的一个闭双边理想†. 算子 $T\in\boldsymbol{B}(X,Y)$ 是紧的当且仅当它的对偶算子† $T'\in\boldsymbol{B}(Y',Z')$ 是紧的. 紧算子的值域总是可分†的. 设 X, Y是 Hilbert 空间，则对任一 $T\in\boldsymbol{B}^{(c)}(X,Y)$，存在$X$内的正规正交集† $\{\varphi_n\}$ 和Y内的正规正交集 $\{\psi_n\}$ 以及满足 $\lim c_n=0$ 的非负数列 $\{c_n\}$，使得

$$Tu=\sum_n c_n(u,\varphi_n)\psi_n,\ \ u\in X.$$

因此，Hilbert 空间 X, Y之间的紧算子可以用退化算子序列来逼近. 当Y或X的对偶 X' 是具有基†的 Banach 空间时，这个陈述仍然成立. 但是，存在这样的 Banach 空间 X, Y，对于它们上述论断不再成立 [14, 15].

【Riesz-Schauder 定理】 考虑对于紧算子 $T\in\boldsymbol{B}^{(c)}(X)$ 的线性方程

(1) $\qquad u-Tu=f,\ f\in X.$

令 $\mathscr{M}=\{u\mid u=Tu\}$, $\mathscr{M}'=\{\varphi\mid\varphi=T'\varphi\}$ X'为X的对偶空间†，T'为T的对偶算子，则下列 i), ii)之中有且只有一个成立: i) $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$ 都只由 0 组成，对于任意的 $f\in X$, $g\in X'$，(1) 和 (1) 的对偶方程 $\varphi-T'\varphi=g$ 分别存在唯一的解 $u\in X$, $\varphi\in X'$. ii) $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$ 都是m维的 ($1\leqslant m<\infty$)，为使 (1) 式有解的充分必要条件是 f 与 $\mathscr{M}'$ 正交，且 $\varphi-T'\varphi=g$ 有解的充分必要条件是 g 与 $\mathscr{M}$ 正交. 以上事实称为 **Riesz-Schauder 定理**. 特别当T是积分算子时，这一定理就是关于积分方程 (1) 的 **Fredholm 择一定理**（Fredholm's alternative theorem).

【紧算子的谱】 由上述定理，关于紧算子 $T\in\boldsymbol{B}^{(c)}(X)$ 的谱，可以导出下列事实(→特征值问题). T的非零的谱只限于是特征值†. 当X为无穷维时，0 是属于T的谱 $\sigma(T)$ 的，但它不一定是T的特征值. 特征值的全体 $\sigma_p(T)$ 是可列集，且没有 0 以外的极限点. 设 λ 是非零特征值，则特征空间†

$$\mathscr{M}_\lambda(T)=\{u\mid Tu=\lambda u\}$$

是有限维的，也就是说，0 以外的特征值的(代数)重数† $m_\lambda=\dim\mathscr{M}_\lambda$ 是有限的. 当 λ 是T的非零特征值时，其共轭复数 $\bar\lambda$ 是共轭算子 T' 的特征值，并且具有相同的重数.

【紧算子的谱表示】 在 Hilbert 空间H内，对于正规†紧算子T，可以作出只由特征元组成的完备正规正交系†. 生成非零特征值 λ_j ($j=1,2,\cdots$) 的特征空间 $\mathscr{M}_j$ 的正规正交系 $\{\varphi_k^{(j)}\}$ 由 $m_j=\dim\mathscr{M}_j$ 个元组成，把这些元收集在一起，重新加以编号，得到$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. 若 0 为特征值，则在$\{\varphi_n\}$内添加与 0 相对应的特征空间内的一个完备正规正交系.这样，我们就得到H的一个完备正规正交系. 如果把对应于 φ_n 的特征值写作 μ_n，则数列 $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不过是把T的非零特征值将重数考虑在内进行了编号. 如果用 φ_n, μ_n, T 的谱表示可写出如下:

$$Tu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(u,\varphi_n)\varphi_n,\ u\in H.$$

【紧算子的分类】 对于 Hilbert 空间的紧算子的分类，我们仅叙述基本的事实. 为简单起见，设空间H是可分的. 设 $T\in \boldsymbol{B}^{(c)}(H)$，命 T^* 为T的伴随算子，$A=(T^*T)^{1/2}$，则A为自伴的紧算子. 又A是正(非负)定的，设其特征值按大小顺序为 $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\cdots$，而且按其重数重复予以编号. 有时称 $\alpha_n=\alpha_n(T)$ 为T的特性数. 今取p为正的参数，满足

$$\|T\|_p=(\sum\alpha_n^p)^{1/p}<+\infty$$

的 $T\in\boldsymbol{B}^{(c)}(H)$ 的全体，用 $\boldsymbol{B}_p(H)$ 来表示，或简单地写作 $\boldsymbol{B}_p$. 最重要的是 $p=1,2$ 的情形，$\boldsymbol{B}_1$ 和 $\boldsymbol{B}_2$ 分别称为**迹族** (trace class) 和 **Hilbert-Schmidt 类** (Hilbert-Schmidt class). 又 $\|T\|_1$ 称为T的**迹范数** (trace norm)，$\|T\|_2$ 称为T的 **Hilbert-Schmidt 范数** (Hilbert-Schmidt norm). 也常称 $\boldsymbol{B}_1$ 为**核族** (nuclear class)，$T\in\boldsymbol{B}_1$ 为**核型算子**† (nuclear operator).

若 $T\in\boldsymbol{B}_p$，则 $T^*\in\boldsymbol{B}_p$. 当 $1\leqslant p<\infty$ 时，$\boldsymbol{B}_p$ 以 $\|T\|_p$ 为范数形成 Banach 空间. 在 Banach 空间 $\boldsymbol{B}_p$ 内，退化算子的全体是稠密的. 另一方面，$\boldsymbol{B}_p$ 是 Banach 代数$\boldsymbol{B}$内的双边理想，实际上当 $T\in\boldsymbol{B}_p, R\in\boldsymbol{B}$ 时，$\|RT\|_p\leqslant\|R\|\,\|T\|_p$ 和 $\|TR\|_p\leqslant\|R\|\|T\|_p$ 成立.

若 $p\leqslant q$，则 $\boldsymbol{B}_p\subset\boldsymbol{B}_q$. 实际上，$\|T\|_p$ 是关于p的递减函数. 当参数 p, q, r 满足

$$1/p+1/q=1/r$$

时，$T\in\boldsymbol{B}_p$, $S\in\boldsymbol{B}_q$ 蕴涵 $TS\in\boldsymbol{B}_r$. 当 $T\in\boldsymbol{B}_p$ 时，设对T的特征值依重数重复进行编号得到 $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$，则有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\mu_j|^p\leqslant\|T\|_p^p.$$

此时，作为重数取其代数重数†也是可以的.

如果 $T\in\boldsymbol{B}_2$，亦即T属于 Hilbert-Schmidt 类，则对任意的完备正规正交系 $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$，

$$\|T\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|Tu_k\|^2$$

成立. 实际上可以定义 $\boldsymbol{B}_2$ 为使上式右端为有限的有界算子的全体. 又 $\boldsymbol{B}_2$ 在对应范数 $\|T\|_2$ 的内积下形成 Hilbert 空间，使用上述的 $\{u_k\}$，其内积$(\ ,\ )_2$可写为

$$(T,S)_2=\sum_{k=1}^{\infty}(Tu_k,Su_k).$$

当 $T\in\boldsymbol{B}_1$，即当T属于迹族时，T的**迹** (trace) 由

$$Tr(T)=\sum_{k=1}^{\infty}(Tu_k,u_k)$$

来定义，右端绝对收敛，并且不依赖于完备正规正交集 $\{u_k\}$. 迹是 $\boldsymbol{B}_1$ 上的有界线性泛函. 又当 $T\in\boldsymbol{B}_1$ 时，能够定义算子 $I+T$ 的行列式. 两个 Hilbert-Schmidt 型积分算子的积属于迹族，其逆亦成立.

【非线性紧算子】 由 Banach 空间X的域D到 Banach 空间Y内的非线性算子F为紧的或全连续的，是指F在D上连续，并把D内的有界集映射为相对紧集. 对这样的F，不动点定理†成立，它广泛地用于微分方程解的存在证明等问题上.

【参】 [1] S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932 (Chelsea, 1963); [2] N. Dunford-J. Schwartz, Linear operators I, II, Interscience, 1958, 1963; [3] 加藤敏夫, 函数空間論, 共立出版, 1957; [4] M. A. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956; [5] R. Schatten, A theory of cross spaces, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1950; [6] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [7] И. М. Гельфанд-Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции 4, Физматгиз, 1961 (中译本: И. М. 盖勒范德, Н.

Я. 维列金,广义函数,第四卷,科学出版社,1965); [8] A. C. Zaanen, Linear analysis, North-Holland, 1953; [9] И. Ц. Гохберг-М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопяженных операторов, Наука, 1965 (英译本: I. C. Gohberg and M. G. Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators, Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs, 1969, vol, 18); [10] T. Kato (加藤敏夫), Perturbation theory for linear operators, Springer, 1966; [11] H. H. Schaefer, Topological vector spaces, Macmillan, 1966; [12] R. Schatten, Norm ideals of completely continuous operators, Springer, 1960; [13] H. Helson, Lectures on invariant subspaces, Academic Press, 1964; [14] A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., **16** (1955); [15] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Math., **130** (1973), 309—317.

微分算子 [英 differential operator 法 opérateur différentiel 德 Differential operator 俄 дифференциальный оператор 日 微分作用素]【定义】 设A为由某一函数空间$\boldsymbol{F}_1$到函数空间$\boldsymbol{F}_2$的映射(算子), $f=Au(u\in\boldsymbol{F}_1,\ f\in\boldsymbol{F}_2)$, 如果象$f$在每个点$x$处的值$f(x)$由原象$u$和有限个$u$的导数在$x$点处的值所决定, 则称$A$为**微分算子**. 如果$u$和$f$是广义函数†,则微分算子的定义也适用于广义函数意义下的导数 (→广义函数). 本条只限于讨论线性微分算子,而且只考虑下列形式的算子:

$$P(x,D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)D^\alpha. \tag{1}$$

右边的α表示非负整数组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 称为**多重指数** (multi-index), $|\alpha|$ 表示α的**长度** (length) $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, 而 D^α 表示微分算子 $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_n^{\alpha_n}$, 其中

$$D_j=(-i)\partial/\partial x_j,$$

有时也略去系数$(-i)$. 这里系数 $a_\alpha(x)$ 为定义在n维空间某一开集Ω上的函数. 当Ω的维数即独立变量的个数n为1时, $P(x,D)$ 称为**常微分算子** (ordinary differential operator), 而当$n\geqslant 2$时,称为**偏微分算子** (partial differential operator). 常微分算子和偏微分算子有许多全然不同之处.

当 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\boldsymbol{R}^n$ 或 $\boldsymbol{C}^n$ 时,令

$$P(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha(x)\xi^\alpha,\ \xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}.$$

使 $a_\alpha(x)\neq 0$ 的最大整数 $|\alpha|$, 称为 $P(x,D)$ 的**阶数** (order). 在表示式 (1) 中设m等于阶数,这时

$$P_m(x,D)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)D^\alpha$$

称为 $P(x,D)$ 的**主部** (principal part), 与之对应的ξ的多项式 $P_m(x,\xi)$, 称为**特征多项式** (characteristic polynomial).

常系数微分算子 $P(D)$ 称为**椭圆型算子** (elliptic operator), 如果 $P(D)$ 的特征多项式 $P_m(\xi)$ 除 $\xi=0$以外没有实零点;如果

$$P(\xi+i\eta)=0$$

且 $|\xi+i\eta|\to\infty$ 蕴涵 $|\eta|\to\infty$, 则 $P(D)$ 称为**准椭圆型算子** (hypoelliptic operator). 椭圆型算子是准椭圆型算子. 例如, Laplace 算子 $\Delta=-(D_1^2+\cdots+D_n^2)$, Cauchy-Riemann 算子

$$\partial/\partial\bar{z}=\frac{1}{2}(\partial/\partial x+i\partial/\partial y),$$

和常微分算子等, 都是椭圆型算子. 热算子 $iD_{n+1}+\Delta$ 是准椭圆型算子, 但不是椭圆型算子. 关于其他类型的算子, 可参看有关的条目 (例如, 关于双曲算子→双曲型偏微分方程).

变系数的微分算子 $P(x,D)$ 为**椭圆型算子** (elliptic operator), 是指对任意的 $x\in\Omega$, $P(x,D)$ 的特征多项式 $P_m(x,\xi)$ 除 $\xi=0$ 以外没有实零点.

微分算子 $P(x,D)$ 结合着线性微分方程

$$P(x,D)u(x)=f(x),\ x\in\Omega \tag{2}$$

的研究很早就开始了,但除了常微分算子之外,对这样的算子的一般性质的研究是最近才进行的.

以下把常数系数微分算子写作 $P(D)$, 一般地, $P(x,D)$ 表示以 C^∞ 类函数为系数的线性微分算子. 而在 C^∞ 类函数为系数的情形成立的结果,多数在系数充分可微的情形也成立. 以下用到的函数空间 $\mathscr{D}(\Omega)$, $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\mathscr{E}(\Omega)$, $\mathscr{E}'(\Omega)$, $C(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\Omega)$, $L_p(\Omega)$ 的性质,→函数空间.

【基本解】 如果以 $\mathscr{D}(\Omega)$ 为定义域的微

分算子 $P(x, D)$ 的左逆算子 F 存在，且它可以表示为具有广义函数核（在 $\mathscr{D}'_{x,y}$ 内；→广义函数[流动形的例]）的积分算子†，则称这个核†为 $P(x, D)$ 的**基本解**（fundamental solution or elementary solution），F 对于 $P(x,D)$ 的弱扩张（以后叙述）通常也形成右逆算子且把 $\mathscr{D}(\Omega)$ 映射到 $\mathscr{E}(\Omega)$ 内．它的象由 $P(x,D)$ 映成原来的函数．但它不是真右逆算子，因此即使基本解存在也不是唯一的．

在常系数微分算子 $P(D)$ 的情形，满足方程

$$(3) \qquad P(D)E(x) = \delta(x)$$

的广义函数 $E(x)$ 称为基本解．这里 $\delta(x)$ 是 Dirac 广义函数（δ 函数†）．当 $E(x)$ 是这种意义下的基本解时，$F(x, y) = E(x - y)$ 是上述意义下的基本解．

每个常系数微分算子 $P(D)$ 都存在 (3) 意义下的基本解 $E(x)$（**Ehrenpreis-Malgrange 定理**）（证明参看 L. Hörmander [4]）．

一般的变系数微分算子 $P(x,D)$ 不一定具有基本解．但当 $P(x, D)$ 为下列古典算子型，即椭圆型算子，强双曲型算子或抛物型算子之一时，它至少存在局部的基本解．关于椭圆型算子参看 F. John [8]，关于强双曲型算子参看 J. Leray [13]，又关于抛物型算子参看溝畑茂 [14] 和 С. Д. Эйдельман [9]． Leray 把 John 的方法推广到强双曲型算子的情形，进行了大量的研究([15])．

【微分算子的值域】 根据 Ehrenpreis-Malgrange 定理，对于常系数微分算子 $P(D)$，在任意的开集 Ω 上，$P(D)\mathscr{D}'(\Omega) \supset \mathscr{D}(\Omega)$ 成立．然而，存在变系数微分算子 $P(x, D)$，使得不论如何选择 Ω，恒有 $P(x, D)\mathscr{D}'(\Omega) \not\supset \mathscr{D}(\Omega)$．H. Lewy 首先给出这样的一个例子：

$$P(x, D) = -iD_1 + D_2 - 2(x_1 + ix_2)D_3.$$

这是一个有名的例子．

设 $C_{2m-1}(x,D)$ 为换位子

$$P(x,D)\overline{P(x,D)} - \overline{P(x,D)}P(x,D)$$

的 $2m-1$ 阶的齐次部分．此时为使

$$P(x,D)\mathscr{D}'(\Omega) \supset \mathscr{D}(\Omega)$$

成立，必须

$$P_m(x,\xi) = 0 \Rightarrow C_{2m-1}(x,\xi) = 0$$

对一切 $x \in \Omega$，$\xi \in \boldsymbol{R}^n$ 成立（**Hörmander 定理**）([4])．对不满足这个条件的微分算子，例如对于 Lewy 微分算子 $P(x,D)$ 来说，如果取 $f(x) \in \mathscr{D}(\Omega)$ 但 $f(x)$ 不属于 $P(x,D)\mathscr{D}'(\Omega)$，则微分方程式 (2) 不具有任何种类的广义函数解． P. Schapira 把这个结果推广到了超函数†的情形．

关于常系数的微分算子 $P(D)$ 的值域，由 L. Ehrenpreis, B. Malgrange ([16])、Hörmander ([4]) 得到下述的详细结果．

所谓开集 Ω 对于微分算子 $P(D)$ 是 ***P* 凸的**（P-convex），是指对一切紧集 $K \subset \Omega$，存在紧集 $K' \subset \Omega$，使得 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 和 $\operatorname{supp} P(-D)\varphi \subset K$ 蕴涵 $\operatorname{supp}\varphi \subset K'$． 凸集总是 P 凸的．所有开集均为 P 凸的充分必要条件是 $P(D)$ 为椭圆型算子． 定理： 下列各条件是相互等价的： i) Ω 是 P 凸的；ii) $P(D)\mathscr{D}'(\Omega) \supset \mathscr{E}(\Omega)$；iii) $P(D)\mathscr{E}(\Omega) = \mathscr{E}(\Omega)$． 性质 iii)，对于 $P(D)u = 0$ 的解的 Mittag-Leffler 定理†，对于 $P(D)u = 0$ 的解的 Cousin 第一问题†的可解性，这三者是相互等价的 (Ehrenpreis [17])．

开集 Ω 为**强 *P* 凸的**（strongly P-convex），是指对任一紧集 $K \subset \Omega$，存在紧集 $K' \subset \Omega$，使得

$$\mu \in \mathscr{E}'(\Omega),\ \operatorname{supp} P(-D)\mu \subset K \Rightarrow \operatorname{supp}\mu \subset K';$$

$$\mu \in \mathscr{E}'(\Omega),\ \operatorname{sing\,supp} P(-D)\mu \subset K \Rightarrow \operatorname{sing\,supp}\mu \subset K';$$

这里 μ 的**奇性支集**（singular support）$\operatorname{sing\,supp} \mu$ 是使广义函数 u 不能成为 C^∞ 类函数的点的全体所成的集的闭包． 凸集是强 P 凸的，强 P 凸集是 P 凸的．定理： Ω 为强 P 凸的和

$$P(D)\mathscr{D}'(\Omega) = \mathscr{D}'(\Omega)$$

是等价的． 另一方面，R. Harvey 证明了每个域 Ω 是在佐藤幹夫超函数意义下 P 凸的，即对 Ω 上的任一超函数 f，方程 $P(D)u = f$ 在 Ω 上恒有超函数解 u．

【内部正则性】 微分算子的**内部正则性**（interior regularity）叙述如下． m 阶的微分算子

把 C^k 类 ($k \geq m$) 函数 u 映射为 C^{k-m} 类函数 f，但其逆命题只限于常微分算子才能成立．例如 $P = D_1D_2$．齐次方程 $Pu = 0$ 的解 u 可能没有任何正则性．但对微分算子加了限制时，在弱的意义下其逆成立．

关于常系数微分算子，下列结果成立：1)

$$P(D)u = 0$$

的解全为实解析的充分必要条件是 $P(D)$ 为椭圆型算子 (**Петровский 定理**)([18])．2)

$$P(D)u = 0$$

的解全是 C^∞ 类函数的充分必要条件是 $P(D)$ 为准椭圆型算子 (**Hörmander 定理**)([19])．在以上定理中，只须解 u 作为广义函数满足方程即可．如果 $P(D)$是椭圆型的，则 $P(D)u=0$ 的超函数解也是实解析的 (R. Harvey, G. Bengel, 小松彦三郎)．Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的广义函数解是 C^∞ 类函数，这是熟知的 **Weyl 引理** (Weyl's lemma)．

当变系数微分算子 $P(x, D)$ 为 m 阶椭圆型算子时，如果 f 在一个开集上在 $L_p(1 < p < \infty)$ 意义下为 $k\,(0 < k \leq \infty)$ 次局部可微，则 $P(x, D)u = f$ 的广义函数解 u 在此开集上在 L_p 意义下为 $m + k$ 次局部可微 (K. O. Friedrichs, P. D. Lax)．这里所说 f 在 L_p 意义下 k 次局部可微是指，f 到 k 阶为止的广义函数导数(→广义函数) $D^\alpha f\,(0 \leq |\alpha| \leq k)$ 在 Ω 上可测，且对任意的点 $x \in \Omega$，存在 x 的邻域 $\Omega_x\,(\subset \Omega)$，使得 $D^\alpha f \in L_p(\Omega_x)$ 成立．如果 $P(x,D)$ 的系数是实解析的，则在 f 为实解析的开集上，u 也是实解析的 (И. Г. Петровский, C. B. Morrey-L. Nirenberg, P. Schapira, 佐藤幹夫)更精确地说，广义函数 u 在开集 Ω 上为实解析的充分必要条件是：对 Ω 中任一紧集 K，存在常数 C，使得 $\|P^k u\|_K \leq C^{k+1}(mk)!$ 成立．这里$\|\ \ \|_K$ 表示 K 上的 L_p 范数 (小松彦三郎、小竹武-M. S. Narasimhan)．

关于准椭圆型算子不能做这样简单的推广．即使对每个固定的 x，$P(x,D)$是准椭圆型算子，$P(x, D)u = 0$ 的解也不一定是 C^∞ 类函数．对于常系数微分算子 $P(D)$，令

$$\tilde{P}(\xi)^2 = \sum_{|\alpha| \geq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2,$$

其中 $P^{(\alpha)}(\xi) = \partial^{|\alpha|}P(\xi)/\partial\xi_1^{\alpha_1}\cdots\partial\xi_n^{\alpha_n}$．对于两个常系数微分算子 $P(D)$, $Q(D)$，当

$$\tilde{Q}(\xi)/\tilde{P}(\xi) \leq C < \infty, \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n$$

成立时，称 $Q(D)$ 比 $P(D)$ **弱** (weak)，$P(D)$ 比 $Q(D)$ **强** (strong)．当 $Q(D)$ 比 $P(D)$弱同时又比 $P(D)$ 强时，称 $P(D)$ 和 $Q(D)$ 为**同等强度** (equally strong)．

若在 $P(x, D)$ 中任意固定 x 时，它总是与某个和 x 无关的常系数准椭圆型算子具有同等强度，则可以证明，$P(x,D)u = f$ 的解 u 满足：如果 f 在一个开集上为 C^∞ 类，则 u 在此开集上也是 C^∞ 类的 (Malgrange, Hörmander, 溝畑-浜田雄策)．此外，为使广义函数 u 是 C^∞ 类的充分必要条件是，对任意的 k，$P(x, D)^k u$ 是函数．

以上定理有两种证明方法．一种是由基本解导出；另一种是用如下的称为 **Schauder 估计** (Schauder estimate) 或**先验估计** (a priori estimate) 的不等式：

$$\|\nabla^\sigma u\|_{L_p}(\Omega_\delta) \leq C(\|Pu\|_{L_p(\Omega)} + (1 + \delta^{-\sigma})\|u\|_{L_p(\Omega)}),$$

此处 Ω_δ 是由开集 Ω 中到边界的距离大于 δ 的点所组成的子集．当 P 为椭圆型算子时，可以取 $\sigma = m$．

【Banach 空间中的微分算子】 今后把定义在域 Ω 上的微分算子 $P(x, D)$ 当作 Ω 上的函数空间 $C(\Omega)$ 或 $L_p(\Omega)$ 中的算子来考察．阶数 $m \geq 1$ 的微分算子在这些 Banach 空间 X 上总是无界算子．通常作为 X 中的算子的定义域也不能只由微分算子 $P(x, D)$ 的形式唯一地决定．

$P(x, D)$ 是把 $C_0^\infty(\Omega)$ 映射到 X 内的线性算子．这个算子可以进行闭扩张．其最小闭扩张 P_0 称为 $P(x,D)$ 在 X 内的**极小算子** (minimal operator)．为使 $u \in \mathscr{D}(P_0)$, $P_0 u = f$ 成立的充分必要条件是：存在序列 $\varphi_n \in C_0^\infty$，使得 $\varphi_n \to u$，$P(x,D)\varphi_n \to f$．又把在广义函数意义下使 $P(x,D)u \in X$ 的 $u \in X$ 的全体作为定义域的闭

线性算子 P_1，称为 $P(x, D)$ 的**极大算子**（maximal operator）或**弱扩张**（weak extension）. 为使 $u \in \mathfrak{D}(P_1)$, $P_1 u = f$ 成立的充分必要条件是，对于任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\langle u, {}^tP(x,D)\varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$$

成立. 这里 ${}^tP(x,D)$ 是 $P(x,D)$ 的**转置算子**（transposed operator）:

$${}^tP(x, D)\varphi(x) = \sum_{|\alpha|\leqslant m}(-D)^\alpha(a_\alpha(x)\varphi(x)).$$

用分部积分可以证明，P_1 是 P_0 的扩张，同时当 X 为另一空间 Y 的共轭空间时，在 X 内的弱扩张 P_1 是 Y 内的 ${}^tP(x, D)$ 的极小算子的共轭算子. 在 $X = L_p(\Omega)(1 < p < \infty)$, Ω 为有界且其边界为光滑，又 $P(D)$ 的系数为常数的情形，P_1 与以使得 $P(D)u \in X$ 的全体 $u \in C^\infty(\Omega) \cap X$ 作为定义域的算子 $P(D)$ 的最小闭扩张是一致的. 后面这个闭扩张称为 $P(D)$ 的**强扩张**（strong extension）. 至于变系数的情形，弱扩张和强扩张的区分还未搞清楚.

在 Ω 为全空间，$P(x, D)$ 是系数为常数或接近于常数的椭圆型算子，$X = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ 的情形，P_0 和 P_1 是一致的 (J. Peetre [20]，池部晃生-加藤敏夫[21]). 但是一般说 $P_0 \neq P_1$. 当 $P(x, D)$ 是以有界函数为系数的常微分算子，$|a_m(x)| \geqslant \delta > 0$ 并且 Ω 是有限区间 (a,b) 时，P_1 的定义域与满足下列条件的函数 u 的全体所成的集是一致的; u 为 $m-1$ 次连续可微，它的第 $m-1$ 阶导数绝对连续，且 $P(x,D)u \in X$. P_0 的定义域，与除满足上述条件外且满足下面边界条件的函数 u 的全体所成的集是一致的:

$$u(a) = u'(a) = \cdots = u^{(m-1)}(a) = u(b) = u'(b) = \cdots = u^{(m-1)}(b) = 0$$

(当 $X = C(a,b)$ 时，还要加一条件

$$u^{(m)}(a) = u^{(m)}(b) = 0).$$

设 $G(P_0), G(P_1)(\subset X \times X)$ 分别是 P_0, P_1 的图象†，商空间 $\mathscr{B} = G(P_1)/G(P_0)$ 称为**边界值空间**（boundary space），$\mathscr{B}$ 的共轭空间 $\mathscr{B}'$ 的元，即在 $G(P_0)$ 上取值为零的 $G(P_1)$ 上的连续线性泛函，称为关于 $P(x, D)$ 的**边界值**（boundary value）. 在上面讨论的常微分算子的情形，边界值空间是由 $u^{(i)}(a)$ 和 $u^{(j)}(b)$ 的线性组合的全体构成的. 如果 $P(x, D)$ 为常微分算子，即使在区间 (a,b) 为无限的情形，系数 $a_\alpha(x)$ 为无界的情形，或是 $a_m(x) \to 0$ $(x \to a, b)$ 的情形，总能具体地定出边界值的形式，且可证明 $\mathscr{B}$ 是有限维的. 当 $P(x,D)$ 是偏微分算子时，一般说 $\mathscr{B}$ 是无限维的，$\mathscr{B}$ 或 $\mathscr{B}'$ 的元的具体形式还不知道. 但对于二阶椭圆型算子的边界值，请参看 M. И. Вишик [22]. 把它与 J.-L. Lions-E. Magenes [23] 的结果结合起来，可以得到关于高阶椭圆型算子的某些答案.

【具有边界条件的微分算子】 处于极小算子 P_0 和极大算子 P_1 之间的闭算子，可以通过指定边界值空间 $\mathscr{B}$ 的闭子空间 B 而决定. 此种算子称为使 $P(x, D)$ **具有边界条件 B 的算子**（operator with the boundary condition B）. 特别重要的是边界条件具有形式

(4) $Q_i(x,D)u(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \ i = 1, \cdots, k,$

的情形，其中，微分算子 $Q_i(x,D)$ $(i = 1, \cdots, k)$ 定义在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上.

在有限区间上定义的常微分算子的情形，如果 Q_i 的阶数最高为 $m-1$ (或 m)，则 (4) 式总有明确的意义. 但在偏微分算子的情形，进一步对 (4) 式作适当的解释是必要的，仅由 (4) 式不一定唯一地确定 $\mathscr{B}$ 的子空间 B.

以 $\{u \in C^\infty(\bar{\Omega}) \cap X \mid Q_i(x, D)u(x) = 0, x \in \partial\Omega, P(x, D)u \in X\}$ 为定义域的 $P(x, D)$ 的最小闭扩张 P_s，称为满足边界条件 (4) 的微分算子 $P(x,D)$ 的**强扩张**.

另一方面，当 Ω, P 和 Q_i 满足适当条件时能够定义具有转置边界算子

$$R_j(x,D) \quad (j = 1, \cdots, l)$$

的转置微分算子 ${}^tP(x,D)$. 就是说，在边界上存在微分算子 $R_j(x, D)$，使得 $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 满足 (4) 和 $Pu(x) = f$ 的充分必要条件是

(5) $$\int_\Omega f(x)v(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\,{}^tPv(x)\,dx$$

对满足边界条件 $R_jv = 0$, $x \in \partial\Omega$ 的所有 $v \in$

$C^\infty(\bar{\Omega})$成立.此时对于满足(5)的函数对$u(x)$, $f(x)\in X$, 由 $P_w u(x)=f(x)$ 所定义的闭算子P_w,称为满足边界条件(4)的微分算子$P(x,D)$的**弱扩张**. 和没有边界条件的情形相同,弱扩张是强扩张的扩张,一般地说,它是具有转置边界条件的转置微分算子在共轭空间 X' 内的强扩张的共轭算子.

到边界的正则性(regularity up to the boundary). 具有齐次边界条件(4)的微分算子$P(x, D)$的基本问题,乃是对于强弱两种扩张,决定齐次方程 $Pu=0$ 的解空间及值域,这些问题多数归结为确定何时强弱扩张一致的问题,或是包含这问题在内,归结为方程 $P_w u=f$ 的解u在含有边界的闭域$\bar{\Omega}$上的正则性的问题.

这个问题在 $L_2(\Omega)$ 内具有 Dirichlet 边界条件

$$\partial^{j-1}u(x)/\partial n^{j-1}=0,\ j=1,\ 2,\cdots,m/2$$

的强椭圆型算子的情形被 Nirenberg 解决了,其后由 F. Browder, M. Schechter ([24]), S. Agmon, Lions 等推广到了 $L_p(\Omega)$ 内具有某种强制边界条件(下面将叙述)的椭圆型算子的情形.

由此结果,当Ω为有界且光滑时,对这些算子,P_w和P_s相等,把它写做P时,$Pu=0$的解空间 $N(P)$ 构成有限维空间,其值域 $R(T)$ 是有限余维的闭子空间. 从而特别有,P的**指数**(index) dim $N(P)$-codim $R(P)$ 是有限的.

【强椭圆型算子】 微分算子 $P(x, D)$ 称为**强椭圆型算子**(strongly elliptic operator),如果它的特征多项式满足

$$\mathrm{Re}P_m(x,\xi)\geqslant C|\xi|^m>0,\ \xi\neq 0.$$

在应用上出现的椭圆算子(例如 Laplace 算子),多数是强椭圆型的.L. Gårding 对具有 Dirichlet 条件的强椭圆型算子的研究([25])是微分算子最近研究的开端.其理论的基础是 **Gårding 不等式** (Gårding's inequality),即下面的不等式:

$$\|\nabla^{m/2}u\|^2_{L_2}\leqslant C\left(\mathrm{Re}\int Pu\cdot\bar{u}dx+\|u\|^2_{L_2}\right),$$
$$u\in C_0^\infty(\Omega).$$

【强制边界条件】 对满足(4)式的

$$u\in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

当

$$(6)\qquad \|\nabla^m u\|\leqslant C(\|Pu\|+\|u\|)$$

成立时,就称边界条件(4)为**强制的**(coercive). 为使微分算子P具有强制边界条件,它是某种椭圆型算子是必要的. 此时使(4)成为强制边界条件的条件为 Agmon, N. Aronszajn, Schechter 等所求出. Agmon-A. Douglis-Nirenberg 证明,在适当条件下,在 $L_p(\Omega)$ 和 Hölder 连续函数所成的赋范空间等空间中,不等式(6)实际上是成立的([26]). 对于二阶椭圆型算子,古典边界条件 $au+b\partial u/\partial n=0$ ($a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$) 是强制的. 但是当 $Q_j(x, D)$ 的系数不连续时问题还未解决.

使强弱两种扩张的一致性或达到边界的正则性成立的条件,P为椭圆型或边界条件为强制未必是必要的. 但是这些条件可以减弱到什么程度还未进行充分的研究. 现在主要的工作是 Hörmander ([27]) 研究了常系数和平坦边界的情形, J. J. Kohn ([28]), Nirenberg, Hörmander 等研究了非强制边界条件的情形. 后者的研究和多复变量函数论的关系是引人注目的.

【自伴扩张】 在 $X=L_2(\Omega)$ 的情形,基本问题之一是极小算子 P_0是否具有自伴扩张. 使P_0为对称的充分必要条件是 $P(x, D)$ 为**形式自伴的**(formally self-adjoint),即

$$P(x, D)=\overline{{}^tP(x,D)}.$$

在此条件下边界值空间$\mathscr{B}$可以分解为两个子空间

$$\mathscr{B}_\pm=\{(x,P_1x)\,|\,x\in\mathfrak{D}(P_1),$$
$$P_1x=\pm ix\}+G(P_0)$$

的直和. 数 $n_\pm=\dim\mathscr{B}_\pm$ 称为 P_0 的**亏指数**(deficiency index),P_0 具有自伴扩张的充分必要条件是 $n_+=n_-$.

H. Weyl 曾给出对 **Sturm-Liouville 算子** (Sturm-Liouville operator)

$$P(x,D)=-\left(\frac{d}{dx}p(x)\frac{d}{dx}\cdot\right)+q(x),$$
$$x\in(a,b)$$

求 $n_\pm$ 的方法. 若 $P(x,D)u(x)+lu(x)=0$ ($l\in\mathbf{C}$) 的解 $u(x)$ 在边界点 $a\,(b)$ 的一个邻域内总是属于 L_2, 则 $a(b)$ 称为**有限型**或**极限圆型** (limit circle type), 当某个解 $u(x)$ 不满足这样的条件时, $a\,(b)$ 称为**无限型**或**极限点型** (limit point type). 这种区别不依赖于 $l\in\mathbf{C}$ 的选择. 1)如果 a, b 都是极限点型,那么 $n_+=n_-=0$, 从而 P_0 是自伴的. 2) 如果 a 为极限圆型, b 为极限点型, 那么 $n_+=n_-=1$, 且 P_0 的自伴扩张是 P_α, 而 P_α 是由 P_1 指定边界条件

$$p\,(a)u'(a)\cos\alpha+u(a)\sin\alpha=0$$

而得到的算子. 调换 a, b 的情形也有同样结果. 3) 在 a, b 同时都是极限圆型的情形,

$$n_+=n_-=2$$

成立, 并能赋予两个边界条件以得到自伴扩张.

这些结果可以推广到 m 阶常微分算子 (小平邦彦 [29], N. Dunford-J. Schwartz [2]). 存在没有自伴扩张的形式自伴算子, 例如, $L_2(0,\infty)$ 内的算子 $-i\dfrac{d}{dx}$, 它虽是形式自伴的, 但因 $n_+=1\neq n_-=0$, 所以不具有自伴扩张.

在偏微分算子的情形,边界值空间很复杂,因而对给定的形式自伴微分算子, 具体地求出它的一切自伴扩张是困难的. 如果边界条件 (4) 是形式自伴的和强制的, 则依照 Schechter 等的结果,具有边界条件 (4) 的微分算子是自伴的. 此外, 已经知道使 P_0 成为自伴的条件, 或具有至少一个自伴扩张的条件作为属于后者的命题, 下面的定理是常用到的; 若在 Hilbert 空间 X 的稠密子空间上定义的对称算子 T 是正定的:

$$(Tx,x)\geqslant 0,\ x\in\mathfrak{D}(T),$$

则 T 存在一个正定的自伴扩张 $\tilde{T}$ (Friedrichs 定理). 由这条定理得到的自伴扩张称为 **Friedrichs 扩张** (Friedrichs extension).

【半群的生成算子】 W. Feller 从概率论的角度出发, 对 $C\,(a,\ b)$ 中的 Laplace 算子 d^2/dt^2 以及与它相类似的算子, 研究了使之成为正定半群的生成算子的最小算子的扩张. 最近,在把这一结果向多维空间的推广上,作了种种探索(→扩散过程, 算子半群和发展方程).

P. D. Lax-A. N. Milgram 证明,如果 $P(x,D)$ 为强椭圆型算子, 则在 $L_2(\Omega)$ 内给定 Dirichlet 条件的 $-P(x,D)$ 形成一个半群的生成算子([1]).

【边界值问题】 非齐次边界值问题

$$P(x,D)u(x)=f(x),\ x\in\Omega,$$
$$Q_i(x,D)u(x)=g_i(x),$$
$$x\in\partial\Omega,\ i=1,\cdots,k$$

的求解有两种方法. 一种是求出满足

$$Q_i(x,D)v(x)=g_i(x)$$

的函数 $v(x)$, 再归结为 $u_0=u-v$ 的齐次边界值问题; 另一种是把 $P(x,D)$ 和 $Q_i(x,D)$ 所成的组看成把函数 u 映射为函数组(Pu,Q_iu) 的算子并直接求解. 后一方法为 Peetre 和 Hörmander 所试过([4]).

【加权空间内的估计】 J. F. Treves, Hörmander, 熊ノ郷準等人, 用关于加权测度 $w_\tau(x)dx$ 的 L_p 空间代替通常的 $L_p(\Omega)$ 空间, 得到与(6)类似的估计,并应用于变系数微分方程的 Cauchy 问题解的唯一性的证明 (→偏微分方程的初值问题). Hörmader 把类似的不等式应用于 Stein 流形的基本定理†的证明.

【特征函数展开】 在定义于 Hilbert 空间 $L_2(\Omega)$ 内的自伴算子 P 为微分算子 $P(x,D)$ 的自伴扩张的情形, P 的谱分解, 能用任意函数 $u(x)\in L_2(\Omega)$ 对 $P(x,D)$ 的特征函数的展开具体表示出来.

若 Ω 有界, $P(x,D)$ 是 $\bar{\Omega}$ 的邻域上定义的椭圆型算子,且边界条件是强制的,则 P 的谱只由特征值组成, 而且 P 的特征向量是 $P(x,D)$ 的古典意义下的特征函数, 且是包括边界在内的 C^∞ 类函数.

【特征值的渐近分布】 $P=-\Delta$ 的情形, 不管其定义域的形状如何,边界条件如何,小于等于 λ 的特征值的个数 $\nu(\lambda)$ 满足

$$\nu(\lambda)\sim\frac{\lambda^{n/2}A}{2^{n-1}\pi^{n/2}n\Gamma(n/2)},\ \lambda\to\infty$$

这样的渐近关系.这里 n 为维数，A 表示 Ω 的体积([3]).这条定理最初是由 Weyl 证明的，而 T. Caleman, Gårding 等把它推广到了高阶和变系数的情形.

【Weyl-Stone-小平-Titchmarsh 理论】 当 Ω 是无界的，或 $P(x,D)$ 的系数在接近边界处有奇异性态时，P 的谱可能有连续部分.

在 $P(x, D)$ 为定义在区间 (a,b) 内的常微分算子的情形，对任意的 $\lambda\in \boldsymbol{C}$, 方程

$$(P(x,D)-\lambda)\varphi(x)=0$$

有 m 个线性无关的解 $\varphi_k(x, \lambda)$ $(k=1, 2, \cdots, m)$，且任意的解可以表示为此 m 个解的线性组合. Weyl 和 M. H. Stone (对二阶算子)对 P 的谱分解得到下列形式:

$$u(x)=\sum_{i,k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_i(x,\lambda)d\rho_{ik}(\lambda)\times\int_a^b\overline{\varphi_k(y,\lambda)}\,u(y)dy,$$

$$Pu(x)=\sum_{i,k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\varphi_i(x,\lambda)d\rho_{ik}(\lambda)\times\int_a^b\overline{\varphi_k(y,\lambda)}u(y)dy.$$

这里 $\rho_{ik}(\lambda)$ 为有界变差函数，且其变差表示谱测度. 这个公式表明，即使在 λ 属于连续谱的情形，$\varphi_i(x,\lambda)$ 的线性组合也构成广义的特征函数. 后来小平和 E. C. Titchmarsh 以给出密度矩阵 $\rho_{ik}(\lambda)$ 的具体公式而完成了这一理论(小平[29], Titchmarsh [6], Dunford-Schwartz [2]). 这一展开定理使得许多古典的特殊函数展开定理得到了统一的处理，包括 Fourier 级数展开，按 Hermite 多项式，Laguerre 多项式的展开，Fourier 积分定理，按 Bessel 函数的展开等([6], [7]).

微分算子的系数和 P 的谱分布之间的关系在应用上很重要，这方面有种种研究([6],[5],[2]).

例如，$P(x, D)=-d^2/dx^2+q(x)$, $\Omega=(-\infty,\infty)$ 时，如果当 $|x|\to\infty$ 时，$q(x)\to\infty$，则 $P(x, D)$ 是本质自伴的，且其谱完全由点谱组成. 对第 i 个特征值 λ_i 能得出详细的估计([6]). 如果当 $|x|\to\infty$ 时 $q(x)$ 急速收敛于 0，则 $P(x,D)$ 是本质自伴的，且当 $\lambda>0$ 时仅有连续谱，当 $\lambda<0$ 时具有最多以 0 为聚点的特征值. 如果 $q(x)$ 为 x 的周期函数，则 $P(x,D)$ 仍为本质自伴的，且其谱为连续谱，它是由互不相交的区间序列组成的. 给定谱的测度，反过来决定 $q(x)$，这样的逆问题曾为 И. М. Гельфанд-В. М. Левитан 所研究过.

【偏微分算子的情形】 具有连续谱的偏微分算子的特征函数展开的理论未能象常微分算子情形那样地完全. 引起困难的原因是微分方程 $(P(x, D)-\lambda)u=0$ 的解应当是广义特征函数，它们形成一个无穷维空间，而且除了特殊情形又不能在其中引进方便的参数. 关于对任意的自伴椭圆型算子，使用广义特征函数 $\varphi_i(x, \lambda)$，作出形如

$$u(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^{k(\lambda)}\varphi_i(x,\lambda)d\rho_i(\lambda)\times\int_\Omega\overline{\varphi_i(x,\lambda)}\,u(y)dy$$

的特征函数展开的抽象理论，已经知道许多这方面的证明(例如[10])，但是，已具体地给出 $\varphi_i(x, \lambda)$ 和测度 $d\rho_i(\lambda)$ 的构造方法的算子则为数甚少. 在常数系数的情形，Fourier 变换给出了上述展开. 池部对 $\boldsymbol{R}^3$ 中的 Schrödinger 算子 $-\Delta+q(x)$，在 $q(x)\in L_2$ 并且当 $|x|\to\infty$ 时为 $O(|x|^{-2-\varepsilon})$ 的条件下，用 Fourier 变换的推广形式，给出了这个算子的特征函数展开([30]). 静田靖，溝畑，Lax-R. S. Phillips, N. A. Shenk，池部，Д. К. Фаддеев 等对定义于高维 Euclid 空间(除掉有界集的外部域)上的类似算子，证明了同样结果成立. 这些理论与伴随这些算子的 Schrödinger 方程

$$(-id/dt-P)u=0$$

或波动方程 $(d^2/dt^2+P)u=0$ 的散射理论有很深刻的关系.

量子力学的多数问题可以归结为求自伴微分算子的谱分布问题，但这个问题的数学研究还不能说已很充分.

【非自伴算子的展开理论】 对于非自伴的

微分算子或非 Hilbert 空间的情形，也存在某种特征函数的展开. 在这方面，关于常微分算子可参阅俄罗斯学派的论文，关于偏微分方程可参阅 Browder, Agmon 等人的论文.

【微分算子组】 以上讨论的是把一个函数 u 映射为一个函数 f 的单个线性微分算子，而把 p 个函数所成的组 $(u_1,\cdots,u_p)$ 映成 q 个函数所成的组 $(f_1,\cdots,f_q)$ 的线性微分算子，可以用以单个微分算子为元的矩阵

$$P(x,D)=(P_{ij}(x,D))$$

写成下面的形式:

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{p}P_{ij}(x,D)u_j(x),\ i=1,\cdots,q.$$

这样的矩阵称为**微分算子组** (system of differential operators). 算子组 $P(x,D)$, 当 $p>q$ 时称为**不定组** (underdetermined), $p=q$ 时称为**确定组** (determined), $p<q$ 时称为**超定组** (overdetermined). 对于单个算子成立的许多命题，在适当的假设下，对确定组也成立.

但是，如同作为典型的超定组

$$\partial/\partial\bar{z}=(\partial/\partial\bar{z}_i)$$

的理论的多复变量函数论所表明的，超(不)定组和确定组之间有根本的差别，其理论非常困难. 常系数的超定组和不定组的一般理论，对于 C^∞ 函数和广义函数的情形，已由 Ehrenpreis, Malgrange, B. Парамодов, Hörmander 等所建立；而小松彦三郎则把它推广到了超函数的情形.

【一阶对称组】 一阶确定组在应用上很重要，多数数学物理上的问题能用一阶确定组表述. 又对单个高阶方程，把导数看做未知函数，可以归结为关于一阶确定组的方程，而且一阶确定组与高阶算子相比在处理上有时是便利的. 特别是，形如

$$P(x,D)=\sum A_i(x)\partial/\partial x_i+B(x)$$

的算子组，如果其矩阵 $A_i(x)$, $B(x)$ 使得 $A_i^*=A_i, B+B^*+\sum\partial A_i/\partial x_i$ 是半正定的，则这样的微分算子组称为**正对称组** (symmetric positive system)，正对称组由 Friedrichs([31]), Phillips ([32]), C. S. Morawetz, Lax 等人作过详细的研究.

【伪微分算子】 伪微分算子是微分算子的自然的推广. 伪微分算子的研究产生于奇异积分算子⁺的研究. 首先对此作系统探讨的是 Kohn 和 Nirenberg [36]，其后不久有 Hörmander 的工作[37]. 这样才使得在奇异积分算子中，避免对奇核的繁杂处理成为可能. 设 $P(x,D_x)$ 是一个形如 (1) 的微分算子，$u(x)$ 是一个 $C_0^\infty(\Omega)$ 类函数，则由 Fourier 反演公式，$P(x,D_x)u(x)$ 可以表示为

$$(7)\ P(x,D_x)u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int P(x,\xi)Fu(\xi)\exp(ix\xi)\,d\xi.$$

当多项式 $P(x,\xi)$ 推广到属于更广的函数类时，由 (7) 定义的算子 $P(x,D_x)$ 称为具有**符号** (symbol) $P(x,\xi)$ 的**伪微分算子** (pseudodifferential operator). 符号类由不同的目的来决定，但是总需要对应的算子有一些本质的性质与偏微分算子是共同的. Hörmander [38] 按如下方式对任意实数 m 定义了符号类 $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, $0<\rho$, $0\leqslant\delta$: 设 $P(x,\xi)$ 是定义在 $\Omega\times\boldsymbol{R}^n$ 中的 C^∞ 类函数，如果对任意重指数 α,β 和任意紧集 $K\subset\boldsymbol{R}^n$，存在常数 $C_{\alpha,\beta,K}$，使得

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta P(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|},\quad x\in K,\ \xi\in\boldsymbol{R}^n,$$

则称 $P(x,\xi)$ 是 $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 类的，并且由 (7) 定义的算子 $P(x,D_x)$ 称为 (m阶的) $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ 类的一个伪微分算子. 当 $\Omega=\boldsymbol{R}^n$ 且常数

$$C_{\alpha,\beta,K}=C_{\alpha,\beta}$$

不依赖于 K 时，我们简单地用 $S^m_{\rho,\delta}$ 表示 $S^m_{\rho,\delta}(\boldsymbol{R}^n)$，并令

$$S^{-\infty}=\bigcap_{-\infty<m<\infty}S^m_{1,0}\left(=\bigcap_{-\infty<m<\infty}S^m_{\rho,\delta}\right),$$

$$S^\infty_{\rho,\delta}=\bigcup_{-\infty<m<\infty}S^m_{\rho,\delta}.$$

具有 $\mathscr{B}$ 类 (→函数空间) 系数的微分算子 (1)属于 $S^m_{1,0}$.

$$1-\Delta=1-\sum_{j=1}^{n}\partial^2/\partial x_j^2$$

的复数幂 $(1-\Delta)^{z/2}$，由符号 $(1+|\xi|^2)^{z/2}$ 定义为 $S_{1,0}^{\mathrm{Re}\,z}$ 类的一个伪微分算子. $S_{\rho,\delta}^m$ 类算子是 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{S}$ 中的连续映射，所以对任意实数 s，算子 $(1-\Delta)^{s/2}$ 可由关系

$$\langle(1-\Delta)^{s/2}u,v\rangle=\langle u,(1-\Delta)^{s/2}v\rangle,$$
$$u\in\mathfrak{S}',\ v\in\mathfrak{S}$$

唯一地扩张为 $\mathfrak{S}'$ 到 $\mathfrak{S}'$ 中的一个映射. 对于任意的 $1\leqslant r<\infty$ 和实数 s, Соболев 空间 $H^{s,r}$ 由

$$H^{s,r}=\{u\in\mathfrak{S}'\,|\,(1-\Delta)^{s/2}u\in L_r(\boldsymbol{R}^n)\}$$

所定义. 赋予范数 $\|u\|_{s,r}=\|(1-\Delta)^{s/2}u\|_{L_r}$，它是一个 Banach 空间. 特别地，$H^s=H^{s,2}$ 是具有范数 $\|u\|_s=\|u\|_{s,2}$ 的 Hilbert 空间. 令

$$H^{-\infty,r}=\bigcup_{-\infty<s<\infty}H^{s,r},$$
$$H^{\infty,r}=\bigcap_{-\infty<s<\infty}H^{s,r},$$
$$H^{-\infty}=H^{-\infty,2},\ H^{\infty}=H^{\infty,2},$$

则 $\mathfrak{S}'\supset H^{-\infty}\supset\mathscr{E}',H^{-\infty}\supset L_2(\boldsymbol{R}^n)\supset H^\infty(\subset\mathscr{B})$.

伪微分算子理论主要是研究 $H^{-\infty}$ 到 $H^{-\infty}$ 中的映射. 这里选取 $0\leqslant\delta<\rho\leqslant1$ 情形的 Hörmander 类 $S_{\rho,\delta}^m$ 作为典型类，把伪微分算子的七个主要性质列举于下(对于非 C^∞ 类函数的符号类，见 Friedrichs [39]): (1) 伪局部性. 一般地说，$S_{\rho,\delta}^m$ 类算子 P 没有**局部性** (local property): $u\in\mathscr{E}'\Rightarrow\mathrm{supp}Pu\subset\mathrm{supp}u$，但是有**伪局部性** (pseudolocal property): $u\in\mathscr{E}'\Rightarrow\mathrm{sing\,supp}\,Pu\subset\mathrm{sing\,supp}\,u$ [38]. (2) H^s 有界性. 对于 $P\in S_{\rho,\delta}^m$ 和任意实数 s，存在常数 C_s，使得

$$\|Pu\|_s\leqslant C_s\|u\|_{s+m},\ u\in H^{s+m}$$

([38, 40]). (3) Gårding 不等式的一个锋利形式. 设 $P(x,\xi)=(P_{jk}(x,\xi);\ j,k=1,\cdots,l)$ 是 $P_{jk}(x,\xi)\in S_{\rho,\delta}^m$ 的一个 Hermite 对称非负矩阵，则存在常数 C，使得

$$\mathrm{Re}(P(x,D_x)u,u)\geqslant-C\|u\|^2_{(m-(\rho-\delta))/2},$$
$$u=(u_1,\cdots,u_l)\in H^{m/2}.$$

这里 $u\in H^s$ 意味着 $u_i\in H^s$, $i=1,\cdots,l$,

$$\|u\|_s^2=\sum_{i=1}^l\|u_i\|_s^2$$

([40, 41, 42]). (4) 渐近展开式. 设 $P(x,D_x)\in S_{\rho,\delta}^m$, $P_j(x,D_x)\in S_{\rho,\delta}^{m_j}$, $j=1,2$，则存在 $P^*(x,D_x)\in S_{\rho,\delta}^m$ 和 $R(x,D_x)\in S_{\rho,\delta}^{m_1+m_2}$，使对 $u,v\in\mathfrak{S}$，有 $(P(x,D_x)u,v)=(u,P^*(x,D_x)v)$，且 $R(x,D_x)=P_1(x,D_x)P_2(x,D_x)$. 进而如果我们令

$$P_\alpha^*(x,\xi)=D_x^\alpha(iD_\xi)^\alpha\overline{P(x,\xi)},$$
$$R_\alpha(x,\xi)=(iD_\xi)^\alpha P_1(x,\xi)D_x^\alpha P_2(x,\xi),$$

那么对任意正整数 N，有

$$P^*(x,D_x)-\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}P_\alpha^*(x,D_x)\in S_{\rho,\delta}^{m-(\rho-\delta)N},$$

$$R(x,D_x)-\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}R_\alpha(x,D_x)\in S_{\rho,\delta}^{m_1+m_2-(\rho-\delta)N}.$$

因此，算子类 $S_{\rho,\delta}^\infty$ 在如下意义上是一个代数:

$$P\in S_{\rho,\delta}^m,\ P_j\in S_{\rho,\delta}^{m_j},\ j=1,2,$$
$$\Rightarrow P^*\in S_{\rho,\delta}^m,$$
$$P_1+P_2\in S_{\rho,\delta}^{m_0}\ (m_0=\max(m_1,m_2)),$$
$$P_1P_2\in S_{\rho,\delta}^{m_1+m_2}.$$

(5) 光滑算子. 算子类 $S^{-\infty}$ 是 $S_{\rho,\delta}^\infty$ 类中的一个理想而 $S^{-\infty}$ 的元在下述意义下是**光滑算子** (smoothing operator): 设 $H_{-\infty}\in S^{-\infty}$，那么对任意的 $1\leqslant r\leqslant q<\infty$, $P_{-\infty}$ 把 $H^{-\infty,r}(\supset\mathscr{E}')$ 映射到 $H^{\infty,q}(\subset\mathscr{B})$ 中，并且对任意实数 s_1,s_2，存在常数 C_{r,q,s_1,s_2}，使得

$$\|P_{-\infty}u\|_{s_2,q}\leqslant C_{r,q,s_1,s_2}\|u\|_{s_1,r},\ u\in H^{s_1,r}.$$

(6) 在坐标变换下的不变性. 设

$$0\leqslant1-\rho\leqslant\delta<\rho<1$$

[38]. 令 $x(y)=(x_1(y),\cdots,x_n(y))$ 是由 $\boldsymbol{R}_y^n$ 到 $\boldsymbol{R}_x^n$ 上的 C^∞ 坐标变换，使得

$$\partial x_k(y)/\partial y_j\in\mathscr{B},\ j,k=1,\cdots,n,$$

且对于某个常数 $C>0$,

$$C^{-1}\leqslant|\det(\partial_yx(y))|\leqslant C,$$

这里 $\det(\partial_yx(y))$ 表示 Jacobi 矩阵

$$(\partial_yx(y))=(\partial x_k(y)/\partial y_j)$$

的行列式. 此时，对任意的 $P(x,D_x)\in S_{\rho,\delta}^m$ (在 $\boldsymbol{R}_x^n$ 中)，存在 $\boldsymbol{R}_y^n$ 中 $Q(y,D_y)\in S_{\rho,\delta}^m$ (在 $\boldsymbol{R}_y^n$ 中)，使得

$$Q(y,D_y)w(y)=(P(x,D_x)u)(x(y)),$$
$$w(y)\in\mathfrak{S}.$$

这使我们能在 C^∞ 流形上定义伪微分算子.

(7)拟基本解.算子 $E\in S^{\infty}_{\rho,\delta}$ 称为对于 $P\in S^{m}_{\rho,\delta}$ 是一个**左(右)拟基本解** (left (right) parametrix), 如果 $EP-I(PE-I)$ 属于 $S^{-\infty}$ 类. 如果 E 同时是对于 P 的左和右拟基本解, 则称它是对于 P 的一个拟基本解.对于微分算子 P, 左(右)拟基本解的存在性是为使 P 是准椭圆型的(hypoelliptic) (方程 $Pu=f\in\mathscr{D}'$ 是局部可解的)一个充分条件([38]).

涉及伪微分算子理论的应用已有许多工作, 例如 Atiyah 和 Bott (Ann. of Math. **86** (1967)) 关于 Lefschetz 不动点⁺公式, Friedrichs 和 Lax(Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965)) 关于可对称化组, Hörmander ([41])关于次椭圆型算子, Kumano-go (熊ノ郷準) (Comm. Pure Appl.Math., **22** (1969)) 关于 Cauchy 问题的唯一性以及 Mizohata (溝畑茂)和 Ohya (大矢勇次郎) (Publ. Res. Inst. Math. Sci., (A) 4 (1968)) 关于弱双曲型方程的工作. 还应该注意, Hörmander([43])定义了伪微分算子的一个更广的类, 称为 **Fourier 积分算子** (Fourier integral operator), 它不具有伪局部性,而应用这样的算子, 对于椭圆算子的谱函数的渐近性质得到了一个最好可能的结果. 关于最近研究的文献见[39]和[44].

【Fourier 积分算子】 [48, 50, 55] **Fourier 积分算子** $B: C_0^{\infty}(\boldsymbol{R}^n)\to\mathscr{D}'(\boldsymbol{R}^n)$ 是如下类型的线性算子的一个局部有限和:

(8) $$Af(x)=(2\pi)^{-(n+N)/2}\times\int_{\boldsymbol{R}^{N+n}}a(x,\theta,y)\exp(i\varphi(x,\theta,y))f(y)dyd\theta.$$

这里 $a(x,\theta,y)$ 是 C^{∞} 类函数, 且对于某固定的 m 和 ρ, $1\geqslant\rho>1/2$, 和任意的重指标 α, β, γ, 满足不等式

$$|D_x^{\alpha}D_{\theta}^{\beta}D_y^{\gamma}a(x,\theta,y)|\leqslant C(1+|\theta|)^{m-\rho|\beta|+(1-\rho)(|\alpha|+|\gamma|)};$$

而 $\varphi(x,\theta,y)$ 是一个实值 C^{∞} 类函数, 它对于 $\theta(|\theta|>1)$ 是 1 次齐次的. 函数 φ 称为**位相函数**(phase function),而 a 称为**振幅函数** (amplitude function).

设 $C_{\varphi}=\{(x,\theta,y)|d_{\theta}\varphi(x,\theta,y)=0,\theta\neq0\}$, $W=\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n|\exists\theta\neq0$, 使得 $(x,\theta,y)\in C_{\varphi}\}$. 如果对于 $\theta\neq0$,

$$d_{x,\theta,y}\varphi(x,\theta,y)\neq0,$$

那么 A 的核分布在 W 之外是 C^{∞} 类的. 对于

$$d_{x,\theta,y}(\partial\varphi(x,\theta,y)/\partial\theta_j)\ (j=1,2,\cdots,N)$$

在 C_{φ} 的每个点处是线性无关的情形,已经有了详细的研究. 在这种情形, C_{φ} 是 $\boldsymbol{R}^{n+N+n}$ 中的光滑流形,并且映射

$$\Phi:\ C_{\varphi}\ni(x,\theta,y)\to(x,y,\xi,\eta),$$
$$\xi=d_x\varphi(x,\theta,y),\ \eta=d_y\varphi(x,\theta,y)$$

是 C_{φ} 到 $T^*(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)\backslash0$ (即 $\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n$ 的余切从减去它的零截面)的一个浸入. 像 $\Phi C_{\varphi}=\Lambda_{\varphi}$ 是一个**圆锥 Lagrange 流形** (conic Lagrange manifold), 即典范二次微分形式

$$\sigma=\sum_j d\xi_j\wedge dx_j-\sum_j d\eta_j\wedge dy_j$$

在 Λ_{φ} 上为零并且正数乘法群作用在 Λ_{φ} 上. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2n}$ 是 Λ_{φ} 中的一个局部坐标系, 它们与 $\partial\varphi/\partial\theta_1,\partial\varphi/\partial\theta_2,\cdots,\partial\varphi/\partial\theta_N$ 一起, 构成 $\boldsymbol{R}^{n+N+n}$ 在 C_{φ} 的一个邻域内的局部坐标函数系. 设 J 表示 Jacobi 行列式

$$\frac{D\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{2n},\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta_1},\cdots,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta_N}\right)}{D(x,\theta,y)}.$$

函数 $a_{\Lambda_{\varphi}}=\sqrt{J}\,a_{|C_{\varphi}}\Phi^{-1}$ 称为 A 的**符号**(symbol), 这里 $a_{|C_{\varphi}}$ 是 a 在 C_{φ} 上的限制. 圆锥 Lagrange 流形 $\Lambda_{\varphi}=\Lambda_{\varphi}(A)$ 和符号 $a_{\Lambda_{\varphi}}=a_{\Lambda_{\varphi}}(A)$ 本质上决定了 Fourier 积分算子 A 的广义函数核 $k(x,y)$的奇异性. 相反地,在 $T^*(\boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^n)\backslash0$ 中给定一个圆锥 Lagrange 流形 Λ 及其上的一个函数 a_{Λ}, 可以构造一个 Fourier 积分算子 A, 使得 $\Lambda_{\varphi}(A)=\Lambda$, 且 $a_{\Lambda_{\varphi}}(A)=a_{\Lambda}$. 其关联的圆锥 Lagrange 流形是 $T^*(\boldsymbol{R}^n)$ 的齐次典范变换的图象的那些 Fourier 积分算子, 在线性偏微分方程论中经常用到. 设 A 是 Fourier 积分算子, 使得 $\Lambda_{\varphi}(A)$ 是齐次典范变换 χ 的图象,则 A 的伴随算子是 Fourier 积分算子, 使得关联的圆锥 Lagrange 流形是逆变换 χ^{-1} 的图象. 设 A_1 是另一个这样的算子, 如果 $\Lambda_{\varphi}(A_1)$ 是 χ_1 的图象, 那么合成算子 A_1A 也是 Fourier 积分算子并且 $\Lambda_{\varphi}(A_1A)$ 是合成齐次典范变换

$\chi_1\chi$ 的图象.

$S^m_{\rho,1-\rho}(\boldsymbol{R}^n)$ 类的伪微分算子是 Fourier 积分算子的一个特殊类型，事实上，Fourier 积分算子 A 是 $S^m_{\rho,1-\rho}(\boldsymbol{R}^n)$ 类的伪微分算子，当且仅当 $\Lambda_\varphi(A)$ 是 $T^*(\boldsymbol{R}^n)$ 的恒等映射的图象. 因而对任意 Fourier 积分算子 A，A^*A 和 AA^* 是伪微分算子.

下面的定理属于 Егоров [51]：设 $P(x,D)$ 和 $Q(x,D)$ 是 $S^m_{\rho,1-\rho}(\boldsymbol{R}^n)$ 类的伪微分算子，分别具有符号 $p(x,\xi)$ 和 $q(x,\xi)$，且设 A 是 Fourier 积分算子，使得关联的圆锥 Lagrange 流形 $\Lambda_\varphi(A)$ 是 $T^*(\boldsymbol{R}^n)$ 的一个齐次典范变换 χ 的图象. 如果等式 $P(x,D)A=AQ(x,D)$ 成立，那么 $q(x,\xi)-p(\chi(x,\xi))$ 属于 $S^{m+1-2\rho}_{\rho,1-\rho}(\boldsymbol{R}^n)$ 类.

假设 $m=1$，$\rho=1$，$p_1(x,\xi)$ 是 $\xi(|\xi|>1)$ 的一次齐次实值 C^∞ 类函数，使得 $p(x,\xi)-p_1(x,\xi)\in S^0_{1,0}(\boldsymbol{R}^n)$ 且在 (x^0,ξ^0) 处，

$$d_\xi p_1(x^0,\xi^0)\neq 0,$$

这里 $p_1(x^0,\xi^0)=0$，那么能找到一个 Fourier 积分算子 A，使得 Егоров 定理中的函数 $q(x,\xi)$ 满足关系 $q(x,\xi)-\xi_1\in S^0_{1,0}(\boldsymbol{R}^n)$.

关于 Fourier 积分算子在空间 $L_2(\boldsymbol{R}^n)$（或空间 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$）中的有界性，对有些情形也进行过研究. 对于有界性的某些充分条件可在[48, 54, 57]中找到.

Fourier 积分算子理论在波动方程解的渐近表示中有它的根源（例如见 [55, 58, 59, 60, 61]）. Эскин（[54]）应用一类 Fourier 积分算子导出能量估计并对严格双曲型算子构造基本解. Hörmander（[48]）引进了"Fourier 积分算子"这一名词并应用这种算子对椭圆型算子的谱函数导出了一个高度精确的渐近公式. Егоров 应用上面提到的他的定理和推论来研究非退化伪微分算子的准椭圆性和局部可解性（[52]）. 应用 Егоров 定理和同样的推论，Nirenberg 和 Treves（[53]）对于非退化线性偏微分方程的局部可解性得到了决定性的结果，这些结果由 Beals 和 Fefferman（[63]）加以完成. Hörmander 和 Duistermaat（[48]）应用 Маслов 的理论（[55]）（这一理论最初发表于 1965 年），构造了 Fourier 积分算子的一个一般的整体理论. 由于这些研究工作的成果，人们终于认识到，Fourier 积分算子是线性偏微分方程论中的一个强有力的工具. Fourier 积分算子整体理论的一个有趣的应用出现于[56]中.

Егоров，Nirenberg-Treves 和 Hörmander 的工作推动了由佐藤幹夫发展的超函数的理论并引起了定量化的切触变换的概念，后一概念与广义函数论中的 Fourier 积分算子相对应. 上面叙述的 Егоров 的变换定理，对于具有解析系数及一个未知函数的伪微分方程组，已被详细地加以研究（[62]）.

【参】 [1] K.Yosida(吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [2] N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators, part II, Interscience, 1963; [3] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics I, II, Interscience, 1953, 1962 (中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特，数学物理方法，I, II，科学出版社，1958，1977); [4] L. Hörmander, Linear differential operators, Springer, 1963; [5] M. A. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954 (中译本：M. A. 纳依玛克，线性微分算子，科学出版社，1964); [6] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations I, II, Oxford, 1946, 修订版 1962; 1958 (中译本：E. C. 梯其玛希，与二阶微分方程相联系的本征函数展开，第一册，上海科学技术出版社，1964); [7] 吉田耕作，積分方程式論，岩波全書，1950; [8] F. John, Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955; [9] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, Наука, 1964; [10] И. М. Гельфанд-Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа, оснащенные гильбертовы, пространства, Физматгиз, 1961 (中译本：И. М. 盖勒范德，Н. Я. 维列金，广义函数，第四卷，调和分析的某些应用装备希尔伯特空间，科学出版社，1965); [11] 偏微分方程式特集号，数学，**10** (1959)，4 号; [12] Partial differential equations, Proceedings of symposia in pure mathematics IV, Amer. Math. Soc. 1961; [13] J. Leray, Lectures on hyperbolic equations, Inst. for Advanced Study, Princeton, 1952; [14] S. Mizohata (溝畑茂), Hypoellipticité des équations paraboliques, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 15—50; [15] J. Leray, Probléme de Cauchy I—V, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 389—429, **86** (1958), 75—96, **87** (1959), 81—180, **90** (1962), 39—156, **92** (1964) 263—361; [16] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux derivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, **6**(1955—1956), 271—355; [17] L. Ehrenpreis, Sheaves and differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956), 1131—1138; [18] И. Г. Петровский, Sur l'analylicité des solutions des systèmes d'équations différentielles, Мат.

сб., **5** (**47**) (1939), 3—70; [19] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, Acta Math., **94** (1955), 161—248 (中译本：霍玛特，一般偏微分算子理论，上海科学技术出版社，1964); [20] J. Peetre, Théorèmes de régularité pour quelques classes d'opérateurs différentiels, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., **16** (1959), 1—122; [21] Т. Ikebe-T. Kato (池部晃生-加藤敏夫), Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, Arch. Rational Mech. Anal., **9** (1962), 77—92;[22] М. И. Вишик, Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Москов. Мат. Общ. **1** (1952), 187—246 (英译本: M. I. Visik, On general boundary problems for elliptic differential equations, Amer. Math. Soc. Trans, ser. 2, **24**(1963), 107—172; [23] J.-L. Lions-E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes (VI), J. Analyse Math., **11** (1963), 165—188; [24] M. Schechter, On L^p estimates and regularity I, II, Amer. J. Math., **85** (1963), 1—13; Math. Scand., **13** (1963), 47—69; [25] L. Gårding, Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., **1** (1953), 55—72; [26] S. Agmon-A Douglis-L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I, II, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623—727; **17** (1964), 35—92; [27] L. Hörmander, On the regularity of the solutions of boundary problems, Acta Math., **99** (1958), 225—264; [28] J. J. Kohn, A priori estimates in several complex variables, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 739—745; [29] K. Kodaira (小平邦彦), On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer. J. Math., **72** (1950), 502—544; [30] T. Ikebe (池部晃生), Eigenfunction expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, Arch. Rational Mech. Anal., **5** (1960), 1—34; [31] K. O. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **11** (1958), 333—392; [32] R. S. Phillips, Dissipative operators and parabolic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **12**(1959), 249—276; [33] C. B. Morrey, Some recent developments in the theory of partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., **68** (1962), 279—297; [34] L. Schwartz, Some applications of the theory of distributions, Lectures on Modern Mathematics, Vol. I, 1963, p. 23—58; [35] L. Nirenberg, Partial differential equations with applications in geometry, Lectures on Modern Mathematics, vol. 2, 1964, p. 1—41; [36] J. J. Kohn-L. Nirenberg, An algebra of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 269—305; [37] L. Hörmander, Pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 501—517; [38] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Singular Integrals, Proc. Symposia in Pure Mathematics IX, Amer. Math. Soc., **10** (1967), 138—183; [39] K. O. Friedrichs, Pseudo-differential operators, Lecture notes, Courant Institute, 1968; [40] H. Kumano-go(熊ノ郷準), Algebras of pseudo-differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **17** (1970), 31—50; [41] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems, Ann. of Math., (2) **83** (1966), 129—209; [42] P. D. Lax-L. Nirenberg, On stability for difference schemes, a sharp form of Gårding's inequality, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966), 473—492; [43] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math., **121** (1969), 193—218; [44] Singular Integrals, Proc. Symposia in Pure Mathematics X, Amer. Math. Soc., 1967; [45] A. Friedman, Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, 1963; [46] L. Ehrenpreis, Fourier analysis in several complex variables, John Wiley, 1970; [47] В. П. Паламодов, Линейные дифференциалные операторы с постоянными коэффициентами, Наука, 1967 (英译本 V. P. Palamodov, Linear differential operators with constant coefficients, Springer, 1970); [48] L. Hörmander, Fourier integral operators I, Acta Math., **127** (1971), 79—183; II (with J. J. Duistermaat), 同上, **128** (1972), 183—269; [49] L. Nirenberg (ed.), Pseudo-differential operators, C. I. M. E. (1968), Rome; [50] J. J. Duistermaat, Fourier integral operators, Lecture notes, Courant Institute, 1973; [51] Ju V. Egorov (Ю. В. Егоров), On canonical transformation of pseudo-differential operators. Успехи Мат. Наук, **25** (1969), 235—236; [52] Ju V. Egorov (Ю. В. Егоров), On non-degenerate hypoelliptic pseudo-differential operators, Soviet Math. Dokl., **10** (1969), 697—699; [53] L. Nirenberg-F. Treves, On local solvability of linear partial differential equations I, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 1—38; II 同上; 459—510;[54] G. I. Eskin (Г. И. Эскин), The Cauchy problem for hyperbolic systems in convolutions, Math. USSR-Sb., **3** (1967), 243—277; [55] V. P. Maslov (В. Р. Маслов), Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Gauthier-Villars, 1972; [56] J. Chazarain, Formule de Poisson pour les variétés riemannienes, Inventiones Math., **24** (1974), 65—82; [57] D. Fujiwara (藤沢大輔), On the boundedness of integral transformations with highly oscillatory kernels, Proc. Japan Acad., **51** (1975), 96—99; [58] P. D. Lax, Asymptotic solutions of oscillatory initial value-problems, Duke Math. J., **24** (1957), 627—646; [59] D. Ludwig, Uniform asymptotic expansions at a caustic, Comm. Pure Appl. Math., **19** (1966), 215—250; [60] D. Ludwig, Uniform asymptotic expansions of the field scattered by a convex object at high frequencies, Comm. Pure Appl. Math., **20**(1967), 103—138; [61] A. Sommerfeld, Optics, Lectures on theoretical physics 4, Academic Press, 1954; [62] H. Komatsu (小松彦三郎) (ed.), Hyper-functions and pseudo-differential equations, Lecture notes in math. 287, Springer, 1973; [63] R. Beals-C. Fefferman, On Local solvability of linear partial differential equations, Ann. of Math., (2) **97** (1973), 482—498.

特征值问题 [英 eigenvalue problem 法 problème des valeurs principales 德 Eigenwertproblem 俄 задача о собственных значениях 日 固有値問題] 设A为定义于(复数域上的)线

性空间' X 的子空间 $D(A)$ 上的线性算子', 复数 λ 为 A 的**特征值** (eigenvalue) 是指,存在 $x\in D(A)$ $(x\neq 0)$, 满足 $Ax=\lambda x$. 此时 x 称为属于特征值 λ 的**特征元** (eigenelement) 或**特征向量** (eigenvector). 当 X 为函数空间'时,也用**特征函数** (eigenfunction) 这一名词代替特征元. 对于特征值 λ, 属于它的全体特征元再添加一个 0 所构成的子空间'

(1) $M(\lambda)=M(\lambda;A)=\{x\mid Ax=\lambda x\}$

称为属于特征值 λ 的**特征空间** (eigenspace).

(2) $$m(\lambda)=\dim M(\lambda)$$

称为特征值 λ 的**几何重数** (geometric multiplicity), 依 $m(\lambda)=1$ 或 $m(\lambda)\geqslant 2$, 分别称特征值 λ 为**(几何的)单的** (simple) 或**退化的** (degenerate). 求给定的算子 A 的特征值及特征元的问题,就是**特征值问题**.

当 X 为拓扑线性空间'时,可以把特征值的概念推广为如下的谱的概念. 设 λ 为任一复数, $A_\lambda=\lambda I-A$, $R_\lambda=(A_\lambda)^{-1}=(\lambda I-A)^{-1}$ (I 为 X 的恒等算子'). 这时,用 $\rho(A)$ 表示使 R_λ 存在,具有稠密'的定义域'且连续的 λ 的全体,称它为 A 的预解集',用 $\sigma(A)$ 表示不属于 $\rho(A)$ 的复数的全体,称为 A 的谱'. $\sigma(A)$ 还可以分割成下列三种互不相交的子集: **点谱** (point spectrum) $\sigma_P(A)$, **连续谱** (continuous spectrum) $\sigma_C(A)$, **剩余谱** (residual spectrum) $\sigma_R(A)$. 它们的定义是:

$$\sigma_P(A)=\{\lambda\mid R_\lambda\text{ 不存在}\}=\{\lambda\mid\lambda\text{ 为 }A\text{ 的特征值}\},$$

$$\sigma_C(A)=\{\lambda\mid R_\lambda\text{ 存在, 其定义域在 }X\text{ 内稠密, 但 }R_\lambda\text{ 不连续}\},$$

$$\sigma_R(A)=\{\lambda\mid R_\lambda\text{ 存在, 但其定义域在 }X\text{ 内不稠密}\}.$$

特别, 如果 X 为 Banach 空间', A 为闭算子',则 $\lambda\in\rho(A)$ 这个条件, 与 $R_\lambda\in\boldsymbol{B}[X]$ 这个条件是等价的. 这里 $\boldsymbol{B}[X]$ 表示以 X 为定义域 $D(A)$ 且映于 X 中的有界算子' A 的全体. 如果 $A\in\boldsymbol{B}[X]$,则 $\sigma(A)$ 为紧集'. A 的**谱半径** (spectral radius) 定义为

$$r_\sigma(A)=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|.$$

$$r_\sigma(A)\leqslant\|A^n\|^{1/n}\ (n=1,2,\cdots),$$

同时 $\|A^n\|^{1/n}\to r_\sigma(A)$ $(n\to\infty)$ 成立.

一般地说, 与谱有关的分析称为**谱分析** (spectral analysis). 关于无限维的 X, 当 X 为 Hilbert 空间', A 为到它本身内的自伴算子'时, 其理论特别有了进展, 而且在应用上很重要.

【矩阵的特征值问题】 设 X 为 N $(N<\infty)$ 维复线性空间, A 为定义于 X 上的线性算子, 当 X 的基 $(\phi_1,\cdots,\phi_N)$ 确定之后, A 可以用 $N\times N$ 矩阵表示. A 没有特征值以外的谱点, 即 $\sigma(A)=\sigma_P(A)$. A 的特征值是特征方程'

$$\det(\lambda I-A)=0$$

(det 表示行列式)的根. $\lambda\in\sigma(A)$ 时, λ 作为特征方程的根的重数 $\tilde{m}(\lambda)$ 称为特征值 λ 的**代数重数**,或简称为**重数** (multiplicity). $\tilde{m}(\lambda)$ 对一切 $\lambda\in\sigma(A)$ 的总和等于 N. 依照 $\tilde{m}(\lambda)=1$ 或 $\tilde{m}(\lambda)\geqslant 2$, 特征值 λ 称为**(代数的)单的**或**退化的**. 当 $\lambda\in\sigma(A)$ 时, 对任意的自然数 ν, 令 $N_\nu(\lambda)=\{x\mid(\lambda I-A)^\nu x=0\}$, 则它们形成一个单调递增的子空间序列

$$M(\lambda)=N_1(\lambda)\subset N_2(\lambda)\subset\cdots,$$

当 ν 充分大即 $\nu\geqslant\tilde{m}(\lambda)$ 时, $N_\nu(\lambda)$ 等于某个固定的子空间 $\tilde{M}(\lambda)$. $\tilde{M}(\lambda)$ 称为属于特征值 λ 的**广义特征空间**或**主子空间** (principal subspace). $\dim\tilde{M}(\lambda)=\tilde{m}(\lambda)$ 成立. 因此

$$m(\lambda)\leqslant\tilde{m}(\lambda).$$

当 A 为正规矩阵'时,有 $m(\lambda)=\tilde{m}(\lambda)$,

$$M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda).$$

也就是说,对于正规矩阵,特征值的几何重数和代数重数没有区别.

当矩阵 A 和 B 相似',即存在适当的可逆矩阵 P, 使 $B=P^{-1}AP$ 成立时, 两者的特征值包含(几何的和代数的)重数在内是相同的. 对于 A 的转置矩阵' A' 也有同样的结论. 设 A^* 是 A 的共轭转置矩阵,则

$$\sigma(A^*)=\overline{\sigma(A)}=\{\bar{\lambda}\mid\lambda\in\sigma(A)\}.$$

当 $f=f(\lambda)$ 是任意的多项式时,

$$\sigma(f(A))=f(\sigma(A))=\{f(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(A)\}$$

成立，称它为 **Frobenius 定理**. 把它推广到 A 为 Banach 空间的有界算子，f 为 $\sigma(A)$ 的邻域内的全纯函数的情形所得到的定理，就是谱映射定理(→线性算子).

正规矩阵中，Hermite (对称)矩阵†的特征值是实数，酉矩阵†的特征值的绝对值为 1.

正规矩阵 A 的不同的特征值所属的不同的特征空间相互正交，且 A 的特征值的全体张成 X. 从而只由特征向量构成 X 的基†(完备正规正交系†)是可能的. 亦即，对正规矩阵 A，存在向量组 $\{\varphi_j\}$，使得 $A\varphi_j = \mu_j\varphi_j$，

$(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, N)$.

这里(,)表示内积†，δ_{ij} 表示 Kronecker 符号†. 使用基 $\{\varphi_j\}$，对任意的 $x \in X$，

$$(3) \qquad Ax = \sum_{j=1}^{N} \mu_j(x, \varphi_j)\varphi_j = \sum_{\lambda_k \in \sigma(A)} \lambda_k P_k x$$

成立. 其中右端的 P_k 是到特征值 λ_k 所属的特征空间上的正射影†.

矩阵化为对角形式和特征值问题关系密切. 例如，如果以上述的 φ_i 为第 i 列向量构成矩阵 U，则 U 为酉矩阵. A 经 U 的变换 U^*AU 是以 $\{\mu_i\}$ 为对角元素的对角矩阵. 对 Hermite 型† (Hermite 对称二次型) $Q(x)$，使用适当的 Hermite 矩阵 A，可以把它表示为

$$Q(x) = (Ax, x),$$

如果用上述的 U 做变量变换 $x = Uy$，就能得到标准型 $Q = \mu_1|y_1|^2 + \cdots + \mu_N|y_N|^2$. 若 X 为实线性空间，A 为实对称矩阵，则上述的 U 是正交矩阵. $\boldsymbol{R}^N$ 内的二次曲面 $Q(x) = 1$ 经变换 $x = Uy$ 可表示为 $\mu_1 y_1^2 + \cdots + \mu_N y_N^2 = 1$ 的形式. 这个正交变换 $x = Uy$ 称为曲面

$$Q(x) = 1$$

的**主轴变换** (transformation of principal axis).

Hermite 矩阵 A 的特征值问题和 **Rayleigh 商** (Rayleigh's quotient)

$$R(x) = (Ax, x)/\|x\|^2$$

的变分问题关系也很密切. 就是说，如果令

$$\mu_1 = \min_{x \in X} R(x),$$

则最小值 μ_1 是 A 的最小特征值，给出此最小值的非零的 $x = \varphi$，乃是属于 μ_1 的特征向量. 此即所谓 **Rayleigh 原理**. 进而，$R(x)$ 在与 φ_1 正交的子空间内的最小值 μ_2 乃是 A 的次小特征值. 以下情形类似. 结果得到

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots \leqslant \mu_N,$$

这无非就是 A 的特征值按递增顺序排成的序列，当有退化特征值时，依其重数重复排列. 如果考虑 $R(x)$ 的最大值，则可得到按

$$\mu_N, \mu_{N-1}, \cdots, \mu_1$$

顺序排列的特征值. 作为直接求中间的特征值 $\mu_n(1 < n < N)$ 的方法，有**极小极大原理** (minimax principle)，即

$$\mu_n = \max_{\substack{f_1, \cdots, f_{n-1} \in X \\ f_1, \cdots, f_{n-1} \neq 0}} \left(\min_{(x, f_j) = 0; j = 1, \cdots, n-1} R(x) \right)$$

成立.

在非正规矩阵中，所有元素为非负的矩阵的特征值问题是重要的. 设 $A \neq 0$ 为这样的矩阵，则绝对值最大的特征值 λ_0 是非负的，且在属于 λ_0 的特征向量中，存在 φ_0，使它的所有分量均为非负. 此种定理称为关于非负元素矩阵的 **Frobenius 定理**(特别→[4], [17]).

【Hilbert 空间的特征值问题】 以下，直到 Banach 空间的特征值问题为止，所讨论的空间均为 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$，其内积用 (,) 表示. $\mathfrak{H}$ 内的正规算子†，特别是自伴算子†的剩余谱 σ_R 是空的，属于不同的特征值的特征空间相互正交. 有界正规算子的谱半径等于它的范数. 酉算子的 σ 包含在单位圆周内，自伴算子的 σ 包含在实轴内.

今后，以 H 表示 $\mathfrak{H}$ 内的自伴算子. 又 $D(*)$ 表示算子 $*$ 的定义域. H 的**数域** (numerical range) $W = \{(Hx, x) | x \in D(H), \|x\| = 1\}$ 包含在实轴内，它的闭包是包含 $\sigma(H)$ 的最小闭区间(有限或无穷). 关于 H 的特征值问题，最基本的是作为 (3) 式的推广的谱表示成立. 以下叙述与此有关的事实.

【谱测度】 设 $\mathscr{B}_1$ 为数直线 $\boldsymbol{R}$ 的子集的

一个完全加法族†. 在 $\mathscr{B}_1$ 上定义的，取值为 $\mathfrak{H}$ 的射影算子†的加性集函数† $E=E(\cdot)$，当它满足条件 $E(\boldsymbol{R})=I$ 和条件(完全可加性†)

$$(4)\qquad E\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} E(M_n)$$

(右端为强收敛†)

时，就称 E 为**(实)谱测度** (real spectral measure); 这里 (4) 式中的 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathscr{B}_1$ 的互不相交的元的序列. 此时对于 $\mathscr{B}_1$ 的任意的元 M, N, $E(M\cap N)=E(M)E(N)=E(N)E(M)$ 成立. 使 $E(G)=0$ 成立的最大开集 G 的补集 $\Lambda(E)$ 称为 E 的**支集**，或**谱**. 谱测度可以在更一般的测度空间†上定义. 例如用复平面 $\boldsymbol{C}$ 取代 $\boldsymbol{R}$, 用 $\boldsymbol{C}$ 的子集的一个完全加法族 $\mathscr{B}_p$ 代替 $\mathscr{B}_1$, 就能定义**复谱测度** (complex spectral measure). 在谱分析中常用到的是定义在 $\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 的所有 Borel 集†所成的完全可加集族上的谱测度. 我们能把支集包含在实轴内的复谱测度看作与实谱测度等同.

对于实谱测度 E, 令

$$(5)\ E_\lambda=E((-\infty,\lambda]),\ -\infty<\lambda<+\infty,$$

则射影算子族 $\{E_\lambda\}$ 满足

$$(6)\qquad E_\lambda E_\mu=E_{\min(\lambda,\mu)},\quad \lim_{\lambda\to\mu+0}E_\lambda=E_\mu,$$

$$\lim_{\lambda\downarrow-\infty}E_\lambda=0,\quad \lim_{\lambda\uparrow+\infty}E_\lambda=I,$$

lim 为强收敛.

一般说，满足 (6) 式的射影算子族 $\{E_\lambda\}$ 称为恒等算子分解或**单位分解**(resolution of the identity)，单位分解和实谱测度之间，由 (5) 式的对应关系形成一一对应.

设 E 为定义于 $\boldsymbol{R}$ 的 Borel 集族 $\mathscr{B}_1$ 上的实谱测度. 设 x, y 为 $\mathfrak{H}$ 的任意元，则集函数

$$M\to(E(M)x,x)=\|E(M)x\|^2$$

是通常的有界正则测度†，且集函数

$$M\to(E(M)x,y)$$

是一复值正则完全加性集函数†. 对 $\boldsymbol{R}$ 上每一复值 Borel 可测函数 f，由下述关系定义 $\mathfrak{H}$ 内的算子 $S(f)$:

$$D(S(f))=\left\{x\ \middle|\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2(E(d\lambda)x,x)<\infty\right\},$$

$$(7)\qquad (S(f)x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)(E(d\lambda)x,y),$$

$$x\in D(S(f)),\ y\in\mathfrak{H}.$$

$S(f)$ 是稠定的闭算子，我们把它表示为

$$S(f)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)E(d\lambda).$$

对应 $f\to S(f)$ 满足所谓算子演算的公式(→线性算子). 特别有 $S(\bar{f})=S(f)^*$，且由此可知，如果 f 是实值的，那么 $S(f)$ 是自伴的. 如果 f 在 E 的支集上有界. 那么 $S(f)$ 在 $\mathfrak{H}$ 内处处有定义且为有界算子. $S(f)$ 有时称为 f 关于 E 的**谱积分** (spectral integral). 可以用同样方法对 $\mathscr{B}_C$ ($\boldsymbol{C}$ 内的一切 Borel 集所成的族) 上的一个谱测度 (或对更一般的谱测度) 定义算子 $S(f)$.

【谱表示】 对 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 内每个自伴算子 H，存在唯一的定义于 $\boldsymbol{R}$ 的 Borel 集族 $\mathscr{B}_1$ 上的谱测度 E，使得

$$(8)\qquad H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda E(d\lambda).$$

换言之，H 和 E 依下述关系相互对应:

$$(9)\ D(H)=\left\{x\ \middle|\ \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(E(d\lambda)x,x)<\infty\right\},$$

$$(10)\qquad (Hx,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(E(d\lambda)x,y),$$

$$x\in D(H),\ y\in\mathfrak{H}.$$

这就是自伴算子 H 的**谱定理** (spectral theorem). E 的支集等于 $\sigma(H)$，所以可写

$$H=\int_{\sigma(H)}\lambda E(d\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\chi_{\sigma(H)}(\lambda)E(d\lambda),$$

其中 χ_M 表示 M 的定义函数†. 公式 (8) 和 (10) 有时也称作 H 的**谱分解** (spectral resolution) 或**谱表示** (spectral representation). 我们称 E 为 H 的**谱测度**，且把依公式 (5) 与 E 对应的 $\{E_\lambda\}$ (有时也把 E 本身) 称作 H 的单位分解. 设 λ 是一实数，则 $\lambda\in\sigma_P(H)$ 当且仅当 $E(\{\lambda\})\neq0$. 又 $\lambda\in\sigma_C(H)$ 当且仅当 $E(\{\lambda\})=0$ 且对 λ 的任一邻域 V, $E(V)\neq0$. 谱测度 E 可用 H 的预解算子 $R(\alpha;H)=(\alpha I-H)^{-1}$ 用下述公式来表示: 对任意的开区间 (a,b),

$$E((a,b))=\lim_{\delta\downarrow0}\lim_{\varepsilon\downarrow0}\frac{1}{2\pi i}\int_{a+\delta}^{b-\delta}\{R(\mu-\varepsilon i;H)$$

$$-R(\mu+\varepsilon i; H)\}d\mu$$

(强收敛).

对 $\mathfrak{H}$ 内的每一正规算子 A，存在唯一的定义于复平面 $\boldsymbol{C}$ 的 Borel 集族 $\mathscr{B}_c$ 上的谱测度 E，使得

$$A=\int_C zE(dz). \tag{11}$$

(11) 式称为 A 的**复谱分解** (complex spectral resolution) 或**复谱表示** (complex spectral representation)，而 E 称为 A 的**复谱测度** E 的支集

$$\Lambda(E)=\sigma(A).$$

特别当 A 是酉算子 U 时，谱测度 E 的支集包含于单位圆周 Γ 内. 所以 U 可以由定义于 Γ 上的一个谱测度 F 表示为

$$U=\int_\Gamma e^{i\theta}F(d\theta). \tag{12}$$

(12) 式称为酉算子 U 的谱分解.

【自伴算子 H 的函数】 设

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda E(d\lambda)$$

是 $\mathfrak{H}$ 内的一个自伴算子. 对 $\boldsymbol{R}$ 上一个复值 Borel 可测函数 f，依关于 H 的单位分解 E 按 (7) 式定义的算子 $S(f)$ 记作 $f(H)$：

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)E(d\lambda).$$

对应 $f\to f(H)$ 给出对 H 的算子演算(→线性算子).

对任一 $a\in\mathfrak{H}$，我们用 $L_2(a)$ 表示关于测度 $\mu_a=\mu_a(\cdot)=(E(\cdot)a,a)$ 的 L_2 空间. 换言之，$f\in L_2(a)$ 当且仅当 $a\in D(f(H))$. 对应 $f\to f(H)a$ 在 $L_2(a)$ 和 $\mathfrak{H}$ 的子空间

$$M(a)=\{f(H)a\,|\,f\in L_2(a)\}$$

之间给出一个等距同构(特别，$M(a)$ 是闭的). H 可由 $M(a)$ 约化，且 H 在 $M(a)$ 内的部分对应于 $L_2(a)$ 内的乘法算子 $f(\lambda)\to\lambda f(\lambda)$.

对于给定的自伴算子 H，存在 $\mathfrak{H}$ 的元 a_θ 的族 $\{a_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ (不一定是可数族)，使得

$$\mathfrak{H}=\sum_{\theta\in\Theta}M(a_\theta), \tag{13}$$

其中 $\sum$ 表示相互正交闭子空间的直和†. 从而 $\mathfrak{H}$ 可表示为 L_2 空间的直和 $\sum_{\theta\in\Theta}L_2(a_\theta)$. 如果 $x\in D(H)$ 在此表示中被表示为 $\{f_\theta\}_{\theta\in\Theta}$，那么 Hx 被表示为 $\{\lambda f_\theta\}_{\theta\in\Theta}$.

【酉等价和谱的重数】 以下假定 $\mathfrak{H}$ 是可分的†. 对给定的 H，(13) 式中的 $\{a_\theta\}$ 可以选取为可数个 a_n 的序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，且满足下面的要求：

(14) $\mu(a_{n+1})$ 关于 $\mu(a_n)$ 绝对连续†，

$$n=1,2,\cdots.$$

在 (14) 式中以及在后面，我们用 $\mu(a)$ 表示测度 $\mu_a(a\in\mathfrak{H})$. 进一步当 $\{a_n'\}$ 为满足 (13) 和 (14) 式的另一序列时，则对于所有的 n，$\mu(a_n)$ 和 $\mu(a_n')$ 彼此关于对方为绝对连续(**Hellinger-Hahn 定理**).

对于两个自伴算子 H_1,H_2，若存在酉算子 U，使得 $H_2=U^*H_1U$，则称 H_1,H_2 为**酉等价的** (unitary equivalent). 使 H_1,H_2 为酉等价的充分必要条件是：对 H_i 取满足 (13) 和 (14) 式的序列 $\{a_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i=1,2)$，则对一切 n，$\mu(a_n^{(1)})$ 和 $\mu(a_n^{(2)})$ 彼此关于对方为绝对连续.

对于已给定的 H，用满足 (13) 和 (14) 式的 $\{a_n\}$，可以如下地定义 H 的**谱重数** (spectral multiplicity) $m_\sigma(H)$. 即 $m_\sigma(H)=n$ (n 为自然数)是指，作为 λ 轴上的测度，有

$$\mu(a_k)\neq 0,\ k=1,2,\cdots,n; \tag{15}$$

$$\text{并且 } \mu(a_{n+1})=0.$$

当这样的 n 不存在时，令 $m_\sigma(H)=+\infty$. 谱重数在酉变换 U 下是不变的：

$$m_\sigma(H)=m_\sigma(U^*HU).$$

实数 λ_0 称为关于 $\sigma_C(H)$ 具有重数 n (重数无穷)，如果 (15) (若 $\mu(a_k)\neq 0,\ h=1,2,\cdots$) 在 λ_0 的一个邻域内成立. 这时 $\sigma_C(H)$ 称为在 λ_0 处以重数 n (重数无穷)退化. 称 H 具有**单谱** (simple spectrum)，如果 $m_\sigma(H)=1$；而它等价于在 $\mathfrak{H}$ 内存在元 a，使 $M(a)=\mathfrak{H}$. 这样的 a 称为 $\mathfrak{H}$ 关于 H 的**生成元** (generating element).

具有单谱的自共轭算子 H 与下述的 Jacobi 矩阵密切相关. 就是说，设 a 为 $\mathfrak{H}$ 关于 H 的生成元，在 $L_2(a)$ 内取完备正规正交系 $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$；使得 $G_n=G_n(\lambda)$ 为 $n-1$ 次多项式且 $\lambda G_n\in L_2(a)$. 令 $g_n=G_n(H)a\,(n=1,2,\cdots)$，则

$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 $\mathfrak{H}$ 中的完备正规正交系，由这个基得到的H的矩阵元素 $a_{m,n}=(Hg_m, g_n)$满足：

i) $a_{mn}=0(|m-n|\geqslant 2)$;

ii) $a_{n,n+1}=\overline{a_{n+1,n}}\neq 0$;

iii) $a_{nn}=$ 实数.

满足 i), ii), iii) 的无限矩阵 $A=(a_{m,n})$ 称为 **Jacobi 矩阵** (Jacobi matrix). 一个 Jacobi 矩阵确定一个亏指数† 为 (0, 0) 或 (1, 1) 的对称算子†. 任一自伴扩张有一简单谱. (关于 Jacobi 矩阵的详细性质和应用→[11].)

对于非自伴的对称算子†, 可以在某种程度上进行与谱表示类似的表示. 在日本对于 Hilbert 空间的算子，有三村征雄、前田文友、中野秀五郎等人的研究. 在 [1] 中给出的 Най-марк 的理论应当予以注意.

【Banach 空间的特征值问题】 对 Banach 空间内的一般算子以及对 Hilbert 空间内的非正规算子来说，谱分析就更复杂.

对紧算子† A, $\sigma(A)$ 的性质以及 A 在对应于非零特征值的主子空间内的结构是熟知的 (←紧算子). 然而，如果没有更多的假定，一个完全的谱分析也许并不可能.

对一个具有非空预解集 $\rho(A)$ 的闭算子† 根据预解式 $R_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$ 是 $\rho(A)$ 内 λ 的 $\boldsymbol{B}[X]$ 值全纯函数这一事实，可以借助函数论的方法发展一种算子演算. 特别有谱映射定理成立(→[13]; 线性算子).

伴有谱分解的一个一般的算子类曾由 N Dunford 引入. 设X为 Banach 空间，算子 $E\in\boldsymbol{B}[X]$ 称为一个射影，如果 $E^2=E$. 有如前面一样，我们能够在 $\mathscr{B}_c$ 上定义一个(射影值完全可加的)谱测度. 算子 $A\in\boldsymbol{B}[X]$ 称为**谱算子** (spectral operator)，如果在 $\mathscr{B}$ 上存在一个谱测度 E，满足下述性质:

(i) $E(M)A=AE(M)$, $M\in\mathscr{B}_c$;

(ii) $\sigma(A|_{E(M)X})\subset\overline{M}$, $M\in\mathscr{B}_c$,

其中 $A_{|Y}$ 是A在Y上的限制，$\overline{M}$是M的闭包;

(iii) 存在 $k\geqslant 0$, 使对所有 $M\in\mathscr{B}_c$, 有

$$\|E(M)\|\leqslant k.$$

E是唯一的. 谱算子A可以表示为

$$A=S+N.$$

其中

$$S=\int_C zE(dz),$$

N是广义幂零算子. 如果 $N=0$, A称为**纯量算子** (scalar operator). 无界谱算子可以类似地定义，只不过以 (i′)$E(M)A\subset AE(M)$ 代替 (i) 而已. 但对无界谱算子 A, 就不再有分解 $A=S+N$. (关于谱算子的细节→[18], 与本节讨论的内容有关的概念→紧算子; 特征值的数值计算法和线性算子.)

【参】 [1] Н. И. Ахиезер-И. М. Глазман, Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве, Москва, 1950 (英译本: N. I. Ahiezer and I. M. Glazman, Theory of linear operators in Hilbert space, Ungar, 1961—1963); [2] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics I, Interscience, 1953 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法, I, 科学出版社, 1958); [3] N. Dunford-J. T. Schwartz, Linear operators, I, II (特别 II), Interscience, 1958, 1963; [4] 古屋茂, 行列と行列式, 培風館, 1957; [5] И. М. Гельфанд-Г. Е. Шилов, Обобщенные функции III, Физматгиз, 1958 (英译本: I. M. Gel'fand- G. E. Šilov, Generalized functions III, Theory of differential equations, Academic Press, 1967); [6] S. H. Gould, Variational methods for eigenvalue problems, Univ. of Toronto Press, 1957; [7] P. R. Halmos, Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, 第二版 1957; [8] 加藤敏夫, 函数空間論, 共立出版, 1957; [9] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, 1932; [10] 佐武一郎, 行列と行列式, 裳華房, 1958; [11] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1932; [12] B. von Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Erg. Math., Springer, 1942; [13] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, John Wiley, 1958; [14] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [15] 吉田耕作, 位相解析, 岩波, 1951; [16] 吉田耕作-加藤敏夫, 応用数学 I, 裳華房, 1961; [17] Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1953 (中译本: Ф. Р. 甘特马赫尔, 矩阵论, 高等教育出版社, 1955); [18] N. Dunford, A survey of the theory of spectral operators, Bull. Amer. Math. Soc., 64 (1958), 217—274; [19] T. Kato (加藤敏夫), Perturbation theory for linear operators, Springer, 1966. 又→ Hilbert 空间, 线性算子, 紧算子, 矩阵, 特征值的数值计算法的[参].

线性算子的摄动 [英 perturbation of linear operators 法 perturbation des opérateurs linéaires 德 Störungstheorie der linearen Operatoren 俄 воз-

мущение линейных операторов　日 線形作用素の摂動］　我们在两个线性算子† A，B 在某种意义下"相近"的假定下，考察 A,B 的性质的类似性．这里也包含这样的问题，即研究当算子 A_ε 随着 ε 变化时，算子所固有的某种量如何变动．所谓摄动，原来是经典力学以及量子力学的近似方法，就是用关于小参数 ε 的幂级数形式求问题的解的方法；然而在算子理论中，现在大都是在比起初讲的稍为广泛(有些模糊)的意义下使用"**摄动**"这一名词．考察的对象，有算子的谱的解析性质，以受摄动的算子为生成算子†的发展方程的解的性态，等等．本条只限于阐释与前者有关的几个问题，至于摄动论的全貌→特征值的数值计算法，常微分方程的数值解法，三体问题．以后在本条中不加解释地使用下列号：$B(\mathfrak{X})$，$\mathfrak{D}(T)$，$\mathfrak{R}(T)$，$\sigma(T)$，$\rho(T)$，$R(\lambda;T)$．这些符号的定义→线性算子［谱、预解式］．

【闭算子的摄动】　命 A_0，B 为 Banach 空间† $\mathfrak{X}$ 到 Banach 空间 $\mathfrak{Y}$ 内的线性算子，A_0 为闭算子†，设 $\mathfrak{D}(B)\supset\mathfrak{D}(A_0)$，又令 $A=A_0+B$．1) 如果存在常数 a $(0\leqslant a<1)$ 和 $b\geqslant 0$，使得 $\|Bu\|\leqslant a\|A_0u\|+b\|u\|$ $(u\in\mathfrak{D}(A_0))$，那么 A 是闭算子．如果加之 A_0 是自伴的†，B 是对称的†，那么 A 是自伴的．

2) 对闭线性算子 T，令

$$\mathrm{nul}T=\dim\mathfrak{N}(T),$$

其中 $\mathfrak{N}(T)$ 是 T 的零空间(即 T 的核†)，再令 $\mathrm{def}T=\dim\mathfrak{Y}/\mathfrak{R}(T)$，$\mathrm{ind}T=\mathrm{nul}\,T-\mathrm{def}T$（当 $\mathrm{nul}T$ 和 $\mathrm{def}T$ 之一为有限时，$\mathrm{ind}\,T$ 即有定义）．这些数依次称为 T 的**零化度**(nullity)，**亏格**(deficiency) 和**指数**(index)．T 称为 **Fredholm 算子**(Fredholm operator)，如果 $\mathfrak{R}(T)$ 是闭的，$\mathrm{nul}T<\infty$ 且 $\mathrm{def}T<\infty$．如果 $\mathfrak{R}(A_0)$ 是闭的，且 (1) 中的不等式对满足 $a\rho+b<\rho$ 的常数 a,b 成立，其中 ρ 是由 A_0 决定的某一正数，那么这时 $\mathfrak{R}(A)$ 也是闭的．此外，

$$\mathrm{ind}A=\mathrm{ind}A_0,\quad \mathrm{nul}A\leqslant\mathrm{nul}\,A_0,$$

且 $\mathrm{def}A\leqslant\mathrm{def}A_0$．如果我们在(1)的不等式中，换成 B 是紧算子†（或更一般地，关于 A_0 相对紧†→［连续谱的摄动］）这一要求，则除了最后这两个包含 $\mathrm{nul}\,A$ 和 $\mathrm{def}A$ 的不等式外，同样的结论仍然成立．因之一个算子是 Fredholm 算子这一性质在微小的(或相对紧的)摄动下是稳定的，指数也是这样（→[6]，[11]）．

【特征值和特征空间的摄动】　1)函数论的方法可应用于作用在 Banach 空间 $\mathfrak{X}$ 内的算子的孤立特征值的摄动．设 Ω 是复平面上的开集，且 $0\in\Omega$．设对 $\varepsilon\in\Omega$ 定义了 $A_\varepsilon\in B(\mathfrak{X})$ 且它在 Ω 内为全纯．此外设 λ_0 是 $\sigma(A_0)$ 的一个孤立点，且主子空间†

$$E(\lambda_0;0)\mathfrak{X}=\frac{1}{2\pi i}\int_C R(\lambda;A_0)d\lambda\mathfrak{X}$$

的维数 m 是有限的．于是对于满足

$$U\cap\sigma(A_0)=\{\lambda_0\}$$

的 λ_0 的任一邻域 U，存在 $\delta>0$，使得下述陈述在 $\{\varepsilon\,|\,|\varepsilon|<\delta\}$ 内成立：(i) $\sigma(A_\varepsilon)$ 决不与 U 的边界接触；(ii) $U\cap\sigma(A_\varepsilon)$ 由特征值 $\lambda_1(\varepsilon)$，$\cdots$，$\lambda_m(\varepsilon)$ 所组成，这里每个特征值按照它的(代数)重数列举；(iii) $\lambda_j(\varepsilon)(j=1,\cdots,m)$ 可由 $\varepsilon^{1/n}$ 的一个或几个幂级数表示，其中 n 是一适当的自然数；(iv) $\sum E(\lambda_j;\varepsilon)$ 对 ε 是全纯的，其中 $\sum$ 关于所有不同的特征值求和，而不考虑它们的重数．即使 A_ε 不是有界的，相似的结果在假设 A_ε 的预解式†关于 ε 的正则性的情形下也成立．特别，当 $\mathfrak{X}$ 是 Hilbert 空间且 A_ε 对实 ε 为自伴时，那么在 $R(\lambda;A_\varepsilon)$ 对某些非实 λ 关于 ε 的正则性的假设下，$\{\lambda_j(\varepsilon)\}$ 可以表示成 ε 的(即 $n=1$)一个或几个幂级数．这里讨论的摄动有时叫做**正则**(或**解析**)**摄动**(regular (or analytic) perturbation)（[1,4,5,11]）．

2) 设 H_0 为 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 的自伴算子，λ_0 为 H_0 的重数为 1 的孤立特征值（即成为 $\sigma(H_0)$ 的孤立点的特征值），u_0 是属于 λ_0 的正规特征向量．当自伴算子 H_ε 由关于 ε 的形式幂级数 $H_\varepsilon=H_0+\varepsilon H_1+\varepsilon^2H_2+\cdots$（其中 ε 是实数，H_n 是对称算子）给出时，则在 λ_0 的邻域内，$\sigma(H_\varepsilon)$ 仅由重数为 1 的孤立特征值 λ_ε 组成，且 λ_ε 以及属于它的正规特征向量 u_ε 分别由下列幂级数给出：

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \cdots,$$
$$u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots,$$

这就是所谓形式的摄动论. 设

$$S = \int' \frac{1}{\lambda - \lambda_0} dE_0(\lambda),$$

$$H_0 = \int \lambda dE_0(\lambda)$$

($\int'$ 表示除掉 λ_0 的一个小邻域的积分), 则 λ_n, u_n 形式上由下列式子给出:

$$\lambda_1 = (H_1 u_0, u_0),$$
$$\lambda_2 = (H_2 u_0, u_0) - (SH_1 u_0, H_1 u_0), \cdots;$$
$$u_1 = -SH_1 u_0 \cdots.$$

这是作为近似方法的摄动论的本来形式之一, 而这个级数收敛性等的研究, 乃是线性算子摄动论的一个起源 (F. Rellich, 1937). 如果摄动项 H_n 对于非摄动项 H_0 为相对有界, 即

$$\mathfrak{D}(H_n) \supset \mathfrak{D}(H_0)$$

并且存在常数 a, b, c, 使得

$$\|H_n u\| \leqslant C^{n-1}(a\|H_0 u\| + b\|u\|)$$

对所有 $u \in \mathfrak{D}(H_0)$ 成立, 则 H_ε 由幂级数所作的定义在 $|\varepsilon|$ 充分小的范围内是有意义的, 而且问题可归结为前节所述的正则摄动的情形. 此时 λ_ε, u_ε 的幂级数在 $\varepsilon = 0$ 的邻近收敛. 不能归结为正则摄动的情形, 形式幂级数的系数从某一下标起甚至可能计算不出来; 即使在这种情形, 只要所含的系数能合法地计算, 则形如

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \lambda_1\varepsilon + o(\varepsilon)$$

的渐近级数展开成立, 这一点可以在一般的假定下予以证明. 这个证明是基于估计特征值上下界的变分法, 用它也能得到误差 $o(\varepsilon)$ 的估计, 这为许多实用情形的摄动法提供了理论基础. 特征值 λ_0 的重数大于 1 时, 虽然摄动引起特征值的分离, 但与上面类似地进行讨论是可能的 ([4], [11]).

【连续谱的摄动】 连续谱[†]在摄动中呈现出某种稳定性. 以下 H_0, H 都表示 Hilbert 空间的自伴算子, 兹述其两三个结果. 在

$$H = \int \lambda dE(\lambda)$$

的谱中除掉重数有限的孤立特征值后所剩的集合, 记作 $\sigma_e(H)$, 称为 H 的**本质谱** (essential spectrum). 使函数 $(E(\lambda)u, u)$ 关于 Lebesgue 测度为绝对连续的 $u \in \mathfrak{H}$ 的全体, 记作 $\mathfrak{M}(H)$, 它构成 $\mathfrak{H}$ 的闭子空间, 且约化 H. 把 H 限制于 $\mathfrak{M}(H)$ 上得到的算子, 称为 H 的绝对连续部分, 它的谱 $\sigma_{ac}(H)$ 称为 H 的**绝对连续谱** (absolutely continuous spectrum). 关于它的稳定性, 下列结果成立.

1) 若 $H = H_0 + K$, 且 K 是紧的, 则

$$\sigma_e(H) = \sigma_e(H_0).$$

把假定减弱为 K 关于 H_0 为相对紧 (即 $KR(i; H_0)$ 为紧), 命题仍然成立. 反之, 若

$$\sigma_e(H) = \sigma_e(H_0),$$

则存在酉算子 U 和紧算子 K, 使 H 能表示为

$$H = UH_0U^{-1} + K$$

([10]). 特别对于任意的 $p>1$, 我们能使 $\|K\|_p$ ($\rightharpoonup$紧算子) 任意小. 因之绝对连续谱在摄动 $K \in \boldsymbol{B}_p$ $(p > 1)$ 下一般是不稳定的. 在某种程度上, 这个结果可以推广到 Banach 空间[†].

2) 若 $H = H_0 + K$, 且 K 属于迹族[†] (即 $\|K\|_1 < \infty$), 则 H_0 和 H 的绝对连续部分是酉等价的([7]). 特别 $\sigma_{ac}(H_0) = \sigma_{ac}(H)$. 此定理曾有种种推广 ([8], [9]), 而下述定理可概括其大部分推广([8], [11]). 对某一 $\lambda \in \rho(H) \cap \rho(H_0)$, 设 $R(\lambda; H) - R(\lambda; H_0)$ 属于迹族. 此时, 对于在 $\boldsymbol{R}$ 上连续可微并且满足 $f'(\lambda)>0$ 的任意的实值函数 $f(\lambda)$, $f(H)$ 和 $f(H_0)$ 的绝对连续部分是酉等价的. 设 P_0 为

$$\mathfrak{M}(H_0) = \mathfrak{M}(f(H_0)) = \mathfrak{M}$$

上的正射影, 则在算子强收敛[†]的意义下, 极限

$$\operatorname*{s-lim}_{t \to \pm\infty} \exp(itf(H))\exp(-itf(H_0))P_0 = W_\pm$$

存在, $W_\pm$ 是不依赖于 f 的定常算子, 是以 $\mathfrak{M}$ 为始集而以 $\mathfrak{M}(H)$ 为终集的部分等距算子[†]. 更进而 $W_\pm f(H_0)P_0 = f(H)W_\pm$ 成立, $W_\pm$ 给出上述酉等价. $S = W_+^* W_-$ 是量子力学上的**散射算子** (scattering operator) (又相当于 **S 矩阵** (S-matrix)).

3) 在许多实际问题中, H_0 的连续谱多数只由绝对连续的部分所组成, 此时在很多情形

下我们也想揭示H具有同样的性质. 为此，单单2）中所述的那类条件是不充分的，而摄动"关于H_0为光滑"这种类型的假设是必要的. 例如H_0为$L_2(a, b)$中乘以坐标的算子，摄动K为具有光滑核的积分算子的情形，曾由 K. O. Friedrichs所研究，这是连续谱摄动论的开端（[2]）. 对于 Schrödinger 型微分算子，这种问题与伴随连续谱的特征函数展开相结合而得到解决(→微分算子). 关于这种问题也有某种一般理论. 关于特征值及连续谱的摄动，[3] 的解说很得要领，又有详细的文献表.

【参】 [1] N. Dunford-J. Schwartz, Linear operators I, Interscience, 1958; [2] K. O. Friedrichs, On the perturbation of continuous spectra, Comm. Pure Appl. Math. **1** (1948), 361—406; [3] K. O. Friedrichs, Perturbation of spectra in Hilbert space, Lect. Appl. Math., vol. 3, Amer. Math. Soc., 1965; [4] T. Kato (加藤敏夫), On the convergence of the perturbation method, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **6** (1951), 145—226; [5] T. Kato (加藤敏夫), On the perturbation theory of closed linear operators, J. Math. Soc. Japan, **4** (1952), 323—337; [6] T. Kato (加藤敏夫), Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, J. Analyse Math., **6** (1958), 261—322; [7] T. Kato (加藤敏夫), Perturbation of continuous spectra by trace class operators, Proc. Japan Acad., **33** (1957), 260—264; [8] T. Kato (加藤敏夫), Wave operators and unitary equivalence, Pacific J. Math., **15** (1965), 171—180; [9] S. T. Kuroda (黒田成俊), Perturbation of continuous spectra by unbounded operators I, II, J. Math. Soc. Japan, **11** (1959), 247—262, **12** (1960), 243—257; [10] J. von Neumann, Charakterisierung des Spektrums eines Integraloperators, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1935; [11] T. Kato (加藤敏夫), Perturbation theory of linear operators, Springer, 1966.

算子半群和发展方程 〔英 analytical theory of semi-groups, equation of evolution 法 théorie analytique des semi-groupes, équation d'evolution 德 analytische Theorie der Halbgruppen, Evolutionsgleichung 俄 аналитическая теория полугрупп, диссипативное уравнение 日 作用素の半群，発展方程式〕 半群的解析理论是为了在无限维函数空间定义指数函数而产生的（1948年前后）.

【吉田-Hille 定理】 设X为局部凸†拓扑复线性空间†，我们把由X到X的连续线性算子的全体写作 $L(X,X)$. 对于$0\leqslant t<\infty$的t确定 $T_t\in L(X,X)$，当 $\{T_t|t\geqslant 0\}$满足下列两个条件时，就称$\{T_t|t\geqslant 0\}$为 C^0 类半群:

1） $T_tT_s=T_{t+s}$ （半群性），
$T_0=I$ （恒等算子）;

2） $\lim\limits_{t\to t_0}T_tx=T_{t_0}x(\forall x\in X, \forall t_0\geqslant 0)$.

当X为 Banach 空间†时，2）可换为 2'）

$$w\text{-}\lim_{t\downarrow 0}T_tx=x(\forall x\in X)$$

（N. Dunford, 1938). 此时存在常数$M>0$和$\beta\geqslant 0$，使 3'） $\|T_t\|\leqslant Me^{\beta t}$ $(\forall t\geqslant 0)$ 成立 (E. Hille, 1948). 因此代替T_t而考虑$e^{-\beta t}T_t$，我们假设以下讨论的算子半群满足 1），2）和$\{T_t|t\geqslant 0\}$的等度连续性: 3）对于X上的任意连续半范数† p，存在连续半范数 q，使它满足 $p(T_tx)\leqslant q(x)(\forall x\in X, \forall t\geqslant 0)$;我们称这样的$\{T_t|t\geqslant 0\}$为$X$上的 **$C^0$ 类等度连续半群** (equicontinuous semi-group of class C^0，简称为 e. c. s. g. (C^0)).

例 1: 设 $\infty>p\geqslant 1$，$X=L_p(0,\infty)$，
$$(T_tx)(s)=x(t+s).$$

例 2: 设 $\infty>p\geqslant 1$，
$$X=L_p(-\infty,\infty),$$
$$(T_tx)(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{(s-u)^2}{2t}\right)x(u)du, \quad t>0,$$
$$=x(s), \quad t=0.$$

例 3: 设 $\lambda>0$，$\mu>0$，
$$X=C(-\infty,\infty),$$
$$(T_tx)(s)=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}x(s-k\mu), \quad t>0,$$
$$=x(s), \quad t=0.$$

（在这些例子中，我们有 $\|T_t\|\leqslant 1$，所以 3）确实成立. ）

以下假设X为**序列完备的**(sequentially complete)，即如果X的点列 $\{x_n\}$ 对于X上每个连续半范数 p，都有

$$\lim_{n,m\to\infty}p(x_n-x_m)=0,$$

则使 $\lim_{n\to\infty} p(x - x_n) = 0$ 的极限元 $x \in X$ 是唯一存在的.

e. c. s. g. (C^0) $\{T_t | t \geqslant 0\}$ 的**无穷小生成算子** (infinitesimal generator、简写为 i. g.) A 由

(1) $$Ax = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T_t - I)x$$

所定义. A 简称为**生成算子**.

i) 可微性定理. 对每一个满足 $\Re\lambda > 0$ 的复数 λ, A 的预解式存在: $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)$, 并且

(2) $$(\lambda I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x\, dt \ (\forall x \in X);$$

这里积分为 Riemann 积分.

由此可知, A 的定义域 $D(A)$ 在 X 内稠密, 且与 $(\lambda I - A)^{-1}$ 的值域 $R((\lambda I - A)^{-1})$ 一致. A 是闭算子*, 而且算子族

(3) $$\{(\lambda(\lambda I - A)^{-1})^n | \lambda > 0, n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

是等度连续的.

ii) 表示定理. 令 $J_n = (I - n^{-1}A)^{-1}$, 对于 T_t 的近似算子

(4) $$T_t^{(n)}x = e^{-nt}\sum_{m=0}^\infty (m!)^{-1}(ntJ_n)^m x,$$

$$\hat{T}_t^{(n)}x = (J_{n^{-1}t})^n x,$$

在 t 的任意紧集上,

(5) $$T_t x = \lim_{n\to\infty} T_t^{(n)}x = \lim_{n\to\infty} \hat{T}_t^{(n)}x, \forall x \in X$$

一致成立.

iii) 逆定理. 设 A 是以 X 的稠密子空间 $D(A)$ 为定义域, 以 X 为值域的线性算子, 假定对于 $n = 1, 2, \cdots$, 预解式 $(nI - A)^{-1} \in L(X, X)$, 则使 A 为 X 上的一个 e. c. s. g. (C^0) 的 i. g. 的充分必要条件是: 属于 $L(X, X)$ 的算子的族

(3′) $$\{(I - n^{-1}A)^{-m} | n = 1, 2, \cdots; \quad m = 0, 1, 2, \cdots\}$$

是等度连续的. 由于这样的半群 T_t 是由 A 唯一决定, 所以也可写为 $T_t = \exp(tA)$.

上面三个定理合起来总称为**吉田-Hille 定理**, 有时也称为 Hille-吉田-Feller-Phillips-宫寺定理.

i. g. 的例: 在例 1 中为 $A = d/ds$, 在例 2 中为 $A = 2^{-1}d^2/ds^2$, 在例 3 中为

$$(Ax)(s) = \lambda(x(s - \mu) - x(s)).$$

【群】 为使 e. c. s. g. (C^0) $\{T_t | t \geqslant 0\}$ 能扩张成为等度连续的 C^0 类群

$$\{T_t | -\infty < t < +\infty\}$$

(使得 $T_t T_s = T_{t+s}$, 在 $-\infty < t, s < \infty$ 内成立) 的充分必要条件可由 (3′) 中取

$$n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

而得到. 此定理包含 **Stone 定理** (1932) (X 为 Hilbert 空间, 每个 T_t 都是酉算子*的情形作为它的特殊情形. 对于 Banach 空间, 这个条件的必要性较早地由 И. М. Гельфанд 和深宫政範得到.

【收缩算子半群】 设 X 为 Banach 空间, 为使 T_t 为**收缩算子** (contraction operator)

$$(\|T_t\| \leqslant 1),$$

上面逆定理中 A 应满足的充分必要条件 3′) 成为 $R(I - A) = X$, 且 A 是**散逸型算子** (dissipative operator) (即 $\Re[Ax, x] \leqslant 0$ 成立). 此处 $[x, y]$ 表示 $X \times X$ 上满足下列**半数量积** (semi-scalar product). 条件的任一泛函:

(6) $$[x + y, z] = [x, z] + [y, z],$$

$$[\lambda x, y] = \lambda[x, y],$$

$$[x, x] = \|x\|^2, \ |[x, y]| \leqslant \|x\|\|y\|$$

(G. Lumer-R. S. Phillips, 1961).

【全纯半群】 对于 X 上的 e. c. s. g. (C^0) $\{T_t | t \geqslant 0\}$, 下列三个条件是等价的 (吉田耕作, 1963), 而这样的 $\{T_t | t \geqslant 0\}$ 称为**全纯半群** (holomorphic semi-group): 1) 当 $t > 0$ 时,

$$T_t' x = \lim_{h\to 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)x (\forall x \in X)$$

存在, 并且对于某正数 C,

$$\{(CtT_t')^n | n = 0, 1, \cdots; 0 < t \leqslant 1\}$$

为等度连续. 2) 对于满足

$$|\arg\lambda| \leqslant \arctan(Ce^{-1})$$

的复数 λ, $T_\lambda x$ 总有局部地由

$$T_\lambda x = \sum_{n=0}^\infty (\lambda - t)^n (n!)^{-1} T_t^{(n)} x$$

给出的收敛展开

$(T_t^{(n)} = \lim_{h\to 0} h^{-1}(T_{t+h}^{(n-1)} - T_t^{(n-1)}))$,

并且对某一正数 k,

$$\{e^{-\lambda}T_\lambda \mid |\arg\lambda| \leqslant \arctan(2^{-k}Ce^{-1})\}$$

为等度连续. 3) 对某正数 C_1, ε,

$$\{(C_1\lambda(\lambda I - A)^{-1})^n \mid n = 0, 1, 2, \cdots; \quad \Re\lambda \geqslant 1 + \varepsilon\}$$

为等度连续. 这里 A 是 T_t 的 i. g..

例: 取 z^α 的这样的分枝: 当 $\Re z > 0$ 时, 有 $\Re z^\alpha > 0$. 对于 $0 < \alpha < 1$, 令

$$(7) \quad f_{t,\alpha}(\lambda) = (2\pi i)^{-1}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{z\lambda - tz^\alpha}dz, \quad \sigma > 0,\ t > 0\ \lambda \geqslant 0; \quad = 0, \lambda < 0.$$

按照 S. Bochner (1949), 由 Banach 空间 X 上的 e. c. s. g. (C_1^0) $\{T_t \mid t \geqslant 0\}$, 作

$$(8) \quad \hat{T}_{t,\alpha}x = {}_t\hat{T}x = \int_0^\infty f_{t,\alpha}(s)T_s x ds, \quad t > 0, \qquad = x, \ t = 0,$$

则 $\{\hat{T}_{t,\alpha} \mid t \geqslant 0\}$ 形成全纯半群(吉田、加藤敏夫,A. V. Balakrishnan, 1960). 可以把 $\hat{T}_{t,\alpha}$ 的 i. g. $\hat{A}_\alpha$ 看作 $-A$ 的**分数幂** (fractional power) $(-A)^\alpha$ 的-1倍. 例如,若 $0 < \alpha + \beta < 1$, 则 $(-A)^\alpha(-A)^\beta x = (-A)^{\alpha+\beta}x (\forall x \in D(A^2))$.

【半群的收敛】 设 e. c. s. g. (C^0) 的序列 $\{\exp(tA_n) \mid n = 1, 2, \cdots\}$ 等度连续,为使存在 e. c. s. g. (C^0) 的 $\exp(tA)$, 使得在 t 的任意的紧集上一致地有

$$\lim_{n\to\infty}(\exp(tA_n))x = (\exp(tA))x$$

的充分必要条件是: 对于某一 $\lambda_0(\Re\lambda_0 > 0)$ 和一切 $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 I - A_n)^{-1}x = J_{\lambda_0}x$$

存在,并且 $R(J_{\lambda_0})^a = X$ 成立 (H. F Trotter, 加藤).

【对偶半群】 设 X 和它的对偶空间 X' 都是序列完备的. 对于 X 上的 e. c. s. g. (C^0)

$$\{\exp tA \mid t \geqslant 0\},$$

我们把 A 的对偶算子 A^* 的定义域 $D(A^*)$ 在 X' 内的闭包 $D(A^*)^a$ 写做 X^+. 当 T_t 的对偶算子 T_t^* 的定义域限制在 X^+ 上时,把它记作 T_t^+, 则 $\{T_t^+ \mid t \geqslant 0\}$ 形成 X^+ 上的 e. c. s. g. (C^0), 它的 i. g. A^+ 是把 A^* 的定义域与值域同时限于 X^+ 内时 A^* 的最大限制 (Phillips, 1955; 小松彦三郎, 1964).

【**发展方程**】 设 $T_t = \exp(tA)$ 为 e. c. s. g. (C^0), 若 $x \in D(A)$, 则

$$(9) \qquad T_t'x = AT_tx (= T_tAx)$$

成立. 考虑适当的函数空间时, 不仅热传导方程† ($A = \Delta, \Delta$ 为 Laplace 算子†)和 Schrödinger 方程†($A = \sqrt{-1}(\Delta + V(x))$)而且用矩阵表示的波动方程†

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

都是 (9) 的形式. 于是一般地, 设 x_t 对每个固定的 t 取值于 X 内,且

$$x_t' = \lim_{h\to 0} h^{-1}(x_{t+h} - x_t)$$

存在并有

$$(9') \qquad x_t' = Ax_t, \ t > 0, \ \lim_{t\to 0} x_t = x_0,$$

则称 x_t 是**发展方程** (9′) 的具有初始条件 x_0 的解. 因之若 A 是一个 e. c. s. g. $(C^0)\{T_t \mid t \geqslant 0\}$ 的 i. g., 且 $x_0 \in D(A)$, 则 (9′) 的解为

$$x_t = (\exp(tA))x_0.$$

【发展方程的积分】 把 (9) 式中的 A 换以依赖于 t 的 A_t 时,我们得到对时间是非齐次的发展方程

$$(9'') \qquad x_t' = A_tx_t; \ a \leqslant t \leqslant b.$$

关于 (9″), 下列结论成立 (加藤, 1953; 吉田 1966). 假定下面四个条件: i) 定义域 $D(A_t)$ 不依赖于 t 并且在 Banach 空间 X 内稠密; 当 $\alpha > 0$ 时, $(I - \alpha A_t)^{-1} \in L(X, X)$ 并且

$$\|(I - \alpha A_t)^{-1}\| \leqslant 1.$$

ii) $B_{t,s} = (I - A_t)(I - A_s)^{-1}$ 的范数在

$$a \leqslant s, \ t \leqslant b$$

内有界. iii) 存在与 $[a, b]$ 的任意分割

$$(a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b)$$

无关的常数 N, 使得

$$\sum_{i=0}^{n-1}\|B_{t_{i+1},t_0} - B_{t_i,t_0}\| \leqslant N.$$

iv) $B_{t,a}$ 对于 t 是弱可微的,其导数算子 $\partial B_{t,a}/$

∂t 关于 t 是强连续的. 在这些假定下，如果 $x_0 \in D(A_a)$，那么

$v(t, a)x =$

$$\underset{\max|t_{j+1}-t_j|\to 0}{\text{s-lim}} \prod_{j=n-1}^{0} (\exp(t_{j+1} - t_j)A_{t_j})x_0,$$

$$t_n = t \leqslant b$$

是 (9″) 在初始条件 $U(a,a) = x_0$ 下的唯一的解. 如果设 v) A_t 是在与 t 无关的复数域

$$|\arg\lambda| \leqslant \arctan C$$

上全纯且满足 $\sup_{\lambda,t} \|T_{\lambda,t}e^{-\lambda}\| < \infty$ 的半群 $T_{\lambda,t}$ 的 i. g.，则对于任意的 $x_0 \in X$，(9″) 的解 x_t

$$(x_a = x_0)$$

由下式给出:

(10) $$x_t = \exp((t-a)A_a)x_0 + \int_a^t (\exp((t-s)A_s))R(s, a)x_0 ds,$$

这里 $$R(t,s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s),$$

$$R_m(t,s) = \int_s^t R_1(t,\sigma)R_{m-1}(\sigma,s)d\sigma, \quad m \geqslant 2;$$

$$R_1(t,s) = (A_t - A_s)\exp((t-s)A_s), \quad s < t;$$

$$= 0, \quad s \geqslant t$$

(田辺広城，1959; П. Е. Соболевский，1961). 这相当于把 (9″) 改写为

$$x_t' = A_a x_t + (A_t - A_a)x_t,$$

取 $(\exp((t-a)A_a))x_0$ 为第一次近似，用逐次逼近法求解 x_t. 为了减弱 i) 中的 $D(A_t)$ 不依赖于 t 的条件，可以用 A_t 的分数幂或从第一次近似 $(\exp((t-a)A_t))x_0$ 出发的方法（加藤，田辺等）.

【应用于非线性发展方程】 以

$$x_t' = A_t x_t + f(t, x_t)$$

的形式含有非线性项 f 的方程，使用齐次方程

$$x_t' = A_t x_t$$

的当 $t = s$ 时取值为 x_s 的解 $x_t = U(t,s)x_s$，可改写为 Banach 空间中抽象积分方程

$$x_t = U(t,a)x_a + \int_a^t U(t,s)f(s)ds$$

的形式. 与粘性流体有关的 Navier-Stokes 方程†可以作为这样的非线性发展方程来研究，并能讨论解的存在和正则性(加藤-藤田宏，Соболевский 等，1963—1966).

【参】 [1] E. Hille-R. S. Phillips, Founctional analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc., 1957 (中译本: E. 希尔，R. S. 菲利浦斯，泛函分析与半群(上册)，上海科学技术出版社，1964); [2] N. Dunford-J. Schwartz, Linear operators I, Interscience, 1958; [3] K. Yosida (吉田耕作), Functional analysis, Springer, 1965; [4] P. L. Butzer-H. Berens, Semi-groups of operators and applications, Springer, 1967.

遍历理论 [英 ergodic theory 法 théorie ergodique 德 Ergodentheorie 俄 эргодическая теория 日 エルゴード理論] 【一般性说明】 **遍历理论** (ergodic theory)，起源于所谓**遍历性假设** (ergodic hypothesis)，这个假设是作为经典统计力学的基础由 L. Boltzmann 和 J. Gibbs 在接近十九世纪末时提出来的（→统计力学). 许多数学家企图对这个假设给一个严格的证明，其结果形成了 H. Poincaré 和 C. Carathéodory 的**回归定理** (recurrence theorem) 以及 G. D. Birkhoff 和 J. von Neumann 的**遍历定理** (ergodic theorem)，这些定理标志着如今所说的遍历理论的出发点. Poincaré 是1899年在标题为 **Poisson 稳定性** (Poisson's stability) 的论文中证明了他的回归定理的；而 Carathéodory 在 1919 年对这条定理给以测度论的一定形式并加以证明. 随着理论的进一步发展，它与其他一些数学分支，例如，动力系统理论，概率论，泛函分析，数论，微分拓扑和微分几何等学科，取得了密切的联系.

现代遍历理论的主要对象是研究可测变换†，特别是具有一个不变测度的变换的性质. 在大多数情形，所研究的这些变换定义在一个**具有有限(或 σ 有限)测度的 Lebesgue 测度空间** (Lebesgue measure space with a finite (or σ-finite)measure) 上. 具有一个有限测度(σ 有限测度)的 Lebesgue 测度空间是一个测度空间†，它在测度论意义下同构于具有通常 Lebesgue 测度†的有界区间(实直线) 可能具有最多可数个原子. 人们已知，任一具有完备正则 Borel 概

率测度†的可分完备度量空间†是具有有限测度的 Lebesgue 测度空间. 如无特别声明,我们假设测度空间 $(X, \mathscr{B}, m)$ 是 Lebesgue 测度空间,所提到的 X 的子集都假设是可测的,并且两个集合或两个函数几乎处处重合时认为它们是相等的,我们也用缩写"a. e."来表示"几乎处处†".

【遍历定理】 设 $(X, \mathscr{B}, m)$ 是一个 σ 有限的测度空间,定义在 X 上的一个变换 φ 称为**可测的** (measurable),如果对于每个 $B \in \mathscr{B}$,有 $\varphi^{-1}(B) \in \mathscr{B}$. X 上的一个双射†变换 φ 称为**双可测的** (bimeasurable),如果 φ 和 φ^{-1} 都是可测的. 可测变换 φ 称为**保测的** (measure-preserving)(或者等价地,测度 m 在变换 φ 下是**不变的** (invariant)),如果 $m(\varphi^{-1}(B)) = m(B)$ 对于每个 B 成立. 称变换 φ 是**非奇异的** (nonsingular),如果当 $m(B) = 0$ 时,$m(\varphi^{-1}(B)) = 0$; 称变换 φ 是**遍历的** (ergodic),如果

$$m((\varphi^{-1}(B) \cup B) - (\varphi^{-1}(B) \cap B)) = 0$$

蕴涵 $m(B) = 0$ 或 $m(X - B) = 0$.

von Neumann 的**平均遍历定理**(mean ergodic theorem) (1932) 说,如果 φ 是 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上的一个保测变换,那么对于属于 Hilbert 空间† $L_2(X) = L_2(X, \mathscr{B}, m)$ 的每个函数 f (→函数空间),当 $n \to \infty$ 时,序列

$$A_n f(x) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k x)\right)$$

按 $L_2(X)$ 的范数†收敛于一个函数 f^*,这个函数满足 $f^*(\varphi x) = f^*(x)$ a. e.. Birkhoff 的**个体(或逐点)遍历定理** (individual (or pointwise) ergodic theorem) (1932) 说,对于属于函数空间† $L_1(X)$ 的每个 f,序列 $A_n f(x)$ a. e. 收敛于 f^*. 由这些定理中的任一个均可推出,对于满足 $\varphi^{-1}(E) = E$ 和 $m(E) < \infty$ 的任意的集 E,极限函数 f^* 满足

$$\int_E f^* dm = \int_E f dm.$$

特别地,如果 $m(X) = 1$,且 φ 是遍历的,那么极限 f^* 等于常数 $\int f dm$ a. e.,因而这个事实对遍历性假设给予了一个数学的解释,它表明,在一段充分长的时间里,可观测的"时间平均"

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k x)\right) \Big/ n$$

可以用"相平均" $\int f dm$ 来代替. von Neumann 定理和 Birkhoff 定理在不同方向上相继为许多作者加以推广.

1. 平均遍历定理涉及某个 Banach 空间†上的一个有界线性算子† T 的迭代平均

$$A_n = \left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k\right) \Big/ n$$

所成的序列的强收敛性†. von Neumann 定理的一个推广属于 F. Riesz,吉田耕作和角谷静夫,他们没有假设线性算子 T 是由一个保测变换 φ 所诱导以及 T 作用在 Hilbert 空间 $L_2(X)$ 上. 这个推广的一种说法可叙述如下: 如果定义在 Banach 空间 $\mathscr{X}$ 上的线性算子 T 满足条件

(i) $$\sup_{n \geq 1} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \right\| < \infty,$$

(ii) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left\| T^n \right\| = 0,$$

那么对于一个元 $f \in \mathscr{X}$,平均 $A_n f$ 的序列强收敛于元 $f^* \in \mathscr{X}$,当且仅当它存在一个弱收敛†于 f^* 的子序列. 由这条 Riesz,吉田耕作和角谷静夫的定理可以推出对于所谓 **Марков 算子** (Markov operator) 的 L_p 平均遍历定理 $(1 < p < \infty)$: 如果 T 是在每个 Banach 空间 $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ 上由公式

$$Tf(x) = \int f(y) P(x, dy)$$

定义的线性算子,这里 $P(x, B)$ 是 $(X, \mathscr{B})$ 上保持测度 m 不变(即对于每个 $B \in \mathscr{B}$,

$$\int P(X, B) dm = m(B))$$

的一个 Марков 过程†的转移概率† (→Марков 过程),那么对于属于 $L_p(X)(1 < p < \infty)$ 的每个 f,序列 $A_n f$ 按 L_p 范数收敛于一个极限函数 f^*.

2. Birkhoff 的遍历定理由 E. Hopf (1954) 推广为下面的个体遍历定理: 如果 T 是映

$L_1(X)$ 到 $L_1(X)$ 中且映 $L_\infty(X)$ 到 $L_\infty(X)$ 中的正线性算子，且 $\|T\|_1 \leqslant 1$, $\|T\|_\infty \leqslant 1$，那么对于 $L_1(X)$ 中的每个 f，序列 $A_n f$ a. e. 收敛于一个极限 f^*. 如果 T 是 Марков 算子，那么 T 映每个 $L_p(X)$ 到自身中且对于每个 $p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 满足 $\|T\|_p \leqslant 1$，所以 Hopf 遍历定理可应用于这样的算子. 这个定理的特殊情形在早些时候曾由 J. Doob 和角谷静夫所证明，后来 N. Dunford 和 J. Schwartz 指出，在 Hopf 定理中算子 T 的正性的假设可以去掉. 对于 $L_1(X)$ 上的满足 $\|T\|_1 \leqslant 1$的正线性算子 T，R. Chacon 和 D. Ornstein (1960) 证明了**比率遍历定理**(ratio ergodic theorem)成立：对于 $L_1(X)$ 中的每两个函数 f 和 g，其中 $g \geqslant 0$ a. e.,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(x) \Big/ \sum_{k=0}^{n-1} T^k g(x)$$

a. e. 存在并且在集

$$\left\{x \,\Big|\, \sum_{k=0}^{\infty} T^k g(x) > 0\right\}$$

上 a. e. 有限. 这条定理推广了早些时候 Hopf 和 W. Hurewicz 所考虑的起因于可测变换的特殊算子类的结果. Hopf 的遍历定理可由 Chacon-Ornstein 定理推出，同时已知在 $L_1(X)$ 上存在一个正算子 T，满足 $\|T\|_1 \leqslant 1$，而对于它，$\lim_{n\to\infty} A_n f$ 对于某个 $f \in L_1(x)$ 在一个正测度集上不存在. 这表明，在 Hopf 定理中，假设

$$\|T\|_\infty \leqslant 1$$

是关键的.

3. 正如 Birkhoff 在他的遍历定理的原始证明中的情形一样，个体遍历定理的已知的每一个证明都决定性地依赖于所谓**极大遍历引理**(maximal ergodic lemma)(或**极大不等式**(maximal inequality)). 对于 $L_1(X)$ 上满足

$$\|T\|_1 \leqslant 1$$

的正线性算子 T 的情形，Hopf 证明了有关的极大遍历引理：如果对 $L_1(X)$ 中的每个 f，以 $E(f)$ 表示集 $\{x | \sup_{n\geqslant 1} A_n f(x) > 0\}$，那么

$$\int_{E(f)} f dm \geqslant 0.$$

这条引理 Hopf 原来的证明是十分复杂的，甚至如同在 Birkhoff 定理中一样，在 T 是由一个保测变换所诱导的算子这一特殊情形，极大遍历引理的证明也需要细致复杂的论证，直到 A. Garsia (1965)，才成功地给出了 Hopf 引理的一个极其简单而巧妙的证明. A. Brunel 进一步推广了 Hopf 引理，并且用这个推广对 Chacon 和 Ornstein 的比率遍历定理给出了一个精巧的证明. D. Burkholder, E. Stein, S. Sawyer 等人最近的结果表明，某种类型的极大不等式成立，对于许多情形下函数序列的几乎处处收敛性，包括个体遍历定理的情形在内，不仅是充分的，同时也是必要的.

4. 设 $\{T_t | t \geqslant 0\}$ 是有界线性算子的一个连续时间参数半群，满足

$$T_t T_s = T_{t+s} (T_0 = I),$$

在 T_t 关于 t 的一个适当的连续性的假设下，用

$$\left(\int_0^t T_s ds\right) \Big/ t$$

来代替离散的时间平均

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k\right) \Big/ n,$$

就不难把平均和个体遍历定理推广到这样的半群. 进一步推广到 n 参数半群由 N. Wiener 和 N. Dunford-A. Zygmund 作出. 对于平均遍历定理，甚至可能进一步推广到有界线性算子的温和半群. 对于单参数半群，平均值在零点的性态，如当 $t \downarrow 0$ 时

$$\left(\int_0^t T_s ds\right) \Big/ t$$

(**局部遍历定理** (local ergodic theorem)) 或当 $\lambda \downarrow 0$ 或 $\lambda \uparrow \infty$ 时

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s f ds$$

(**Abel 遍历定理** (Abelian ergodic theorem)) 的性态，也已为 Wiener, U. Krengel, E. Hille, 吉田耕作等人所研究. Abel 遍历定理涉及到半群 $\{T_t\}$ 的预解式†的性质(→算子半群和发展方程). 个体遍历定理的其他推广以及极大遍历引理的进一步的推广为 Chacon, M. Akcoglu 等人得到.

Garsia，Stein，Burkholder，R. Gundy 等人研究了在遍历理论，概率论，Fourier 级数和奇异积分理论中遇到的关于函数序列几乎处处收敛性的更为广泛的问题，他们得到了若干重要而有价值的结果 [13, 36].

5. 所谓**随机遍历定理** (random ergodic theorem) 最初是由 von Neumann 和 S. Ulam 在1945年引进的，他们的结果后来为安西広忠，角谷静夫，A. Beck-J. Schwartz 和 S. Tsurumi(鶴見茂)等人推广，随机遍历定理的一个特殊情形在它的一般形式下可叙述为：设 $T^{(0)}, T^{(1)}$ 是正线性算子，二者都映 $L_1(X)$ 到 $L_1(X)$ 中，映 $L_\infty(X)$ 到 $L_\infty(X)$ 中，且满足

$$\|T^{(t)}\|_1 \leqslant 1,\ \|T^{(t)}\|_\infty \leqslant 1,\ t=0,1.$$

考虑单位区间 [0,1] 中每个数 t 的二进小数展开 $0.\ t_1 t_2\cdots$，那么对于 $L_1(x)$中的每个 f，对于几乎所有元偶 (x, t)，平均序列

$$\left(\sum_{k=1}^{n} T^{(t_k)}T^{(t_{k-1})}\cdot\cdots\cdot T^{(t_1)}f(x)\right)\Big/n$$

当 $n\to\infty$ 时收敛.

【回归性和不变测度】 在这节中，我们假设测度空间 $(X, \mathscr{B}, m)$ 是无原子的. 定义在 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上的一个非奇异可测变换 φ 称为**回归的** (recurrent) (**无穷回归的** (infinitely recurrent))，如果对于每个集 B 和几乎所有的 $x\in B$，存在一个 $n\in \boldsymbol{Z}^+$ (无穷多个 $n\in\boldsymbol{Z}^+$)，使得 $\varphi^n(x)\in B$. 集W称为在 φ 下是**徘徊的**(wandering under φ)，如果对于 $n\neq k$，有

$$\varphi^{-n}(W)\cap\varphi^{-k}(W)=\varnothing.$$

变换 φ 称为**保守的** (conservative)，如果不存在在 φ 下徘徊的正测度集；又称变换 φ 为**不可压缩的** (incompressible)，如果 $B\supset\varphi^{-1}B$ 蕴涵

$$m(B-\varphi^{-1}B)=0.$$

对于一个非奇异可测变换 φ，下面的陈述是等价的：(i) φ 是回归的；(ii) φ 是无穷回归的；(iii) φ 是不可压缩的；(iv) φ 是保守的. 这个结果的一个直接推论是下面的 Poincaré **回归定理** (由 Carathéodory 提出的形式)：有限测度空间上的保测变换是无穷回归的. 事实上，为了使一个非奇异可测变换 φ 是回归的（因而是无穷回归的），只须存在一个在 φ 下不变的且与已给测度 m 等价的（即与 m 相互绝对连续的）有限测度 μ.

不变测度问题 (invariant measure problem) 是遍历理论中的基本问题之一，这个问题可表述如下：在一个 σ 有限测度空间 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上，已给一个非奇异可测变换 φ，求出存在一个有限的（或 σ 有限的）在 φ 下不变的且与 m 等价的测度的充分必要条件. 已给的测度 m 仅仅指定等价的测度类，在这个类中要找不变测度. 所以，不失一般性，我们可以假设 m 是一个有限测度，在本节的其余部分中，凡说到不变测度，总是指与 m 等价的不变测度.

Poincaré 回归定理表明，φ 是回归的对于一个有限不变测度的存在性是必要的. 但 φ 的回归性却不是充分的，因为一个具有无穷的但 σ 有限的不变测度的遍历变换是回归的但没有有限不变测度. 对于有限不变测度的存在性的充分必要条件由 A. Hajian 和角谷静夫定理给出(1964)，这个定理说：φ 有一个有限的不变测度当且仅当 φ 没有**弱徘徊集** (weakly wandering set) (称集 W **在 φ 下是弱徘徊的** (weakly wandering under φ)，如果存在 $\boldsymbol{Z}^+$ 的一个无穷子集$\{n_k\}$，使得 $\varphi^{-n_j}W\cap\varphi^{-n_k}W=\varnothing, k\neq j$). Hajian 还证明，一个双可测变换 φ 有一个有限的不变测度，当且仅当 φ 在下述意义下是**强回归的** (strongly recurrent)：对于每个使得 $m(E)>0$ 的集 E，存在一个正整数 $k=k(E)$，使得对于每个 $n\in\boldsymbol{Z}$，有

$$\max_{0<j\leqslant k} m(\varphi^{n-j}E\cap E)>0.$$

对于 φ，一个有限不变测度的存在性与遍历定理，特别是平均遍历定理的成立与否是密切相关的. 例如，对于每个满足 $m(E)>0$ 的集 E，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} m(\varphi^k E)\right)\Big/n$$

存在且为正，是对于双可测的 φ 存在一个有限的不变测度的充分必要条件. 实际上，A. Cal

derón 和 Y. Dowker 曾指出，下面条件的每一个都是充分必要的:

(i) $m(E)>0$ 蕴涵

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}m(\varphi^k E)\right)>0;$$

(ii) $m(E)>0$ 蕴涵

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}m(\varphi^k E)\right)>0.$$

这些结果和其他有关结果可直接从 Hajian 和角谷静夫定理推出.

对于一个非奇异双可测变换 φ，集偶 A 和 B 称为**在 φ 下是可数等价的**(countably equivalent under φ)，如果对于 A 和 B，分别存在可数分解 $\{A_k|k\in \boldsymbol{Z}^+\}$ 和 $\{B_k|k\in \boldsymbol{Z}^+\}$ 以及 $\boldsymbol{Z}$ 的一个无穷子集 $\{n_k\}$，使得对于每个 k，有

$$\varphi^{n_k}A_k=B_k;$$

称 A 和 B **在 φ 下是有限等价的** (finitely equivalent under φ)，如果可选取有限分解 $\{A_k\}$ 和 $\{B_k\}$. Hopf 曾证明，(i) φ 是回归的，当且仅当没有正测度集在 φ 下与它的一个真子集是有限等价的; (ii) φ 有一个有限的不变测度，当且仅当没有正测度集在 φ 下与它的一个真子集是可数等价的. 可以证明，如果 φ 是遍历的，那么 φ 没有 σ 有限不变测度当且仅当每个正测度集偶在 φ 下是可数等价的.

不具有 σ 有限不变测度的变换的第一个例子由 Ornstein 在 1960 年作出. 后来，一些较简单的例子由 L. Arnold, Brunel 等人得到，Arnold 还得到了 σ 有限不变测度存在性的一个有用的充分必要条件. 尽管不具有 σ 有限不变测度的变换的例是很难得的，但是 A. Ionescu-Tulcea 证明，在所有非奇异双可测变换所成的具有一个适当度量的群中，具有 σ 有限不变测度的变换构成一个第一范畴†的子集.

为了在 von Neumann 代数理论 (→von Neumann 代数) 中构造因子†的例，von Neumann 考虑了在一个有限测度空间上的双可测非奇异变换的种种遍历群. 这里，一个变换的群 $\mathscr{G}=\{g\}$ 称为遍历的，如果对于每个 $g\in\mathscr{G}$，$m((g^{-1}(B)\cup B)-(g^{-1}(B)\cap B))=0$ 蕴涵 $m(B)=0$ 或 $m(X-B)=0$. 测度 μ 称为在群 $\mathscr{G}=\{g\}$ 下是不变的，如果 μ 在 $\mathscr{G}$ 中的每个变换 g 下是不变的. von Neumann 的构造给出一个 II_1 型因子†，如果群具有一个有限不变测度；给出一个 II_∞ 型因子，如果群具有一个无限(但 σ 有限)的不变测度；给出一个 III 型因子，如果它没有 σ 有限不变测度. Hajian 和伊藤清推广了 Hajian 和角谷静夫定理并证明，双可测非奇异变换的任意群 $\mathscr{G}=\{g\}$ 具有有限的不变测度当且仅当没有在 $\mathscr{G}$ 下是弱徘徊的正测度集 (集 W 称为**在群 $\mathscr{G}$ 下是弱徘徊的** (weakly wandering under a group $\mathscr{G}$))，如果存在 $\mathscr{G}$ 的一个无穷子集 $\{g_n|n\in \boldsymbol{Z}^+\}$，使当 $n\neq k$，有 $g_n(W)\cap g_k(W)=\varnothing$. L. Pukánszky 和 C. Moore 研究了变换的遍历群的一个特殊类并且决定了何时这些群有有限的或 σ 有限的不变测度或者没有不变测度. D. Hill 和 W. Krieger 进一步推广了这些结果，尤其搞清了 Moore 的工作和上面提到的 Ornstein, Arnold 和 Brunel 的例子之间的联系.

对于双可测非奇异变换 φ，定义**完全群** (full group) $[\varphi]$ 为满足下述条件的所有双可测非奇异变换 ψ 的集合: 对于某个 $n=n(x)$，$\psi(x)=\varphi^n(x)$ 对于几乎所有 x 成立. 两个变换 φ_1 及 φ_2 称为**弱等价的** (weakly equivalent)，如果存在双可测非奇异变换 θ，使得

$$\theta[\varphi_1]\theta^{-1}=[\varphi_2].$$

H. Dye 证明，任何两个遍历的有限保测变换是弱等价的. 另一方面，Krieger 指出，在没有 σ 有限不变测度的遍历变换中，存在不可数多个非弱等价的. 应用弱等价理论，使得 Krieger 能够作出 III 型因子，它们与前面已知例子中的任何一个都是不同构的. Hajian，伊藤和角谷静夫最近的结果表明，轨道结构和完全群在 σ 有限不变测度问题中起重要的作用.

关于非奇异变换的不变测度问题的一些结果被伊藤清，J. Neveu, S. Foguel, S. Horowitz 等人推广到非奇异 Марков 转移函数的情形 (所论述的问题也可用类似的方式表达).

【遍历假设】 具有不变测度的 Марков 链的**遍历性** (ergodicity)，由对于任意的 $f \in L_p(\Omega)$ $(p=1,2)$，时间平均 $f^*(\omega)=$ 相空间平均 $\int_\Omega f(\omega)d\omega$（几乎处处）所定形化. 上面所说的条件，等价于 $P(\omega, A)$ 为**不可约的** (irreducible) 或**不可分解的** (indecomposable). 在这里，$P(\omega, A)$ 为**可约的** (reducible) 或**可分解的** (decomposable) 是指，能把 Ω 分解为适当的两个部分 Ω_1, Ω_2，满足

$$\int_{\Omega_1} d\omega > 0, \int_{\Omega_2} d\omega > 0,$$

使当 $\omega \in \Omega_i$ 时，如果 $i \neq j$，就恒有

$$P(\omega, \Omega_j) = 0.$$

在流的情形，上述等价性为 Birkhoff-P. A. Smith (1928) 所证明，他们不用不可约性这个名词，而称为流的**度量可递性** (metrical transitivity). 遍历性还等价于下述条件：在 $L_2(\Omega)$ 中由

$$(Tf)(\omega) = \int_\Omega P(\omega, dy)f(y)$$

所定义的 T 以 1 为单特征值. 再者，Boltzmann，Gibbs，Poincaré 以来的预见（任意的力学系统，适当地给予小的摄动，它是遍历的），也由 J. Oxtoby-Ulam (1941) 和 P. R. Halmos (1944) 以测度论的定形化加以证明.

【保测变换的例和构造】 保测变换的例出现在许多不同的范围里，我们描述某些重要的情形.

1. 设 G 是局部紧交换群，满足第二可数公理†(→拓扑群). $\mathscr{B}$ 是 G 的 Borel 子集的一个 σ 代数，m 是它的 Haar 测度†（如果 G 是紧的，m 是正规化的)，于是 $(G, \mathscr{B}, m)$ 是一个 Lebesgue 测度空间，对于固定的元 $g_0 \in G$，由 $\varphi_{g_0}(g) = g + g_0$ 定义变换 $\varphi_{g_0}: G \to G$，则 φ_{g_0} 是 $(G, \mathscr{B}, m)$ 上的一个双射保测变换，称它为群 G 上按元 g_0 的**旋转** (rotation). 如果 G 是紧的，那么 φ_{g_0} 是遍历的当且仅当由元 g_0 生成的循环子群在 G 中是稠密的. 如果后者成立，元 g_0 称为 G 的**拓扑生成元** (topological generator)，一个群称为**单一生成的** (monothetic)，如果它有一个拓扑生成元.

2. 如果 φ 是紧交换群 G 的一个群自同态†，那么 φ 保持 Haar 测度 m. 如果 φ 是一个群自同构†，那么它是 $(G, \mathscr{B}, m)$ 上的双射保测变换. 一个连续的群自同构 φ 诱导特征标群 G^* 的一个群自同构 φ^*. 保测变换 φ 是遍历的，当且仅当除去单位元之外，每个特征标在诱导自同构 φ^* 下有一个无穷轨道. 当群 G 是 n 维环面 T^n 时，一个连续的群自同构 φ 唯一地由一个元素为整数的，行列式为 ± 1 的 $n \times n$ 矩阵来表示. 在这种情形，φ 是遍历的当且仅当表示矩阵的特征值†中没有单位根出现.

3. 设 $(Y, \mathscr{A})$ 是一个可测空间，对于每个 $n \in \mathbf{Z}$，令 $(Y_n, \mathscr{A}_n) = (Y, \mathscr{A})$，并定义 $(Y^*, \mathscr{A}^*)$ 是乘积可测空间†

$$\left(\prod_{n\in \mathbf{Z}} Y_n, \prod_{n\in \mathbf{Z}} \mathscr{A}_n,\right),$$

在 $(Y^*, \mathscr{A}^*)$ 上由

$$y^* = (\cdots, y_{-1}, y_0, y_1, \cdots) \to \varphi(y^*) = (\cdots, y'_{-1}, y'_0, y'_1, \cdots)$$

(这里对于每个 n，$y'_n = y_{n+1}$) 所定义的变换 φ 称为**推移变换** (shift transformation). 设 μ 是 $(Y, \mathscr{A})$ 上的一个概率测度，使得 $(Y, \mathscr{A}, \mu)$ 是一个 Lebesgue 测度空间，对于每个 n，令 $\mu_n = \mu$，并定义 μ^* 是 $(Y^*, \mathscr{A}^*)$ 上的乘积测度† $\prod_{n\in \mathbf{Z}} \mu_n$，那么 $(Y^*, \mathscr{A}^*, \mu^*)$ 是一个 Lebesgue 测度空间，并且推移变换 φ 是一个双射保测变换. 当连同乘积测度一起考虑时，φ 称为**广义 Bernoulli 推移** (generalized Bernoulli shift). 当集 Y 最多可数且在 Y 上的测度 μ 由一个使得 $\sum p_j = 1$ 的正数序列 $\{p_j\}$ 给出时，称 φ 为 **Bernoulli 推移** (Bernoulli shift). 假设 $P(y, A)$ 是 $(Y, \mathscr{A})$ 上的一个 Марков 转移函数，π 是在 $P(y, A)$ 下不变的一个概率测度，对于柱集

$$E^* = \left(\prod_{j<i} Y_j\right) \times \left(\prod_{i \le k \le i+s} A_k\right) \times \left(\prod_{n>i+s} Y_n\right),$$

令

$$\pi^*(E^*)=\int_{A_{i+s}}\cdots\int_{A_{i+1}}\int_{A_i}\pi(dy_0)$$
$$\times P(y_0,dy_1)P(y_1,dy_2)\cdots P(y_{s-1},dy_s),$$

然后把 π^* 扩张到整个 $\mathscr{A}^*$，这样，我们可以在积空间 $(Y^*,\mathscr{A}^*)$ 上定义一个 **Марков 测度** (Markov measure) π^*. 推移变换 φ 保持 Марков 测度 π^*. 把 φ 看作 $(Y^*, \mathscr{A}^*, \pi^*)$上的保测变换，就称它为 **Марков 推移** (Markov shift).

广义 Bernoulli 推移恒为遍历的；Марков 推移是遍历的，当且仅当对应的 Марков 过程是不可约的†；而后面这个情形成立，当且仅当下面的性质满足：对于每个使得 $\pi(A)\pi(B)>0$ 的集偶 A, B，存在 $n\in \boldsymbol{Z}^+$，使得

$$\int_A P^n(y, B)d\pi>0.$$

在积空间 $(Y^*, \mathscr{A}^*)$ 上，除了可以定义乘积测度和 Марков 测度之外，还可以定义其他的测度并且在推移变换 φ 下是不变的. 例如，如果 Y 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个 Borel 子集，$\mathscr{A}$ 是 Y 的 Borel 子集的 σ 代数，那么取值于 Y 中的任意平稳随机过程†在$(Y^*,\mathscr{A}^*)$上就诱导这样的一个测度，当连同这种类型的一个测度一起考虑时，推移变换 φ 称为**关联平稳过程的推移** (shift associated with the stationary process). 与平稳 Gauss 过程†关联的推移的性质曾由丸山儀四郎，И. Гирсанов，十時東生等人加以研究. 特别地，已经知道推移是遍历的，当且仅当谱测度†对于关联 Gauss 过程的协方差函数†是连续的.

4. 由经典动力系统引起的保测变换的另外的重要的例将在后面叙述.

5. 有一些方法可以从已给的保测变换构造新的保测变换. 我们讨论某些重要情形.

(i) 设 φ 是在 σ 有限测度空间 $(X,\mathscr{B},m)$ 上的一个非奇异可测的回归变换（不必是保测的），A 是一个正测度集. 对 $x\in A$，令

$$n(x)=\min\{n\in \boldsymbol{Z}^+ \mid \varphi^n(x)\in A\}.$$

由 $\varphi_A(x)=\varphi^{n(x)}(x)$ 定义的变换 $\varphi_A: A\to A$，是测度空间 $(A, A\cap\mathscr{B}, m_A)$ 上的一个非奇异可测变换，这里 $m_A(B)=m(A\cap B)/m(A)$；如果 φ 是保测的，则 φ_A 也是保测的. 我们称 φ_A 是 **φ 在 A 上的诱导变换**(transformation induced by φ on A). 如果 φ 是遍历的，则它也是遍历的.

(ii) 设 φ 是 σ 有限测度空间 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上的一个非奇异可测变换，$\{A_n\}$ 是 X 的一个可数(可能有限)分割. 定义一个函数$f: X\to \boldsymbol{Z}^+$ 如下：对于 $x\in A_n$，令 $f(x)=n$. 设

$$\widetilde{X}=\{(x, j) \mid x\in X,\ 1\leqslant j\leqslant f(x)\}$$

是乘积测度空间 $(X\times \boldsymbol{Z}^+, \mathscr{B}\times\mathscr{C}, m\times\mu)$ 的一个子空间，这里 $\mathscr{C}$ 是$\boldsymbol{Z}^+$ 的所有子集所成的 σ 代数，μ 是在 $(\boldsymbol{Z}^+, \mathscr{C})$ 上由

$$\mu(\{n\})=1$$

（对于每个 $n\in \boldsymbol{Z}^+$）定义的测度. 在 $\widetilde{X}$ 上，令 $\tilde{\varphi}(x,j)=(x,j+1)$，如果 $1\leqslant j<f(x)$；

$$\tilde{\varphi}(x, j)=(\varphi(x), 1),$$

如果 $j=f(x)$；这样定义的变换 $\tilde{\varphi}$ 是测度空间 $(\widetilde{X}, \widetilde{X}\cap(\mathscr{B}\times\mathscr{C}), (m\times\mu)_{\widetilde{X}})$ 上的一个非奇异可测变换，并且如果 φ 是保测的，它也是保测的. 我们称 $\tilde{\varphi}$ 为**由 φ 及高度函数 f 建造的变换** (transformation built from φ with the ceiling function f) 如果 φ 是遍历的，且当 $n\to\infty$ 时 $m(A_n)\to 0$，那么 $\tilde{\varphi}$ 也是遍历的.

(iii) 设 ψ 是 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上的保测变换；而对于每个 $x\in X$，φ_x 是 $(Y,\mathscr{A},\mu)$ 上的保测变换. 假设映射 $(x, y)\to\varphi_x(y)$ 关于 σ 代数 $\mathscr{B}\times\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}$ 是可测的. 在积空间 $(X\times Y, \mathscr{B}\times\mathscr{A}, m\times\mu)$ 上，由

$$\theta(x, y)=(\psi(x), \varphi_x(y))$$

定义的变换 θ 是保测的，称它为 ψ 和 $\{\varphi_x\}$ 的**斜乘积** (skew product). 如果对于所有的 $x\in X$，$\varphi_x=\varphi$，则我们得到**直积** (direct product) 变换 $\theta(x,y)=(\psi(x),\varphi(y))$.

(iv) 称 $(Y, \mathscr{A}, \mu)$ 上的一个保测变换 φ 为 $(X, \mathscr{B},m)$ 上的保测变换 ψ 的一个**因子变换** (factor transformation)（或**同态像** (homomorphic image)），如果存在 X 到 Y 上的一个可测变换 η，使得 $m\circ\eta^{-1}=\mu$，$\varphi\eta=\eta\psi$. 如果

$\mathscr{B}'$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个 σ 子代数且 ψ 保持 $\mathscr{B}'$ 不变（即 $\psi^{-1}\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}'$），那么 ψ 在测度空间 $(X,\mathscr{B}',m)$ 上诱导一个因子变换 φ．相反地，如果 $(Y,\mathscr{A},\mu)$ 上保测变换 φ 是 $(X,\mathscr{B},m)$ 上的变换 ψ 的通过映像 η 实现的因子变换，那么 $\mathscr{B}'=\eta^{-1}\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个在 ψ 下不变的 σ 子代数．

6. 测度空间 $(X,\mathscr{B},m)$ 上双射保测变换的一个单参数族 $\{\varphi_t|t\in\boldsymbol{R}\}$ 称为一个**流**(flow)．称一个流是**连续的** (continuous)，如果映射 $t\to T_t$ 是弱连续的⁺，这里 $\{T_t\}$ 是由流 $\{\varphi_t\}$ 在 $L^2(X)$ 上诱导的酉算子⁺的单参数族．一个流称为**可测的** (measurable)，如果映射 $(t,x)\to\varphi_t(x)$ 是 $\boldsymbol{R}\times X$ 到 X 中的一个可测变换．可测流是连续的． A. Вершик 和丸山证明，对于任意的连续流，存在(在某个特定意义下)唯一的可测流，使得它空间同构(在下节给出的特定意义下)于已给的流．

流的重要的例由经典动力系统(见后面)和连续时间平稳随机过程给出．

在流的研究中，一个重要的工具由下述 W. Ambrose 和角谷静夫定理所提供：每个没有不动点的可测遍历流空间同构于一个 S 流．一个可测流 $\{\varphi_t\}$ 称为 **S 流** (S-flow)(**特殊流** (special flow) 或**建立在一个函数上的流** (flow built under a function))，如果存在测度空间 $(X,\mathscr{B},m)$ 上的一个保测变换 φ 和 $(X,\mathscr{B},m)$ 上的一个 $\boldsymbol{R}^+$ 值函数 f，使得每个 φ_t 是乘积测度空间 $(X\times\boldsymbol{R}^+,\mathscr{B}\times\mathfrak{M},m\times\lambda)$ 的子空间

$$\widetilde{X}=\{(x,u)|x\in X,\ 0\leqslant u\leqslant f(x)\}$$

上由 $\varphi(x,u)$ 给定的保测变换，φ 由下式给出：

$$\varphi(x,u)=(x,u+t),$$

如果 $-u\leqslant t<-u+f(x)$;

$$\varphi(x,u)=(\varphi^n(x),u+t-\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(x))),$$

如果 $-u+\sum_{k=0}^{n-1}f(\varphi^k(x))$

$$\leqslant t<-u+\sum_{k=0}^{n}f(\varphi^k(x));$$

$$\varphi(x,u)=(\varphi^{-n}(x),u+t+\sum_{k=-n}^{-1}f(\varphi^k(x))),$$

如果 $-u-\sum_{k=-n}^{-1}f(\varphi^k(x)$

$$\leqslant t<-u-\sum_{k=-n+1}^{-1}f(\varphi^k(x));n\geqslant 1.$$

这里 $\mathfrak{M}$ 是 $\boldsymbol{R}^+$ 的 Borel 子集所成的 σ 代数，λ 是通常的 Lebesgue 测度．

【同构问题】 在这节中，我们假设所考虑的 Lebesgue 空间是概率空间．为简单起见，采用俄国数学家们的习惯用法，称 $(X,\mathscr{B},m)$ 上的保测变换为**自同态** (endomorphism)，称双射保测变换为**自同构** (automorphism)．

称 $(X_1,\mathscr{B}_1,m_1)$ 上的自同构 φ_1 与 $(X_2,\mathscr{B}_2,m_2)$ 上的自同构 φ_2 是**空间同构的** (spatially isomorphic)（或**度量同构的** (metrically isomorphic)），如果存在集 N_1 和 N_2，使得

$$m_1(N_1)=m_2(N_2)=0,$$

并存在从 X_1-N_1 到 X_2-N_2 的一个双射可测变换 θ，使得 $m_2\circ\theta=m_1$，$\theta\varphi_1=\varphi_2\theta$．

把自同构分类成为同构类构成现代遍历理论的中心问题．在空间同构下保持不变的自同构的性质称为**同构不变量** (isomorphism invariant) 或**度量不变量**(metric invariant)．有些同构不变量对于同构问题的研究是很关键的．

1. 谱不变量．两个自同构 φ_1 和 φ_2 称为**谱同构的**(spectrally isomorphic)，如果由 φ_1 和 φ_2 分别在 Hilbert 空间 $L_2(X_1)$ 和 $L_2(X_2)$ 上所诱导的酉算子 T_1 和 T_2 是酉等价的(即，存在 $L_2(X_1)$ 到 $L_2(X_2)$ 上的等距同构 V，使得 $VT_1=T_2V$)．在谱同构下保持的性质称为**谱不变量** (spectral invariant)（或**谱性质** (spectral property)）．如果 φ_1 与 φ_2 是空间同构的，显然它们是谱同构的，但是反之一般地说是不对的．

(i) φ 是遍历的这个性质是谱性质，因为 φ 是遍历的当且仅当数 1 是诱导酉算子 T 的一个

单特征值．如果φ是遍历的，那么诱导算子T的所有特征值的集合构成圆群的一个子群，每一个特征值是单的，每个特征函数†的绝对值为常数． 如果诱导算子T的谱†完全由特征值组成，则称φ有**离散谱**（discrete spectrum）（或**纯点谱**（pure point spectrum））． 属于 von Neumann 和 P. Halmos 的一条定理——这是关于同构问题的第一条定理——说，两个具有离散谱的遍历自同构φ_1和φ_2是空间同构的，当且仅当它们是谱同构的；而后者成立，当且仅当诱导算子T_1和T_2有相同的特征值集．进而，每个具有离散谱的遍历自同构空间同构于某个紧交换群上的一个遍历旋转．

对于自同构的一个更大的类，即是对于具有所谓**拟离散谱**（quasidiscrete spectrum）的遍历自同构，类似的结果由 Л. Абрамов 得到．

(ii) 一个自同构φ是遍历的，当且仅当对于每个集偶A，B，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}m(\varphi^k(A)\cap B)\right)=m(A)m(B).$$

加强这个条件，我们可以定义φ是**弱混合的**（weakly mixing），如果对于每个集偶A，B，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}|m(\varphi^k(A)\cap B)-m(A)m(B)|\right)=0$$

还可以定义φ是**强混合的**（strongly mixing），如果对于每个集偶A，B，

$$\lim_{n\to\infty}m(\varphi^k(A)\cap B)=m(A)m(B);$$

φ是**k次混合的**（k-fold mixing），如果对于任意选取的集A_j，$j=0,\cdots,k$，

$$\lim m(A_0\cap\varphi^{n_1}A_1\cap\varphi^{n_2}A_2\cap\cdots\cap\varphi^{n_k}A_k)=m(A_0)m(A_1)m(A_2)\cdots m(A_k),$$

这里极限是当

$$n_1,\ \cdots,n_k\to\infty,\ n_1<n_2<\cdots<n_k$$

且

$$\min_{1\leqslant j\leqslant k}(n_j-n_{j-1})\to\infty$$

时取的．一个自同构φ是弱混合的或是强混合的这一性质是谱性质．例如，φ是弱混合的当且仅当数1是诱导算子T的一个单特征值且是仅有的特征值．还知道φ是弱混合的当且仅当直积自同构$\varphi\times\varphi$是遍历的．所有弱混合自同构的集，在具有所谓弱拓扑†的$(X,\mathscr{B},m)$上的所有自同构的群中是一个稠密的G_δ集†（Halmos 定理），另一方面，В. Рохлин 证明，所有强混合自同构的集关于弱拓扑是一个第一范畴的集．然而只知道很少的自同构的例，它们是弱混合的但不是强混合的．

(iii) 一个自同构φ称为有**可数 Lebesgue 谱**（countable Lebesgue spectrum），如果诱导酉算子T限制在$L_2(X)$中常值函数所成的子空间的正交补空间上，其极大谱型等价于Lebesgue测度，并且它的重数†是可数无穷的．

(iv) 一个自同构φ称为**K自同构**（K-automorphism）（或 **Колмогоров 自同构**（Kolmogorov automorphism）），如果存在$\mathscr{B}$的一个σ子代数$\mathscr{B}_0$，使得（α）$\varphi\mathscr{B}_0\supset\mathscr{B}_0$且$\varphi\mathscr{B}_0\neq\mathscr{B}_0$，（$\beta$）$\bigvee_{n\in Z}\varphi^n\mathscr{B}_0=\mathscr{B}$，（$\gamma$）$\bigwedge_{n\in Z}\varphi^n\mathscr{B}_0=\mathfrak{N}$．

这里$\mathfrak{N}$是由零集和它们的余集组成的$\mathscr{B}$的一个σ子代数．K自同构对于所有的次数k是k次混合的并且有可数 Lebesgue 谱．

所有广义 Bernoulli 推移是K自同构．一个遍历的 Марков 推移是K自同构当且仅当它是一个强混合的．而后者成立当且仅当对应的 Марков 过程是不可约的†并且是非周期†的．紧交换群的一个连续的群自同构是K自同构，当且仅当它是遍历的．特别地，n维环面T^n的一个连续的群自同构是K自同构，当且仅当表示矩阵的特征值中没有单位根出现．由经典动力系统引起的自同构也提供了K自同构的例子．特别地，在一个负曲率曲面上的一个测地流†的每个自同构（除去恒等同构之外）是K自同构．对于与一个平稳 Gauss 过程关联的推移变换φ，丸山证明φ是（α）弱混合的，当且仅当它是遍历的；（β）强混合的，当且仅当关联 Gauss 过程的协方差函数当$n\to\infty$时趋于0；（γ）K自同构，当且仅当协方差函数的谱测度†关于 Lebesgue 测度是绝对连续的．

(v) 对于具有种种谱型的自同构的例子由一些作者应用平稳 Gauss 过程和由 A. Каток 和 A. Стёпин 发展的逼近理论造出.

(vi) 一个具有拟离散谱的遍历自同构有混合谱，即是诱导酉算子 T 的谱有一个连续成分和 1 之外的特征值,安西(1951)造出有混合谱的斜乘积自同构的一个特殊类,并证明,在这个类中存在自同构，它们是谱同构的但不是空间同构的.然而,在具有相同的纯连续谱的自同构中是否存在两个非空间同构的自同构，这个问题长时间没有得到回答,直到 1958 年 Колмогоров 使用一个称为**熵** (entropy) 的新的同构不变量才正面解答了这个问题.

2. 生成元和熵 (i) 空间 X 的一个**分割** (partition) $\xi=\{A_\lambda\}$ 指的是集 A_λ 的一个族，使得当 $\lambda\neq\lambda'$ 时 $A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\varnothing$,并且 $\bigcup A_\lambda=X$. 我们用 ξ_0 表示 X 分为单个点的分割，用 ν 表示不足道的分割$\{X\}$. 分为有限(或可数)个集的分割称为有限(或可数)分割. 称分割 ξ 细于另一个分割 ζ (或 ζ 粗于 ξ),如果对于每个集 $A\in\xi$ 存在一个集 $B\in\zeta$，使得 $A\subset B$. 对于 X 的分割的一个族 $\{\xi_\alpha\}$，我们用 $\bigvee_\alpha\xi_\alpha$ 表示细于每个 ξ_α 的最粗分割，用 $\bigwedge_\alpha\xi_\alpha$ 表示粗于每个 ξ_α 的最细分割. 如果 $\xi_k=\{A_{k,n}\}$ 是可数(或有限)分割的一个序列，那么 $\bigvee_k\xi_k$ 恰好是 X 分为形如

$$\bigcap_k A_{k,n_k}$$

的非空交的分割,其中对于每个 k，$A_{k,n_k}\in\xi_k$. 对于 X 的一个分割 ξ，伴之以 $\mathscr{B}$ 的一个 σ 子代数 $\mathscr{B}(\xi)$，它是由所有成为 ξ 中的元的一个并的 $\mathscr{B}$ 可测集所成的 σ 代数. 两个分割 ξ 和 ζ 称为 a.e. 重合，如果 $\mathscr{B}(\xi)=\mathscr{B}(\zeta)$ a. e. (即对于每个 $A\in\mathscr{B}(\xi)$ 存在 $\mathscr{B}(\zeta)$ 中的集 B，使得 $m(A\cup B-A\cap B)=0$，相反地对 $\mathscr{B}(\zeta)$ 中的每个集也成立类似的陈述).

(ii) 设 φ 是 $(X,\mathscr{B},m)$ 的一个自同态，ξ 是 X 的一个分割,我们用 $\varphi^{-1}\xi$ 表示分割

$$\{\varphi^{-1}(A)\mid A\in\xi\}.$$

如果 φ 是一个自同构,我们还定义

$$\varphi\xi=\{\varphi(A)\mid A\in\xi\}.$$

称分割 ξ 为对于自同态 φ 的一个**生成元**(generator)，如果

$$\bigvee_{n=0}^{\infty}\varphi^{-n}\xi=\xi \text{ a. e.}$$

如果

$$\bigvee_{n=-\infty}^{\infty}\varphi^{n}\xi=\xi \text{ a. e.},$$

称 ξ 为对于自同构 φ 的一个**两边生成元** (two-sided generator).

称自同态 φ **在点 $x\in X$ 是周期的** (periodic at a point $x\in X$)，如果存在正整数 n，使得

$$\varphi^n(x)=x;$$

称 φ 是**非周期的** (aperiodic)，如果所有周期性的点所成的集有零测度. 如果测度空间 $(X,\mathscr{B},m)$ 是无原子的，那么其上每个遍历自同态是非周期的. Рохлин 的一条定理说，每个非周期自同构 φ 有一个可数的两边生成元. 这蕴涵每个这样的 φ 空间同构于具有某个不变测度 μ^* 的无穷乘积空间 $(Y^*,\mathscr{A}^*)$上的推移变换，这里每个坐标空间 $Y_i=Y$ 最多有可数个点. 最近，Krieger 改进了这个结果,他指出，如果一个遍历自同构 φ 具有有限的熵，那么 φ 有一个有限的两边生成元.

(iii) 对于一个有限的或可数的分割

$$\xi=\{A_n\},$$

定义**分割的熵** (entropy of the patition) $H(\xi)$ 为$-\sum_n m(A_n)\log(m(A_n))$ (这里及以下，对数都是自然对数). 我们用 $\mathfrak{Z}$ 表示所有使得

$$H(\xi)<\infty$$

的分割 ξ 的集合，如果 $\xi\in\mathfrak{Z}$，那么对于任意的自同态 φ，极限

$$h(\varphi,\xi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(H\left(\bigvee_{k=0}^{n}\varphi^{-k}\xi\right)\right)$$

存在并且是有限的. **自同态 φ 的熵** (entropy of the endomorphism φ) $h(\varphi)$ 定义为

$$\sup\{h(\varphi,\xi)\mid\xi\in\mathfrak{Z}\},$$

它是一个同构不变量. 自从熵的概念为 Колмогоров 引进之后，对于它的性质进行过深入

的研究．我们列出其中一些结果．

(a) 如果分割 $\xi\in\mathfrak{Z}$ 对于自同同态 φ 是一个生成元或者对于自同构 φ 是一个两边生成元，那么 $h(\varphi)=h(\varphi,\xi)$ (Синай 引理)．(b) 对于每个整数 n, $h(\varphi^n)=|n|h(\varphi)$．(c) 如果自同构 φ 是周期的，那么 $h(\varphi)=0$．(d) 如果 φ_1 是 φ_2 的一个因子变换，那么 $h(\varphi_1)\leqslant h(\varphi_2)$．(e) $h(\varphi_1\cdot\varphi_2)=h(\varphi_1)+h(\varphi_2)$．(对于斜乘积自同构的熵，有一个属于 Рохлин 的更复杂的公式．) (f) 如果 φ 是回归自同构，φ_A 是 φ 在 $m(A)>0$ 的子集 A 上诱导的自同构，那么 $h(\varphi_A)=h(\varphi)/m(A)$．(g) 如果 φ 是一个具有概率分布 $\{p_n\}$ 的 Bernoulli 推移，那么 $h(\varphi)=-\Sigma_n p_n\log p_n$．(h) 如果 φ 是基于 Марков 转移概率 p_{ij} (定义在一个可数的或有限的状态空间上) 和不变测度 π_i 上的一个 Марков 推移，那么

$$h(\varphi)=-\sum_i\sum_j \pi_i P_{ij}\log P_{ij}.$$

(i) 如果 φ 是遍历的且有纯点谱，或更一般地，有拟离散谱，那么 $h(\varphi)=0$．(j) 对于 n 维环面上的一个遍历的群自同构 φ,

$$h(\varphi)=\sum\log|\lambda|,$$

这里求和对表示矩阵的所有模 >1 的特征值进行．(k)如果一个自同构 φ 有正熵，那么在 $L_2(X)$ 中存在在诱导酉算子 T 之下不变的子空间，使得 T 的谱限制在这个子空间上是可数 Lebesgue 的(Рохлин 定理)．由(k)推出，具有奇异谱*或有限重数谱的自同构必有零熵．在断言 (g) 的证明中，Колмогоров 第一次建立了这样的事实，存在不可数多个非空间同构的 Bernoulli 推移．

(iv) 称一个自同构 φ 有**完全正熵** (completely positive entropy)，如果对于每个分割 $\xi\neq\nu$，有 $h(\varphi,\xi)>0$．Рохлин 和 Я. Синай 证明，一个自同构 φ 有完全正熵当且仅当 φ 是一个 K 自同构．M. Пинскер 证明，对于每个自同构 φ，存在一个分割，称为 **Пинскер 分割** (Pinsker partition)，它在 φ 下是不变的且使得 φ 关于这个分割的因子变换有零熵并且它是在 φ 的具有零熵的因子变换中最大的．

(v) Рохлин 指出，对于自同态 φ,

$$h(\varphi)=0$$

当且仅当它的所有因子变换是自同构．自同态 φ 称为**正合的** (exact)，如果

$$\bigwedge_{n=0}^{\infty}\varphi^{-n}\xi=\nu.$$

Рохлин 引进一种方法，使得对于每个自同态 φ，可以关联某个自同构，称它为**自然扩张** (natural extension)，它反应自同态的性质．例如，一个自同态和它的自然扩张同时为遍历的或为非遍历的，为相同次的混合以及有相等的熵．正合自同态的自然扩张是 K 自同构．

(vi) 自同构 φ_1 和 φ_2 称为**弱同构的** (weakly isomorphic)，如果它们中的每一个是另一个的因子变换．Синай 证明 (1962)，两个具有相等的熵的强混合 Марков 推移是弱同构的．1969 年，Ornstein 成功地证明了下面的值得注意的结果：两个具有相等的熵的 Bernoulli 推移是空间同构的．在这个方向上，早些时候 Л. Мешалкин、J. Blum 和 D. Hanson 曾得到部分结果．在 Ornstein 定理的证明中关键的一点是应用 C. Shannon 和 B. McMillan 定理，这条定理在信息论(→信息论)中起着基本作用．定理的叙述是：设 φ 是 $(X,\mathscr{B},m)$ 上的一个遍历自同态，ξ 是 X 的一个分割．对于点 $x\in X$，令 $A_n(x)$ 表示在分割

$$\bigvee_{k=0}^{n-1}\varphi^{-k}\xi$$

中含有 x 的元，那么对于几乎所有 x,

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log m(A_n(x))\right)$$

存在并且等于 $h(\varphi,\xi)$．

分割的一个序列 $\{\xi_n\}$ 称为**独立的** (independent)，如果对于集 $A_1, A_2,\cdots,A_s$ 的每种选取，其中 $A_k\in\xi_{n_k}$，当 $n_1,n_2,\cdots,n_s$ 全不相同时，有

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{s} A_k\right) = \prod_{k=1}^{s} m(A_k).$$

对于固定的 $\delta > 0$，两个分割 ξ 和 ζ 称为 **δ 独立的** (δ-independent)，如果

$$\sum_{A\in\xi, B\in\zeta} |m(A\cap B) - m(A)m(B)| < \delta.$$

分割 ξ 称为对于自同构 φ 的一个 **Bernoulli 分割** (Bernoulli partition)，如果分割序列 $\{\varphi^n\xi \mid n\in \boldsymbol{Z}\}$ 是独立的.分割 ξ 称为对于自同构 φ 的一个**弱 Bernoulli 分割** (weak Bernoulli partition)，如果对于每个 $\delta > 0$，存在 $k > 0$，使得对于所有 $n \geqslant 0$，分割

$$\bigvee_{i=k}^{k+n} \varphi^i\xi \text{ 与 } \bigvee_{i=-n}^{0} \varphi^i\xi$$

是 δ 独立的. 分割 ξ 称为对于自同构 φ 的一个两边 Bernoulli (弱 Bernoulli) 生成元，如果它是 Bernoulli (弱 Bernoulli) 分割且对于 φ 是一个两边生成元.有一个两边 Bernoulli 生成元的自同构空间同构于一个广义 Bernoulli 推移，而后者又同构于一个具有相等的熵的 Bernoulli 推移. Ornstein 和 N. Friedman 改进了 Ornstein 定理的证明中所使用的技巧并证明了，有一个两边弱 Bernoulli 生成元的自同构空间同构于一个具有相等的熵的 Bernoulli 推移.强混合Марков 推移具有两边弱 Bernoulli 生成元，因而空间同构于 Bernoulli 推移. Ornstein 还能进而证明：(a) Bernoulli 推移的一个非不足道的因子变换是 Bernoulli 推移. (b) 存在一个 K 自同构它不空间同构于 Bernoulli 推移. 由此推出熵对于 K 自同构不是一个完全的同构不变量. (c) 每个 Bernoulli 推移能够嵌入到一个流中. (d) 存在一个自同构，它不能写作一个 K 自同构和一个具有零熵的自同构的直积. 这个例表明,早些时候 Пинскер 的一个猜测是错的.

(vii) Y. Katznelson 指出，n 维环面上的每个遍历的群自同构有一个两边生成元，满足某个比弱 Bernoulli 条件更弱的条件(他称之为几乎弱 Bernoulli 条件). 应用 Friedman 和 Ornstein 定理的一个推广，我们可以证明，有一个几乎弱 Bernoulli 两边生成元的自同构也空间同构于一个 Bernoulli 推移. 由此推出，n 维环面上的一个遍历的群自同构空间同构于一个具有相等的熵的 Bernoulli 推移. 在早些时候，R. Adler 和 B. Weiss 用完全不同的方法证明了，在二维环面上，两个具有相等的熵的遍历群自同构是空间同构的. 分割 ξ 称为对于自同构 φ 的一个 **Марков 分割** (Markov partition)，如果对于每个 $A \in \boldsymbol{B}(\xi)$，

$$m\left(A \mid \bigvee_{n=1}^{\infty} \varphi^{-n}\xi\right) = m(A \mid \varphi^{-1}\xi) \text{ a. e.}$$

如果 φ 有一个 Марков 分割，且这个分割也是一个两边生成元，那么 φ 空间同构于一个 Марков 推移. 称一个分割是一个两边 Марков 生成元，如果它是 Марков 分割并且是一个两边生成元. Adler 和 Weiss 指出，二维环面的每个遍历的群自同构有一个两边 Марков 生成元. 后来 Синай 证明，这个结果对于 n 维环面的一个遍历群自同构也是对的，如果这个群自同构的表示矩阵没有模为 1 的特征值. 结合 Friedman 和 Ornstein 定理，这个结果给出了这样的一个群自同构空间同构于一个 Bernoulli 推移的另一不同的证明.

(viii) 与数论问题有关而引起的正合自同态的例子，例如，连分数†展开和 β 展开. 现在已经知道，与连分数展开和 β 展开相关联的正合自同态的自然扩张空间同构于 Bernoulli 推移.

【经典动力系统】 这里所说的**经典动力系统** (classical dynamical system)，指的是由某个微分流形† M^n 上的一个光滑向量场†所生成的一个微分同胚†或者一个流. 这样的一个系统关于在 M^n 上由任意的 Riemann 度量†所定义的测度是非奇异的. 对于一个固定的 Riemann 度量，我们称测度是**光滑的** (smooth)，如果它们关于由这个度量给出的测度有一个光滑的密度.

1. 在经典动力系统中，**测地流** (geodesic

flows) 被广泛地加以研究. 令 $\mathscr{I}_1(M)$ 是流形 M^n 上的酉切丛†,点 $(x,e)\in\mathscr{I}_1(M)$ 定义唯一的一条沿方向 e 过 x 的测地线†, $\mathscr{I}_1(M)$ 上的测地流是由 $\varphi_t(x,e)=(x_t,e_t)$ 定义的流,这里 x_t 是由 x 以单位速率沿着由 (x,e) 所决定的测地线运动经时间 t 之后所达到的 M^n 中的点, e_t 是在 x_t 处与测地线相切的单位向量. 关于这一点,古典 Liouville 定理†蕴涵,在 $\mathscr{I}_1(M)$ 上如下的测度给出对于测地流的一个光滑的不变测度,这个测度是 M^n 上由度量所诱导的测度和 $(n-1)$ 维球面上的 Lebesgue 测度的乘积. 由力学引起的广泛的一类系统能够作为测地流来描述.

Hopf 和 G. Hedlund 证明,如果流形 M^n 是紧的且有常负曲率,那么测地流是强混合的.后来,应用群表示论†, И. М. Гельфанд 和 С. Фомин 证明,紧的常负曲率流形上的测地流的谱是 Lebesgue 的,并且在流形是二维的情形甚至是可数 Lebesgue 的. F. Mautner,后来还有 L. Auslander, L. Green 和 F. Hahn 把这个代数方法推广到在一个 Lie 群†(这个 Lie 群作用在它的齐性空间†上)的某个单参数子群的作用下得到的流并且对于幂零†和某些可解 Lie 群†的情形得到了广泛的结果.

2. 在 n 维环面上由

$$\varphi_t(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+\omega_1 t,x_2+\omega_2 t,\cdots,x_n+\omega_n t)$$

定义的流称为**平移流** (translational flow). 数 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 称为**频率** (frequency). $\{\varphi_t\}$ 的每一个轨道在环面中是稠密的,当且仅当频率在 $\mathbf{Z}$ 上是线性无关的. 在一个具有无关频率的平移流下的运动称为**拟周期** (quasiperiodic) 运动.对于一个拟周期运动的平移流具有离散谱. 在一个流形 M^{2n} 上,由一个可积的 Hamilton 向量场生成的一个流之下,流形可以分解为 n 维子流形†,它们中的每一个都微分同胚†于 n 维环面且对于流是不变的,并且流在这些子流形的每一个上的限制都同构于(事实上微分同胚于)一个平移流 (Арнольд 定理). Колмогоров, В. И. Арнольд 和 J. Moser 研究了一些条件,在这些条件下, Hamilton 函数的一个小摄动†在流形的一个很大的部分中保持流的像状态,使得在这个部分中分为若干不变环面的分解(在其中每个环面上,运动是拟周期的)在受扰动的流下仍然发生.

3. Синай 得到了为使经典动力系统是 K 系统的一个有用的判别准则. 设 M^n 是紧的, $\{\varphi_t\}$ 是 M^n 上的由一个光滑向量场定义的并且保持某个光滑测度 μ 的流. 由一个向量场给出的空间 M^n 的变换的一个单参数群 $\{\phi_t\}$ 称为对于流 $\{\varphi_t\}$ 是**横截的** (transversal), 如果 (i) 空间 M^n 分为流 $\{\phi_t\}$ 的轨道的分解在 $\{\varphi_t\}$ 下是不变的; (ii) 对于函数 $W_s(t,x)$, $W_s(t,x)$ 定义为流 $\{\phi_t\}$ 的轨道间隔

$$\{\varphi_s\phi_u(x)\,|\,0\leqslant u\leqslant t\}$$

的时间长度,极限

$$\lim_{t\to 0}\lim_{s\to 0}(W_s(t,x)-t)/ts=\alpha(x)$$

存在. Синай 基本定理说,如果一个流 $\{\varphi_t\}$ 是遍历的,并且有一个横截的遍历流 $\{\phi_t\}$, 对于它

$$\int\alpha(x)d\mu<0,$$

那么 $\{\varphi_t\}$ 是一个 K 流. 如果 $\alpha(x)<0$, 我们甚至可以去掉 $\{\varphi_t\}$ 是遍历的假设. 如果

$$\int\alpha(x)\,d\mu>0,$$

此定理对于流 $\{\varphi_{-t}\}$ 成立.

在常负曲率二维流形上的一个测地流恒有一个横截流,称为**极限圆流** (horocycle flow). 极限圆流的遍历性已由 Hedlund 证明.由 Синай 的基本定理推出,在常负曲率曲面上的测地流是一个 K 流. Синай 甚至还证明了,在任意负曲率曲面上的测地流是一个 K 流. 横截流这一概念有一个到高维情形的推广,称为**横截场** (transversal field). 应用这个概念, Синай 证明了,在(任意维的)常负曲率流形上的测地流是一个 K 流.

4. Д. Аносов 考虑了流和微分同胚的一个类,这个类满足一个刻划如同负曲率流形上的测地流那样的不稳定运动的条件. 在一个闭连

通 Riemann 流形M上的流$\{\varphi_t\}$称为一个 **Аносов 流** (Anosov flow) (或 **C 流** (C-flow)), 如果 (i) 速度向量 $d\varphi_t/dt|_{t=0}$ 不等于 0; (ii) 在 x 处的切空间[†] $\mathscr{T}M_x$ 分成直和 $\mathscr{T}M_x X_x \oplus Y_x \oplus Z_x$, 这里 Z_x 是由 x 处的速度向量生成的一维空间且对于每个 x, $\dim(X_x)=k\neq 0$,

$$\dim(Y_x)=s\neq 0;$$

(iii) 存在常数 a, b 和 λ (不依赖于 x 及 t), 使得对于任意正实数 t, 有

$$\|\tilde{\varphi}_t q\|\geqslant ae^{\lambda t}\|q\|,\ \|\tilde{\varphi}_{-t}q\|\leqslant be^{-\lambda t}\|q\|,\quad 对于\ q\in X_x;$$

$$\|\tilde{\varphi}_t q\|\leqslant be^{-\lambda t}\|q\|,\ \|\tilde{\varphi}_{-t}q\|\geqslant ae^{\lambda t}\|q\|\quad 对于\ q\in Y_x;$$

这里$\{\tilde{\varphi}_t\}$是在切空间上由$\{\varphi_t\}$诱导的流. 对于一个微分同胚,也可以表述类似于 (ii)和(iii) 的条件,由此可以定义 **Аносов 微分同胚** (Anosov diffeomorphism) (或 **C 微分同胚** (C-diffeomorphism)). Аносов 证明, 如果一个 Аносов 流有一个光滑的不变测度,那么它是遍历的,并且或者它有一个连续的非常数特征函数, 或者它是一个K流. 具有光滑不变测度的 Аносов 微分同胚是K自同构; 在负曲率流形上的测地流是 Аносов 微分同胚. 由此, 所有对于测地流及其推广所说的结果可以从 Аносов 定理推出. Аносов 还证明, 他的系统是**结构稳定的** (structurally stable). 这意味着, 与已给的微分同胚在 C^1 拓扑中充分接近的任意的微分同胚, 通过流形上某个与恒等映射接近的同胚, 与这个已给的微分同胚是共轭的. 结构稳定性及其他有关性质已由 S. Smale 等人([1, 2, 35])对于一大类系统深入地加以研究.

5. Синай 曾研究由于不具有光滑性而不是 Аносов 系统的一个重要的例子: 属于 Boltzmann 和 Gibbs 的理想气体的最简单的力学模型可以描述为, 在一个矩形的盒子里, 许多非常小的刚性圆球作弹性碰撞运动所产生的系统. Синай 成功地证明, 这是一个K系统, 由此对于统计力学基本模型的遍历性这一经典问题给出了一个肯定的回答 ([34]).

【拓扑动力学】 1. 设X是紧度量空间, φ: $X\to X$ 是一个同胚. Н. Крылов 和 Н. Боголюбов 指出, 在X上恒存在一个 Borel 概率测度μ, 它在φ下是不变的. 设$\mathscr{P}$表示X上所有 Borel 概率测度的集合, $\mathscr{P}_\varphi$ 表示 $\mathscr{P}$ 的在φ下不变的测度所组成的子集, 那么 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{P}_\varphi$ 二者都是凸集且关于弱 * 拓扑[†]是紧的. 如果 $\mathscr{E}_\varphi$ 是 $\mathscr{P}_\varphi$ 中所有端点的集合, 那么由 Крейн-Мильман 定理[†], $\mathscr{E}_\varphi$ 是非空的. $\mathscr{P}_\varphi$ 中的一个测度μ属于 $\mathscr{E}_\varphi$, 当且仅当φ关于μ是遍历的. 当集 $\mathscr{E}_\varphi$ 由单个一元组成时, 就称φ是**唯一遍历的** (uniquely ergodic); 称φ是**极小的** (minimal), 如果对于每一点 $x\in X$, x 在φ下的轨道

$$=\mathrm{orb}_\varphi(x)=\{\varphi^n(x)\mid n\in \boldsymbol{Z}\}$$

在X中是稠密的. 称φ是**严格遍历的** (strictly ergodic), 如果它是极小的且是唯一遍历的. J. Oxtoby 的一条定理说, φ是严格遍历的, 当且仅当对于X上的每个连续实值函数f, 平均

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\varphi^k(x))\right)\Big/ n$$

的序列一致收敛于一个常数 $M(f)$. 存在极小的或唯一遍历的同胚, 但它不是严格遍历的.

2. 如果对于每个 $i\in \boldsymbol{Z}$, $X_i=X$ 是紧度量空间, 那么 Descartes 乘积

$$X^*=\prod_{i\in \boldsymbol{Z}} X_i$$

关于乘积拓扑是紧的并且 X^* 上的推移变换φ是一个同胚. 如果X由有限个元组成, (X^*,φ) 称为一个**符号动力系统** (symbolic dynamical system). 如果X最少有两个点, 那么 (X^*,φ) 不是极小的. 但是存在 X^* 的闭的φ不变子集 Ω, 使得系统 (Ω,φ) 是极小的或者是严格遍历的. 对于 X^* 中的一点 x^*, 已经知道使得推移动力系统$(\overline{\mathrm{orb}_\varphi(x^*)},\varphi)$ 是极小的或是严格遍历的充分必要条件. 例如 Morse 序列 x^* 生成一个极小动力系统.

3. R. Jewett 证明, 在一个 Lebesgue 空间上, 任何弱混合保测变换空间同构于一个唯一遍历变换. Krieger 推广这个结果指出, 如果遍历变换φ的熵是有限的, 那么φ空间同构于一个严格遍历变换. K. Jacobs 得到了对于

流的类似的结果.

4. 紧度量空间 X 上的一个同胚 φ 称为**等度连续的** (equicontinuous), 如果 $\{\varphi^n | n \in \mathbf{Z}\}$ 是 X 上的变换的一个等度连续族⁺. 一个等度连续同胚是极小的并且等距同构于一个紧交换群上的一个旋转. 如果 $d(x, y) > 0$ 蕴涵

$$\inf_{n \in \mathbf{Z}} d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) > 0,$$

则称 φ 是**隔离的** (distal). 一个等度连续同胚是隔离的, 但是反之一般说不真. H. Fürstenberg 的一条定理说, 每个极小的隔离变换, 可以通过由一个点组成的空间上的不足道的同胚的逐次 (可能超限⁺) 等距扩张得到. 关于极小动力系统, 符号动力系统及其他有关课题, R. Ellis, W. Gottschalk, Hedlund, Fürstenberg 等人做了大量的工作 ([9, 14]).

5. 熵的概念的一个拓扑类似的概念称为**拓扑熵** (topological entropy), 它是由 Adler, A. Konheim 和 J. McAndrew 引进的, 定义如下: 对于紧拓扑空间 X 的每一个开覆盖 $\mathscr{A}$, 用 $N(\mathscr{A})$ 表示 $\mathscr{A}$ 的极小子覆盖中集的数目. 对于开覆盖 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$, 用 $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ 表示开覆盖 $\{A \cap B | A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}$. 对于任意的开覆盖 $\mathscr{A}$ 和 X 上的一个连续映射 φ, 极限

$$\lim_{n \to \infty} (\log N(\mathscr{A} \vee \varphi^{-1}\mathscr{A} \vee \cdots \vee \varphi^{-(n-1)}\mathscr{A}))/n = h_{\text{top}}(\varphi, \mathscr{A})$$

存在. 一个连续变换 φ 的拓扑熵 $h_{\text{top}}(\varphi)$ 定义为: $h_{\text{top}}(\varphi) = \sup\{h_{\text{top}}(\varphi, \mathscr{A}) | \mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖$\}$.

L. Goodwyn 指出, 对于任意的 φ 不变概率测度 μ, 有 $h_{\text{top}}(\varphi) \geqslant h_\mu(\varphi)$, 这里 $h_\mu(\varphi)$ 是把 φ 考虑作一个 μ 保测变换的测度论熵. T. Goodman 进而成功地证明,

$$h_{\text{top}}(\varphi) = \sup\{h_\mu(\varphi) | \mu \text{ 是 } \varphi \text{ 不变的概率测度}\}.$$

这个结果证实了早些时候由 Adler, Konheim 和 McAndrew 所作的一个猜想. 对于紧交换群的一个遍历的群自同构 φ, $h_{\text{top}}(\varphi)$ 等于 $h_m(\varphi)$, 这里 m 是这个群的 Haar 测度. 并且 Haar 测度是唯一的具有这个性质的测度 (K. Berg 和 R. Bowen).

6. Fürstenberg 引进了一个有趣而有用的概念, 称作**不连接性** (disjointness). 并且研究了这个概念在保测变换和动力系统的研究中的种种成果 ([12]). Ellis 开创了极小同胚的一个代数理论, 并且成功而系统地得到了以前用各种不同方法得到的一些结果 ([9]).

【杂注】 1. 任意一个非周期自同构可以用一个周期自同构来逼近, 精确地说, 如果 φ 是一个非周期自同构, 那么对于任意正整数 n 和 $\delta > 0$, 存在一个周期为 n 的周期自同构 ϕ, 使得 $m(\{x | \varphi(x) \neq \phi(x)\}) < (1/n) + \delta$ (Halmos 和 Рохлин 定理). 如何更快的实现这个逼近等这类问题为 Каток, Стёпин 等人详细地加以研究. 这个逼近的速度与自同构 φ 的熵和谱的性质有密切的关系, 应用这种相互关系构造了种种具有特殊谱性质的自同构的例子 [20].

2. 在一个 Lebesgue 测度空间 $(X, \mathscr{B}, m)$ 上给定任一自同构 φ, 存在 X 的一个唯一的分解 $\xi = \{A_\lambda\}$, 使得(i)每个 A_λ 在 φ 下是不变的; (ii) 除去 A_λ 的一个可忽略集(在某种特殊意义下), 每个 A_λ(在自然方式下)仍为一个Lebesgue 测度空间, 并且 φ 在 A_λ 上的限制是一个遍历自同构. 这时称这个分解为 X 的关于 φ 的**遍历分解** (ergodic decomposition). 关于一个流有相对应的分解. 还有一个公式, 使我们能用 φ 的遍历成分的熵来计算熵 $h(\varphi)$.

3. 遍历理论对于解析数论问题的应用曾由一些作者予以研究. 与种种数论问题相联系而引起的特殊的保测变换的遍历性和混合性, 已被用来给这些问题以解答. 遍历理论的思想对于不同类型数论问题的新的和更为显著的应用已由 Ю. Линник 和 Fürstenberg 开始研究 ([12, 23]).

【参】 [1] Ф. В. Аносов-Я. Г. Синай, Некоторые гладкие эргодические системы, Успехи Мат. Наук, **22** (5) (1967), 107—172 (英译本: D. V. Anosov and Ja. G. Sinaĭ, Some smooth ergodic systems, Russian Math. Surveys, **22** (5) (1967), 103—167); [2] V. I. Arnol'd (В. И. Арнольд)-A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968; [3] J. Auslander W. H. Gottschalk (eds.), Topological dynamics, an international symposium, Benjamin, 1968; [4] L. Auslander- L. Green- F. Hahn, et al., Flows on homoge-

neous spaces, Ann. Math, Studies, Princeton Univ. Press, 1963; [5] A. Avez, Ergodic theory of dynamical systems I, II, Lecture notes, Univ. of Minnesota, 1966—1967; [6] P. Billingsley, Ergodic theory and information, John Wiley, 1965; [7] N. Dunford and J. T. Schwartz, Linear Operators I, Interscience, 1958; [8] H. A. Dye, On groups of measure preserving transformations I, II, Amer. J. Math., **81** (1959), 119—159, 同上, **85**(1963), 551—576; [9] R. Ellis, Lectures on topological dynamics, Benjamin, 1969; [10] S. R. Foguel, Ergodic theory of Markov processes, van Nostrand 1969; [11] N. A. Friedman, Introduction to ergodic theory, van Nostrand, 1970; [12] H. Fürstenberg, Disjointness in ergodic theory, minimal sets and a problem in diophantine approximation, Math. Systems Theory, **1** (1967), 1—49; [13] A. M. Garsia, Topics in almost everywhere convergence, Markham, 1970; [14] W. H. Gottschalk-G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., 1955; [15] P. R. Halmos, Lectures on ergodic theory, Publ. Math. Soc. Japan, 1956; [16] E. Hopf, Ergodentheorie, Springer, 1937; [17] K. Jacobs, Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie, Springer, 1960; [18] K. Jacobs, Lecture notes on ergodic theory I, II, Aarhus Univ., 1962—1963; [19] S. Kakutani (角谷静夫), Ergodic theory, Proc. Intern. Congr. Math., 1950, Cambridge, 128—142; [20] А. Б. Каток, А. М. Стёпин, Аппроксимации в эргодической теории, Успехи Мет. Наук, **22** (5) (1967), 81—106 (英译本: A. B. Katok and A. M. Stepin, Approximations in ergodic theory, Russian Math. Surveys, **22** (5) (1967), 77—102; [21] А. Н. Колмогоров, Общая теория динамических систем и классическая механика, Proc. Intern. Congr. Math., 1954, Amsterdam (North- Hollnd), 1957, P. 315—333 (英译本: A. N. Kolmogorov, General theory of dynamical systems and classical mechanics, in R. Abraham, Foundations of mechanics, app. D, Benjamin, 1967, p. 263—279); [22] W. Krieger, On entropy and generators of measure-preserving transformations, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 453—464; [23] Ju. V. Linnik (Ю. В. Линник), Ergodic properties of algebraic fields, Springer, 1968; [24] В. В. Немыцкий-В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1949 (中译本: В. В. 涅梅茨基, В. В. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 上, 1956, 下, 1959); [25] D. S. Ornstein, Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic, Advances in Math., **4** (1970), 337—352; [26] D. S. Ornstein, Some new results in the Kolmogorov-Sinaĭ theory of entropy and ergodic theory, Bull. Amer. Math. Soc.. **77** (1971), 878—890; [27] J. C. Oxtoby, Ergodic sets, Bull. Amer. Math. Soc., **58** (1952), 116—136; [28] W. Parry, Entropy and generators in ergodic theory, Benjamin, 1969; [29] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Успехи Мат. Наук, (N. S.) **4** (2) (1949), 57—128 (英译本: V. A. Rohlin, Selected topics from the metric theory of dynamical systems, Amer. Math. Soc. Transl., (2) **49** (1966), 171—240); [30] В. А. Рохлин, Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой. Успехи Мат. Наук, (N. S.) **15** (4) (1960), 1—26 (英译本: V. A. Rohlin, New progress in the theory of transformations with invariant measure, Russian Math. Surveys, **15** (4) (1960), 1—22); [31] В. А. Рохлин, Лекции по энтропийной теории преобразовании с инвариантной мерой, Успехи Мат. Наук, **22**(5) (1967), 3—56 (英译本: V. A. Rohlin, Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations, Russian Math. Surveys, **22** (5) (1967), 1—52); [32] Я. Г. Синай, Вероятностные идеи в эргодической теории, Proc. Intern. Congr. Math., Stockholm, 540—559 (英译本: Ja. G. Sinaĭ, Probabilistic ideas in ergodic theory, Amer Math. Soc. Transl., (2) **31** (1963), 62—84); [33] Я. Г. Синай, Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, Акад. Наук. СССР, **30** (1966), 15—68 (英译本: Ja. G. Sinaĭ, Dynamical systems with countably- multiple Lebesgue spectrum II, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **68** (1968), 34—88); [34] Я. Г. Синай, Динамические системы с упругими отражениями, Успехи Мат. Наук, **25** (2) (1970), 141—192 (英译本: Ja. G. Sinaĭ, Dynamical systems with elastic reflections, Russian Math. Surveys, **25** (2) (1970), 137—189); [35] S. Smale, Differential dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 748—817; [36] E. M. Stein, Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1970; [37] L. Sucheston (ed.), Contributions to ergodic theory and probability, Proc. First Midwestern Conference on Ergodic Theory, Ohio State Univ., 1970, Springer, 1970; [38] A. M. Vershik-S. A. Yuzvinskiĭ (А. М. Вершик, С. А. Юзвинский), Dynamical systems with invariant measure, Progress in mathematics VIII, Plenum, 1970, p. 151—215; [39] F. B. Wright (ed.), Ergodic theory, Proc. Intern. Symposium at Tulane Univ., Academic Press, 1963; [40] K. Yosida (吉田耕作), Functional Analysis, Springer, 第二版 1968; [41] Proc. Symposium on Topological Dynamics and Ergodic Thoery, Univ. of Kentucky, 1971.

Banach 代数 [英 Banach algebra 法 algèbre de Banach 德 Banachalgebra 俄 нормированное кольцо 日 バナッハ環] 【定义】 如果实或复 Banach 空间† R 同时又是实或复数域上的代数†, 而且关于积的连续性 $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$ 成立, 则 R 称为 **Banach 代数**(也称为**赋范环**(normed ring)). 通常对复 Banach 代数考察较为容易. 实 Banach 代数总可以等距同构地嵌入到复 Banach 代数内. 又当有单位元 e 时, 不失一般性, 我们可以假定 $\|e\| = 1$. 对没有单位元的 Banach 代数, 我们可以添加一个单位元.

【Banach 代数的例】 例 1: 在局部紧 Hausdorff 空间 $\mathfrak{M}$ 上连续并且在无穷远点取值为 0 的函数 $x(\xi)$ (即对任一 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\{\xi \mid |x(\xi)| \geqslant \varepsilon\}$$

是 $\mathfrak{M}$ 的紧集的连续函数)的全体，构成 Banach 空间 $C_0(\mathfrak{M})$ (引进范数

$$\|x\| = \sup\{|x(\xi)| \mid \xi \in \mathfrak{M}\}),$$

在这个空间内，由 $xy(\xi) = x(\xi)y(\xi)$ 定义积.

例 2：在 Banach 空间 X 上的有界线性算子†的全体所成的集合 $\mathscr{B}(X)$ 内，按算子的和、积等引进运算，并且按算子的范数引进范数.

【谱】 对于 $x, y \in R$，引进运算

$$x \circ y = x + y - xy.$$

当 $x \circ y = y \circ x = 0$ 时，称 y 为 x 的**拟逆元** (quasi-inverse). 当单位元 e 存在时，$e-y$ 就是 $e-x$ 的逆元. 当复数 λ 满足 $|\lambda| > \|x\|$ 时，$\lambda^{-1}x$ 具有拟逆元 y，它由强收敛级数

$$y = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} x^n$$

给出. 所有使 $\lambda^{-1}x$ 不具有拟逆元的 λ 所成的集合(当 x 本身没有逆元时，特别当 R 没有单位元时，设这个集合含有 0)，称为 x 的**谱** (spectrum)，用 $\mathrm{Sp}(x)$ 表示. 谱是非空有界闭集，且

$$\sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(x)\} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

在例 2 的情形，这里所说的谱就是算子 x 的谱，而确定谱的性态，这在 Banach 空间论和 Hilbert 空间论中是一个重要问题.

【交换 Banach 代数的 Гельфанд 表示】 如果复 Banach 代数是域，那么它必是复数域 (**Гельфанд-Mazur 定理**). 设 R 是交换 Banach 代数，M 是 R 的极大理想†，则商代数† R/M 或者是其内任意两个元的积恒为 0 的环，或者是一个域 (此时 M 在 R 内是闭的，R/M 同构于复数域). 在后一种情形，M 称为**正则极大理想** (regular maximal ideal). (关于理想的正则性，请参阅下面的叙述.) 此时，由于 R/M 和 $\boldsymbol{C}$ 同构，所以，如果把 R/M 的含有 x 的陪集所对应的复数写做 $x(M)$，则对应 $x \to x(M)$ 形成 R 上的乘性 (multiplicative) 线性泛函：

$$xy(M) = x(M)y(M).$$

反之，对于 R 的每个乘性线性泛函，总有 R 的正则极大理想与之对应，使得这个泛函与所对应的正则极大理想的关系有如上述. 如果在 R 上的乘性线性泛函的全体 $\mathfrak{M}$ 上，由 R 引入弱拓扑 (Гельфанд 拓扑)，则 $\mathfrak{M}$ 形成局部紧 Hausdorff 空间 (当 R 具有单位元时形成紧空间)，R 的元可表示为 $\mathfrak{M}$ 上的在无穷远点取值为 0 的连续函数(参考例 1). 这称为 R 的 **Гельфанд 表示** (Gel'fand representation). 此种表示有下列性质：

1) $\max\{|x(M)| \mid M \in \mathfrak{M}\} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$.

(当 R 具有单位元时，

$$\{x(M) \mid M \in \mathfrak{M}\} = \mathrm{Sp}(x).\}$$

2) 使 $\mathrm{Sp}(x) = 0$ 即 $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0$ 的 x，称为**广义幂零元** (generalized nilpotent element)，这种元的全体构成 R 的 Гельфанд 表示的核†. 称它为 R 的**根基** (radical)，根基只含有 0 时的 R 称为**半单的** (semi-simple).

3) 如果 R 是半单的，并且对每个 $x \in R$，存在 $x^* \in R$，使得对一切 $M \in \mathfrak{M}$，

$$x^*(M) = \overline{x(M)}$$

成立，则按 Гельфанд 表示，R 可表示为 $C_0(\mathfrak{M})$ 内的一个稠密子代数，这里 $C_0(\mathfrak{M})$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的在无穷远点取值为 0 的连续函数的全体所成的 Banach 代数. (这是 Weierstrass-Stone 定理†的一种情形. Гельфанд 表示一般说不是保范的. 请参看后面叙述的交换群的 L_1 代数.)

【一般 Banach 代数的表示】 给定 Banach 代数 R，作一适当的 Banach 空间 X，使得对于 $x \in R$，有 X 上的有界线性算子 T_x 与之对应，而 $x \to T_x$ 是代数同态且满足

$$\|T_x\| \leqslant \|x\|.$$

这样的对应称为 R 的**表示** (representation)，X 称为表示空间. Banach 代数恒有等距同构表示. 这里特别**不可约表示** (irreducible representation) 是重要的. 设 Y 是表示空间 X 的子空间(可以是闭的，也可以不是闭的)，如果对一切 $x \in R$，有 $T_xY \subset Y$，则称 Y 为不变子空间. 如果除 X 和 $\{0\}$ 以外，不存在其他的不变子空间，则称为代数的不可约表示；又如果除 X 和 $\{0\}$ 以外，不存在其他的闭不变子空间，则称为拓扑的不可约

表示. 代数的不可约表示的核† I 称为**原始理想** (primitive ideal). 原始理想亦可如下定义: 对于 R 的左理想 $J(\neq\{0\}, \neq R)$, 如果存在元 $u\in R$ 使得对一切 $x\in R, x-xu\in J$ 成立,则左理想 J 称为**正则的** (regular). 对于正则左理想,存在包含它的极大左理想,它必是正则的且是闭的.现在,对于 R 的双边理想† I, 如果存在正则极大左理想 J, 使得 I 是由 R 中满足 $aR\subset J$ 的所有元 a 所组成,即如果

$$I=\{a\mid aR\subset J\},$$

则 I 称为原始理想.如果 R 是交换的,则原始理想等于正则极大理想. 所有原始理想的交, 称为 R 的**根基** (radical), 当根基只由 0 组成时, R 称为**半单的** (semi-simple).

原始理想的全体 $\mathfrak{I}$, 称为 R 的**结构空间** (structure space), 在其内引入**包核拓扑** (hull-kernel topology), 就成为拓扑空间. (在这样的拓扑下, $\mathfrak{I}$ 的子集 $\mathfrak{A}$ 的闭包†是所有这样的原始理想的集合, 这些原始理想包含于 $\mathfrak{A}$ 内的所有理想的交 (kernel). 这种拓扑空间的性质很复杂, 即使在交换代数的情形, 一般说和 Гельфанд 拓扑也不一致.)

【Banach*代数】 Banach 代数 R 内的一个**对合** (involution) 是满足下列条件的一个运算 $x\to x^*$: 1) $(x+y)^*=x^*+y^*$,

2) $(\lambda x)^*=\bar{\lambda}x^*$,

3) $(xy)^*=y^*x^*$,

4) $(x^*)^*=x$.

在其内定义了一个对合的 Banach 代数, 称为 **Banach * 代数** (Banach * algebra). 对于 Banach * 代数考虑表示时,如果表示空间取 Hilbert 空间† S, 用 S 上的有界线性算子作表示: $x\to T_x$, 且对合对应于伴随算子†, 即 $T_{x^*}=(T_x)^*$,则此种表示称为 R 的 ***表示** (* -representation).

【C^* 代数】 当 Banach * 代数的范数满足条件 $\|x^*x\|=\|x\|^2$ 时,就称它为 **C^* 代数** (C^*-algebra). C^* 代数实际上是某个 Hilbert 空间上的有界线性算子的一个 Banach 代数(参阅例 2), 这个 Banach 代数具有下述性质: 当它含有某个算子时, 它也含有这个算子的伴随算子 (Гельфанд-Наймарк 定理). C^* 代数总是半单的;按照 Гельфанд 表示, 交换 C^* 代数与取 $\mathfrak{M}$ 为正则极大理想时的空间 $C_0(\mathfrak{M})$ (参看例 1) 等距同构. 又对于 C^* 代数的 * 表示来说, 拓扑不可约和代数不可约是一致的. 这些不可约 * 表示的酉等价类所成的集合, 称为 R 的**对偶空间**(dual space). 因为不可约表示的核是原始理想,所以在此对偶空间上,考虑每个元所对应的原始理想, 引入包核拓扑 (参看上面的叙述),它就形成拓扑空间. 除这种拓扑外, 也引入另外的拓扑. 此外, 对于研究可分 C^* 代数, Borel 结构是一个非常有力的工具 (Mackey 理论[7]). C^*代数和拓扑群的酉表示有关(参看下面的叙述). 对于重要的 Banach 代数, 围绕着 * 表示和对偶空间,有很多研究.

不可约的 * 表示只由紧算子†组成时,这样的 C^* 代数称为 CCR 代数,比这稍为一般化的代数, 可考虑 GCR 代数 (I. Kaplansky [8]). 例如, 可分 C^* 代数 R 的对偶空间关于包核拓扑是 T_0 空间† (T_1 空间†)的充分必要条件是 R 为 GCR 代数 (CCR 代数)(J. Glimm) [9]).

【对于拓扑群理论的应用】 Banach 代数的理论的应用是多方面的, 这里特别叙述对于拓扑群的应用. 设 G 为局部紧 Hausdorff 拓扑群 (→拓扑群), μ 为其左不变测度†. 此时存在正定连续函数 ρ, 使对任一 Borel 子集 E, 满足

$$\mu(Eg)=\rho(g)\mu(E).$$

现在,作为 R 考虑 G 关于 μ 的 $L_1(G)$, 此时定义 x, y 的积为卷积

$$(xy)(g)=\int x(h)y(h^{-1}g)d\mu(h),$$

定义对合为 $x^*(g)=\overline{x(g^{-1})}\rho(g^{-1})$, 在这样的定义下, $L_1(G)$ 形成 Banach 代数, 称为 G 的 **L_1 代数** (L_1-algebra) 或**群代数** (group algebra). L_1 代数不是 C^* 代数, 但它是半单的. 考虑 G 的酉表示问题等价于考虑 G 的 L_1 代数的 * 表示问题. 把 $L_1(G)$ 的元 x 的范数换成

$$\|x\|=\sup\|T_x\|,$$

其中 sup 是关于所有 * 表示取的. 此新范数满足作为 C^* 代数的条件, $L_1(G)$ 关于这个范数

的完备化所得到的 C^* 代数，称为 **C^* 群代数** (C^*-group algebra). G 的 C^* 群代数的对偶空间，称为拓扑群 G 的**对偶空间**，它对研究拓扑群是重要的. G 的酉表示†，或 G 的 L_1 代数的 * 表示，或 G 的 C^* 群代数的 * 表示，都由 G 上的**正定函数** (positive definite function) 所决定. G 上的正定函数是 G 上的可测函数 $p(g)$，对 G 上具有紧支集的连续函数 $x(g)$，恒满足

$$\iint p(g^{-1}h)\overline{x(g)}\,x(h)d\mu(g)d\mu(h) \geqslant 0.$$

Abel 群的情形. 当 G 是 Abel 群(→拓扑 Abel 群)时，G 的 L_1 代数 R 的正则极大理想 M 和 G 的特征标† γ，基于关系

$$x(M) = \int x(g)\overline{\gamma(g)}\,d\mu(g)$$

($x \in R$) 是一一对应的(此式的左端是 x 的 Гельфанд 表示在 M 处的值)，若在 R 的正则极大理想的集合上引入 Гельфанд 拓扑，在 G 的特征标所成的集合 $\hat{G}$ 上引入 Понтрягин 拓扑 (特征标群†)，则这两个拓扑空间基于上述对应关系是同胚的. 从而可以把 L_1 代数 R 的元 x 的 Гельфанд 表示，看作由上式右端的积分所定义的特征标群 $\hat{G}$ 上的函数 $\hat{x}(\gamma)$. 我们称它为 x 的 **Fourier 变换** (Fourier transform). 当然对于其他函数空间也能定义 Fourier 变换 (例如，取 G 上的 L_2 空间时，是 Plancherel 意义下的 Fourier 变换)，由此可以对古典 Fourier 级数，Fourier 积分，调和分析理论(→调和分析) 从更广泛的观点上进行研究. 例如，G 的 L_1 代数的元 x 的 Fourier 变换是在无穷远点取值为 0 的连续函数(参看上述 Гельфанд 表示)，这一命题就相当于古典 Riemann-Lebesgue 定理†. 古典 Fourier 分析中著名的 Bochner 定理可表述如下：对于 Abel 群 G 上的有界连续正定函数 $p(g)$，能在特征标群 $\hat{G}$ 上唯一地确定一个 Radon 测度† ρ (即对任意有界连续函数 $u(\gamma)$，当 $u(\gamma) \geqslant 0$ 时恒有

$$\int u(\gamma)d\rho(\gamma) \geqslant 0$$

的测度)，使得 $p(g)$ 能表示为

$$p(g) = \int \gamma(g)d\rho(\gamma).$$

基于这样的理论的展开，能导出关于 Abel 群的 Понтрягин 对偶定理† (H. Cartan-R. Godement). 对于 L_1 代数 R 的闭理想 I，属于 I 的函数 x 的 Fourier 变换的共同零点的全体定义了 $\hat{G}$ 内的一个集合 $Z(I)$. I 能否用 $Z(I)$ 刻划，这就是**谱综合** (spectral synthesis) 问题，对此有很多讨论. 特别当 $Z(I)$ 为空集时，有 $I=R$，这是 N. Wiener 的**广义 Tauber 型定理** (generalized Tauberian theorem) 的一种表达方式. 它的原来的证明，用 Banach 代数得到了简化，这是这个理论的最初引人注目的应用(И. М. Гельфанд).

【函数代数】 设 X 为一紧 Hausdorff 空间†. $C(X)$ ($C_R(X)$) 是 X 上所有复 (实) 值连续函数的全体，对它赋以上确界范数†. $C(X)$ 的一个闭子代数 A 称为 X 上一个**函数代数** (function algebra) 或**一致代数** (uniform algebra)，如果它含有常数且可分离 X 的点(即对任意的 x，$y \in X$，$x \neq y$，总存在 $f \in A$，使得

$$f(x) \neq f(y)).$$

函数代数的一个典型例子是**圆盘代数**(disk algebra)，即复平面的单位圆 X 上所有这样的连续函数所成的代数，这些连续函数可以连续地扩张成单位开圆盘内的解析函数. 如果取 X 为一 Riemann 面† 内的解析曲线，或一个紧 Abel 群†(例如一个环面†)，等，我们就能得到另外的例子. 又如果取 X 为 n 维复空间 $\mathbf{C}^n$ 的一个域，那么 X 上的函数代数与多复变量函数的理论就有密切的联系.

设 A 是紧 Hausdorff 空间 X 上的一个函数代数，且设 F 是 X 内的一个闭子集. F 称为**反对称集** (antisymmetric set)，如果当 $f \in A$ 在 F 上为实时，f 在 F 上必为常数. Г. Е. Шилов 曾提出是否每一函数代数都能借助反对称代数来表示. 这个问题已由 E. Bishop([12])完全解决、存在由反对称集$\{F_\lambda\}$所组成的 X 的分割，使得 X 上的连续函数 f 属于 A，只要对每个 λ，$f|F_\lambda \in A|F_\lambda$. Bishop 的结果是 Stone-Weiers-

trass 定理的推广.

设A是圆盘代数，F是单位圆内的一个闭子集且其 Lebesgue 测度为零，那么我们可以证明 $A|F = C(F)$ [28].对紧 Hausdorff 空间 X 上的一个函数代数 A，X内一个闭子集F称为对 A 的一个**插补集** (interpolation set)，如果 $A|F = C(F)$. I. Glicksberg[18]对任一函数代数刻划了插补集而且对它证明了各种定理.

在函数代数的理论中，极大代数起着重要作用. A称为**极大代数** (maximal algebra)，如果对任一函数代数 $B \supset A$，都有 $B = C(X)$ 或 $B = A$. 圆盘代数是极大代数. 这一事实就是 Wermer 的**极大性定理** (maximality theorem). [22]在抽象的函数代数和复变函数论之间存在着密切的联系. 其中之一就是 Gleason 部分. 设A是函数代数，M_A 是A的极大理想空间. 对 a，$b \in M_A$，如果

$$\sup\{|f(a) - f(b)| \mid f \in A, \|f\| < 1\} < 2,$$

就记作 $a \sim b$. 关系 $\sim$ 是一个等价关系[17]. 对于这个关系的等价类称为对A的 **Gleason 部分** (Gleason parts) 在某些条件下，Gleason 部分具有某种解析性. 特别，如果A是如以下定义的 Dirichlet 代数，那么A的任一 Gleason 部分P或者仅由一点所组成，或者具有下述性质：存在单位开圆盘D到P上的一个一一连续映射τ，使得 $f \circ \tau (f \in A)$ 是D上的全纯函数 (Wermer [29]). 在此一个函数代数 A 称为 **Dirichlet 代数** (Dirichlet algebra)，如果 ReA 在 $C_R(X)$ 内稠密. 圆盘代数是 Dirichlet 代数. 一个函数代数 A 称为**对数模代数** (logmodular algebra)，如果 $\{\log|f| \mid f \in A^{-1}\}$ 在 $C_R(X)$ 内稠密，其中 A^{-1} 表示集合 $\{f \mid f \in A, f^{-1} \in A\}$. 若$A$是对数模代数，则可以建立和前面的定理相同的结果. 对 $p \in M_A$，我们可以考虑对 p 的一个**表示测度** μ_p，即X上的一个正测度 μ_p，使得对 $f \in A$，有

$$f(p) = \int_X f(x) d\mu_p(x).$$

表示测度是解析函数的 Poisson 积分表示[†]的推广. 设 a，b 是一个 Gleason 部分内的任意两点，则对 a 的任一表示测度 μ_a，存在一个对 b 的表示测度 μ_b，使得 $\mu_a \leqslant C\mu_b$. 反之，对 b 的一个表示测度 μ'_b，存在一个对 a 的表示测度 μ'_a，使得 $\mu'_b \leqslant \mu'_a$ ([13]). 此外，我们可以把 Gleason 部分的概念推广到 $C_R(X)$ 内线性子空间的情形. 在这种情形下，Gleason 部分与抽象位势论[†]相联系，因为对 Gleason 部分的等价关系有 Harnack 不等式[†]的形式([11]). 作为应用，有许多问题与函数论相联系，例如在复平面的紧集上用有理函数来一致逼近([19])和A全纯函数的理论，后者推广了多复变量全纯函数的理论([26]).

在函数代数理论中，我们常用所谓的 Rossi 的**局部极大模原理** (local maximum modulus principle)([27])：设 U 是 $M_A - \partial_A$ 内的一个开集，则 A_U 的 Шилов 边界[†]含于U的拓扑边界内，其中 A_U 表示 $A|\overline{U}$ 的闭包.

联系到函数代数的理论，我们可以考虑**广义 Hardy 类**(generalized Hardy class). 设A是函数代数，m是A上的一个乘法正测度. 对于 $1 \leqslant p < \infty$，Hardy 类 $H_p(m)$ 定义为A在 $L_p(m)$ 内的闭包，而对 $p = \infty$，$H_\infty(m)$ 是A在$L_\infty(m)$内的弱 * 闭包. 许多对古典Hardy类成立的定理可以推广到广义 Hardy 类的情形([16],[21],[22],[24],[25]). 在古典H_∞类中，有所谓的 **Corona 问题**(Corona problem)：开圆盘是否在 H_∞ 的极大理想空间内稠密？这个问题由 L. Carleson 作了肯定的回答 [15]. 它等价于下述事实：设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是 H_∞ 内的函数，满足 $|f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n| \geqslant \varepsilon > 0$，则存在 $g_1, \cdots, g_n \in H_\infty$，使得

$$f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1.$$

其次，我们注意到"推移不变子空间"也联系到函数代数. H_2 内的闭子空间M是一个不变子空间，如果 $ZM \subset M$. 事实上，我们有 **Beurling 定理** (Beurling's theorem)：对H_2 内任一非空不变子空间，存在内函数 f (即 $f \in H_\infty$ 且 $|f| = 1$ 几乎处处成立)，使得 $M = fH_2$. 有许多关于不变子空间的定理关联到另外种类的空间，例如 L_2 或连续函数空间 ([16]，[22]，

[31],[32]).

【参】 [1] C. E. Rickart, General theory of Banach algebras, van Nostrand, 1960; [2] M. A. Наймарк, Нормированные кольца, Гостехиздат, 1956 (英译本: Normed rings, Noordhoff, 1964); [3] L. H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, van Nostrand, 1953; [4] W. Rudin, Fourier analysis on groups, Interscience, 1962; [5] 吉田耕作, 位相解析, 岩波, 1951; [6] 三村征雄, 位相解析, 現代数学講座, 共立出版, 1957; [7] G. W. Mackey, Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 134—165; [8] I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., **70** (1951), 219—255; [9] J. G. Glimm, Type IC*-algebras, Ann. of Math., (2) **73** (1961), 572—612; [10] R. F. Arens-I. M. Singer, Function values as boundary integrals, Proc. Amer. Math. Soc., **5**(1954), 735—745; [11] H. S. Bear-B. Walsh, Integral kernel for one-part function spaces, Pacific J. Math., **23** (1967), 209—215; [12] E. Bishop, A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pacific J. Math., **11** (1961), 777—783; [13] E. Bishop, Representing measures for points in a uniform algebra, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 121—122; [14] A. Browder, Introduction to function algebras, Benjamin, 1969; [15] L. Carleson, Interpolations by bounded analytic functions and the Corona problem, Ann. of Math., (2) **76** (1962), 542—559; [16] T. W. Gamelin, Uniform algebras, Prentice-Hall, 1969; [17] A. M. Gleason, Function algebras, Seminars on analytic. functions, II, Institute for Advanced Study, Princeton, 1957, p. 213—226; [18] I. Glicksberg, Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry, Trans. Amer. Math. Soc., **105** (1962), 415—435; [19] I. Glicksberg, Dominant representing measures and rational approximation, Trans. Amer. Math. Soc., **130** (1968), 425—462; [20] M. Hasumi (荷見守助), Interpolation sets for logmodular Banach algebras, Osaka J. Math., **3**(1966), 303—311; [21] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebras, Acta Math., **108** (1962), 271—317; [22] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, 1962; [23] H. Ishikawa-J. Tomiyama-J. Wada (石川-富山諄-和田諄蔵), On the essential set of function algebras, Proc. Japan Acad. **44** (1968), 1000—1002; [24] G. M. Leibowitz, Lectures on complex function algebras, Scott. Foresman, 1970; [25] G. Lumer, Algèbres de fonctions et espaces de Hardy, Lecture notes in math. 750, Springer, 1968; [26] C. Rickart, Holomorphic convexity for general function algebras, Canad. J. Math., **20** (1968), 272—290; [27] H. Rossi, The local maximum modulus principle, Ann. of Math., (2) **72** (1960), 1—11; [28] W. Rudin, Boundary values of continuous analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., **7** (1956), 808—811; [29] J. Wermer, Dirichlet algebras, Duke J. Math., **27** (1960), 373—381; [30] Function algebras, Proc. of Tulane Univ. Symposium, Scott, Foresman, 1966; [31] 荷見守助, Shift-invariant subspace について, 数学, **17** (1966), 214—224; [32] 和田諄蔵, ノルム環, 共立出版, 1969; [33] N. Bourbaki, Eléments de mathématique, Théories spectrales, ch. 1, 2, Actualités Sci. Ind., 1332, Hermann, 1967.

von Neumann 代数 [英 von Neumann algebra 法 algèbre de von Neumann 德 von Neumannsche Algebra 俄 алгебра фон Неймана 日 フォン・ノイマン環] 设 $\mathfrak{H}$ 为(可分) Hilbert 空间†, 在 $\mathfrak{H}$ 上定义的有界线性算子†的全体的集合, 用 $\mathscr{B}(\mathfrak{H})=\mathscr{B}$ 表示. $\mathscr{B}$ 含有单位算子 I, 又对于 $\mathscr{B}$ 的元 A, B 等, 定义了和 $A+B$ (算子之和), 积 AB (算子之积), A^* (伴随算子†).

对于 Hermite 算子† A (即 $A=A^*$), 对一切 $x\in\mathfrak{H}$, (Ax,x) 恒为实数. 特别对一切 $x\in\mathfrak{H}$ 有 $(Ax,x)\geqslant 0$ 成立时, A 称为**正定** (positive definite) Hermite 算子, 记作 $A\geqslant 0$. 又关于 Hermite 算子 A, B, 当 $A-B$ 为正定算子时, 就写作 $A\geqslant B$. 这样, 我们在 Hermite 算子之间引入了序 $A\geqslant B$. 设 $\{A_\alpha\}$ 为正定 Hermite 算子族, 如果对于它的任意两个元 A_α, A_β, 存在第三元 A_γ, 使得 $A_\alpha\leqslant A_\gamma$, $A_\beta\leqslant A_\gamma$ 成立, 则族 $\{A_\alpha\}$ 称为上向有向族; 对于这样的上向有向族 $\{A_\alpha\}$, 如果存在算子 A, 使得

$$(Ax,\ x)=\sup(A_\alpha x,\ x)$$

(关于一切 $x\in\mathfrak{H}$) 成立, 则 A 称为 $\{A_\alpha\}$ 的上确界 (这等价于在强算子拓扑†和弱算子拓扑†下, $\{A_\alpha\}$ 收敛†于 A). 对于射影算子† E (即 $E=E^*$, $E^2=E$), $E\mathfrak{H}=\{Ex\mid x\in\mathfrak{H}\}$ 构成 $\mathfrak{H}$ 的闭向量子空间. 又两个射影算子 E_1, E_2 满足 $E_1E_2=0$ 时, 就称 E_1, E_2 是正交的, 此时 E_1+E_2 仍为射影算子.

【$\mathscr{B}$ 的拓扑】 在 $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ 上可以引入一致算子拓扑, 强算子拓扑, 弱算子拓扑(→线性算子). 这三种拓扑依上述次序顺次减弱. 由 $\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}$ 的映射 $A\to A^*$ (伴随算子)关于一致算子拓扑和弱算子拓扑是连续的, 但关于强算子拓扑不是连续的. 由 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 到 $\mathscr{B}$ 的映射 $(A,B)\to AB$ 关于一致算子拓扑是连续的; 只当两个因子之一限制在按范数有界的集上时, 这个映射关于强算子拓扑才是连续的, 一般情形下它并不连续; 又关于弱算子拓扑, 在

一个元固定时这个映射是连续的（即分别连续的）. $\mathscr{B}$ 关于一致算子拓扑是 Banach 空间，进而还是 Banach 代数†，C^* 代数†. 它关于强算子拓扑和弱算子拓扑形成局部凸†拓扑线性空间.

【von Neumann 代数的定义】 设 $\mathscr{M}$ 为 $\mathscr{B}$ 的子集，当 $\mathscr{M}$ 形成子代数（即如果 $A, B \in \mathscr{M}$，则 $\lambda A + \mu B \in \mathscr{M}$，$AB \in \mathscr{M}$，且当 $A \in \mathscr{M}$ 有 $A^* \in \mathscr{M}$ 时，就称 $\mathscr{M}$ 为 ***子代数** (*-subalgebra). 设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{B}$ 的一个子集，与 A 和 A^*（对一切 $A \in \mathscr{A}$）可交换的元的全体 $\mathscr{A}'$，称为 $\mathscr{A}$ 的**可换子** (commutant). $\mathscr{A}'$ 是*子代数，$\mathscr{A}''' = \mathscr{A}'$ 成立.

下面四个条件是互相等价的： 1) $\mathscr{M}$ 是含有 I 的*子代数，关于弱算子拓扑是闭集; 2) $\mathscr{M}$ 是含有 I 的*子代数，关于强算子拓扑是闭集; 3) $\mathscr{M}$ 等于 $\mathscr{B}$ 的某一子集 $\mathscr{A}$ 的可换子 $\mathscr{A}'$; 4) $\mathscr{M}$ 是含有 I 的*子代数，关于一致算子拓扑是闭集，且作为 Banach 空间，它与某个 Banach 空间的共轭空间相同. 满足这种条件的 $\mathscr{M}$，称为 **von Neumann 代数**（又关于一致算子拓扑为闭的*子代数乃是 C^* 代数）. von Neumann 代数也称为**算子环** (operator ring) 或 **W^* 代数** (W^*-algebra).

von Neumann 代数的研究是在 1929 年由 J. von Neumann 开创的，他首先证明了上述条件 1)，2) 和 3) 的等价性，大体上奠定了今日研究的基础 ([1])，所以用 von Neumann 的名字来命名. von Neumann 代数可以认为是有限维空间中矩阵代数的自然推广，这也是这种理论重大意义之所在. 上述定义的第四个条件是境正一郎给出的.

在 von Neumann 代数的讨论中，通常下列定理是重要的 (**Kaplansky 定理**)：当 $\mathscr{B}$ 的子集 $\mathscr{A}$ 含有 I，且对于 $A+B, AB, \lambda A, A^*$ 的运算是封闭（即 $\mathscr{A}$ 是*子代数）时，$\mathscr{A}$ 关于弱算子拓扑（或强算子拓扑）的闭包 $\mathscr{M}$ 是 von Neumann 代数，如果设 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{M}_1$ 分别是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{M}$ 中范数 $\leqslant 1$ 的元的全体，则 $\mathscr{M}_1$ 是 $\mathscr{A}_1$ 关于弱算子拓扑（或强算子拓扑）的闭包.

当 E 是属于 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 的射影算子时，$E\mathscr{M}E = \{EAE \mid A \in \mathscr{M}\}$ 对于和，积，复数倍，伴随算子的运算以及弱算子拓扑都是封闭的. 但它不是一个 von Neumann 代数，因它不包含单位算子 I. 它所包含的算子由 $E\mathfrak{H}$ 映射于 $E\mathfrak{H}$，从而如果只在 $E\mathfrak{H}$ 上考虑各个算子，则 $E\mathscr{M}E$ 构成闭子空间 $E\mathfrak{H}$ 上的 von Neumann 代数. 在这个意义下把 $E\mathscr{M}E$ 看作 $E\mathfrak{H}$ 上的 von Neumann 代数，称为 $\mathscr{M}$ 在 $E\mathfrak{H}$ 上的**部分** (part). 对于 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$，它的中心† $\mathfrak{Z} = \mathscr{M} \cap \mathscr{M}'$ 仍然是 von Neumann 代数. 关于射影算子 $E \in \mathfrak{Z}$，$E\mathscr{M}E = E\mathscr{M}$ 成立.

【迹】 设 $\mathscr{M}$ 为 von Neumann 代数，$\mathscr{M}^+$ 为属于 $\mathscr{M}$ 的正定 Hermite 算子的全体. 在 $\mathscr{M}^+$ 上定义的，取值于 $[0, \infty]$（0，正实数及 ∞）的（不恒等于 0）的泛函 $t(A)$，如果满足下列三个条件，就称 t 为 $\mathscr{M}^+$ 上的**迹** (trace):

1) $t(A+B) = t(A) + t(B)$;

2) 当 $\lambda \geqslant 0$ 时，$t(\lambda A) = \lambda t(A)$;

3) 对于 $\mathscr{M}$ 内任意的酉算子 U，
$t(UAU^*) = t(A) (A \in \mathscr{M}^+)$.

若对一切 $A \in \mathscr{M}^+$，有 $t(A) < \infty$，则称 t 为**有限** (finite) 迹，若对使得 $t(A) = \infty$ 的任一 $A \in \mathscr{M}^+$，必有 $B \in \mathscr{M}^+$，使 $A \geqslant B \neq 0$，而且 $t(B) < \infty$，则称 t 为**半有限** (semifinite) 迹; 又如果当 $\{A_\alpha\}$ 为 $\mathscr{M}^+$ 的上向有向族，且 A 为此族的上确界时，总有 $t(A) = \sup t(A_\alpha)$ 成立，则 t 称为**正规** (normal) 迹.

【von Neumann 代数的分类】 当 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 不存在半有限正规迹时，就称 $\mathscr{M}$ 为**纯无限** (purely infinite) von Neumann 代数或 **III 型** von Neumann 代数. 与此相反，当对任一 $A \in \mathscr{M}^+$，$A \neq 0$，存在半有限正规迹 t，使得 $t(A) \neq 0, \neq \infty$ 时，就称 $\mathscr{M}$ 为**半有限** (semifinite) von Neumann 代数，特别当存在有限正规迹 t，使得 $t(A) \neq 0$ 时，就称 $\mathscr{M}$ 为**有限** (finite) von Neumann 代数. 交换 von Neumann 代数是有限的. 以下设 $E (E \neq 0)$ 为属

于 $\mathscr{M}$ 的射影算子,当属于 $E\mathscr{M}E$ 的任意两个算子都可交换时,E 称为 **Abel 射影算子** (Abelian projection). 当 $\mathscr{M}$ 含有一个 Abel 射影算子 E,且对属于 $\mathscr{M}$ 的中心 $\mathfrak{Z}$ 的射影算子P,只限于 $P=I$ 才满足 $E\leqslant P$ 时,就称 $\mathscr{M}$ 为**I型** von Neumann 代数. 此时 $\mathscr{M}$ 是半有限的或有限的. 当 $\mathscr{M}$ 为有限或半有限,且不含有任一 Abel 射影算子时,就称$\mathscr{M}$ 为 **II 型** von Neumann 代数. 一个有限 von Neumann 代数还可以用这样的 von Neumann 代数来刻划,即在其内取伴随算子的运算在有界球上关于强算子拓扑是连续的 (Sakai (境正)[9]).

【von Neumann 代数的分解】 在 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 的中心 $\mathfrak{Z}$ 内,存在互相正交的射影算子 $E_{\rm I}$, $E_{\rm II}$, $E_{\rm III}$, 使得

$$E_{\rm I}+E_{\rm II}+E_{\rm III}=I,$$

并且 $E_{\rm I}\mathscr{M}$, $E_{\rm II}\mathscr{M}$, $E_{\rm III}\mathscr{M}$ 分别是 $E_{\rm I}\mathfrak{H}$, $E_{\rm II}\mathfrak{H}$, $E_{\rm III}\mathfrak{H}$ 上的 I 型, II 型, III 型 von Neumann 代数. 这样的分解是唯一的. 同时也存在唯一的属于中心 $\mathfrak{Z}$ 的射影算子 E_f, 使 $E_f\mathscr{M}$ 是 $E_f\mathfrak{H}$ 上的有限 von Neumann 代数; 且当射影算子P属于 $\mathfrak{Z}$, $P\mathscr{M}$ 在 $P\mathfrak{H}$上 为有限时,有 $P\leqslant E_f$.

【因子】 若一个 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 的中心仅由恒等算子 I 的复数倍所组成, 我们就称它为一个**因子** (factor). von Neumann 的约化理论 (reduction theory) 是把任一 von Neumann 代数的研究归结为因子的研究. 因子分类为 I_n 型 ($n=\infty$, 1, 2, $\cdots$), II_1 型 (即II型且有限),II_∞型(即II型且不是有限)和 III 型. I_n 型因子同构于一个 n 维 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上所有有界算子的代数 $B(\mathfrak{H})$. 自从 F. J. Murray 和 von Neumann 发现两个不同构的 II_1 型因子的例子(1943)后,因子的分类成了 von Neumann 代数理论的中心问题. 近年来,在研究因子的同构类上有了巨大进展. 我们有 II_1, II_∞ 和 III 型因子的不可数多的不同构的例子 (D. McDuff, R. Powers, 境正). 自从 J. Schwartz (1963)(第三个例), W. Ching (第四个例),境正(第五个例), J. Dixmier 和 E. C. Lance(第六和第七个例) 和 G. Zeller-Meier (第八和第九个例)找到了 II_1 型因子的九个不同构的例子后, McDuff 证明了存在可数多 II_1 型因子的不同构的例子. 最后 McDuff 和境正证明了存在不可数多 II_1 型因子的不同构的例子. Powers (1967) 证明了存在不可数多 III 型因子的不同构的例子.

【积分直和与因子分解】 本节所考虑的 Hilbert 空间都是可分†的,设$(\mathfrak{M},\mathscr{B},\mu)$为一测度空间†. 对每个 $\zeta\in\mathfrak{M}$, 设有一 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}(\zeta)$与之对应. 我们考虑这样的函数 $x(\zeta)$,其定义域含于 $\mathfrak{M}$ 内,而其值域含于 $\mathfrak{H}(\zeta)$ 内. 令 $\boldsymbol{K}$ 为这样的向量值函数的具有下述三性质的一个集: (i) 对 $x(\zeta)\in\boldsymbol{K}$, $\|x(\zeta)\|$ 可测;(ii)如果对任意 $x(\zeta)\in\boldsymbol{K}$ 和函数 $y(\zeta)$, 数值函数 $(x(\zeta),y(\zeta))$ 可测,则 $y(\zeta)\in\boldsymbol{K}$; (iii) 存在 $\boldsymbol{K}$ 内的函数的可数族 $\{x_1(\zeta), x_2(\zeta),\cdots\}$, 使得对每个固定的 $\zeta\in\mathfrak{M}$, 集 $\{x_1(\zeta), x_2(\zeta),\cdots\}$ 在 $\mathfrak{H}(\zeta)$ 内稠密. 这时 $\boldsymbol{K}$ 是一个向量空间. 我们把 $\boldsymbol{K}$ 内的每个函数称作**可测向量值函数** (measurable vector function). 在满足

$$\int\|x(\zeta)\|^2d\mu(\zeta)<\infty$$

的可测向量值函数 $x(\zeta)$ 的集内定义一个等价关系,即定义 $x(\zeta)$ 和 $y(\zeta)$ 为等价的,如果

$$\int\|x(\zeta)-y(\zeta)\|^2d\mu(\zeta)=0.$$

这样我们就得到一个等价类的空间,记为 $\mathfrak{H}$. 如果在 $\mathfrak{H}$ 内定义内积

$$(x,y)=\int(x(\zeta),y(\zeta))d\mu(\zeta),$$

则 $\mathfrak{H}$ 成为 Hilbert 空间, 我们称 $\mathfrak{H}$ 为**积分直和** (integral direct sum) 或**直积分** (direct integral), 兹设算子函数 $A(\zeta)$ 对每一 $\zeta\in\mathfrak{M}$ 给出 $\mathfrak{H}(\zeta)$ 上一个有界线性算子 $A(\zeta)$. 我们称这个算子函数为可测的, 如果对任一可测的 $x(\zeta)$, $A(\zeta)x(\zeta)$ 也是可测的. 此外, 如果 $\|A(\zeta)\|$ 有界,那么 $A(\zeta)$ 把 $\mathfrak{H}$ 内的一个函数变换为 $\mathfrak{H}$ 内的另一个函数, 从而在 $\mathfrak{H}$ 上定义了一个有界线性算子.这个算子称为 $A(\zeta)$的**积分直和或直积**

分. 一个 $\mathfrak{H}$ 上的算子,如果可以写成这种形式,**就称为可分解的** (decom posable).

一般地,设 $\mathfrak{H}$ 为 Hilbert 空间,我们考虑 $\mathfrak{H}$ 上的一个 Abel-von Neumann 代数 $\mathscr{A}$. 于是我们构造一个测度空间 $(\mathfrak{M}, \mathscr{E}, \mu)$, 且把 $\mathscr{A}$ 表示为 $\mathfrak{M}$ 上有界可测函数的集.(这可以有几种方法, Гельфанд 表示就是一个例子,尽管它对发展一个深入的理论不是足够精致的.)由此可以构造一个 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}(\zeta)$, 使得 $\mathfrak{H}$ 可表示为 $\mathfrak{H}(\zeta)$ 的积分直和. 这时 $\mathscr{A}$ 内所有算子都是可分解的并称为**可对角化算子**(diagonalizable operator). $\mathfrak{H}$ 上的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 的所有元都可分解由条件 $\mathscr{M} \subset \mathscr{A}'$ 所表征. 这时对应于 $\mathfrak{M}$ 内算子 A 的分解而出现的 $A(\zeta)$ 在 $\mathfrak{H}(\zeta)$ 上生成一个 von Neumann 代数 $\mathscr{M}(\zeta)$. 若取 $\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{M}$ 的中心 $\mathfrak{Z}$, 那么几乎所有 $\mathscr{M}(\zeta)$ 都是因子 (von Neumann). 若取 $\mathscr{A}$ 为包含于 $\mathscr{M}'$ 内的一个极大 Abel von Neumann 代数, 那么几乎所有 $\mathscr{M}(\zeta)$ 是 I 型因子 (F. I. Mautner [3]).

【算子和 von Neumann 代数】 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上一个算子 A 生成一个包含 A 的 von Neumann 代数, 即含有 A 的最小 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$. 这里就发生了一个问题: 在多大程度上 A 的性质反映到 $\mathscr{M}$ 的性质上? 当 A 是正规算子†时, $\mathscr{M}$ 是 Abel 的. 我们也知道存在生成各种类型的因子的算子.

【C^* 代数和 von Neumann 代数】 考虑 C^* 代数 R 的一种 * 表示 $x \to T_x$, 设 $\mathscr{M}$ 为含有 $T_x(x \in R)$ 全体的最小 von Neumann 代数. 如果 $\mathscr{M}$ 为 I 型, II 型, III 型, 则此种 * 表示分别称为 I 型, II 型, III 型 * 表示. 一个 C^* 代数,如果它的一切 * 表示均为 I 型,则称它为 I 型 C^* 代数. 可分的 C^* 代数是 I 型的等价于它是 GCR 代数 (⇀Banach 代数). 也已知道, C^* 代数有 II 型 * 表示当且仅当它有 III 型 * 表示 ([4]).

【拓扑群和 von Neumann 代数】 考虑局部紧 Hausdorff 拓扑群(⇀拓扑群) G 的酉表示 (⇀酉表示) $g \to U_g$. 当含有 $U_g(g \in G)$ 的全体的最小 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 为 I 型, II 型, III 型时, 相应地分别称为 I 型, II 型, III 型酉表示, 其酉表示都是 I 型的群称为 I 型拓扑群,例如,连通半单 Lie 群,连通幂零 Lie 群 (⇀Lie 群) 等都是 I 型的 ([7], [8]). 非 I 型的拓扑群也是存在的. 为得到一个群是 I 型的准则,正在积极进行研究 ([10]) (⇀酉表示).

【富田-竹崎理论】 由于证明张量积的交换定理(即 $(\mathscr{M}_1 \otimes \mathscr{M}_2)' = \mathscr{M}_1' \otimes \mathscr{M}_2'$) 的问题——这个问题对 III 型代数直到 1967 年还没有解决——的推动,富田经过多年的努力,终于在 1967 年成功地推广了 Hilbert 代数的理论,而在以前它只是对半有限 von Neumann 代数展开的. 这个理论的最重要的部分在于关于一个 von Neumann 代数的 * 自同构的某个单参数群,这些 * 自同构称为模自同构,每一模自同构的单参数群固有地结合着这个代数的一个确实的半有限正规权. 富田的理论由竹崎([13])加以完善了,他还指出模同构满足一个条件(并且由此条件所刻划),而此条件原来是在统计力学中由物理学家 R. Kubo, P. C. Martin 和 J. Schwinger 引入的,从而称为 *KMS* 条件. 在统计力学的数学基础里, 这个条件刻划了一个物理系统的平衡态, 而描述这个系统的时间发展是一个给定的(C^* 代数的)自同构的单参数群. 这是一个幸运的重合, 即这个条件在统计力学的所谓 C^* 代数处理([14])中曾由 R. Haag, N M. Hugenholtz 和 M. Winnink([15])在差不多与富田的工作同时于 1967 年提出. 富田-竹崎理论原来的证明由 M. Rieffel 和 A. Van Daele 的工作而得到很大的简化([16]). 进入模自同构意义的较深的洞察也由 Connes([17])所提供,他指出模自同构群(不计内自同构)对 von Neumann 代数是固有的(即不依赖于权) 而且属于 Out $\mathscr{M}$ 的中心(Out $\mathscr{M}$ 是 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 的所有 * 自同构群 Aut $\mathscr{M}$ mod 所有内 * 自同构所成的子群 Int $\mathscr{M}$).

富田-竹崎理论的某些基本定义和结果如下: 在 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 上的一个权 φ 是定义在 $\mathscr{M}$ 的正元素上,取正实值或无穷值

的一个可加且齐性的函数(即

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

且

$$\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x),$$

对所有 $x,y\in\mathscr{M}$ 和 $\lambda\geqslant 0$; 并规定 $0\cdot\infty=0$ 和$\infty+a=\infty$). 它称为确实的,如果除去

$$\varphi(0)=0$$

外它不为零;它称为正规的,如果

$$\varphi(x)=\sup\varphi(x_\alpha),$$

其中 x_α 是 $\mathscr{M}$ 的正元的一个上向有向族且

$$x=\sup x_\alpha;$$

它称为半有限的、如果由所有使得 $\varphi(x^*x)$ 为有限的元 $x\in\mathscr{M}$ 所组成的左理想 $\mathfrak{N}_\varphi$ 有这样的性质: $\mathfrak{N}_\varphi^*\mathfrak{N}_\varphi$ 的线性包 $\mathscr{M}_\varphi$ 在 $\mathscr{M}$ 内稠密. φ 在 $\mathscr{M}_\varphi$ 的正元素上的限制有一个唯一的 $\mathscr{M}_\varphi$ 上的线性泛函扩张, 我们用同一文字 φ 表示它, 与一个正规半有限权 φ 典范地相伴的是,存在 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}_\varphi$, $\mathscr{M}$ 的 * 表示 π_φ 和由 $\mathfrak{N}_\varphi$ 到 $\mathfrak{H}_\varphi$ 的一个稠密子集的映射 η, 使得

$$(\eta(x),\ \eta(y))=\varphi(y^*x),$$

且

$$\pi_\varphi(x)\eta(y)=\eta(xy).$$

如果 φ 有限(即 $\mathfrak{N}_\varphi=\mathscr{M}$), 那么

$$\Omega_\varphi=\eta(1)$$

具有性质

$$(\pi_\varphi(x)\Omega_\varphi,\ \Omega_\varphi)=\varphi(x)$$

且 $\pi_\varphi(\mathscr{M})\Omega_\varphi$ 在 $\mathfrak{H}_\varphi$ 内稠密. 如果 φ 是 $\mathscr{M}$ 上的一个正规半有限确实权,那么由关系

$$S_\varphi\eta(x)=\eta(x^*)$$

定义在 $\mathfrak{H}_\varphi$ 的一个稠密子集 $\eta(\mathfrak{N}_\varphi)$ 上的反线性算子 S_φ 是准闭的而且它的闭包的极分解

$$\bar{S}_\varphi=J_\varphi\Delta_\varphi^{1/2}$$

定义一个称为模算子的正自伴算子 Δ_φ 和一个反酉对合 J_φ. 富田-竹崎理论的主要结果是: (1) 若 $x\in\mathscr{M}$, 那么对所有实数 t, 变换

$$\sigma_t^\varphi(x)=\Delta_\varphi^{it}x\Delta_\varphi^{-it}\in\mathscr{M},$$

且定义了$\mathscr{M}$的 * 自同构σ_t^φ(称为模自同构)的单参数群.(2)若 $x\in\mathscr{M}$,则 $j_\varphi(x)=J_\varphi xJ_\varphi\in\mathscr{M}'$ 且 j_φ 是$\mathscr{M}$到 $\mathscr{M}'$ 上的一个共轭-线性同构.

$\mathscr{M}$上一个权 φ 称为相对于 $\mathscr{M}$ 的 * 自同构的单参数群 σ_t 在 β(一个实数)处满足 KMS 条件, 如果对每对 $x,y\in\mathfrak{N}_\varphi$, 存在复变量 z

$$(0\leqslant \operatorname{Im}z\leqslant\beta)$$

的有界连续函数 $F(z)$, 使得

$$F(t)=\varphi(x\sigma_t(y)),$$

$$F(t+i\beta)=\varphi(\sigma_t(y)x).$$

一个给定的单参数群 σ_t 和一个模自同构群 σ_t^φ 重合, 当且仅当相对于 σ_t, φ 在 $\beta=-1$ 处满足 KMS 条件. (在统计力学中,

$$\beta=(kT)^{-1},$$

其中 k 是 Boltzmann 常数, T 是系统的绝对温度.)

【III 型因子的结构和分类】 1967 年在 Baton Rouge 会议上, T. Powers 报告了他关于 III 型因子的单参数族的非同构性的结果[18], 而 III 型因子在 1938 年曾由 von Neumann 借助一个 I 型因子的无穷张量积 (简记为ITPFI) 构造过. 在 Powers 的工作以前,只分出过三个不同类别的 III 型因子以及同样数目的 II_1 型因子. 之后 ITPFI 的一个系统的分类曾由荒木不二洋和 E. J. Woods [19] 借助两个不变量给出, 这两个不变量是 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 的渐近比集 $r_\infty(\mathscr{M})$ 和 ρ 集 $\rho(\mathscr{M})$. 用富田-竹崎的理论, Connes [20, 21] 引入两个不变量 $S(\mathscr{M})$ (所有模算子的谱的交) 和 $T(\mathscr{M})$(所有使得模自同构 σ_t^φ 是内自同构的实数 t 的集合), 而且当 $\mathscr{M}$ 是一个 ITPFI 时, 证明了等式 $S(\mathscr{M})=r_\infty(\mathscr{M})$ 和关系

$$T(\mathscr{M})=2\pi|\log\rho(\mathscr{M})|^{-1}.$$

在一可分 Hilbert 空间上,一个 III 型因子的 S 集 $S(\mathscr{M})$ 或者是所有非负实数的集(III_1 型), 或者是 λ(其中 $0<\lambda<1$) 的所有整数幂的集和 O(III_λ 型),或者是集 $\{0,1\}$ (III_0 型), 荒木和 Woods 的工作指出,正如对 $\lambda=1$ 的情形一样, 对每个 $\lambda\in(0,1)$, 仅存在一个 III_λ 型的 ITPFI (Powers 的例), 然而存在连续多个 III_0 型的 ITPFI. Woods [22] 指出 III_0 型 ITPFI 的分类不是直接了当的.

由 Connes [17], 竹崎 [23] 和荒木 [24]

各自独立地给出的 III 型因子的一个结构分析——表示某一类 III 型因子为半有限 von Neumann 代数与它的单射自同态的一种叉积——最后导致竹崎证明 von Neumann 代数与它的 * 自同构的局部紧群的叉积的一条对偶性定理，以及应用它于下述的 III 型 von Neumann 代数的结构定理. von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 与模自同构群 σ_t^φ 的叉积是一个 II_∞ 型 von Neumann 代数 $\mathfrak{N}$，具有对偶群的一个标准作用 θ_t 作为 * 自同构的一个单参数群，而它是迹数标度的，即对某个确实正规迹 τ，有 $\tau\circ\theta_t=e^{-t}\tau$. 如果 $\mathscr{M}$ 是无穷型的，那么 $\mathfrak{N}$ 与 θ_t 的叉积同构于原来的 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$. 特别，任一 III 型 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 可以写成一个 II_∞ 型的 von Neumann 代数 $\mathfrak{N}$ 和一个迹数标度 * 自同构 θ_t 的单参数群的叉积. $\mathscr{M}$ 的同构类由 $\mathfrak{N}$ 的同构类以及 θ_t mod 内自同构的共轭类所决定. θ_t 在 $\mathfrak{N}$ 的中心 $\mathscr{Z}$ 上的限制 $\tilde{\theta}_t$ 是特别重要的，$\mathscr{M}$ 是一个因子当且仅当 $\tilde{\theta}_t$ 是遍历的. 在这种情形，$\mathscr{M}$ 是 III_1 型的，如果 $\mathfrak{N}$ 是一个因子；$\mathscr{M}$ 是 III_λ 型的，$0<\lambda<1$，如果 $\tilde{\theta}_t$ 是周期的，且具有周期 $-\log\lambda$；$\mathscr{M}$ 是 III_0 型的，如果 $\tilde{\theta}_t$ 是非周期的且不同构于由实直线 $\boldsymbol{R}$ 的平移诱导出的 $L^\infty(\boldsymbol{R})$ 的单参数 * 自同构群.

可分 Hilbert 空间上的一个 von Neumann 代数称为近似有限维的，如果它由有限维 * 子代数的一个递增序列所生成. 这类 von Neumann 代数包括许多重要的例子，诸如 ITPFI，以及在一个可分 Hilbert 空间上的典型交换(或反交换)关系的任一表示所生成的 von Neumann 代数. 近似有限维因子的分类几乎是完全的. 事实上，II_1 型近似有限维因子的唯一性从 von Neumann 的工作开始以来就已经知道，von Neumann 把它称作超有限因子. (无穷型的近似有限维 von Neumann 代数现在也称为超有限的.) II_∞ 型和 III_λ $(0<\lambda<1)$ 型的近似有限维因子的唯一性已由 Connes [26] 所证明. III_0 型近似有限维因子恰好由交换 von Neumann 代数 $\mathscr{Z}$ 的 * 自同构的遍历群 $\tilde{\theta}_t$ 的同构类所分类. 任何这样一个因子是一 Krieger 因子，即一个 von Neumann 代数与单个 * 自同构的叉积. 这样的因子的例子曾由 Krieger 充分研究过，他也证明了 [27] 一个 Krieger 因子的同构等价于标准测度空间的相伴非奇异交换的弱等价性.

【叉积】 一个(作用于 Hilbert 空间 $\mathfrak{H}$ 上的) von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 和一个局部紧群 G 相对于 G 在 $\mathscr{M}$ 上(基于 * 自同构 α_g, $g\in G$)的连续作用 α 的叉积 $\mathscr{M}\otimes_\alpha G$ 是一个 von Neumann 代数 $\mathfrak{N}$，它由以下定义的算子 $\pi(x)$, $x\in\mathscr{M}$ 和 $\lambda(h)$, $h\in G$ 所生成，这些算子定义在 G 上所有 $\mathfrak{H}$ 值的 L_2 函数(关于 Haar 测度)所成的 Hilbert 空间 $L_2(G,\mathfrak{H})$ 上:

$$[\pi(x)\xi](g)=\alpha_g^{-1}(x)\xi(g),$$

$$[\lambda(h)\xi](g)=\xi(h^{-1}g).$$

其中 $\xi\in L_2(G,\mathfrak{H})$. 对偶 $\hat{G}$ 在 $\mathfrak{N}$ 上的标准作用 $\hat{\alpha}$ 定义为：对 $y\in\mathfrak{N}$ 和 $p\in\hat{G}$,

$$\hat{\alpha}_p(y)=\mu(p)y\mu(p)^*,$$

其中 $\mu(p)$ 由

$$[\mu(p)\xi](g)=\overline{\langle g,p\rangle}\xi(g)$$

所定义. 竹崎的对偶性定理[25]断言，$[\mathscr{M}\otimes_\alpha G]\otimes_{\hat{\alpha}}\hat{G}$ 同构于 $\mathscr{M}\otimes\mathscr{B}(L_2(G))$，其中 $\mathscr{B}(L_2(G))$ 是 $L_2(G)$ 上所有有界线性算子的代数.

【自然正锥】 对 $\mathfrak{N}_\varphi$ 内所有正 x，向量 $\Delta_\varphi^\alpha\eta(x)$ 所成的集的闭包 V^α 反映了 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 的某些性质 [28, 29]. 特别，$V^{1/4}$ 称作自然正锥. 它是自对偶的闭凸锥，而且对 von Neumann 代数 $\mathscr{M}$ 是固有的(即不依赖于权 φ). $\mathscr{M}$ 上每个正规正线性泛函 ϕ 在这个锥中有唯一的表示 $\xi(\phi)$ 即

$$\phi(x)=(\pi_\varphi(x)\xi(\phi),\ \xi(\phi)),$$

而且这个映射 ξ 是凹的、单调的双射同胚，且是齐 1/2 次的. $\mathscr{M}$ 的所有 * 自同构群有一个自然的酉表示 $U(g)$, $g\in\mathrm{Aut}\,\mathscr{M}$，满足关系

$$U(g)xU(g)^*=g(x),$$

$$U(g)\xi(\varphi)=\xi(\varphi\circ g^{-1}).$$

【参】 [1] J. von Neumann, Collected works II, III, Pergamon 1961; [2] J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, 1957; [3] F. I. Mautner, Unitary representations of locally compact groups I, Ann. of Math., (2) **51** (1950), 1—25;

[4] J. Glimm, Type IC^*-algebras, Ann. of Math., (2) **73** (1961), 572—612; [5] I. Kaplansky, Projections in Banach algebras, Ann. of Math., (2) **53** (1951), 235—249; [6] R. V. Kadison, Operator algebras with a faithful weakly-closed representation, Ann. of Math., (2) **64** (1956), 175—181; [7] Harish-Chandra, Representations of a semisimple Lie group on a Banach space I, Trans. Amer. Math. Soc., **75** (1953), 185—243; [8] J. M. G. Fell, A new proof that nilpotent groups are CCR, Proc. Amer. Math. Soc., **13**(1962), 93—99; [9] S. Sakai (境正一郎), The theory of W^*-algebras, Lecture notes, Yale Univ., 1962; [10] L. Auslander-B. Kostant, Quantization and representations of solvable Lie groups, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 692—695; [11] J. T. Schwartz, W^*-algebras, Gordon and Breach, 1967; [12] M. Tomita (富田稔), Quasi-standard von Neumann algebras, mimeographed notes, Kyushu Univ., 1967; [13] M. Takesaki (竹崎正道), Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture notes in math. 128, Springer, 1970; [14] R. Haag-D. Kastler, An algebraic approach to field theory, J. Math. and Phys., **5** (1964), 848—861; [15] R. Haag-N. M. Hugenholtz-M. Winnink, On the equilibrium states in quantum statistical mechanics, Comm. Math. and Phys., **5** (1967), 215—236; [16] A. Van Daele, A new approach to the Tomita-Takesaki theory of generalized Hilbert algebras, J. Functional Analysis, **15** (1974), 378—393; [17] A. Connes, Une classification des facteurs de type III, Ann. Sci Ecole Norm. Sup., (4) **6** (1973), 133—252; [18] R. T. Powers, Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, Ann. of Math., (2) **86** (1967), 138—171; [19] H. Araki (荒木不二洋)-E. J. Woods, A classification of factors, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., (A) **4** (1968), 51—130; [20] A. Connes, Un nouvel invariant pour les algèbres de von Neumann, C. R. Acad. Sci., Paris, (A) **273** (1971), 900—903; [21] A. Connes, Calcul des deux invariants d'Araki et Woods par la théorie de Tomita et Takesaki, C. R. Acad. Sci., Paris, (A) **274** (1972), 175—177; [22] E. J. Woods, The classification of factors is not smooth, Canad. J. Math., **25** (1973), 96—102; [23] M. Takesaki (竹崎正道), The structure of a von Neumann algebra with a homogeneous periodic state, Acta Math., **131** (1973), 79—121; [24] H. Araki (荒木不二洋), Structure of some von Neumann algebras with isolated discrete modular spectrum, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., **9** (1973), 1—44; [25] M. Takesaki (竹崎正道), Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math., **131** (1973), 249—310; [26] A. Connes, Classification of injective factors, Queen's Mathematical Preprints, no. 1975—28; [27] W. Krieger, On ergodic flows and the isomorphism of factors, Math. Ann., **223** (1976), 19—70; [28] H. Araki (荒木不二洋), Some properties of modular conjugation operators of von Neumann algebras and a non-commutative Radon-Nikodym theorem with a chain rule, Pacific J. Math., **50** (1974), 309—354; [29] A. Connes, Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann, Ann. Inst. Fourier, 24, Fasc. **4** (1974), 127—156.

算子演算 [英 operational calculus 法 calcul symbolique 德 Operatorenkalkül 俄 операторное исчисление 日 演算子法] 所谓**算子演算**，如果作广义的解释，乃是指泛函分析中整个的线性算子†理论，然而通常所说的算子演算，仅仅是指基于符号地或者代数地进行微分和积分运算的解线性微分方程的简单方法. 这种想法很早就有了，但其普及则始于十九世纪末，O. Heaviside 把这种方法广泛应用于电工学的各种问题. 可是他的理论未能为那些爱好严密的分析学者所承认. 其后，利用 Laplace 变换†建立了它的方法的基础，直到最近这还被当作最标准的方法，而近年来，则有了其他种种理论基础. 特别是对下面叙述的公式 (3)，L. Schwartz，J. Korevaar，佐藤幹夫，竹内外史和其他学者作了种种数学的解释(→广义函数，公式 12 II).

在本条内，我们首先叙述 J. G. Mikusiński 的明确而适当的理论基础([1])，然后再阐述它与原有的基于 Laplace 变换的方法的联系.

【Mikusiński 算子演算】 在 $t \geqslant 0$ 上定义的复值连续函数 $a=\{a(t)\}$ 的全体 $\mathscr{C}$，由普通的加法及数量乘法形成线性空间，由卷积†

$$\left\{\int_0^t a(t-s)b(s)ds\right\}$$

定义乘法 $a \cdot b$ 而形成交换环. 这个环不含有零因子† (**Titchmarsh 定理**). 此定理自 E. C. Titchmarsh 最初的证明([4])以来，有许多别的证法出现，例如，C. Ryll-Nardzewski(1952)发表过一个极简单的证明([1]的日译本增补了新的简单证明). 基于这条定理，我们可以构造 $\mathscr{C}$ 的商域† $\mathscr{Q}$. $\mathscr{Q}$ 的元称为 **Mikusiński 算子**或简称为**算子**(operator). 对 $\mathscr{C}$ 的元 $\{a(t)\}$，如果当 $t<0$ 时，命 $a(t)=0$，则 $\mathscr{C}$ 是 $\mathscr{U}$ 的子环，这里 $\mathscr{U}$ 是定义在 $-\infty<t<+\infty$ 上的局部可积 (局部 L_1) 且具有左方有界支集†的函数 (把几乎处处相等的函数看作相同)的全体，$\mathscr{U}$ 的商域仍然是 $\mathscr{Q}$.

$\mathscr{Q}$ 的乘法单位元 $\delta=b/b(b \neq 0)$ 为 Dirac

δ 函数[†]，亦称为**脉冲函数** (impulse function). 算子 $l=\{1\}\in\mathscr{C}$，作为函数当 $t<0$ 时取值为 0，当 $t>0$ 时取值为 1，称为 **Heaviside 函数** (Heaviside function)，也称为**单位函数** (unit function)，写做 $\mathbf{1}(t)$ 或 $\mathbf{1}$. ($1(0)$ 可取任意值，但大都取为左右极限的平均值 1/2.) 算子 l 是**积分算子** (integral operator)，因为，它作为算子把 a 映为 $l\cdot a$，有

$$l\cdot a=\left\{\int_0^t a(s)\,ds\right\}=a \text{ 在}[0,t]\text{ 的积分.}$$

又 $\{t^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)\}$ ($\mathrm{Re}\lambda>0$)，给出 λ 阶积分. $s=\delta/l$ 是 l 的逆算子，它是一个**微分算子** (differential operator)，若 $a\in\mathscr{C}$ 为 C^1 类，则有

(1) $s\cdot a=a'+a(+0)\delta$
$\quad\quad=a'+\{a(+0)\}/\{1\}$.

同样地，对于 C^n 类的 $a\in\mathscr{C}$，有

(2) $s^n\cdot a=a^{(n)}+a^{(n-1)}(0)\delta$
$\quad\quad+a^{(n-2)}(0)s+\cdots+a(0)s^{n-1}$.

算子 $a\to s\cdot a$ 能用于通常意义下不可微的函数，把 s 的使用看作微分运算，我们就可以在域 $\mathscr{D}$ 内代数地处理微分算子. 特别是 $s\cdot\mathbf{1}=\delta$，这一关系常常用如下写法表示:

(3) $\quad d\mathbf{1}(t)/dt=\delta(t)$.

s 的有理函数，当它的分子的次数低于分母的次数时，能用 t 的初等函数[†]表示. 特别是下列公式成立:

(4) $1/(s-\alpha)^n=\{t^{n-1}e^{\alpha t}/(n-1)!\}$,
$\quad 1/(s^2+\beta^2)=\{\beta^{-1}\sin\beta t\}$,
$\quad s/(s^2+\beta^2)=\{\cos\beta t\}$.

这样，常系数线性常微分方程

$$\sum_{r=0}^{n}\alpha_r\varphi^{(r)}(t)=f(t)$$

满足初始条件[†] $\varphi^{(i)}(0)=\gamma_i$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$ 的解，通过使用公式 (1),(2)，归结为 s 的一个方程，再通过分解下列算子为部分分式而得以求出:

(5) $\{\varphi(t)\}=\dfrac{\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_0+f}{\alpha_n s^n+\cdots+\alpha_1 s+\alpha_0}$,

其中

$$\beta_r=\alpha_{r+1}\gamma_0+\alpha_{r+2}\gamma_1+\cdots+\alpha_n\gamma_{n-r-1},$$
$$0\leqslant r\leqslant n-1.$$

如果把 (5) 中的 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-1}$ (或 $\beta_0,\cdots,\beta_{n-1}$) 看作参数任意，则通解就由 (5) 表示. 如果 (5) 式右端的有理函数为 $M(s)/D(s)$，分子的次数低于分母的次数，且 $D(\lambda)=0$ 的根之中，λ_0 为 l 重根，而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m(m=n-l)$ 为单根，则 (5) 式的右端可以具体地写为

$$\sum_{r=0}^{l-1}\frac{t^{l-r-1}}{(l-r-1)!\,r!}\times\left[\frac{d^r}{d\lambda^r}\left(\frac{M(\lambda)}{D(\lambda)/(\lambda-\lambda_0)^l}\right)\right]_{\lambda=\lambda_0}e^{\lambda_0 t}+\sum_{i=1}^{m}\frac{M(\lambda_i)}{D(\lambda_i)}e^{\lambda_i t}.$$

称它为**展开定理** (expansion theorem).

【算子的极限】 对于算子序列 a_n，如果存在算子 $q(\neq 0)$，使得 $q\cdot a_n\in\mathscr{C}$，而且 $q\cdot a_n$ 作为函数序列广义一致收敛[†]于 b，则称算子序列 a_n 收敛于**收敛于极限** $a=b/q$. 极限 a (不依赖于 q) 唯一地确定. 在这个极限概念的基础上，我们可以同通常的微积分学相平行地定义算子级数和变量为 λ 的算子值函数的微分积分的概念(一级数，微分法，积分法)，从而可以展开算子值函数的微积分理论. 关于两个变量的函数 $\varphi(x,t)$ 的线性偏微分方程，特别是初始值问题，可以作为变量 x 的算子值函数的线性常微分方程来处理.

对于给定的算子 w，微分方程

$$\varphi'(\lambda)=w\cdot\varphi(\lambda)$$

在初始条件 $\varphi(0)=\delta$ 下的解 (假使存在) 是唯一的，把它写做 $\varphi(\lambda)=e^{\lambda w}$，称为**算子的指数函数** (exponential function of an operator). 若幂级数

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n w^n/n!$$

收敛，则它的极限等于 $e^{\lambda w}$. 然而，即使级数 (6) 不收敛，也有存在 $e^{\lambda w}$ 的若干情形. 特别是对于 $w=-\sqrt{s}$，有

(7) $e^{-\lambda\sqrt{s}}=\{(\lambda/2\sqrt{\pi t^3})\exp(-\lambda^2/4t)\}$;

对于 $w=-s$，有

(8) $$e^{-\lambda s} = h^{\lambda} = s \cdot \{H_{\lambda}(t)\}.$$

这里 $H_{\lambda}(t)$ 当 $t < \lambda$ 时取值 0，当 $t > \lambda$ 时取值 1，它是 $\mathscr{U}$ 中的函数，称为在 λ 处的**跳跃函数** (leap function). 对于 $\{f(t)\} \in \mathscr{U}$，因为 $h^{\lambda} \cdot \{f(t)\} = \{f(t-\lambda)\}$，所以(8)式称为**平移算子** (translation operator). 对于 $w = -s$，级数(6)不收敛，但把它形式地应用于 $f(t)$ 时，得到形式 Taylor 展开:

$$f(t-\lambda) = \sum f^{(n)}(t)(-\lambda)^n/n!.$$

线性差分方程†的解可以表示为 h^{λ} 的有理函数. 幂级数 $\sum \alpha_n h^n$ (在上述极限的意义下)恒收敛. 这也可以看作用形式幂级数†表示的具体例子. 又 $e^{-\lambda s}$, $e^{-\lambda\sqrt{s}}$ 分别对波动方程†

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 = \alpha^2\partial^2\varphi/\partial t^2,$$

热传导方程† $\partial^2\varphi/\partial x^2 = \alpha^2\,\partial\varphi/\partial t$ 的求解起着基本的作用. 当 $\lambda \to 0$ 时，算子 (7) 收敛于 δ，而这给出了 Dirac δ 函数的一个正则化†.

【Laplace 变换】 对于 $\{f(t)\} \in \mathscr{C}$，

(9) $$\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta} e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda = \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}f(\lambda)d\lambda$$

(在上述算子的极限的意义下)必存在，作为算子来说，与原来的 $\{f(t)\}$ 是相同的. 从而，若作为函数 $f(\lambda)$的通常的 Laplace 变换 (→Laplace 变换)，(9)式收敛，且表示函数 $g(s)$，则把 $g(s)$ 看作微分算子 s 的函数时，它与 $g(s)$ 的逆变换函数 $f(t)$ 所表示的算子相等. 前述的公式(4),(7)是这个关系的例子，公式的左端为右端的 Laplace 变换. 例如为了实际计算(5)式，只要求出右端的 Laplace 逆变换即可. 但是，以通常的 Laplace 变换作为理论基础，除了繁杂之外，还有一个缺点，就是由于 Laplace 变换的收敛性条件，使它受到人为的限制，其适用的范围有局限性.

又作为算子演算的基础，有时不是用 Laplace 变换本身(9)，而采取

(10) $$g(p) = p\int_0^{\infty} e^{-pt}f(t)dt$$

但这只是表示上的差别，只要把 s 换以 p，把变换函数乘以 p，就能得到后一变换.

【和广义函数的关系】 当 $f \in \mathscr{C}$ 时，可以把形如 $h^{\lambda}\cdot s^k \cdot f$ 的算子看作与具有左方有界支集的 Schwartz 广义函数†相同. 上面这种形式的算子的序列$\{f_n\}$，当 $f_n, f_{n+1}, \cdots$ 在区间$(-n, n)$内一致时，我们能把它的"极限"(或这种序列的适当的等价类)看作与 Schwartz 广义函数相同. Schwartz 广义函数和 Mikusiński 算子，彼此互不包含，但都是函数(及其微分)的概念的推广.

【参】 [1] J. Mikusiński, Rachunek operatorów Warsaw, 1953 (中译本: 杨·米库辛斯基，算符演算，上海科学技术出版社，1964); [2] B. van der Pol-H. Bremmer, Operational calculus based on the two-sided Laplace integral, Cambridge Univ. Press, 1950，第二版，1959; [3] N. W. McLachlan, Complex variable and operatiocal calculus with technical application, Cambridge Univ. Press, 1939; [4] E. C. Titchmarsh, The zeros of certain integral functions, Proc. London Math. Soc., 25(1926) 283—302. 关于算子演算的表→公式 12 II.

十三、微分方程、积分方程和函数方程

微分方程论 [英 theory of differential equations 法 théorie des équations différentielles 德 Theorie der Differentialgleichungen 俄 теория дифференциальных уравнений 日 微分方程式論] 【常微分方程】 G. Galilei 在研究落体运动时发现,若自由落体在时间 t 内落下距离 x,则加速度 $\ddot{x}(t)$ 是一常数. 作为微分方程 $\ddot{x}(t)=g$ 的解而得到落体运动规律 $x(t)=\frac{1}{2}gt^2$, 是求解微分方程的第一个例子,同时也是开创微积分学的先驱性工作. Newton 运动方程†也是二阶微分方程. 当把这样的自然法则写成微分方程的形式时,很多都可以简单地表示出来. 我们把用微分方程的形式写成的自然法则称为**微分法则** (differential law). 这样,微分方程论就与微积分学同时建立了.

I. Newton 完全地解出了二体问题†的微分方程; G. W. Leibniz 也解出了很多简单的微分方程.而在十八世纪前半叶, Bernoulli 家族的数学家们,以及 A. C. Clairaut, J. F. Riccati, L. Euler, J. L. Lagrange 等,用各自的方法解出了一些特殊的方程. 这个时期的重点在于:对初等函数施行有限次代数运算、变量变换和不定积分把解表示出来(**求积法** (quadrature)). 到了十八世纪后半叶开始讨论其他方法,特别是无穷级数的解法. Lagrange 于 1775 年发表了求线性常微分方程解的常数变易法†. 在十九世纪初出现了 C. F. Gauss 关于超几何级数†所满足的微分方程的研究.

最早研究解的存在问题的是 A. L. Cauchy (1820). 他的证明方法由 R. Lipschitz 作了改进(1869).

C. A. A. Briot 以及 J. C. Bouquet 研究了由常微分方程定义的函数的奇点,从而成为用函数论方法研究常微分方程的先驱. B. Riemann 对微分方程提出了新的观点(1857).在他的最初的论文的启发下, R. Fuchs 创立了复域中线性常微分方程论,奠定了这个理论的基础(1865). A. M. Legendre 把椭圆函数†, H. Poincaré 把自守函数†,同微分方程联系起来进行了研究.

继 Cauchy-Lipschitz 之后, G. Peano 首先对于只在 $y'=f(x,y)$的右端的连续性的假定下其解是否存在的问题作了研究 (1890),而 O. Perron 在更广的条件下作了证明(1915).关于初值问题†的解的唯一性,有 W. F. Osgood (1898),不久又有 Perron (1925)及日本的学者们作了研究,并且得到一个充分必要条件(→常微分方程的初值问题).

对具有周期系数的线性方程的研究是由 Ch. Hermite (1877), E. Picard (1881), G. Floquet (1883), G. W. Hill (1886) 等进行的. 例如,若系数都是以 ω 为周期的,则有 $y(x+\omega)=\lambda y(x)$ 这种形式的解. 系数是双周期函数†的情形也有类似的结果. 还有 G. Frobenius (1873), E. Landau (1920) 等把常微分方程形式地作因式分解处理, E. Picard 把 Galois 理论†引进线性常微分方程 (1883),而 J. Drach (1898), E. Vessiot (1903, 1904) 继续了这方面的工作.

为了把微分方程的解近似地表示出来, Poincaré 引进了渐近级数†的概念 (1886),而 A. M. Ляпунов (1892), J. C. C. A. Kneser (1896), J. Horn (1897), C. E. Love (1914) 等对此作了研究. 还有 Poincaré 开创了微分方程解的拓扑性质的研究, I. Bendixson (1900), Perron (1922, 1923), G. D. Birkhoff 等对此也作了研究(→常微分方程定性理论).

1890 年 Picard 应用逐次逼近法†证明解的存在,后来许多学者又把这种方法应用到其他

各个方面.

在线性常微分方程的解法上应用 Lagrange 关系式,从而导致 Volterra 型线性积分方程†的解法,也有人对此进行了研究.

关于在物理学应用方面所出现的边值问题, J. C. F. Sturm (1836), J. Liouville, L. Tonelli, Picard, M. Bôcher (1898, 1921), Birkhoff (1910, 1911)等作了特征值问题†的解的存在和唯一性等的研究,在这方面出现了按照作为给定边值问题的特征函数† 而得到的正交函数系†来展开给定函数的问题.D. Hilbert(1904)在他的积分方程论中以统一的方式处理了这些问题. 继续这个工作的很多学者论述了把常、偏微分方程的边值问题化为积分方程问题.

此外, Euler 和 Lagrange 创立了变分法†,并且把它引进了称为 Euler 方程†的微分方程问题(→变分法).

【偏微分方程】 偏微分方程是 J. d'Alembert (1744) 和 Euler 在处理关于流体力学的物理问题时开始研究的. 但是,最初研究一般理论的是 Lagrange 和 P. S. Laplace, 其后在十八至十九世纪主要是 G. Monge, A. M. Ampère, J. F. Pfaff, C. G. J. Jacobi, Cauchy, S. Lie 等所进行的研究,关于解的存在的 Cauchy-Ковалевская 存在定理是 C. B. Ковалевская 在 1875 年发表的.

在偏微分方程论中,由于同物理问题的密切联系,二阶线性方程从十八世纪以来就成为研究的主流. 椭圆型†、双曲型†和抛物型†三个类型的分类,以及关于各个的边值问题、初值问题†的解的研究,直到十九世纪都是研究的主要对象.

进入二十世纪以来,伴随粘性流体与可压缩流体的研究而兴起的非线性问题†,同超声速流体的研究相联系的上述三个类型混杂在一起的混合型†偏微分方程的研究等等,使得问题逐步复杂化了. 尤其是采用近年发展起来的泛函分析方法,使得研究方法也发生了非常大的变化. 特别是在量子力学的 Schrödinger 方程†以及更一般的发展方程†的研究上,这种方法都被有效地利用了.

还有,近年来由于电子计算机的飞速发展,使得各种方程都可以用数值求解,并且揭示了许多重要事实,因此数值解法的研究也正在发展成为一个新的方面.

【参】 关于常微分方程: [1] E. A. Coddington-N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955; [2] M. A. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954 (中译本: M. A. 那依马尔克, 线性微分算子,科学出版社,1964); [3] L. Bieberbach, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Springer, 1953; [4] G. Sansone, Equazioni differenziali nel campo reale I, II, Zanichelli, 1948—49; [5] P. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley, 1964; [6] 福原満洲雄,常微分方程式,岩波全書, 1950; [7] Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Наука, Москва, 1961(中译本: Л. С. 庞特里雅金, 常微分方程, 上海科学技术出版社, 1962).
关于偏微分方程: [8] E. Goursat, Cours d'analyse III, Gauthier-Villars, 1927; [9] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics I, II, Interscience, 1953, 1962 (中译本: R 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法 I, II, 科学出版社, 1958, 1977); [10] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, физматгиз, 第二版 1953 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基,偏微分方程讲义, 高等教育出版社, 1956); [11] C. Miranda, Equazioni alle derivate parziali di tipo ellіptico, Erg. d. Math., 1955 (英译本: Partial differential equations of elliptic type, Springer, 第二版: 1970); [12] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, 1963 (中译本: L. 霍曼德尔, 线性偏微分算子,科学出版社, 1979); [13] 溝畑茂,偏微分方程式論,岩波,1965; [14] 吉田耕作,微分方程式の解法,岩波全書, 1954; [15] 南雲道夫,近代的偏微分方程式論,現代数学講座,共立出版,1957.
其他→常微分方程,偏微分方程的[参].

常微分方程 [英 ordinary differential equation 法 équation différentielle ordinaire 德 gewöhnliche Differentialgleichung 俄 обыкновенное дифференциальное уравнение 日 常微分方程式]
设 x 为取实数值或者复数值的变量, y 为与 x 同样地取实数值或者复数值的 x 的函数,设 y 关于 x 是 n 次可微的,令 y 关于 x 的直到 n 阶的导数为 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$. 于是, $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 之间(关于 x 恒等地)成立的关系式

$$(1) \qquad f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为关于函数 $y(x)$ 的**常微分方程**. 这里,假定 (1) 的左端的 f 是 $n+2$ 个实变量或者复变量的函数,并且定义在 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的所考虑的取值范围内,通常假定 f 关于各变量具有

"某种程度的正则性",例如为 C^r 类 ($r=0, 1, \cdots, \infty$) 或具有(实)解析性† 等. 我们把满足(1)的函数 $y(x)$ 称为(1)的**解** (solution), 求解(1)的过程称为**解** (solve) (1). "常"微分方程是相对于偏微分方程而言的, 当 y 是两个以上的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数时,就把包含偏导数 $\partial y/\partial x_1, \partial y/\partial x_2, \cdots$ 的与(1)同样的等式称为**偏微分方程**(partial differential equation)(→偏微分方程).常微分方程与偏微分方程统称为**微分方程**(differential equation).因为本条只叙述常微分方程,所以下面我们略去"常"字. 当(1)的左端实际含有 $y^{(n)}$ 时, 即当 $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ 时, 就说(1)的**阶**(order)是 n, 若 f 是关于 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的有理整式,并且关于 $y^{(n)}$ 是 m 次的,就说(1)的**次数** (degree) 是 m. 特别,若 f 是 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的一次式,就称(1)是**线性的** (linear), 不是线性的微分方程就称为**非线性的** (nonlinear)(→线性常微分方程,非线性问题).

设 $\varphi(x, y, c_1\cdots, c_n)$ 在某一区域D上是 $n+2$ 个变量 $x, y, c_1, \cdots, c_n$ 的 C^n 类函数, $(x_0, y_0, c_1^0, \cdots, c_n^0)\in D$, 并且 $\varphi(x_0, y_0, c_1^0, \cdots, c_n^0)=0$, $\varphi_y(x_0, y_0, c_1^0, \cdots, c_n^0)\neq 0$, 于是 $\varphi(x, y, c_1^0, \cdots, c_n^0)=0$ 便定义一个 C^n 类的隐函数 $y(x)$, 满足条件 $y(x_0)=y_0$. 若在 $\varphi(x, y, c_1, \cdots, c_n)=0$ 中把 $c_1, \cdots, c_n$ 看做常数, 把左端关于 x 进行 n 次微分, 则得到关于 $x, y, y', \cdots, y^{(n)}, c_1, \cdots, c_n$ 的 n 个方程.从这 n 个方程与 $\varphi=0$ 消去 $c_1, \cdots, c_n$, 便得到(1)的形式的一个 n 阶微分方程. 反之,一个 n 阶微分方程的解通常可写成

$$(2)\qquad \varphi(x, y, c_1, \cdots, c_n)=0$$

的形式,它包含有 n 个**任意常数** (arbitrary constant) (也称为**积分常数** (integral constant)) $c_1, \cdots, c_n$. 这样含有 n 个任意常数的 n 阶微分方程的解称为**通解** (general solution), 在通解中对任意常数取定特殊值后所得到的 $\varphi(x, y, c_1^0, \cdots, c_n^0)=0$ 形式的解称为**特解** (particular solution). 此外,在微分方程中也还有不属于上述那几种的解(所谓**奇解**(singular solution))(例如 Clairaut 微分方程†,→公式 14 I).

【微分方程组】 考虑关于变量 x 的函数 $y_1, \cdots, y_n$ 的微分方程(与 (1) 同样的方程,但左端同时含有这些函数及它们的导数)的组,我们称之为(**常**)**微分方程组** (simultaneous (ordinary) differential equations);, 满足微分方程组的 x 的函数 $y_1, \cdots, y_n$, 称为它的**解**.它的左端所含导数中的最高阶数,称为它的**阶**(order).

最常考虑的是下列形式的一阶微分方程组:

$$(3)\qquad y_i'=f_i(x, y_1, \cdots, y_n),\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

对于形式(1)的微分方程,如果令 $y=y_1$, $y'=y_2, \cdots, y^{(n-1)}=y_n$, 且将(1)就 $y^{(n)}$ 解出并写成 $y^{(n)}=y_n'=f_n(x, y_1, \cdots, y_n)$, 则(1)便成为形式(3)中令 $f_1=y_2, f_2=y_3, \cdots, f_{n-1}=y_n$ 的特殊情况. 因为用同样的方法也完全可以把一般的微分方程组化为 (3) 的形式,所以(3)称为微分方程的**标准型** (normal form).

【几何解释】 对于实变量的情况,(3)具有如下的意义. 设 I 表示开区间 $a<x<b$, D 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 内某区域. 设

$$(4)\qquad y_i=\varphi_i(x, c_1, \cdots, c_n),\quad i=1, 2, \cdots n$$

是对 $(x, c_1, \cdots, c_n)\in I\times D$ 定义的 C^1 类函数,对 $x_0\in I$ 由 $y_i=\varphi_i(x_0, c_1, \cdots, c_n)$ ($i=1, 2, \cdots, n$)所确定的、D在 $(y_1, \cdots, y_n)$ 空间的象记为 $\mathfrak{D}(x_0)$, 假定对固定的 $x_0\in I$ 在D上有 $\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)/\partial(c_1, \cdots, c_n)\neq 0$. 于是,对 $x=x_0$ 以及 $\mathfrak{D}(x_0)$ 的任意点 $(y_1^0, \cdots, y_n^0)$, $c_1\cdots, c_n$ 可以看作为在 $(y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 的邻域中定义的 $y_1, \cdots, y_n$ 的函数, 且有 $y_i'=\varphi_i'(x, c_1, \cdots, c_n)=f_i(x, y_1, \cdots, y_n)$ ($i=1, 2, \cdots, n$). 也就是 $y_1, \cdots, y_n$ 满足形式(3)的微分方程组. 另一方面,(4)是在 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 的空间 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中含有 n 个参数 $c_1, \cdots, c_n$ 的 C^1 类曲线族,而 $y_1', \cdots, y_n'$ 给出了它的切线向量(物理意义就是,给出了在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的定常流的各点的流向与速度). 求解 (3) 就是要找出在 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中给定这样的切线向量的 C^1 类曲线(物

理意义就是要找出在各点上具有给定的流向与速度的定常流). 像(4)那样的含有 n 个参数的解称为(3)的**通解**,参数取特殊值后所得到的解称为(3)的**特解**.

从这个意义推断,若 $x_0 \in I$, $(y_1^0, \cdots, y_n^0) \in \mathfrak{D}(x_0)$, 则通过 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 的(3)的特解一般只存在一个. 求这个解的问题, 也就是求对 $x = x_0$ 使得 $y_i(x_0) = y_i^0$ 的(3)的解的问题, 称为关于(3)的**初值问题** (initial value problem) (→常微分方程的初值问题).

【解法】 求解微分方程有着各种方法, 而对所谓"求解"的意义也有多种解释. 进行有限次不定积分来求解的称为**求积法** (quadrature), 这方法对某些特殊形式的方程是有效的 (→公式14 I). S. Lie 使用 Lie 变换群对求积法给出了理论根据(→变换群,公式 14 III). 还有许多其它的方法,例如,对于 (1) 假设 y 可被展成 x 的幂级数 $\Sigma a_\nu (x-a)^\nu$的形式,把它代入(1)来确定系数 a_ν 的方法 (级数解法), 用渐近级数[†]的方法, 利用 Laplace 变换[†]、Fourier 变换[†]等的方法,摄动[†]法,数值解法(→常微分方程的数值解法)等等.

在历史上对微分方程的解法来说, 象这样地, 对不管什么形式的方程都去求解的明显表达式,曾是研究的重点. 但是近来,对解的性质的研究,特别是解的存在定理与唯一性定理,其重要性已被认识了.例如,假设已求得具有某种性质 A 的解, 如果能证明其解的唯一性以及具有性质 A, B 的解的存在性,那末便知所求的解必须具有性质 B. 这样一来, 微分方程的解析性或者拓扑性的研究, 将有效地应用在解法上 (→常微分方程的初值问题,常微分方程的边值问题,常微分方程的渐近性质,常微分方程定性理论).

【参】 [1] 福原满洲雄,常微分方程式,岩波全書,1950; [2] K. O. Friedrichs, Lectures on advanced ordinary differential equations, Gordon and Breach, 1965; [3] E. Hille, Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1968. 其他→常微分方程的初值问题的【参】.

常微分方程的初值问题 [英 initial value problem of ordinary differential equation 法 problème de Cauchy d'équation différentielle ordinaire 德 Anfangswertproblem der gewöhnlichen Differentialgleichungen 俄 начальная задача обыкновенного дифференциального уравнения 日 常微分方程式の初期值問題] 考虑常微分方程组

$$(1)\qquad dy_i/dx = f_i(x, y_1, \cdots, y_n),\quad i = 1, \cdots, n.$$

A. L. Cauchy 首先证明了: 如果 f_i 和 $\partial f_i/\partial y_k$ 都是连续的,那末(1)的满足 $y_i(a) = b_i$ $(i=1, \cdots, n)$ 的解是唯一存在的. 条件 $y_i(a) = b_i$ $(i=1, \cdots, n)$称为**初始条件** (initial condition), $a, b_1, \cdots, b_n$ 称为**初值** (initial values). 求(1)的满足初始条件的解的问题称为**初值问题**或 **Cauchy 问题** (Cauchy's problem). 如果把$(x, y_1, \cdots, y_n)$ 看作为 $n+1$ 维空间中的点,那末(1)的解可以表为 $n+1$ 维空间中的曲线. (1)的解所表示的曲线称为**解曲线** (solution curve) 或**积分曲线** (integral curve). 一个解满足初始条件这种说法和积分曲线通过点 $(a, b_1, \cdots, b_n)$ 这种说法是一个意思.

由于一般的高阶常微分方程可以用增加应变量的个数的办法,将它化为(1)的形式的方程组, 因此关于 (1) 的定义和定理等可以直接搬到高阶方程的情形. 例如, 对于常微分方程 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$, 条件 $y(a) = b$, $y'(a) = b', \cdots, y^{(n-1)}(a) = b^{(n-1)}$ 是初始条件, $a, b, b', \cdots, b^{(n-1)}$ 是初值. 如果 f 和 $\partial f/\partial y^{(k)}$ 都是连续的, 那末满足初始条件的解是唯一存在的.

如果 (1) 的右端 f_i 是连续的, 那末满足初始条件 $y_i(a) = b_i$ 的解就满足

$$y_i(x) = b_i + \int_a^x f_i(x, y_1(x), \cdots, y_n(x))dx,\quad i = 1, \cdots, n,$$

其逆亦成立. 在 f_i 不是连续的情形, 我们把满足这个积分方程的连续函数 $y_i(x)$定义为(1)的初值问题的解.

为了简单起见,我们用向量记号: $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \cdots, f_n)$, 并用 $\|\boldsymbol{y}\|^2 = y_1^2 +$

$\cdots + y_n^2$. 于是，方程(1)简单地写成 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$.

【**实变量情形**】 首先叙述在实变量范围内的主要定理.

【存在定理】 **存在定理**(existence theorem): 设 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 在 $|x - a| \leqslant r$, $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}\| \leqslant \rho$ 中连续，而且有界 $\|\boldsymbol{f}\| \leqslant M$，则，(1) 的满足初始条件 $\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}$ 的解在区间 $|x - a| \leqslant \min(r, \rho/M)$中存在.这个定理的证明方法有两个:一个是用 **Cauchy 折线法** (Cauchy polygon), 另一个是用关于函数空间的不动点定理[†]. 从这个存在定理可以推出: 如果 $\boldsymbol{f}$ 在 $n + 1$ 维空间的一个域D中连续,那末通过D的任意点$(a, \boldsymbol{b})$的解在 $x = a$ 的附近存在. 如果 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}_1(x)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}_2(x)$ 分别为在区间 I_1, I_2 中的解, $I_1 \subset I_2$ 且 $\boldsymbol{\varphi}_1(x) = \boldsymbol{\varphi}_2(x)(x \in I_1)$，那末就称 $\boldsymbol{\varphi}_2(x)$ 为 $\boldsymbol{\varphi}_1(x)$ 的**开拓** (prolongation). 由于所给出的解可以尽可能地开拓,直到不能再开拓时为止，我们就得到一个解. 对于这样一个解，当 x 趋近于它的定义区间的任一端点时，解曲线就趋近于D的边界.

【唯一性定理】 只是由 $\boldsymbol{f}$ 的连续性,并不能导出初值问题的解的唯一性. 使得解至多只有一个的充分条件称为**唯一性条件** (uniqueness condition). 给出这种条件的**唯一性定理** (uniqueness theorem) 已知有很多种.

Lipschitz 条件 (Lipschitz's condition):

$$\|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{z})\| \leqslant L\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|,$$

$$(L > 0 \text{ 为常数})$$

是最简单的唯一性条件之一. 在 $\boldsymbol{f}$ 是连续的且满足 Lipschitz 条件的情形下，经常用首先由 C. E. Picard 所考虑的**逐次逼近法** (method of successive approximation)来证明解的存在性. 这个方法是这样的: 取 $\boldsymbol{y}_0(x)$为适当的连续函数，例如，取 $\boldsymbol{y}_0(x) = \boldsymbol{b}$，定义 $\boldsymbol{y}_k(x)(k = 1, 2, \cdots)$ 为 $\boldsymbol{y}_k(x) = \boldsymbol{b} + \int_a^x \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_{k-1}(x))dx$, 于是，当 $k \to \infty$ 时, $\boldsymbol{y}_k(x)$ 是一致收敛的,而且它的极限函数 $\boldsymbol{y}(x)$ 就是(1)的满足 $\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}$ 的解.

当 $\boldsymbol{f}$ 连续时，岡村博给出了使初值问题的解是唯一的充分必要条件 ([2]). 当 $\boldsymbol{f}$ 在D中连续时,对D的任意一点,为了使从这点向右走出的解曲线是唯一的，其充分必要条件是: 存在这样的函数 $\Phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$:$\Phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$是对$(x, \boldsymbol{y}) \in D$, $(x, \boldsymbol{z}) \in D$ 那样的$(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$所定义的 C^1 类函数，当 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$ 时 $\Phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$，当 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z}$ 时 $\Phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) > 0$，而且

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})f_i(x, \boldsymbol{y}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}\Phi(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})f_i(x, \boldsymbol{z}) \leqslant 0.$$

【Perron 定理】 对于一个一阶方程 $y' = f(x, y)$，下面的定理 (**Perron 定理**)成立. 设 $\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ 在 $\alpha \leqslant x < \beta$ 中是有右导数的连续函数，且 $\underline{\omega}(x) \leqslant \overline{\omega}(x)$. $f(x, y)$ 在 $D:\alpha \leqslant x < \beta$, $\underline{\omega}(x) \leqslant y \leqslant \overline{\omega}(x)$ 中连续，而且有 $D^+\underline{\omega}(x) \leqslant f(x, \underline{\omega}(x))$, $D^+\overline{\omega}(x) \geqslant f(x, \overline{\omega}(x))$ (D^+ 是右微分),于是，对于任意的 $(a, b) \in D$，在 $a \leqslant x < \beta$ 中存在一条从(a, b)向右走出的解曲线. 事实上,如果令Ω表示开集$-\infty < x < \beta$, $|y| < \infty$，那末D在Ω中是闭的，而且在从D的各点向右走出的解曲线中存在一条可以到达Ω的边界的解曲线.

Perron 定理由福原满洲雄和南雲道夫作了如下的推广.设D在开集Ω中是闭的，当$\boldsymbol{f}$在D中连续时，使得从D的各点$(a, \boldsymbol{b})$向右走出的(1)的解存在的充分必要条件是: 在D中存在一个点列$\{(a_k, \boldsymbol{b}_k)\}$,满足 $a_k \downarrow a$ 和 $(\boldsymbol{b}_k - \boldsymbol{b})/(a_k - a) \to \boldsymbol{f}(a, \boldsymbol{b})$. 这时,每一个解都可以向右开拓到$\Omega$的边界. 设 $S(\boldsymbol{y})$ 是在 n 维空间中定义的正齐次的次加性函数，$\omega(x)$ 是在区间 $\alpha \leqslant x < \beta$ 中定义的有右导数的连续函数. 为了对$S(\boldsymbol{y}) \leqslant \omega(x)$ 给出具有上述性质的D，只要对 $\|\boldsymbol{y}\| = \omega(x)$ 有 $D^+\omega(x) \geqslant S(\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}))$.

对(1)的任意解 $\boldsymbol{\varphi}(x)$，当从 $S(\boldsymbol{\varphi}(a)) \leqslant \omega(a)$可以导出 $S(\boldsymbol{\varphi}(x)) \leqslant \omega(x)(x \geqslant a)$(假设两端的函数都已定义)时,就称$\omega(x)$为(1)的右的**长函数** (superior function). $\omega(x)$ 成为(1)的右的长函数的充分条件是不等式 $D^+\omega(x) >$

$S(\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}))$（对 $\|\boldsymbol{y}\| = \omega(x)$）成立（两边的函数都有意义）. 如果对函数 $F(x, y)$, $F(x, S(\boldsymbol{y})) > S(\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}))$ 成立（两端都有意义），那末 $y' = F(x, y)$ 的任一解是 (1) 的右的长函数. 根据这个事实，(1)的解 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 的性状可以从它和 $S(\boldsymbol{\varphi}(x))$, $\omega(x)$ 作比较而大概地知道. 这样形式的定理称为**比较定理** (comparison theorem).

如果已知 (1) 的解是唯一的，那末满足 $D^+\omega(x) \geqslant S(\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}))$（对 $S(\boldsymbol{y}) = \omega(x)$）的 $\omega(x)$ 是(1)的右的长函数. 反之，从比较定理可以导出非常一般的唯一性条件. 我们叙述其中之一. 设 $G(x, y)$ 在 $\alpha < x < \beta$, $0 \leqslant y \leqslant r(x)$ 中连续而且 $G(x, 0) = 0$. 假设满足 $y = o(r(x))$ $(x \to \alpha + 0)$ 的 $y' = G(x, y)$ 的解只限于 $y = 0$，而且不等式

$S(\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)) \leqslant G(x, S(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2))$

成立. 于是，(1) 的满足 $S(\boldsymbol{\varphi}_1(x) - \boldsymbol{\varphi}_2(x)) = o(r(x))$ $(x \to \alpha + 0)$的解 $\boldsymbol{\varphi}_1(x)$ 和 $\boldsymbol{\varphi}_2(x)$ 是恒等的. 特别是，如果 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 在 $(a, \boldsymbol{b})$ 上是连续的，取 $G(x, y) = y/(x - a)$，就得到南雲的条件 $(x - a)S(\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_1) - \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}_2)) \leqslant S(\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2)$.

设 $f(x, y)$, $\underline{\omega}(x)$, $\bar{\omega}(x)$ 满足和 Perron 定理中一样的条件. G. Peano 证明了：满足 $y(\alpha) = b$ $(\underline{\omega}(\alpha) \leqslant b \leqslant \bar{\omega}(\alpha))$ 的解中存在一个**最大解** (maximum solution) $\bar{\varphi}(x)$ 和一个**最小解** (minimum solution) $\underline{\varphi}(x)$，而且对 $\alpha \leqslant x < \beta$, $\underline{\varphi}(x) \leqslant y \leqslant \bar{\varphi}(x)$ 中的任意一点，有满足同样初始条件的解曲线通过. 这个定理被福原推广如下：设 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 在 $D: \alpha \leqslant x \leqslant \beta$, $\|\boldsymbol{y}\| < \infty$ 上连续而且有界. 设 C 是 D 中的一个连续统，如果令 $\mathfrak{F}(C)$ 表示从 C 的各点出发的解的全体，那末 $\mathfrak{F}(C)$ 是函数空间 $C([\alpha, \beta])$ 的连续统. 从这里就导出了所谓 **Kneser-南雲定理**，这个定理是这样的：$\mathfrak{F}(C)$ 所充满的 D 内的集合和超平面 $x = \xi$ 的交是一个连续统. 如果 C 是在超平面 $x = \alpha$ 内，那末存在一个解曲线连接超平面 $x = \alpha$ 和 $x = \beta$，并且经过 $\mathfrak{F}(C)$ 所充满的集合的边界点. 这相当于 Perron 定理中的最大解和最小解.

【含参数的方程】 考虑含有参数的方程

(2) $\quad \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)$,

它的右端 $\boldsymbol{f}$ 关于 $(x, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{\lambda})$ 是连续的，设解的唯一性成立. 如果满足初始条件 $\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}$ 的解是 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(x, a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})$，那末 $\boldsymbol{\varphi}(x, a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})$ 在它的定义域中是连续的. 如果 $\partial \boldsymbol{f}/\partial y_k$ $(k = 1, \cdots, n)$ 是连续的，那末 $\boldsymbol{\varphi}(x, a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})$ 关于 $\boldsymbol{b}$ 是连续可微函数. 令 $\partial y_j/\partial b_k = z_{jk}$, z_{jk} 就满足线性微分方程组和初始条件:

$$\frac{d}{dx} z_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_l}\right) z_{lk}, \quad z_{jk}(a) = \delta_{jk},$$

这里 $(\partial f_j/\partial y_l)$ 是指 $\dfrac{\partial f_j}{\partial y_l}(x, \boldsymbol{\varphi}(x, a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\lambda})$.

当然，$z_j = \partial y_j/\partial a$ 满足同样的微分方程和初始条件 $z_j(a) = -f_j(a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})$. 此外，若 $\partial \boldsymbol{f}/\partial \lambda_l$ 也是连续的，那末 $\boldsymbol{\varphi}(x, a, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda})$ 关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 也是连续可微的，若令 $\partial y_j/\partial \lambda_k = w_{jk}$，那末 w_{jk} 就是

$$\frac{d}{dx} w_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_l}\right) w_{lk} + \left(\frac{\partial f_j}{\partial \lambda_k}\right),$$
$$w_{jk}(a) = 0$$

的解. 这些线性方程组被称为 (1) 的**变分方程** (variation equation).

还有，C. Carathéodory 证明了，如果(1)的右端固定 x 时关于 $\boldsymbol{y}$ 是连续的，固定 $\boldsymbol{y}$ 时关于 x 是可测的，那末解就存在.

设 $\boldsymbol{f}$ 是连续的且满足 Lipschitz 条件，如果 $\boldsymbol{z}(x)$ 满足 $\boldsymbol{z}(a) = \boldsymbol{b}$ 和

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i'(x) - f_i(x, \boldsymbol{z}(x))| \leqslant \varepsilon(x),$$

那末对于满足 $\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}$的(1)的解 $\boldsymbol{y}(x)$，有

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i(x) - y_i(x)| \leqslant \left|\int_a^x \varepsilon(x) e^{L|x-t|} dt\right|$$

成立. 这个式子给出了 (1) 的近似解的估计.

【复变量情形】 设 $x, y_1, \cdots, y_n$ 都是复变量. 如果 $\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$ 在 $(a, \boldsymbol{b})$ 的邻域中关于 $(x, \boldsymbol{y})$ 是全纯的，那末存在唯一的解 $\boldsymbol{y}(x)$，在 $x = a$ 为全纯的，且满足$\boldsymbol{y}(a) = \boldsymbol{b}$. 这个定理可以用逐次逼近法或不动点定理来证明. Cauchy 利用**强级数** (majorant series) 证明这个定理，这

个方法称为**强级数法**(method of majorant). 考虑 $y'=f(x,y)$, 设 $f(x,y)=\sum a_{jk}(x-a)^j(y-b)^k$, 求形如 $y=\sum c_n(x-a)^n$ 的全纯解. 将它代入方程两端, 根据待定系数法可以逐步求出 c_n. 假定对 $|x-a|<r$, $|y-b|<\rho$, f是全纯的, $|f|<M$, 考虑方程

$$\frac{dY}{dx}=\frac{M}{(1-(x-a)/r)(1-(Y-b)/\rho)}$$

的满足 $Y(a)=b$ 的解 $Y(x)=\sum C_n(x-a)^n$, 于是有 $C_n\geqslant|c_n|$, 即 $\sum C_n(x-a)^n$ 是 $\sum c_n(x-a)^n$ 的强级数.

设 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$ 在 $(a,\boldsymbol{b})$ 内是全纯的, 对于当 $x\to a$ 时 $\boldsymbol{y}(x)\to\boldsymbol{b}$ 的解, 下面的定理成立. 设C是以 a 为端点的曲线, 并设(1)的解 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 在C上除 a 外是全纯的, 如果在C上存在一个点列 $\{a_k\}$, 当 $a_k\to a$ 时有 $\boldsymbol{\varphi}(a_k)\to\boldsymbol{b}$, 那末 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 在 a 也是全纯的.

根据复解析函数的一致性定理†, 当 $\boldsymbol{f}$ 没有奇点时可以保证(1)的解的解析开拓仍然是(1)的解. 设$\boldsymbol{\varphi}(x)$是(1)的在以 a 为端点的光滑曲线 $x=\chi(t)$ $(0\leqslant t\leqslant t_0,\ \chi(0)=a)$ 上满足 $\boldsymbol{y}(a)=\boldsymbol{b}$ 的全纯解, 于是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(\chi(t))$ 对于 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 是

(3) $$\boldsymbol{y}'=\chi'(t)\boldsymbol{f}(\chi(t),\boldsymbol{y})$$

的解, 且满足 $\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{b}$. 反之, 如果对于 $0\leqslant t\leqslant t_0$, 存在 (3) 的满足 $\boldsymbol{y}(0)=\boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\phi}(t)$, 且 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y})$在$(\chi(t),\boldsymbol{\phi}(t))$上是全纯的, 那末(3)的满足 $\boldsymbol{y}(a)=\boldsymbol{b}$ 的解 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 在C上是全纯的, 而且有 $\boldsymbol{\phi}(t)=\boldsymbol{\varphi}(\chi(t))$ $(0\leqslant t\leqslant t_0)$.

设 $f(x,y)=f_1(x,y)/f_2(x,y)$, 其中 f_1, f_2 在 (a,b) 上是全纯的. 如果 $f_1(a,b)\neq0$, $f_2(a,y)\not\equiv0$, $f_2(a,b)=0$, 那末 $y'=f(x,y)$有唯一的解, 使得当 $x\to a$ 时 $y\to b$, 而且在 $x=a$ 的邻域中这个解可以展开成收敛的 Puiseux 级数† $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^{n/r}$.

设(1)的满足初始条件 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ 的解为 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0)$, 如果 $\boldsymbol{f}$ 在 $(a,\boldsymbol{b})$ 上是全纯的, 那末在 $x=a$, $x_0=a$, $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{b}$ 的邻域中, $\boldsymbol{\varphi}$ 是 $(x,x_0,\boldsymbol{y}_0)$的全纯函数. 如果 $\boldsymbol{f}(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 在 $(a,\boldsymbol{b},\boldsymbol{\lambda}_0)$ 是全纯的, 那末(2)的解 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 在 $x=a$, $x_0=a$, $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}_0$ 是全纯的. 当 x 是实变量, $\boldsymbol{y}$ 是复变量时, 如果 $\boldsymbol{f}$ 关于 $(x,\boldsymbol{y})$ 是连续的, 关于 $\boldsymbol{y}$ 是全纯的, 那末 $\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0)$ 关于 $\boldsymbol{y}_0$ 是全纯的. 如果 $\boldsymbol{f}$ 关于 $(x,\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 是连续的, 关于 $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\lambda})$ 是全纯的, 那末 $\boldsymbol{\varphi}(x,x_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 关于 $(\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\lambda})$ 是全纯的.

【参】[1] 福原満洲雄,常微分方程式,岩波全書1950; [2] 岡村博,常微分方程式序説,河出,1950; [3] E. Kamke, Differentialgleichungen reeller Funktionen, Akademische Verlag., 1930; [4] E.A. Coddington-N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955; [5] G. Sansone, Equazioni differenziali nel campo reale I, II, Nicola Zanichelli Editore, 1948, 1949; [6] K. O. Friedrichs, Lectures on advanced ordinary differential equations, Gordon and Breach, 1965; [7] E. Hille, Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1968.

常微分方程的边值问题 [英 boundary value problem of ordinary differential equations 法 problème aux limites des équations différentielles ordinaires 德 Randwertaufgabe der gewöhnlichen Differentialgleichungen 俄 граничная задача обыкновенных дифференциальных уравнений 日 常微分方程式の境界値問題] 考虑常微分方程

(1) $$f(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$$

对于属于区间 I 及 $\bar{I}$ 的点 $a_1,\cdots,a_k$ 以及 nk 个值 $y(a_i),y'(a_i),\cdots,y^{(n-1)}(a_i)(i=1,\cdots,k)$ 已给出了一些条件. 求在区间 I 上的(1)的满足这些条件的解的问题称为**常微分方程(1)的边值问题**. 解所满足的这些条件称为**边界条件** (boundary conditions). 在 $k=2$, a_1, a_2 是区间 I 的端点的情形, 称为**两点边值问题** (two points boundary value problem), 这是研究的主要对象. 对于常微分方程组, 可以同样定义边值问题.

【线性情形】 对于

$$L[y]=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y,$$

系数 $p_k(x)$ 是在有界闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的 C^{n-k} 类复值函数, 特别是在 $[a,b]$ 上 $p_0(x)\neq$

0. 我们用

$$U_i[y]=\sum_{j=1}^{n}M_{ij}y^{(j-1)}(a)+\sum_{j=1}^{n}N_{ij}y^{(j-1)}(b),\quad i=1,\cdots,m$$

定义了m个**线性边缘算子**(linear boundary operators) $U_1,\cdots,U_m$. 给定函数$f(x)$和复常数γ_i，线性边值问题

(2) $$L[y]=f(x),\ U_i[y]=\gamma_i;\quad i=1,\cdots,m$$

是一个两点边值问题. 当$f\equiv 0$, $\gamma_i=0$时(2)称为齐次的,否则称为非齐次的. 设$L^*[y]$是$L[y]$的伴随微分式†, $U_i^*[y](i=1,\cdots,m^*)$是m^*个边缘算子. 对于满足边界条件$U_i[y]=0$ $(i=1,\cdots,m)$的任意的C^n类函数$y(x)$和满足边界条件$U_i^*[y^*]=0$ $(i=1,\cdots,m^*)$的任意的C^n类函数$y^*(x)$，当等式$\int_a^b L[y]\bar{y}^*dx=\int_a^b y\overline{L^*[y^*]}dx$成立时，就称$U_i^*[y]=0$ $(i=1,\cdots,m^*)$为$U_i[y]=0$ $(i=1,\cdots,m)$的**伴随边界条件**(adjoint boundary condition)，并称

(3) $$L^*[y]=0,\ U_i^*[y]=0;\quad i=1,\cdots,m^*$$

为

(4) $$L[y]=0,\ U_i[y]=0;\ i=1,\cdots,m$$

的**伴随边值问题**(adjoint boundary value problem). 当$L[y]=L^*[y]$且条件$U_i[y]=0$等价于条件$U_i^*[y]=0$时，就称边值问题(3)为**自伴的**(self-adjoint).

含有复参数λ的边值问题

(5) $$L[y]=\lambda y,\ U_i[y]=0,$$

只有当λ取特定的值时,才有不恒等于0的解. 使得具有非零解的λ的值称为(5)的**特征值**(proper value, eigenvalue)，所对应的解称为**特征函数**(proper function). 如果λ不是特征值，那末存在唯一的函数$G(x,\xi,\lambda)$,使得$L[y]=\lambda y+f$和$U_i[y]=0$等价于$y=\int_a^b G(x,\xi,\lambda)f(\xi)d\xi$. 这样的函数$G(x,\xi,\lambda)$称为(5)的**Green 函数**(Green function). 如果$\lambda=0$不是特征值,那末令$G(x,\xi)=G(x,\xi,0)$, (5)就和积分方程

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi$$

等价. (5)的Green函数$G(x,\xi,\lambda)$和对应于(3)的Green函数$G^*(x,\xi,\lambda)$之间存在关系式$G(x,\xi,\lambda)=\bar{G}^*(\xi,x,\bar{\lambda})$. 如果(4)是自伴的,那末就有下面四个结论: i) 特征值全是实数，特征值的集合不是有限的就是可数的离散集. ii) 对应于不同的特征值的特征函数是正交的. iii) 如果$\{\varphi_n\}$是由特征函数所作的一个正规正交系†,而且不再有和它线性无关的特征函数，那末$\{\varphi_n\}$就是在$[a,b]$上由平方可积函数所做成的Hilbert空间中的一个完备的正规正交系. 因此，对于$f\in L_2(a,b)$的Fourier级数†展开$f=a_1\varphi_1+a_2\varphi_2+\cdots$, Parseval等式†成立. iv) 如果$f$是满足$U_i[f]=0$的$C^n$类函数,那末$f$的Fourier展开在$[a,b]$上一致收敛于$f$.

特别是,对二阶微分方程的边值问题

$$(p(x)y')'+(q(x)+\lambda r(x))y=0,$$
$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\quad \gamma y(b)+\delta y'(b)=0,$$

称为**Sturm-Liouville 问题**(Sturm-Liouville problem). 如果$p(x)$, $q(x)$, $r(x)$在$[a,b]$上是连续的,而且$p(x)>0$, $r(x)>0$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$均为实常数，那末 i) 特征值组成一个发散到$+\infty$的序列$\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$. ii) 对应于$\lambda_n$的特征函数$\varphi_n(x)$在$a<x<b$中恰好有$n$个零点. 而且在$\varphi_n(x)$的相邻两个零点之间存在有$\varphi_{n-1}(x)$的一个零点. iii) $\{\varphi_n(x)\}$在$a\leqslant x\leqslant b$上组成具有权函数$r(x)$的一个正交函数系: $\int_a^b r(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=0(m\neq n)$.

当系数$p_0(x),\cdots,p_n(x)$是定义在开区间$-\infty\leqslant a<x<b\leqslant+\infty$中的$C^{n-k}$类函数时，$L$是定义在$a<x<b$中的平方可积函数所构成的Hilbert空间中的算子. 关于这方面的理论也已建立(→特征值问题).

【非线性情形】 非线性方程的边值问题的研究比起线性情形要困难得多. 没有一般的理

论，只对特殊形式的方程得到一些结果．例如，对于二阶方程

(6)　$$y''=f(x,y,y')$$

和边界条件 $y(a)=A$，$y(b)=B$ 的边值问题，证明了下述定理：假设 $f(x,y,y')$ 对 $a\leqslant x\leqslant b$，$\underline{\omega}(x)\leqslant y\leqslant\bar{\omega}(x)$，$-\infty<y'<+\infty$ 是连续的，且 $|f(x,y,y')|\leqslant M(1+y'^2)$，$\underline{\omega}''(x)>f(x,\underline{\omega}(x),\underline{\omega}'(x))$，$\bar{\omega}''<f(x,\bar{\omega}(x),\bar{\omega}'(x))$，$\underline{\omega}(a)\leqslant A\leqslant\bar{\omega}(a)$，$\underline{\omega}(b)\leqslant B\leqslant\bar{\omega}(b)$．于是 (6) 存在一个解，满足 $y(a)=A$，$y(b)=B$ 且在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有 $\underline{\omega}(x)\leqslant y\leqslant\bar{\omega}(x)$．如果 $f(x,y,y')$ 是关于 y 的单调增加函数，那末解是唯一的．而且，在适当的条件下，解可以用逐次逼近法求得．

在流体力学中出现的边值问题

$$y'''+2yy''+2\lambda(k^2-y'^2)=0,$$

$$y(0)=y'(0)=0,\ y'(x)\to k\ (x\to\infty),$$

当 $\lambda\geqslant 0$ 时解是存在的．如果 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，那末解是唯一的．这里 $k>0$，$\lambda\geqslant 0$ 是常数．

对于微分方程组

$$y_j'=f_j(x,y_1,\cdots,y_n),\ j=1,\cdots,n$$

求满足 $y_j(a_j)=b_j$ 的解的问题称为**福原问题** (Hukuhara's problem)．特别是，当所有 a_j 都相同时，就成为初值问题．关于 n 阶方程

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

求满足 $y(a_j)=b_j$ 的解的问题，经适当变换后可化为福原问题．相当于关于初值问题的 Perron 定理†，有下面的存在定理．设 $\underline{\omega}_j(x)$，$\bar{\omega}_j(x)$ 在 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上是右的和左的可微函数，且 $\underline{\omega}_j(x)\leqslant\bar{\omega}_j(x)$．$f_j(x,y_1,\cdots,y_n)$ 对 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，$\underline{\omega}_j(x)\leqslant y_j\leqslant\bar{\omega}_j(x)$ 是连续的；当 $y_j=\bar{\omega}_j(x)$，$\underline{\omega}_\nu(x)\leqslant y_\nu\leqslant\bar{\omega}_\nu(x)$ $(\nu\neq j)$ 时，$(x-a_j)(D^\pm\bar{\omega}_j(x)-f_j(x,y_1,\cdots,y_n))\geqslant 0$；当 $y_j=\underline{\omega}_j(x)$，$\underline{\omega}_\nu(x)\leqslant y_\nu\leqslant\bar{\omega}_\nu(x)$ $(\nu\neq j)$ 时，有 $(x-a_j)(D^\pm\underline{\omega}_j(x)-f_j(x,y_1,\cdots,y_n))\leqslant 0$；而且 $\underline{\omega}_j(a_j)\leqslant b_j\leqslant\bar{\omega}_j(a_j)$；于是对 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 存在一组解 $y_j=y_j(x)$，满足 $y_j(a_j)=b_j$ 和 $\underline{\omega}_j(x)\leqslant y_j(x)\leqslant\bar{\omega}_j(x)$．这个问题由福原满洲雄应用于对常微分方程的奇点的研究．

【参】［1］南雲道夫，写像度と存在定理，河出，1948；［2］吉田耕作，積分方程式，岩波，1950；［3］E. A. Coddington-N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955；［4］M. A. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, 1954 (中译本：M. A. 那依马尔克，线性微分算子，科学出版社，1964)；［5］K. O. Friedrichs, Lectures on advanced ordinary differential equations, Gordon and Breach, 1965；［6］E. Hille, Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1968.

常微分方程定性理论［英 qualitative theory of ordinary differential equations　法 théorie qualitative des équations différentielles ordinaires　德 qualitative Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen　俄 качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений　日 常微分方程式の定性的理論］设 $f_1(x^1,\cdots,x^n)$，$\cdots$，$f_n(x^1,\cdots,x^n)$ 是在 $\boldsymbol{R}^n$ 的域 X 上单值连续函数．考虑关于自变量 t（称为时间参数）的常微分方程的自治系统†（→非线性振动）

(1)　$$dx^i/dt=f_i(x^1,\cdots,x^n),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

(1)的不可能开拓（不能继续开拓）的解（→常微分方程的初值问题）定义 X 中一条曲线（或弧）．我们称它为(1)的**轨道** (orbit, trajectory)，**解曲线** (solution curve)，**积分曲线** (integral curve)，**特征曲线** (characteristic curve) 等．在由这种曲线的全体或一部分所组成的族具有的性质中，如果有这样的性质：在把 X 变到自身的 i) 同胚映射，ii) 保测变换†，iii) C^r 类的变换或 iv) 解析变换之下是不变的，那末这样的性质称为(1)的**定性性质** (qualitative property)．例如，如果 f_i 满足 Lipschitz 条件†那样的适当条件，那末在给定时间 t_0 通过 X 的给定点 x_0 的轨道只有一个．一般，我们假定了这个唯一性条件†．不可能开拓的解不一定是对 $\boldsymbol{R}=(-\infty,\infty)$ 全体定义的，但是已知可以适当地取参数 t 来修正，因而并不妨碍对许多问题可以这样来考虑，所以不失一般性，可以假定，所有不可能开拓的解都定义在$(-\infty,\infty)$上．这时，我们称(1)在 X 上定义了一个**流** (flow)，**动力系统** (dynamical system)或**作用** (action)．H. Poincaré

最早指出了在研究这样的微分方程组的轨道的性质时，首先运用拓扑方法考查解曲线的定性性质的重要性．Poincaré 主要研究了二维情形的方程组，得到了许多重要的结果．这可以说是定性理论的开始．对于这样的定性性质的研究，最好脱离微分方程组重新给予流以一个纯粹拓扑的定义．

【拓扑动力学】 一般令 X 是一拓扑空间†，如果映射 $\pi: X\times\boldsymbol{R}\to X$ 满足下面一组公理，则称 (X, π) 在 X 上定义了一个**连续流** (continuous flow)（简称为**流**），**动力系统或作用**．i) 恒等公理：$\pi(x,0)=x$；ii) 加法公理：$\pi(\pi(x,t_1),t_2)=\pi(x,t_1+t_2)$；iii) 连续性公理：$\pi$ 在 $X\times\boldsymbol{R}$ 上是连续的．由(1)所定义的流，是满足这一组公理的，因而是关于这个抽象组的一个说明．如果在上面公理组中将加法群 $\boldsymbol{R}$ 换为任意的拓扑群† G（t_1+t_2 换为 $t_1\cdot t_2$），那末就称 (X, G, π) 定义了一个**（拓扑）变换群** ((topological) transformation group)．X 称为**相空间** (phase space)，G 称为**相群** (phase group)．对变换群的研究称为**拓扑动力学** (topological dynamics) ([3])．对两个流 (X_1,π_1) 和 (X_2,π_2)，如果存在一个同胚 $h: X_1\to X_2$ 和一个拓扑加群的同构 $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$，使得 $h\pi_1(x,t)=\pi_2(h(x),g(t))$ 恒等地成立，那末称 (X_1,π_1) 和 (X_2,π_2) 为**同构的** (isomorphic)．

下面我们假定已给了一个流 (X,π)，X 是 Hausdorff 空间．

【奇点】 当固定实数 t_0 时，$\pi(x,t_0)$ 是 $X\to X$ 的同胚映射．当固定 $x_0\in X$ 时，$\pi(x_0,t)$ 是 $\boldsymbol{R}\to X$ 的连续映射，因此定义了 X 中一条连续曲线．如果流是由(1)所定义的，那末这条曲线就是通过 x_0 的轨道．即使是抽象组我们也使用同样的名称，用 $C(x_0)$ 或 $O(x_0)$ 等记号来表达．$\bigcup_{t\in[0,\infty)}\pi(x_0,t)=C^+(x_0)$ 称为从 x_0 出发的**正的半轨道** (positive half trajectory)．使得 $C(x)=\{x\}$ 的点 x 称为**奇点** (singular point)，**平衡点** (equilibrium point)，**临界点** (critical point)，**休止点或静止点** (rest point)（→非线性振动），**不动点** (fixed point) 等．奇点全体的集合 $\mathscr{S}$ 是一个闭集．不是奇点的点称作**正常点**或**正则点** (regular point)．

当 $X\supset M\neq\varnothing$ 时，如果 $\bigcup_{x\in M} C^+(x)=C^+(M)\subset M$ ($\Longleftrightarrow C^+(M)=M$)，则称 M 是**正向不变的** (invariant in the positive direction)，或简称为**＋不变的** (plus invariant)．当 X 的一个子集 M 既是＋不变的又是－不变的时，就称为**不变的** (invariant)．$\mathscr{S}$ 的任意子集以及 X 本身都是不变集．包含 $x_0\in X$ 的最小的＋不变集是 $C^+(x_0)$，最小的不变集是 $C(x_0)$．包含它的闭集分别是 $\overline{C^+(x_0)}$，$\overline{C(x_0)}$．根据以 $\{[a,\infty)\mid a\in\boldsymbol{R}\}$ 为基的滤子†的映射 $\pi(x_0,t):\boldsymbol{R}\to X$ 的闭包†，称为 x_0 或轨道 $C(x_0)$ 的**正向极限集** (limiting set in the positive direction) 或 **ω 极限集** (ω-limiting set)，记为 $L^+(x_0)$ 或 $\Omega(x_0)$ ([4], [10])．我们可以类似地定义 $C^-(x_0)$ 与 $L^-(x_0)$（负向极限集或称为 α 极限集）．如果 X 满足第一可数性公理，那末 $L^+(x_0)\ni x$ 是和存在 $t_n\uparrow\infty$ 使得 $\pi(x_0,t_n)\to x$ 等价的([5], [6])．由定义 $L^+(x_0)$ 是一个闭集，但是不一定是紧的．如果 $L^+(x_0)\neq\varnothing$，那末 $L^+(x_0)$ 是不变集，而且恒有 $\overline{C^+(x_0)}=C^+(x_0)\cup L^+(x_0)$（称为(正)**轨道闭包** (orbit closure)([3]))．如果 $L^+(x_0)=\{y_0\}$，那末 y_0 是奇点，且有 $\lim_{t\to\infty}\pi(x_0,t)=y_0$．闭的(或紧的)不变集，当它没有具有同样性质的真子集时，称为**极小集** (minimal set) 或**极小轨道闭包** (minimal orbit closure) ([3])．紧的不变集是包含极小集的．只由一个奇点所成的集合是紧极小集．如果 $L^+(x_0)=\varnothing$，那末 x_0 称为**正向偏离的**，或简称为**＋偏离的** (plus departing, plus receding)，如果 $L^+(x_0)\neq\varnothing$，且 $L^+(x_0)\cap C(x_0)=\varnothing$，那末 x_0 称为**正向渐近的**，或简称为**＋渐近的** (plus asymptotic)，如果 $\overline{C^+(x_0)}(\neq\varnothing)$ 是紧的，那末 x_0 称为**正向 Lagrange 稳定的**，或简称为**＋ La 稳定的** (plus Lagrange stable)．x_0 是＋La 稳定的充分必要条件是：$C^+(x_0)$ 是相对紧的，在 $X\subset\boldsymbol{R}^n$ 时，即为：$C^+(x_0)$ 是有界的．如果 x_0 是＋偏离的，那末 x_0 不是＋La 稳

定的，但其逆不真.

【稳定性】 如果有一个 $T>0$，使得 $\pi(x_0, t+T)=\pi(x_0, t)$ 对所有实数 t 都成立，那末点 x_0 或轨道 $C(x_0)$ 称为是**周期的** (periodic)，T 称为它的**周期** (period). x_0 是周期的充分必要条件是：对于某些 t，存在 $T>0$，使得 $\pi(x_0, t+T)=\pi(x_0, t)$，特别是 $\pi(x_0, T)=\pi(x_0)$. 于是有 $C^+(x_0)=C(x_0)=\pi(x_0,[0,T))$，如果 x_0 不是奇点，那末 $C(x_0)$ 是 Jordan 闭曲线. 奇点是周期的. 周期的轨道通常是紧的极小集. 当 $X\subset \boldsymbol{R}^2$ 时其逆也成立，即紧的极小集只能是周期的轨道(也包含奇点).

如果对 $C^+(x_0)$ 的任意邻域 U，存在一个 x_0 的邻域 V，使得 $C^+(V)=\bigcup_{x\in V} C^+(x)\subset U$，那末称 x_0 为**正向轨道稳定**，或简称为**＋轨道稳定** (plus orbitally stable) (→稳定性). 当 $M\subset X$ 是＋不变时，如果对 M 的任意邻域 U，存在一个 M 的邻域 V 使得 $C^+(V)\subset U$，那末称 M 为**正向稳定的**，或简称为**＋稳定的** (plus stable). 如果 M 是＋稳定的，而且有一个 M 的邻域 W，使得 $L^+(W)\subset M$，那末称 M 为**正向渐近稳定的**，或简称为**＋渐近稳定的** (plus asymptotically stable). 又若 $L^+(X)\subset M$，则称 M 为**大范围的＋渐近稳定的** (globally plus asymptotically stable). 开的＋不变集通常是＋渐近稳定的. 取 $M\subset X$ 的充分小的邻域，如果其中的不变集只包含在 M 中，那末称 M 为与不变集相隔离的. 假设 X 是局部紧的，如果 M 是＋稳定的＋不变集，那末使 M 是渐近稳定的充分必要条件是：M 是与不变集相隔离的. 如果非开的紧的不变集 M 是正负两向稳定的，那末 M 不能与不变集相隔离，因此 M 不论在哪个方向都不是渐近稳定的([10]).

如果 $x_0\in L^+(x_0)$，那末称 x_0 为**正向 Poisson 稳定的**，或简称为**＋P 稳定的** (plus Poisson stable). 于是，所有的 $x\in C(x_0)$ 都是＋P 稳定的，即 $L^+(x_0)=L^+(x)\supset C(x)$，因此有 $L^+(x_0)=\overline{C(x_0)}\supset L^-(x_0)$. 所以，如果 x_0 是两向 P 稳定的，那末有 $L^+(x_0)=L^-(x_0)=\overline{C(x_0)}$，且其逆亦真. 一个周期的点 x_0 是两向 P 稳定的和两向 La 稳定的，且有 $\overline{C(x_0)}=C(x_0)(=C^+(x_0))$. 在流是由 (1) 给出的情形，其逆亦成立，即如果 x_0 是 ＋La 稳定的而且 $\overline{C^+(x_0)}=C^+(x_0)$，那末 x_0 是周期的.

如果存在 x_0 的一个邻域 U 和一个 $T>0$，使得对所有的 $t\geqslant T$，有 $U\cap\pi(U,t)=\varnothing$，那末称 x_0 为**游荡的** (wandering)，否则称为**非游荡的** (non-wandering). 非游荡性的概念是不依赖于正负向的. 如果一个流所有的点都是游荡的，那末称此流为**完全不稳定的** (completely unstable). 如果一个流所有的点都是非游荡的，那末称此流为**区域循环的** (regionally recurrent). 设 M 是不变集，如果把 (X,π) 限制在 M 上所得到的流是区域循环的，那末称 (X,π) 关于 M 为**区域循环的**. 如果 $L^+(x_0)\neq\varnothing$，那末 $L^+(x_0)$ 的各点是非游荡的. 令非游荡点的全体所组成的集合为 M_1，于是 M_1 是闭集. 如果它是非空的，那末是一不变集. 为了使 M_1 是非空的，M 至少要有一个 ＋La 或 －La 的点. $M_1\neq\varnothing$ 时，取 π_1 是 π 对 $M_1\times\boldsymbol{R}$ 的限制，于是 (M_1,π_1) 定义了 M_1 上的一个流. 令这个流的非游荡点的全体所组成的集合为 M_2. 以下按同样做法，可得一个闭集的序列：$M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_\alpha\supset\cdots$. 令 M_ω 为它的极限. 对 M_ω 继续同样的做法，可得 $M_{\omega+1}$ 等等. 如果存在一个 γ，使得 $M_\gamma=M_{\gamma+1}=\cdots\neq\varnothing$，那末称 M_γ 为**中心运动** (central motion) 的集合. M_γ 的流是区域循环的. 其逆亦真，即在其中流是区域循环的不变集必定包含在 M_γ 中. 设 X 是具有可数基的度量空间，如果 M_1 是紧的，那末使 M_γ 存在的最小的 γ 至多是一个第二类的序数[†].

【度量空间情形】 设 $\rho(x,y)$ 为 x, y 间的距离. 如果对 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$，使得当 $\rho(x, x_0)<\delta$ 时对所有的 $t\geqslant 0$ 有 $\rho(\pi(x,t),\pi(x_0,t))<\varepsilon$，那末称 x_0 为**正向 Ляпунов 稳定的**，或简称为 **＋Lj 稳定的** (plus Ljapunov stable). 对 $C(x_0)$ 的每一个点 x_1，如果存在与 x_1 无关的 δ，使得 x_1 是 ＋Lj 稳定的，那末称 x_0 为**一致＋Lj 稳定的** (uniformly plus Ljapunov stable). 一致 ＋Lj 稳定 ⟹ ＋Lj 稳定 ⟹ ＋轨道稳定

(⇔ + 稳定). 对奇点说来，一致 +Lj 稳定，+Lj 稳定，+轨道稳定和+稳定的概念是等价的，对周期的点(周期轨道)说来，+轨道稳定和+稳定的概念是等价的.

对 $\varepsilon > 0$，如果存在 $T > 0$，使得对所有的实数 t，$C(x_0)$ 包含在 $\pi(x_0, [t, t+T])$ 的 ε 邻域内，那末称 x_0 是**循环的** (recurrent). 循环性不依赖于正负的方向. 紧的极小集的所有的点都是循环的，反之，如果 X 是完备空间且 x_0 是循环的，那末 $\overline{C(x_0)}$ 是紧的极小集 (G. D. Birkhoff). 在 H. Bohr 意义下的殆周期[†]的轨道的点是循环的. 其逆不真，但是，如果 x_0 是循环的而且关于 $C(x_0)$ 的诱导拓扑是 +Lj 稳定的，那末 x_0 是殆周期的(A. A. Марков). 另外，如果 x_0 是一致 +Lj 稳定的，而且 +La 稳定的，那末 x_0 是殆周期的.

如果存在 X 的收敛点列 x_n 和两个实数序列 t_n, $\tau_n(t_n > \tau_n > 0, \tau_n \uparrow \infty)$，使得 $\pi(x_n, t_n)$ 收敛，但是 $\pi(x_n, \tau_n)$ 的任一子序列都没有极限，那末称流**在无穷远点具有鞍点** (B. B. Немыцкий). 用 $X_0 = Y \times \boldsymbol{R}$, $\pi_0((x, t), s) = (x, t+s)$ $(x \in Y, t, s \in \boldsymbol{R})$ 所定义的流 (X_0, π_0) 称为在 X_0 上的**平行流**或**正常流** (regular flow). 如果已给流 (X, π) 和某个平行流是同构的，那末称 (X, π) 是**可平行化的** (parallelizable). 当 X 是度量空间时，因为对于正常点 x_0 的充分小的邻域 V 存在局部截面(M. Бебутов, H. Whitney)，因此在 x_0 的邻域中流通常是局部地可平行化的. 这里，所谓对于 $M(\subset X)$ 的**局部截面** (local section)定义为有限柱 $\Phi = \bigcup_{-T\leqslant t\leqslant T} \pi(M, t)$ 的相对闭集 F，就是对所有的 $x \in \Phi$，只存在一个 t_x，使得 $|t_x| < 2T$，而且满足 $\pi(x, t_x) \in F$. 如果流是由(1)所定义的，那末在正常点 x_0 的充分小的邻域内，在 x_0 的 $C(x_0)$ 的法平面给出了局部截面. 这是 Poincaré 的 "surface sans contact" ([6]), Birkhoff 的 "surface of section"([2])的局部性质的一般化. 如果 X 是局部紧的可分的[†]度量空间，那末使(X, π)是可平行化的充分必要条件是：流是完全不稳定的，而且在无穷远处没有鞍点 (Немыцкий).

【具有不变测度的情形】 设相空间 X 是测度为 μ 的测度空间，如果对 X 的任一可测集 M 及所有实数 t，$\pi(M, t)$ 是可测的，而且有 $\mu\pi(M, t) = \mu M$，那末称流具有**不变测度** (invariant measure) μ. 在流是由 (1) 所定义的情形，具有不变测度的充分条件是存在一个非负的积分不变式[†]. 不可压缩的定常流具有一个不变测度. 下面我们假定 X 是具有不变的 Carathéodory 测度[†]的局部紧的度量空间.

在 $\mu X < \infty$ 的情形，下面的**循环定理** (recurrence theorem) 成立. 在测度 μ 的意义下，几乎所有的点都是两向 Poisson 稳定的 (Poincaré). 如果 M 是使 $\mu M = m > 0$ 的可测集，那末对所有满足 $0 < \lambda < 1$ 的 λ，使 $\mu(M \cap \pi(M, t)) > \lambda^2 m$ 的 t 的集合在 $\boldsymbol{R}$ 上是稠密的[†] (A. Я. Хинчин). 此外，下面的**遍历定理** (ergodic theorem) (→遍历理论)成立. 如果 $\varphi(x)$ 是可积函数，那末 $\lim_{T\to\infty} \int_0^T \varphi(\pi(x, t))\, dt/T = \phi(x)$ 对几乎所有的 x 存在. 如果流还是不可约的，那末对几乎所有的 x，$\phi(x)$ 是一常数 (Birkhoff 定理). 在这里，所谓流是**不可约的** (irreducible) (或**度量可迁的** (metrically transitive))是指：如果 M 是使 $\mu M > 0$ 的可测不变集，那末有 $\mu(X - M) = 0$. 如果 Birkhoff 定理的前半部分的假定成立，那末 $\lim_{T\to\infty} \int_X \left| \int_a^{a+T} \varphi(\pi(x, t))\, dt/T - \phi(x) \right| d\mu = 0$ 对所有的实数 a 一致地成立 (E. Hopf). 在同样的假定下，如果 $\varphi \in L_2$，那末对任一可测集 M，$\lim_{T\to\infty} \int_M \left(\int_a^{a+T} \varphi(\pi(x, t))\, dt/T - \phi(x) \right)^2 d\mu = 0$ 对所有的实数 a 一致地成立 (J. von Neumann).

在 $\mu X = \infty$ 的情形，这些定理可以推广如下. 设 X 满足第二可数公理[†]，如果对所有的紧集 $F \subset X$ 有 $\mu F < \infty$，那末所有的 $x \in X$ 是 +P 稳定的或+偏离的. 此外，几乎所有的 +P 稳定的点及+偏离的点在负向也各具有同样的性质(**Hopf 定理**). 在 Hopf 定理的同样假定

下，如果 $g(x)$ 是有界连续、可积的正函数，那末对几乎所有的 +P 稳定的点 x，存在 $\lim_{T\to\infty}\left(\int_0^T \varphi(\pi(x,t))dt \Big/ \int_0^T g(\pi(x,t))dt\right)$ (Birkhoff)（→遍历理论）.

【平面流的情形】 设 X 是 $\boldsymbol{R}^2$ 的开子空间. 如果 $L^+(x_0)$ 是只由正常点所组成的，且 x_0 是 +La 稳定的，那末 $L^+(x_0)$ 是一个周期轨道，而且作成一条 Jordan 闭曲线. 如果 x_0 还是 +P 稳定的，即 $x_0 \in L^+(x_0)$，那末 $C(x_0)=L^+(x_0)$. 如果不是这样，那末由 $L^+(x_0)$ 所分成的两部分中，在 x_0 所属的部分，对接近 $L^+(x_0)$ 的 x 有 $L^+(x)=L^+(x_0)$. 在此情形，称 $L^+(x_0)$ 为 x_0 的**极限周期轨道**（或**极限环**）(limit cycle). 如果 x_0 既不是 +La 稳定的又不是偏离的，那末流在无穷远处有鞍点. 当流只有有限个奇点时，如果 x_0 是 +La 稳定的，且 $L^+(x_0)$ 具有正常点和奇点，那末存在一个包含 x_0 的开的二维胞腔，使得 $L^+(x_0)$ 是 E^2 的边界，而它是由奇点所连结的有限多个正常轨道所组成的（称为**轨道多边形** (path-polygon)）. 这时，对充分接近 $L^+(x_0)$ 的 E^2 的点 x 和充分接近 x_0 的点 x，有 $L^+(x)=L^+(x_0)$ (Poincaré-Bendixson 定理)([4]). 一般说来，$L^+L^+(x_0)$ 是一个奇点，或是一个空集（即 X 的边界或无穷远点），或是非奇点的周期轨道. 为了使得有最后的情形，其充分必要条件是：$L^+(x_0)$ 是非奇点的周期轨道，这时 $L^+(x_0)=L^+L^+(x_0)$. 反之，如果 $C(x_0)$ 是一个非奇点的周期轨道，那末或者关于它的内侧和外侧，$C(x_0)$ 分别是某一点 x_1 的正向或负向的极限周期轨道，或者是在任意接近 $C(x_0)$ 的邻域中有无穷多个周期轨道. 同时，在 $C(x_0)$ 的内侧和外侧有奇点或 X 的边界点（或 $\boldsymbol{R}^2$ 的无穷远点）(Bendixson 定理)([1],[4],[5]).

【孤立奇点的分类】 设 x_0 是一个孤立奇点，于是，或者 i) 至少有一个点 $x\neq x_0$ 使得 $L^+(x)=\{x_0\}$ 或 $L^-(x)=\{x_0\}$，或者 ii) 在 x_0 的任一邻域中，围绕 x_0 的周期轨道有无限多个. 而且 i) 和 ii) 是互相排斥的 (Bendixson 定理). 在 ii) 的情形，称 x_0 是 Bendixson **中心点** (centre)，这情形是使 x_0 在正负两向都稳定的充分必要条件.

令 $N_U^+(x_0)=\{x\mid C^+(x)\subset U,\ L^+(x)=\{x_0\},\ x\neq x_0\}$，如果 U 是 x_0 的充分小的闭的邻域，那末 $N_U^+(x_0)\cup\{x_0\}$ 是一个闭集. 如果 $N_U^+(x_0)\cup\{x_0\}$ 不是 x_0 的邻域，那末 $N_U^-(x_0)\neq\varnothing$（其逆不真）. $N_U^+(x_0)-N_U^-(x_0)$ 的连结成分被称为正向的**开结点状区域** (open nodal region) 或**抛物区域** (parabolic region). 特别是，如果 $N_U^+(x_0)\cap N_U^-(x_0)=\varnothing$，$N_U^+(x_0)\neq\varnothing$ 和 $N_U^-(x_0)\neq\varnothing$，那末 $N_U^+(x_0)$ 和 $N_U^-(x_0)$ 的连结成分的个数相等. 因此，这时如果 $N_U^+(x_0)$，$N_U^-(x_0)$ 都是由有限个轨道所组成的，那末它们的轨道个数相等，而且称 x_0 为**广义鞍点** (generalized saddle point). 特别是，当轨道个数是 1 时，称为**退化鞍点** (degenerated saddle point)，个数是 2 时，称为 **Poincaré 鞍点**或简称为**鞍点** (saddle point). 如果 $N_U^+(x_0)\cap N_U^-(x_0)\neq\varnothing$，那末称此交集的连结成分为**闭结点状区域** (closed nodal region) 或**椭圆区域** (elliptic region). $U-N_U^+(x_0)\cup N_U^-(x_0)-\{x_0\}$ 的连结成分称为**鞍状区域** (saddle region) 或**双曲区域** (hyperbolic region).

在流由(1)所给出的情形，如果 $f_1, f_2\in C^1$，而且 f_1, f_2 在 x_0 关于 $x^1-x_0^1$, $x^2-x_0^2$ 的展开式的一次系数的矩阵 D (Jacobi 行列式) 不具有特征值 0，那末称 x_0 为**第一类** (法 première espèce) 奇点 ([6]). 如果 $f_1, f_2\in C^\omega$，那末第一类奇点又可分为下面四类（→非线性振动）. i) **结点** (英 node 法 noeud). 存在 x_0 的一个邻域 U，使得 $N_U^+(x_0)=U$, $N_U^-(x_0)=\varnothing$（或±相反，即 $N_U^+(x_0)=\varnothing$, $N_U^-(x_0)=U$），且当 $t\to\infty$ 时趋近 x_0 的轨道的切线具有极限. 这种情形，奇点的指数是 +1，是+渐近稳定的，−不稳定的（或±相反）. ii) **鞍点** (英 saddle point, 法 col). 对于充分小的邻域 U，$N_U^+(x_0)$，$N_U^-(x_0)$ 各由二个轨道所组成. 在此之外的 $U-N_U^+(x_0)\cup N_U^-(x_0)-\{x_0\}$ 的点组成四个鞍状区域. 指数是 −1，在正负向都是不稳定的. iii) **焦点** (英 focus, 法 foyer). 情况和 i) 一样，但是，当 $t\to\infty$ 时趋近 x_0 的轨道的切线没有极限，轨

道是围绕 x_0 的螺旋线. 指数及稳定性和 i) 一样. iv) Poincaré **中心点**(centre). 接近 x_0 的轨道都是围绕 x_0 的周期轨道. 指数是 +1, 正负两向都是稳定的. 这是 Bendixson 中心点的特殊情形,不是 Poincaré 中心点的 Bendixson 中心点称作**焦心点** (focuscentre). 令 D 的特征值为 λ_1, λ_2, 如果 $\Re\lambda_1$ 和 $\Re\lambda_2$ 同号, 那末当 $\Im\lambda = 0$ 时就得 i), 当 $\Im\lambda \neq 0$ 时就得 iii); 如果 $\Re\lambda_1$ 和 $\Re\lambda_2$ 异号,那末得 ii);如果 $\Re\lambda_1 = \Re\lambda_2 = 0$, 那末得 iii) 或 iv). 如果 $f_1, f_2 \notin C^\omega$, 那末亦已知有几个判定条件(→非线性振动). 如果流具有正的积分不变式, 那末孤立奇点是 Poincaré 中心点或广义鞍点([11]).

【微分流形的情形】 在微分流形† $\mathfrak{M}$ 上的可微向量场是和根据在各点邻域使用局部坐标所给出的方程组(1)是等价的,因此在 $\mathfrak{M}$ 上定义了一个流. 特别是,如果 $\mathfrak{M}$ 是紧的,那末所有不能开拓的大范围解都是在 $\boldsymbol{R}$ 上定义的. 在此情形,如果奇点个数是有限的, 那末奇点的指数† 的和等于 $\mathfrak{M}$ 的 Euler 示性数†([6],[7]). 因此, 一个二维紧微分流形, 如果在它上面具有没有奇点的流,那末它必定是一个环面†. 对在环面上没有奇点的流,如果 $f_1, f_2 \in C^2$, 那末或者至少存在一个周期轨道, 或者所有的轨道闭包都和环面相重合. 这时称流是**遍历的** (ergodic). 环面全体是一极小集(Poincaré-A. Denjoy-C. L. Siegel). 同样情形, 如果 $f_1, f_2 \in C^1$, 且流具有不变测度, 那末当 f_1, f_2 的 Fourier 展开的常数项的比是有理数时,所有轨道都是周期轨道,当这个比是无理数时,流是遍历的([8]). 在 n 维环面的情形,对于 ± Lj 稳定的流, 也有同样的结果([9]).

【参】 没有特别写在这里的文献,在[4], [5]中有概要地叙述. 在[5]中有直到五十年代的详细的(特别以苏联为中心的)文献目录. [1] I. Bendixson, Sur les courbes définies par des équations différentielles, Acta Math., **24** (1901), 1—88; [2] G. D. Birkhoff Dynamical systems, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 9, 1927; [3] W. H. Gottschalk-G. A. Hedlund, Topological dynamics, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 36, Providence, 1955; [4] S. Lefschetz, Differential equations: Geometric theory, Interscience, 1957 (中译本: S. 莱夫谢茨,微分方程几何理论,上海科学技术出版社 1965); [5] В. В. Немыцкий-В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва, 第二版, 1949 (中译本: B. B. 涅梅茨基、B. B. 斯捷巴诺夫,微分方程定性论,科学出版社, 1956, 1959); [6] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, J. Math. Pures Appl., série 3, **7** (1881), 375—422, **8** (1882), 251—296; Œuvres t. 1, Gauthier-Villars, 1928, p. 3—86; [7] H. Poincaré, Sur les courbes définies par les équations différentielles, J. Math, Pures Appl., série 4, **1** (1885), 167—244, **2** (1886), 151—217; Œuvres t. 1, p. 90—158, 167—222; [8] T. Saito (斎藤利弥), On the measure-preserving flow on the torus, J. Math. Soc. Japan, **3** (1951), 279—284, **4** (1952), 338; [9] T. Saito (斎藤利弥),On dynamical systems in n-dimensional torus, Funkcialaj Ekvacioj, **7** (1965), 91—102; [10] T. Ura (浦太郎),On the flow outside a closed invariant set, Contr. Diff. Eq., **3** (1964), 249—294; [11] T. Ura (浦太郎)-Y. Hirasawa (平沢義一), Sur les points singuliers des équations différentielles admettant un invariant intégral, Proc. Japan Acad., **30** (1954), 726—730; [12] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste; I. Solutions périodiques, Non-existence des intégrales uniformes, Solutions asymptotiques; II. Méthodes de MM. Newcomb. Gyldén, Lindstedt et Bohlin; III. Invariants intégraux, Solutions périodiques du deuxième genre, Solutions doublement asymptotiques, Gauthier-Villars, I 1892; II 1893; III 1899; English translation, New methods of celestial mechanics I, II, III, Clearinghouse for Federal Scientific and Technical Information, Springfield, 1967; [13] N. P. Bhatia - G. P. Szegö, Dynamical systems; stability theory and applications, Springer, 1967; [14] O. Hájek, Dynamical systems in the plane, Academic Press, 1968.

常微分方程的渐近性质 [英 asymptotic properties of ordinary differential equations 法 propriétés asymptotiques d'équations différentielles ordinaires 德 asymptotische Naturen der gewöhnlichen Differentialgleichungen 俄 асимптотические свойства обыкновенных дифференциальных уравнений 日 常微分方程式の漸近的性質]【**线性方程**】 考虑线性微分方程

(1) $$dx/dt = A(t)x,$$

$x = (x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 维复向量, $A(t)$ 是 n 阶复的方阵. 如果 $A(t)$ 在开区间 I 中是连续的, 那末 (1) 的任一解在 I 中也是连续的. 自然提出问题: 当 t 接近 I 的端点时,解的性状如何, 亦即解的**渐近性质**的问题. 当需要时可以对自变量 t 进行适当的变换, 因此我们总可以假定所考虑的区间为 $0 \leqslant t < \infty$. 在系数是 t 的解析函数的情形, H. Poincaré (1880) 首先研究

解的渐近展开，之后，J. Horn, J. C. C. A. Kneser 等继续研究，由于 W. J. Trjitzinsky, J. Malmquist，福原满洲雄的研究而得到了发展(→线性常微分方程的奇点). 另一方面，O. Perron (1928) 在降低对系数的光滑性的假定方面开辟了一个新的研究方向. 这个研究由 F. Lettenmeyer, R. A. Späth，福原等加以精确化. 这两个方向，开始进行时所用的方法是互不相同的，但是福原用同样的方法对它们进行了研究，把两方面的研究密切地结合在一起，成功地使结果精确化了. 在这里，我们主要叙述关于后一方面的研究.

我们考虑当 $t\to\infty$ 时解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的渐近性质: i) $\limsup t^{-1}\log|\boldsymbol{x}(t)|$ 的有限性, ii)解的有界性: $\limsup|\boldsymbol{x}(t)|<\infty$, iii) 解的收敛性: $\lim \boldsymbol{x}(t)$ 存在, iv) 可积性: $\int^{\infty}|\boldsymbol{x}(t)|^{p}dt<\infty$ 等. 由 A. M. Ляпунов 首先引进的 $\chi(\boldsymbol{x})=\lim\sup t^{-1}\log|\boldsymbol{x}(t)|$，被称为解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的**示性数** (Ljapunov's characteristic number, type number). 如果 $A(t)$ 是有界的，那末对所有的 $\boldsymbol{x}(t)$，有 $\chi(\boldsymbol{x}(t))<\infty$. 互相不同的示性数的个数不超过 n 个. 所有的解是有界的，与解 $\boldsymbol{x}=0$ 的稳定性是等价的. 使 $\int^{\infty}|\boldsymbol{x}(t)|^{2}dt<\infty$ 的线性无关的解的个数，在特征值问题中起着重要的作用.

【接近常系数的情形】 首先考虑当 $t\to\infty$ 时 $A(t)$ 趋于常数矩阵 A 的情形. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，它们的实部 $\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant\mu_n$. 于是，对(1)的基本解组 $\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)$ 和 $c_k\neq0$ 有

$$\log|c_1\boldsymbol{x}_1(t)+\cdots+c_k\boldsymbol{x}_k(t)|=\mu_k t+o(1).$$

福原给出了 $o(1)$ 的精确估计. 为了简单起见，假定 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是互不相同的，我们叙述它的概要. 适当选择常数矩阵 P，由 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 把 (1) 变为

$$dy_j/dt=\lambda_j y_j+\sum b_{jk}(t)y_k.$$

再由 $y_i=e^{\lambda_j t}z_i$ 把它化为

$$dz_j/dt=\sum c_{jk}(t)e^{\mu_k t-\mu_j t}z_k.$$

令 μ 为 $\mu_1,\cdots,\mu_n$ 中之任一个. 定义初值 z_j^0 如下: $z_j^0=0$，对 $\mu<\mu_j$ 的 j; $z_j^0=$ 任意值，对 $\mu\geqslant\mu_j$ 的 j. 设 τ 是有限值，h 满足 $\tau\leqslant h\leqslant\infty$，令

$$t_j=\begin{cases}\infty, & \mu_j>\mu,\\ h, & \mu_j=\mu,\\ \tau, & \mu_j<\mu.\end{cases}$$

于是，如果适当选取常数 τ, h, c 及函数 $\omega_j(t)$，那末满足

$$z_j(t_j)=z_j^0;\ |z_j(t)-z_j^0|\leqslant c\omega_j(t)e^{(\mu-\mu_j)t},\quad \tau\leqslant t<\infty$$

的解唯一存在. 如果假定 $c_{jk}(t)\to0\ (t\to\infty)$，适当选取函数 $\omega_j(t)$，于是就可从最后的不等式导出上式中 $o(1)$ 的估计. 这个方法可用于对非齐次方程

$$d\boldsymbol{x}/dt=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}(t).$$

T. Peyovitch 还求得当 $t\to\infty$ 时 $\boldsymbol{x}(t)\to0$ 的解存在的充分条件.

其次，考虑方程

$$d\boldsymbol{x}/dt=(A+B(t)+C(t))\boldsymbol{x},$$

A 是常数矩阵，$B(t)\to0\ (t\to\infty)$, $\int_0^{\infty}\|C(t)\|dt<\infty$. 令 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值，$\lambda_1(t),\cdots,\lambda_n(t)$ 是 $A+B(t)$ 的特征值，且 $\lambda_j(t)\to\lambda_j\ (t\to\infty)$. 于是，i) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是互不相同的，$B(t)$ 在任意的有界区间中是绝对连续的，$\int_0^{\infty}\|B'(t)\|dt<\infty$，令 $M_{jk}(t)=\int_0^t\Re(\lambda_j(t)-\lambda_k(t))dt$，如果 $M_{jk}(t)$ 满足下列条件之一: $M_{jk}(t)\to\infty$ (对 $t\to\infty$) 而 $M_{jk}(t_2)-M_{jk}(t_1)\geqslant-K$ (对 $t_1<t_2$)，或 $M_{jk}(t)\to-\infty$ (对 $t\to\infty$) 而 $M_{jk}(t_2)-M_{jk}(t_1)\leqslant K$ (对 $t_1<t_2$)，或 $|M_{jk}(t_2)-M_{jk}(t_1)|\leqslant K$ (K 是正的常数)，那末方程具有下面那样的解的基本组:

$$\boldsymbol{x}_j(t)=\exp\left(\int_0^t\lambda_j(t)dt\right)(\mathbf{c}_j+o(1)),\quad j=1,\cdots,n,$$

其中 $\mathbf{c}_j$ 是 A 的对应于 λ_j 的特征向量. ii) 设 $\Re\lambda_j(t)\leqslant0$ (对 $t\geqslant t_0$)，当 $\Re\lambda_j=0$ 时，λ_j 是单根，如果 $B(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 中是有界变差函数，那末所有的解是有界的. i) 的定理是 N.

Levinson 证明的，ii) 的定理是 L. Cesari 对 Dini-福原定理的推广.

【稳定性】 利用 Lettenmeyer, Späth, Peyovitch 等的结果，给出使(1)的解 $\boldsymbol{x}=0$ 是稳定的充分条件. 设 $A(t)=(a_{jk}(t))$ 在 $t_0\leqslant t<+\infty$ 中是连续的可测函数，$\lim A(t)=A$ 存在，矩阵 $A=(a_{jk})$ 的所有特征值的实部是负的或为 0，其中实部为 0 的是单根，如果对充分大的 h，有

(2) $$\int_h^t |a_{jk}(t)-a_{jk}|\,dt=O(t),$$

那末 $\boldsymbol{x}=0$ 是稳定的. 这个定理的研究，是从 P. Fatou 死后发表的关于 $x''+f(t)x=0$ 的论文(1929)开始的. Fatou 疏忽了对应于(2)的条件. 这个错误被 R. Caccioppoli, Perron, A. Wintner 所指出，并由 Caccioppoli 证明了正确的提法：如果 $f(t)\to c>0$ 而且 $\int^\infty |f(t)-c|\,dt<+\infty$，那末 $x(t)\equiv 0$ 是稳定的. 福原-南雲道夫证明了，实际上 $f(t)\to c$ 的存在不是本质的，福原进一步把它推广到了方程组的情形([5]).

设当 $t\to+\infty$ 时 $A(t)\to A$，如果存在连续的可测函数 $A_{jk}(t)$，使得对充分大的 h，有

$$\int_h^t |a_{jk}(t)-A_{jk}(t)|\,dt=O(1),$$
$$a_{jk}(t)-A_{jk}(t)=o(1),$$
$$\int_h^t |A'_{jk}(t)|\,dt=O(1),\quad A'_{jk}(t)=o(1),$$

而且矩阵 $A=(a_{jk})$ 的特征值是互不相同的，不为 0，且有负或 0 的实部，那末 $\boldsymbol{x}=0$ 是稳定的. 这一类型的定理有很多人进行过研究，Cesari 把上面这个特殊的结果称为 **Dini-福原定理**([2]).

【振动的情形】 如果 $A_0(t)$ 是具有周期 ω 的矩阵，适当选取具有周期 ω 的矩阵 $P(t)$ ($\det P(t)\neq 0$)，那末方程

(3) $$\boldsymbol{x}'=A_0(t)\boldsymbol{x},$$

通过变换 $\boldsymbol{x}=P(t)\boldsymbol{y}$，可以变为常系数的方程. 因此，如果把 $A(t)$ 写成 $A(t)=A_0(t)+B(t)+C(t)$，就可以利用上面的结果. 例如，当 $B(t)\equiv 0$，$\int^\infty \|C(t)\|\,dt<\infty$ 时，如果 (3) 的所有解都是有界的，那末(1)的解也是有界的.

如果 $A_0(t)$ 不是周期矩阵，设 $A(t)=A_0(t)+C(t)$，$\int^\infty \|C(t)\|\,dt<\infty$，那末即使(3)的所有解都是有界的，(1)的所有解不一定都是有界的. 但是，如果加上这样的条件：$\Re\int^t \operatorname{tr} A_0(t)\,dt>m(t<+\infty)$，那末从 (3) 的解的有界性就可推出(1)的解的有界性.

上面的结果也适用于单个的高阶线性方程，而且可以更加精确化. 特别是，对二阶方程

(4) $$(p(t)x')'+q(t)x=0$$

得到了非常详细的结果. 例如，对 Mathieu 方程[†] 的结果等就是.

当(4)的所有解在 $[0,\infty)$ 中具有无穷个零点时，(4) 被称为是**振动的** (oscillatory). 如果(4)是振动的，$p_1(t)\geqslant p(t)>0$，$q_1(t)\geqslant q(t)$，那末 $(p_1(t)x')'+q_1(t)x=0$ 也是振动的. 如果 $p(t)\equiv 1$，$q(t)\geqslant(1+\varepsilon)/4t^2\ (\varepsilon>0)$，那末 (4) 是振动的. 但是 $x''+x/4t^2=0$ 不是振动的.

【福原的边值问题】 考虑一阶线性方程组

(5) $$\frac{dy_j}{dt}=\sum_{k=1}^n c_{jk}(t)e^{(\mu_k-\mu)t}y_k+c_j(t)e^{-\mu_j t},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

μ，μ_j 是实数，$c_{jk}(t)$，$c_j(t)$ 在 $0\leqslant t<\infty$ 中是连续而且可测的函数，满足

$$\sum|c_{jk}(t)|\leqslant\gamma(t),\quad |c_j(t)|\leqslant\varepsilon\gamma(t)e^{\mu t},$$
$$\gamma(t)=o(1).$$

这里 $\gamma(t)$ 在 $0\leqslant t<+\infty$ 中是连续而且可测的函数. 对 $\mu_j>\mu$ 的 j，$y_j^0=0$；对 $\mu_j\leqslant\mu$ 的 j，y_j^0 是任意给定的常数. 定义 t_j 为

$$t_j=\begin{cases}+\infty, & \mu_j>\mu,\\ h', & \mu_j=\mu,\\ h, & \mu_j<\mu,\ h\leqslant h'\leqslant+\infty,\end{cases}$$

如果对任意的数 $\kappa\ (>1)$，h 充分大，那末(5)有唯一的解满足

(6) $$y_j(t_j)=y_j^0,\quad \mu_j\leqslant\mu,$$

$$\log|y_i-y_i^0|\leqslant(\mu-\mu_i)t+\kappa\int_0^t\gamma(t)dt+O(1).$$

如果 $\int\gamma(t)dt=+\infty$，那末 $h'<+\infty$. 一般地，在(6)的第一个条件下，求常微分方程的解的问题称为**福原的边值问题** (Hukuhara's boundary value problem) (福原[1]；这个定理也可以推广到非线性情形). 而且，在 $c_i(t)\equiv 0$ 的情形，设满足条件(6)的(5)的解表为 $y_i=\varphi_i(t)$，如果令

$$\tau_i=\begin{cases}+\infty, & \mu_i>\mu,\\ \tau', & \mu_i=\mu,\\ \tau, & \mu_i<\mu;\ h\leqslant\tau\leqslant\tau'\leqslant+\infty,\end{cases}$$

$$M(\tau',\tau)=\max_{\mu_j\leqslant\mu}(|\varphi_j(\tau_j)|e^{(\mu_j-\mu)\tau_j}\omega(\tau_j,\tau')^{-1}),$$

$$\sigma_0(\tau)=\max_{\tau\leqslant t<+\infty}(\sigma(t)),$$

那末下面三个不等式成立:

(7) $$|\varphi_j(t)-\varphi_j(\tau_j)|\leqslant\frac{\sigma(t)}{1-\sigma_0(\tau)}e^{(\mu-\mu_j)t}\omega(t,\tau')M(\tau',\tau);$$
$$j=1,2,\cdots,n,\quad \tau\leqslant t<+\infty,$$

(8) $$|y_j^0|\leqslant\frac{1}{1-\sigma_0(\tau)}e^{(\mu-\mu_j)t_j}\omega(t_j,\tau')M(\tau',\tau);$$
$$\mu_j\leqslant\mu,$$

(9) $$|\varphi_j(\tau')-\varphi_j(\tau)|\leqslant\frac{\sigma(\tau')}{1-\sigma_0(\tau)}e^{(\mu-\mu_j)\tau'}M(\tau',\tau);$$
$$j=1,2,\cdots,n;$$

其中

$$\omega(t,\tau)=\frac{\sigma(\tau)}{\sigma(t)}\exp\left|\int_\tau^t\frac{\gamma(t)}{\sigma(t)}dt\right|,$$

而且 $\sigma(t)>0$ 是满足几个不等式的连续函数(福原[1]).

【非线性方程】 考虑非线性微分方程

(10) $$\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x}).$$

这里变数都是实数，$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 在 $t\geqslant 0$, $|\boldsymbol{x}|<\Delta$ 中假定是连续的. 把它写成

$$\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),$$

A 是具有实部为负的特征值的实矩阵，$\boldsymbol{f}$ 满足

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant k|\boldsymbol{x}|,\ t\geqslant 0,|\boldsymbol{x}|<\Delta,$$

且对任意的 $\varepsilon>0$ 存在 δ, $T>0$ 使得

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant\varepsilon|\boldsymbol{x}|,\ t\geqslant T,|\boldsymbol{x}|\leqslant\delta,$$

于是存在一个常数 $\mu>0$，使得对(10)的任意解 $\boldsymbol{x}(t)$ 有

$$\limsup t^{-1}\log\|\boldsymbol{x}(t)\|<-\mu.$$

如果对 $\boldsymbol{f}$ 的条件换成下面的条件，那末对任意解 $\boldsymbol{x}(t)$ 就可以有 $\boldsymbol{x}(t)\to 0$ $(t\to\infty)$. 条件是这样的: 存在常数 $a>0$, b, k, 使得 $|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant k|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{x}|^{1+a}t^b$ $(t\geqslant 0,|\boldsymbol{x}|<\Delta)$，而且对任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 $\delta,T>0$，使得 $|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant\varepsilon|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{x}|^{1+a}t^b(t\geqslant T,|\boldsymbol{x}|\leqslant\delta)$ 成立.

在(10)中，设 $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{x})$ 是关于 t 具有周期 ω、关于 x_i 有连续偏微商的函数. 又设(10)具有周期 ω 的周期解 $\boldsymbol{p}(t)$. 于是，如果关于 $\boldsymbol{p}(t)$ 的(10)的变分方程† $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{F}_x(t,\boldsymbol{p}(t))\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{F}_x=(\partial F_j/\partial x_k))$ 的特征指数†的实部全是负的，那末 $\boldsymbol{p}(t)$ 是渐近稳定的†. 如果一个自治方程 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ 具有周期解 $\boldsymbol{p}(t)$，而且对应的变分方程 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{F}_x(\boldsymbol{p}(t))\boldsymbol{y}$ 的 $n-1$ 个特征指数的实部都是负的，那末存在一个正数 ε，使得对满足 $|\boldsymbol{x}(t_1)-\boldsymbol{p}(t_0)|<\varepsilon$ (对某个 t_0, t_1) 的任一解 $\boldsymbol{x}(t)$，使 $|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{p}(t+c)|\to 0$ $(t\to\infty)$ 成立的 c 存在.

在方程

$$\boldsymbol{x}'=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$$

中，设实常数矩阵 A 具有 k 个实部为负的特征值和 $n-k$ 个实部为正的特征值. $\boldsymbol{f}$ 是实的，在 $t\geqslant 0$, $|\boldsymbol{x}|<\Delta$ 中是连续的，且 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$，又设对任意的 $\varepsilon>0$ 有 δ, $T>0$，使得 $|\boldsymbol{f}(t,\tilde{\boldsymbol{x}})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|\leqslant\varepsilon|\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}|$ 对 $t\geqslant T$, $|\boldsymbol{x}|$, $|\tilde{\boldsymbol{x}}|<\delta$ 成立. 于是，在空间 $\boldsymbol{x}$ 中存在一个包含原点的 k 维流形 S，具有下列性质: 对充分大的 t_0，如果 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 在 S 上，那末当 $t\to\infty$ 时，解 $\boldsymbol{x}(t)$ 趋于 0. 如果 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 不在 S 上，那末不管 $\boldsymbol{x}(t_0)$ 如何接近原点，$\boldsymbol{x}(t)$ 也不会停留在原点附近.

【参】 [1] 福原满洲雄，常微分方程式論，岩波講座数学，1933; [2] L. Cesari, Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer, 1963; [3] E. A. Coddington-N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955; [4] R. Bellman, Stability theory of differential equations, McGraw-Hill, 1953 (中译本: R. 贝尔曼，微分方程的解的稳定性理论，科学出版社，1957); [5] M. Hukuhara (福原满洲雄), Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires domaine réel, J. Fac. Sci.

Hokkaido Imp. Univ., 1, 2 (1936), 13—38.

线性常微分方程 [英 linear ordinary differential equation 法 équation différentielle linéaire ordinaire 德 lineare gewöhnliche Differentialgleichung 俄 линейное обыкновенное дифференциальное уравнение 日 線形常微分方程式] 设 $p_1(x)$, $\cdots$, $p_n(x)$, $q(x)$ 是实变量(或复变量) x 的已知函数，对于未知函数 y 和它的直到 n 阶的导数 y', $\cdots$, $y^{(n)}$ 的常微分方程

$$(1)\quad y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=q(x)$$

称为 n 阶**线性常微分方程**. 特别是，当 $q(x)\equiv 0$ 时，线性常微分方程

$$(1')\quad y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0$$

就称为**齐次的** (homogeneous)，而当 $q(x)\not\equiv 0$ 时 (1)就称为**非齐次的** (inhomogeneous). (1)的解的奇点†除了系数 $p_k(x)$, $q(x)$ 的间断点(或奇点)以外不会再存在 (→线性常微分方程的奇点). 也就是说，下面的解的**存在唯一性定理** (unique existence theorem) 成立:

设系数 $p_k(x)$, $q(x)$ 在实数域 D 中是连续的，则对于实数域 D 内任意一点 x_0 及一组 n 个任意数 η, η', $\cdots$, $\eta^{(n-1)}$，存在一个而且只存在一个(1)的解 $y(x)$，满足初始条件:

$$(2)\quad y(x_0)=\eta,\ y'(x_0)=\eta',\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=\eta^{(n-1)},$$

且 $y(x)$, $y'(x)$, $\cdots$, $y^{(n)}(x)$ 在 D 中都是连续的. 如果 D 为复数域(不包含无穷远点)，且复函数 $p_k(x)$, $q(x)$ 在 D 内全纯†，那末 (1) 的满足(2)的在 D 中是全纯的复函数解 $y(x)$ 存在而且唯一.

【基本解组】 齐次线性常微分方程的解构成一个 (实数域或复数域上的) 线性空间，即由任意常数 C_i 和 (1′) 的解 y_1, y_2, $\cdots$, y_m 所组成的线性组合 $y(x)=\sum_{i=1}^{m}C_iy_i(x)$ 仍为(1′)之解. 这称为**叠加原理** (principle of superposition). (1′) 的 $n+1$ 个以上的解是线性相关的. 即若 $m\geqslant n+1$，可以适当地选取不全为 0 的 m 个常数 C_1, C_2, $\cdots$, C_m，使得 $\sum_{i=1}^{m}C_iy_i(x)\equiv 0$. (1′) 有 n 个线性无关的解. 例如，由初始条件:

$$(3)\quad \begin{cases} y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\cdots,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0,\\ y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\cdots,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\cdots,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1 \end{cases}$$

所定义的 n 个解 y_1, y_2, $\cdots$, y_n 是线性无关的. 这样的(1′)的 n 个线性无关的解的组称为(1′)的**基本解组** (fundamental system of solutions). (1′)的任意解 y 可以用基本解组 y_1, $\cdots$, y_n 来表达:

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x).$$

【Liouville 公式】 使(1′)的 n 个解 y_1, y_2, $\cdots$, y_n 是线性无关的充分必要条件是: Wronski 行列式† $W(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 在 D 内 $\neq 0$. (1′) 的系数 $p_k(x)$ 可以用任意的基本解组 y_1, y_2, $\cdots$, y_n 表示如下. 也就是说，将

$$(4)\quad \frac{(-1)^nW(y,y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))}{W(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))}$$

展开时，它的 $y^{(n-k)}$的系数在 D 中恒等于 $p_k(x)$. 特别是，求 $p_1(x)$，可以得到 **Liouville 公式**

$$(5)\quad W(y_1(x),\cdots,y_n(x)) = W(y_1(x_0),\cdots,y_n(x_0))\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p_1(t)dt\right).$$

【Lagrange 常数变易法】 非齐次方程 (1) 的两个解的差是齐次方程(1′)的解. 因此，(1) 的通解†可以表达为 (1) 的一个特解† 和(1′)的通解之和. 由于(1)的一个特解可以从 (1′) 的任意基本解组 y_1, y_2, $\cdots$, y_n 用下面的方法求得，因此，如果求得(1′)的基本解组，那末(1)也就可解了. 在 $y=\sum_{i=1}^{n}C_iy_i(x)$ 中，我们把 C_1, C_2, $\cdots$, C_n 考虑作不是常数而是 x 的函数，如果它们是由满足

$$(6)\quad \begin{cases} y_1(x)C_1'(x)+y_2(x)C_2'(x)+\cdots + y_n(x)C_n'(x)=0,\\ y_1'(x)C_1'(x)+y_2'(x)C_2'(x)+\cdots + y_n'(x)C_n'(x)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ y_1^{(n-1)}(x)C_1'(x)+y_2^{(n-1)}(x)C_2'(x)+\cdots + y_n^{(n-1)}(x)C_n'(x)=q(x) \end{cases}$$

所决定的,那末 $y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i(x)y_i(x)$ 就是(1)的解. 从(6)得

(7) $$\frac{dC_i}{dx}=\frac{q(x)W_i(x)}{W(y_1(x),\cdots,y_n(x))},$$

其中 $W_i(x)$ 是对应于行列式 $W(y_1(x),\cdots,y_n(x))$ 中 $y_i^{(n-1)}(x)$ 的余子式. 这就称为 **Lagrange 常数变易法**(Lagrange's method of variation of constants).

【常系数线性常微分方程】 设 a_i 是常数,对 n 阶线性常微分方程

(8) $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$,

如果常数 r 是代数方程

(9) $f(r)=r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$

的根,那末 $y=\exp rx$ 即为它的解. 我们称(9)为(8)的**特征方程** (characteristic equation). 设(9)的不同的根为 $r_1, r_2, \cdots, r_m$, 且 r_i 为 μ_i 重根,于是

(10) $$\begin{matrix} e^{r_1x},\ xe^{r_1x},\ \cdots,\ x^{\mu_1-1}e^{r_1x};\ \cdots; \\ e^{r_mx},\ xe^{r_mx},\ \cdots,\ x^{\mu_m-1}e^{r_mx} \end{matrix}$$

为(8)的基本解组.

【d'Alembert 降阶法】 设 $y_1(x)$ 是齐次方程(1')的不恒等于 0 的解,如果将 $y=y_1z$ 代入(1'),那末显见 z' 就满足 $n-1$ 阶的线性常微分方程. 这就称为 **d'Alembert 降阶法**(d'Alembert's method of reduction of order). 因为一阶线性常微分方程可以用积分来求解 (→ 公式 14 I),所以齐次二阶线性常微分方程只要求出一个不恒等于 0 的解,就完全可解了.

上面讲的是 (1) 的解在一个域中是连续或全纯的一般理论. 为了掌握解的全貌,还必须研究在奇点(系数的间断点或非正则点)附近的解的性质(→线性常微分方程的大范围理论,线性常微分方程的奇点). 此外,除上述的初值问题外,边值问题,特别是和数学物理有关系的二阶情形,也是重要的(例如[4]). 关于这些→常微分方程的边值问题,特征值问题.

【一阶线性常微分方程组】 设 $f_{ij}(x)$ 为已知函数,关于 n 个未知函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的**一阶线性常微分方程组** (system of linear ordinary differential equations):

(11) $$\begin{cases} dy_1/dx=f_{11}(x)y_1+\cdots \\ \qquad\qquad +f_{1n}(x)y_n+g_1(x), \\ dy_2/dx=f_{21}(x)y_1+\cdots \\ \qquad\qquad +f_{2n}(x)y_n+g_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ dy_n/dx=f_{n1}(x)y_1+\cdots \\ \qquad\qquad +f_{nn}(x)y_n+g_n(x), \end{cases}$$

如果考察 $y=y_1, y'=y_2, \cdots, y^{(n-1)}=y_n$, 那末显见它是把 (1) 作为特别情形包含在内的. 在 $g_i(x)$ 都恒等于 0 的情形,即

(11') $$\begin{cases} dy_1/dx=f_{11}(x)y_1+\cdots+f_{1n}(x)y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dy_n/dx=f_{n1}(x)y_1+\cdots+f_{nn}(x)y_n, \end{cases}$$

称为是**齐次的**,而 (11) 则称为是**非齐次的**. 使 (11) 的解 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的函数中至少一个成为间断 (奇异) 的点,必定是系数 $f_{ij}(x)$ 或 $g_i(x)$ 的间断点(奇点). 设在实数域 D 中 $f_{ij}(x)$ 及 $g_i(x)$ 是连续的. 这时,下面的解的**存在唯一性定理**成立:

对于 D 内任意一点 x_0, 如果给定了任意的初始条件

$y_1(x_0)=b_1,\ y_2(x_0)=b_2,\ \cdots,\ y_n(x_0)=b_n$,

那末相应地,在 D 内可以确定一个也只能确定一个连续的解 $(y_1(x), \cdots, y_n(x))$. 在 (不包含无穷远点的)复数域 D 中,如果 f_{ij}, g_i 是全纯的,那末解 $y_i(x)$ 在 D 中也是全纯的.

【基本解组】 (11') 的 m 个解 $(y_{1i}, y_{2i}, \cdots, y_{ni})$ $(i=1, 2, \cdots, m)$,如果 $m\geqslant n+1$, 那末它们是线性相关的. 也就是说,可以适当选取 m 个不全为 0 的常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$, 使得在 D 内有 $\sum_{i=1}^{m}C_iy_{ki}(x)=0$ $(k=1, 2, \cdots, n)$. 然而,(11') 具有 n 个线性无关的解 $(y_{1i}, y_{2i}, \cdots, y_{ni})$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. 例如,可以选取这样的初始条件:

$$y_{ik}(x_0)=\delta_{ik}=\begin{cases}1, & i=k, \\ 0, & i\neq k.\end{cases}$$

这样的 n 个线性无关解 $(y_{1i}, y_{2i}, \cdots, y_{ni})$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 就称为 (11') 的**基本解组**.

(11′)的任意解 $(y_1, \cdots, y_n)$，用基本解组可以唯一地表示为 $y_k(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_{kj}$ $(k=1,2,\cdots,n)$.

所谓 n 个解 $(y_{11},\cdots,y_{1n}),\cdots,(y_{n1},\cdots,y_{nn})$ 是线性无关的，它是和这样的事实等价的：即，由此作行列式

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \cdots & y_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

它在 D 内 $\neq 0$. 相应于 Liouville 公式(5)的是

$$\Delta(x) = \Delta(x_0)\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_0}^{x} f_{ii}(t)dt\right).$$

【常数变易法】 非齐次方程(11)的通解 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 是由 (11′) 的通解 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 和(11)的一个特解 $(Y_{10}, Y_{20}, \cdots, Y_{n0})$ 加起来而给出的：

$$(y_1 + Y_{10}, y_2 + Y_{20}, \cdots, y_n + Y_{n0}).$$

为了求这个特解 $(Y_{10}, Y_{20}, \cdots, Y_{n0})$，取 (11′) 的任意的基本解组

$$y_1 = \varphi_{1k}(x),\ y_2 = \varphi_{2k}(x), \cdots,\ y_n = \varphi_{nk}(x),\quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

将线性组合

$$(12)\qquad y_i = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(x)u_k,\ i = 1,2,\cdots,n$$

中的常数 u 考虑作 x 的函数，如果根据 (12) 把 (11)变换成关于 u 的微分方程，则得

$$(13)\qquad \sum_{k=1}^{n} \varphi_{ik}(x)u'_k(x) = g_i(x),\quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

因为 $\varphi_{ik}(x)$ 是基本解组，所以用它们作的行列式不会是 0. 因此，从(13)可以解出 $u'_k(x)$

$$u'_k(x) = G_k(x),\ k = 1, 2, \cdots, n,$$

积分之，就求得 $u_k(x)$. 于是，(11) 的特解，显见就是用这个 $u_k(x)$ 按(12)的形式给出的. 这个方法也称为**常数变易法**.

【常系数线性常微分方程组】 如果 (11′) 的系数 f 都是常数，那末通解具有下列形式：

$$y_j = \sum_{k=1}^{m} P_{jk}(x)e^{\lambda_k x},\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

在这里，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是**特征方程**(characteristic equation)

$$\begin{vmatrix} f_{11}-\lambda & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22}-\lambda & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

的不同的根，如果 λ_k 是 e_k 重根 $\left(\sum_{j=1}^{m} e_j = n\right)$，那末 $P_{jk}(x)$，包含有 e_k 个任意常数，顶多是 $e_k - 1$ 次多项式.

如果 (11′) 的系数 $f_{ik}(x)$ 都是关于 x 具有同一周期 ω 的周期函数，那末存在一个线性变换

$y_i = \sum q_{ik}(x)z_k$，q_{ik} 都是周期 ω 的周期函数能把方程组变换成

$$dz_i/dx = \sum c_{ik}z_k,\quad c_{ik} \text{ 都是常数.}$$

因此，如果能够找到这个线性变换，那末方程就可以解出了.

【伴随微分方程】 对线性微分方程

$$F(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0,$$

关于 $\int \bar{z}F(y)dx$ 应用分部积分，就可以得到

$$(14)\qquad \bar{z}F(y) - y\overline{G(z)} = d[R(y, z)]/dx,$$

$$R(y, z) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{h=0}^{k-1} (-1)^h y^{(k-h-1)}(p_{n-k}\bar{z})^{(h)},$$

$$G(z) = (-1)^n((\bar{p}_0 z)^{(n)} - (\bar{p}_1 z)^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n \bar{p}_n z).$$

我们称 $G(z) = 0$ 为 $F(y) = 0$ 的**伴随微分方程** (adjoint differential equation). $F(y) = 0$ 的伴随微分方程的伴随微分方程就是 $F(y) = 0$. 如果 y 是 $F(y) = 0$ 的一个解，那末伴随微分方程的解 z 就满足 $n - 1$ 阶微分方程 $R(y, z) =$ 常数. 在 $G(y) = F(y)$ 的情形，就称 $F(y) = 0$ 为**自伴微分方程**(self-adjoint differential equation). 在二阶实系数的情形，它的一般形式是

$$(15)\qquad F(y) = d(pdy/dx)/dx + qy = 0.$$

在方程组的情形，(11′) 的**伴随微分方程组**定义为

(16)　$dz_j/dx = -\bar{f}_{1j}z_1 - \bar{f}_{2j}z_2 - \cdots - \bar{f}_{nj}z_n$,
$j = 1, 2, \cdots, n$.

(16) 的伴随微分方程组就是 (11′). 如果 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 分别是 (11′), (16) 的解,那末有 $\sum_{j=1}^{n} y_j\bar{z}_j=$常数.(11′)和(16)一致的情形, 即当 $f_{jk}(x) = -\bar{f}_{kj}(x)$ 的情形, (11′)称为**自伴微分方程组**(→伴随微分方程).

【Laplace 变换】 在(1′)的系数 $p_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是有理函数的情形,可以求下列形式的解.

(17)　$$y(x) = \int_a^b v(t)e^{xt}\,dt.$$

也就是说, 如果选取适当的 $v(t)$, 则 $v(t)$ 的 Laplace 变换†(17)就成为 (1′)的解. 同样可以用 $v(t)$ 的 Euler 变换的形式:

(18)　$$y(x) = \int_a^b v(t)(1 - x)^{\rho-1}\,dt$$

来求(1′)的解. 这些变换都可以用来作特殊函数的积分表示.

【线性常微分方程和特殊函数】 很多超越函数,例如超几何函数†, Bessel 函数†, Legendre 函数†等等,还有 Hermite 多项式, Laguerre 多项式, Jacobi 多项式等等都可以用二阶线性常微分方程来定义(→特殊函数).

[参] [1] 藤原松三郎, 常微分方程式論, 岩波, 1930; [2] 福原満洲雄,常微分方程式,岩波全書, 1951; [3] 吉江琢兒, 初等常微分方程式, 裳華房, 1937 ; [4] 吉田耕作, 積分方程式論, 岩波全書, 1951; [5] 福原満洲雄,常微分方程式の解法Ⅱ,線型の部,岩波, 1941; [6] 小松勇作, 常微分方程式論, 広川書店, 1965; [7] L. Bieberbach, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Springer, 1953; 第二版 1965; [8] E. Picard, Traité d'analyse III, Gauthier-Villars, 1908: [9] G. Sansone, Equazioni differenziali nel campo reale I, II, Zanichelli; Bologna, 1948—1949. [10] K. O. Friedrichs, Lectures on advanced ordinary differential equations, Gordon and Breach, 1965; [11] E. Hille, Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, 1968.

线性常微分方程的奇点 [英 singular points of linear ordinary differential equations　法 points singuliers des équations différentielles linéaires ordinaires　德 Singularitäten der lineare gewöhnliche Differentialgleichungen　俄 особые точки линейных обыкновенных дифференциальных уравнений　日 線形常微分方程式の特異点] 考虑线性常微分方程组

(1)　$$d\boldsymbol{y}/dx = A(x)\boldsymbol{y},$$

自变量 x 取自复数域 D (或 Riemann 面†), $\boldsymbol{y} = (y_1(x), \cdots, y_n(x))'$ 是 n 维复的列向量, $A(x)$ 是以 x 的复解析函数为元素的 n 阶方阵. $A(x)$ 的奇点 $x = a$ 称为(1)的**奇点** (singular point). 当取 $t = \frac{1}{x}$ 为自变量时, 如果 $t = 0$ 是变换后方程的奇点,那末 $x = \infty$就是(1)的奇点. 通过取 $x - a$, $\frac{1}{x}$ 为自变量,不失一般性,可以认为 $x = 0$ 是奇点.

【正则奇点】 如果 $A(x)$ 在 $0 < |x| < R$ 中是单值全纯的, 那末解在 $0 < |x| < R$ 中也是全纯的, 但不一定是单值的. 如果所有的解都以 $x = 0$ 为解析点或极点, 那末就称 $x = 0$ 为(1)的**貌似奇点** (apparent singular point). 设(1)的基本解组 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 构成的矩阵为 $Y(x) = (\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n)$, 当 x 沿正的方向绕 0 一周时, 如果 $Y(x)$ 变为矩阵 $Y(xe^{2\pi i})$, 那末存在一个常数矩阵 M, 使得 $Y(xe^{2\pi i}) = Y(x)M$. 我们称M为 $Y(x)$ 的关于 $x = 0$ 的**单值矩阵**或**线路矩阵** (monodromy matrix, circuit matrix). 取满足 $M = e^{2\pi iS}$ 的矩阵 S, 于是 $Y(x)$ 可以用在 $0 < |x| < R$ 中单值全纯的矩阵 $P(x)$ 和 S 表为 $Y(x) = P(x)x^S$.

对于 (1) 的解 $\boldsymbol{y}(x)$, 给定任意的角范围 $\alpha < \arg x < \beta$, 如果存在一个正数 r, 使得 $|x|^r |\boldsymbol{y}(x)| \to 0$ $(x \to 0,\ \alpha < \arg x < \beta)$, 那末称 $x = 0$ 为 $\boldsymbol{y}(x)$ 的**正则奇点** (regular singular point). 如果不存在这样一个数,那末称 $x = 0$为 $\boldsymbol{y}(x)$ 的**非正则奇点**(irregular singular point). 如果 $x = 0$ 是(1)的所有解的正则奇点,那末就称 $x = 0$ 为 (1) 的**正则奇点**. 如果 $x = 0$ 是某个解的非正则奇点,那末就称它为(1)的**非正则奇点**. $x = 0$ 是 (1) 的正则奇点的充分必要条件是: 当 (1) 的任意的基本矩阵解 $Y(x)$ 写成上面那样的形式 $Y(x) = P(x)x^S$ 时, $x = 0$ 顶多

是 $P(x)$ 的一个极点. 这时，适当地改变 S, 可使 $P(x)$ 在 $x=0$是全纯的,而且有 $\det P(0)\neq 0$.

下面考虑一个以 $x=0$ 为它的系数的 r 阶极点的方程

(2) $$x^r(d\mathbf{y}/dx)=A(x)\mathbf{y}.$$

这里 $A(x)$ 在 $x=0$ 是全纯的,且 $A(0)\neq 0$. n 次代数方程 $\det(A(0)-\rho I)=0$ 称为 (2) 在 $x=0$ 的**指数方程** (indicial equation).

首先,考虑 $r=1$ 的情形. 这时 $x=0$ 是(2)的正则奇点. 令指数方程的根为$\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$, 假定一组根 $\rho_1,\cdots,\rho_p$ 是这样的: 任意二者之差 $\rho_i-\rho_j$ 都是整数,且 $\Re\rho_1\leqslant\Re\rho_2\leqslant\cdots\leqslant\Re\rho_p$,于是(2)具有下面形式的解:

$$\mathbf{y}_j=x^{\rho_j}\mathbf{p}_j(x,\log x),\ j=1,\cdots,p.$$

这里向量 $\mathbf{p}_j(x,\lambda)$ 的各分量是关于 λ 的至多 $p-j$ 次的多项式,系数是 x 的单值全纯函数, 且在 $x=0$ 处不同时为 0. 特别是,当 $\rho_1,\cdots,\rho_n$ 的任何二者之差都不是整数时，于是就有这样形式的解:

$$\mathbf{y}_j=x^{\rho_j}\mathbf{p}_j(x)\ \ (j=1,\cdots,n).$$

【渐近展开】 其次,考虑 $r>1$ 的情形. 根据以形式幂级数作系数的变换

(3) $$\mathbf{y}=P(x)\mathbf{z}=(\sum P_k x^{k/h})\mathbf{z},$$

把(2)变换成下面形式的方程:

(4) $$\xi^s(d\mathbf{z}/d\xi)=(\Lambda(\xi)+J\xi^{s-1})\mathbf{z},\xi=x^{1/h}.$$

这里 h 是一适当的正整数, $\Lambda(\xi)$ 是以 $\rho_j(\xi)=\rho_{j0}+\rho_{j1}\xi+\cdots+\rho_{j,s-1}\xi^{s-1}$ 作为其第 j 个对角元素的对角矩阵, J 是 Jordan 标准型[†] 中的常数矩阵. 特别是, ρ_{j0} 等于指数方程的根 ρ_j. 对 $P(x)$ 形式地有 $\det P(x)\neq 0$. 如果 $s=0$, 那末有 $\rho_j(\xi)\equiv 0$ $(j=1,\cdots,n)$. 将(4)解出代入(3),就得到(2)的形式解. 然而,形式幂级数 $P(x)$ 一般并不收敛. H. Poincaré 引进渐近展开[†]的概念,在强的限制假定下证明了: 形式解虽然不收敛，但这个形式解在适当的角域内表示了解的渐近展开. 之后，有很多学者对这个问题进行了研究,经过 W. J. Trjitzinski 和 J. Malmquist 等，最后福原满洲雄得到了决定性的结果. 福原的方法亦可用于正则奇点的研究.

n 个形式解在某个角域 D_1 内渐近地表示的基本矩阵解 $\Phi_1(x)$, 与在另一角域 D_2 内表示的基本矩阵解 $\Phi_2(x)$, 一般说来是不同的. 这称为 **Stokes 现象** (Stokes' phenomenon). 线性变换 $\Phi_1(x)=\Phi_2(x)C$ 的矩阵 C 的元素称为 **Stokes 乘子** (Stokes multiplier). 求 Stokes 乘子的问题称作**衔接问题** (connection problem). G. D. Birkhoff 证明了: 当关于 $x=0$ 的单值矩阵可以化为对角矩阵时，存在一个在 $x=0$ 是非退化的矩阵 $P(x)$ ($\det P(0)\neq 0$), 用它做系数的变换 $\mathbf{y}=P(x)\mathbf{z}$ 可以将(2)变为

$$x^r\frac{d\mathbf{z}}{dx}=\left(\sum_{k=0}^{r-1}B_k x^k\right)\mathbf{z}.$$

【Fuchs 型常微分方程】 考虑一个 n 阶方程

(5) $$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0.$$

$x=0$ 为 (5) 的正则奇点的充分必要条件是: $p_k(x)$ 在 $x=0$ 具有至多 k 阶的极点. 所以,这时(5)可以写成

(6) $$x^n y^{(n)}+x^{n-1}P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_n(x)y=0.$$

这里 $P_k(x)$ 在 $x=0$ 是全纯的. (6) 具有 n 个形如 $y=x^{\rho_k}P_k(x,\log x)$的互相线性独立的解,其中 ρ_k 是(6)关于 $x=0$ 的指数方程

$$\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+1)+P_1(0)\rho(\rho-1)\cdots\cdots(\rho-n+2)+\cdots+P_{n-1}(0)\rho+P_n(0)=0$$

的 n 个根; $P_k(x,\lambda)$是 λ 的多项式,它的系数在 $x=0$ 是全纯函数，它关于 λ 的次数是不超过使得 $\rho_j-\rho_k$ 为 0 或正整数的 ρ_j 的个数. 特别是,当指数方程的根两两都不相差一个整数时,就不出现对数项; 而且对应于在具有整数差的根中实部最大的 ρ, 也不含有对数项. 为了求这些解,用 Frobenius 法是方便的(→公式 14).

关于(5),如果 $p_1(x),\cdots,p_n(x)$ 都是有理函数,且除了包含 $x=\infty$ 在内的正则奇点以外没有其他奇点,则称(5)为 **Fuchs 型** (Fuchsian type) **常微分方程**. 这时,若令 $x=a_1,\cdots,a_m$, $a_{m+1}(=\infty)$ 是 (5) 的正则奇点, $\rho_{j1},\cdots,\rho_{jn}$ $(j=1,\cdots,m+1)$ 是关于 $x=a_j$ 的指数方程的根,则有

$$\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=1}^{n}\rho_{jk}=\frac{(m-1)n(n-1)}{2}.$$

它称为 **Fuchs 关系式** (Fuchsian relation).

【非正则奇点】 如果在方程 (5) 中至少有一个 $p_i(x)$ 在 $x=0$ 具有至少是 $i+1$ 阶的极点，那末 $x=0$ 就成为非正则奇点．令 m_i 是 $p_i(x)$ 在极点 $x=0$ 的阶数，而且在 $p_i(x)\equiv 0$ 的情形，令 $m_i=\infty$．为了简单起见，假定 $m_0=0$．设 $A_\nu(\nu=0,1,\cdots,n)$ 是在平面上具有直角坐标 (ν, m_ν) 的点，包含所有 A_ν 的最小的凸多角形，被称作(5)的 **Newton 多角形** (Newton diagram)．这个多角形的向上凸的部分 Π 和直线 $x=\nu$ $(\nu=0,1,\cdots,n)$ 的交点坐标用 (ν, r_ν) 表示，令 $\sigma_\nu=r_\nu-r_{\nu-1}$ $(r_0=0)$，由 Π 的作法，$\{\sigma_i\}$ 是非增数列，因此可以假定 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\cdots\geqslant\sigma_\mu>1\geqslant\sigma_{\mu+1}\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n$.

对应于 $\sigma_i>1$ 的各边的是下面的 μ 个线性无关的形式解:

$$y=(\exp\Lambda_j(x))x^{\lambda_j}P_j(x,\log x)$$
$$(j=1,2,\cdots,\mu).$$

其中 $\Lambda_j(x)$ 是 x^{-1} 的适当的分数幂次的多项式，$P_j(x,\lambda)$ 是 λ 的多项式，它的系数是 x 的分数幂次形式的幂级数．对应于 $\sigma_i\leqslant 1$ 的各边的是剩下的 $n-\mu$ 个同样形式的不包含指数函数的线性无关的形式解．这些形式解的集合，在 x 平面上适当的角域内，成为某个基本解组的渐近展开.

在非正则奇点处存在全纯解，亦即存在形式级数实际上收敛的解，这首先是由 O. Perron 对于一个方程 (5) 所证明的，而 F. Lettenmeyer ([3])和岩野正宏-福原滿洲雄 ([8]) 把这个结果推广到方程组的情形.

特别是关于二阶方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$，当 $p(x)$，$q(x)$ 分别以 $x=\infty$ 为其 p，q 阶的极点时，如果 $r=\max(p,q/2)>-1$，那末 $x=\infty$ 是一个非正则奇点．这时，$x=\infty$ 称为 **$r+1$ 阶** (of class $r+1$) 的非正则奇点．正则奇点在形式上可以看作是 0 阶的非正则奇点.

【关于参数的奇异性】 对于含有小的复参数 ε 的一阶常微分方程组

(7)
$$\varepsilon^h\frac{d\boldsymbol{y}}{dx}=A(x,\varepsilon)\boldsymbol{y};$$

$$A(x,\varepsilon)\cong\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)\varepsilon^k,\quad h \text{ 是正整数},$$

可以得到大致类似于非正则奇点的同样理论．这里 $A_k(x)$ $(k=0,1,\cdots)$是以在 $x=0$ 的邻域 D 中的单值全纯函数为元素的 $n\times n$ 矩阵，其渐近展开在 ε 属于某个角域 Σ 中当 $\varepsilon\to 0$ 时成立．现在如果 $A_0(0)$ 的特征值都是不同的，那末具有形如 $\Phi(x,\varepsilon)=P(x,\varepsilon)e^{Q(x,\varepsilon)}$的形式解的矩阵．这里 $P(x,\varepsilon)$ 是和 $A(x,\varepsilon)$ 同样形式的矩阵，$Q(x,\varepsilon)$ 是 ε^{-1} 的 h 次多项式，它的系数是以在 $D^*(\subset D)$ 中单值全纯函数为元素的对角矩阵．特别是，当 $A_0(x)$ 的特征值是 $\mu_j(x)$ $(j=1,2,\cdots,n)$时，最高次的系数矩阵的元素为$\int_0^x\mu_j(t)dt$．如果取 Σ 的适当的部分角域 Σ^*，那末 $\Phi(x,\varepsilon)$ 就是某个基本解组的渐近展开．一般说来，当 $A_0(0)$ 的特征值为多重时，如果不出现下面将叙述的转向点，那末只要引入 ε 的分数幂，总可以构造解的渐近展开．关于包含二个以上的参数的情形，也有解的渐近展开的理论.

【转向点】 在方程组 (7) 中，特别考虑 $n=2$，$h=1$，$A_0(x)=\begin{pmatrix}0&1\\x&0\end{pmatrix}$ 的情形．当 $x=0$ 时 $A_0(0)$ 的特征值为重根 0；当 $x\neq 0$ 时特征值是二个单根 $\pm\sqrt{x}$．这样，当 $x=0$ 和 $x\neq 0$ 时，$A_0(x)$ 的 Jordan 标准型是不同的，因而将形式解用 ε 展开时，它的系数不是 x 的单值全纯函数．展开的头几项关于 x 的次数越高，越显示出奇异性，因此在 $x=0$ 的附近不能作渐近展开．这样的点称作**转向点** (turning point, transition point).

如果存在非奇异形式变换 $\boldsymbol{y}=T(x,\varepsilon)\boldsymbol{z}$ $\left(T(x,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(x)\varepsilon^k,\ \det T_0(x)\neq 0\right)$，其逆变换和 $A(x,\varepsilon)$ 具有同样的解析性质，那末根据这个变换，方程组(7)可以转换到解的性质已

很好了解的方程组 $\varepsilon^h(d\boldsymbol{z}/dx) = B(x,\varepsilon)\boldsymbol{z}$. 这时，关于 $\boldsymbol{z}$ 的方程组就称为 (7) 的**相关微分方程** (related differential equation). 例如，在上面所举的例中，$B = A_0(x)$，方程组的解完全可以写成 Bessel 函数. 在这里，所谓解的性质已很好了解是指：当 ε 固定时，在 x 的整个复平面上所有解的性质是已知的. 根据这个方法，在包含 $x = 0$ 的邻域中，$T(x,\varepsilon)$ 的解析性质是可以给出的，但是要找出适当的相关微分方程，在很多时候却是困难的([4]).

【参】 [1] 福原滿洲雄，常微分方程式，岩波全書，1950; [2] E. Coddington-N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955; [3] P. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley, 1964; [4] W. R. Wasow, Asymptotic expansions for ordinary differential equations, Interscience, 1965; [5] L. Bieberbach, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Springer, 1965; [6] H. L. Turrittin, Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form, Trans. Amer. Math. Soc., **107** (1963), 485—507; [7] K. Okubo (大久保謙二郎), A global representation of a fundamental set of solutions and a Stokes phenomenon for a system of linear ordinary differential equations, J. Math. Soc. Japan, **15** (1963), 268—288; [8] M. Hukuhara (福原滿洲雄)-M. Iwano (岩野正宏), Étude de la convergence des solutions formelles d'un système différentielle ordinaire linéaire, Funkcialaj Ekvacioj, **2** (1959), 1—18; [9] J. Moser, The order of a singularity in Fuchs' theory, Math. Z., **72** (1960), 379—398.

线性常微分方程的大范围理论 [英 global theory of linear ordinary differential equations 法 théorie globale des équations différentielles linéaires ordinaires 德 Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen im Grossen 俄 теория линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в целом 日 線形常微分方程式の大域的理論] 给定一个 n 阶线性常微分方程†

(1) $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$,

或一阶线性微分方程组†

(2) $\boldsymbol{y}' = A(x)\boldsymbol{y}$

或写成分量形式

(2′) $y_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)y_k,\ i = 1,\cdots,n$,

系数 $p_k(x)$ 或 $a_{ik}(x)$ 都是在复数域 D 中的 x 的复解析函数. (1)或(2)的解在它的系数的解析点上是全纯的，但是，在系数的奇点上一般具有分枝点†，因此，它一般是 x 的多值解析函数. 线性常微分方程的大范围理论的对象，就是对所有 x 值研究这个函数的函数论的特征，即研究解的 Riemann 面†的确定，以及在此 Riemann 面上解的性质.

在已给方程的系数的解析点附近，经常可以求得解的 Taylor 展开. 如果方程是 Fuchs 型的，那末即使在它的奇点处，解也可以明显地展开. 更确切地说，以奇点为中心，它到另一最近的奇点的距离为半径作圆，可以求得在此圆内收敛的解的级数展开 (→线性常微分方程的奇点). 在有非正则奇点†的情形，可以求出在以它为顶点的角域内部有效的渐近展开†. 一旦这样的表达式已经得到，那末求这些局部有效的展开式之间的相互连接的关系，即**连接公式** (connection formula)，就成为大范围理论的重要而又最困难的课题.

【单值群】 设方程(2)的系数定义在某个 Riemann 面 $\mathfrak{F}$ 上，它们的奇点为 $a_1, a_2, \cdots$. 从 $\mathfrak{F}$ 除去 $a_1, a_2, \cdots$ 得到另一个 Riemann 面 $\mathfrak{F}'$. 令 $Y(x)$ 是(2)的基本解组†中的一个. Γ 是 $\mathfrak{F}'$ 上的任意闭曲线，从 x 出发沿着 Γ 又回到 x，对 $Y(x)$ 进行解析开拓，得到 $Y(x\Gamma)$. 这时，存在一个 n 阶常数矩阵 C_Γ 使得 $Y(x\Gamma) = Y(x)C_\Gamma$，而且如果 Γ_1 和 Γ_2 在 $\mathfrak{F}'$ 上是同伦的†，那末 $C_{\Gamma_1} = C_{\Gamma_2}$. 于是，令 G 为 $\mathfrak{F}'$ 的基本群†. 对于 $G \ni \gamma$，因为 $Y(x\Gamma)$ $(\Gamma \in \gamma)$ 与 Γ 的取法无关而具有同样的值，所以可以把它写作 $Y(x\gamma)$，有这样的关系式成立：$Y(x\gamma) = Y(x)C_\gamma$. 在这里当然有 $C_\gamma = C_\Gamma (\Gamma \in \gamma)$. 现在如果 $g = \{C_\gamma | \gamma \in G\}$，$g$ 是和 G 同态的群，那末对应 $\gamma \to C_\gamma$ 定义了 G 的一个表示. 称 g 为方程(2)的**单值群** (monodromy group). 对方程(1)的情形，假设它的独立解为 $y_1, \cdots, y_n$，如果存在常数矩阵 C_γ，使得 $(y_1(x\gamma), \cdots, y_n(x\gamma)) = (y_1(x), \cdots, y_n(x))C_\gamma$，那末也可以同样定义它的单值群为 $\{C_\gamma | \gamma \in G\}$. 在方程是 Fuchs 型的情形，如果单值群可以完全决定，那末大范围问题

可以大体解决.

设 $\mathfrak{S}$ 是复球面,如果方程是 Fuchs 型的,因为系数的奇点个数 m 是有限的,如果令它们为 $a_1, \cdots, a_m$,那末 g 是由 $C_{\gamma_1}, \cdots, C_{\gamma_m}$ 所生成的群. 这里,γ_k 是由内部只含奇点 a_k 而不含其他奇点的闭曲线 Γ_k 所决定的 $\mathfrak{S}'$ 的同伦类†. 而且这些 C_{γ_i} 不一定是独立的,至少有一个关系 $C_{\gamma_1}\cdots C_{\gamma_m} = I$($I$ 是单位矩阵)成立. 在此情形,$C_{\gamma_1}, \cdots, C_{\gamma_m}$ 的 Jordan 标准型†是由求奇点附近解的收敛展开的 Frobenius 方法†所决定的. 但是,这些矩阵 C_{γ_i} 本身一般是不能定出来的.

特别是,对于 $n = 2, m = 3$,而系数是 x 的有理函数的情形,如果给出了在每一个 a_k 上的指数方程†的根,那末方程(1)或(2)是完全确定的,因此,单值群也是完全确定的. 另一方面,对 Fuchs 型方程,由于指数方程的根是可以纯粹地用代数方法求出,因此,在此情形,单值群也可以用代数的运算来确定([12]).

令(1)中 $n=2$, $m=3$,系数的奇点取为 a, b, c,设在这些点上指数方程的根分别是 λ, λ'; μ, μ'; ν, ν',根据这些,微分方程是唯一地确定的,因此它的解的全体所组成的函数族也是唯一确定的. 这一族通常用记号

$$P\left\{\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & x \\ \lambda' & \mu' & \nu' & \end{matrix}\right\}$$

来表示,称为 **Riemann 的 P 函数** (*P*-function of Riemann) ([1],[6],[7]). 利用简单的变换可以将 Riemann 的 P 函数化为 **Gauss 超几何微分方程** (Gauss' hypergeometric differential equation)

$$(3)\quad x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

的解. 这个解可以用**超几何积分**(hypergeometric integral)

$$\int_C t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{\gamma-\beta-1}(t-x)^{-\alpha}dt$$

来表示([12],→超几何函数).

除去 $n < 2$ 或 $m < 3$ 的情形和上述的 $n = 2$, $m = 3$ 的情形以外,确定方程的单值群的问题(非常例外的情形除外)还没有解决.

【具有非正则奇点的方程】 当方程含有非正则奇点时,仅仅决定单值群,还不能解决问题. 由单值群只能知道解的 Riemann 面的构造,另一方面还必须研究当 x 从确定方向接近非正则奇点时解的性质. 这时,发生 Stokes 现象†(→线性常微分方程的奇点),为了完全地了解解的大范围性质,就必须求出决定这个变化方式的连接公式.

对于 $n = 2$, $m = 2$,一个著名的问题是一个奇点是正则奇点,另一个奇点是一阶的非正则奇点的情形,这个问题已经完全解决了. 这时微分方程可以化为合流型超几何微分方程†([3],[7],→合流型函数).

对其他情形,问题已解决的,只是 $m = 2$,一个奇点是正则奇点,另一个是非正则奇点的情形,然而,对这种情形也不是所有的问题都已经完全解决了. 由于单值群容易定出,所以问题归结为求渐近展开的连接公式,研究就变得比较容易([8],[11],[17]).

对于 $m = 2$,两个奇点都是非正则奇点的情形,这时甚至连单值群也不能求出. 对这种情形,G. D. Birkhoff 作了尝试,用适当的变换将一个奇点变为正则奇点([2],[18]).

【Riemann 问题】 对形如(1)的 Fuchs 型方程,当系数是 x 的代数函数时,关于这方面的大范围的研究,值得注意的成果有 Poincaré 的理论. 根据这个理论,方程(1)的解可以用另一个参数 z 单值化,即表示为 $y = f(z)$, $x = g(z)$ 的参数方程形式,这里 f, g 是 z 的单值解析函数. 虽然,一般已经知道,任意的解析函数可以用这种形式单值化(→Riemann 面),而 Poincaré 的理论却甚至连更具体地求参数 z 的方法也给出了. 也就是说,作为单值化参数 z,只要取由(1)决定的某个二阶 Fuchs 型线性常微分方程的二个独立解之比就可以了. 于是,在少数例外情形,f, g 是 z 的有理函数或椭圆函数,除此以外,f, g 常常是对某个 Fuchs 群†的自守函数†,即 Fuchs 函数†([13]).

和线性常微分方程的大范围理论密切有关的问题是所谓 **Riemann 问题** (Riemann's problem). 这个问题也称为 **Riemann-Hilbert 问题** (Riemann-Hilbert problem), 是 Hilbert 的第二十一个问题. 这个问题是这样的: 假设已给一个 Riemann 面 $\mathfrak{F}$, 在它上面的点 $a_1, a_2, \cdots$, 以及一个用 n 阶方阵表示的和 $\mathfrak{F}-\{a_1, a_2, \cdots\}$的基本群表示[†]同态的群 g. 于是,求一形如(2)的线性微分方程,使得 i) 系数 $A(x)$ 是 $\mathfrak{F}$ 上的单值亚纯函数, ii) 在 $a_1, a_2, \cdots$ 有正则奇点, iii) 方程的单值群和 g 一致. 关于这方面,已做了很多的研究. 最后, H. Röhrl 成功地解决了这个问题([5],[9],[10],[14]).

线性微分方程的单值群, 一般按照奇点位置 $a_1, a_2, \cdots$ 的变化而变化. 可是,在 $a_1, a_2, \cdots$变动的同时,使方程的其他系数也随着作适当地变化,可以使得单值群保持不变. 为此,提出了这样的问题: 必须选择方程的系数是 $a_1, a_2, \cdots$的怎样的函数? 这个问题是由Schlesinger 考虑的. 据此,假设(2)的奇点是 $a_1, \cdots, a_{m-1}, \infty$, 又设 $A(x)$ 只限于下面的情形:

$$A(x)=\sum_{j=1}^{m-1}\frac{A_j}{x-a_j},\ A_j \text{ 为常数矩阵},$$

为了使得上面的条件成立, A_j 必须是满足

$$\frac{\partial A_j}{\partial a_k}=\frac{A_kA_j-A_jA_k}{a_j-a_k},\quad j\neq k, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial A_j}{\partial a_j}=0$$

的 $a_1, \cdots, a_{m-1}$ 的函数([15],[16]).

(4) 是和不具有可移分枝点[†]的非线性方程的研究密切有关的. 例如, 在 $n=2$, $m=4$ 的情形,如果 $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=t$ $(a_4=\infty)$, 那末 A_j 只是 t 的函数,(4)就成为常微分方程, 在此情形, 关于不具有可移分枝点的二阶非线性方程,本质上是和 P. Painlevé 所给的标准型(VI) (→非线性常微分方程的大范围理论) 一样的. R. Garnier 详细地研究了 (4), 利用它解决了在 Riemann 面 $\mathfrak{F}$ 是复球面的情形下的 Riemann 问题([4]).

【参】 [1] L. Bieberbach, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Springer, 第二版 1965; [2] G. D. Birkhoff, Equivalent singular points of ordinary linear differential equations, Math. Ann., **74**(1913), 134—139; [3] E. A. Coddington-N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955; [4] R. Garnier, Solution du problème de Riemann pour les systèmes différentielles linéaires du second ordre, Ann. Sci. École Norm. Sup., **43** (1926), 177—307; [5] E. Hilbert, Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, Enzykl. der Math., II B5, 1913; [6] 福原満洲雄,線型常微分方程式の解法,岩波, 1941; [7] 福原満洲雄,常微分方程式,岩波全書,1951; [8] R. E. Langer, The solutions of the differential equation $v'''-\lambda^2 zv'-3\mu\lambda^2 v=0$, Duke Math. J., **22** (1955), 525—541; [9] I. A. Lappo-Danilevsky, Mémoire sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, Chelsea, 1953; [10] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946, 第二版 1962 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里,奇异积分方程,上海科学技术出版社,1966); [11] K. Okubo (大久保謙二郎), A global representation of a fundamental set of solutions and a Stokes' phenomenon for a system of linear ordinary differential equations, J. Math. Soc. Japan, **15** (1963), 268—288; [12] C. E. Picard, Traité d'analyse III, Gauthier-Villars, 1908; [13] H. Poincaré, Sur le groupe des équations linéaires, Acta Math., **4** (1884), 201—311; [14] H. Röhrl, Das Riemann-Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Math. Ann., **133** (1957), 1—25; [15] L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen I, II₁, II₂, Teubner, 1895; [16] L. Schlesinger, Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten, J. Reine Angew. Math., **141** (1912), 96—145; [17] H. L. Turrittin, Stokes multipliers for a class of linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 304—329; [18] H. L. Turrittin, Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff canonical form, Trans. Amer. Math. Soc., **107** (1963), 485—507.

非线性常微分方程的奇点 [英 singular points of non-linear ordinary differential equations 法 points singuliers des équations différentielles ordinaires non-linéaires 德 Singularitäten der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 俄 особые точки нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 日 非線形常微分方程式の特異点] 考虑常微分方程组

(1) $dy_i/dx=f_i(x, y_1, \cdots, y_n), j=1, \cdots, n$. f_i 是 $x, y_1, \cdots, y_n$ 的解析函数. 为简单起见, 用 $\boldsymbol{y}$ 表示 $(y_1, \cdots, y_n)$. 对于一点 $(a, \boldsymbol{b})$, 如果 f_i 是全纯的,则只存在一个解 $\boldsymbol{y}(x)$, 当 $x\to a$

时 $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{b}$，且在 $x=a$ 是全纯的．当 $(a,\boldsymbol{b})$ 是 $(f_1,\cdots,f_n)$的奇点时，就称$(a,\boldsymbol{b})$为(1)的**奇点**(singular point)．对于(1)的奇点 $(a,\boldsymbol{b})$，因为 Cauchy 存在定理†不能适用，所以对于当 $x\to a$ 时 $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{b}$ 的解的存在唯一性，必须用别的方法来研究．于是就提出下面三个问题：i) $x\to a$ 时 $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{b}$ 的解是否存在，如果存在，它有多少．ii) 如果 $x\to a$ 时有 $\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{b}$ 的解，那末求出它的解析表达式．更一般地，求出在$(a,\boldsymbol{b})$邻近的所有解的表达式．iii) 研究这样的解的性质．因为这些问题只在点$(a,\boldsymbol{b})$的附近考虑，因此称为**局部问题** (local problem)．但是，甚至当 $n=1$ 时，在$(a,\boldsymbol{b})$是一般奇点的情形，这个研究也是极其困难的，因此，主要研究 f 在 $(a,\boldsymbol{b})$ 是亚纯函数的情形．对 $n>1$ 的情形的研究比起 $n=1$ 的情形来进展很少．由于可取 $x-a$，$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}$ 为变量，不失一般性，可以假定 $a=0$，$\boldsymbol{b}=0$．

【一个方程的情形】 考虑 $n=1$ 的情形．对于

(2) $\quad dy/dx=Y(x,y)/X(x,y)$，

假设 X，Y 在 $(0,0)$ 是全纯的．若当 $X(0,0)=0$ 时 $Y(0,0)\neq 0$，则可考虑 $dx/dy=X/Y$，我们看到：i) 如果 $X(0,y)\not\equiv 0$，那末 (2) 只存在一个解 y，当 $x\to 0$ 时，$y\to 0$，它在 $x=0$ 是代数型的；ii) 如果 $X(0,y)\equiv 0$，那末不存在使得当 $x\to 0$ 时 $y\to 0$ 的解．

其次，考虑 $X(0,0)=Y(0,0)=0$ 的情形．这是首先由 C. A. A. Briot 和 J. C. Bouquet 所研究的．为了求代数的解，他们引进了和求代数函数的 Puiseux 展开相类似的方法．A. R. Forsyth, J. Malmquist 利用这个方法，研究了(2)的简化，而由福原满洲雄所完成．福原把$(0,0)$的邻域 $|x|<\delta$，$|y|<\Delta$ 适当地分成几个部分域，在各部分域中直接把(2)写成标准型的方程，然后详细地研究了这些方程．这些标准型中有代表性的是

(3) $\quad xdy/dx=f(x,y)$，$f(0,0)=0$，

(4) $\quad x^{\sigma+1}dy/dx=f(x,y)$，

$\qquad f(0,0)=0$，σ 是正整数．

(3)称为 **Briot-Bouquet 微分方程**(Briot-Bouquet differential equation)．

【方程组的情形】 对应于(3)，(4)的方程组是

(5) $\quad xdy_j/dx=f_j(x,y_1,\cdots,y_n)$，

$\qquad j=1,\cdots,n$，

(6) $\quad x^{\sigma+1}dy_j/dx=f_j(x,y_1,\cdots,y_n)$，

$\qquad j=1,\cdots,n$．

这些方程是继 Briot-Bouquet 之后，H. Poincaré, M. H. Dulac, Malmquist, W. J. Trjitzinski, 福原等很多学者研究过的．为了求这些方程的解，首先根据形式变换

(7) $\quad y=\sum p_{kl}\,x^k z^l$，

或

(8) $\quad y_j=\sum p_{k_0 k_1\cdots k_n}\,x^{k_0} z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}$，

$\qquad j=1,\cdots,n$，

求出尽可能简单的关于 z 或 $z_j(j=1,\cdots,n)$ 的方程．然后，将 z 或 z_j 的方程解出，把它们的通解代入形式变换，就求出了**形式解** (formal solution)．研究这样所得的形式解 (即变换(7)和(8)) 的收敛性或渐近展开性，最后，从这个解的表示，解的性质就清楚了．

【Briot-Bouquet 微分方程的解的性质】 方程 (3) 根据 $\lambda=f_y(0,0)$ 的值，可以分为下面四种情形：i) $\lambda\neq 0$ 或负实数．在此情形，作适当的变换(7)，可将(3)变换为

$$xdz/dx=\lambda z+bx^{\lambda}.$$

如果 λ 不是正整数，那末有 $b=0$．这时变换(7)是 x 和 z 的收敛级数．因此，存在 x，z 的全纯函数 $\varphi(x,z)$，使 $y=\varphi(x,x^{\lambda}(b\log x+C))$ 是通解．ii) $\lambda=0$ 的情形，根据变换(7)，可变为

$$xdz/dx=z^{m+1}(b+b'z^m),\quad m>0.$$

若 $b=0$，必有 $b'=0$，这时 $x=0$ 是方程(3)的正则点．当 $b\neq 0$，$b'=0$ 时，关于 z 的方程的通解为 $z=(C-mb\log x)^{-1/m}$，当 $bb'\neq 0$ 时，为 $z=\left(\frac{b'}{b}\,\mathfrak{a}\left(\frac{mb^2}{b'}\log\frac{1}{x}+C\right)\right)^{-1/m}$．这里，$\zeta=\mathfrak{a}(t)$ 是 $\zeta-\log\zeta=t$ 的反函数．于是，对 $|x|<\delta$，$|m\arg z+\arg b|<3\pi/2-\varepsilon$，$|z|<\Delta$，

存在一个全纯函数 $\varphi(x, z)$，将所得解代入 z，就得到 (3) 的通解. iii) $\lambda = -\mu/\nu$ 是负的有理数的情形. z 的方程可以变为

$$\nu x dz/dx = z(-\mu + b(x^{\mu}z^{\nu})^m + b'(x^{\mu}z^{\nu})^{2m}).$$

这个方程的通解，当 $b' = 0$ 时，是 $z = x^{\lambda}(C - m\nu b \log x)^{-1/m\nu}$，当 $bb' \neq 0$ 时，是 $z = x^{\lambda}\left(\frac{b'}{b} \times a\left(\frac{m\nu b^2}{b'}\log\frac{1}{x} + C\right)\right)^{-1/m\nu}$. 于是，对 $\left|m\mu \arg x + m\nu \arg z + \arg b \mp \frac{\pi}{2}\right| < \pi, |x| < \delta, |z| < \Delta$，存在一个适当的全纯函数 $\varphi(x, z)$，将此解代入 z，就得到(3)的通解. 特别是，当 $b = b' = 0$ 时，$\varphi(x, z)$ 在 $(0, 0)$ 是全纯函数. iv) λ 是负的无理数的情形. z 的方程变为

$$xz' = \lambda z.$$

在此情形，变换(7)可以是收敛的也可以是发散的. Dulac 证明了：如果(7)发散，且存在一个解 $y(x)$，使得沿适当的路线 L，当 $x \to 0$ 时有 $y \to 0$，那末当 $x \in L$，$x \to 0$ 时对任意常数 α，$\beta > 0$ 有 $|x^{\alpha} y^{\beta} \arg x| \to \infty, |x^{\alpha} y^{\beta} \arg y| \to \infty$. 但是，这样的解的存在还没有得到证明. C. L. Siegel 证明了：如果 λ 满足某个不等式，那末 (7) 是收敛的. (7) 是发散的例子，首先是由 Dulac 给出的. 涉谷泰隆给出了 (7) 是发散的简单的例子.

关于(4)考虑 $f(0,0) = 0, \lambda = f_y(0,0) \neq 0$ 的情形. 最圆满的结果是由福原得到的. 也就是说，根据适当的变换(7)，把(4)变为

$$x^{\sigma+1}dz/dx = z\sum_{j=0}^{\sigma} a_j x^j, \ a_0 = \lambda.$$

它的通解是 $z = Cx^{a} e^{\Lambda(x)}$，这里 $\Lambda(x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 σ 次多项式. 当 $\sum_j p_{jk} x^j \ (k = 0, 1, \cdots)$ 在某个角域中是某个函数 $\varphi_k(x)$ 的渐近展开时，$\sum \varphi_k(x) z^k$ 就成为 z 的收敛幂级数.

对方程(5)假定 $f_i(0, \cdots, 0) = 0$. 令 $\lambda_{ik} = \partial f_i/\partial y_k(0, \cdots, 0)$. 设由 (λ_{ik}) 所组成的矩阵的特征值†为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. i) 如果选取 ω，使得 $|\omega|, |\arg\lambda_1 - \omega|, \cdots, |\arg\lambda_n - \omega|$ 都小于 $\pi/2$，那末 (5) 存在这样的解，它可以展开成 x 和 z_k 的 $m+1$ 个变量的收敛幂级数 $y_i = \sum p_{ik_0k_1\cdots k_m} x^{k_0} z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m}$. z_k 是按下列形式给出的 C 和 $\log x$ 的多项式：

$$z_k = x^{\lambda_k}(C_k + (C_1, \cdots, C_{k-1}, \log x \text{ 的多项式})), \quad k = 1, 2, \cdots, m.$$

ii) 而且，如果剩下的 $n - m$ 个特征值中等于 0 的只有一个，那末 i)的结果可以扩展如下：(5) 存在这样的解，它可以展开成含有 $m+1$ 个任意常数的 $m+1$ 个变量的收敛幂级数 $y_i = \sum p_{ik_0k_1\cdots k_m} \cdot (z_{m+1}) x^{k_0} z_1^{k_1} \cdots z_m^{k_m}$. 系数是在某个角域中全纯而且可以渐近展开成 z_{m+1} 的幂级数的函数. 一般，z 不能表为情形 i) 时那样的具体形式，但是，如果 $z_{m+1} \to 0$，那末这个展开式就和 i) 的展开式一致 (岩野正宏).

设 (6) 的右边的函数和 (3) 的一样. Trjitzinski(1939)证明了：存在一个可以渐近展开成 n 个任意常数的幂级数的解. 之后，Malmquist (1940—41)在强的限制条件下证明了：存在一个解，可以展开成 z 的收敛幂级数 $y_i = \sum p_{ik_\alpha\cdots k_\beta}(x) z_\alpha^{k_\alpha} \cdots z_\beta^{k_\beta}$，$z_k$ 是任意常数 C 和 $\log x$ 的多项式，具有下列形式：

$$z_k = (\exp \Lambda_k(x)) x^{\lambda_k}(C_k + (C_{k-1}, \cdots, C_\alpha, \log x \text{ 的多项式})).$$

Trjitzinski 的结果是 Malmquist 的结果的特殊情形. 另一方面，福原得到了关于(4)的形式解的基本结果. 这个结果后来又被岩野改进了，他在弱的条件下，讨论了这样得到的形式解的收敛性，所得到的结果包含了以前的结果(岩野，Ann. Mat. Pura Appl., 1957, 1959). $p_{ik_\alpha\cdots k_\beta}(x)$ 是在某个角域内全纯的，而且当 $x \to 0$ 时是可以渐近展开成 x 的幂级数的函数. 由岩野所给出的这个角域是最大的.

在非线性的情形，也还得到了类似于 O. Perron, F. Lettenmeyer, 福原和岩野在线性情形中所得到的结果 (→线性常微分方程的奇点)：关于

$$x^{\sigma_i} y_i' = f_i(x, y_1, \cdots, y_n), \ i = 1, 2, \cdots, n,$$

如果 $\sum \sigma_i < n$，那末存在至少 $n - \sum \sigma_i$ 个在 $x = 0$ 全纯的解 (R. W. Bass, Amer. J. Math.,

77(1955)).

【奇异摄动】 关于含有参变量的微分方程

$$(9)\qquad \varepsilon^{\sigma_j} y_j' = f_j(x, y_1, \cdots, y_n, \varepsilon),$$
$$j = 1, 2, \cdots, n,\ \sigma_j \geqslant 0,$$

当其右边满足下述条件时，W. R. Wasow, W. A. Harris，涉谷，岩野和斎藤利弥等对于构造含有几个任意常数的解的渐近展开或收敛展开的问题，进行了各种各样的研究．这里，$f_j(x, y, \varepsilon)$ 是关于 $|x| < a$，$|y| < b$，$|\arg\varepsilon| < c$，$0 < |\varepsilon| < d$ 的 (x, y, ε) 的全纯函数，当展开成 y 的幂级数时，其系数在 $\varepsilon \to 0$ 时可以一致地渐近展开成 ε 的幂级数．

在(9)中，f_j 和 $\partial f_j/\partial y_k$ 关于 $-\infty < x < \infty$，$|y| < b$，$|\varepsilon| < c$ 是 (x, y, ε) 的连续函数，对于 x 具有周期 T．在(9)中令 $\varepsilon \to 0$，得到代数方程

$$(10)\qquad 0 = f_j(x, y_1, \cdots, y_n, 0),$$
$$j = 1, 2, \cdots, n,$$

假定这个方程有周期为 T 的周期解 $y_j = p_j(x)$．这时，如果(9)有周期为 T 的周期解 $y_j = p_j(x, \varepsilon)$，使得当 $\varepsilon \to 0$ 时，$y_j \to p_j(x)$；那末称 $p_j(x, \varepsilon)$ 为关于(9)的 $p_j(x)$ 的**奇异摄动**(singular perturbation)．关于这方面有 И. М. Волк(Прикл. Матем. Mex. СССР, **10** (1946))的研究．关于一个方程

$$(11)\qquad \varepsilon^{\sigma} y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(m)}, \varepsilon),$$
$$\sigma > 0,\ n > m \geqslant 0,$$

有 Wasow (1950)的卓越的研究．还有包含平沢義一的工作的详细报告(函数方程，**8** (1956))．也有和线性情形类似的关于边值问题的奇异摄动的研究(W. A. Harris, MRC Tech. Sum. Rep., **229** (1961))．

【参】 [1] M. H. Dulac, Points singuliers des équations différentielles, Mémor. Sci. Math., **61** (1934); [2] E. Picard, Traité d'analyse III, Gauthier-Villars, 新版 1960.

非线性常微分方程的大范围理论 [英 global theory of non-linear ordinary differential equations 法 théorie globale des équations différentielles ordinaires non-linéaires 德 Theorie der nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen im Grossen 俄 теория нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в целом 日 非線形常微分方程式の大域的理論] 许多熟知的函数，例如指数函数、三角函数、椭圆函数、自守函数†等，除 Γ 函数外，都满足简单的微分方程．P. Painlevé 反过来以发现新的超越函数为目的，开始在复域中系统地研究微分方程

$$(1)\qquad F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

为了在解的整个存在域中研究解，即研究解的整体性质，他假定 F 是以 x 的解析函数为系数的 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 的多项式．这样的方程称为**代数的微分方程**(algebraic differential equation)．如果 F 关于 $y^{(n)}$ 是一次的，那末(1)可以写成

$$(2)\qquad y^{(n)} = \frac{P(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})}{Q(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})},$$

其中 $P(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$，$Q(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ 是 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 的多项式．这时，称(2)为**有理的微分方程**(rational differential equation)．

如果(1)中 F 对 $y, y', \cdots, y^{(n)}$ 都是一次的，即是线性微分方程，那末(1)的解的奇点必定是系数的奇点($y^{(n)}$ 的系数是 1)(→线性常微分方程的奇点)．在(1)是非线性的情形，(1)的解的奇点可以分为二类：一类奇点是由方程本身所决定，即它与个别的解无关，另一类奇点，它的位置依赖于特解的选择．换言之，一类奇点的位置与通解中所包含的任意常数无关，另一类则和任意常数一起变动．前者称为**固定奇点**(fixed singular point)，后者称为**可移奇点**(movable singular point)．线性方程只有固定奇点，它是系数的奇点．如果解的奇点是分枝点†，那末同样可以分为**固定分枝点**(fixed branch point)和**可移分枝点**(movable branch point)．

【一阶代数的常微分方程】 考虑一阶的有理的微分方程

$$(3)\qquad y' = P(x, y)/Q(x, y),$$

如果 $P(x,y)$，$Q(x, y)$ 是互素的 x, y 的多项式，那末(3)的固定奇点就是具有下列性质的点 ξ，ξ'：1) $Q(\xi, y) = 0$；2) $Q(\xi', y) \neq 0$，$P(\xi',$

$y) = Q(\xi', y) = 0$ 具有根 $y = \eta$. 但是，对于以 $t = \frac{1}{x}$ 作为自变量的方程，如果 1) 或 2) 在 $t = 0$ 成立，那末把 $x = \infty$ 分别当作 ξ 或 ξ'；对于 $z = \frac{1}{y}$ 的方程，使 2) 在 $z = 0$ 成立的 x 值应预先当作 ξ'. 这时，(3)的解，一般在 $x = \xi$, ξ' 具有超越奇点†. 而且，$x = \xi'$ 不能是解的本性奇点†，一般是寻常奇点†. 除 $x = \xi$, ξ' 以外所出现的 (3) 的解的奇点必定是代数奇点†，于是对于具有 ξ, ξ' 以外任意一点作为代数奇点的解是存在的. (3) 没有可移分枝点的充要条件是：(3)是一个 Riccati 微分方程.

对于一阶代数的微分方程

$$F(x, y, y') = 0, \tag{4}$$

决定 (4) 的固定奇点 ξ, ξ', 即 (4) 所定义的 x, y 的代数函数具有奇性之处，然后 Painlevé 证明了下面的定理：(4) 的解的可移奇点是代数奇点. 在 Painlevé 之前，L. Fuchs 求出了(4)不具有可移分枝点的条件. 随后，H. Poincaré 证明了：当这个条件满足时，把 y' 考虑作 y 的代数函数，于是，代数曲线的亏格† (genus) g 对于不同于 ξ, ξ' 的 x 是一定的；如果 $g = 0$, 那末(4)可化为 Riccati 方程，如果 $g = 1$, 那末利用椭圆函数(4)是可积的，如果 $g > 1$, 那末(4)是代数地可积的. Painlevé 发现，在 Fuchs 和 Poincaré 的推论中有不完备之处，他证明了上面他的定理和下面的定理，补充了这个不足. 设 $\varphi(x; y_0, x_0)$ 是满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的(4)的解. 令 $\bar{x}$, $\bar{x}_0$ 是不同于 ξ 和 ξ' 的二个点，令 L 是连接 $\bar{x}_0$ 和 $\bar{x}$ 且不通过 ξ, ξ' 的一条曲线，$\varphi(x; y_0, \bar{x}_0)$ 在 L 的充分小的邻域内解析拓展到 $\bar{x}$ 所得的值为 $\varphi_L(\bar{x}; y_0, \bar{x}_0)$, 如果我们把它考虑为 y_0 的函数，那末在任意点 $y_0 = b$ 的邻域内 $\varphi_L(\bar{x}; y_0, \bar{x}_0)$ 和 y_0 的一个代数体函数的几个分枝相符合. Painlevé 还将 $\varphi(x; y_0, x_0)$ 作为 y_0 的函数来考查，研究了解是有限多值的情形. 而且，还求出了 $\varphi(x; y_0, x_0)$ 成为 y_0 的代数函数的条件.

在(4)不含 x 的情形，不存在可移分枝点这件事和(4)的解全是单值的这件事是等价的，于是，解可以用有理函数、指数函数、椭圆函数来表达. 这样的方程称为 **Briot-Bouquet 微分方程** (Briot-Bouquet differential equation).

J. Malmquist 利用 P. Boutroux 的方法，在固定奇点的附近，研究了(3)的解的性质，得到了下面的结果. 如果(4)至少有一个解，它有本性奇点，在此奇点附近是有限多值的，并且没有可移分枝点，那末(4)是一个不具有可移分枝点的方程. 如果(4)具有一个有限多值的超越解，那末利用代数变换可以将 (4) 化为不具有可移分枝点的方程. 作为一个特别情形，如果(3)的一个解，在它的本性奇点周围，是有限多值的，而且没有可移分枝点，那末 (3) 是一个 Riccati 微分方程.

之后，福原滿洲雄、吉田耕作、佐藤徳意、木村俊房和松田千鶴子研究了方程 (3). 木村去掉了解在本性奇点周围是有限多值的假定，得到了下面的结果. 如果解 $\varphi(x)$ 具有本性奇点 $x = \xi$, 那末在 $x = \xi$ 的任意邻域内，除 $P(\xi, y) = 0$ 的根以外 $\varphi(x)$ 取所有值无限次. 当 (3) 不是 Riccati 微分方程时，可以利用有限次的代数运算来判定：在本性奇点 $x = \xi$ 周围 (3) 是否存在不具有可移分枝点的解. 如果有这样的解，那末 $x = \xi$ 是它的一个对数分枝点†. 福原和木村研究了关于具有本性奇点 $x = \xi$ 的解在 $x = \xi$ 的 Julia 方向†. 松田详细地研究了，当 x 沿直线趋近固定奇点 $x = \xi$ 时解的性质，并证明了，除特殊情形外，解收敛于某个值. 为了求(3)的代数解，Ch. Briot 和 J. C. Bouquet 考虑了类似于把代数函数展开成 Puiseux 级数†的方法. 福原改进了这个方法，成功地在 $x = \xi$ 的邻域内将 (3) 分解成几个标准型的方程. 于是，就可以应用局部理论来研究方程(3). 木村和松田利用这个方法得到了上述结果.

【二阶代数的常微分方程】 对二阶方程可以和对一阶方程一样提同样的问题：不具有可移奇点的方程是怎样的方程？在这样的方程中使通解是单值的或有限多值的是怎样的方程？为了积分这样的方程，除了作为一阶方程或线

性方程的解所得的函数外需要怎样的新的超越函数？这些问题是由 E. Picard, Painlevé 所研究的，由于在二阶方程出现可移超越奇点，因此研究是极其困难的．但是 Painlevé 根据自己的方法确定了不具有可移分枝点的二阶有理微分方程的标准型．这样的方程，除了可以利用由一阶方程或线性方程所定义的函数来积分以外，可以利用有理变换化为下列六个方程之一：

(I) $$y''=6y^2+x,$$

(II) $$y''=2y^3+xy+\alpha,$$

(III) $$y''=y'^2/y-y'/x+(\alpha y^2+\beta)/x+\gamma y^3+\delta/y,$$

(IV) $$y''=y'^2/2y+3y^3/2+4xy^2+2(x^2-\alpha)y+\beta/y,$$

(V) $$y''=y'^2\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)-\frac{y'}{x}+\frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma y}{x}+\frac{\delta y(y+1)}{y-1},$$

(VI) $$y''=\frac{y'^2}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-x}\right)-y'\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-x}\right)+\frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha+\frac{\beta x}{y^2}+\frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2}+\frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right].$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 都是常数．这些方程的解称为 **Painlevé 超越函数** (transcendental function of Painlevé)．方程 (VI) 是 B. Gambier 发现的，他发现在 Painlevé 的计算中有一个疏忽．方程 (I) 的解是单值的，它的性质由 Boutroux 所研究． (VI) 的解一般以 $x=0,1,\infty$ 为其对数分枝点，它的性质由 R. Garnier 所研究．

关于 y'' 是二次的情形，是由 Malmquist 和 F. Tricomi 所研究的．

关于一般二阶有理微分方程的解的可移超越奇点，有下面的结果(木村)．设 $P(x,y,y')$, $Q(x,y,y')$ 关于 y' 的次数分别是 p,q．如果 $p>q+2$，那末解 $\varphi(x)$ 没有可移本性奇点．但是 $\varphi'(x)$ 可以有这样的奇点．如果 $p>q+2$ 且 $Q(x,y,y')$ 不能分解成 $Q_1(x,y)\,Q_2(x,y,y')$，那末解 $\varphi(x)$ 和 $\varphi'(x)$ 都不能具有可移本性奇点．如果 $p\leqslant q+2$，那末 $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ 可以具有可移本性奇点．但是，在 $p\leqslant q+2$ 时，如果 Q 不能分解成 $Q_1(x,y)\,Q_2(x,y,y')$，那末 $\varphi(x)$ 不能有可移本性奇点．如果 $x=a$ 是解 $\varphi(x)$ 或 $\varphi'(x)$ 的可移本性奇点，那末在 $x=a$ 的任意邻域中，$\varphi(x)$ 或 $\varphi'(x)$ 除有限个值外，取所有值无限次．如果 $p>q+2$，那末每一个解都具有 Iversen 性质．因此可移奇点不组成连续统†．

【高阶的及其他的常微分方程】 对二阶方程的 Painlevé 方法亦可应用于高阶方程．利用这个方法 Painlevé, J. Chazy, Garnier 研究了没有可移分枝点的三阶方程，但是还没有完成． Chazy 详细地研究了下列形式的方程：

$$y'''=(1-1/n)y''^2/y'+b(y)y'y''+c(y)y'^3,$$

证明了，在 $n=-2$, $b(y)=0$ 的情形，可以得到 Fuchs 函数和 Klein 函数(一自守函数)．

和 Gambier 几乎同时，R. Fuchs (L. Fuchs 之子)从线性方程的单值群†的研究中导出了方程 (VI)．他证明了，对于线性方程

$$\frac{1}{z}\frac{d^2z}{dt^2}=\left(\frac{\alpha}{t}+\frac{\beta}{(t-1)^2}+\frac{\gamma}{(t-x)^2}+\frac{\delta}{t(t-1)}+\frac{3}{4(t-y)^2}+\frac{a}{t(t-1)(t-x)}+\frac{b}{t(t-1)(t-y)}\right)$$

当奇点 x 变动时，它的单值群保持不变的充要条件是：$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 都是常数，y 是貌似奇点†，它作为 x 的函数时，满足 (VI)，而且 a,b 都是 x,y,y' 的有理函数．Garnier 对于具有正则奇点 $0,1,\infty,x_1,\cdots,x_n$ 及貌似固定奇点 $y_1,\cdots,y_n$ 的二阶线性微分方程，在当 $x_1,\cdots,x_n$ 变动时它的单值群不变的条件下，导出了对于 $y_1,\cdots,y_n$ 完全可积的†偏微分方程组，证明了：当把 $y_1,\cdots,y_n$ 的对称函数看作 x_i 之中任一个的函数时，它是没有可移分枝点的方程．

如果方程不是代数的，那末即使是一阶的，

也会出现可移超越奇点．对于 $F(x, y, y')=0$，假设 F 是关于 y' 的多项式，它的系数在域 $\mathfrak{D}$ 中是 x, y 的亚纯函数，木村对于 $\mathfrak{D}$ 求得了一个充分条件，使得每一个解在 x 平面的域 D 中都具有 Iversen 性质．

O. Hölder 证明了，Γ 函数不能满足代数的微分方程．而且，如果一个在单位圆内的亚纯函数的阶† 是 ∞，那末这个函数也不能是代数的微分方程的解．

【参】［1］藤原松三郎，常微分方程式論，岩波，1930；［2］福原滿洲雄，常微分方程式，岩波全書，1950；［3］P. Painlevé, Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm, Paris, 1897；［4］P. Boutroux, Lecons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, Gauthier-Villars, 1908；［5］E. L. Ince, Ordinary differential equations, Longmans-Green, 1927；［6］L. Bieberbach, Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionen theoretische Grundlagen darstellt, Springer, 1964；［7］M. Hukuhara (福原滿洲雄)-T. Kimura (木村俊房)-Mme. T. Matuda (松田千鶴子), Équations différentielles ordinaires du premier ordre dans le champ complexe, J. Math. Soc. Japan, 1961；［8］J. Malmquist, Sur les fonctions d'un nombre fini de branches définies par les équations différentielles du premier ordre, Acta Math., **36** (1913), 297—343, **74** (1941), 175—196；［9］P. Painlevé, Mémoire sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme, Bull. Soc. Math. France, **28**(1900), 201—261, Acta Math., **25** (1902), 1—86.

非线性振动［英 non-linear oscillations 法 vibrations non-linéaires 德 nicht-lineare Schwingungen 俄 нелинейные колебания 日 非線形振動］通常所说的**非线性振动**是指可用非线性常微分方程的解所表达的振动．非线性振动理论有时也称为**非线性力学**（non-linear mechanics）．大约从 1930 年以来，在苏联在 Н. М. Крылов 和 Н. Н. Боголюбов 的领导下，联系着动力系统和电路的振动，积极地开展了研究，战后，西欧各国也变得活跃起来．

在非线性振动理论中，微分方程可以写成下面两种形式的一阶方程组：

(1)　　$dx/dt = X(x)$

(2)　　$dx/dt = X(x, t)$

（x 是向量，t 是标量）．形式(1)的方程称为**自治系统**（autonomous system）．在形式(2)的方程中，通常 $X(x, t)$ 关于 t 是周期的或殆周期† 的．前一情形被称为**周期系统**（periodic system），后一情形被称为**殆周期系统**（almost periodic system）．物理中的振动，通常是这些方程的周期解或殆周期解所表示的运动，因此，非线性振动理论的主要问题是求这些方程的周期解或殆周期解．但是，要这些解所表达的振动能在实际中出现，必须要对初值的微小变化，解是稳定的†（→稳定性）．因此，研究上述周期解或殆周期解的稳定性，就成为一个重要问题．由于表示运动的方程组本身是近似的情形，因此进一步提出了关于稳定性的问题．这就是，表达实际出现的振动的方程的周期解或殆周期解，对于方程自身的微小变化也必须是稳定的．这样的稳定性称为**构造稳定性**（structural stability）．研究这个问题，在非线性振动理论中也是重要的．

可以有这样的情形，虽然微分方程不具有周期解和殆周期解，但可以有周期的或殆周期的积分流形†．也就是说，在 t, x 空间中这样的流形 $x = f(t, \theta)$，它关于 t 是周期的或殆周期的，关于参数 θ 是周期的，且通过这个流形上的任意一点的微分方程的解曲线总是包含在流形上．在此情形，对应于包含在这个流形上的解曲线的一个解，我们仍然可以认为它表示一个振动．因此，在非线性振动理论中，去求这样的流形，并研究它的稳定性，是非常重要的．

在非线性振动的研究中，现在最常用的方法是下列三种：1) 几何方法，2) 分析方法，3) 数值方法．

【几何方法】几何方法是常用来求自治系统、周期系统的周期解的．对于自治系统，因为周期解在 x 空间（通常称为**相空间**（phase space））中表示为一个闭轨道†（以 t 作为参数），所以几何方法也就是几何地研究轨道在相空间的性质，用来证明闭轨道的存在性和稳定性的方法．这时，可以利用临界点†、极限集†（→常微分方程定性理论）等性质．在周期系统 (2) 的情形，令 $X(x, t)$ 关于 t 的周期是 $\omega(>0)$，如果 $t=$

0 时使 $x = \alpha$ 的 (2) 的解是 $x = \varphi(t, \alpha)$, 那末周期解由 $x = \varphi(t, \alpha_0)$ 给出,这里 α_0 满足$\varphi(\omega, \alpha_0) = \alpha_0$. 因此,在相空间考虑由 $x' = \varphi(\omega, x)$ 所定义的映射 $x \to x'$, 研究它的不动点的存在性,就可以得知周期解的存在性.在这里经常用的是 Brouwer 不动点定理†. 在上面的映射中,可以不存在不动点,但是存在一个闭的不变流形. 这时,我们得到一个周期的积分流形. 用几何方法所得的有代表性结果是下列这些:

i) **Liénard 方程** (Liénard's equation) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$ $(\cdot = d/dt)$ (S. Lefschetz [4];占部実-古屋茂 [15]),当 $f(x)$, $g(x)$ 满足下列条件时,只有一个轨道稳定的周期解. 1) 在 $|x| < \infty$ 时, $f(x)$ 是连续的, $g(x)$ 局部地满足 Lipschitz 条件; 2) $f(x) = f(-x)$ 时 $f(0) < 0$, $g(x) = -g(-x)$ 时 $xg(x) > 0$; 3) $x \to \infty$ 时 $F(x) = \int_0^x f(u)\,du \to \infty$; 4) $F(x)$ 在 $0 < x < a$ 中是负的,在 $x \geqslant a$ 中是单调递增的,且 $F(a) = 0$. 著名的 **van der Pol 方程** (van der Pol's equation) $\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ $(\lambda > 0)$ 是它的特殊情形.

ii) $\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t)$ (Lefschetz [4]), 当 $f(x)$, $g(x)$, $e(t)$ 满足下列条件时,至少有一个周期为 ω 的周期解. 1) $e(t)$是周期为 ω 的连续周期函数; 2) 在 $|x| < \infty$ 时 $f(x)$ 是连续的, $g(x)$ 局部地满足 Lipschitz 条件; 3) $|x| \to \infty$ 时, $g(x)/x \to \infty$; 4) 存在正数 B 和 C, 使得 $|F(x) - Cg(x)| \leqslant B|x|$ $\left(F(x) = \int_0^x f(u)du\right)$.

几何方法只能给出定性的结果,而像周期解的形状等那样的定量结果通常不能知道. 因此,应用于实际问题时,仅是几何方法还不能得到充分的结果.

【分析方法】 因为分析方法和上述的几何方法相比可以使我们得到许多定量的结果,因此现在也是最常用的. 但是这个方法的适用范围,主要是**弱非线性系统** (weakly non-linear system), 即同线性相差很少的非线性系统. 与此相对,一般的非线性系统称为**强非线性系统** (strongly nonlinear system). 因此,这个方法完全是广义的摄动†法,它的差别仅在于扰动的取法和计算的方法. 利用这种方法可以将已给的方程完全变成下列形式的方程:

$$(3) \qquad \dot{x} = Ax + \varepsilon X(x, t, \varepsilon).$$

这里 ε 是绝对值很小的一个参数, A 是形如 $A = \mathrm{diag}(O_p, B)$ 的矩阵 (O_p 是 p 阶零矩阵, B 是特征值的实部均不为 0 的矩阵), $X(x, t, \varepsilon)$ 对 t 是周期的或殆周期的. i) 若 $X(x, t, \varepsilon)$ 对 t 是周期的,则常常使用 Poincaré 的摄动法. ii) 在实际问题中经常碰到 $A = 0$, 即(3)变为

$$(4) \qquad \dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon).$$

在这种情形经常使用**平均法** (method of averaging). 方程

$$(5) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t, \varepsilon)$$

是可以化为这种方程的一例. 因为形如 (5) 的方程在实际问题中经常出现,所以直接对(5)使用平均法的各种方便的计算方法被想出来了,诸如**线性化法** (method of linearization), **渐近法** (asymptotic method), **调和平衡法** (method of harmonic balance) 等 (Н.Н.Боголюбов-Ю. А. Митропольский [1]). iii) 当 $X(x, t, \varepsilon)$ 关于 t 是殆周期的且 A 的特征值的实部全不为 0 时,可以有效地使用以常数变易法为基础的逐次逼近法(即由 $\dot{x}_{k+1} = Ax_{k+1} + \varepsilon A(x_k, t, \varepsilon)$ 定出殆周期函数$\{x_k\}$的方法)(古屋[2], J. K. Hale [3]). iv) 对于形如 (3) 的一般方程可以有效地使用把平均法的原理一般化了的方法 (Hale [3]).

我们举出由 Боголюбов-Митропольский 所证明的 ([1]) 已成为平均法的原理的定理. 这个定理是关于微分方程

$$(6) \qquad \dot{x} = \varepsilon X(x, t)$$

的解的, $X(x, t)$ 是定义在域 $D \times L$(L 是实直线)中的关于 x 一致的(即殆周期†与 x 无关) t 的殆周期函数. 令 $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(\xi, t)\,dt = X_0(\xi)$.

平均法的定理 1: 假设存在 $\xi = \xi_0 \in D$, 使得 $X_0(\xi_0) = 0$, 而 $X_0(\xi)$ 关于 ξ 的 Jacobi

矩阵的特征值的实部在 $\xi=\xi_0$ 时都不为 0．又设 $X(x,t)$ 及它的关于 x 的导数在 $D_\rho\times L$ 中有界且关于 x 是一致连续的，而 D_ρ 是包含在 D 内的 $\xi=\xi_0$ 的 ρ 邻域．于是，对充分小的 $\varepsilon(>0)$，在 $x=\xi_0$ 的邻域中，存在一个而且只有一个(6)的殆周期解 $x=x_\varepsilon(t)$，它和 $X(x,t)$ 有同样的频率基底，而且当 $\varepsilon\to 0$ 时，$x_\varepsilon(t)$ 一致收敛于 ξ_0．而且，如果 $X_0(\xi)$ 关于 ξ 的 Jacobi 矩阵的特征值的实部，当 $\xi=\xi_0$ 时全是负的，那末 $x=x_\varepsilon(t)$ 是渐近稳定的†．

当 $X(x,t)$ 关于 t 具有周期 ω 时，于是可以定义 $X_0(\xi)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega X(\xi,t)dt$，这时上面的定理就给出了 N. Minorsky 的**频闪观测法**（stroboscopic method）（[6]）的原理．

平均法的定理 2：设微分方程

$$\dot{\xi}=\varepsilon X_0(\xi) \tag{7}$$

具有周期解 $\xi=\xi(\varepsilon t)\in D$，关于这个周期解的(7)的第一变分方程的特征指数，它们的实部除一个外全不为 0，$X(x,t)$ 及其关于 x 的直到二阶的导数，在 $U_\rho\times L$ 中是有界的且关于 x 是一致连续的．这里 U_ρ 是包含在 D 中的 $\xi=\xi(t)$ 的一个 ρ 邻域．于是，如果 $\varepsilon(>0)$ 充分小，那末在 $x=\xi(\theta)$ 的附近只存在(6)的一个殆周期的积分流形 $x=f_\varepsilon(t,\theta)$，它和 $X(x,t)$ 有同样的关于 t 的频率基底，且当 $\varepsilon\to 0$ 时 $f_\varepsilon(t,\theta)$ 一致收敛于 $\xi(\theta)$．而且，如果关于 $\xi=\xi(\varepsilon t)$ 的(7)的第一变分方程的特征指数，它们的实部除一个外全是负的，那末积分流形 $x=f_\varepsilon(t,\theta)$ 是渐近稳定的．

【数值方法】 数值方法可以用来给出振动的具体形式．因为一般不管非线性的强弱，这种方法都能使用，所以在实际问题中应用起来是很方便的．虽然这个方法从很久以来一直使用，但是，从数学的观点看并不令人满意．然而，随着计算机的发展，在数学上满意的方法逐渐地提了出来． 为了计算自治系统的周期解，占部提出了以 Newton 迭代法为基础计算相空间的闭轨道的方法（[12]）．他利用这个方法，对 $\lambda=0$-10，20 计算了 van der Pol 方程的周期解（[13]）．为了计算周期系统的周期解，即使在强非线性系统的情形，**Галёркин 法**（Galerkin's procedure）（将三角多项式代入已给的方程，比较和未知系数同样多个调和项，定出多项式系数的方法）也是非常有效的（关于近似三角多项式的收敛性及它的数值计算法，见[14]，[16]）．对弱非线性系统来说，虽然分析方法（摄动法）是非常有效的方法，但是，当在方程中所含的参数值一固定，对这个值用分析方法所得的结论正确与否，一般是不容易判断的．而且，对强非线性系统来说，用分析方法去分析问题是非常困难的，现在任何有效的方法大概还没有发现．

对非线性振动的研究，除上列的三种方法以外，有时也常使用下面的实用的近似方法：对非线性项用折线进行近似，化为解线性方程的方法（模拟计算机†主要就是根据这个原理）和图解法等．

从物理观点来说，振动是一种定常状态．但是，当方程组包含一个随着时间变化的参数时（例如，长度随时间慢慢地变化的钟摆等），振动也随时间变化（例如，振幅随时间的变化等），这也是一个重要问题．这个问题由 Митропольский 以**非定常振动**（non-stationary oscillations）为题首先在数学上进行了深入的研究（[1]，[7]）．他的方法是：把随着时间变化的参数看作 $\tau=\varepsilon t$（ε 是正的小参数）的函数，开始时把 τ 当作与时间无关的参数来进行分析，以后，令 $\tau=\varepsilon t$，研究振动随时间的变化．根据这个方法，Митропольский 从数学上阐明了滞后现象等．

【参】 [1] Н. Н. Боголюбов-Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Москва, 1958; [2] 古屋茂-南雲仁一，非線型振動論，岩波講座現代応用数学，1957（中译本：古屋茂、南雲仁一，非线性振动论，上海科学技术出版社，1962）；[3] J. K. Hale, Oscillations in nonlinear systems, McGraw-Hill, 1963; [4] S. Lefschetz, Lectures on differential equations, Princeton, 1948. [5] S. Lefschetz, Differential equations-geometric theory, Interscience, 1957（中译本：S. 莱夫谢茨，微分方程几何理论，上海科学技术出版社，1965）；[6] N. Minorsky, Nonlinear oscillations, Prin-

ceton, 1962. [7] Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, Москва, 1964; [8] В. В. Немыцкий-В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва, 1950 (中译本: B. B. 涅梅茨基、B. B. 斯捷巴诺夫, 微分方程定性论, 科学出版社, 1956, 1959); [9] R. Reissig-G.Sansone-R.Conti, Qualitative Theorie nichtlinearer Differentialgleichungen, Edizioni Cremonese, Roma, 1963; [10] G. Sansone-R. Conti, Equazioni differenziali non lineari, Edizioni Cremonese, Roma, 1956; [11] В. И. Зурбов, Колебания в нелинейных и управляемых системах, Ленинград, 1962; [12] M. Urabe, On a method to compute periodic solutions of the general autonomous system, J. Sci. Hiroshima Univ., **24** (1960); 189—196; [13] M. Urabe (占部実), Numerical study of periodic solutions of the van der Pol equation, International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, New York, 1963, p. 184—192; [14] M. Urabe (占部実), Galerkin's procedure for non linear periodic systems, MRC Technical Summary Report #501, Madison, 1964; Arch. Rational Mech. Anal., **20** (1965), 120—152; [15]占部実-古屋茂,非線型問題,現代数学講座,共立出版,1957; [16] M. Urabe (占部実)-A.Reiter, Numerical computation of nonlinear forced oscillations by Galerkin's procedure, MRC Technical Summary Report #510, Madison, 1964, J. Math. Anal. Appl., **14** (1966), 107—140. [17] M. Urabe (占部実), Nonlinear autonomous oscillations, Academic Press,1967.

非线性问题 [英 non-linear problem 法 problème non-linéaire 德 nichtlineare Aufgabe 俄 нелинейная проблема 日 非線形の問題] 能被归结为研究线性空间的线性映射性质的问题称为线性问题. 与此相反,**非线性问题**,一般说来,是归结为研究不一定是线性映射的性质的问题。近年来,在物理学、工程和其他领域中,研究具体的非线性问题,具有重要的意义,受它的影响,作为数学理论的非线性振动(→非线性振动)、非线性规划(→非线性规划)、非线性控制等带有非线性名称的理论得到了发展.

首先,讲述非线性泛函方程. 在自变量为 x, 应变量为 y 的常微分方程

(1) $$f(x, y, y', \cdots) = 0$$

($y' = dy/dx, \cdots$) 中, f 关于 $y, y', \cdots$ 是一次式的情形,称常微分方程 (1) 为线性的,不是这种情形,称为非线性的. 关于以 x, y 为自变量、u 为应变量的偏微分方程† $F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \cdots) = 0$ ($u_x = \partial u/\partial x, \cdots$)或者关于未知函数 $y(x)$ 的积分方程†

$$y(x) + \lambda\int_a^b F(x, t, y(t))dt = f(x),$$

根据 F 关于 $u, u_x, u_y, \cdots$ 或者关于 y 是否是一次式,来区分线性还是非线性的(自变量和未知函数的个数增加时也一样). 若 F 是线性的,这样的泛函方程称为线性的, 不含有关于未知函数的 0 阶项的称为齐次的†,含有这种项的称为非齐次的†. 像微分方程、积分方程理论中所说明的那样,对线性的泛函方程来说,解也是可以叠加的. 也就是说, 非齐次方程的通解是可表为一个特解和齐次方程的一个通解之和. 而且,如果齐次方程的任意二个解为 y_1, y_2, 那末它的线性组合 $a_1y_1 + a_2y_2$ (a_1, a_2 是常数)也是解. 对非线性泛函方程来说, 这种叠加性质就失去了, 这是比线性的情形处理困难的一个原因.

描绘自然现象的微分方程, 如关于电磁场的 Maxwell 方程† 和量子力学中的 Schrödinger 方程†都是线性的例子,但是质点和刚体以及流体和弹性体的运动方程等很多情形是非线性的. 过去对数学物理来说主要考虑线性方程. 只有当所考虑的物理量的变化在任何意义下都可以看作是微小的情形, 才能用线性方程来描述实际现象. 当不容许有这样的假定时,例如,像有限振幅的振动,弹性体的有限变形那样,非线性问题就成为重要的了.

【非线性泛函方程】 处理非线性泛函方程,对应于各自的问题,大多采用特殊的方法. 但是,我们也举出几个一般的处理方法: i) 用已知函数表示解; ii) 假定与已知其解的情形的偏离是微小的,则可用迭代法、摄动法或平均法等; iii) 用适当的方法将问题线性化; iv) 几何学方法; v) 拓扑分析法; vi) 数值方法; vii) 上述几个方法组合起来的方法等.

i) 只限于非常特殊的情形. 但是,将原方程进行适当变形, 作出可用已知函数表达解的新的方程. 比较这二个方程的解就可以知道原方程的解的性质.

ii) 是广泛利用的. 类似于 Newton 迭代法 (→代数方程的数值解法) 的迭代方法是有

效的. 下面举一个摄动法的例. 以 y 为未知函数的泛函方程 $F[y]=0$, 利用某个小参数 ε 可写成

(2) $$F[y]=F_0[y]+\varepsilon F_1[y,\varepsilon].$$

这里 $F_0[y]=0$ 是齐次线性方程. 在此情形, 原先的泛函方程可以写成

(3) $$F_0[y]=-\varepsilon F_1[y,\varepsilon].$$

先令右端为 0, 解 $F_0[y]=0$, 得到解 y_0, 然后将 y_0 代入(3)的右端,得非齐次线性方程 $F_0[y]=-\varepsilon F_1[y_0,\varepsilon]$. 假设它的解为 y_1, 再将 y_1 代入(3)的右端,…. 这样继续进行,得到解 $y_0, y_1, y_2,\cdots$, 分别称为0级近似,一级近似,二级近似,…. 如果 $y_0, y_1, y_2,\cdots$ 收敛于函数 y,那末 y 就是 $F[y]=0$ 的解. 用这个方法应该注意的是: 令参数 ε 为 0 的 0 级近似方程 $F_0[y]=0$ 的阶数可以比原方程 $F[y]=0$ 的阶数低. 在此情形, $F_0[y]=0$ 的全部满足所给边界条件的解一般是不存在的. 这是因为对 $\varepsilon\to 0$ 出现了使得 $F_1[y]\to\infty$ 的域 D_1, 在那里是不能忽视 $\varepsilon F_1[y]$ 的. 因为 D_1 和通常的 ε 都是很小的, 所以问题的域可以分为二部分 $D=D_0+D_1$, D_0 是使 $F_0[y]=0$ 的, D_1 是考虑域的狭小部分, 使得原来的方程 $F[y]=0$ 可以简化. 这个方法在处理边界层[†],冲击波, 薄板的有限变形等问题时常常使用.

iii) 是各种各样的. 在 ii) 中所讲的摄动法也是一种线性化方法. 现在举出另一个线性化方法的例子. 考虑关于自变量 x, y, 应变量 u, v 的偏微分方程组

$$A_iu_x+B_iu_y+C_iv_x+D_iv_y=0,\ i=1,2,$$

其中 A_i, B_i, C_i, D_i 只是 u, v 的函数. 虽然这个方程组关于 u, v 是非线性的, 但是, 如果函数行列式 $J=u_xv_y-u_yv_x$ 不等于 0, 那末可以把 u, v 取为自变量,将方程变为

$$A_iy_v-B_ix_v-C_iy_u+D_ix_u=0,\ i=1,2.$$

因此, 就将它线性化了. 我们称这个变换为**速端曲线变换**(hodograph transformation). 速端曲线法(→流体力学)就是利用这个事实. 它可用于气体的一维非定常流, 二维定常无旋流的问题.

iv) 是,例如,当从几何上研究常微分方程的解所表示的轨道的性质来了解解的性质时利用的. 此外, Brouwer 的不动点定理(→不动点定理)是证明存在周期解的有力工具. 另外,在常微分方程中利用适当的 Ляпунов 函数的方法也可看作是一种几何方法.

v) 是在证明非线性偏微分方程的解的存在时, 导入适合问题的函数空间, 引用关于 Banach 空间[†]论等的抽象空间的非线性映射的一般理论那样的观点. 和 ii), iv) 等并不是有截然的区别的. Галёркин 法[†]等变分法的手段也可以看作是拓扑分析方法. 虽然如此, 从一般的观点看来,关于方程

$$x=F(x)$$

的解的存在定理,即关于映射 F 的不动点定理[†]是最最基本的. 它的朴素的基础就是所谓的压缩映射原理. 这个定理是这样的: 设 F 定义在整个 Banach 空间 X 中,如果对常数 $\alpha: 0\leqslant\alpha<1$, 它是满足 $\|F(x)-F(y)\|\leqslant\alpha\|x-y\|$ $(x, y\in X)$ 的映射 $X\to X$, 那末从任意的出发点 $x_0=a\in X$ 所开始的逐次迭代 $x_{n+1}=F(x_n)$ 是收敛的, $\{x_n\}$ 的极限 x_∞ 就给出了 $x=F(x)$ 的唯一解. 反过来, 上述 Brouwer 不动点定理的发展是 Schauder 不动点定理和 Leray-Schauder 不动点定理,它们也是经常被有效地利用的(→不动点定理).

和不动点定理不同的一般性定理之中值得注意的该是不久前由 G. J. Minty 发现的关于非线性**单调算子** (monotone operator) 的定理. 虽然对定理的各种改进和精确化方法也已经提了出来, 我们只用整理过的形式讲一讲基本的情形. 首先,设 H 是 Hilbert 空间, 它的内积表为$(,)$. 所谓 $H\to H$ 的映射 F 是**单调的**(monotone), 就是对所有的 x, y, 有 $\Re(F(x)-F(y), x-y)\geqslant 0$. 而且, 所谓 F 是在**强的意义下单调的** (strongly monotone), 就是存在一个正的常数 c, 使得

$$\Re(F(x)-F(y), x-y)\geqslant c\|x-y\|^2,\ x, y\in H$$

成立. 于是,下面的定理成立 (→[11]).

定理. 如果映射 $F: H\to H$ 是单调而且连

续的，那末对任意的 $u \in H$，方程 $x + F(x) = u$ 具有唯一的解 $x \in H$.

这个定理和下面的定理是等价的(→[12]).

定理. 如果映射 $F: H \to H$ 是连续而且是在强意义下单调的，那末对任意的 $u \in H$，方程 $F(x) = u$ 具有唯一的解 x.

关于这些定理的一般化及对偏微分方程的应用例子，可以参阅 F. E. Browder ([12])，关于对发展方程的推广，可以参阅 T. Kato (加藤敏夫)([13]).

vi) 是实用的方法。数值方法和上述的理论方法结合起来使用是很多的. 虽然数值方法的理论上的根据有许多是还不十分充分的，但是，由于最近计算机的迅速发展，数值方法的实际应用范围变得更广泛了. 即使上述 i)—v) 的方法很难适用的情形，也可以在固定问题中所含的参数的值后求它的数值解.

【控制系统的非线性问题】 下面考虑控制系统的一个非线性问题 (→[7]). 用 n 维向量表示控制对象的状态的某个控制系统的基本方程可以表示为下列微分方程组:

$$(4)\qquad \dot{x} = Ax - \varphi(\sigma)b,\ \dot{\xi} = \varphi(\sigma),$$
$$\sigma = c'x - \gamma\xi,\ \dot{x} = dx/dt,\ \dot{\xi} = d\xi/dt.$$

这里，x 是 n 维向量(表示控制对象的状态)，A 是 n 阶常数矩阵，它的特征值的实部是负的(不加控制时 x 满足 $\dot{x} = Ax$)，ξ 是一标量，表示控制量，b，c 是 n 维常数向量，γ 是常数. 所有这些都假定是实数. 又 c' 是 c 的转置向量(行向量).

$\varphi(\sigma)$ 是控制机构的特征函数，一般不表为 σ 的一次函数. 控制系统的非线性性质是根据这个特征函数的性质的. $\varphi(\sigma)$ 一般具有下列性质: 1) $\varphi(\sigma)$ 是定义在 $(-\infty, \infty)$ 中的实值连续函数; 2) $\varphi(0) = 0$，当 $\sigma \neq 0$ 时 $\sigma\varphi(\sigma) > 0$; 3) $\int_0^{\pm\infty} \varphi(\sigma)d\sigma = +\infty$. 不论怎样选取满足 1), 2), 3) 的 φ，只要对方程组 (4) 的任意解 $x(t)$，$\xi(t)$，当 $t \to +\infty$ 时有 $x(t) \to 0$，$\xi(t) \to 0$，那末我们就称(4)为**绝对稳定的** (absolutely stable).

对控制系统的问题来说，虽然求出使系统是绝对稳定的充分必要条件是重要的，但是，对上述的方程组 (4) 来说，有下面的结果 (M. B. Попов). i) 对某个非负的数 q 及所有的实数 ω，如果有

$$(5)\qquad \Re((1 + i\omega q)(c'(i\omega E - A)^{-1}b)) + q\gamma \geq 0,$$

那末 (4) 是绝对稳定的. 这里假设 E 是 n 阶单位矩阵. ii) 如果根据 Ляпунов 函数

$$V(x, \sigma) = x'Bx + \alpha\sigma^2 + \sigma f'x + \beta\int_0^\sigma \varphi(\sigma)d\sigma$$

(f 是 n 维常数向量) 证明了 (4) 是绝对稳定的，那末对所有的实数 ω，满足 (5) 的 $q \geq 0$ 是存在的.

【各种非线性问题】 因为有关流体力学和振动论的非线性问题在前面几节中已经讲了，所以这里举几个别的非线性问题的例子.

1) 下列非线性差分微分方程:

$$du(t)/dt = (a - u(t-1))u(t),$$

称为 **Cherwell-Wright 方程** (Cherwell-Wright equation) (→[10]). 设已给初始条件 $u(t) = g(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ ($g(t)$ 是连续函数)，则在 $0 \leq t < \infty$ 中解是唯一确定的. 如果 $a \leq 0$，$g(1) > 0$，那末 $u(t) \to 0$ $(t \to \infty)$; 如果 $a = 0$，$g(1) < 0$，那末 $u(t) \to -\infty$ $(t \to \infty)$. 其次，假设 $a > 0$. 如果 $g(1) < 0$，那末 $u(t) \to -\infty$ $(t \to \infty)$; 如果 $g(1) > 0$，那末当 $t \to \infty$ 时，$u(t)$ 或者单调地趋近 a，或者围绕 a 振动(有界). 当 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时不引起振动，但是当 $a > 1/e$ 时却引起振动. 当 $a \leq 3/2$ 时振动衰减，而当 $a > \pi/2$ 时就出现振动不衰减的振动解.

2) 如果我们把恒星看作是一个气体球，并假定它的各点的压力 p 和密度 ρ 之间有所谓的多方指数 (polytrope) 关系 $p = K\rho^\gamma$ (K，γ 是常数)，那末我们得到一个决定密度分布的二阶微分方程，称为 **Emden 方程** (Emden's equation) 或**多方指数微分方程** (polytropic differential equation). 这是构成恒星内部构造的经典理论基础

的方程. 设 r 是离中心的距离, G 是万有引力常数, λ 是任意常数, 如果令 $\gamma = 1 + 1/n$, $\rho = \lambda\theta^n$, $r = \alpha\xi$, $\alpha = ((n+1)\ K\lambda^{\gamma-2}/(4\pi \cdot G))^{1/2}$, 那末方程可以写成下列形式:

$$(1/\xi^2)d(\xi^2 d\theta/d\xi)/d\xi = -\theta^n.$$

我们称在 $\xi = 0$ 满足 $\theta = 1, d\theta/d\xi = 1$ 的解为指数 n 的 **Lane-Emden 函数**(Lane-Emden function). 由于方程对变换 $\xi \to A\xi, \theta \to A^{2/(n-1)\theta}$ (A 是任意常数)是不变的, 因此它本质上可以化为一阶方程, 但是除 $n = 0$, 1 及 5 外, 它不能解析地求解. Emden 对 n 从 0.5 到 6 之间的几个值给出了数值解, 并由 Green, D. H. Sadler 及 Miller 等把它精确化了. Lane-Emden 函数一般直到头一个零点止是单调减少的, 这个点成为"星"的边界. 对 $n \geqslant 5$ 来说, 这个边界变成无穷远, 但是 $n \to \infty$ 的情形由于相当于一个等温气体球而正得到很好地研究, 这时利用 $\rho = \lambda e^{-\lambda}$, $\alpha = (K/4\pi G\lambda)^{1/2}$, 方程可化为

$$(1/\xi^2)d(\xi^2 d\psi/d\xi)/d\xi = e^{-\psi}.$$

3) 描述作为神经网络模型的神经细胞的状态的 **Caianiello 方程** (Caianiello's equation) (→[8]) 是:

$$x_i(t+\tau) = \mathbf{1}\left[\sum_j \sum_r a_{ij}^{(r)} x_j(t - r\tau) - \theta_i\right],$$

这里 $x_i(t)$ 表示第 i 个神经细胞在时刻 t 的状态, 取值 0 或 1, 考虑的时间是离散的, 都是 τ 的倍数: $0, \tau, 2\tau, \cdots$. 实系数 $a_{ij}^{(r)}$ 表示从细胞 j 到细胞 i 的结合过程中过去历史的影响的权重, 非负整数 θ_i 表示细胞 i 的阈值. $\mathbf{1}[x]$ 是这样的函数, 当 $x \geqslant 0$ 时是 1, 当 $x < 0$ 时是 0.

4) 考虑关于神经的兴奋和传导的 **Hodgkin-Huxley 方程** (Hodgkin-Huxley equation) (→[9]):

$$\partial^2 V/\partial x^2 = (2r_0/R_0)(C_0\partial V/\partial t + g_1 m^3 h(V - V_1) + g_2 n^4(V - V_2) + g_3(V - V_3)),$$

$$\partial m/\partial t = -(\alpha_1(V) + \beta_1(V))m + \alpha_1(V),$$

$$\partial h/\partial t = -(\alpha_2(V) + \beta_2(V))h + \alpha_2(V),$$

$$\partial n/\partial t = -(\alpha_3(V) + \beta_3(V))n + \alpha_3(V),$$

这里, α_i, $\beta_i (1 \leqslant i \leqslant 3)$ 是已给的 V 的函数, r_0, R_0, C_0, g_i, V_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 都是常数. 边界条件是: 在 $t = 0$ 给定 V, m, h, n, 在 $x = 0$ 给定 V. 在此情形, 是在 $0 < x < \infty$, $0 < t < \infty$ 中求 $V(x,t)$ 的问题.

5) **KdV 微分方程** (Korteweg-de Vries differential equation)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

在水波理论和等离子体物理中都有应用. 最近, P. D. Lax 和其他人给出了存在**孤立子** (soliton) 解的证明[14]. (这方面的发展→[20]—[24].)

上面叙述的主要是与泛函方程有关的问题. 但是也有其他的重要的非线性问题. 例如, 非线性规划 (→非线性规划法), N. Wiener 的非线性统计理论 (→[4]) 等.

【参】 [1] Th. von Kármán, The engineer grapples with nonlinear problems, Bull. Amer. Math. Soc., **46** (1940), 615—683; [2] Nonlinear problems in mechanics of continua, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, **1** (1949); [3] E. Leimanis-N. Minorsky, Dynamics and nonlinear mechanics, John Wiley, 1958; [4] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory, MIT, 1958; [5] International symposium on nonlinear differential equations and nonlinear mechanics, Academic Press, 1963; [6] T. L. Saaty-J. Bram, Non-linear mathematics, McGraw-Hill, 1964; [7] S. Lefschetz, Stability of nonlinear control systems, Academic Press, 1965; [8] E. R. Caianiello, Outline of a theory of thought process and thinking machines, Journal of Theoretical Biology, **1** (1961), 204—235; [9] A. L. Hodgkin-A. F. Huxley, A quantative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, Jour. Physiol., **117** (1952), 500—544; [10] S. Kakutani (角谷静夫) -L. J.Markus, On the nonlinear difference-differential equation $y'(t)=(A-By(t-\tau))\,y(t)$, Contributions to the theory of nonlinear oscillations vol. 4, Princeton, 1958, p. 1—18; [11] G. J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert space, Duke Math. J., **29** (1962), 341—346; [12] F. E. Browder, Existence and uniqueness theorems for solutions of nonlinear boundary value problems, Proc. Symp. Appl. Math., A. M. S., **17** (1965), 24—49; [13] T.Kato(加藤敏夫), Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Appl. Math., A. M. S., **17** (1965), 50—67; [14] P. D. Lax, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Comm. Pure Appl. Math., **21** (1968), 467—490; [15] J. Leray- J. L. Lions, Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, Bull. Soc. Math. France, **93** (1965), 97—107; [16] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, 1969. [17] T. L. Saaty, Modern nonlinear equations, McGraw-Hill, 1967; [18] J. T. Schwartz, Nonlinear functional analysis, Lec-

tures notes, New York University, 1963—1964; [19] L. Nirenberg, Topics in nonlinear functional analysis, 1973—1974; [20] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) p. 1095—1097; [21] A. Sjöberg, On the Korteweg-de Vries equation, Existence and uniqueness, J. Math. Anal. Appl. **29** (1970) p. 569—579; [22] A. C. Scott- F. Y. F. Chu -D. W. McLaughlin, A soliton: A new concept in applied science, Proceedings of IEEE, vol. 61, №. 10, 1973; [23] R. M. Miura, The Korteweg-de Vries equations: A survey of results, SIAM Review, vol. 18, №. 3, 1976; [24] M. J. Ablowitz- D. J. Kaup- A. C. Newell - H. Segur, The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, Studies in Appl. Math. v. 53, 1974, p. 249—315.

伴随微分方程 [英 adjoint differential equation 法 équation différentielle adjointe 德 adjungierte Differentialgleichung 俄 сопряжённое дифференциальное уравнение 日 随伴微分方程式]

【常微分方程】 对于 n 阶线性齐次常微分方程

$$(1)\qquad L[y]\equiv\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y^{(n-k)}=0,$$

我们称

$$(2)\qquad M[y]\equiv\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(\bar{p}_k y)^{(n-k)}=0$$

为原来方程的**伴随微分方程**,称 $M[y]$ 为 $L[y]$ 的**伴随微分式**(adjoint differential expression). 反之,$L[y]$ 也是 $M[y]$ 的伴随微分式. 在伴随微分式之间有 **Lagrange 恒等式** (Lagrange's identity)

$$(3)\qquad \bar{z}L[y]-y\overline{M[z]}=dN[y,z]/dx$$

成立. 这里 $N[y,z]$ 是 $y^{(h)}$, $\bar{z}^{(h)}$ $(h=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的双线性型

$$(4)\qquad N[y,z]=\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1-k}(-1)^h(p_k\bar{z})^{(h)}y^{(n-1-k-h)},$$

称为**伴随双线性** (bilinear concomitant) **微分式**. 根据这种关系,如果能得到 $M[y]=0$ 的 p 个独立的解,那末就能把原来方程 $L[y]=0$ 的阶数降低 p 阶. 当 $M[y]\equiv L[y]$ 时,就称 $L[y]=0$ 为**自伴的** (self-adjoint).

如果 p_k 为实函数,那末要使(1)是自伴的,它的阶数 n 必须是偶数,设 $n=2m$,则 $L[y]$ 可以表达为 $L[y]=\sum_{k=0}^{m}(p_k y^{(m-k)})^{(m-k)}$. 这时(1)就成为变分问题 $\delta\int\sum p_k(y^{(m-k)})^2dx=0$ 的 Euler 方程[†]. 现在取任意的 n 个函数 $z_1,\cdots,z_n$,如果由

$$\sum g_iz_i=0,\cdots,\sum g_iz_i^{(n-2)}=0,$$
$$\sum g_iz_i^{(n-1)}=(-1)^np_0^{-1}$$

定出 $g_1,\cdots,g_n$,则由 Lagrange 恒等式可以导出

$$y=\sum_i c_ig_i-\sum_i g_i\int_a^x z_iL[y]dx+\sum_i g_i\int_a^x M[z_i]ydx$$

(c_i 为常数). 由此可知,微分方程 $L[y]=f$ 可以化为 Volterra 型积分方程[†] (**Dini 法** (Dini's method)). 特别是,如果已知 $M[z]=0$ 的若干个解,把它们取为 z_i,则可使方程简化.

下面假定已给对 n 个应变量 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的一阶线性齐次微分方程组

$$(5)\qquad y_i'+\sum_{j=1}^{n}p_{ij}(x)y_j=0,\ i=1,2,\cdots,n,$$

于是称

$$(6)\qquad z_i'-\sum_{j=1}^{n}\bar{p}_{ji}(x)z_j=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

为(5)的**伴随微分方程组**(adjoint system of differential equations). 这种关系显然是相互的. 因为对 (5) 及 (6) 的解有 $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\bar{z}_i\right)=0$,即 $\sum_{i=1}^{n}y_i\bar{z}_i=$ 常数成立,所以如果已知(6)的 p 组解,则(5)的未知变数的个数就能减少 p 个. 使(5)成为自伴的充分必要条件是,$p_{ij}=-\bar{p}_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,于是有 $\Re\, p_{ii}=0$.

【偏微分方程】 对于偏微分方程

$$L[u]\equiv\sum a_p(x)D^pu=0$$

$(p=(p_1,\cdots,p_n),\ D^p=\partial^{p_1+\cdots+p_n}/\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n})$

我们称

$$L^*[u]\equiv\sum(-1)^{p_1+\cdots+p_n}D^p(\bar{a}_p(x)u)=0$$

为 $L[u]=0$ 的**伴随偏微分方程**(adjoint partial differential equation). 例如,对于实系数的二阶

线性齐次偏微分方程

(7)　$L[u] \equiv \sum p_{ik}u_{ik} + \sum p_i u_i + pu = 0,$

$$p_{ik} = p_{ki}$$

$$(u_{ik} = \partial^2 u/\partial x_i \partial x_k,\ u_i = \partial u/\partial x_i),$$

$$M[v] \equiv \sum (p_{ik}v)_{ik} - \sum (p_i v)_i - pv = 0$$

就是它的伴随偏微分方程．这里假定 p_{ik}，p_i，p 都是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数．当然，L 与M的关系是相互的．根据恒等式

$$vL[u] - uM[v] = \sum \partial N_i/\partial x_i,$$

$$N_i = \sum_k \{p_{ik}u_k v - (p_{ik}v)_k u\} + p_i uv,$$

我们有广义 **Green 公式**

$$\int_D (vL[u] - uM[v])dx_1 \cdots dx_n$$

$$= -\sum_i \int_{\partial D} N_i \cos(\nu, x_i) dS.$$

右端是在域D的边界 ∂D 上的 $n-1$ 维曲面积分，ν 表示内向法线．(7)是自伴的充分必要条件是 $p_i = \sum_k \partial p_{ik}/\partial x_k$．这等价于 (7) 可以从变分问题 $\delta \int \sum p_{ik}u_i u_k dx_1 \cdots dx_n = 0$ 导出．

【参】［1］福原満洲雄，常微分方程式論，岩波講座数学，1933；［2］福原満洲雄，偏微分方程式論，岩波講座数学，1935．其他→常微分方程、偏微分方程的［参］．

稳定性［英 stability　法 stabilité　德 Stabilität　俄 устойчивость　日 安定性］一般说来，当给与某个状态以非常小的扰动时，如果这个扰动永远保持是小的，那末称这个状态是**稳定的**(stable)，反之，如果这个扰动逐渐变大使得越来越脱离原来的状态，那末称这个状态是**不稳定的**(unstable, instable)．这本来是对物理上的定常状态所考虑的概念．例如，一端固定的棒处于重力场中时（它可绕支点转动），棒从支点垂直向下悬吊的状态和垂直向上站立的状态，都是定常状态，但是，很明显前者是稳定的状态，后者是不稳定的状态．在物理上只有稳定状态才认为是可能实现的，因此，这个区别是重要的．

稳定性的概念在今天已不限于物理的状态，而在各种领域中被广泛地利用．在这里我们将只限于讲微分方程的解的稳定性．在此情形，所谓稳定性是指当初值†稍微变动一些时，解也只是变动很小一点．不言而喻，如果自变量只限于在有限的范围内变动，那末由于解对初值的连续性（→常微分方程的初值问题），稳定性一般是得到保证的．在讨论稳定性的情形时，提出这样的问题：当自变量不是在有界范围内变动时将会怎样？

设 n 维 Euclid 空间的点表为$(x_1, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}$，$(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \boldsymbol{x}(t)$，$(x_1'(t), \cdots, x_n'(t)) = \boldsymbol{x}'(t)$（$'$是关于 t 的微分），令 $|\boldsymbol{x}| = \sum_{j=1}^n |x_j|$．对于微分方程

(1)　$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),$

初值问题的解的存在及唯一性（→常微分方程的初值问题），在 $|t| < \infty$，$|\boldsymbol{x}| < \infty$ 时是被保证的．

令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是(1)的解．如果对于任意的 $\varepsilon > 0$，可以定出一个 $\delta > 0$，使得当 $|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)| < \delta$ 时，对(1)的所有的解 $\boldsymbol{x}(t)$，有 $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon$，$0 \leqslant t < \infty$ $(-\infty < t \leqslant 0)$，那末我们称解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$是（**在 Ляпунов 意义下**）**正向（负向）稳定的**(positively (negatively) stable (in the sense of Ljapunov))．如果正向和负向都是稳定的，那末称为**两向稳定的**(stable in both directions)．

【渐近稳定性】设解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是正向（负向）稳定的，如果对于它附近的任意解 $\boldsymbol{x}(t)$ 在 $t \to +\infty$ $(-\infty)$ 时有 $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| \to 0$，则称解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 是**正向（负向）渐近稳定的**(positively (negatively) asymptotically stable)．今后，凡是讲述只关于正向稳定情形的定理，就简单地称**渐近稳定的**(asymptotically stable)．

当讨论 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 的稳定性时，如果作变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}(t)$，那末由于 (1) 变为

(2)　$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}(t)) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{\varphi}(t)) \equiv \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}),$

$$\boldsymbol{F}(t, 0) \equiv \boldsymbol{0},$$

因此，只要讨论这个方程的解 $\boldsymbol{y} = 0$ 的稳定性就行了．如果假定 $\boldsymbol{F}$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 是连续可微的，那末有

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}_y(t, 0)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y}),\ \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y}) = o(|\boldsymbol{y}|).$$

从这个方程去掉 $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y})$ 这一项，得到线性方程

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{F}_y(t, 0)\boldsymbol{y},$$

称之为对(1)的**变分方程** (variational equation).

已知的稳定性的判别条件，几乎全是关于渐近稳定性的，它们都是利用变分方程的解的. 这里列举几个基本的判别条件:

I) 对于 (2)，如果存在具有下列性质的函数(称之为 **Ляпунов 函数** (Ljapunov function)) $V(t, \boldsymbol{y})$，那末 $\boldsymbol{y} \equiv 0$ 是渐近稳定的. i) V 对 $t \geqslant 0$, $|\boldsymbol{y}| \leqslant \rho$ 是可微的, ii) $V \geqslant 0$, $dV/dt \leqslant 0$, iii) 当 $\boldsymbol{y} \to 0$ 时关于 t 一致地有 $V \to 0$ ([4],[5]).

I) 是非常一般的条件，下面讲的 II), III), V) 等可以看作具体地构造 Ляпунов 函数的例子.

II) 把(2)写成下列形式:

$$\boldsymbol{y}' = P(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y}), \tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y})$ 当 $\boldsymbol{y} \to 0$ 时是连续的，关于 t 一致地有 $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y}) = o(|\boldsymbol{y}|)$. 于是，下面的定理是基本的. 如果 $P(t)$ 是常数矩阵，它的所有特征值的实部全是负的，那末 $\boldsymbol{y} \equiv 0$ 是渐近稳定的([3],[4]).

III) 设 $P(t)$ 是关于 t 的连续周期函数. 如果令变分方程

$$\boldsymbol{z}' = P(t)\boldsymbol{z} \tag{4}$$

的基本解组†为 Z，令 $P(t)$ 的周期为 T，那末存在一个常数矩阵 C，使得 $Z(t+T)=Z(t)C$. 设 C 的特征值†为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，令 $\mu_k = (\log \lambda_k)/T$，则称 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 为(4)的**特征指数** (characteristic exponent). 显然，特征指数确定到 $2\pi i/T$ 的整数倍. 如果(4)的特征指数的实部全是负的，那末(3)的解 $\boldsymbol{y} \equiv 0$ 是渐近稳定的([3],[4]).

IV) 设在 (1) 中 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 是关于 t 具有周期 T 的周期函数，而且 (1) 具有周期解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, $\boldsymbol{\varphi}(t+T) = \boldsymbol{\varphi}(t)$，如果令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{\varphi}(t)$，将(1)化为(3)的形式，那末 $P(t)$, $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y})$ 也具有周期 T. 因此，在研究周期解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 的稳定性时可以利用 III). 这是非线性振动的周期解的稳定性问题. 关于这方面，对各种特殊形式的微分方程还得到了 III) 以外的许多结果(→非线性振动). 特别是，$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 是不包含 t 的所谓自治系统†的情形，和 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{q}(t)$, $\boldsymbol{q}(t+T) \equiv \boldsymbol{q}(t)$ 的情形，即自治系统加上强迫振动的情形，关于这些方面，很久以来就有很多的研究.

V) 在(3)中令 $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y})$ 具有和 II) 同样的性质，设 $P(t)$ 对 $t \geqslant 0$ 是连续而且有界的，可以根据一个适当的线性变换 $\boldsymbol{y} = A(t)\boldsymbol{z}$，把 (3) 变为

$$\boldsymbol{z}' = Q(t)\boldsymbol{z} + \boldsymbol{h}(t, \boldsymbol{z}),$$

其中 $Q(t)$ 是一个三角矩阵，它的元素对 $t \geqslant 0$ 都是连续而且有界的([4],[7]). 因此，不失一般性，在这里从一开始就把 $P(t)$ 考虑作一个三角矩阵. 令 $P(t)$ 的对角元素所组成的对角矩阵为 $P_0(t)$, $G(t) = \exp\int_0^t P_0(t)\,dt$, $H(t) = G(t) \cdot \int_0^t G^{-1}(t)\,dt$，如果当 $t \to \infty$ 时 $G(t)$ 和 $H(t)$ 都是有界的，那末 $\boldsymbol{y} \equiv 0$ 是渐近稳定的([4],[8]).

关于渐近稳定性的问题，有非常多的研究(例如[2])(→常微分方程的渐近性质).

【条件稳定性】 令 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是 (1) 的解，$\mathfrak{F}$ 是 (1) 的解的族. 如果对 $\varepsilon > 0$ 可以定出一个 $\delta > 0$，使得对任意的解 $\boldsymbol{x}(t) \in \mathfrak{F}$，当 $|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)| < \delta$ 时有 $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon$, $0 \leqslant t < \infty$，那末我们称 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 关于 $\mathfrak{F}$ 是稳定的. 在不是稳定的情形，如果能适当选取一个解族 $\mathfrak{F}$，使得解关于它是稳定的，那末就称这个解具有**条件稳定性** (conditional stability). 例如，在(3)中令 $P(t)$ 是常数矩阵，它的特征值中有些具有负的实部，有些具有正的实部，而且 $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{y})$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 是可微的，如果当 $\boldsymbol{y} \to 0$ 时 $\boldsymbol{g}_y(t, \boldsymbol{y}) = o(1)$ 关于 t 一致地成立，那末 $\boldsymbol{y} \equiv 0$ 具有条件稳定性.

比稳定性弱的性质是轨道稳定性. 如果对 $\varepsilon > 0$ 可以定出一个 $\delta > 0$，使得对(1)的满足 $|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0)| < \delta$ 的任意解 $\boldsymbol{x}(t)$, $\bigcup_{0 \leqslant t < \infty} \boldsymbol{x}(t)$ 属于 $\bigcup_{0 \leqslant t < \infty} \boldsymbol{\varphi}(t)$ 的 ε 邻近，那末称解 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 具有

轨道稳定性 (orbital stability).

当(1)的右端不包含 t 时,常常称(1)为动力系统.在动力系统的理论中,在考虑解的稳定性的同时,闭不变集的稳定性也是一个重要问题(→常微分方程定性理论,[6]).

除上述那样的解的稳定性外,研究当(1)的右端稍微变化一下时解的变化情况的问题,也是微分方程的一个重要问题.例如,假设(1)的右端 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ 连续依赖于一个参数 ε,对 ε 的微小变化,讨论解的变化情况的问题,是所谓摄动†理论的问题.假设

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \varepsilon)$$

对 $\varepsilon = 0$ 具有一个周期解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$,如果对 $\varepsilon \neq 0$ 在 $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 附近总会出现一个周期解,那末就称 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 对摄动是稳定的.对于摄动的周期解的稳定性,在天体力学和非线性振动等理论中是一个重要问题([4],[6]).

【参】 [1] R. Bellman, Stability theory of differential equations, McGraw-Hill, 1953(中译本:R. 贝尔曼,微分方程的解的稳定性理论,科学出版社,1957);[2] L. Cesari, Asymptotic behavior and stability problem in ordinary differential equations, Springer, 1963; [3] E. A. Coddington-N.Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955; [4] S. Lefschetz, Differential equations: geometric theory, Interscience, 1957 (中译本: S. 莱夫谢茨,微分方程几何理论,上海科学技术出版社,1965); [5] A. Ляпунов, Problème général de la stabilité du mouvement, Princeton, 1947; [6] B. B. Немыцкий-B. B. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнении, ОГИЗ, 1947.(中译本:B. B. 涅梅茨基,B. B. 斯捷巴诺夫,微分方程定性论,科学出版社,1959); [7] O. Perron, Über eine Matrixtransformation, Math. Z., **32** (1930), 465—473; [8] O. Perron, Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen, Math. Z., **32** (1930), 703—728; [9] A. Halanay, Differential equations, stability, Oscillations, time lags, Academic Press, 1966; [10] T. Yoshizawa (吉沢太郎), Stability theory by Ljapunov's second method, Publ. Math. Soc. Japan. 1966.

积分不变式 [英 integral invariant 法 invariant intégral 德 invariantes Integral 俄 интегральный инвариант 日 積分不変式] 考虑表示 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的运动的微分方程组 $dx_i/dt = X_i(x_1, \cdots, x_n, t)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,其中 t 为时间.令 K 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的一个 p 维曲面 $(1 \leqslant p \leqslant n)$,在时间 t,属于 K 的点移动到 K_t.对任意的 K,如果积分

$$(1) \qquad \int_{K_t} F(x_1, \cdots, x_n, t) dw$$

与 t 无关,则称之为上述方程组的 p 次**积分不变式**.特别是,使 $\int M(x, t) dx_1 \cdots dx_n$ 成为 n 次积分不变式的充分必要条件是: $\dfrac{\partial M}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial (M X_i)}{\partial x_i} = 0$,并称 $M(x, t)$ 为**最后乘子** (last multiplier).使 $\int \sum_{i=1}^{n} M_i(x, t) dx_i$ 成为一次积分不变式的充分必要条件是: $\dfrac{\partial M_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial M_i}{\partial x_j} X_j + \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i} M_j\right) = 0$.特别是,若对任何 $p(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ 维闭曲面 K,积分(1)与 t 无关,则称(1)为 p 次**相对积分不变式** (relative integral invariant).对应于此,称前面叙述的积分不变式为**绝对积分不变式** (absolute integral invariant).

如果 $\int \sum_{i=1}^{n} M_i dx_i$ 是一次相对积分不变式,根据 Stokes 定理†, $\int \sum_{i,j} \left(\dfrac{\partial M_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial M_j}{\partial x_i}\right) dx_i dx_j$ 是二次绝对积分不变式.同样,一般从 p 次相对积分不变式可以构造 $p+1$ 次绝对积分不变式.

偶数阶方程组 $dp_i/dt = P_i(p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m, t)$, $dq_i/dt = Q_i(p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m, t)$ $(i = 1, \cdots, m)$ 写成 **Hamilton 型** (Hamiltonian type),即写成

$$P_i = -\partial H/\partial q_i, \quad Q_i = \partial H/\partial p_i,$$
$$H = H(p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m, t)$$

的充分必要条件是: $\int \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$ 是一次相对积分不变式.而且,如果方程组是 Hamilton 型的,那末 $\int \cdots \int dp_1 \cdots dp_m dq_1 \cdots dq_m$ 是积分不变式,亦即:如果在 $t = 0$ 时满足 $p_i = p_i^0$, $q_i = q_i^0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 的解是 $p_i = p_i(t, p^0, q^0)$, $q_i = q_i(t, p^0, q^0)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$,那末函数行列式

$$\left|\frac{D(p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m)}{D(p_1^0, \cdots, p_m^0, q_1^0, \cdots, q_m^0)}\right| = 1.$$

换言之,在 $(p_1, \cdots, p_m, q_1 \cdots, q_m)$ 空间中的一

个 2 m 维图形，随着各点的运动，形状虽然变化，但它的体积不变(**Liouville 定理**)．这个事实在统计力学†中具有重要意义．

H. Poincaré 发展了上面所定义的积分不变式的理论，并应用到三体问题†和稳定性†问题上去([2])．

【E. Cartan 的扩展】 Poincaré 对$(x_1, \cdots, x_m)$和 t 是分别处理的，E. Cartan 由于把它们一起处理而扩展了 Poincaré 的理论．通过 n 维空间 $(x_1, \cdots, x_n)$ 中的 p 维曲面K的各点，描绘了方程组 $dx_i/dt = X_i\ (i = 1, \cdots, n)$ 的解曲线．取二个 p 维曲面 K_1, K_2，它们和 $n+1$ 维空间 $(x_1, \cdots, x_n, t)$ 中的所有这些解曲线只交于一点． 对 Poincaré 的 p 次积分不变式 $\int F dw$，如果在外微分形式†

$$F dw = \sum_{i_1<\cdots<i_p} f_{i_1\cdots i_p}(x_1, \cdots, x_n, t)\ dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

中分别用 $dx_1 - X_1 dt, \cdots, dx_n - X_n dt$ 代替 $dx_1, \cdots, dx_n$，设所得的外微分形式为 Φ，那末有 $\int_{K_1} \Phi = \int_{K_2} \Phi$. Cartan 称 $\int \Phi$ 为 **p 次积分不变式** (integral invariant of p-th order)．相对积分不变式也可以同样推广．

特别是，考虑 Hamilton 型方程组，通过 $2m+1$ 维空间$(p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_m, t)$内的闭曲线 C 上的各点，描绘了这个方程组的解曲线．如果在这些曲线所作成的管子上把包围这管子的任意闭曲线取为 C_1，那末有$\int_C \sum_{i=1}^m p_i dq_i - dH = \int_{C_1} \sum_{i=1}^m p_i dq_i - dH$，即$\int \sum_{i=1}^m p_i\, dq_i - dH$ 是 Cartan 的一次相对积分不变式．反之，如果一个 2 m 阶方程组 $dp_i/dt = P_i(p, q, t)$, $dq_i/dt = Q_i(p, q, t)(i = 1, \cdots, m)$，对某个 $H = H(p, q, t)$，具有相对积分不变式：$\int \sum_{i=1}^m p_i dq_i - H dt$，那末可以写成 $P_i = -\partial H/\partial q_i$, $Q_i = \partial H/\partial p_i$. Cartan 称一次微分形式$\omega = \sum_{i=1}^m p_i dq_i - H dt$ 为**动量能量张量**(法 tenseur de quantité de mouvement énergie)．如果曲线 C 是在 $t =$ 常数上，那末$\int \omega$ 是 Poincaré 的相对积分不变式．如果 C 是方程组的解曲线，那末 $\int_{t_0}^{t_1} \omega$ 表示 Hamilton 的**作用积分** (action integral)．

此外，也可以定义关于连续变换群的积分不变式．

【参】 [1] E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, Gauthier-Villars, 1933 (日译本：微分式の理論，白水社，1964)；[2] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste III, Gauthier-Villars, 1899.

差分法 [英 calculus of finite differences 法 calcul aux différences finies 德 Differenzenrechnung 俄 разностное исчисление 日 差分法]

【差分】 设 x 是在域 D 变动的实变数，y 是定义在D上的 x 的函数．设Δx 为有限的固定值，a 及 $a+\Delta x$ 在D内．$\Delta y(a) = y(a+\Delta x) - y(a)$ 称为 y 在 a 点的**差分** (difference)，Δx 是 x 的差分．在 Δx 不等于 1 的情形，我们可以将 x 换为 bx (b 是某个常数)，使它成为 1，因此，不失一般性，可以假定 $\Delta x = 1$．今后，若不作特别说明，总令 $\Delta x = 1$．因此，**差商** (difference quotient) $\Delta y(x)/\Delta x$ 和差分的值相等．

$\Delta^2 y(x) = \Delta(\Delta y(x))$称作**二阶差分**(second difference)．它的值是 $\Delta^2 y(x) = \Delta y(x+1) - \Delta y(x) = y(x+2) - 2y(x+1) + y(x)$．一般地，**$n$ 阶差分**(difference of n-th order)定义为 $\Delta^n y(x) = \Delta(\Delta^{n-1} y(x))$． 它可用 $y(x), y(x+1), \cdots, y(x+n)$ 表为

$$\Delta^n y(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(x+k).$$

反之，$y(x+n)$ 可以用差分写成

$$y(x+n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta^k y(x)$$

(→插值法)．

【求和】 对给定的Δx及给定的函数$g(x)$，满足 $\Delta y(x)/\Delta x = g(x)$ 的函数 $y(x)$ 称为$g(x)$的**和** (sum)，求 $y(x)$ 的过程称为 $g(x)$ 的**求和** (summation)．如果 $\Delta x = 1$，那末也就是求满

足 $y(x+1)-y(x)=g(x)$的函数 $y(x)$. $g(x)$ 的和一般可写成 $\mathrm{S}\,g(x)\Delta x$，对于 $g(x)$ 的一个(特殊)和 $y(x)$,(一般)和 $\mathrm{S}\,g(x)\Delta x$ 由 $y(x)+c(x)$ 给出．这里 $c(x)$ 是以 Δx 为周期的函数，它相当于求不定积分时的任意常数．同积分时一样，在很多情形中把 $c(x)$ 略去了．特别是，对 $\Delta x=1$, $g(x)=nx^{n-1}$ 的和是 n 次 Bernoulli 多项式† $B_n(x)$. $\frac{1}{x}$的和是由 $\psi(x)\equiv d\log\Gamma(x)/dx$ 定义的 ψ 函数(→Γ 函数)．如果

$$-\Delta x\sum_{k=0}^{\infty}g(x+k\Delta x)$$

或

$$\Delta x\sum_{k=1}^{\infty}g(x-k\Delta x)$$

是收敛的，它们都可能是 $g(x)$ 的和，但是为了使它们收敛，则对 $g(x)$ 所要求的条件太强．为了减弱这个条件，N. E. Nörlund 得到了下面的结果：假设在 $\Delta F(x)/\Delta x=g(x)$ 中 x 是实变数，$g(x)$ 当 $x\geqslant b$ 时是 x 的连续函数．η 是任意的正数，令 $\lambda(x)=x^p(\log x)^q\ (p\geqslant 1, q\geqslant 0)$，如果

$$F(x,\Delta x,\eta)=\int_a^{\infty}g(z)e^{-\eta\lambda(z)}dz$$

$$-\Delta x\sum_{k=0}^{\infty}g(x+k\Delta x)e^{-\eta\lambda(x+k\Delta x)}$$

对 $a>b$ 是收敛的，那末F满足 $\Delta F(x,\Delta x,\eta)/\Delta x=g(x)\exp(-\eta\lambda(x))$. 如果当 $\eta\to 0$ 时 $F(x,\Delta x,\eta)$ 的极限值存在，那末它就是 $\Delta F(x)/\Delta x=g(x)$ 的解．这个极限值写成 $\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{S}}}\,g(\xi)\Delta\xi$，它称为 $\Delta F(x)/\Delta x=g(x)$ 的**主解** (principal solution).

【差分方程】 令 $\Delta x=1$，含未知函数 $y(x)$ 的差分的方程 $F(x, y(x), \Delta y(x),\cdots,\Delta^n y(x))=0$称为**差分方程**(difference equation). 令 $y=\varphi(x)$，如果它对某个域中的所有 x，满足方程，则称 $\varphi(x)$ 是这个方程的**解** (solution),求解也就是**解差分方程**．由差分和$y(x)$, $y(x+1),\cdots,y(x+n)$ 的关系式，原来的方程可变成形式为 $G(x,y(x),\cdots,y(x+n))=0$ 的方程．在应用上往往是以这一种形式给出的，称为差分方程的基本形(或标准形)．当方程关于 $y(x)$, $y(x+1),\cdots,y(x+n)$是一次式时，即为 $\sum_{i=0}^{n}p_i(x)y(x+i)=g(x)$ 时，就称这个方程是**线性的** (linear). 当 $q(x)=0$ 时，称这线性方程为**齐次的** (homogeneous)，当 $g\neq 0$ 时，称为**非齐次的** (inhomogeneous). 下面假设 $p_0(x), p_1(x),\cdots,p_n(x)$ 在某个复数域中是单值解析函数，而且假定 $p_i(x)$不存在极点和公共零点．

【线性差分方程】 考虑线性差分方程

$$(1)\qquad \sum_{i=0}^{n}p_i(x)y(x+i)=0.$$

如果 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$ 是(1)的解，那末由它们并以周期为 1 的函数 $a_1(x), a_2(x),\cdots,a_m(x)$ 作系数所组成的线性组合 $a_1(x)\cdot\varphi_1(x)+\cdots+a_m(x)\varphi_m(x)$ 也是(1)的解．

设 $\beta_1,\beta_2,\cdots$ 为 $p_1(x), p_2(x),\cdots,p_n(x)$ 之一的奇点，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 为 $p_0(x)$ 的零点，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots$ 为 $p_n(x-n)$ 的零点．于是，α_i, β_i, γ_i 全都称为线性差分方程 (1) 的**奇点** (singular point).

设有m个函数 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_m(x)$，如果不存在 $a_1(x), a_2(x),\cdots,a_{m-1}(x)$ 使得 $\varphi_m(x)=a_1(x)\varphi_1(x)+a_2(x)\varphi_2(x)+\cdots+a_{m-1}(x)\varphi_{m-1}(x)$，那末就称 $\varphi_m(x)$ 对 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_{m-1}(x)$ 在差分方程的意义下是线性无关的(下面简称为"无关的")．这里，$a_i(x)$ 是周期为 1 的函数，至少在一个不和方程(1)的任何奇点同余(mod $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}$ 是整数加群)的点上，每一个 $a_i(x)$ 都取非零的有限值．设已给m个函数，如果其中任一函数都与其余 $m-1$ 个函数是无关的，那末就称这样m个函数是"相互无关的"．如果 (1) 的 n 个解是相互无关的，那末称这组解为 (1) 的**基本解组** (fundamental system of solutions). (1) 的任意一个解可以用由 (1) 的任意基本解组的 n 个解以周期为 1 的函数作系数所组成的线性组合来表达．

一般，由 n 个函数所构成的行列式：

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1(x+1) & \varphi_2(x+1) & \cdots & \varphi_n(x+1) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \varphi_1(x+n-1) & \varphi_2(x+n-1) & \cdots & \varphi_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

称为 **Casorati 行列式**(Casorati's determinant)，通常记为 $D(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x))$. 为了要使差分方程(1)的 n 个解是相互无关的，其充分必要条件是：Casorati 行列式除在(1)的奇点及与其同余的点外不等于 0. 因此，解是否是无关的，可用 Casorati 行列式来判别.

其次，令 $\psi(x)$ 是非齐次线性方程

$$(2)\qquad P_x(y) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)y(x+i) = q(x)$$

的一个解，如果(1)的 n 个无关的解是 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, 那末(2)的所有解由 $y = a_1(x)\varphi_1(x) + a_2(x)\varphi_2(x) + \cdots + a_n(x)\varphi_n(x) + \psi(x)$ 给出. 这里 $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是以 1 为周期的函数. 当 $a_i(x)$ 看作是周期为 1 的任意函数时，就称这种形式的解为**通解**(general solution). 设 $p_n(x) \equiv 1$, 并令基本解组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 的 Casorati 行列式为 $D(x)$, 如果 $\varphi_i(x+n)$ 关于 $D(x+1)$ 的余因子除以 $D(x+1)$ 得 $\mu_i(x)$, 那末我们就有

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \mathop{\mathrm{S}}_{a}^{x} q(z)\mu_i(z)\Delta z,$$

这里右端的和 S 假定是已知的. 这相当于线性常微分方程理论中的 Lagrange 常数变易法†.

【常系数的线性差分方程】 如果差分方程

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{n} p_i y(x+i) = 0,\ p_0 \neq 0,\ p_n \neq 0$$

中的所有系数都是常数，那末容易求得 n 个无关的解. 事实上，如果 λ 是代数方程 $g(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} p_i\lambda^i = 0$ 的根，那末 λ^x 是(3)的解. 这个代数方程称为(3)的**特征方程** (characteristic equation). 如果它有 n 个互不相同的根，那末 λ_1^x, $\lambda_2^x, \cdots, \lambda_n^x$ 是 n 个互相无关的解. 一般说来，如果 λ 是特征方程的 m 重根，那末 $\lambda^x, x\lambda^x, \cdots, x^{m-1}\lambda^x$ 都是(3)的解. 因此，如果 n 个 λ 中 λ_j 的重数是 $m_j (j = 1, 2, \cdots, s;\ \sum_{j=1}^{s} m_j = n)$, 那末 $\lambda_j^x, \cdots, x^{m_j-1}\lambda_j^x$ $(j = 1, \cdots, s)$ 就组成(1)的 n 个无关的解.

即使 p_i 都是实数，特征方程的根也不一定都是实的. 求实函数解可按下述方式进行：如果 $\lambda = \mu + i\nu$ 是特征方程的 m 重根，那末 $\lambda = \mu - i\nu$ 也是 m 重根，如果令 $\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$, $\tan\varphi = \nu/\mu$, 那末 $\rho^x\cos\varphi x, \cdots, x^{m-1}\rho^x\cos\varphi x$, $\rho^x\sin\varphi x, \cdots, x^{m-1}\rho^x\sin\varphi x$ 是 $2m$ 个实函数的无关的解. 具有常系数的非齐次方程一般可以由这些解用上述的 Lagrange 常数变易法求解. 但是，当非齐次方程具有特殊的右端时，即

$$\sum_{i=0}^{n} p_i y(x+i) = p(x)\lambda^x,$$

$p(x)$ 是 k 次多项式，如果 λ 是特征方程的 m 重根，那末这个方程具有 $y = (A_0 + A_1x + \cdots + A_kx^k)x^m\lambda^x$ 的形式的解. 将它代入方程，定出待定系数 $A_0, A_1, \cdots, A_k$, 就得到解.

【差分方程和微分方程】 由于对应于微分算子 d/dx 和函数族 $\{x^m | m = 0, \pm 1, \cdots\}$ 之间的关系 $dx^m/dx = mx^{m-1}$, 存在差分算子 Δ 和函数族 $\{x^{(m)} = \Gamma(x+1)/\Gamma(x-m+1) = x(x-1)\cdots(x-m+1)\}$ 之间的关系 $\Delta x^{(m)} = mx^{(m-1)}$, 利用**阶乘级数**(factorial series) $\Sigma a_m x^{(m)}$, 关于差分方程也可以得到和微分方程类似的理论. 例如，对正则奇点的 Frobenius 法†可以照样应用于差分方程组：$(z-1)\Delta_{-1}w_k(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(z)w_j(z)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 的解的阶乘级数展开([5]). 但是，微分方程解的性质和差分方程解的性质之间是有着本质差别的. 例如，**Hölder 定理**：差分方程 $y(x+1) - y(x) = x^{-1}$ 的解不满足任何的代数的微分方程. 由于 ψ 函数†：$\psi(x) = d\log\Gamma(x)/dx$ 是上面这个差分方程的解，因此 $\Gamma(x)$ 函数也不能是任一代数的微分方程的解.

一般，关于复数 q 的 $y(qx) = f(x, y(x))$ 形式的方程称为**几何的差分方程**(geometric difference equation). 例如，用变换 $z = q^x$ 可将(1)变为

$$(1')\qquad \sum_{k=0}^{n} p_k(z)U(zq^k) = B(z).$$

虽然，反过来(1′)也可变为(1)，由于变换后的系数变得更复杂，因此也有考虑这个方程的专门的理论([3])．还有关于微分方程用差分近似的数值解法→常微分方程的数值解法．

【参】[1] 高橋健人，差分方程式，培風館，1962；[2] L. M. Milne-Thomson, The calculus of finite differences, Macmillan, 1951；[3] H. Meschkowski, Differenzengleichungen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959；[4] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, 1952；[5] W. A. Harris, Linear systems of difference equations, Contributions to differential equations I, 1963, p. 489—518；[6] N. E. Nörlund, Differenzenrechnung, Springer, 1924；[7] N. E. Nörlund, Leçons sur les équations linéaires aux différences finies, Gauthier-Villars, 1929；[8] K. S. Miller, Linear difference equations, Benjamin, 1968.

差分微分方程 [英 differential-difference equation 法 équation différentielle-différence 德 Differential-differenzengleichung 俄 дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом, разностно-дифференциальное уравнение 日 差分微分方程式] 所谓差分微分方程是包含未知函数的微分和差分的函数方程．正如在下面将要说明的那样，它常常在时滞现象中出现．历史上，自从1732年 Johann Bernoulli 最先研究关于弦的问题以来，已经发表了很多研究工作．直到1960年的概况在[1]中介绍，之后到1962年的一段时间的工作在[2]中介绍，并附有详细的参考文献．另外，包括 Γ 函数在内的特殊函数，也试着用差分微分方程来统一地处理(→特殊函数)．

一般说来，当某个现象 $x(t)$ 对时间的变化 $dx(t)/dt$ 不仅同现在有关而且同过去的状态也有关时，就表为 $dx(t)/dt=f(t,x(t),x(s))$．这里 s 在小于 t 的值的集合中变动．在这种形式的方程中最简单的是

$$(1)\quad dx(t)/dt=f(t,x(t),x(t-h_1),\cdots,x(t-h_m))$$

$(h_1,\cdots,h_m$ 是正的常数，$h_1<\cdots<h_m)$．我们称它为**差分微分方程**或具有**时滞**(span, retardation, retarded argument, time lag)的微分方程．像 $dx(t)/dt=f(t,x(t),x(t+h_1),\cdots,x(t+h_m))$，$dx(t)/dt=f(t,x(t-h_1),\cdots,x(t-h_m),x(t+l_1),\cdots,x(t+l_k))(h_1,\cdots,h_m;l_1,\cdots,l_k>0)$ 那样的方程，前者只包含超前的时间，后者同时包含迟后和超前时间的方程，也称作"差分微分方程"．形如 $dx(t)/dt=f(t,x(t),x(t-h_1),\cdots,x(t-h_m),x'(t-h_1),\cdots,x'(t-h_m))$ 的方程称为**中立型**(neutral type)，(1)的形式称为**迟后型**(retarded type)，只包含超前时间的形式称为**超前型**(advanced type)．在上面的定义中，x 可以全部表示向量，但是在表示标量时，例如中立型的方程，可写成 $f(t,u(t),u(t-h_1),\cdots,u(t-h_m),u'(t),u'(t-h_1),\cdots,u'(t-h_m),\cdots,u^{(n)}(t),u^{(n)}(t-h_1),\cdots,u^{(n)}(t-h_m))=0$．

【初值问题】 对迟后型差分微分方程(1)，当已给初始条件：$x(t)=\varphi(t)(-h_m\leqslant t<0)$，$x(0)=x_0$ 时，求在 $t\geqslant 0$ 的解的问题，称为**初值问题**(initial value problem)．设 $f(t,x,y_1,\cdots,y_m)$ 在 $0\leqslant t\leqslant t_0$，$|x-x_0|\leqslant a$，$|y_k-x_0|\leqslant a\ (k=1,\cdots,m)$ 中是连续的，而且 $|f|\leqslant M$．设 $\varphi(t)$ 是在 $-h_m\leqslant t<0$ 中连续，$\lim\limits_{t\to-0}\varphi(t)$ 存在，且满足 $|\varphi(t)-x_0|\leqslant a$ 的已给函数．这时(1)的满足初始条件 $x(t)=\varphi(t)(-h_m\leqslant t<0)$，$x(0)=x_0$ 的连续解在 $0\leqslant t\leqslant \min(t_0,a/M)$ 中是存在的．它的证明可以利用不动点定理†，但是也可以利用这样的方法：将区间划分为小区间 $[0,1],[1,2],\cdots$，考虑在各小区间上的常微分方程的初值问题，然后将各小区间顺次连接起来．后一方法对中立型也有效．仅从 f 的连续性还不能保证解的唯一性．当 f 满足 Lipschitz 条件†：$|f(t,x_1,y_1,\cdots,y_m)-f(t,x_2,z_1,\cdots,z_m)|\leqslant L|x_1-x_2|+L_1|y_1-z_1|+\cdots+L_m|y_m-z_m|(L,L_1,\cdots,L_m$ 是常数)时，利用逐次逼近法可以证明解的唯一性．而且，同微分方程的情形一样，还可得到 Osgood 型的判别条件和利用 Ляпунов 函数†的唯一性判别条件．还可利用 Ляпунов 函数来研究关于解对于 $x_0,\varphi(t),h_1,\cdots,h_m$ 以及参数的依赖性的问题．

另一方面，代替(1)我们考虑差分微分不等式

(2) $$\left|\frac{dx(t)}{dt}-f(t,x(t),x(t-h_1^{(i)}),\cdots,x(t-h_m^{(i)}))\right|\leqslant\varepsilon_i(t),\ i=1,2,$$

假设满足(2)及初值条件：$x(t)=\varphi_i(t)$，$-h_m^{(i)}\leqslant t<0$ 的函数为 $x_i(t)$ $(i=1,2)$，于是可以利用 Ляпунов 函数来估计差 $|x_1(t)-x_2(t)|$，在这个结果中如果令 $\varepsilon_i(t)\equiv 0$，那末就得到了(1)的结果，因此，对(2)的结果完全可以看作是对(1)的结果的推广([3]).

【线性差分微分方程】 最一般的迟后型一阶线性非齐次差分微分方程可表为

(3) $$\sum_{n=0}^{m}A_n(t)x'(t+h_n)+\sum_{n=0}^{m}B_n(t)x(t+h_n)=w(t).$$

这里，$A_n(t)$, $B_n(t)$ $(n=0,1,\cdots,m)$ 是 $N\times N$ 矩阵，$w(t)$ 是给定的连续的 N 维向量，h_n $(n=0,1,\cdots,m)$ 是常数且 $0=h_0<h_1<h_2<\cdots<h_m$. 对应于(3)，定义函数$K(s,t)$如下：$K(s,t)$ 是对应于(3)的**伴随方程**(adjoint equation)

$$-\frac{\partial}{\partial s}K(s,t)+\sum_{n=0}^{m}(K(s+h_m-h_n,t)\,B_n(s+h_m-h_n))=0,$$
$$t_0<s<t$$

的 $N\times N$ 矩阵解，满足初始条件：$K(s,t)=0$ $(t<s\leqslant t+h_m)$, $K(s,t)=I$ $(s=t)$ (I 是单位矩阵). 称这样的函数 $K(s,t)$ 为对于 (3) 的**核函数** (kernel function)，它是唯一确定的. 如果利用这个函数，那末 (3) 的满足初始条件 $x(t)=0$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_0+h_m)$ 的解 $x(t)$ 可表为

$$x(t+h_m)=\int_{t_0}^{t}K(s,t)w(s)ds,\ t>t_0.$$

在一般中立型一阶线性非齐次差分微分方程

(4) $$x'(t+h_m)+\sum_{n=0}^{m-1}A_n(t)x'(t+h_n)+\sum_{n=0}^{m}B_n(t)x(t+h_n)=w(t),\ t>t_0$$

中，令 S 是形如 $t_0+jh_m-\sum_{n=1}^{m-1}i_nh_n$ $(i_1,\cdots,i_{m-1}$ 是整数, $j=1,2,\cdots)$ 而且 $0\leqslant\sum_{n=1}^{m-1}i_n\leqslant j$ 的点集，S' 是 S 的子集，满足 $0\leqslant\sum_{n=1}^{m-1}i_n\leqslant j-1$. T 是形如 $t+h_m-jh_m+\sum_{n=1}^{m-1}i_nh_n$ $(j=1,2,\cdots)$而且 $0\leqslant\sum_{n=1}^{m-1}i_n\leqslant j$ 的点集. T' 是 T 的子集，满足 $0\leqslant\sum_{n=1}^{m-1}i_n\leqslant j-1$. 设 $A_n(t)$, $A_n'(t)$, $B_n(t)$ 在 $t\geqslant t_0$ 是连续的，$w(t)$除在 S 中可能有第一类间断点外在 $t\geqslant t_0$ 是连续的. 设 $K(s,t)$ 是满足对应于(4)的伴随方程

$$-\frac{\partial}{\partial s}K(s,t)-\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\partial}{\partial s}(K(s+h_m-h_n,t)A_n(s+h_m-h_n))+\sum_{n=0}^{m}K(s+h_m-h_n,t)B_n(s+h_m-h_n)=0,$$
$$t_0<s<t,\ s\notin T$$

和初始条件 $K(s,t)=0$ $(t<s\leqslant t+h_m)$, $K(s,t)=I$ $(s=t)$ 的唯一的矩阵解，并且满足条件：$K(s,t)+\sum_{n=0}^{m-1}K(s+h_m-h_n,t)\times A_n(s+h_m-h_n)$ 在 $t_0\leqslant s\leqslant t$ 上是连续的，于是(4)的满足初始条件 $x(t)=0$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_0+h_m)$ 的解可表为

$$x(t+h_m)=\int_{t_0}^{t}K(s,t)w(s)ds,\ t>t_0,$$

而且有

$$x'(t+h_m)=w(t)+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial t}K(s,t)w(s)ds-\sum_{s\in T'-(t)}(K(s+0,t)-K(s-0,t))\,w(s),$$
$$t>t_0,\ t\notin S$$

成立([4]).

【常系数的情形】 对于(3)和(4)中系数都是常数时，我们可得方程

(5) $\sum_{n=0}^{m}(A_n x'(t-h_n)+B_n x(t-h_n))=f(t)$,

$\det A_0\neq 0,\ 0=h_0<h_1<\cdots<h_m$,

A_n, B_n 都是常数矩阵.

如果令

$$H(s)=\sum_{n=0}^{m}(A_n s+B_n)e^{-h_n s},$$

那末 $\det H(s)=0$ 称为(5)的**特征方程**(characteristic equation), 它的根称为(5)的**特征根**(characteristic root). 对应于(5), 令 S 是形如 $t=\sum_{n=0}^{m} j_n h_n$ (j_n 都是整数)的点集, 设 S_1 是 S 和 $[h_m,\infty)$ 的公共部分. 如果 $g(t)\in C^1[0,h_m]$, $f(t)$ 除在 S_1 中可能有第一类间断点外在 $[0,\infty)$ 中是连续的, 而且满足 $\|f(t)\|\leqslant c_1\exp c_2 t$ ($c_1>0, c_2>0$) ($t\to\infty$), 那末(5)的满足初始条件 $x(t)=g(t)$ ($0\leqslant t\leqslant h_m$) 的连续解, 当 c 充分大时, 可表为积分

$$x(t)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts}H(s)^{-1}(p(s)+q(s))ds,$$

$$t>0,$$

这里, $p(s)$, $q(s)$ 定义如下:

$$p(s)=e^{-h_m s}\sum_{n=0}^{m}A_n g(h_m-h_n)$$

$$+\sum_{n=0}^{m}(A_n s+B_n)e^{-h_m s}\int_0^{h_m-h_n} g(t)e^{-st}dt,$$

$$q(s)=\int_{h_m}^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

如果 $A_n=0$ ($n=1,\cdots,m$), $g\in C^0[0,h_m]$, $f\in C^0[0,\infty)$, 那末(5)的满足 $x(t)=g(t)$ ($0\leqslant t\leqslant h_m$)的解, 当 c 充分大时, 可以表为

$$x(t)=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts}H(s)^{-1}(p_0(s)+q(s))ds,$$

$$t>h_m,$$

这里, $q(s)$ 和前面的一样, 而 $p_0(s)$ 则表为下列形式:

$$p_0(s)=e^{-h_m s}\sum_{n=0}^{m}A_n g(h_m-h_n)$$

$$-\sum_{n=0}^{m}(A_n s+B_n)e^{-h_n s}\int_{h_m-h_n}^{h_m} g(t)e^{-st}dt$$

$$=e^{-h_m s}\sum_{n=0}^{m}A_n e^{-h_n s}g(h_m)$$

$$-\sum_{n=0}^{m}e^{-h_n s}\int_{h_m-h_n}^{h_m}(A_n g'(t)+B_n g(t))e^{-st}dt.$$

设 S_2 是 S 和 $(0,\infty)$ 的公共部分, $K(t)$ 是满足下列性质的矩阵函数: i) $K(t)=0$ ($t<0$); ii) $K(0)=A_0^{-1}$; iii) $\sum_{n=0}^{m}A_n K(t-h_n)\in C^0[0,\infty)$; iv) $\sum_{n=0}^{m}(A_n K'(t-h_n)+B_n K(t-h_n))=0$ ($t>0$, $t\notin S_2$). 我们称这样的 $K(t)$ 为(5)的核函数. 如果 $g\in C^1[0,h_m]$, $f\in C^0([0,\infty)-S_1)$, 而且 f 至多在 S_1 中有第一类间断点, 那末(5)的满足初始条件 $x(t)=g(t)$ ($0\leqslant t\leqslant h_m$)的连续解可表为下列形式:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{m}K(t-h_n)A_n g(0)$$

$$+\int_{h_m}^{t}K(t-t_1)f(t_1)dt_1$$

$$+\sum_{n=0}^{m}\int_0^{h_m-h_n}K(t-t_1-h_n)(A_n g'(t_1)$$

$$+B_n g(t_1))dt_1,\ t>0$$

$$=\sum_{n=0}^{m}K(t-h_m-h_n)A_n g(h_m)$$

$$+\int_{h_m}^{t}K(t-t_1)f(t_1)dt_1$$

$$-\sum_{n=0}^{m}\int_{h_m-h_n}^{h_m}K(t-t_1-h_n)(A_n g'(t_1)$$

$$+B_n g(t_1))dt_1,\ t>h_m.$$

如果 $A_n=0$ ($n=1,\cdots,m$), 那末当 $g\in C^0[0,h_m]$, $f\in C^0[0,\infty)$ 时后者成立.

如果在方程(5)中 $f(t)\equiv 0$, 则当 $g\in C^1[0,h_m]$, 时满足初始条件 $x(t)=g(t)$ ($0\leqslant t\leqslant h_m$)的解, 在适当选取闭曲线 C_l ($l=1,2,\cdots$)后, 对 $t>Nh_m$ (N 是 x 的维数)可表为

$$x=\lim_{l\to\infty}(\text{在 } C_l \text{ 内部 } H(s)^{-1}p(s)e^{st} \text{ 的残数之和})$$

$$=\lim_{l\to\infty}\sum_{C_l}p_r(t)e^{s_r t}.$$

这里 s_r 是特征方程 $\det H(s)=0$ 的根, $p_r(t)e^{s_r t}$

是 $H(s)^{-1}p(s)e^{st}$ 在 s_r 的残数，$p_r(t)$ 是次数小于 s_r 的重数的多项式(向量)．上面的极限在任意的有限区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0'$ $(t_0 > Nh_m)$ 中是一致收敛的． 如果所有的特征根 s_r 都在左半平面 $\mathrm{Re}s \leqslant c_1 < 0$ 内，那末这个极限在 $t_0 \leqslant t < \infty$ 中是一致收敛的．

对一维情形，设 $u(t)$ 是方程

(6) $$a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t-h) = 0,\quad t > h,\ a_0 \neq 0$$

的满足初始条件 $u(t) = g(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant h)$，$g \in C^0[0, h]$ 的连续解． 设 $p_r(t)e^{s_rt}$ 是 $e^{st}p_0(s)/h(s)$ 在特征方程 $h(s) \equiv a_0s + b_0 + b_1e^{-hs} = 0$ 的根 s_r 处的残数．如果 c 是任意的实数，使得在直线 $\mathrm{Re}s = c$ 上不存在 $h(s) = 0$ 的根，那末存在一个和 t 及 g 无关的正的常数 c_1，使得下列不等式成立:

$$\left|u(t) - \sum_{\mathrm{Re}s_r > c} e^{s_rt}p_r(t)\right| \leqslant c_1 m_g e^{ct},$$
$$t > h,\ m_g = \max_{0 \leqslant t \leqslant h}|g(t)|.$$

因此，使得(6)的所有连续解 $u(t) \to 0$ $(t \to \infty)$ 的充分必要条件是：特征方程的根的实部全都是负的．

【渐近性质】 假设在对应于常系数方程 $v'(t) + a_0v(t) + b_0v(t-h) = 0$ 的特征方程

(7) $$s + a_0 + b_0e^{-hs} = 0$$

的根中，其实部最大的特征根 $s = \lambda$ 只有一个．如果 $a(t)$ 满足条件 I) $\int^{\infty}|a(t)|dt < \infty$，或条件 II) i) $a(t) \to 0$ $(t \to \infty)$，ii) $a(t) \neq 0$ $(t \geqslant t_0)$，iii) $a'(t) = o(a(t))$ $(t \to \infty)$，iv) $\int^{\infty}a(t)^2dt < \infty$，$\int^{\infty}|a'(t)|dt < \infty$，$\int^{\infty}|a''(t)/a(t)|dt < \infty$，那末方程

(8) $$u'(t) + (a_0 + a(t))u(t) + b_0u(t-h) = 0$$

的解具有下列形式:

$$u(t) = c(1 + o(1))\exp\left(\lambda t - c_1\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau\right),\quad t \to \infty.$$

这里 c，c_1 是常数，$c_1 = (1 - b_0he^{-\lambda h})^{-1}$． 如果 (7) 的**主根**(principal root) $s = \lambda$ 是实的单根，$a(t)$，$b(t)$ 分别具有渐近展开*

$$a(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_nt^{-n},\qquad b(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_nt^{-n},\quad t \to \infty,$$

如果 $a'(t)$，$a''(t)$，$b'(t)$，$b''(t)$ 都存在，而且也具有渐近展开，那末方程

(8′) $$u'(t) + (a_0 + a(t))u(t) + (b_0 + b(t))u(t-h) = 0$$

存在一个解 $u(t)$，它具有下列形式的渐近展开:

$$u(t) \sim e^{\lambda t}t^r\sum_{n=0}^{\infty}u_nt^{-n},\ t \to \infty.$$

特别是，$r = -(a_1 + b_1e^{-h\lambda})/(1 - b_0he^{-\lambda h})$ ([4])．

【稳定性问题】 设 $x_0(t)$ 当 $t > 0$ 时是连续的，当 $t > h$ 时是满足方程

(9) $$x'(t) = f(t, x(t), x(t-h))$$

的连续解．如果对任意的 $t_0 \geqslant 0$，$\varepsilon > 0$，存在一个适当的 δ，使得对 (9) 的所有连续解 $x(t)$，当

(10) $$\max_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h}|x(t) - x_0(t)| \leqslant \delta$$

时，有

$$\max_{t_0 \leqslant t}|x(t) - x_0(t)| \leqslant \varepsilon,$$

那末就称 $x_0(t)$ 是**稳定的**(stable)． 假设 $x_0(t)$ 是稳定的，而且对每个 $t_0 \geqslant 0$ 都存在一个 $\delta = \delta(t_0)$，有

$$\lim_{t \to \infty}|x(t) - x_0(t)| = 0,$$

则称 $x_0(t)$ 是**渐近稳定的**(asymptotically stable)．

对一维(标量)方程

$$a_0u'(t) + b_0u(t) + b_1u(t-h) = 0,\ a_0 \neq 0,$$

设满足初始条件 $u(t) = g(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant h)$ 的解是 $u_0(t)$．如果对应的特征方程 $a_0s + b_0 + b_1e^{-hs} = 0$ 的所有根的实部都小于 $-\lambda_1(<0)$，那末不等式

$$|u_0(t)| \leqslant c_1m_ge^{-\lambda_1t},\ t \geqslant h,$$
$$m_g = \max_{0 \leqslant t \leqslant h}|g(t)|$$

成立．

关于具有摄动项的方程

$$u'(t) + a(t)u(t) + b(t)u(t-h) = w(t),$$
$$t > h$$

的稳定性问题，在常微分方程理论中有 Dini-福原型及 Poincaré-Ляпунов 型定理，此外还有许多结果是已知的. 对最一般的方程(9)，重新定义关于差分微分方程的 Ляпунов 函数，利用这个，就可以得到关于稳定性和有界性的一般结果([3],[4],[7]).

【关联的方程】 以非负的函数 $\Delta_i(t)$ 作为迟后函数的差分微分方程，一般可表为

$$x^{(m_0)}(t) = f(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(m_0-1)}(t), x(t-\Delta_1(t)), x'(t-\Delta_1(t)), \cdots, x^{(m_1)}(t-\Delta_1(t)), \cdots, x(t-\Delta_n(t)), x'(t-\Delta_n(t)), \cdots, x^{(m_n)}(t-\Delta_n(t))).$$

这种形式的方程是由苏联和东欧各国的数学工作者广泛地研究过的. 关于这个方程的稳定性问题、边值问题、最优过程、周期解、摄动理论和近似解法，在[1],[2],[8]中就带有常迟滞量的情况作了详细地介绍.

【泛函微分方程】 设 $\tau \geqslant 0$ 是一已给实数，$C([a, b], \boldsymbol{R}^n)$ 是连续映射的 Banach 空间，它把区间 $[a, b]$ 映射到一个实的(或复的) n 维线性空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中，并具有一致收敛的拓扑. 如果 $A > 0$, $t_0 \in \boldsymbol{R}$ 且 $x \in C([t_0-\tau, t_0+A], \boldsymbol{R}^n)$，那末对任何 $t \in [t_0, t_0+A]$，我们用 $x_t(\theta) = x(t+\theta)(-\tau \leqslant \theta \leqslant 0)$ 定义 $x_t \in C = C([-\tau, 0], \boldsymbol{R}^n)$. 这样，给出了一个函数 $f: \boldsymbol{R} \times C \to \boldsymbol{R}^n$，我们称关系式

(11) $$x'(t) = f(t, x_t)$$

为**泛函微分方程**(functional differential equation). 对一已给的 $t_0 \in \boldsymbol{R}$ 和一已给的 $\varphi \in C$，如果存在一个 $A > 0$，使得 $x(t_0, \varphi)$ 是(11)在 $[t_0-\tau, t_0+A)$ 上的一个解且 $x_{t_0}(t_0, \varphi) = \varphi$，那末我们就说 $x(t_0, \varphi)$ 是(11)的一个解，在 t_0 具有初值 φ. 下面对方程(11)的存在定理可以用类似于在微分方程的传统理论中所用的方法来证明([10,12,14,15]).

设 D 是 $\boldsymbol{R} \times C$ 中的一个开集，且 $f: D \to \boldsymbol{R}^n$ 是连续的. 于是，如果 $(t_0, \varphi) \in D$，那末存在(1)的一个解，在 t_0 具有初值 φ. 而且，如果 x 是(1)在 $[t_0-\tau, b)$ 上的一个不可开拓的解，那末对任一紧集 $K \subset D$，存在一个 t^* 使得对 $t^* \leqslant t \leqslant b$ 有 $(t, x_t) \notin K$.

如果函数 f 并不明显地依赖于 t，即如果方程取这样的形式:

(12) $$x'(t) = f(x_t),$$

那末就称这方程为**自治的** (autonomous). 假设 $f: C \to \boldsymbol{R}^n$ 是连续的，它将 C 的有界闭集映射到 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界集中. 于是，如果(12)的通过初始点 $(0, \varphi)$ 的解 $x(\varphi)$ 是有定义的而且在 $[-\tau, \infty)$ 上是唯一的，那末就导出: 对任意的 $t, s \geqslant 0$, $x(\varphi)$ 满足关系式

$$x_0(\varphi) = \varphi, \quad x_{t+s}(\varphi) = x_t(x_s(\varphi)),$$

因而定义了一个动力系统. 由

$$\gamma^*(\varphi) = \bigcup_{t \geqslant 0} x_t(\varphi), \quad \omega(\varphi) = \bigcap_{\tau \geqslant 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant \tau} x_t(\varphi)},$$
$$\alpha(\varphi) = \bigcap_{\tau \geqslant 0} \overline{\bigcup_{t \leqslant \tau} x_t(\varphi)}$$

所定义的三个集合，分别称为通过 φ 的**轨道**(orbit)，$\gamma^*(\varphi)$ 的 **ω 极限集** (ω-limit set) 和 $\gamma^*(\varphi)$ 的 **α 极限集**(α-limit set). 于是，对应于常微分方程理论中的熟知的事实，我们有下面的结果([13,14,15]).

如果存在一个常数 $m > 0$ 和(12)的一个解 x，使得对于 $t \in [t_0-\tau, \infty)$ 有 $|x(t)| < m$，那末 $\gamma^*(x_0)$ 包含在 C 的一个紧子集中. 而且，如果对于 $t \geqslant -\tau$ 有 $|x(t)| < m$，那末 $\omega(\gamma^*(x_0))$ 是一个非空的、紧连通的不变集，且当 $t \to \infty$ 时 $\operatorname{dist}(x_t, \omega(\gamma^*(x_0))) \to 0$.

作为(11)的一个特殊情形，我们考虑一个线性泛函微分方程

(13) $$x'(t) = L(t, x_t) + f(t),$$

这里 $f \in LL_1(t_0, \infty)$ (局部地 $L_1(t_0, \infty)$)，且 $L(t, \varphi)$ 是对 φ 的一个线性泛函，使得存在一个 $n \times n$ 的矩阵函数 $\eta(t, \theta)$，对 (t, θ) 可测，且对每个 t，对 $\theta \in [-\tau, 0]$ 是有界变差的，还存在一个函数 $l(t) \in LL_1(-\tau, \infty)$，对任何 $t \in (-\infty, \infty)$ 和 $\varphi \in C$，满足

$$L(t, \varphi) = \int_{-\tau}^{0} (d_\theta \eta(t, \theta))\varphi(\theta),$$

$$|L(t,\varphi)| \leqslant l(t)\|\varphi\|.$$

令 $x(t_0,\varphi,f)$ 是(13)的一个解，在 t_0 具有初值 φ. 于是，$x(t_0,\varphi,0)$ 是唯一确定的，且对 φ 是线性的，$x(t_0,0,f)$ 对 f 是线性的，此外，由唯一性可以导出

$$x(t_0,\varphi,f)=x(t_0,\varphi,0)+x(t_0,0,f).$$

而且，$x(t_0,\varphi,f)$ 可以表达为所谓的**常数变易公式** (variation of constants formula)，即

$$x(t_0,\varphi,f)(t)=x(t_0,\varphi,0)(t)+\int_{t_0}^{t}U(t,s)f(s)ds,\quad t\geqslant t_0$$

具有初始条件 $x_{t_0}=\varphi$；这里 $U(t,s)$ 是方程

$$U(t,s)=\int_s^t L(u,U_u(\cdot,s))du+I$$

的满足 $U(t,s)=0$，$s-\tau\leqslant t<s$ 的解，照例，I 是 $n\times n$ 单位矩阵，U 是 $n\times n$ 矩阵，$U_t(\cdot,s)(\theta)=U(t+\theta,s)$ $(-\tau\leqslant\theta\leqslant 0)$ ([14]).

更特殊地，考虑一个线性自治的泛函微分方程

$$(14)\qquad x'(t)=L(x_t),$$

这里 $L(\varphi)$ 对 φ 是线性的. 又令 $x(\varphi)$ 表示(14)的唯一解，在 $t_0=0$ 具有初始泛函值 $\varphi\in C$，如果我们用关系式 $x_t(\varphi)=T(t)\varphi$ 定义一个算子 $T(t):C\to C$，那末映射族 $\{T(t)|t\geqslant 0\}$ 在 C 上组成一个强连续的半群. 定义 $T(t)$ 的**生成算子** (infinitesimal generator) A 如下：

$$A\varphi=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}(T(t)\varphi-\varphi),\quad \varphi\in C.$$

只要这个极限存在，就导出：A 的定义域 $D(A)$ 是在 C 中稠密的，而 A 的值域 $R(A)$ 处于 C 中且由函数

$$A\varphi(\theta)=\begin{cases}\dfrac{d}{d\theta}\varphi(\theta), & -\tau\leqslant\theta<0,\\[2mm] \displaystyle\int_{-\tau}^{0}(d\eta(\theta))\varphi(\theta), & \theta=0\end{cases}$$

所组成，这里 φ 在 $[-\tau,0)$ 上具有连续导数，$\eta(\theta)$ 是定义在 $-\tau\leqslant\theta\leqslant 0$ 上的一个 $n\times n$ 矩阵，具有有界变差的元，使得对任何 $\varphi\in C$，有

$$L(\varphi)=\int_{-\tau}^{0}(d\eta(\theta))\varphi(\theta).$$

而且，对任何 $\varphi\in D(A)$ 关系式

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi=T(t)A\varphi=AT(t)\varphi$$

是满足的([14,16]).

现在考虑方程组(11)，假定 $f(t,0)=0$，$t\in\boldsymbol{R}^+$，$f:\boldsymbol{R}^+\times C_\rho\to\boldsymbol{R}^n$ 是连续的，这里 $C_\rho=\{\varphi\in C\,|\,\|\varphi\|<\rho\}$，而且 $\boldsymbol{R}^+=[0,\infty)$. 于是，如果对于任何 $\varepsilon>0$ 和 $t_0\geqslant 0$ 存在一个 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)>0$，使得(11)的解 $x(t_0,\varphi)$ 对于所有的 $\varphi\in C_\delta$ 和所有的 $t\geqslant t_0$，满足 $x_t(t_0,\varphi)\in C_\varepsilon$，那末我们称零解 $x=0$ 是**稳定的**. 如果 $x=0$ 是稳定的，而且对于任何 ε 和 $t_0\geqslant 0$，存在 $\rho_0=\rho_0(t_0)$ 和 $T=T(\varepsilon_0,t_0)$，使得由 $\varphi\in C_{\rho_0}$ 可以导出 $\|x_t(t_0,\varphi)\|<\varepsilon$(当 $t\geqslant t_0+T(\varepsilon,t_0)$ 时)，那末称 $x=0$ 为**渐近稳定的** (asymptotically stable). 在上面的定义中，如果 δ 和 t_0 无关，那末解 $x=0$ 就称为**一致稳定的** (uniformly stable). 如果 ρ_0 和 T 也都与 t_0 无关，那末就称 $x=0$ 为**一致渐近稳定的** (uniformly asymptotically stable). 如果解 $x=0$ 不是稳定的，就称 $x=0$ 为**不稳定的** (unstable). 在关于稳定性问题的各种结果[10,12,13,14,15]中，我们在下面提一提对 $x=0$ 的一致稳定性和一致渐近稳定性的判别问题，它是 Ляпунов 第二方法的一个有效应用([14]).

对于任何连续函数 $V:\boldsymbol{R}^+\times C_\rho\to\boldsymbol{R}$，令

$$\dot V(t,\varphi)=\overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}(V(t+h,x_{t+h}(t,\varphi))-V(t,\varphi)),$$

这里 $x_{t+h}(t,\varphi)$ 是(1)的通过 (t,φ) 的解. 假设 $f:\boldsymbol{R}^+\times C_\rho\to\boldsymbol{R}^n$ 是连续的，$a(r)$，$b(r)$ 和 $c(r)$ 对于 $r\in[0,\rho)$ 是连续的，$a(r)$ 和 $b(r)$ 对于 $r>0$ 是正的且非减的，$a(0)=b(0)=0$，$c(r)$ 是非负的且非减的. 于是，如果存在一个连续函数 $V:\boldsymbol{R}^+\times C\to\boldsymbol{R}$，使得 $a(|\varphi(0)|)\leqslant V(t,\varphi)\leqslant b(\|\varphi\|)$，$\dot V(t,\varphi)\leqslant -c(|\varphi(0)|)$，那末方程(11)的解 $x=0$ 是一致稳定的. 另外，如果对于 $r>0$ 有 $c(r)>0$，那末解 $x=0$ 是一致渐近稳定的.

在过去对未来发生重要影响的现象的分析中，我们常常碰到带有时滞的微分方程，粗略地

讲,它们属于两个一般类型之一;一类是上面描述过的泛函微分方程,另一类是所谓**延迟-微分方程**(delay-differential equations),其形状为

(15) $$x'(t) = f(t, x(\cdot)),$$

这里$x(\cdot)$表示从时间α到时间t的系统的状态,α是一给定常数$\geqslant -\infty$,而f是一给定泛函,定义在适当的区域上.对于(15)型的方程的一般理论和各种有关问题在[11]中进行了讨论,有关的稳定性问题在[5]中利用 Ляпунов 泛函方法进行了研究. 显然,类型(15)包含了**积分微分方程**(integrodifferential equations),这是[17]的研究主题.

【参】 [1] А. М. Зверкин-Г. А. Каменский-С. Б. Норкин-Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, Успехи Матем. Наук, **17** (1962), 2 (104), 77—164; [2] А. М. Зверкин-Г. А. Каменский- С. Б. Норкин-Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом II; Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом II, Москва, 1963, p. 3—49; [3] S. Sugiyama (杉山昌平), On the theory of difference-differential equations I, II, III, Waseda Univ. Bull. Sci. Engr. Res.Lab., **26** (1964), 97—111, **27** (1964), 74—84, Mem. Sch. Sci. Engr. Waseda Univ., **28** (1964), 73—85; [4] R. Bellman-K. L. Cooke, Differential-difference equations, Academic Press, 1963; [5] R. D. Driver, Existence and stability of solutions of a delay-differential system, Arch. Rational Mech. Anal., **10** (1962), 401—426; [6] J. K. Hale, Asymptotic behavior of the solutions of differential-difference equations, Proc. Intern. Symp. Non-linear Vibrations, II (1961), 409—426; [7] N. N. Krasovskiĭ (Н. Н. Красовский), Stability of motion, Stanford, 1963; [8] Л. Э. Эльсгольц, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Москва, 1964; [9] R. Bellman-K. L. Cooke, Asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations, Mem. Amer. Math. Soc., no. 35, (1959); [10] T. Yoshizawa (吉沢太郎) Stability theory by Ljapunov's second method, Publ. Math. Soc. Japan, **9** (1966); [11] M. N. Oguztöreli, Time-lag control system, Academic Press, 1966; [12] A. Halanay, Differential equations, stability, oscillations, time lag, Academic Press, 1966; [13] J. K. Hale, Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations, J. Differential Equations, **1** (1965), 452—482; [14] J. K. Hale, Functional differential equations, Springer, (1971); [15] V. Lakshmikantham - S. Leela, Differential and integral inequalities II, Academic Press, 1969; [16] G. E. Ladas - V. Lakshmikantham, Differential equations in abstract spaces, Academic Press, 1972; [17] Constantin Corduneanu, Integral equations and stability of feedback systems, Academic Press, 1973.

全微分方程 [英 total differential equation 法 équation aux différentielles totales 德 totale Differentialgleichung 俄 полное дифференциальное уравнение 日 全微分方程式]

【Pfaff 问题】 **全微分方程**是下面的方程:

(1) $$\omega = 0,$$

其中ω是流形X上的一次微分形式$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i$. X的子流形M称为(1)的**积分流形**(integral manifold),如果M在其各点x上之切空间† $T_x(M)$的每一个切向量ξ都满足$\omega(\xi) = 0$. 我们记(1)之积分流形的最大维数为$m(\omega)$. J. F. Pfaff 证明了对任意ω有$m(\omega) \geqslant (n-1)/2$. 对给的$\omega$来决定$m(\omega)$的问题称为 **Pfaff 问题**(Pfaff's problem). 这个问题由 G. Frobenius, J. G. Darboux 和其他人解决如下:用ω之外微分†

$$d\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

的系数$a_{ij} = \partial a_j/\partial x_i - \partial a_i/\partial x_j$作交错矩阵†

(2) $$(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

设(2)之秩是$2t$,则矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{ij} & -a_i \\ a_j & 0 \end{pmatrix}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

之秩是$2t$或$2t+2$. 在前一情况下,$m(\omega) = n - t$,而ω可通过选取适当的坐标系$(u_1, \cdots, u_n)$写为

$$\sum_{i=1}^{t} u_{2i-1}\, du_{2i}.$$

在后一情况下,$m(\omega) = n - t - 1$,而ω可通过选取适当的坐标系$(u_1, \cdots, u_n)$写为

$$\sum_{i=1}^{t} u_{2i-1}\, du_{2i} + du_{2t+1}.$$

这定理称为 **Darboux 定理** (Darboux's theorem).

一次形式ω称为 **Pfaff 形式** (Pfaffian form),方程(1)称为 **Pfaff 方程** (Pfaffian equation). 由s个一次形式ω_i形成的方程组$\omega_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$称为 **Pfaff 方程组** (system of Pfaffian equations) 或**全微分方程组** (system

of total differential equations) ([5,8,19]).

【微分形式组与偏微分方程组】 令Ω为X上的一组微分形式ω_i^p, $0\leqslant p\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant \nu_p$, ω_i^p是X上的p次形式. X的子流形M称为$\Omega=0$的**积分流形**(integral manifold), 如果对每个p $(0\leqslant p\leqslant \dim M)$, 在$M$的每一点$x$上,切空间$T_x(M)$的任意$p$维子空间$E_p$都满足$\omega_i^p(E_p)=0$ $(1\leqslant i\leqslant \nu_p)$. 记$\Omega$的积分流形的最大维数为$m(\Omega)$. 对给定组$\Omega$求$m(\Omega)$的问题称为**广义 Pfaff 问题** (generalized Pfaff problem), 并将在以下各节说明. 固定X的一个局部坐标系并将它分成两组$(x_1,\cdots,x_r)$与$(y_1,\cdots y_m)$ $(m=n-r)$, 可以考虑求X的一个子流形使得满足关系式

$$y_\alpha=y_\alpha(x_1,\cdots,x_r),\ 1\leqslant\alpha\leqslant m.$$

这个问题可以化为在具有局部坐标系$(x_1,\cdots,x_r)$的子流形N上求解一组一阶偏微分方程.

考虑一组l阶偏微分方程$\Phi=0$:

$$(3)\qquad \varphi_\lambda(x_i,y_\alpha,p_\beta^{j_1\cdots j_r})=0,\ 1\leqslant\lambda\leqslant s,$$

$1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant m$, $j_1+\cdots+j_r\leqslant l$, 其中

$$(4)\qquad p_\beta^{j_1\cdots j_r}=\partial^{j_1+\cdots+j_r}y_\beta/\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_r^{j_r}.$$

若由$y_\alpha=y_\alpha(x_1,\cdots,x_r)$ $(1\leqslant\alpha\leqslant m)$所定义的子流形恒满足(3),就把它称为$\Phi=0$的**解**. 决定已给组$\Phi=0$是否有解的问题是C. Riquier解决的, 他证明了任一个组可以或者开拓成一被动正排组或者经有限多步开拓成一不相容组. 一个偏微分方程组称为另一组的**开拓** (prolongation), 如果前者包含后者并有相同的解. **被动正排组** (passive orthonomic)是通解可用无限多个任意常数参数化的组.一个包含参数的解,如果通过指定参数值即可得具有任意初值的初值问题†的解,就称为**通解**(general solution). 若方程组(3)蕴含着x_i间非平凡的关系$f(x_1,\cdots,x_r)=0$, 就称为**不相容的** (incompatible).

求解偏微分方程组$\Phi=0$的问题,可以化为求如下一组微分形式Σ的积分流形,令J^l是具有局部坐标系$(x_i,y_\alpha,p_\beta^{j_1\cdots j_r}$; $1\leqslant i\leqslant r$, $1\leqslant\alpha$, $\beta\leqslant m$, $j_1+\cdots+j_r\leqslant l)$的流形, 而$\Sigma$由0次形式$\varphi_\lambda$ $(1\leqslant\lambda\leqslant s)$和一次形式

$$dy_\alpha-\sum_{i=1}^r p_\alpha^i dx_i,$$

$$dp_\beta^{j_1\cdots j_r}-\sum_{k=1}^r p_\beta^{j_1\cdots j_k+1\cdots j_r}dx_k$$

$(1\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant m,\ j_1+\cdots+j_r<l)$组成. 于是$\Sigma$的下列形式的积分流形:

$$y_\alpha=y_\alpha(x_1,\cdots,x_r),\ 1\leqslant\alpha\leqslant m,$$
$$p_\beta^{j_1\cdots j_r}=p_\beta^{j_1\cdots j_r}(x_1,\cdots,x_r),\ 1\leqslant\beta\leqslant m,$$
$$j_1+\cdots+j_r\leqslant l,$$

就给出$\Phi=0$的一个解$y_\alpha=y_\alpha(x_1,\cdots,x_r)$, $1\leqslant\alpha\leqslant m$, 且$y_\beta$与$p_\beta^{j_1\cdots j_r}$满足

$$(5)\qquad p_\beta^{j_1\cdots j_r}=\partial^{j_1+\cdots+j_r}y_\beta/\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_r^{j_r},$$
$$1\leqslant\beta\leqslant m,\ j_1+\cdots+j_r\leqslant l.$$

反之,$\Phi=0$的一个解$y_\alpha=y_\alpha(x_1,\cdots,x_r)$, $1\leqslant\alpha\leqslant m$, 若用(5)定义$p_\beta^{j_1\cdots j_r}(x_1,\cdots,x_r)$, 就给出$\Sigma$的一个积分流形([16,17,19]).

【一个未知函数的一阶偏微分方程组】 考虑N上的一组无关的向量场†:

$$L_\lambda=\sum_{i=1}^r b_{\lambda_i}(x)\frac{\partial}{\partial x_i},\ 1\leqslant\lambda\leqslant s.$$

对给定的一组$f_\lambda(x)$与$g_\lambda(x)$, 求解非齐次方程组

$$(6)\ L_\lambda y-f_\lambda(x)y-g_\lambda(x)=0,\ 1\leqslant\lambda\leqslant s.$$

方程组(6)称为**完备系** (complete system), 如果每一个

$$(7)\qquad [L_\lambda,L_\mu]y-(L_\lambda f_\mu-L_\mu f_\lambda)y-(f_\mu g_\lambda-f_\lambda g_\mu)-(L_\lambda g_\mu-L_\mu g_\lambda),\ 1\leqslant\lambda<\mu\leqslant s$$

都是(6)式左端的线性组合,这里$[L_\lambda,L_\mu]$是L_λ与L_μ的换位子†.这个条件称为(6)的**可积性条件** (integrability condition). 设齐次方程组

$$(8)\qquad L_\lambda y=0,\ 1\leqslant\lambda\leqslant s$$

是完备的. 于是它有一组函数独立的†解$y_1,\cdots,y_{r-s}$, 而(8)的任意解y都是它们的函数: $y=\phi(y_1,\cdots,y_{r-s})$. 若非齐次组(6)是完备的,则齐次组(8)也是完备的. 完备系的概念是由 Lagrange 提出的并由 Jacobi 推广到如下非线性方程组(→一阶偏微分方程).

考虑非线性方程组

$$(9)\quad F_\lambda(x_1,\cdots,x_r,y,p_1,\cdots,p_r)=0,$$
$$1\leqslant\lambda\leqslant s,$$

其中 $p_i = \partial y/\partial x_i$. 方程组 (9) 称为**完备系**,如果每一个 $[F_\lambda, F_\mu]$ $(1 \leqslant \lambda < \mu \leqslant s)$ 都是 $F_1, \cdots, F_s$ 的线性组合. 这里 $[F, G]$ 是 Lagrange 括号†,其定义为

$$[F, G] = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial F}{\partial p_i}\left[\frac{\partial G}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial G}{\partial y}\right] - \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial G}{\partial p_i}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial y}\right].$$

设方程组 (9) 是完备的, $F_1, \cdots, F_s$ 是函数无关的. 于是,一般说来,可以对 N 的一个 $(r-s)$ 维子流形 N_{r-s} 求解下面的初值问题: 在 N_{r-s} 上给定函数 f, 求(9)的解 y, 使得在 N_{r-s} 上满足 $y=f$.

由前节,我们可以通过积分一个常微分方程组(称为 **Lagrange-Charpit 方程组** (Lagrange-Charpit system)) 来作出解. 因此,可以在 C^∞ 范畴内来求解这些问题(→偏微分方程的解法)([6,7]).

【Frobenius 定理】 令 X 为一 C^∞ 微分流形†, Ω 是 X 上的一组无关的一次微分形式 ω_i, $1 \leqslant i \leqslant s$. Ω 称为**完全可积组** (completely integrable system), 如果在 X 的每一点 x 上都有

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} \wedge \omega_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant s,$$

其中 θ_{ij} 是 x 的邻域上的一次微分形式. 设 Ω 是完全可积的. 于是在 X 的每一点 x 都存在一个在 x 的邻域 U 中的局部坐标系 $(f_1, \cdots, f_s, x_{s+1}, \cdots, x_n)$, 使 X 在点 $z \in U$ 的切向量 ξ 当且仅当 $\xi f_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 时满足 $\omega_i(\xi)=0$, $1 \leqslant i \leqslant s$. 这时,每一个 df_i 都是 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 的线性组合,反过来,每一个 ω_i 也都是 $df_1, \cdots, df_s$ 的线性组合. 一般说来,使得 df 成为 $\omega_1, \cdots, \omega_s$ 之线性组合的函数 f 称为 Ω 的 **初积分** (first integral).

上一段的定理称为 **Frobenius 定理** (Frobenius's theorem), 它也可以陈述为对偶形式如下: 令 $D(X)$ 是 X 上的切丛† $T(X)$ 的一个子丛†. 映射 $X \ni x \to D_x(X)$ 称为 X 上的**分布** (distribution). 它称为**对合分布** (involutive distribution), 如果在 X 的每一点 x 都可以在 x 的邻域 U 上找到一组无关的向量场 L_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$, 使在每一点 $z \in U$, $L_i(z)$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 构成 $D_z(X)$ 的基底,且在 U 上满足 $[L_i, L_j] \equiv 0$ $(L_1, \cdots, L_s)$, $1 \leqslant i < j \leqslant s$. X 的一个连通子流形 M 称为 $D(X)$ 的**积分流形** (integral manifold), 如果在 M 的每一点 x 都有 $T_x(M) = D_x(X)$. 设 $D(X)$ 给出 X 上的一个对合分布. 这时, X 的每一点 x 都位于一个最大积分流形 M 中, M 以任何一个包含 x 的积分流形为开子流形([4]).

【Cartan-Kähler 存在定理】 令 X 为一实解析流形†. 记 X 上的微分形式环之层† 为 $\Lambda(X)$, X 上的 p 次微分形式 $(1 \leqslant p \leqslant n)$ 的 $\mathscr{O}(X)$ 模之子层为 $\Lambda_p(X)$, 这里 $\mathscr{O}(X)$ 是 X 上的 0 次微分形式环之层. 理想的子层 Σ 称为**微分理想** (differential ideal), 如果它是由 Σ_p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ 生成的而且包含 $d\Sigma$, 这里 $\Sigma_p = \Sigma \cap \Lambda_p(X)$. 考虑 X 上的微分理想 Σ. $T_x(X)$ 的原点在 $x \in X$ 的 p 维子空间的 Grassmann 流形† 记作 $G_p(x)$, X 上的 Grassmann 流形 $\bigcup_{x \in X} G_p(x)$ 记作 $G_p(X)$. $G_p(x)$ 的元 E_p 称为**原点** (origin) 是 x 的 p **维接触元** (contact element). $G_p(x)$ 的元 E_p 称为 Σ_p 的**积分元** (integral element), 如果对 Σ 中的任一 p 次微分形式 ω, 在 x 点有 $\omega(E_p)=0$; 此外, E_p 称为 Σ 的积分元, 如果包含在 E_p 中的任意元 E_q $(0 \leqslant q \leqslant p)$ 都是 Σ_q 的积分元. 特别是, 0 维和 1 维积分元分别称为**积分点** (integral point) 和**积分向量** (integral vector). 可以证明: 元 E_p 是 Σ 的积分元, 当且仅当它是 Σ_p 的积分元. 原点在 x 的积分元 E_p 的**极元** (polar element) $H(E_p)$ 定义为 $T_x(X)$ 的一个子空间,它是由所有与 E_p 共同生成 Σ 的积分元的向量组成的. 令 $(\Sigma_p)^0$ $(0 \leqslant p \leqslant n)$ 为 $\mathscr{O}(G_p(X))$ 中的 $\mathscr{O}(X)$ 模的子层, 这个 $\mathscr{O}(X)$ 模包含从一个 p 次微分形式

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \in \Sigma_p$$

所导出的 $G_p(X)$ 上的一切 0 次微分形式

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p} z_{i_1 \cdots i_p},$$

这里 $z_{i_1\cdots i_p}$ 是 E_p 的 Grassmann 坐标†. 积分元 E_p^0 称为**正则积分元** (regular integral element), 如果满足下面两个条件: (i) $(\Sigma_p)^0$ 是 $I\Sigma_p$ 在 E_p^0 的正则局部方程, 这里 $I\Sigma_p$ 是 Σ_p 的一切积分元的集合; (ii) 在 $I\Sigma_p$ 中的 E_p^0 附近 $\dim H(E_p)=$ 常数. 这是 E. Kähler 给出的定义,与 E. Cartan ([3]) 给出的不同.

这里,一般说来, $\mathscr{O}(X)$ 的子层 Φ 在积分点 x_0 称为 $I\Phi$ 的**正则局部方程** (regular local equation), 如果存在 x_0 的邻域 U 以及 Φ 在 U 上的截面† $\varphi_1,\cdots,\varphi_s$, 满足下面两个条件: (i) $d\varphi_1,\cdots,d\varphi_s$ 在 U 的每一点 x 线性无关; (ii) U 中一点 x 是 Φ 的积分点当且仅当 $\varphi_1(x)=\cdots=\varphi_s(x)=0$.

第一存在定理. 设给定 p 维积分流形 M 以及在 M 上 x 点的正则积分元 $T_x(M)$. 再设存在 X 的一个包含 M 的子流形 F, 使 $\dim F=n-t_{p+1}$, $\dim(T_x(F)\cap H(E_p))=p+1$, 这里 $E_p=T_x(M)$, $t_{p+1}=\dim H(E_p)-p-1$. 这时,在 x 附近存在唯一的积分流形 N, 使得 $\dim N=p+1$ 且 $F\supset N\supset M$.

这个定理是由求解一个 Cauchy-Ковалевская 型的偏微分方程组来证明的. E. Cartan ([1, 2,3]) 也试图由求积一个常微分方程组以获得一个存在定理.

一个积分元的链 $E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_r$, 若每一个 $E_p(0\leqslant p<r)$ 都是正则积分元, 就称为**正则链**(regular chain). 对正则链 $E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_r$, 定义 t_{p+1} 为 $t_{p+1}=\dim H(E_p)-p-1$ $(0\leqslant p<r)$, 定义 s_p 为 $s_p=t_p-t_{p+1}-1$ $(0\leqslant p<r)$, $s_r=t_r$, $t_0=\dim I\Sigma_0$. 于是, 我们有 $s_p\geqslant 0$ $(0\leqslant p\leqslant r)$, $s_0+\cdots+s_r=t_0-r$, 而且我们可以在 E_0 附近取局部坐标系 $(x_1,\cdots,x_r,y_1,\cdots,y_m)$ $(m=n-r)$, 使得满足下面四个条件:

(i) $I\Sigma_0$ 由 $y_{t_0-r+1}=\cdots=y_m=0$ 所定义;

(ii) $$H(E_p)=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_r},\frac{\partial}{\partial y_{s_0+\cdots+s_{p-1}}+1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_{t_0-r}}\right\},\ 0\leqslant p<r;$$

(iii) $$E_p=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_p}\right\},\ 1\leqslant p\leqslant r;$$

(iv) $E_0=(0,\cdots,0,0,\cdots,0)$. 整数 $s_0,\cdots,s_r$ 称为正则链 $E_0\subset\cdots\subset E_r$ 的**特征标** (characters)

第二存在定理. 设积分元链 $E_0\subset\cdots\subset E_r$ 是正则的. 取满足 (i)—(iv) 的局部坐标系,考虑一组初始数据

$$f_1,\cdots,f_{s_0},$$
$$f_{s_0+1}(x_1),\cdots,f_{s_0+s_1}(x_1)$$
$$f_{s_0+s_1+1}(x_1,x_2),\cdots,f_{s_0+s_1+s_2}(x_1,x_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$f_{s_0+\cdots+s_{r-1}+1}(x_1,\cdots,x_r),\cdots,f_{t_0-r}(x_1,\cdots,x_r)$. 这时,如果它们及其一阶导数值充分小,则必存在唯一积分流形, 由 $y_\alpha=y_\alpha(x_1,\cdots,x_r)$, $y_\beta=0$ $(1\leqslant\alpha\leqslant t_0-r<\beta\leqslant m)$ 所定义,使得

$$y_\alpha(x_1,\cdots,x_p,0,\cdots,0)=f_\alpha(x,\cdots,x),$$
$$s_0+\cdots+s_{p-1}<\alpha\leqslant s_0+\cdots+s_p,\ 0\leqslant p\leqslant r.$$

这个定理可由反复应用第一存在定理来证明. 这两个定理称为 **Cartan-Kähler 存在定理** (Cartan-Kähler existence theorem). 如果存在一个正则链 $E_0\subset\cdots\subset E_r$, 则称 Σ 在积分元 E_r 处为**对合的** (involutive). 一个积分流形, 若存在切空间使 Σ 在其上为对合的, 就称为 Σ 的**通常积分流形** (ordinary integral manifold) 或**通常解** (ordinary solution). 不具有这种切空间的积分流形称为 Σ 的**奇异积分流形** (singular integral manifold) 或**奇异解** (singular solution).

E. Cartan 关于通常积分元和正则积分元的定义是: 积分点 E_0^0 是通常积分点, 如果 Σ_0 是 $I\Sigma_0$ 在 E_0^0 的正则局部方程. 一个通常积分点 E_0^0 是正则积分点, 如果 $\dim H(E_0)$ 在 $I\Sigma_0$ 上 E_0^0 附近是常数. 归纳起来, 一个积分元 E_p^0 称为**通常积分元** (ordinary integral element), 如果 $(\Sigma_p)^0$ 是 $I\Sigma_p$ 在 E_p^0 上的正则局部方程, 而且 E_p^0 包含一个正则积分元 E_{p-1}^0. 一个通常积分元 E_p^0 称为 (E. Cartan 意义下) 的正则积分元, 如果 $\dim H(E_p)$ 在 $I\Sigma_p$ 上 E_p^0 处是常数. 可以证明, Σ 在积分元 E_r 处为对合的, 当且仅当 E_r 是 Σ 的通

常积分元．一个积分流形，若它具有的一个切空间是Σ的正则积分元，就称为Σ的**正则积分流形**(regular integral manifold)或**正规解**(regular solution)．令 m_{p+1} 是 $H(E_p)$ 的最小维数，其中 E_p 遍取 p 维通常积分元之集，而 g 是一整数，使得 $m_p \geqslant p(1 \leqslant p \leqslant g)$，$m_{g+1} = p$．这个整数 g 就称为Σ的**亏格**（genus)．它就是Σ的通常积分流形的最大维数．但是，一般说来，它并不是Σ的积分流形的最大维数．

D. C. Spencer 等人正试图在 C^∞ 范畴内得到与 Cartan-Kähler 存在定理类似的存在定理（关于线性偏微分方程组⇀[1,3,7,9,18,20]).

【偏微分方程的对合系】 为了给出偏微分方程对合系的定义，我们先定义 Hom (V, W) 的对合子空间，这里V和W是实数域 $\boldsymbol{R}$ 上的有限维向量空间．令A为 Hom (V, W)的一个子空间．对V中一组向量 $v_1, \cdots, v_p$，用 $A(v_1, \cdots, v_p)$ 记作A中 $v_1, \cdots, v_p$ 的零化子空间，令 g_p 为 $A(v_1, \cdots, v_p)$ 当 $(v_1, \cdots, v_p)$ 变动时的最小维数，$0 \leqslant p \leqslant r = \dim V$．$V$的一个基底 $(v_1, \cdots, v_r)$ 称为通常基底，如果它对每一个 p 都满足 $g_p = \dim A\ (v_1, \cdots, v_p)$．对任何$A$都存在通常基底．令 $W \otimes S^2(V^*)$ 为 Hom $(V, \text{Hom}\,(V, W))$ 的子空间，它由所有满足 $\xi(u)v = \xi(v)u$ 的元ξ所构成，u, v 是 V 中任意元．于是，A的开拓 pA 定义为 $pA = \text{Hom}\,(V, A) \cap W \otimes S^2(V^*)$．对$V$的任意基底$(v_1, \cdots, v_r)$，我们有不等式

$$\dim pA \leqslant \sum_{p=0}^{r} \dim A\,(v_1, \cdots, v_p).$$

若 $\dim pA = \sum_{p=0}^{r} g_p$，则 Hom$(V, W)$的子空间$A$称为**对合子空间**（involutive subspace)．这个对合子空间的概念是由 V. W. Guillemin 和 S. Sternberg 得到的([9]).

由两个流形X和N以及从X到N上的投影π组成的三元组 $(X, N; \pi)$ 称为**纤维流形**（fibered manifold)，如果在X的每一点上，微分† π_* 都是满射．对纤维流形 $(X, N; \pi)$，取从N中的一个区域到X的、使 $\pi \circ f =$ 恒等映射的所有映射 f 的集合．于是，l 节† $j^l_x(f)$ 是在下述等价关系下的等价类：$j^l_x(f) = j^l_u(g)$，当且仅当 $x = u$，$f(x) = g(u)$，而且

$$\frac{\partial^{j_1+\cdots+j_r} f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_r^{j_r}}(x) = \frac{\partial^{j_1+\cdots+j_r} g}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_r^{j_r}}(u),$$

$j_1 + \cdots + j_r \leqslant l$，$(x_1, \cdots, x_r)$是$N$在 $x = u$ 附近的局部坐标系(⇀微分流形).

记纤维流形 $(X, N; \pi)$ 的一切 l 节的空间为 $J^l(X, N; \pi)$，或简记为 J^l．这时，$\mathscr{O}(J^l)$ 的理想的子层Φ称为N上的一个 **l 阶偏微分方程组**(system of partial differential equations of order l)．J^l 的一点z称为Φ的积分点，如果对所有的 $\varphi \in \Phi$，$\varphi(z) = 0$．Φ的所有**积分点**的集记作 $I\Phi$．令 π^l 为 J^l 到 J^{l-1} 上的自然投影．这时在 J^l 的点z上，可以把 $\text{Ker}\,\pi^l_*$ 与 Hom $(T_x(N), \text{Ker}\,\pi^l_*)$视为相同，这里 $x = \pi\pi^1 \cdots \pi^l z$．$\Phi$的主部 $C_z(\Phi)$ 定义为 $\text{Ker}\,\pi^l_*$ 的零化Φ的子空间．Φ的**开拓**(prolongation) $p\Phi$ 定义为N上的由Φ和$\partial^k \Phi$ $(1 \leqslant k \leqslant \dim N)$ 生成的 $l+1$ 阶组，这里 ∂^k 是关于N的坐标 x_k 的形式导数：

$$(\partial^k \varphi)(j^{l+1}_x(f)) = \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(j^l_x(f)),\quad \varphi \in \mathscr{O}(J^l).$$

令w为 $p\Phi$ 的积分点，z为 $\pi^{l+1} w$．这时，我们有恒等式

$$pC_z(\Phi) = C_w(p\Phi).$$

对合系的下述定义是倉西正武([14])给出的：Φ在积分点z是对合的，如果下述两个条件满足：(i) Φ是 $I\Phi$ 在z的正则局部方程；(ii) 存在z在 J^l 中的邻域U，使 $(\pi^{l+1})^{-1} U \cap I(p\Phi)$ 成为一个纤维流形，其基为 $U \cap I\Phi$，射影为 π^{l+1}.

一个偏微分方程组称为**对合的**(involutive)，如果它有一个积分点，而且在其上是对合的．固定X的一组自变量 $(x_1, \cdots, x_r)$．这时，一个微分形式系称为**对合的**（involutive)，如果它有一个积分点，使它在其上为对合的，而且 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r \neq 0$．可以证明，这两个对合系的定义是等价的([14,18]).

【开拓定理】 E. Cartan 给出了一个开拓方法，用它可以从一个已给的两个自变量的方

程组(如果它有解)得到一个对合系. 他提出了以下的问题: 对任意的 $r>2$, 建立一个开拓方法. 使得可以从一个已给的 r 个自变量的方程组(如果它有解)得出一个对合系. 倉西正武为了解决这个问题, 将已给组 Φ 依次开拓为 $p^t\Phi$, $t=1,2,3,\cdots$, 并证明下面的定理: 假设存在一串 $p^t\Phi$ 的积分点 z^t 且 $\pi^{t+l}z^t=z^{t-l}$, $t=1,2,3,\cdots$, 使对每一个 t 都满足下述两个条件: (i) $p^t\Phi$ 是 $I(p^t\Phi)$ 在 z^t 的正则局部方程; (ii) 存在 z^t 在 $I(p^t\Phi)$ 的邻域 V^t, 使得 $\pi^{t+l}V^t$ 包含 z^{t-1} 在 $I(p^{t-1}\Phi)$ 中的一个邻域, 并构成一个纤维流形 $(V^t,\pi^{t+l}V^t;\pi^{t+l})$. 这时, $p^t\Phi$ 在 z^t 对充分大的整数 t 是对合的.

这个开拓定理给出了无限 Lie 群† 理论中的有力工具.然而,若我们考虑一般类型的偏微分方程组,则存在这样的方程组的例子,虽然有解却不能用这个开拓办法开拓成一对合系. 为了改进倉西正武的开拓定理,松田道彦([15])对 l 阶方程组 Φ 定义了同阶开拓: $p_0\Phi=p\Phi\cap\mathcal{O}(J^l)$. 这是 Lagrange 和 Jacobi 的经典的完备化方法的推广. 把这个开拓依次用于一已给方程组 Φ, 我们有 $\Psi=\bigcup_{\sigma=1}^{\infty}p^{\sigma}\Phi$. 定义 p_* 运算为 $p_*=\bigcup_{\sigma=1}^{\infty}p_0^{\sigma}$. 于是,把这个开拓逐次应用于 Ψ, 我们有以下定理: 假设存在一串 $p_*^t\Psi$ 的积分点 z^t, 使 $\pi^{l+t}z^t=z^{t-1}$, $t=1,2,3,\cdots$, 而对每个 t, 满足以下两个条件: (i) $p_*^t\Psi$ 是 $I(p_*^t\Psi)$ 在 z^t 的正则局部方程; (ii) 在 $I(p_*^t\Psi)$ 上 z 附近, $\dim pC(p_*^t\Psi)$ 是常数. 这时,对充分大的整数 t 来说, $p_*^t\Psi$ 在 z^t 是对合的.

松田为了证明这个定理, 应用了 V. W. Guillemin, S. Sternberg 和 J.-P. Serre [18, Appendix] 得到的以下定理: 假设我们给定 Hom (V,W) 的子空间 A_0 和 Hom (V,A_{t-1}) 的子空间 A_t, 满足 $A_t\subset pA_{t-1}$, $t=1,2,3,\cdots$. 这时,对充分大的整数 t 来说, A_t 是 Hom (V,A_{t-1}) 的对合子空间.

这样, E. Cartan 问题肯定地解决了. 对于广义 Pfaff 问题, 这些开拓定理给出了与 C. Riquier 所得的解不同的解.

【参】 [1] E. Cartan, Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **18** (1901) 241—311; [2] E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux, Hermann, 1922; [3] E. Cartan, Les systèmes différentielles extérieures et leurs applications géométriques, Hermann, Actualités Sci. Ind., 1945; [4] C. Chevalley, Theory of Lie groups I, Princeton Univ. Press, 1946; [5] A. R. Forsyth, Theory of differential equations, pt.1. Exact equations and Pfaff's problem, Cambridge Univ. Press, 1890; [6] A. R. Forsyth, Theory of differential equations, pt. IV. Partial differential equations. Cambridge Univ. Press, 1906; [7] E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Hermann, 第二版 1920; [8] E. Goursat, Leçons sur le problème de Pfaff, Hermann, 1922; [9] V. W. Guillemin - S. Sternberg, An algebraic model of transitive differential geometry, Bull. Amer. Math. Soc., **70** (1964), 16—47; [10] E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Teubner, 1934; [11] M. Kuranishi (倉西正武), On E. Cartan's prolongation theorem of exterior differential systems, Amer. J. Math., **79** (1957), 1—47; [12] M. Kuranishi (倉西正武), Lectures on exterior differential systems, Lecture notes, Tata Inst., 1962; [13] M. Kuranishi (倉西正武), On the local theory of continuous infinite pseudo groups, I. II, Nagoya Math. J., **15** (1959), 225—260; 19 (1961), 55—91. [14] M. Kuranishi (倉西正武), Lectures on involutive systems of partial differential equations, Publ. Soc. Math., São Paulo, 1967; [15] M. Matsuda (松田道彦), Cartan-Kuranishi's prolongation of differential systems combined with that of Lagrange and Jacobi. Publ. Res. Inst. Math. Sci., (A) **3** (1967—1968), 69—84; [16] C. Riquier, Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Gauthier Villars, 1910; [17] J. F. Ritt, Differential algebra, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1950; [18] I. M. Singer - S. Sternberg, The infinite groups of Lie and Cartan I. The transitive groups, J. Analyse Math., **15** (1965), 1—114; [19] J. A. Schouten - W. v. d. Kulk, Pfaff's problem and its generalizations. Clarendon Press, 1949; [20] D. C. Spencer, Overdetermined systems of linear partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc, **75** (1969), 179—239; [21] 松田道彦, 外微分形式の理論, 岩波, 1976.

接触变换 [英 contact transformation 法 transformation de contact 德 Berührungstransformation 俄 преобразование соприкосновения 日 接触変換] 当 $2n+1$ 个变量 z, x_j, p_j ($j=1,2,\cdots,n$) 的变换

$$(1)\quad \begin{aligned} Z&=Z(z,x_1,x_2,\cdots,x_n,p_1,p_2,\cdots,p_n),\\ X_j&=X_j(z,x_1,x_2,\cdots,x_n,p_1,p_2,\cdots,p_n),\\ &\qquad j=1,2,\cdots,n,\end{aligned}$$

$$P_j = P_j(z, x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n),$$
$$j = 1, 2, \cdots, n,$$

能使全微分方程

(2) $dz - p_1dx_1 - p_2dx_2 - \cdots - p_ndx_n = 0$

不变时,也就是使

(3) $$dZ - P_1dX_1 - P_2dX_2 - \cdots - P_ndX_n = \rho(dz - p_1dx_1 - p_2dx_2 - \cdots - p_ndx_n)$$

恒等地成立时,就把(1)称为 $n+1$ 维空间 $(z, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的**接触变换**. 此处 ρ 表示不等于 0 的 z, x_j, p_j 的函数. 并设 (1) 具有逆变换. 如果引用 **Lagrange 括号** (Lagrangean bracket):

$$[f, g] = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\left(\frac{dg}{dx_j}\right) - \frac{\partial g}{\partial p_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)\right),$$
$$\left(\frac{df}{dx_j}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_j} + p_j\frac{\partial f}{\partial z},$$

那末(1)成为接触变换的充分必要条件是,$[X_j, X_k] = [X_j, Z] = [P_j, P_k] = 0$, $[P_j, X_k] = \rho\delta_{jk}$, $[P_j, Z] = \rho P_j$. 此处 δ_{jk} 当 $j \neq k$ 时为 0, 当 $j = k$ 时为 1, 也就是 Kronecker 的 δ.

由此可知,两个接触变换顺次施行(合成)的结果以及接触变换的逆变换,仍然是接触变换. 因为恒等变换 $Z = z$, $X_j = x_j$, $P_j = p_j$ 是接触变换, 所以全体接触变换的集合形成无穷维连续群. $n+1$ 维空间的点(z, x_j)与通过这个点的 n 维超平面 $z^* - z = \sum_{j=1}^{n}(p_jx_j^* - x_j)$ (z^*, x_j^* 为流动坐标)的组合称为**面元** (surface element) (或**超面元** (hypersurface element)), 满足(2)的面元的集合称为 **n 维面元并集**(union of surface elements). 如果引用这些概念,那末 $n+1$ 维空间的面元坐标 z, x_j, p_j $(j=1, 2, \cdots, n)$的变换 (1) 就是把 n 维面元并集变成 n 维面元并集的接触变换. 因此,如果把公有 $n+1$ 维空间中一点 (z, x_j) 并在此点相切的两个 n 维超曲面, 由接触变换进行变换, 那末作为变换的象的两个 n 维超曲面仍然公有一点并且相切."接触变换"的名字就是由这个事实而来.

接触变换的例子可由 2 次超曲面的相关对应给出. 从平面上抛物线 $x^2+2y=0$ 的极与极线的关系,可得 **Legendre 变换**(Legendre's transformation) $X = -p$, $Y = xp - y$, $P = -x$ $(\rho = -1)$.

一般说来, 由称为**母函数** (generating function) 的函数 $\Omega(x, y, X, Y)$ 导出的三个关系式: $\Omega(x, y, X, Y) = 0$, $\partial\Omega/\partial X + P\partial\Omega/\partial Y = 0$, $\partial\Omega/\partial x + p\partial\Omega/\partial y = 0$ 所定义的可逆变换就是接触变换. 这个变换, 在点(x_0, y_0)对应一条曲线 $\Omega(x_0, y_0, X, Y) = 0$. 在多变量的情形,也有同样的事实成立. 例如,在 $n+1$ 维空间中,变换: $Z = z - x_1p_1 - \cdots - x_\nu p_\nu$; $X_1 = p_1, \cdots, X_\nu = p_\nu$, $X_{\nu+1} = x_{\nu+1}, \cdots, X_n = x_n$; $P_1 = -x_1, \cdots, P_\nu = -x_\nu$, $P_{\nu+1} = p_{\nu+1}, \cdots, P_n = p_n$ 是接触变换. 此处, ν 表示从1到 n 的自然数. 在 $n = 2$, $\nu = 2$ 的情形就是 Legendre 变换,在 $n = 2$, $\nu = 1$ 的情形称为 **Ampère 变换** (Ampèrers transformation) (→公式 15 IV).

【典型变换】 当 $2n$ 个变量 x_j, p_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 的变换

(4) $$X_j = X_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n),$$
$$P_j = P_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, p_1, p_2, \cdots, p_n),$$
$$j = 1, 2, \cdots, n$$

把微分形式 $\sum_{j=1}^{n}(P_j dX_j - p_jdx_j)$ 变成 x_j, p_j 的全微分形式时,也就是

(5) $$\sum_{j=1}^{n}(P_jdX_j - p_jdx_j) = dU$$

成立时,就把(4)称为**典型变换** (canonical transformation). 此处, U 是 x, p 的函数.

设(1)是接触变换. 现在令 $z = x_{n+1}$, $Z = X_{n+1}$, $P_{n+1} = p_{n+1}/\rho$, $-p_jp_{n+1} = \bar{p}_j$, $-P_jP_{n+1} = \bar{P}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, 于是(2)成为 $\bar{P}_1dX_1 + \bar{P}_2dX_2 + \cdots + \bar{P}_ndX_n + P_{n+1}dX_{n+1} = \bar{p}_1dx_1 + \bar{p}_2dx_2 + \cdots + \bar{p}_ndx_n + p_{n+1}dx_{n+1}$, 因此 (1) 成为典型变换 $(U = 0)$. 所以接触变换包含于典型变换中.

对于典型变换, Lagrange 括号变成

$$(f, g) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\right),$$

它称为 **Poisson 括号** (Poisson's bracket).

当(4)为典型变换时，有$(X_j, X_k)=0$，$(P_j, X_k)=\delta_{jk}$，$(P_j, P_k)=0$ $(j, k=1, 2, \cdots, n)$成立．反之，若$X_j (j=1, 2, \cdots, n)$满足$(X_j, X_k)=0$ $(j, k=1, 2, \cdots, n)$，则可求得函数U和唯一确定的函数P_j $(j=1, 2, \cdots, n)$，使(5)成立．

【对解微分方程的应用】 由于接触变换把面元并集变成面元并集，根据这个性质就可把它应用于解微分方程．

作为一个例子，仅就一阶偏微分方程

$$(6) \qquad F(x, y, z, p, q)=0;$$
$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

谈谈关于它的应用的概要．为此，首先把(6)考虑为组成面元并集的面元的方程，用接触变换把它变成简单的方程进行求解，然后把它的解再用逆变换还原，便得原方程的解．现在，设(6)的全解†为$z=\omega(x, y, a, b)$，则由以

$$\Omega=Z-z+\omega(x, y, X, Y)-c=0,$$
$$c\ 为常数$$

为母函数所生成的接触变换，使(6)成为$Z-c=0$．在这个方程中，由于$X=a$，$Y=b$，$Z=c$，$\alpha P+\beta Q=0$ (a, b, c, α, β 为常数)是起着特别重要作用的解，因而把这个线元称为**特征线元**(characteristic line element)．特征线元应该满足的微分方程，用逆变换还原便成为(6)的 **Charpit 辅助方程** (subsidiary equation of Charpit)：

$$(7) \qquad \frac{dx}{\partial F/\partial p}=\frac{dy}{\partial F/\partial q}=\frac{dz}{p\partial F/\partial p+q\partial F/\partial q}=\frac{-dp}{\partial F/\partial x+p\partial F/\partial z}=\frac{-dq}{\partial F/\partial y+q\partial F/\partial z}.$$

因此，求解(6)是这样的：从(7)的解$G(x, y, z, p, q)=a$与$F=0$解出$p=p(x, y, z; a)$，$q=q(x, y, z; b)$，于是$dz=p dx+q dy$就成为完全可积的全微分方程，这个方程的通解就是(6)的全解．如果(7)的两个独立解$G(x, y, z; p, q)=a$，$H(x, y, z, p、q)=b$，能够使得$[G, H]=0$，那末从三个方程$F=0$，$G=a$，$H=b$消去p，q，便得(6)的全解．这个方法称为 Lagrange-Charpit 解法†．同样的方法也适用于$F(z, x_1, \cdots, x_n; p_1, \cdots, p_n)=0$(→偏微分方程的解法)．

【对解析动力学的应用】 考虑偏微分方程

$$(8) \qquad F\left(z, x_1, \cdots, x_n; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0,$$

设$W(z, x_1, \cdots, x_n)=0$，把$\partial z/\partial x_i=-(\partial W/\partial x_i)/(\partial W/\partial z)$代入(8)，关于$\partial W/\partial z$求解，则得 Hamilton-Jacobi 方程†：

$$(9) \qquad \frac{\partial W}{\partial z}+H\left(z, x_1, \cdots, x_n; \frac{\partial W}{\partial x_r}, \cdots, \times\frac{\partial W}{\partial x_n}\right)=0.$$

H称为 Hamilton 算符或者 Hamilton 函数†．习惯上，把变量z，x_i改写为t，q_i，设$\partial W/\partial x_i\equiv p_i$，则对(9)的 Charpit 辅助方程就变为 Hamilton 典型方程†

$$(10) \qquad \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}=(q_i, H),\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=(p_i, H).$$

此处(,)表示 Poisson 括号(→分析力学)．(10)的一个例子就是从$\delta\int L(q_i, \dot{q}_i)dt=0$导出的动力系统的运动方程．这里，$q_i$为广义坐标，$p_i=\partial L/\partial \dot{q}_i$ $(\cdot\equiv d/dt)$，$H=\sum p_i\dot{q}_i-L$．

如果根据典型变换$\sum(p_i dq_i-P_i dQ_i)=dW$，把$p_i$，$q_i$变成$P_i$，$Q_i$，则(10)成为$\dot{Q}_i=\partial K/\partial P_i$，$\dot{P}_i=-\partial K/\partial Q_i$，$K=H+\partial W/\partial t$．这时$p_i=\partial W/\partial q_i$，$P_i=-\partial W/\partial Q_i$．特别是，把使得$K=0$的变换称为**转向平衡系统的变换**(transformation to an equilibrium system)．这样的W可以作为(9)的解而得到．

还有，一般的无穷小变换可写为$\delta q_i=\varepsilon(q_i, F)$，$\delta p_i=\varepsilon(p_i, F)$($\varepsilon$是一个微小的数，

F是p, q的任意函数)，它是对任意量A的一个无穷小变分$\delta A = \varepsilon(A, F)$. 因此，动力系统的运动方程 (10) 可以看作是一个无穷小变换.

此外，光学系统的每一个映射都是一个接触变换，对应于W的量称为**光程函数**(*德* Eikonal 俄 Эйконал)(→几何光学).

【参】[1] 吉江琢児，初等1階偏微分方程式，裳華房，1947；[2] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II, Interscience, 1962(中译本：R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法 II，科学出版社，1977)；[3] 松田道彦，外微分形式の理論，岩波書店，1976；[4] 大島利雄，小松彦三郎，一階偏微分方程式，小平邦彦編集，岩波講座　基礎数学，岩波，1977

偏微分方程 [英 partial differential equation 法 équation aux dérivées partielles *德* partielle Differentialgleichung 俄 дифференциальное уравнение с частными производными 日 偏微分方程式] 我们把在自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$和它们的函数$z$以及$z$的偏导数之间成立的函数关系式称为**偏微分方程**. 同常微分方程的情况一样，也可以定义偏微分方程组. 包含在偏微分方程中的偏导数的最高阶数称为方程的**阶**(order). 通常记 $p_i = \partial z/\partial x_i$. 在 $n=2$ 的情况，若z为x, y的函数，则我们记

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

偏微分方程

$$\begin{aligned} A(x, y)r + B(x, y)s + C(x, y)t \\ + D(x, y)p + E(x, y)q \\ + F(x, y)z = G(x, y) \end{aligned}$$

是关于z及其偏导数的一次式，我们称这个方程为**线性的**(linear). 若方程只是关于最高阶导数为线性的，那么我们就称它为**拟线性的**(quasilinear). 有时也把拟线性的简单地称为线性的。不是线性的方程称为**非线性的**(non-linear)(→非线性问题). 满足给定的偏微分方程的函数 $z = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为此偏微分方程的**解**(solution)，而求解的过程称为**解**(solve)此偏微分方程. 在以 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, z)$ 为坐标的 $n+1$ 维空间中，用 $z - \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$ 所表示的超曲面称为**积分(超)曲面**(integral hypersurface). 对于偏微分方程组，也可作同样的定义.

例 1) 当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数时，求解一阶线性偏微分方程

$$(1)\qquad X_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$$

是与求解常微分方程组

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}$$

等价的。也就是说，若设 $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}$ 是(2)的 $n-1$ 个独立积分†，则对 $n-1$ 个变量的任意函数 Φ, $z = \Phi(f_1, f_2, \cdots, f_{n-1})$ 是(1)的通解(后述)。

例 2) 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, R是n个自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 以及应变量z的函数，若把一阶拟线性偏微分方程(也称为 Lagrange 方程)

$$(3)\qquad P_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \cdots + P_n\frac{\partial z}{\partial x_n} = R$$

的积分曲面表示成 $V(z, x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$，则(3)变为

$$(4)\qquad P_1\frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial V}{\partial x_2} + \cdots + P_n\frac{\partial V}{\partial x_n} + R\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

于是成为(1)的形式. 因此可用例 1) 的方法去求通解. 这个办法对于方程组同样可行.

【特征流形】 考虑两个变量x, y的n阶偏微分方程

$$(5)\qquad F(x, y, z, p_{10}, p_{01}, \cdots, p_{n0}, \cdots, p_{0n}) = 0.$$

这里 $p_{jk} = \partial^{j+k}z/\partial x^j\partial y^k$. 对此方程，我们给出以$\lambda$为参数的流形

$$(6)\qquad x = x(\lambda),\ y = y(\lambda),\ p_{jk} = p_{jk}(\lambda),$$
$$j, k = 0, 1, \cdots, n-1;\ j+k \leqslant n-1,$$

考虑这样的问题：求(5)的一个解 $z = \varphi(x, y)$，在 $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$ 上满足

$$\frac{\partial^{j+k}\varphi(x, y)}{\partial x^j\partial y^k} = p_{jk}(\lambda),$$

$j, k = 0, 1, \cdots, n-1; j+k \leqslant n-1$.

这个问题称为**Cauchy问题**(Cauchy's problem).

如果F在一组值 x^0, y^0, p_{jk}^0 $(j, k=0, 1, \cdots, n;\ p_{00}=z^0;\ j+k \leqslant n)$ 上是全纯的且为0, x, y, p_{jk} 在 $\lambda=0$ 是全纯的，分别取值 x^0, y^0, p_{jk}^0, 那末当

$$(7)\qquad P_{n0}\,dy^n - P_{n-1,1}\,dx\,dy^{n-1} + \cdots + (-1)^n P_{0n}\,dx^n,$$

$$P_{jk} = \frac{\partial F}{\partial p_{jk}}$$

在 (x^0, y^0, p_{jk}^0) 不为 0 时，对 Cauchy 问题存在全纯解，而且只有一个.

这个 **Cauchy 存在定理**(Cauchy's existence theorem) 对使得 (7) = 0 的点不成立. 这里与其说是解不存在，不如说是解的唯一性被破坏，意味着有多个解存在.在积分曲面 $z=\varphi(x, y)$ 上可以得到满足 (7) = 0 的 n 条曲线. 这种曲线称为(5)的**特征曲线**(characteristic curve). 特征曲线上的各点和关于这些点的 $\partial^{j+k}\varphi(x, y)/\partial x^j\partial y^k$ $(j, k=0, 1, \cdots, n;\ j+k \leqslant n)$ 的值所组成的流形称为(5)的**特征流形**(characteristic manifold). 因此，Cauchy 存在定理在特征流形上不能适用.

【解的种类】 首先考虑两个变量的一阶偏微分方程

$$(8)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

(8) 的含有两个任意常数的解称为**完全解**或者**全解** (complete solution). 如果知道 (8) 的一个全解，那末由微分与消去法便能给出(8)的其他一切的解. 设

$$(9)\qquad V(x, y, z, a, b) = 0$$

是(8)的全解，由此便有

$$(10)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

从 (9) 及 (10) 消去 a 与 b，则得方程(8)本身. 而且，求解方程 (8) 与求满足 (9) 及 (10) 的三个方程的 x, y 的函数 z, a, b 是等价的. 如果将(9)中 a, b 也考虑为 x, y 的函数，则得

$$(11)\qquad \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

因此，我们可以用 (9), (11) 代替 (9)(10). 于是，可以考虑下面三种情况:

i) 当 a, b 为常数时，则得全解(9).

ii) 当 $V=0$, $\partial V/\partial a=0$, $\partial V/\partial b=0$ 成立时，由于 z, a, b 都只是 x, y 的函数，则可解出. 这就给出不含任意常数的解 z，这样的解称为一阶偏微分方程 (8) 的**奇解** (singular solution).

iii) 当 $\partial V/\partial a$, $\partial V/\partial b$ 不同时为 0 时，由 (11)可知 Jacobi 行列式 $D(a, b)/D(x, y)=0$ 成立. 因此在 a 与 b 之间就有函数关系存在. 这样的关系若有两个，则 a, b 成为常数，于是 z 就成为一个全解。因此，我们假定这样的关系只有一个，设 $b=\varphi(a)$，于是得到

$$(12)\qquad V(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0,\quad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0,$$

将(12)关于 a 及 z 求解，便得到 (8) 的一个解 z. 这个解不包含任意常数而含有一个任意函数 φ. 这样的解称为一阶偏微分方程 (8) 的**通解** (general solution).通解中所包含的各个解(给定特殊的 φ)称为**特解** (particular solution).

由于上面所讨论的内容包括了所有的情况，所以，只要知道 (8) 的一个全解，就可得到它的一切解. 全解不只有一个，也可有无数个，它们相互之间可由接触变换[†]来转化. 而且，它们都包含在通解之中.

在自变量的个数是 n 的情形，考虑含有 $n-r+1$ 个任意常数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}$ 的方程

$$(13)\qquad V(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}) = 0,$$

假设这些参数取固定的值，对 (13) 进行微分得到

$$(14)\qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i\frac{\partial V}{\partial z} = 0,\quad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

从(13),(14)消去参数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}$, 一般就得到 r 个一阶偏微分方程

(15) $F_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_n)=0,$
$j = 1, 2, \cdots, r.$

于是 (13) 就称为一阶偏微分方程组 (15) 的**全解**. 在这种情形也同两个变量的情形一样, 从(15)的全解 (13) 便可找出 (15) 的其他一切的解. 同两个变量的情形一样, 可以下面三种情形进行分类:

i) 首先,当假设 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}$ 为常数时,就是全解.

ii) 当设 $V = 0$, $\partial V/\partial a_1 = 0, \cdots, \partial V/\partial a_{n-r+1} = 0$ 时,若能从这些方程中消去 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}$ 则得不含有任意常数的解. 这样的解称为一阶偏微分方程组(15)的**奇解**.

iii) 如果 $\partial V/\partial a_i$ 不全为 0, 那末在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}$ 中至少有一个函数关系存在. 现在假定它们之间正好有 $k(\leqslant n - r)$ 个函数关系, 设这些函数关系为

(16) $f_j(a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}) = 0,$
$j = 1, 2, \cdots, k,$

于是存在 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$, 使得

(17) $$\frac{\partial V}{\partial a_l} = \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_l} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial a_l},$$
$$l = 1, \cdots, n - r + 1.$$

从(13),(16),(17)消去 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-r+1}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, 一般只能得到 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 z 之间的一个关系式. 这就是方程组 (15) 的解, 正好含有 k 个任意函数 $f_1, f_2, \cdots, f_k$. 这样所得到的含有任意函数的解称为**通解**.特别是,在 $k = n - r + 1$ 的情形, 它就是全解。因为 k 可以是从 1 到 $n - r$ 的任意整数, 所以可以认为有 $n - r$ 种通解, 它们在本质上没有什么区别.

对二阶偏微分方程
$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$
如果根据它的解中所含任意函数的数目来定义通解, 那是不完全的. 现在所用的 J. G. Darboux 定义如下所述:

一个解在适当地选取它所含有的任意函数及常数后,根据 Cauchy 存在定理(→偏微分方程的初值问题)就可知道它的存在,这个解就称为一般偏微分方程的**通解**.

若在由 $z=\varphi(x,y)$, $p=\partial\varphi/\partial x, q=\partial\varphi/\partial y$ 所组成的流形的任何曲线 (并结合 p, q)上都不能使得 Cauchy 存在定理成立, 则称解 $z = \varphi(x, y)$为一般偏微分方程的**奇解**. 或者,定义为同时满足 $F = 0, \partial F/\partial r = 0, \partial F/\partial s = 0, \partial F/\partial t = 0$ 的解也是一样的.

【Cauchy 方法】 我们把偏微分方程(8)考虑为积分曲面 S 上的点 (x, y, z) 与在这些点上 S 的切平面的方向余弦之间的关系式. 因此,对 S 上所有各点的切平面,一般形成含有一个参数的平面族. 这个平面族一般就是以 (x, y, z)为顶点的锥面(T)的包络. 在积分曲面 S 上各点M的切平面与锥面 (T) 沿着母线 G 相切. 对 S 上的曲线,如果它在各点的切线同(T)的母线一致,那末它就是特征曲线。设

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial F}{\partial z},$$
$$P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q},$$

于是特征曲线可由下面的常微分方程组给出:

(18) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}.$$

这种方程称为一阶偏微分方程 (8) 的**特征方程** (characteristic equation)或者 **Charpit 辅助方程** (subsidiary (auxiliary) equation of Charpit). (18) 不仅决定特征曲线的元 x,y,z 并且也决定 p, q. 这个面元† (x, y, z, p, q) 的集合就是特征流形.

我们把这个特征流形考虑为沿着特征曲线切割下来的积分曲面的无穷小宽度的部分, 称它为**特征带**(characteristic strip). 特征带以 λ 为参数时可以表示为 $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$, $p = p(\lambda)$, $q = q(\lambda)$, 因为在积分曲面 $z = z(x, y)$ 上有
$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{d\lambda} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{d\lambda},$$

所以若把 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ 换成 p, q, 则

(19) $$dz = pdx + q\,dy$$

必然成立. 这个关系式称为**成带条件**(德 Streifenbedingung). (18) 显然满足成带条件. 关于特征流形的下述重要定理成立.

I) 如果(8)的两个积分曲面具有一个公共面元, 那末含有这个面元的特征流形的一切面元都为它们公有.

II) 在(8)的积分曲面上,由它的各点和在这些点上的切平面的方向系数 p, q 所组成的面元的集合是由 ∞^1 个特征流形生成的. 反之, 在某一曲面上, 当它的各点和在这些点上的切平面的方向系数 p, q 所组成的面元集合是由(8)的 ∞^1 个特征流形生成时,那末这个曲面就是(8)的积分曲面.

在 P, Q 同时为 0 的点上, Cauchy 存在定理不成立. 若有(8)的恒满足 $P=0$, $Q=0$ 的解存在,则必有 $X+pZ=0$, $Y+qZ=0$ 成立. 这样的解就是奇解.

【齐次偏微分方程】 设 $f(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)$ 为 m 个变量 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 的齐次多项式, D_i 表示算子 $\partial/\partial x_i$. 考虑齐次偏微分方程

(20) $$f(D_1, D_2, \cdots, D_m)u = 0.$$

非齐次方程经过应变量的变换后, 也可化为齐次方程, 例如 $D_1^2 w = D_2 w$ 那样的非齐次方程,只要令 $u = e^{x_3}w$, 就能化成齐次方程$(D_1^2 - D_2D_3)\,u = 0$, 因此考虑 $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^2 - \xi_2\xi_3$ 就行了. 现在设 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s$ 为 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 的函数, F 为任意函数,当(20)具有形如

(21) $$u = F(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_s)$$

的解时, 就称为齐次偏微分方程(20)的**主解** (primary solution). 例如,对于 $(D_1^2 - D_2^2)\,u = 0$, 有两个主解 $u = F(x_1 + x_2)$, $u = F(x_1 - x_2)$. 对于 Laplace 方程[†]

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

主解是 $u = F(z + ix\cos\alpha + iy\sin\alpha)$, 此处 α 是参数.

其次,例如波动方程[†]

(22) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

具有形如

(23) $$u = \gamma f(\alpha, \beta),\ \gamma = \frac{1}{r},$$
$$\alpha = t - \frac{r}{c},\ \beta = \frac{z - r}{x + iy}$$

的解. 此处, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, f 是任意函数, γ 是(22)的特解,而且 $v = f(\alpha, \beta)$ 满足(22)的特征曲线的偏微分方程

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2.$$

这样由特解与包含任意函数的因子的积构成的解称为原方程的**原始解** (primitive solution). (22) 还具有 $u = \dfrac{1}{r}\,g\left(t + \dfrac{r}{c}, \dfrac{z - r}{x + iy}\right)$ 形式的原始解. 此处 g 是任意函数.

Laplace 方程具有原始解 $u = \dfrac{1}{r}\,f\left(\dfrac{z - r}{x + iy}\right)$.

就象 Laplace 方程那样,既有主要解又有原始解的方程称为**基础方程** (basic equation). 与基础方程具有相同特征曲线的方程的解, 可由对基础方程的解进行积分或者加法来求得. 例如选取 $\Delta u = 0$ 的原始解 $u = \dfrac{1}{r}\,f\left(\dfrac{z - r}{x + iy}\right)$的特例 $u = \dfrac{1}{r}$, 则

$$u = \iiint ((x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2)^{-1/2} F(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

在积分区域内满足

$$\Delta u + 4\pi F(x, y, z) = 0.$$

【确定组】 考虑对 m 个函数 $u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots u^{(m)}$ 的 h 个偏微方程的方程组:

(24) $$F_i(x, y, u^{(1)}, u^{(2)}, \cdots, u^{(m)}, u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, \cdots, u_x^{(m)}, u_y^{(m)}, u_{xx}^{(1)} \cdots) = 0,$$
$$i = 1, 2, \cdots, h.$$

当 $h = m$ 时称为**确定组** (determined system), 当 $h > m$ 时称为**超定组** (overdetermined system), 当 $h < m$ 时称为**欠定组** (underdetermined system).

确定组的例子是对两个函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 的 Cauchy-Riemann 微分方程†

$$u_x - v_y = 0,\ u_y + v_x = 0,$$

由此进而可以导出确定组 $\Delta u = 0, \Delta v = 0$. 超定组的最简单的例子是

$$u_x = f(x, y),\ u_y = g(x, y).$$

它有解存在的充分必要条件是 $f_y = g_x$ 成立. 另外,关于两个复变量 $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ 的全纯函数 $f(z_1, z_2)$ 的 Cauchy-Riemann 微分方程是

$$u_{x_1} = v_{y_1},\ u_{x_2} = v_{y_2},\ u_{y_1} = -v_{x_1},\ u_{y_2} = -v_{x_2},$$

由此进而可以导出超定组:

$$u_{x_1x_1} + u_{y_1y_1} = 0,\ u_{x_1x_2} + u_{y_1y_2} = 0,$$
$$u_{x_2x_2} + u_{y_2y_2} = 0,\ u_{x_1y_2} - u_{x_2y_1} = 0.$$

欠定组的例子是

$$\partial(u, v)/\partial(x, y) \equiv u_x v_y - u_y v_x = 0.$$

这时由于泛函关系 $w(u, v) = 0$ 成立, 因此它就可看作这个欠定组的解.

【微分算子的一般理论】 在最近的偏微分方程论(特别是线性情形)的研究中,有不管经典类型(椭圆型,抛物型,双曲型)而建立微分算子的一般理论的动向(→微分算子). 例如,我们取出某些经典方程(例如,椭圆型方程)的解所具有的一个特征性质, 进而去研究能具有这种性质的所有微分算子的问题(例如,准椭圆性). 在这一般理论中基本的问题有:基本解的存在,局部解的存在,解的唯一开拓问题,解的可微性与解析性问题,光滑性传播问题等,在此处我们只叙述基本解与局部解.

【基本解】 当 L 是常系数线性微分算子时,满足

$$LE(x) = \delta(x),\ \delta(x) \text{ 是 Dirac } \delta \text{ 函数}^\dagger$$

的广义函数 $E(x)$ 称为 L 的一个**基本解**(elementary (fundamental) solution). 而且,当 L 是线性微分算子时,满足

$$L_x E(x, y) = \delta(x - y)$$

的 x, y 的广义函数 $E(x, y)$ 称为 L 的一个**基本核**(elementary (fundamental) kernel). 当 L 是常系数时设 $E(x)$ 为 L_x 的一个基本解,则 $E(x-y)$ 就是 L 的一个基本核. 也有把基本核本身称为基本解的. 任意常系数线性微分算子必具有基本解,这个事实是由 L. Ehrenpreis, B. Malgrange 证明了的([4]).

然而,我们将 L 的一个基本解(基本核)加上齐次方程 $Lu = 0$ 的任意的解 u,又得出 L 的另一个基本解(基本核). 基本解(基本核)的这种自由度,可以用来构造椭圆型方程的边值问题与抛物型方程的初-边值问题(=混合问题)的 Green 函数†,即满足边界条件的基本解(基本核)(→Green 函数, Green 算子). 另一方面,抛物型方程与双曲型方程的 Cauchy 问题(=初值问题)的基本解(基本核)也是在上述定义的意义下的基本解(基本核)之一. 实际上,例如,对于微分算子 $L = \partial/\partial t - P(\partial/\partial x)$ 的未来的 Cauchy 问题的基本解,也就是满足 $LE = 0(t > 0)$ 及 $E(t, x)|_{t=0} = \delta(x)$ 的广义函数 $E(t,x)$, 设 $\tilde{E}(t, x) = E(t, x)\ (t \geqslant 0)$; $\tilde{E}(t, x) = 0\ (t < 0)$, 则 $\tilde{E}$ 成为 L 的一个基本解(也就是满足 $L\tilde{E} = \delta(t, x)$). 再则,抛物型方程的 Cauchy 问题的基本解(基本核),也有称为 Green 函数†的. 与此对应,双曲型方程的 Cauchy 问题的基本解(基本核)常常称为 Riemann 函数†,严格地说是广义函数.而不是函数.

例: 1) 三维 Laplace 算子 $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ 的一个基本解是 $E(x) = -1/4\pi r\ (r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$. 2)三维波动算子 $L = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 对未来的 Cauchy 问题的基本解,也就是满足

$$LE = 0,\ t > 0;\ E(0, x) = 0,$$
$$\frac{\partial E}{\partial t}(0, x) = \delta(x)$$

的广义函数 $E(t, x)\ (t \geqslant 0)$ 是

$$E(t, x) = \left(\frac{1}{4\pi t}\right)\delta(r - t),\ t > 0,$$
$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

对于 L 的一个基本解由

$$\tilde{E}(t,x) = E(t,x)(t \geqslant 0); \tilde{E}(t,x) = 0(t < 0)$$

给出(→公式 15 V).

【局部解的存在】 考虑例如当 L 是一个线

性微分算子时，方程 $Lu=f$ 在某一点的附近是否总是有解的问题. 如果 L 的系数与 f 在这点附近是解析的，且 L 的最高阶的齐次部分在这点不为 0，那末解析解就在局部存在(A. L. Cauchy-C. B. Ковалевская). 此外，当 L 为常系数时，若设 L 的一个基本解为 E，则对于在有界闭集之外等于 0 的任意函数(或广义函数) f，E 与 f 的卷积 $E*f$ 就是 $Lu=f$ 的一个解. 可是，H. Lewy 在[3]中指出，如果方程

$$Lu=\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}+2i(x_1+ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f(x_3)$$

(f 只是 x_3 的实函数) 具有 C^1 类的解 u，那末 f 就必须是解析的. 这意味着，如果 f 是 C^∞ 类函数但不是解析的，那末上一方程也不具有 C^1 类的解 (实际上也不具有广义函数解) (注意这个事实，即使是一阶线性情形，若允许系数是复数值函数，它就不包含在本节开始叙述的一阶理论之中).

当 L 为线性微分算子时，对相当一般的任意的 f，关于方程 $Lu=f$ 具有局部解的必要条件与充分条件，有 L. Hörmander 的研究工作([4]).

【参】 [1] E. Goursat, Cours d'analyse II, III, Gauthier-Villars, 1927; [2] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II, Interscience, 1962 (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法 II，科学出版社，1977); [3] H. Lewy, An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. of Math, 66 (1957), 155—158; [4] L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, 1963 (中译本: L. 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1979); [5] 福原満洲雄，偏微分方程式論，岩波講座数学，1935; [6] 南雲道夫，偏微分方程式，岩波講座現代応用数学，1958 (中译本：南云道夫，偏微分方程，上海科学技术出版社，1961) [7] 吉田耕作，微分方程式の解法，岩波全書，1954; [8] 溝畑茂，偏微分方程式論，岩波，1965; [9] I. G. Petrovskiĭ (Петровский), Über das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen, Bull. de l'université d'état à Moscou, Ser. Internat, sec. A, vol. 1, fasc. 7 (1938), 1—74; [10] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, 1932; [11] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1953 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基，偏微分方程讲义，高等教育出版社，1956); [12] С. Л. Соболев, Уравнения Математической физики, Гостехиздат. 1954; (中译本 С. Л. 索波列夫，数学物理方程，高等教育出版社，1956); [13] J. L. Lions, Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites, Springer, 1961, [14] J. L. Lions - E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, I 1968, II 1968, III 1970; [15] A. Friedman, Partial differential equations, Holt, Rinehart and Winston, 1969, [16] F. Treves, Locally convex spaces and linear partial differential equations, Springer, 1967; [17] F. Treves, Linear partial differential equations with constant coefficients, Gordon and Breach, 1966; [18] F. Treves, Basic linear partial differential equations, Academic, 1975; [19] F. John, Partial differential equations, Springer, 1971; [20] L. Bers- F. John M. Schechter, Partial differential equations, Interscience. 1964.

偏微分方程的解法 [英 method of integration of partial differential equations 法 méthode d'intégration des équations aux dérivées partielles 德 Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 俄 метод интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными 日 偏微分方程式の解法] **偏微分方程的解法**一般要比常微分方程的解法复杂. 在常微分方程的情形，首先求出包含若干个任意常数的通解，然后通过满足给定的附加条件去确定这些任意常数的值，通常按照这个办法就能够得到所希望的特定的解. 可是对于偏微分方程，事情就复杂了. 在形式的一般解中，由于任意的因素不是任意常数，而是表现为任意函数，因此由满足特定的附加条件来确定它，有时是不可能的，有时是十分困难的. 因此，相应于附加条件的形式，想出了各式各样的方便的解法。这时，往往采取这样的办法：首先，假设问题的提法在数学上是适定的，然后，从各种方法中找出适用的方法进行求解，最后验证所得结果的正确性.

所谓问题在数学上是**"适定的"** (英 properly posed, well posed, correctly set 法 bien posé 德 sachgemäss) 是指：在给定的附加条件下解是 i) 存在的，ii) 唯一的，iii) 稳定的 (解连续地依赖于所给的条件). 通常从物理学与工程问题的仔细考察中提出了很多"适定的"重要问题. 例如，象对于 $u(x,y)$ 的 Laplace 方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 那样的椭圆型†方程，是描述万

有引力场、静电场、静磁场、不可压缩流体的定常的无旋流动、定常电流、定常热流等静止或定常现象的法则的方程，虽然其边值问题是"适定的"，但是其初值问题† 则是"不适定的". 与此相反，象对于 $u(x, t)$ 的 $u_{tt} - u_{xx} = 0$ 那样的双曲型† 方程与 $u_t - u_{xx} = 0$ 那样的抛物型† 方程是控制上面列举的各个现象关于时间的变化所遵循的方程，这些方程的初值问题以及再附加边界条件的混合问题都是"适定的".

下面叙述基本的典型的解法(→公式15).

【Lagrange-Charpit 解法】 对于一阶偏微分方程

$$(1)\qquad F(x, y, u, p, q) = 0,$$

$$p = \partial u/\partial x,\ q = \partial u/\partial y,$$

考虑被称为特征微分方程† 的常微分方程组

$$(2)\qquad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_u} = \frac{-dq}{F_y + qF_u},$$

如果我们至少得到了(2)的一个包含 p, q 与任意常数 a 的形如

$$(3)\qquad G(x, y, u, p, q) = a$$

的积分，那末从(1)与(3)求得 p, q，于是 $du = pdx + qdy$ 就成为**恰当微分形式** (exact differential form)，把它进行积分，便求出 (1) 的解 $\Phi(x, y, u, a, b) = 0$. 我们把(1)的含有两个任意常数 a, b 的解称为(1)的全解†. 此处，令 $b = g(a)$，从 $\Phi(x, y, u, a, g(a)) = 0$ 与 $\Phi_a + \Phi_b g'(a) = 0$ 消去 a，便得到(1)的含有任意函数 g 的解. 我们把它称为(1)的通解†. 例如，对于 $pq = 1$ 的特征微分方程是

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{du}{2pq} = \frac{-dp}{0} = \frac{-dq}{0},$$

所以 $p = a$ (常数)，因此由原方程得 $q = a^{-1}$，而 $du = adx + a^{-1}dy$ 当然就是恰当微分形式. 对此进行积分，便得全解 $u = ax + a^{-1}y + b$. 至于通解，从 $u = ax + a^{-1}y + g(a)$，$0 = x - a^{-2}y + g'(a)$ 消去 a 便可求得.

同样，在有 n 个自变量的情形，也就是当

$$(1')\qquad F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, p_1, p_2, \cdots, p_n) = 0,$$

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

的情形，利用特征微分方程

$$(2')\qquad \frac{dx_1}{F_{p_1}} = \frac{dx_2}{F_{p_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{du}{p_1F_{p_1} + p_2F_{p_2} + \cdots + p_nF_{p_n}} = \frac{-dp_1}{F_{x_1} + p_1F_u} = \frac{-dp_2}{F_{x_2} + p_2F_u} = \cdots = \frac{-dp_n}{F_{x_n} + p_nF_u},$$

同上面一样，可以求出全解和通解. 这种解法称为 **Lagrange-Charpit 解法**(→接触变换).

【分离变量法与叠加原理】 最简单而有效的解法是**分离变量法** (separation of variables) 适用的情形. 例如，对于 $u(x, y)$ 的方程 $u_x^2 + u_y^2 = 1$，令 $u = \varphi(x) + \psi(y)$，则得 $\varphi'(x)^2 + \psi'(y)^2 = 1$ 或者 $\varphi'(x)^2 = 1 - \psi'(y)^2$，因为等式右端不依赖 x，左端不依赖 y，所以两端必须等于同一常数 α^2. 由此便得包含两个任意常数 α, β 的解 (全解) $u = \alpha x + \sqrt{1 - \alpha^2}y + \beta$.

对于线性方程，设解为积的形式 $u = \varphi(x)\psi(y)$ 多半是成功的. 例如，热传导方程† $u_y = u_{xx}$，由上述假设可得 $\psi'(y)/\psi(y) = \varphi''(x)/\varphi(x)$，由此得到包含参数 ν 的特解 $u = ae^{-\nu^2 y}\sin\nu(x-\alpha)$.

其次，在方程是线性齐次的情况，可作对参数 ν 的各种值的特解的线性组合，便得新的解. 这称为**叠加原理** (principle of superposition). 例如 (由线性组合与极限过程并用的叠加)，把上面所得的解 $e^{-\nu^2 y}\cos\nu x$ 关于 ν 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，则得一个新的解

$$(4)\qquad u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2 y}\cos\nu x d\nu = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\exp\left(-\frac{x^2}{4y}\right),\ y > 0.$$

这是方程 $u_y - u_{xx} = 0$ 的基本解. 这是由于热传导方程的初值问题的解可由这个解来得到. 初值问题：求对于 $-\infty < x < \infty$，在 $y > 0$ 处属于 C^2 类满足 $u_y - u_{xx} = 0$，在 $y \geqslant 0$ 处连

续而当 $y=0$ 时等于给定的有界连续函数 $\varphi(x)$ 的解；这个解可由解(4)，根据叠加原理求得：

$$u(x, y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right)d\xi.$$

分离变量法常常是预先施行适当的变量变换，然后应用起来才是成功的．特别是对应于边界的形状分别用各种正交坐标如极坐标、圆柱坐标或者其他坐标系，常常能得到满意的结果． 例如，为了求 Laplace 方程 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=0$ 的边值问题的解 u，使得它在圆 $r^2=x^2+y^2<1$ 内全纯，在 $r=1$ 上取连续的值 $g(\theta)$，我们作极坐标变换，则方程变为

$$\Delta u=u_{rr}+\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0,$$

应用分离变量法得到特解 $r^n\cos n\theta$, $r^n\sin n\theta$. 由此再用叠加原理，便可得到所要求的解

$$u(x, y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)r^n.$$

事实上，如果系数 a_n, b_n 是这样确定的，即使得这个级数对 $0\leqslant r\leqslant 1$ 一致收敛，对 $0\leqslant r<1$ 可以逐项进行二次微分，而且

$$g(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

那末这个级数就是所求的解．根据椭圆型偏微分方程的解的唯一性，可知所求的解除此之外再无其他，因此，在这种情形没有必要再用叠加原理以外的方法去求解了．在前述意义下，上面的边值问题是"适定的"．

【混合问题】 在双曲型及抛物型的线性齐次方程的情形，**混合问题** (mixed problem)，也就是给定了初始条件与边界条件两者的问题，是经常出现的．对此还可分成两种类型．

第一种类型的混合问题是，给定齐次边界条件．例如，对 $0\leqslant x\leqslant l$ 的非均质的弦的振动问题，就是要求对于 $u(x, t)$ 的方程

$$(T(x)u_x)_x=\rho u_{tt}$$

的解，使之分别满足下列齐次边界条件： i) 两端固定的情况： 在 $x=0$ 及 $x=l$ 处 $u=0$; ii) 两端自由的情况：在 $x=0$ 及 $x=l$ 处 $u_x=0$; iii) 两端弹性地连结在固定点上：在 $x=0$ 处 $-u_x+\sigma_0 u=0$，在 $x=l$ 处 $u_x+\sigma_1 u=0$ $(\sigma_0>0,\ \sigma_1>0)$; iv) 周期性条件： $T(0)u(0)=T(l)u(l)$, $T(0)u'(0)=T(l)u'(l)$; v) 正则性条件： 在 $x=0$ 及 $x=l$ 处，u, u' 有限；还要满足初始条件：当 $t=0$ 时 $u=f(x)$, $u_t=g(x)$.

这种类型的振动问题也可用分离变量法来处理．对此可就两端固定的情形予以说明．暂时先不考虑初始条件，通过变量分离 $u(x, t)=y(x)\exp i\nu t$ 来求只满足边界条件的特解．为此，$y(x)$ 必须满足

$$(5)\qquad (T(x)y')'+\nu^2\rho(x)y=0,\ y(0)=y(l)=0.$$

如果除去平凡解 $u(x, t)\equiv 0$，那末就必须 $y(x)\not\equiv 0$. 但是，在 $T(x)\equiv 1$, $\rho(x)\equiv 1$, $l=\pi$ 的特殊情况，使得这样的 $y(x)$ 存在的 ν 仅限于1, 2, 3, ··· (对应的 $y(x)$ 是 $\sin\nu\pi x$). 在更一般的(5)的情况，仅对离散的 ν 值才有非平凡解 $y_\nu(x)$ 存在．这样的 ν 称为(5)的特征值ᵀ，对应的 $y_\nu(x)$ 称为属于这个特征值的特征函数ᵀ．也就是说，所求的特解可以通过求解特征值问题ᵀ而得到．上面叙述的 $T(x)\equiv\rho(x)\equiv 1$, $l=\pi$ 的特殊情况，对应的特解是 $\sin n\pi x\exp int$, $\sin n\pi x\exp(-int)$ $(n=1, 2, \cdots)$. 把它们叠加起来，我们考虑

$$(6)\qquad u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\times\sin n\pi x.$$

若此式一致收敛并逐项二次可微，而且由

$$u(x, 0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\pi x,$$

$$u_t(x, 0)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\sin n\pi x$$

来确定系数 a_n, b_n，则(6)就是混合问题的解．如果能用什么方法证明混合问题解的唯一性，那末除了用分离变量法与叠加原理所构成的解以外，就没有必要再去求其他的解了．

还有，当弦有外力 $f(x, t)$ 作用时的非齐次

方程

(7)　　$u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)$,

具有如上的边界条件及初始条件：当 $t=0$ 时 $u=u_t=0$ 的问题，也可利用上面的方法来求解．也就是把所求的 u 以及 $f(x,t)$ 按特征函数系 $\{\sin nx\}$ 展开，把

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\sin nx,\ f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(t)\sin nx,$$

代入(7)，化为确定 $a_n(t)\ (n=1,2,\cdots)$ 的问题．在 $f(x,t)=-\varphi(x)\exp(-i\omega t)$ 那样的外力随时间作调和振动的情况，令 $u=v(x)\cdot\exp(-i\omega t)$，可用同样的方法求解．

第二种类型的混合问题是，给定齐次初始条件：当 $t=0$ 时 $u=0$, $u_t=0$，而替代的边界条件是非齐次的．例如，直到 $t=0$ 还是静止的弦，对于 $t>0$，当右端固定，左端服从一定的运动时，求这样的弦的振动规律的问题，就是在边界条件：$u(0,t)=f(t)$, $u(l,t)=0$ $(t>0)$ 下求 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 的解的问题．这个问题称为**瞬态问题**（英 transient problem 德 Ausgleichungsproblem）．现在选取一个对边界条件及初始条件都满足的任意函数 $B(x,t)$，若设 $u-B(x,t)=v(x,t)$，则对于 $B_{xx}-B_{tt}=f(x,t)$，v 就满足

$$v_{tt}-v_{xx}=f(x,t),\quad t>0;$$
$$\text{当 } t=0 \text{ 时 } v=v_t=0;$$
$$\text{在 } x=0 \text{ 及 } x=l \text{ 处 } v=0.$$

这个问题也可看作：直到 $t=0$ 是静止的、两端固定的弦，其后加上外力 $f(x,t)$，求此情形的振动规律的问题。这样的问题特别在电气工程中经常出现。

至于这个问题的解法，虽然可以化为前述的第一型问题，利用特征函数的方法来求解，但是有更加适合定解问题的方法。第一是 **Duhamel 法** (Duhamel's method)，首先考虑 $f(x,t)$ 是单位冲量函数

$$f(t)=1,\ t>0;\ f(t)=0,\ t<0$$

的特殊情况，如果令 $U(x,t)$ 是对于这个情形且当 $t\leqslant 0$, $x>0$ 时为 0 的解，那末一般情形的解便由

$$u=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}U(x,t-\tau)f(\tau)d\tau$$

给出．第二是应用 Laplace 变换† 的方法．设解 $u(x,t)$ 的 Laplace 变换为

$$\int_0^{\infty}ue^{-pt}dt=\frac{v(x,p)}{p},$$

把 $u_{tt}-u_{xx}=0$ 的两端乘以 $\exp(-pt)$，对 t 从 0 到∞积分，考虑到初始条件，得到

$$v_{xx}-p^2v=0,$$

而边界条件成为

$$v(0,p)=p\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt,\ v(l,p)=0.$$

如果对 $p=\alpha+i\beta(\alpha>\alpha_0)$，我们求得这个常微分方程的边值问题的一个解 $v(x,p)$，那末所求的解便由

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{v(x,p)}{p}e^{pt}dp,$$

给出．此处 L 是在 $\alpha>\alpha_0$ 半平面内平行于虚轴的路线．我们把它称为 **Bromwich 积分** (Bromwich's integral)．

【Green 公式与基本解的应用】　就两个自变量的情形予以说明．在线性偏微分算子

$$L(u)=A(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u$$

与它的伴随偏微分† 算子

$$M(v)=\frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2(Bv)}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2}-\frac{\partial(Dv)}{\partial x}-\frac{\partial(Ev)}{\partial y}+Fv$$

之间存在 Green 公式†

(8)
$$\iint_D(vL(u)-uM(v))dxdy=-\int_{\partial D}\left(P\frac{\partial x}{\partial n}+Q\frac{\partial y}{\partial n}\right)ds.$$

这里

(9)
$$P=v\{Au_x+Bu_y\}-u\{(Av)_x+(Bv)_y\}+Duv,$$

$$Q = v\{Bu_x + Cu_y\} - u\{(Bv)_x + (Cv)_y\} + Euv,$$

∂D 表示区域D的边界曲线，n 表示在 ∂D 的点上的 ∂D 的内法线，s 表示 ∂D 上的弧长.

这个公式可以像下面那样用来求解非齐次方程 $L(u)=f$. 假定 $L(u)=f$ 的满足给定的附加条件的解 u 存在，选择 $M(v)=0$ 的一个基本解† v，它在D的点 (x_0, y_0) 上具有适当的奇异性并且满足适当的边界条件，如果我们把这样的 u 和 v 代入(8)，则得到 $u(x_0, y_0)$ 的一个具体表达式. 如果能够验证象这样得到的 $u(x,y)$ 实际上是 $L(u)=f$ 的满足给定的附加条件的解，那末在"解的唯一性假定"下，便知这个 $u(x, y)$ 就是唯一所求的解. 例如，在

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

因此，

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

的情形，试考虑如下的边值问题. 也就是求这样的 $u(x, y)$：使它在以原点为心、r 为半径的圆的内部及圆周上连续，在圆的内部满足 $L(u)=f$（f 在圆的内部连续有界），而在圆周上等于给定的连续函数 g. 这时，我们考虑区域 D_ε，它是以圆内一点 (x_0, y_0) 为心、充分小的 ε 为半径的圆周 K_ε（包含在原来的圆内）与原来圆周 C_r 所围成的区域，设

$$(10)\quad v(x, y) = \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{\rho} + h(x, y),$$

$$\rho = ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2},$$

我们对 D_ε 应用(8). 如果 (10) 中的 h 在以 C_r 围成的圆的内部满足 $M(v)=0$，并且在圆周 C_r 上使得 $v=0$，则得

$$\iint_{D_\varepsilon} vf\,dxdy = -\int_{K_\varepsilon}(vu_n - uv_n)\,ds + \int_{C_r} gv_n\,ds,$$

令 $\varepsilon \to 0$，由于 v 在 (x_0, y_0) 的"对数奇性"，因而右端的第一项成为

$$-u(x_0,y_0)\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \log\rho}{\partial\rho}\rho\,d\theta = -u(x_0, y_0),$$

所以我们得到 u 的具体表达式

$$(11)\quad u(x_0,y_0) = \int_{C_r} gv_n\,ds - \iint_{x^2+y^2\leq r^2} vf\,dxdy,$$

容易验证这就是所求的唯一的解.

这样一来，为了应用 Green 公式，必须去求 $M(v)=0$ 的具有对数奇性那样的基本奇性的一个解 v，也就是求所谓基本解. 作为对抛物型、双曲型方程

$$M(v) = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

的基本奇性，我们必须取分别由

$$v(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-y_0)}} \times \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4(y-y_0)}\right) + \cdots,\quad y > y_0,$$
$$= 0 + \cdots,\quad y \leq y_0;$$

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(y-y_0)^2 - (x-x_0)^2}} + \cdots,\quad (y-y_0)^2 > (x-x_0)^2,$$
$$= 0 + \cdots,\quad (y-y_0)^2 \leq (x-x_0)^2$$

所给出的奇异性(→椭圆型偏微分方程，双曲型偏微分方程，抛物型偏微分方程).

【参】 [1] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Interscience, I 1953, II 1962 (中译本：R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法，科学出版社，I 1958, II 1977)； [2] 福原满洲雄，偏微分方程式論，岩波講座数学，1935； [3] 犬井鉄郎，応用偏微分方程式論，岩波，1951；[4] A. G. Webster-G. Szegö, Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Teubner, 1930； [5] L. Schwartz, Mathematics for the physical sciences, Hermann, 修订版 1966；[6] J. L. Lions, Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites, Springer, 1961；[7] A. Friedman, Partial differential equations, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

偏微分方程的初值问题 [英 initial value problem of partial differential equations 法 problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles 德 Anfangswertaufgabe der partiellen Differentialgleichungen 俄 начальная задача дифференци-

альных уравнений с частными производными 日 偏微分方程式の初期値問題】 偏微分方程的初值问题举例如下:

1) 对于自变量 x, y 的偏微分方程 $u_x - u_y = 0$,给定 C^1 类函数 $\varphi(y)$, 当 $x = 0$ 时使得 $u(0, y) = \varphi(y)$ 的解是 $u = \varphi(x + y)$.

2) 关于 $k + 1$ 个自变量 $x, y_1, \cdots, y_k$ 与 m 个应变量 $u_1, \cdots, u_m$ 的偏微分方程

$$(1) \quad \frac{\partial^r u_\mu}{\partial x^r} = F_\mu\Big(x, y_1, \cdots, y_k, u_1, \cdots u_m, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^{r-1} u_1}{\partial x^{r-1}}, \cdots, \frac{\partial^{r-1} u_m}{\partial y_k^{r-1}}, \frac{\partial^r u_1}{\partial y_1^r}, \cdots, \frac{\partial^r u_m}{\partial y_k^r}\Big)$$

$$\mu = 1, \cdots, m$$

称为偏微分方程的**正规型** (normal form). 首先,设 F_μ 是关于 $x_1, y_1, \cdots, \partial^r u/\partial y_k^r$ 的在原点 $(0, \cdots, 0)$ 的邻域中的 C^ω 类†函数 (实解析函数或全纯函数). 其次,当给定关于 $y_1, \cdots, y_k$ 的在 $(0, \cdots, 0)$ 的邻域中的 C^ω 类函数 $\varphi_{\mu\nu}(y_1, \cdots, y_k)$ $(\mu = 1, \cdots, m; \nu = 0, \cdots, r - 1)$ 时,对于 $x = 0$, 在原点 $(0, \cdots, 0)$ 的邻域中存在 (1) 的唯一的 C^ω 类的解 (正则解) $u_1(x, y_1, \cdots, y_k), \cdots, u_m(x, y_1, \cdots, y_k)$,使得

$$u_\mu(0, y_1, \cdots, y_k) = \varphi_{\mu 0}(y_1, \cdots, y_k), \cdots,$$
$$\partial^{r-1} u_\mu/\partial x^{r-1}(0, y_1, \cdots, y_k) = \varphi_{\mu r-1}(y_1, \cdots, y_k)$$

成立,这就称为 **Cauchy-Ковалевская 存在定理** (Cauchy-Kovalevskaja existence theorem).

如上所述,设自变量之一为主变量,其余为参变量,当对主变量 x 给以特定的值 a 时,应变量 (未知函数) 及其导数应取的值称为**初值** (initial value). 确定初值的条件称为**初始条件** (initial condition), 求满足给定初始条件的解的问题称为**初值问题**或 **Cauchy 问题** (Cauchy's problem). 我们不仅可以对在超平面 $x = a$ 上给定的初始条件, 而且可以对在某个超曲面上给定的初始条件来考虑初值问题(后述).

【正规型偏微分方程组】 在 (1) 的右端的函数 F_μ 不是 C^ω 类的情形, 尽管初值是 C^ω 类, 解可以不存在, 这种情形已由 O. Perron 指出. 例如方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + f(y), \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

为了要有 $x = 0$ 时 $u = 0$, $v = 0$ 的解, $f(y)$ 必须是 C^ω 类的. 但是,如果 $F_\mu(x, y, u, p)$ 作为参变量 y, 未知变量 u 以及导数 p 的函数属于 C^ω 类,并且对所有变量 x, y, u, p 是连续的,那末,可以证明 (1) 的具有 C^ω 类初值的初值问题的 C^ω 类的解存在(南雲道夫, Jap. J. Math, **18** (1942)). 这种情形, 关于参变量的 C^ω 类的解的唯一性成立. 但是,一般说来,即使 $F_\mu(x, y, u, p)$ 及初值是 C^ω 类的, 也许存在非 C^ω 类的解. 这是目前尚未解决的问题.

【单个一阶偏微分方程】 考虑正规型偏微分方程

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = F\left(x, y_1, \cdots, y_k, u, \frac{\partial u}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial y_k}\right),$$

设 $F(x, y_1, \cdots, y_k, u, q_1, \cdots, q_k)$ 在 $x = a$, $y_i = b_i$, $u = c$, $q_i = d_i$ 的邻域中都是 C^2 类的, $\varphi(y_1, \cdots, y_k)$ 也是 C^2 类的, 在 $y_i = b_i$ 处 $\varphi = c$, $\partial\varphi/\partial y_i = d_i$. 于是(2)的在 $x = a$, $y_i = b_i$ 的邻域中满足 $u(a, y_1, \cdots, y_k) = \varphi(y_1, \cdots, y_k)$ 的解存在,这个解是 C^2 类的. 关于初值问题的解的唯一性, A. Haar 在考虑偏微分不等式

$$(3) \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant A \sum_{i=1}^{k} \left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right| + B|u| + C$$

的基础上指出,当 F 满足 Lipschitz 条件† $|F(x, y, u', q') - F(x, y, u, q)| \leqslant A \sum_{i=1}^{k} |q'_i - q_i| + B|u' - u|$ 时,(2) 的初值问题的解是唯一的 (Atti del congresso internazionale dei matematici, Bologna, **3** (1928)).

其次, 考虑更一般的单个一阶偏微分方程

$$(4) \quad F\left(x_1, \cdots, x_k, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0,$$

如果 $F(x_1, \cdots, x_k, u, p_1, \cdots, p_k)$ 在 $x_i = a_i$,

$u=b$, $p_i=c_i$ 的邻域中是 C^2 类的，函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_k)$, $S(x_1, \cdots, x_k)$ 在 $x_i=a_i$ 的邻域中是 C^2 类的，满足：$b=\varphi(a_1,\cdots,a_k)$, $c_i=(\partial\varphi/\partial x_i)_{x=a}$, $S(a_1,\cdots,a_k)=0$，并且

$$(5)\qquad \left(\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial F}{\partial p_\nu}\frac{\partial S}{\partial x_\nu}\right)_{x=a,u=b,p=c}\neq 0,$$

那末在 $x=a$ 的邻域中存在(4)的属于 C^2 类的解 u，使得当 $S(x)=0$ 时 $u=\varphi(x)$. 而且，如果 F, φ, S 都是 C^1 类的，且满足(5)，则在 $x=a$ 的邻域中最多存在一个(4)的属于 C^1 类的解 u，使得当 $S(x)=0$ 时 $u=\varphi(x)$, $(\partial u/\partial x_i)_{x=a}=c_i$. 可以证明如下：在 $S(x)$ 外选取 $S_1(x)$, $S_2(x)$, $\cdots$, $S_{k-1}(x)$，使得函数行列式不等于0，将(4)的自变量从 x 变换到 $S, S_1, \cdots, S_{k-1}$，把变换后的方程根据(5)关于 $\partial u/\partial S$ 解出，我们就得到正规型偏微分方程. (5)是超曲面 $S(x)=0$ 不与特征曲线† 相切的条件.

【二阶拟线性偏微分方程】 考虑方程

$$\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}(x,u,p)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+b(x,u,p)=0,$$

这里 $x=(x_1,\cdots,x_k)$, $p=(p_1,\cdots,p_k)$,

$$p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

假设在 $S(x)=0$ 上 $u=\varphi(x)$ 及

$$\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}=\psi(x).$$

如果在 S 外选取 $S_1(x)$, $\cdots$, $S_{k-1}(x)$ 使得由它们构成的函数行列式不等于0，且将自变量从 x 变换到 $s_0, s_1, \cdots, s_{k-1}$ ($s_0=S$, $s_i=S_i$)，那末就得到

$$(6)\qquad \sum_{\mu,\nu=0}^{k-1}Q(S_\mu,S_\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial s_\mu\partial s_\nu}+b^*=0,$$

这里

$$Q(S_\mu,S_\nu)=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}\frac{\partial S_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial S_\nu}{\partial x_j},$$

$$p_i=\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{\partial S_\mu}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial s_\mu},$$

$$b^*=b+\sum_{\lambda=0}^{k-1}\sum_{i,j=0}^{k}a_{ij}\frac{\partial^2 S_\lambda}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial s_\lambda}.$$

初始条件：当 $s_0=0$ 时

$$u=\varphi^*(s_1,\cdots,s_{k-1})=\varphi(x(0,s_1,\cdots,s_{k-1})),$$

$$\frac{\partial u}{\partial s_0}=\psi^*(s_1,\cdots,s_{k-1})$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)^2\right)^{-1}\left(\psi(x(0,s_1,\cdots,s_{k-1}))-\sum_{\lambda=1}^{k-1}\frac{\partial\psi^*}{\partial s_\lambda}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial S_\lambda}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_i}\right).$$

现在如果 $Q(S,S)\neq 0$，且设 $\partial u/\partial s_i=q_i$，那末在(6)上附加初始条件"当 $s_0=0$ 时 $u=\varphi^*(s_1,\cdots,s_{k-1})$, $\partial u/\partial s_0=\psi^*(s_1,\cdots,s_{k-1})$"的问题与在正规型一阶偏微分方程组

$$\frac{\partial u}{\partial s_0}=q_0,\ \frac{\partial q_\mu}{\partial s_0}=\frac{\partial q_0}{\partial s_\mu},\ \mu=1,\cdots,k-1,$$

$$\frac{\partial q_0}{\partial s_0}=-(Q(S,S))^{-1}\left(\sum_{\mu=1}^{k-1}\left(\sum_{\nu=1}^{k-1}Q(S_\mu,S_\nu)\frac{\partial q_\mu}{\partial s_\nu}-2Q(S_\mu,S)\frac{\partial q_0}{\partial s_\mu}\right)-b^*\right)$$

上附加初始条件"当 $s_0=0$ 时 $u=\varphi^*(s_1,\cdots,s_{k-1})$, $q_0=\psi^*(s_1,\cdots,s_{k-1})$, $q_\mu=\partial\varphi^*/\partial s_\mu$"的问题等价. 由此可见，当系数属于 C^ω 类时，对于这个方程，前面的理论也成立.

【解对于初值的连续依赖性】 首先，就最简单的正规型方程进行论述. 关于 $v(x,t)$ 的波动方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

是最简单的双曲型† 方程，对于这个方程，满足初始条件"$v(x,0)=f(x)$, $\partial v/\partial t(x,0)=g(x)$"的解可以写成

$$v(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(\lambda)d\lambda.$$

由此式显而易见，若设初值 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $x\in\boldsymbol{R}$ 的连续函数构成的函数空间 $C(\boldsymbol{R})$ 中的元素，$C(\boldsymbol{R})$ 的拓扑是在紧子集上一致收敛的拓扑，则 $v(x,t)$ 是作为 (x,t) 平面上的由 $C(\boldsymbol{R}^2)$ 到 $C(\boldsymbol{R}^2)$ 的线性算子的值所确定的. 这时，如果在上述拓扑意义下这个线性算子是连续的，那末就说上面的初值问题是**适定的**

(well posed). 我们用所谓"适定"的说法,也就是指: 对充分光滑的初值恰好有唯一的解存在, 它在适当的意义下连续地依赖于初值.

对于适定的初值问题的系统性的研究, 是由 И. Г. Петровский 开始的. 所考虑的情形是高阶的线性方程组,不限于正规型,是系数只依赖于主变量 t 的下列形式的方程组:

$$(7)\qquad \frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^{n_j}} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{(\nu)\leqslant m} a_{jk\nu_0\nu_1\cdots\nu_n}(t) \times \frac{\partial^{\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_n} u_k(x,t)}{\partial t^{\nu_0}\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_n^{\nu_n}} + B_j(x_1,\cdots,x_n,t);$$

$$j=1,\cdots,N,\ (\nu)=\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_n,\quad \nu_0<n_k.$$

当 $m = n_k$ 时就成为正规型. 这是由于取下列关于各个 j 的所有导数

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_j-1} u_j(x,t), \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_j-2} u_j(x,t), \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u_j(x,t)$$

成为新的未知函数,将(7)变成正规型

$$(8)\qquad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{(\nu)\leqslant m} a_{jk\nu_1\cdots\nu_n}(t) \times \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial x_1^{\nu_1}\partial x_2^{\nu_2}\cdots\partial x_n^{\nu_n}} u_k(x,t) + B_j(x,t),\ j=1,\cdots,N'.$$

我们取作初值空间的是由所有这样的函数所组成的线性拓扑空间†: 它们直到充分高阶的各偏导数在全空间上都是有界的, 且定义了由各偏导数在全空间的最大值为其半范数†. 我们在 (x, t) 空间上取类似的空间作为值的空间. 于是在上述意义下, 为使这个初值问题对未来 (当在 $t=0$ 给定初值时考虑 $u(x,t)$ 在 $t>0$ 的值) 是"适定的"充分必要条件如下所述. 对(8)在 x 空间施行 Fourier 变换,得到下列常微分方程组:

$$(9)\qquad \frac{d\hat{u}_j}{dt} = \sum_{k=1}^{N'} \sum_{(\nu)\leqslant m} a_{jk\nu_1\cdots\nu_n}(t)(2\pi i\xi_1)^{\nu_1} \cdots (2\pi i\xi_n)^{\nu_k}\hat{u}_k(\xi,t) + \hat{B}_j(\xi,t).$$

它们的基本解组† $v_i^{(j)}(\xi,t)$ $(i=1,\cdots,N',$ $j=1,\cdots,N')$ 满足下列不等式:

$$(10)\qquad |v_i^{(j)}(\xi,t)| \leqslant C(1+|\xi|)^L,\quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

这里 C, L 是只依赖于 T 与 M 的常数. 这就是 Петровский 所求得的条件.

若方程组(7)是正规型的,且在上述意义下的初值问题对于未来是适定的, 则对于过去也是适定的. 在这种情形,就称方程组(7)为双曲型的(→双曲型偏微分方程). 非正规型情形的适定的例子是抛物型方程 (→抛物型偏微分方程). 在 Петровский 理论中只要假定(7)的系数关于 t 是连续有界的就行了, 由于 T 可以取得任意大, 只要满足(10), 所以这也意味着存在一种大范围的解.

【解的唯一性】 在正规型一阶线性偏微分方程的情形,如果它的系数是 C^ω 类的,那末(1)的关于已给初始条件的 C^1 类的解只有一个. 这个定理称为 **E. Holmgren 唯一性定理**(Holmgren's uniqueness theorem) (1901). 因为正规型高阶方程组可以化为正规型一阶方程组, 所以,当系数是 C^ω 类时, 具有直到方程阶数的连续偏导数的、满足已给初始条件的解只有一个. 而且, 当比自变量的个数只低一维的解析流形不是特征时, 在这个流形上给定了未知函数和比方程的阶数低的各阶导数的初值, 这样问题的解只有一个(根据变量变换).

即使是线性方程,如果系数不是 C^ω 类的, 那末关于初始条件的解的唯一性问题, 一般也是极端困难的问题. 特别是, 在两个自变量的实系数方程

$$(11)\qquad \frac{\partial u_\mu}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{m} a_{\mu\nu}(x,y)\frac{\partial u_\nu}{\partial y} + \sum_{\nu=1}^{m} b_{\mu\nu}(x,y)u_\nu,$$

$a_{\mu\nu}$ 为 C^2 类, $b_{\mu\nu}$ 为连续的情形,只要矩阵 $(a_{\mu\nu})$ 的特征值全是相异的,其中尽管有复数,关于初始条件的 C^1 类的解就只有一个,这个事实已由 T. Carleman 所证明(1939). 可是,若把关于特征值的条件取消, 则尽管系数与解全是 C^∞ 类的,解的唯一性也不成立, 具体例子 $(m=2,$ $b_{\mu\nu}=0)$ 已由 A. Pliś 给出(1954).

A. P. Calderón 证明了：Carleman 的唯一性定理可以推广到自变量的个数多于两个的情形（Amer. J. Math., **80** (1958)）. 也就是说，考虑 k 阶线性方程

$$(12)\qquad \frac{\partial^k u}{\partial x^k}+\sum_{i=1}^{k}P_i\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^{k-i}u}{\partial x^{k-i}}\right)+B[u]=0,$$

设 $P_i(\xi)$ 为 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 的 i 次齐次多项式，B 为关于 x, y 的不超过 $k-1$ 阶的微分算子，它的系数是有界函数，还假定 $P_i(\xi)$ 的系数是 x, y 的 C^1 类函数，其导数具有 Hölder 连续性，若(12)的特征方程 $\lambda^k+\Sigma P_i(\xi)\lambda^{k-i}=0$ 对任意的 $\xi\neq 0$ 具有 k 个相异的根，则(12)的满足初始条件的 C^k 类解在 $x=a$ 附近局部地只有一个. 但是，在阶数 $k\geqslant 4$ 的情形，当自变量只有三个 ($n=2$) 时，由于拓扑学上的困难，Calderón 的证明没有成功. 这个困难最近由溝畑茂完全解除了(J. Math. Soc. Japan, **11**(1959)).

这个结果可以在类似的假设下推广到方程组. 对于复系数的情况，可见 L. Hörmander [4]. 溝畑茂、白田平和熊ノ郷準讨论了抛物型双特征方程的唯一性定理.

关于非线性方程的解的大范围的存在定理结果很少. 例如，就正规型的方程(2)而言，设 F 满足 Lipschitz 条件，当其常数 A 及 B 不依赖于 x 的大小时，可以证明大范围的初值问题的解存在. 这个定理的证明方法如下：首先，x 的绝对值要取得足够小，在 $|x|\leqslant\varepsilon_1$ 部分引用 Picard 逐次逼近法证明解的存在，进而把 $x=\varepsilon_1$ 考虑为确定初值的超平面，同样地在 $\varepsilon_1\leqslant|x|\leqslant\varepsilon_2$ 证明解的存在. 如此地逐次地进行证明. 这个方法，对一阶非线性方程组，如果它们是拟线性的特殊情形，那末也同样是可行的.

【参】［1］吉江琢児，初等1階偏微分方程式，裳華房，1947；［2］R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II, Interscience, 1962（中译本：R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法 II，科学出版社，1977）；［3］И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1953（中译本：И. Г. 彼得罗夫斯基，偏微分方程讲义，高等教育出版社，1956）；［4］L. Hörmander, Linear partial differential operators, Springer, 1963（中译本：L. 霍曼德尔，线性偏微分算子，科学出版社，1979）

一阶偏微分方程 ［英 partial differential equation of first order 法 équation aux dérivées partielles du premier ordre 德 partielle Differentialgleichung erster Ordnung 俄 дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка 日 1階偏微分方程式］ （→偏微分方程，偏微分方程的解法）【拟线性偏微分方程及其特征曲线】 对于拟线性偏微分方程

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n}P_i(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=Q(x,u),\quad x=(x_1,\cdots,x_n),$$

我们把常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=P_i(x,u),\ i=1,\cdots,n;$$

$$\frac{du}{dt}=Q(x,u)$$

的解 $x_i=x_i(t)$, $u=u(t)$ 所描绘的曲线称为(1)的**特征曲线**(characteristic curve). $u=u(x)$ 成为(1)的解的充分必要条件是，通过这个超曲面（在 $n+1$ 维 xu 空间）上任意一点的特征曲线全部包含在这个超曲面内. 例如，$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial u}{\partial x_i}=ku$ 的特征曲线是 $x_i=x_i^0e^t, u=u^0e^{kt}$ ($x_i'=x_i$, $u'=ku$ 的解)，因此解 $u=u(x)$ 就成为使得 $u(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)=\lambda^k u(x_1,\cdots,x_n)$ ($\lambda=e^t>0$) 的函数（k 次齐次函数）.

【非线性偏微分方程及其特征带】 $\partial u/\partial x_i$ 的值用 p_i 来表示. 我们把 $2n+1$ 个数值的组 $(x,u,p)=(x_1,\cdots,x_n,u,p_1,\cdots,p_n)$ 称为**面元**(surface element). 对于偏微分方程

$$(2)\quad F(x_1,\cdots,x_n,u,p_1,\cdots,p_n)=0,\quad p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

我们把依赖一个参数 t 的且满足常微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=F_{p_i},\ \frac{du}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_iF_{p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-(F_{x_i}+p_iF_u)$$

的面元 $(x(t),u(t),p(t))$ 的集合称为方程(2)的**特征带**(characteristic strip)，曲线 $x=x(t)$, $u=u(t)$，称为(2)的**特征曲线**. 在拟线性情

形，这个特征曲线的定义同前述一致．而且，把满足关系式

$$du-\sum_{i=1}^{n}p_i dx_i=0$$

的面元组成的 r 维微分流形† 称为 r 维**面元并集**（英 union of surface elements 德 Flächen-elementverein）．一般说来，偏微分方程(2)的解，是由特征带的全体形成的，而特征带是把满足 $F(x,u,p)=0$ 的任意 $n-1$ 维面元并集的面元作为初值的．

例：$pq-z=0$（记作 $x_1=x$, $x_2=y$, $u=z$, $p_1=p$, $p_2=q$）．特征带方程是 $x'=q$, $y'=p$, $z'=2pq$, $p'=p$, $q'=q$．因此，（取 x 为自变量，当 $x=0$ 时设 $y=y_0$, $z=z_0$, $p=p_0$, $q=q_0$）特征带是 $y=y_0+(p_0/q_0)x$, $z=z_0+2p_0x+(p_0/q_0)x^2$, $p=p_0+(p_0/q_0)x$, $q=q_0+x$．当 $x=0$ 时更设 $z_0=W(y_0)$（任意函数），则 $y=y_0+W(y_0)x/(W'(y_0))^2$, $z=W(y_0)+2W(y_0)/W'(y_0)+W(y_0)x^2/(W'(y_0))^2$．由此消去 y_0 便得通解 $z(x,y)$．在此情形，全解†是 $4az=(x+ay+b)^2$ (a, b 为常数)，奇解†是 $z=0$．

【线性偏微分方程的完备系】 对于 C^∞ 类函数 $P_i(x)$ $(i=1,\cdots,n,\ x=(x_1,\cdots,x_n))$，定义微分算子 X：

$$X=\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

对于 k 个微分算子 $X_i=\sum_{\nu=1}^{n}P_\nu^i(x)\frac{\partial}{\partial x_\nu}$ $(i=1,\cdots,k)$，当矩阵 (P_ν^i) 的阶为 k 时，就称这些微分算子是相互**独立的** (independent)．关于同一未知函数 $f(x)$ 的 k 个独立的线性偏微分方程组

$$(3)\qquad X_1f=0,\cdots,X_kf=0,$$

当具有最大个数，也就是 $n-k$ 个的独立积分† $f_1,\cdots,f_{n-k}$（矩阵 $(\partial f_\mu/\partial x_\nu)$ 的阶为 $n-k$）时，就把(3)称为**完备系** (complete system)．使得(3)成为完备系的充分必要条件是，存在 k^3 个 C^∞ 类函数 $\lambda_{ij}^\nu(x)$，使得

$$[X_j,X_i]=X_jX_i-X_iX_j=\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_{ij}^\nu(x)X_\nu,$$

也就是

$$\sum_{h=1}^{n}\left(P_h^j\frac{\partial P_\mu^i}{\partial x_h}-P_h^i\frac{\partial P_\mu^j}{\partial x_h}\right)=\sum_{\nu=1}^{k}\lambda_{ij}^\nu P_\mu^\nu.$$

而且，这个 $[X_j,X_i]$ 是一阶微分算子，我们把它称为微分算子 X_i, X_j 的**换位子**或者**换位算子** (commutator) 又称为 **Poisson 括号** (Poisson's bracket)．

【对合系】 对于两个任意的 (x,u,p) 的 C^∞ 类函数 $F(x,u,p)$, $G(x,u,p)$，我们定义 **Lagrange 括号** (Lagrange's bracket) $[F,G]$（设 $p_\nu=\partial u/\partial x_\nu$）为：

$$[F,G]=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial G}{\partial x_\nu}+p_\nu\frac{\partial G}{\partial u}\right)-\frac{\partial G}{\partial p_\nu}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\nu}+p_\nu\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right).$$

当 F, G 是不包含 u 的关于 p 的齐一次式时，于是 F, G 是关于 u 的微分运算 $F=X_1u$, $G=X_2u$，而 $[F,G]=[X_1,X_2]u$．Lagrange 括号具有下列性质：

$$[F,G]=-[G,F],$$

$$[F,\varphi(G_1,\cdots,G_k)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial G_i}[F,G_i],$$

$$[[F,G],H]+[[G,H],F]+[[H,F],G]=\frac{\partial F}{\partial u}[G,H]+\frac{\partial G}{\partial u}[H,F]+\frac{\partial H}{\partial u}[F,G].$$

特别是，当 F, G 只是 (x,p) 的函数时，通常使用 (F,G) 这样的记号，这也称为 **Poisson 括号**．这时第三式的右边变成 0．

考虑 k 个关于同一未知函数 $u(x_1,\cdots,x_n)$ 的偏微分方程

$$(4)\qquad F_i(x,u,p)=0,\ i=1,\cdots,k;\qquad p_\nu=\frac{\partial u}{\partial x_\nu}.$$

如果它们有公共解 $u(x)$，那末这个 u 也是 $[F_i,F_j]=0$ $(i,j=1,\cdots,k)$ 的解．因此，在这样所得到的方程中取其独立的，并把它们添加到原来的方程组中．于是，如果得到 $n+1$ 个以上的独立方程，那末原方程组就没有解．如

果不是这样，是 r 个独立的 $F_j(j=1,\cdots,r)$（即 $(\partial F_i/\partial p_\nu)$ 的阶为 r），那末所有 $[F_i,F_j]=0$ 都可从 $F_i=0$ 导出．这样的方程组(4)称为**对合系**(system of involution)，特别在关于所有的 i,j 使 $[F_i,F_j]\equiv 0$ 的情形称为 **Jacobi 系**(Jacobi's system)．方程组经常被扩展到对合系去处理．在 $k=1$ 的情形，就把方程本身考虑为对合系(Jacobi 系)．

当(4)中各个方程相互独立时，它们公有一个具有 $n-k$ 个自由度的解（在适当的 $n-k$ 维流形上成为任意函数的解）的充分必要条件是，(4) 是与对合系等价的方程（以 p 为未知数）．

对合系(4)，再添加 $n-k$ 个适当的方程

$$(4')\quad F_{k+1}(x,u,p)=a_{k+1},\cdots,F_n(x,u,p)=a_n,$$

可使之扩展到由 n 个独立的方程所构成的对合系．也就是说，我们可以逐次求出 $f=F_l(l=k+1,\cdots,n)$，使之满足方程组

$$[F_i,f]=0,\ i=1,\cdots,l-1$$

（这是关于 f 的线性偏微分方程的完备系），并且使 $F_i(i=1,\cdots,n)$ 相互独立．因此，只要从(4)及(4′)作为 (x,u,a) $(a=(a_{k+1},\cdots,a_n))$ 的函数求出 p_ν，则关于 u 的全微分方程†

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu}=p_\nu(x,u,a),\ \nu=1,\cdots,n$$

就完全可积†，由此我们可以求得 u，它是本质上含有 $n-k+1$ 个参数 $a_{k+1},\cdots,a_n,c$ 的解(即(4)的全解)．而且，若能得到 $n+1$ 个相互独立方程的对合系 $F_1=0,\cdots,F_k=0,F_{k+1}=a_{k+1},\cdots,F_{n+1}=a_{n+1}$，则由此消去 $p_1,\cdots,p_n$ 便得全解．这种对合系(4)的解法称为 **Jacobi 第二解法**(Jacobi's second method of solution)．

【与变分法的关系】　考虑一阶偏微分方程

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,p_1,\cdots,p_n)=0,$$

如果解 $u(x)$ 可以用隐函数 $\varphi(x_1,\cdots,x_n,u)=0$ 的形式给出，那末可得方程

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,u,-\frac{\partial\varphi/\partial x_1}{\partial\varphi/\partial u},\cdots,-\frac{\partial\varphi/\partial x_n}{\partial\varphi/\partial u}\right)=0.$$

这是形式上以 $x_1,\cdots,x_n,u$ 为自变量的关于 φ 的偏微分方程，但是不直接地含有应变量 φ．也就是说，具有

$$F\left(x_1,\cdots,x_{n+1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n+1}}\right)=0$$

这样的形式．于是，如果从这里把一个偏导数，例如 $\partial\varphi/\partial x_{n+1}$，作为其他偏导数的函数解出来，且把 x_{n+1} 再写成 t，则得到下列形式的偏微分方程：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+H\left(t,x,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0.$$

我们把它称为一阶偏微分方程的**标准型**(standard form)．这个方程的特征曲线的方程是(设 $p_i=\partial\varphi/\partial x_i$)：

$$\frac{dx_i}{dt}=H_{p_i}(t,x,p),$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-H_{x_i}(t,x,p),\ i=1,\cdots,n.$$

它称为 **Hamilton 方程**．

现在考虑关于积分泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(t,x,x')dt,\ x'=\frac{dx}{dt}$$

的 Euler 方程†

$$\frac{dF_{x_i'}}{dt}-F_{x_i}=0,\ i=1,\cdots,n.$$

当 $\det(F_{x_i'x_j'})\neq 0$ 时令 $F_{x_i'}=p_i$，由此解出 x_i'，譬如说 $x_i'=\varphi_i(t,x,p)$，又若令

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n}x_\nu'F_{x_\nu'}-F\right)_{x'=\varphi(t,x,p)}=H(t,x,p),$$

则因为 $F(t,x,x')=\sum_{i=1}^{n}p_iH_{p_i}-H$，所以 Euler 方程与 Hamilton 方程

$$\frac{dx_i}{dt}=H_{p_i},\ \frac{dp_i}{dt}=-H_{x_i},\ i=1,\cdots,n$$

等价．

现在在 $n+1$ 维的 (t,x) 空间内的区域 G 中，考虑正好把 G 盖满一次的平稳曲线族(Euler-Lagrange 微分方程的解所表达的曲线

称为**平稳曲线** (stationary curve)), 假设这族曲线在一个 r 维($r \leqslant n$)流形 $\mathfrak{A}$ 上是**横截的**(transversal) (即若沿 $\mathfrak{A}$ 的微分为 δt, δx_i, 则有 $F\delta t - \sum F_{x_i}\delta x_i = 0$, 特别是, 在 $\mathfrak{A}$ 只是一个点($r=0$)的情形, 通过这一点的平稳曲线把 $\mathfrak{A}$ 横截). 在此情形, 若令 $V(t, x)$ 表示从 $\mathfrak{A}$ 到 G 内的任意一点 (t, x) 沿着平稳曲线的积分值 J, 则有

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0.$$

这个方程称为 **Hamilton-Jacobi 方程**或者**光程函数方程** (英 eikonal equation 德 Eikonalgleichung). 反之, 这个方程的一个解 V, 对横截于适当的 $\mathfrak{A}$ 的平稳曲线族, 是等于上述积分值 J 的.

【Monge 方程】 在 $n+1$ 维的 (x, u) 空间, 偏微分方程

$$F(x, u, p) = 0, \ p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

的特征曲线的一个参数族的包络线的曲线, 就是从

$$\frac{dx_i}{dt} = F_{p_i}, \ \frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_i F_{p_i}, \ F(x, u, p) = 0$$

消去 p 与参数 t (例如, 当 $F_{p_1} \neq 0$ 时, 从 $dx_i/dx_1 = F_{p_i}/F_{p_1}$ 与 $F=0$ 消去 p) 所得到的方程

$$M\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{dx_2}{dx_1}, \cdots, \frac{dx_n}{dx_1}\right) = 0$$

的解. 这个方程称为 **Monge 方程**, 它的解所表示的曲线称为**积分曲线** (integral curve). 特征曲线也是积分曲线. 当 $n=2$ 时, 一般说来, 不是特征曲线的积分曲线, 是由同它相切的特征曲线族所生成的曲面 ($F(x, u, p) = 0$ 的积分曲面)的脊线†. 当 F 为 p_i 的一次式(拟线性)时, 所有积分曲线都和特征曲线一致.

【参】 [1] 犬井鉄郎, 応用偏微分方程式論, 岩波, 1951; [2] 吉江琢児, 初等一階偏微分方程式, 裳華房, 1947; [3] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II, Interscience, 1962 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法 II, 科学出版社, 1977); [4] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 第二版, 1953 (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 高等教育出版社, 1956); [5] E. Goursat, Cours d'analyse mathématique, Gauthier-Villars, II, 第二版, 1911; III, 第四版, 1927; [6] F. John, Partial differential equations, Springer, 1971; [7] 大島利雄-小松彦三郎, 1階偏微分方程式, 岩波講座基礎数学, 岩波, 1977.

Monge-Ampère 方程 [英 Monge-Ampère equation 法 équation de Monge-Ampère 德 Monge-Ampèresche Gleichung 俄 уравнение Монжа-Ампера 日 モンジュ-アンペールの方程式] 下列形式的二阶偏微分方程称为 **Monge-Ampère 方程**:

$$(1) \qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

这里

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

而 H, K, L, M, N 是 x, y, z, p, q 的函数.

Monge-Ampère 方程的特征流形† 可以用两个方程组表达如下:

i) 当 $N \neq 0$ 时, 设 $\lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0$ 的两个根为 λ_1, λ_2, 则

$$(2) \qquad \begin{cases} Ndp + Ldx + \lambda_1 dy = 0, \\ Ndq + \lambda_2 dx + Hdy = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} Ndp + Ldx + \lambda_2 dy = 0, \\ Ndq + \lambda_1 dx + Hdy = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

ii) 当 $N = 0, H \neq 0$ 时, 设 $H\lambda^2 - 2K\lambda + L = 0$ 的两个根为 λ_1, λ_2, 则

$$(4) \qquad \begin{cases} dy = \lambda_1 dx, \\ Hdp + H\lambda_2 dq + Mdx = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} dy = \lambda_2 dx, \\ Hdp + H\lambda_1 dq + Mdx = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

iii) 当 $N = 0, H = 0, L \neq 0$ 时, 则

$$(6) \qquad \begin{cases} dx = 0, \\ Mdy + 2Kdp + Ldq = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} 2Kdy - Ldx = 0, \\ Mdy + Ldq = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

iv) 当 $N = 0, H = 0, L = 0$ 时，则

$$(8)\quad \begin{cases} dx = 0, \\ 2Kdp + Mdy = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} dy = 0, \\ 2Kdq + Mdx = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{cases}$$

满足这些方程组的流形 $x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), p(\lambda), q(\lambda)$ (λ 为参数) 就是方程 (1) 的特征流形.

关于 Monge-Ampère 方程，如下的事实成立：由(1)的积分曲面†上的各点和各点的切平面的方向系数 p, q 所构成的面元†可以由一个参数的特征流形按两种方式生成. 反之，如果一个曲面 S 上的各点的切平面所对应的流形是由一个参数的特征流形生成的，那末这个曲面 S 是积分曲面.

【中间积分】 关于 Monge-Ampère 方程，我们对决定特征流形的方程组，考虑中间积分. 对于 $V(x, y, z, p, q) = c$，当 $dV = 0$ 例如可以从(2)导出时，则称 $V = c$ 为(2)的**积分**(integral). 这时，i) 如果 $V = c$ 是给定特征流形的微分方程组的一个积分，那末当把 $V = c$ (c 为任意常数) 考虑为一阶偏微分方程时，它的解就是(1)的解. 反之，如果 $V = c$ 的解都是(1)的解(奇解除外)，那末 $V = c$ 就是特征流形的微分方程组的一个积分. ii) 如果特征流形的一个微分方程组具有两个积分 $u = c, v = c$，则(1)的每一个解就满足一个一阶偏微分方程 $\varphi(u, v) = 0$，这里 φ 是适当的 u, v 的函数，即 (1) 与 $\varphi(u, v) = 0$ 是等价的. 我们把这个 $\varphi(u, v) = 0$ 称为 (1) 的**中间积分** (intermediate integral). 但是有时也把定义特征流形的方程组的积分称为中间积分.

如果定义特征流形的两个微分方程组中的每一组都具有一个中间积分，则这两个中间积分 $\varphi(u, v) = 0$ 和 $\psi(u, v) = 0$ 构成一阶偏微分方程的完备系†. 对这个完备系进行积分，便得到方程(1)的通解.

【参】 [1] E. Goursat, Cours d'analyse mathématique III, Gauthier-Villars, 第五版 1927; [2] E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes I. Hermann, 1896; [3] 福原満洲雄，偏微分方程論，岩波講座数学，1935.

椭圆型偏微分方程 [英 partial differential equation of elliptic type 法 équation aux dérivées partielles du type elliptique 德 partielle Differentialgleichung vom elliptischen Typus 俄 дифференциальное уравнение с частными производными эллиптического типа 日 楕円型偏微分方程式] 关于 n 个自变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 的二阶线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x),$$

$$x = (x_1, \cdots, x_n), \quad a_{ij} = a_{ji},$$

当对 ξ 的二次型 $\sum a_{ij}\xi_i\xi_j$ 在域 G 的各点 x 上都是正定时，就称这个方程在 G 中为**椭圆型** (elliptic type) 的. 如果 $n = 2$，那末 $a_{11}(x)a_{22}(x) - (a_{12}(x))^2 > 0$ 就是椭圆型条件. 这时，可以在局部通过自变量的变换把方程变成标准型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x).$$

算子 $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 称为 **Laplace 算子**或者**调和算子**，用 Δ 来表示. 最简单的椭圆型偏微分方程是 **Laplace 方程** (Laplace's equation) $\Delta u = 0$ (它的解称为调和函数†)及 **Poisson 方程** (Poisson's equation) $\Delta u = f(x)$ (→公式 15).

【基本解】 一般说来，对于二次连续可微的函数 $u(x)$，设以 x_0 为心、R 为半径的球的内部为 K，表面为 Ω，且设 r 为从 x_0 到 x 的距离，S_n 为球的表面积，如果 $n > 2$，那末就有

$$u(x_0) = \frac{1}{S_n}\int_{\Omega} udS$$

$$-\frac{R^{n-1}}{(n-2)S_n}\int_K(r^{2-n}-R^{2-n})\Delta u dx,$$

如果 $n=2$，那末就有

$$u(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_\Omega udS-\frac{1}{2\pi}\int_K\log\frac{R}{r}\Delta u dx.$$

因此，若 u 是 Poisson 方程 $\Delta u=f(x)$ 的一个解，则在这些式子中将 Δu 换成 $f(x)$ 时它们也成立．还有，对于 $\Delta u+cu=0$ ($c>0$ 常数) 的解，下列关系式成立:

$$\frac{1}{S_n}\int_\Omega udS=\frac{\Gamma(n/2)J_{n'}(R\sqrt{c})}{(R\sqrt{c}/2)^{n'}}u(x_0),$$

其中 $n'=(n-2)/2$，J_ν 是 ν 次 Bessel 函数†．

因此，若定义

$$V(x,\xi)=\left(\sum_{i=1}^n(x_i-\xi_i)^2\right)^{1-n/2}=r^{2-n}，当 n\geqslant 3 时$$

$$V(x,\xi)=\log\left(\sum_{i=1}^2(x_i-\xi_i)^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\log\frac{1}{r}，当 n=2 时，$$

则

$$u(x)=\frac{-1}{\omega_n}\int_G V(x,\xi)f(\xi)d\xi,\ \omega_n=2\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

就是 $\Delta u=f(x)$ 的一个特解．这里，$V(x,\xi)$ 作为 x 的函数，满足 $\Delta u=0$.

当设

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u$$

时，在一般的方程 $L[u]=0$ 的解中，我们把在 $x=\xi$ 处具有等于 $r^{2-n}(n\geqslant 3)$ 或者 $-\log r(n=2)$ 的奇性的解称为 $L[u]=0$ 的**基本解**（英 elementary solution　德 Grundlösung）．这里，$r=(\sum a^{ij}(\xi)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j))^{\frac{1}{2}}$，$(a^{ij})$ 是 (a_{ij}) 的逆矩阵．设 $V(x,\xi)$ 为

$$V(x,\xi)=r^{2-n}，当 n\geqslant 3 时$$
$$=-\log r，当 n=2 时，$$

为求 $L[u]=f(x)$ 的一个解，令

$$u=\int_G V(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

若设 $L[V(x,\xi)]=\chi(x,\xi)$，则得关于 $\varphi(x)$ 的第二类 Fredholm 型积分方程†

$$\varphi(x)-\frac{1}{\omega_n}\int_G\chi(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=\frac{1}{\omega_n}f(x).$$

假设这个方程的预解核†为 $\bar\chi(x,\xi)$，令

$$\gamma(x,\xi)=V(x,\xi)-\omega_n\int_G V(x,\xi')\times\bar\chi(\xi',\xi)d\xi',$$

则 $\gamma(x,\xi)$ 就是 $L[u]=0$ 的一个基本解，且

$$u=\frac{-1}{\omega_n}\int_G\gamma(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

给出了 $L[u]=f(x)$ 的一个解（→Green 算子）．

【Dirichlet 问题】　设有界域 G 的边界为 Γ．求在 $G\cup\Gamma$ 上连续、在 G 上满足给定的椭圆型方程、在 Γ 上取给定的连续边界值的解的问题，称为**第一边值问题** (first boundary value problem) 或者 **Dirichlet 问题**(Dirichlet problem)．特别是，对于 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的 Dirichlet 问题，已有详细研究（→Dirichlet 问题）．

对于一般的椭圆型方程 $L[u]=f(x)$，其中

$$L[u]=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u,$$

如果 $c(x)<0$，那末关于 Dirichlet 问题的解是唯一的．而且，当在 $G\cup\Gamma$ 上连续、在 G 上二次连续可微且使得 $L[\omega(x)]<0$ 的 $\omega(x)(>0)$ 存在时，关于 Dirichlet 问题的解也是唯一的．

设 G 为平面上关于 Dirichlet 问题的正则†域．若设对 Δ 的 Dirichlet 问题的 Green 函数†为 $K(x,y,\xi,\eta)$，则满足 $\Delta u=f(x,y)$ 的在 Γ 上等于 0 的解可由

$$u(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\iint_G K(x,y,\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

给出．这里假设 $f(x,y)$ 满足 Hölder 条件†．

关于方程 $L[u]=f(x,y)$ 的 Dirichlet 问题，其中

$$L[u]=\Delta u+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+ b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u.$$

若设 $h(x, y)$ 为在 Γ 上取给定的边界值的调和函数，令 $u = h(x, y) + v$，则化为求满足同上面的方程一样的对于 v 的方程（把 f 换成 $f - ah_x - bh_y - ch$）而在 Γ 上等于 0 的解的问题。现在，设 Γ 是由有限个曲率连续变化的 Jordan 弧构成的，a, b 连续可微，c, f 满足 Hölder 条件。若令 $K(x,y,\xi,\eta)$ 为 G 上关于 Δ 的 Dirichlet 问题的 Green 函数，则在 Γ 上满足 $u = 0$ 的 Dirichlet 问题，可以通过令

$$u = -\frac{1}{2\pi}\iint_G K(x,y,\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)d\xi d\eta,$$

而化为求解关于 ρ 的积分方程

$$\rho(x,y)+\iint_G H(x,y,\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)d\xi d\eta = f(x,y)$$

（此处，$H(x, y, \xi, \eta) = (-1/2\pi)\{a(x, y) \cdot K_x(x,y,\xi,\eta)+b(x,y)K_y(x,y,\xi,\eta)+c(x,y) \cdot K(x, y, \xi, \eta)\}$）的问题。因此，或者对任意的 f 和在 Γ 上任意给定的值，$L[u] = f$ 具有唯一的解，或者 $L[u] = 0$ 具有在 Γ 上满足 $u = 0$ 的非平凡解（其线性无关的解的个数是有限的）。

最一般的椭圆型方程 $L[u] = f(x)$，其中

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

已由 J. Schauder 等人进行了研究。Schauder 首先在 $b_i(x), c(x)$ 恒等于 0 的情形，假设 $a_{ij}(x)$，$f(x)$ 满足 Hölder 条件，当 G 的边界 Γ 为二次连续可微时，证明了在 Γ 上等于 0 的解 $u(x)$ 唯一存在。其次，当 $b_i(x)$，$c(x)$ 连续，$a_{ij}(x)$，$f(x)$ 如前所述时，证明了：或者对任意的 $f(x)$，$L[u] = f(x)$ 具有唯一的在 Γ 上等于 0 的解，或者 $L[u] = 0$ 具有在 Γ 上等于 0 的非平凡解（其线性无关的解的个数是有限的）。

【拟线性偏微分方程】 我们记 $\partial u/\partial x_i = p_i, \partial^2 u/\partial x_i \partial x_j = p_{ij}$，当关于二阶偏微分方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n, p_{11}, \cdots, p_{ij}, \cdots, p_{nn}) = 0$$

的一个解 $u(x)$ 的二次型 $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j$ 是正定时，就称这个解为**椭圆的**（elliptic）。并且当对任意的 u, p_i, p_{ij} 的值，这个二次型总是正定时，就称上面的方程为**椭圆型**（elliptic type）的。例如，极小曲面方程（→Plateau 问题）

$$(1 + p_2^2)p_{11} - 2 p_1 p_2 p_{12} + (1 + p_1^2)p_{22} = 0$$

是拟线性椭圆型方程。此外，

$$\Delta u = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

也是椭圆型的。E. Picard 根据逐次逼近法给出了这个方程的解法。也就是说，设 $h(x,y)$ 为在 Γ 上取给定边界值的调和函数，令 $u_0(x, y) = h(x,y)$，而 $u_n(x, y)$ 依次地为满足

$$\Delta u_n = f\left(x, y, u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}\right)$$

并且在 Γ 上满足 $u_n = h$ 的解。现在设令 $K(x, y, \xi, \eta)$ 为 G 中的 Green 函数，当在

$$|u - h(x, y)| \leqslant A, |p - h_x| \leqslant B,$$
$$|q - h_y| \leqslant B, (x, y) \in G$$

所定义的域中，$|f(x, y, u, p, q)| \leqslant C$ 时，下列不等式成立：

$$\frac{C}{2\pi}\iint_G K d\xi d\eta \leqslant A, \frac{C}{2\pi}\iint_G |K_x| d\xi d\eta \leqslant B,$$
$$\frac{C}{2\pi}\iint_G |K_y| d\xi d\eta \leqslant B,$$

并且 f 关于 (x, y) 满足 Hölder 条件，则当

$$|f(x, y, u', p', q') - f(x, y, u, p', q')| \leqslant L|u' - u| + L'(|p' - p| + |q' - q|),$$
$$\iint_G (LK + L'(|K_x| + |K_y|))d\xi d\eta \leqslant \gamma < 1$$

成立时，$u_n(x, y)$ 一致收敛，而且它的极限 u 在 Γ 上同 $h(x, y)$ 一致，在 G 内满足

$$\Delta u = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

并且，在上述范围内解是唯一的。这个方法，当域 G 充分小，h_x, h_y 的值有界时是适用的。

还有，当 f 不含 p, q 时，可以明显地表达解的存在范围的，有如下方法。设 $\underline{\omega}(x, y)$，$\overline{\omega}(x, y)$ 都在 $G \cup \Gamma$ 上连续，在 G 中二次可微，$f(x, y, u)$ 对 $\underline{\omega}(x,y) \leqslant u \leqslant \overline{\omega}(x, y)$ 满足 Hölder 条件，如果

$$\Delta \underline{\omega} \geqslant f(x, y, \underline{\omega}(x, y)),$$
$$\Delta \bar{\omega} \leqslant f(x, y, \bar{\omega}(x, y)),$$

则当 φ 在 Γ 上连续并且 $\underline{\omega} \leqslant \varphi \leqslant \bar{\omega}$ 时，就有这样的解 $u(x, y)$ 存在：在 Γ 上 $u = \varphi$，在 G 内满足 $\Delta u = f(x, y, u)$，$\underline{\omega}(x, y) \leqslant u(x, y) \leqslant \bar{\omega}(x, y)$. 此外，考虑方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

当 A, B, C 为 x, y, u, p, q 的函数，$AC - B^2 > 0$ 时，在下述条件下 Dirichlet 问题的解存在：A, B, C 关于其变量的二阶导数满足 Hölder 条件，G 为凸的，其边界 Γ 上的边界值 φ 在 (x, y, u) 空间所描绘的曲线当以弧长作为变量时，它的三阶导数满足 Hölder 条件. 并且，与这个曲线公有三点的平面的斜率总是不超过一定的值 Λ. 这个定理可用下面的办法来证明. 对于满足

$|u(x, y)| \leqslant \max|\varphi|$, $|u_x| \leqslant \Lambda$, $|u_y| \leqslant \Lambda$

的任意函数(与导数都是连续的) u，把 $u = u$, $p = u_x$, $q = u_y$ 代入 A, B, C，求关于 v 的线性方程

$$A[u] \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2B[u] \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C[u] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

的在 Γ 上满足 $v = \varphi$ 的解，把这考虑为从 u 到 v 的变换，如果应用函数空间的不动点定理†，那末就有使得 $v(x, y) = u(x, y)$ 的 u，即方程的满足给定边界条件的解存在.

关于二阶椭圆型拟线性偏微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

的 Dirichlet 问题，南雲道夫给出了一般的解的存在定理 (Osaka Math. J., **6** (1954)).

此外，考虑一般的非线性方程

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n, p_{11}, \cdots, p_{ij}, \cdots, p_{nn}) = 0,$$

如果恒有 $\sum (\partial F/\partial p_{ij})\xi_i\xi_j > 0$, $F_u \leqslant 0$，那末关于这个方程的 Dirichlet 问题的解是唯一的. 即使没有 $F_u \leqslant 0$，若由适当的变量变换把方程化为这种情况，那末也有同样的结论.

【与变分法的关系】 对于二次微分形式的积分

$$J = \int_G \left(\sum a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + 2\sum b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} u + c(x)u^2 + 2f(x)u\right) dx,$$

这里设 $\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0$，当在给定边界条件下，求使得它成为极小的 u 时，如果 $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ 满足适当的可微性条件，那末就得关于 u 的所谓 Euler 微分方程

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_i a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \left(c(x) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} b_i(x)\right)u - f(x) = 0,$$

它是椭圆型线性自伴偏微分方程.

B. Riemann 对于最简单的情形 ($a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $b_i(x) = c(x) = 0$，因此，$\Delta u = 0$)，在 J 的极小值存在的假定下，证明了这种偏微分方程在给定的边界条件下的解的存在. 他把这个事实称为 **Dirichlet 原理**(Dirichlet's principle). 后来 D. Hilbert, R. Courant, H. Weyl, O. Nikodym 等人利用这个原理来证明椭圆型线性自伴偏微分方程的边值问题的解的存在.

更一般地，当关于 $F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$ 恒有 $\sum (\partial^2 F/\partial p_i \partial p_j)\xi_i\xi_j > 0$ 时 (如果 F 具有适当的正则性)，使得积分

$$J = \int_G F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) dx_1 \cdots dx_n$$

在给定的边界条件下成为极小的 u，必须是对于它的 Euler 微分方程

$$\sum_{i,j=1}^{n} F_{p_i p_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} F_{u p_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} F_{x_i p_i} - F_u = 0$$

($p_i = \partial u/\partial x_i$) 在给定边界条件下的解. 这也是关于 u 的椭圆型偏微分方程. 至于当 F 只是 p 的函数时(特别是极小曲面的情形)，已由 A. Haar 与 T. Radó 等人研究了.

【第二边值问题和第三边值问题】 设 G 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界域，它的边界由有限个光滑超曲面 S 所构成. 对于 $L[u] = f(x)$，其中

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u,$$

求在闭域 $\bar{G}$ 上连续、在 G 的边界 S 上满足条件 $B[u]=\varphi$ 的解的问题，这里

$$B[u]=a\partial u/\partial\nu+\beta u$$

$$a=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cos(\nu_0 x_j)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$ ν_0 为外法线，

当 $\beta\equiv 0$ 时称为**第二边值问题**(second boundary value problem) 或者 **Neumann 问题**(Neumann problem)，当 $\beta\not\equiv 0$ 时称为**第三边值问题**(third boundary value problem) 或者 **Robin 问题**(Robin problem)．此外 ν 称为(对于 L 的)**余法线** (conormal)，它表示由 $\cos\nu x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\cos\nu_0 x_j)/a$ 所定义的方向．一般说来，关于边值问题，在边界上解应该满足的条件称为**边界条件** (boundary condition)．设定义 G 的边界 S 的函数的偏导数满足 Hölder 条件(这种情形，称 G 为 $\mathbf{C}^{1,\lambda}$ **类域**(domain of class $C^{1,\lambda}$))．这时如果 $c\leqslant 0$，$\beta\geqslant 0$ 并且在 c,β 之中至少有一个不恒等于 0，那末第二、第三边值问题的解是唯一的．如果 $c\equiv 0$，$\beta\equiv 0$，那末第二边值问题的解除附加常数外唯一确定．而且，令 M 为 L 的伴随微分算子†，定义微分算子 B'：

$$B'[v]=a\,\partial v/\partial\nu+(\beta-b)v,$$

这里 $$b=\sum_{i=1}^{n}\cos(\nu_0 x_i)\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right),$$

如果定义 G 的边界 S 的函数是 C^1 类的，f,φ 是连续的，那末使得 $L[u]=f$ 的第二、第三边值问题至少存在一个解的充分必要条件是(由 Green 公式)

$$\int_G fv\,dx-\int_S\varphi v\,dS=0$$

成立．此处 v 是方程 $M[v]=0$ 的满足边界条件 $B'[v]=0$ 的任何解．

关于 $L[u]=f$ 的第二、第三边值问题，当 G 是 $C^{1,\lambda}$ 类域，L 的系数及 f 在 G 上满足 Hölder 条件，φ,β 在 S 上连续时，G. Giraud 利用 $L[u]=0$ 的基本解，把它们化为积分方程问题([5])．

【正射影法】 对于上面这几类边值问题，我们可以应用 Hilbert 空间理论来考虑．一般说来，用 $H^m(G)$ 表示这样的函数的集合，它的所有直到 m 阶的、广义函数意义下的偏导数都属于 $L_2(G)$．定义内积

$$(f,g)_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_G D^\alpha f(x)\overline{D^\alpha g(x)}\,dx,$$

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$$

(→函数空间)．因此，$H^m(G)$ 是 Hilbert 空间†．现在设 u 满足方程 $L[u]=f(x)$ ($f(x)\in L_2(G)$)，任意取 $\varphi(x)\in H^1(G)$，引用 Green 公式，便得

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(b_i'(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi\right)$$
$$+(c(x)u,\varphi)+\int_S a\frac{\partial u}{\partial\nu}\bar{\varphi}\,dS=(f,\varphi),$$

$$b_i'(x)=b_i(x)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}.$$

若考虑关于 u 的边界条件 ($a\partial u/\partial\nu+\beta u=0$)，便得

$$\sum_{i,j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)-\sum_i\left(b_i'\frac{\partial u}{\partial x_i},\varphi\right)$$
$$-(cu,\varphi)+\int_S\beta u\bar{\varphi}\,dS=-(f,\varphi).$$

因此，问题化为：求对于任意的 $\varphi(x)\in H^1(G)$ 使得上式成立的 $u(x)\in H^1(G)$．这个方程可以看成是 Hilbert 空间 $H^1(G)$ 上的方程，如果有必要，可把 t 取得充分大，将 $c(x)$ 换为 $c(x)-t$，那末可以证明：对于任意的 $f(x)\in L_2(G)$，存在唯一的解 $u(x)\in H^1(G)$ ([6],[7])．其次，对于满足这个方程的 $u(x)$，如果取 $\varphi(x)\in\mathscr{D}(G)$，则由上式可得 $(u,L^*[\varphi])=(f,\varphi)$．这里 L^* 是 L 的伴随微分算子†．也就是说，$u(x)$ 是广义函数意义下的解，这种情形，把 u 称为**弱解** (weak solution)．用这种见解处理边值问题按 Weyl 的说法称为**正射影法** (method of orthogonal projection)．在此情形，如果假定 L 的系数及 β 都是光滑的，则当 $f(x)\in H^s(G)$ ($s=0,1,2,\cdots$) 时，由解 $u(x)\in H^1(G)$ 就可

导出 $u(x)\in H^{s+2}(G)$，结果，引用(广义) Green 公式，便得知 $u(x)$ 满足边界条件 $\alpha\partial u/\partial\nu+\beta u=0$. 特别是，当 $s>n/2$ 时，可以导出 $u(x)\in C^2(\overline{G})$ (**Соболев 引理**)([7][8])，所以 $u(x)$ 是满足边界条件的**真解** (genuine solution).

下面，设 λ 为复参数，考虑边值问题

$$(L+\lambda I)[u]=f(x),\ f(x)\in L_2(G),\ \alpha\partial u/\partial\nu+\beta u=0.$$

若把 t 取得充分大，则如前所述，$(L-tI)$ 是从 L 的定义域 $\mathscr{D}(L)=\{u\in H^2(G)\,|\,\alpha\partial u/\partial\nu+\beta u=0\}$ 到 $L_2(G)$ 全体上的一一映射，设其逆算子为 G_t，把 G_t 从左面作用于上面的方程，则有

$$(I+(\lambda+t)G_t)[u]=G_tf$$

成立. 反之，因为这个方程的解 $u(x)\in L_2(G)$ (因此，$u\in\mathscr{D}(L)$)满足方程及边界条件，所以可化为在上述 $L_2(G)$ 中求解线性方程的问题. 可是，G_t 是从 $L_2(G)$ 到 $H^2(G)$ 的连续算子，根据 **Rellich 定理**知道，它是从 $L_2(G)$ 到 $L_2(G)$ 中的紧算子†，所以 F. Riesz-Schauder 定理是适用的 (⇀Green 算子).

【高阶椭圆型方程】 m 阶偏微分算子

$$L=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha(x)D^\alpha,\ D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,$$

若满足 $\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\ne0\ (\xi\ne0)$，则称 L 为**椭圆型算子** (elliptic operator)，特别是若满足

$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)\xi^\alpha\ge c|\xi|^m,\ c>0,$$

则称 L 为**强椭圆型算子** (strongly elliptic operator). 这时，m 必须是偶数. L. Gårding 研究了对于强椭圆型算子的 Dirichlet 问题([11]). 令 $m=2b$，则 Dirichlet 的边界条件定义为 $\partial^ju/\partial\nu^j=f_j(x)\ (j=0,1,2,\cdots,b-1)$ (ν 为法线方向). 若利用函数空间的概念，这个边界条件意味着解属于 $\mathscr{D}(G)$ 在 $H^b(G)$ 内的闭包 $\mathring{H}^b(G)$. 在这个问题上，**Gårding 不等式** (Gårding's inequality)

$$(-1)^b\mathrm{Re}(L[u],u)\ge\delta\|u\|_b^2-c\|u\|^2,$$
$$u\in\mathring{H}^b(G)$$

起着重要的作用. 此处，δ, c 都是适当的正的常数.

一般说来，对于在开集 G 上定义的椭圆型算子 L，当 $u(x)$ 满足 $L[u]=f(x)$ 时，如果 $f(x)$ 在 G 中的任意的紧集上属于 H^s，也就是 $f(x)$ 直到 s 阶的导数都属于 L_2，那末就可得知 $u(x)$ 也仍在 G 的任意紧集上属于 H^{m+s} (m 为 L 的阶数) (**Friedrichs 定理**; [12][8][9]).

关于高阶椭圆型算子的**一般边值问题** (general boundary value problem)，已由 S. Agmon-A. Douglis-L. Nirenberg ([13])，M. Schechter ([14]) 等人进行了研究. 这些问题可以表述如下:

$$L[u]=f(x),\ B_j(x,D)u(x)=\varphi_j(x),$$
$$x\in S,\ j=1,2,\cdots,b(=m/2),$$

其中 $B_j(x,D)$ 是边界微分算子，f 和 $\{\varphi_j\}$ 都是给定的函数. 此外，关于这种方程的方程组，已有 F. Browder 等人的工作([16]).

【解的解析性】 调和函数 ($\Delta u=0$ 的解) 不论它的边界值如何，在存在域内都是解析的. Hilbert 猜测: 如果 $F(x,y,u,p,q,r,s,t)$ ($p=p_1$, $q=p_2$, $r=p_{11}$, $s=p_{12}$, $t=p_{22}$) 关于其变元是解析的，则椭圆型偏微分方程 $F=0$ 的任一解 $u(x,y)$ 在其存在域内也是解析的 (1900, Hilbert 的第十九问题). 这个事实已由 С. Н. Бернштейн, Radó 等人证明了，H. Lewy 由于把变量推广到复域，而把这个方程看作双曲型偏微分方程†，因此简化了 Hilbert 的推测的证明 (Math. Ann., **101** (1929)). 进一步由 И. Г. Петровский 把这个结果推广到一般非线性椭圆型方程组 (Mat. Sb., **5** (47) (1939)).

【解的唯一开拓定理】 作为 Laplace 方程 $\Delta u=0$ 的解的调和函数因为是解析的，所以若在其定义域内某开集上等于 0，则必恒等于 0. 这样的 (解的) **唯一开拓定理** (unique continuation theorem) 对于(任意阶的)椭圆型线性偏微分方程都成立，这一事实从解的解析性即可得知，也可应用 Holmgren 定理来证明(⇀偏微分方程的初值问题 [解的唯一性]). 这个定理首先是由 T. Carleman 建立的，他在两个自变量

的情形，关于以 C^1 类函数为系数的二阶椭圆型线性偏微分方程 $L[u]=0$，证明了解的唯一开拓定理.这个经典结果，经过 C. Müller, E. Heinz 等人的研究，由 N. Aronszajn 指出：在具有 C^2 类函数的系数的假定下，对于自变量个数的限制可以取消（[17]）. 对此又由 A. P. Calderón 等人在 Cauchy 问题解的唯一性方面作了推广（[18]）. 可是，即使假定系数是 C^∞ 类的函数，对于一般椭圆型线性偏微分方程而言，A. Pliś 根据一个反例指出，解的唯一开拓定理也不一定成立（Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961)）.

此外，关于**发散型**（divergence form）的拟线性方程

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

或者更一般形式的拟线性方程

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=f\left(x,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

以及线性的、拟线性的椭圆型方程组的最近研究，在[19]有详细论述.

【椭圆型伪微分算子和指标】 具有象征 $p(x,\xi)\in S^m_{0,1}$ 的一个伪微分算子 $P(x,D)$（→微分算子），当存在一个正的常数 c，使得 $|p(x,\xi)|\geqslant c(1+|\xi|)^m$ 对所有 $x\in \boldsymbol{R}^n$ 及 $|\xi|\geqslant c^{-1}$ 成立时，就称为**椭圆型**（elliptic type）的.椭圆性的概念可以推广到流形上的算子. 椭圆型伪微分算子的理论已广泛地应用于椭圆型微分方程的研究中，且在计算椭圆型算子的指标'时特别有用. Б. Р. Ваинберг 和 В. В. Грушин [27] 对一个椭圆型算子的强迫边值问题，通过证明它的指标 i 等于某个椭圆型伪微分算子在边界上的指标，计算了这个 i.

例[28]：在单位圆 $x_1^2+x_2^2=1$ 上给定一实向量场 (ν_1,ν_2)，假设当点 $x=(x_1,x_2)$ 在正向绕单位圆运动一周时，向量 $(\nu_1(x),\nu_2(x))$ 绕原点转 l 次. 于是，边值问题

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u(x)=f(x)\quad(x_1^2+x_2^2<1),$$

$$\nu_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\nu_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}=g(x)\quad(x_1^2+x_2^2=1)$$

的指标等于 $2-2l$.

M. F. Atiyah 和 I. M. Singer（[29]）根据流形的某些拓扑不变量，确定了流形上一般椭圆型算子的指标（→K理论）. 非强迫边值问题的指标亦已由 Ваинберг 和 Грушин, R. Seeley（[30]），М. И. Вишик 和 Грушин（[31]），及其他人进行了研究.

【参】 [1] E. Picard, Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, deuxième partie, Gauthier-Villars, 1930; [2] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II. Interscience, 1962（中译本：R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法 II，科学出版社，1977）; [3] 福原滿洲雄，偏微分方程式論，岩波講座数学，1935; [4] S. Bergman-M. Schiffer, Kernel function and elliptic differential equations in mathematical physics, Academic Press, 1953; [5] C. Miranda, Partial differential equations of elliptic type, Springer, 第二版 1970; [6] L. Nirenberg, Remarks on strongly elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **8** (1955), 648—674; [7] 溝畑茂，偏微分方程式論，岩波，1965; [8] 南雲道夫，近代的偏微分方程式論，現代数学講座，共立出版，1957; [9] 吉田耕作，近代解析，現代数学講座，共立出版，1958; [10] 福原満洲雄-佐藤徳意，偏微分方程式論 III，現代数学講座，共立出版，1957; [11] L. Gårding, Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, Math. Scand., **1** (1953), 55—72; [12] K. O. Friedrichs, On the differentiability of solutions of linear elliptic differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **6** (1953), 299—325; [13] S. Agmon-A. Douglis-L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 623—727; [14] M. Schechter, General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 457—486; [15] F. John, Symposium on spectral theory and differential problems, Stillwater, 1951; [16] F. Browder, Strongly elliptic systems, Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton, 1954; [17] N. Aronszajn, Sur l'unicité du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques du second ordre, C. R. Acad. Sci. Paris, **242** (1956), 723—725; [18] A. P. Calderón, Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. J. Math., **80** (1958), 16—36; [19] О. А. Ладыженская-Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, Наука, Москва, 1964; [20] S. Agmon, Lectures on elliptic boundary value prob-

lems, van Nostrand, 1965; [21] J. L. Lions - E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, I, 1968; II, 1968; III, 1970; [22] J. J. Kohn - L. Nirenberg, An algebra of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 269—305; [23] L. Hörmander, Pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 501—517; [24] L. Hörmander, Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc., **10** (1967), 138—183; [25] K. O. Friedrichs, Pseudo-differential operators, An introduction, Lecture notes, Courant Institute of Mathematical Science, New York Univ., 1968; [26] H. Kumano-go (熊ノ郷準), Pseudo-differential operators and uniqueness of the Cauchy problem, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 73—129; [27] B. R. Vainberg - V. V. Grushin (Б. Р. Вайнберг и В. В. Грушин), Uniformly nonelliptic problems I, Матем. Сб., **72** (114) (1967), 602—636; II, **73** (115) (1967), 126—154 (English translation, Math. USSR-Sb., **1** (1967), 543—568; **2** (1967), 111—133); [28] I. N. Vekua (И. Н. Векуа), System von Differential gleichungen erster Ordnung bom elliptischen Typus und Randwertaufgaben, Berlin, 1956 (中译本：一阶椭圆型偏微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用，高等教育出版社，1960); [29] M. F. Atiyah - I. M. Singer, The index of elliptic operators I, II, Ann. of Math., (2) **87** (1968), 484—530, 546—604; [30] R. Seeley, Topics in pseudo-differential operators; in Pseudo-differential operators (C. I. M. E., Stresa, 1968), Cremona, 1968, p. 335—375. [31] M. I. Vishik - V. V. Grushin (М. И. Вишик и В. В. Грушин), Elliptic boundary value problems degenerating on a submanifold of the manifold, Докл. Акад. Наук СССР, **190** (1970), 255—258 (English translation, Soviet Math. Dokl., **11** (1970), 60—64); [32] 熊ノ郷準，擬微分作用素，岩波，1974; [33] D. Gilbert-N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Springer, 1976.

双曲型偏微分方程 [英 partial differential equation of hyperbolic type 法 équation aux dérivées partielles du type hyperbolique 德 partielle Differentialgleichung vom hyperbolischen Typus 俄 дифференциальное уравнение с частными производными гиперболического типа 日 双曲型偏微分方程式] **【二阶线性双曲型方程】** 关于 $n+1$ 个自变量 $t, x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的二阶线性偏微分方程

$$(1)\quad L[u]=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i=1}^{n}a_{0i}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_i}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-a_0\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}-au=0$$

(设系数 $a_{0i},\cdots,a$ 是 t,x 的光滑函数)，当在 (t,x) 空间各点考虑的特征方程

$$(2)\quad H(t,x;\lambda,\xi)=\lambda^2-\sum a_{0i}\xi_i\lambda-\sum a_{ij}\xi_i\xi_j=0,$$

对于任意的实数组 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\neq(0,\cdots,0)$，恒具有两个相异的实根 $\lambda=\lambda_1(t,x,\xi)$，$\lambda_2(t,x,\xi)$ 时，就称(1)在 (t,x) 空间(在 t 方向上)为**双曲型** (hyperbolic type) 的. 特别是当这两个根关于 t,x 一致分离时，也就是当 $\inf\limits_{(t,x),|\xi|=1}|\lambda_1(t,x,\xi)-\lambda_2(t,x,\xi)|=c>0$ 成立时，就称(1)为**正则双曲型** (regularly hyperbolic type) 的. 双曲型方程的一个典型例子是**波动方程** (wave equation)

$$(3)\quad \Box u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-\cdots-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0.$$

(3) 根据与它相联系的物理学问题，当 $n=1,2,3$ 时，分别称为**弦振动方程**，**膜振动方程**，**声传播方程**. 还有，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

是描述有泄漏的导线中电流传导的双曲型方程，称为**电报方程** (equation of telegraphy)(→公式 15).

现在，考虑通过 (t,x) 空间的一点 $p^0=(t^0,x^0)$ 具有方向 (λ,ξ) 的超平面 $\lambda(t-t^0)+\cdots+\xi_n(x_n-x_n^0)=0$. 这时，如果方向 (λ,ξ) 满足在 p^0 的特征方程 $H(t^0,x^0;\lambda,\xi)=0$，那末就说这个超平面在点 p^0 具有特征方向，如果一个超平面在其各点上均具有该点的特征方向，则称为 (1) 的**特征超平面** (characteristic hyperplane). 当 (t,x) 空间的超曲面 $S: s(t,x)=0$ 上各点的切超平面均具有该切点的特征方向时，也就是当 $H(t,x;s_t,s_x)=0$ 在 S 上处处成立时，就称 S 为 (1) 的**特征超曲面** (characteristic hypersurface). 根据一阶偏微分方程论，特征超曲面是由常微分方程组：$dt/d\tau=H_\lambda,\cdots,dx_n/d\tau=H_{\xi_n}$，$d\lambda/d\tau=-H_t,\cdots,d\xi_n/d\tau=-H_{x_n}$，$H(t,x;\lambda,\xi)=0$ 的解曲线 $t=t(\tau)$，

$x = x(\tau)$ 即所谓(1)的**次特征线** (bicharacteristic curve) 族生成的.

再则,如果(1)是双曲型的,那末在点 p^0 具有特征方向的超平面的全体 $\{\lambda(t-t^0)+\cdots+\xi_n(x_n-x_n^0)=0 | H(t^0, x^0; \lambda, \xi)=0\}$,形成一个以 p^0 为顶点的、作为它的包络面的锥 $C(p^0)$. 于是,由于任意的超平面 $t=$ 常数与锥 $C(p^0)$ 相交形成一个 $n-1$ 维的椭圆面(对于 $n=1$ 则是两点),因而确定了一个锥体 $D_+(p^0)$ (或者 $D_-(p^0)$), 它是以超平面 $t=$ 常数上这个椭圆面所围成的有界域作为截面,以 $C(p^0)$ 的 $t \geqslant t_0$ (或者 $t \leqslant t_0$) 的部分为边界. 现在,在(t, x)空间考虑一条光滑的曲线 γ, 若在 γ 上的各点 p 的切向量恒属于 $D_+(p)$ 或者 $D_-(p)$, 则把 γ 称为**类时** (time-like) 曲线. 在 (t, x) 空间中取可用类时曲线与 p^0 点连结的点 p 的全体,把它的闭包称为**射线锥体**(emission). 闭包中 $t \geqslant t_0$ 的部分 $\mathscr{D}_+(p^0)$ 和 $t \leqslant t_0$ 的部分 $\mathscr{D}_-(p^0)$ 分别称为向前射线锥体和向后射线锥体. 射线锥体就是在其顶点 p^0 的适当的邻域内由特征超曲面所围成的锥体. 若 (1) 的系数是(t, x)的有界函数,则不论 p^0 的位置如何,射线锥体 $\mathscr{D}_\pm(p^0)$总包含于一个固定大小的锥体 $K=\left\{(t, x) \mid \lambda_{\max}^2 (t-t^0)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2\right\}$ 中. 这里 $\lambda_{\max} = \max\limits_{(t,x),|\xi|=1} (|\lambda_1(t, x, \xi)|, |\lambda_2(t, x, \xi)|)$.

【Cauchy 问题】 关于双曲型方程(1)的重要问题之一是 Cauchy 问题†, 也就是在初始超平面 $t=0$ 上给定了函数 $u_0(x)$, $u_1(x)$ $(-\infty < x_i < \infty,\ 1 \leqslant i \leqslant n)$, 求当 $t>0$ 时满足(1) 当 $t=0$ 时满足初始条件

$$u(0, x) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = u_1(x) \tag{4}$$

的函数 $u = u(t, x)$ 的问题.

现在,设 (1) 是正则双曲型的,它的系数是有界并且充分光滑的. 这时,对于上面的Cauchy问题,下述定理成立.

定理 C) 当存在一个与 (t, x) 空间的维数 $n+1$ 有关的正整数 $l(=[n/2]+3)$, 使得初始条件(4) l 次连续可微时,二次连续可微的解 $u=u(t, x)$ 在范围 $0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < x_i < \infty$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 内唯一存在. 而且, 对应: $\{u_0(x), u_1(x)\} \to u(t, x)$ 在下述意义下是连续的. 如果初始函数序列 $\{u_{0k}(x), u_{1k}(x)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$在超平面 $t=0$ 上与它的直到 l 阶的导数一起在任意的有界域内一致收敛于 0, 那末与它对应的解序列 $u_k(t, x)$ 也在任意超平面 $t=$常数上的任意有界域内一致收敛于 0. 也就是说, 正则双曲型方程的 Cauchy 问题在 Hadamard 意义下是适定的†([4]).

其次,关于解对初值的依赖性,下述事实成立. 在点 $p^0=(t^0, x^0)$ 的解 u 的值, 只依赖于以 p^0 为顶点的向后射线锥体 $\mathscr{D}_-(p^0)$在初始超平面上所截取的域(**依赖域** (domain of dependence)) G_0上的初始条件. 作为它的对偶命题,当在初始超平面上的点 Q_0的邻域中给予初始条件的一个变化时, 解的变化只能发生在以 Q_0 为顶点的向前射线锥体 $\mathscr{D}_+(Q_0)$ 的邻域(**影响域** (domain of influence)) 中. 具有有界系数的双曲型方程, 因为射线锥体 $\mathscr{D}_\pm(p^0)$ 与超平面 $t=$常数的交是紧的,所以解的依赖域、影响域都是有界的. 关于一般双曲型方程的这个性质,对特殊形式的方程来说,可以存在这样的情形: 其解的依赖域是上面 G_0 的真子集. 例如,对于 $n=3$ 的波动方程(3),从它的 Cauchy 问题的解的公式(12)可知,解 u 在点 $p^0=(t^0, x^0)$ 的值, 是由以 p^0 为顶点的锥面 $(t-t^0)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2$ 的邻域,也就是通过点 p^0 的所有次特征线(在此情形是直线)与初始超平面的交的邻域上的初始条件完全决定. 当 Cauchy 问题的解具有这种性质时, **Huygens 原理** (Huygens' principle) 成立, 或者说不发生波的扩散. 对于波动方程 (3), 当 n 为大于 1 的奇数时 Huygens 原理成立; 对于其他的 n, 则 Huygens 原理不成立.

【能量不等式】 在推导上述 Cauchy 问题的适定性与关于解的依赖域的性质时起着主要作用的不等式,就是把对波动方程(3)的能量守

恒定律†

$$E(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)dx_1\cdots dx_n=\text{常数}$$

一般化了的所谓能量不等式．也就是说，当设 $G(\tau)$ 为以有界函数为系数的双曲型方程(1)所确定的锥体 $K=\{(t,x)\mid\lambda_{\max}^2(t-t^1)^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^1)^2\}$ 与超平面 $t=\tau(\tau<t^1)$ 的交时，把(1)的解 $u(t,x)$ 在 $G(\tau)$ 上的 $k(\geqslant 1)$ 次能量积分定义为

$$E_\tau^{(k)}(u,G(\tau))=\int_{G(\tau)}\sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_n\leqslant k}\left|\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial t^{\alpha_0}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(\tau,x)\right|^2dx,$$

于是

$$(5)\qquad E_\tau^{(k)}(u,G(\tau))\leqslant CE_{t^0}^{(k)}(u,G(t^0)),\quad t^0\leqslant\tau<t^1$$

成立．这个不等式称为**能量不等式**(energy inequality)(J. Schauder [11])，其中 C 是与 u 无关的常数．还有，关于波动方程(3)，在定理 C) 中对初始条件的假定 $l=[n/2]+3$ 可以降低到 $[n/2]+2$．但是，如果降低到 $[n/2]+1$，则有在大范围不存在光滑解的例子． 一般说来，关于双曲型方程的 Cauchy 问题，初始条件的光滑性不能原封不动地被解所继承．但是，由(5)可知，从初始条件的能量的有界性可以导出解的能量的有界性．

【Cauchy 问题的解的表达式】 下面考虑把 Cauchy 问题的解具体表示为初始条件的泛函的公式．首先，在(4)的前提下方程(1)的求解问题，或者更一般地，在(4)的前提下方程 $L[u]=f(t,x)$ 的求解问题，可由变换未知函数 u 与应用 Duhamel 法†化为对任意的 τ 的超平面 $t=\tau$(作为初始超平面)上的 Cauchy 问题

$$(4')\qquad u(\tau,x)=0,\quad\frac{\partial u}{\partial t}(\tau,x)=\varphi(x).$$

再则，设 x 空间的维数为 n，选取正整数 q，使得 $q+n$ 为偶数，定义一个实变数 s 的函数 $\chi_q(s)$ 如下：

$$(6)\qquad \chi_q(s)=|s|^q/4(2\pi i)^{n-1}q!,\quad\text{当 } n \text{ 为奇数时},$$
$$=-s^q\log|s|/(2\pi i)^nq!,\quad\text{当 } n \text{ 为偶数时}.$$

于是，对于具有有界支集的任意光滑函数 $\varphi(x)$，下列恒等式成立([5])：

$$(7)\qquad \varphi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Delta_y^{(n+q)/2}\varphi(y)dy\times\int_{|\omega|=1}\chi_q((x-y)\omega)d\omega,$$

此处 Δ_y 是关于变量 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的 Laplace 算子，$d\omega$ 是 x 空间的单位球 $|\omega|=1$ 的面元．如果考虑到(1)是线性的，因此叠加原理†成立，那末(7)表明所考虑的 Cauchy 问题(1)，(4′)可以化为在含有参变量 y,ω 的初始条件

$$(4'')\qquad u(\tau,x)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(\tau,x)=\chi_q((x-y)\omega)$$

下的 Cauchy 问题．实际上，因为由定义 $\chi_q(s)$ 是 $q-1$ 次可微的，所以如果在定理 C) 的适用范围内把 q 选得足够大，则 Cauchy 问题(1)，(4″)的解 $R_q(t,x;\tau,y;\omega)$ 唯一存在．而且，这个 R_q 作为 (t,x,τ,y,ω) 的函数，其光滑性随着 q 一起增加。

可是，若设 $\varphi(x)$ 是具有紧支集的充分光滑的函数，考虑积分

$$(8)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\Delta_y^{(n+q)/2}\varphi(y)dy\times\int_{|\omega|=1}R_q(t,x;\tau,y;\omega)d\omega,$$

则由 R_q 的定义与(7)可知，这就是 Cauchy 问题(1)，(4′)的解．因此，在 R_q 已具体求出的情形，(8)给出了作为初始条件的泛函的 Cauchy 问题的解的表达式．因为在(8)中积分 $\int_{|\omega|=1}R_qd\omega$ 作为 (t,x,τ,y) 的函数未必 $n+q$ 次可微，所以 $\Delta_y^{(n+q)/2}\int_{|\omega|=1}R_qd\omega$ 一般并不具有函数的意义．但是，把它形式地表为 $R(t,x;\tau,y)$，显然由(8)定义了一个线性算子

(9) $$u(t,x)=\int R(t,x;\tau,y)\varphi(y)dy.$$

具有这样意义的核 $R(t,x;\tau,y)$ 称为 Cauchy 问题的**基本解** (fundamental solution)，或 **Riemann 函数** (Riemann function). 如果把当 $t\geqslant\tau$ 时定义的函数 $\int_{|\omega|=1}R_q(t,x;\tau,y;\omega)d\omega$ 的定义域扩展到 $t<\tau$，当 $t<\tau$ 时令这个函数恒等于零，于是若把 $R(t,x;\tau,y)=\Delta_y^{(n+q)/2}\times\int_{|\omega|=1}R_q(t,x;\tau,y;\omega)d\omega$ 看成是 (t,x,τ,y) 空间上的一个广义函数†，则 $L(t,x,\partial/\partial t,\partial/\partial x)R(t,x;\tau,y)=L^*(\tau,y,\partial/\partial\tau,\partial/\partial y)R\times(t,x;\tau,y)=\delta(t-\tau)\delta(x-y)$成立. 此处 L^* 表示 L 的伴随微分算子†，δ 表示 Dirac 的 δ 函数†. 也就是说，$R(t,x;\tau,y)$是在广义函数论意义下的 L 的基本解.

基本解 $R(t,x;\tau,y)$ 可由关于函数序列 $\{\chi_q(s)\}$ 的渐近展开进行详细的分析研究，下述重要结果成立：如果(1)的系数是 C^∞ 类的（或者解析的），那末基本解 $R(t,x;\tau,y)$ 就是除了(1)的通过点 (τ,y) 的所有次特征线上的点以外的 (t,x) 的 C^∞ 类的（或者解析的）函数. 用 Cauchy 问题的语言来说，就是解 u 在点 $p=(t,x)$ 的光滑性，只依赖于通过 p 的所有次特征线与初始超平面的交的邻域上所给初始条件的光滑性. 这个事实称为**广义 Huygens 原理** (Huygens's principle in wider sense). 此外，关于基本解 $R(t,x;\tau,y)$ 在间断点附近的性质也有人进行了研究([4]).

对于波动方程(3)可以求出基本解，因此可以具体地写出解的公式. 当 $n\geqslant3$ 时，(3)，(4′)的解是

$$u(t,x)=\frac{1}{(n-2)!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}\times\int_0^t(t^2-\tau^2)^{(n-3)/2}\tau Q(x,\tau)d\tau,$$

$$Q(x,\tau)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|\omega|=1}\varphi(x+\tau\omega)d\omega,$$

此处 $\omega_n=2\sqrt{\pi^n}/\Gamma(n/2)$是 n 维空间的单位球的表面积. 此外，对于 $n=1,2,3$ 的 Cauchy 问题(3)，(4)的解分别是

(10) $$u(t,x)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}u_1(\xi)d\xi\ \text{(d'Alembert 解)},$$

(11) $$u(t,x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{C_t}\frac{u_0(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2}{\sqrt{t^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}+\frac{1}{2\pi}\int_{C_t}\frac{u_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2}{\sqrt{t^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}\ \text{(Poisson 解)},$$

(12) $$u(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{D_t}\frac{u_0(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{t}d\omega_t+\frac{1}{4\pi}\int_{D_t}\frac{u_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{t}d\omega_t\ \text{(Kirchhoff 解)}.$$

此处 C_t 表示 (ξ_1,ξ_2) 平面上的、以点 (x_1,x_2) 为心、t 为半径的圆形域，D_t 表示 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) 空间中的、以 (x_1,x_2,x_3) 为心、t 为半径的球面，$d\omega_t$ 表示 D_t 上的面元.

【二阶非线性双曲型方程】 考虑对 $\partial^2u/\partial t^2$ 解出的二阶非线性偏微分方程

(13) $$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=A\left(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x_i},\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}\right),1\leqslant i,j\leqslant n,$$

在 A 关于 $\partial^2u/\partial t\partial x_i$，$\partial^2u/\partial x_i\partial x_j$ 的偏导数中分别以 $U(t,x)$ 代替 u 后得到的函数为 $a_{0i}(t,x)$，$a_{ij}(t,x)$，若以此作为线性方程 (1) 的系数，使(1)成为双曲型的，则称(13)在 $U(t,x)$ 的邻域中是**双曲型的**. 当由(4)所确定的函数$U=u_0(x)+tu_1(x)$ 以及 (13) 的右端 A 是 $t,x,u,\cdots,\partial^2u/\partial x_i\partial x_j$ 的充分光滑的函数时，如果 (13) 在 U 的邻域中是双曲型的，那末 (13) 具有初始条件(4)的 Cauchy 问题在初始超平面的适当邻域中具有唯一的解. 一般说来，对非线性方程的初值问题只有局部解存在.

【高阶双曲型方程】 关于 $n+1$ 个变量

$t, x=(x_1, \cdots, x_n)$的N阶常系数线性方程

(14) $$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant N} a_{\alpha_0\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u = 0,$$

这里 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

若满足下列两个条件：i)在L的项中有$\partial^N/\partial t^N$存在；ii)特征方程 $L(\lambda, i\xi)=0$ 的根 $\lambda=\lambda_1(\xi), \cdots, \lambda_N(\xi)$的实部是实数组 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$的有界函数，则称(14)为 **Gårding 意义下的双曲型** (hyperbolic type in Gårding's sense) 的. 在L是N阶齐次的情形，条件 ii)就成为 ii′) $\lambda_1(\xi), \cdots, \lambda_N(\xi)$对于任意的实数组 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)\neq(0, \cdots, 0)$都是纯虚数. 双曲型方程的主部(最高阶项)也是双曲型的. 如果(14)是双曲型的，那末对于(14)的具有初始条件

(15) $$\partial^k u/\partial t^k(0, x)=u_k(x), \quad 0\leqslant k\leqslant n-1$$

的 Cauchy 问题，与定理 C) 完全相同的定理成立；也就是关于(14),(15)的 Cauchy 问题在 Hadamard 意义下是适定的. 反之，那样的常系数线性方程必须满足 Gårding 意义下的双曲型条件 i), ii). 换句话说，Cauchy 问题的适定性与 Gårding 意义下的双曲性是等价条件([3]).

由于 Gårding 意义下的双曲型条件是考虑低阶项的影响的，因而不能原封不动地把它推广到变系数的情形. 可是在常系数的情形，一个N阶齐次方程，不管怎样选择$N-1$阶以下的低阶项，仍旧保持其整体是 Gårding 意义下的双曲型的充分必要条件是：它的特征方程对于任意的实数组 $\xi\neq 0$ 具有相异的N个纯虚根. 这时，特别称之为**狭义双曲型**(hyperbolic type in strict sense)的. 这样，对变系数线性方程

(16) $$L[u]=\frac{\partial^N u}{\partial t^N} + \sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant N, \alpha_0<N} a_{\alpha_0\alpha}(t, x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u=0,$$

当其特征方程 $\lambda^N+\sum_{\alpha_0+|\alpha|=N} a_{\alpha_0\alpha}(t, x)\lambda^{\alpha_0}(i\xi)^{\alpha}=0$ 对各点 $p=(t, x)$ 与各 $\xi\neq 0$ 具有N个相异的纯虚根(**特征根**(characteristic root)) $\lambda_1(t, x, \xi), \cdots, \lambda_N(t, x, \xi)$时，就称(16)为 **Петровский 意义下的双曲型** (hyperbolic type in Petrovskiĭ's sense)的. 而且，当特征根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 一致分离时，也就是 $\inf_{(t,x),|\xi|=1, j\neq k}|\lambda_j(t, x, \xi)-\lambda_k(t, x, \xi)|=c>0$ 成立时，就称(16)为**正则双曲型**(regularly type hyperbolic)的. 在二阶情形，这个定义同前面的定义是一致的. 关于正则双曲型方程的 Cauchy 问题(16),(15)，定理 C) 也成立，并且，关于解的依赖域等，由于能量不等式成立，因此，可以得到与二阶方程的情形完全相同的结果([9],[7]). 在系数是 C^∞ 类的情形，解的不连续性只沿着次特征线传播的所谓“广义 Huygens 原理”也成立.

【双曲型方程组】 对高阶线性方程组 $\sum_{j=1}^{l} L_{ij}[u_j]=0\ (1\leqslant i\leqslant l)$(这里 L_{ij} 是形如(16)的高阶线性微分算子)，通过对其 Cauchy 问题适定性的讨论可知，有好几类称为“双曲型”的方程，我们举出两个重要类型：Петровский 意义下的双曲型与 Friedrichs 对称双曲型.

首先，И. Г. Петровский 对线性方程组

(17) $$\sum_{j=1}^{l}\sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant n_j} a_{\alpha_0\alpha}^{ij}(t, x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} u_j = 0, \quad 1\leqslant i\leqslant l$$

利用微分算子的矩阵，形式地计算了

(18) $$\det\left(\sum_{\alpha_0+|\alpha|\leqslant n_j} a_{\alpha_0\alpha}^{ij}(t, x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\right),$$

当它正好作为$N\left(=\sum_{j=1}^{l} n_j\right)$阶的单个方程是 Петровский 意义下的双曲型时，就称(17)为(Петровский 意义下的)**双曲型方程组** (system of equations of hyperbolic type)，而且对此方程组证明了 Cauchy 问题是适定的([9]). 虽然在这个问题的论证中有一些缺陷，但是后来这些缺陷完全被别人弥补了(溝畑茂[8]). 另外，在常系数情形，(18)是 Gårding 意义下的双曲型，

这是对(17)的 Cauchy 问题的适定性的充分必要条件.

其次，K.O. Friedrichs 注意到在 Петровский 的研究中能量不等式起着本质的作用，他研究了使能量不等式成立的最自然的方程类型——对称双曲型方程. 对一阶线性方程组

$$(19)\qquad A_0(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}A_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+Bu,$$

当矩阵 $A_i(t,x)$ $(0\leqslant i\leqslant n)$ 为对称，并且 $A_0(t,x)$ 为正定时，就称(19)为(Friedrichs 意义下的)**对称双曲型**(symmetric hyperbolic type)的. Maxwell 方程就是一例. 对此可以证明 Cauchy 问题是适定的，以及解的依赖域是有界的，等等([2]).

以上，就双曲型方程的 Cauchy 问题作了论述，而在同物理学有联系的另一重要问题是混合初-边值问题. 也就是说，求方程的满足在 x 空间的某个区域上给定的初始条件及其边界上的边界条件的解的问题. 在这方面，已经知道关于波动方程及其直接推广的二阶双曲型方程的解的存在与唯一性定理([6]). 至于解的详细构造的研究与对一般高阶双曲型方程或者方程组的混合初-边值问题是遗留给今后的课题.

【弱双曲型算子】 我们采用下面的双曲性定义：一个 N 阶线性微分算子

$$L=\frac{\partial^N}{\partial t^N}+\sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|\leqslant N\\ \alpha_0\leqslant N-1}}a_{\alpha_0\alpha}(t,x)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\alpha_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha},$$

当对 $L[u]=0$ 具有初始条件(15)的 Cauchy 问题是在 Hadamard 意义下适定的，我们就称它为**双曲型**(hyperbolic type)的. 一个双曲型算子 L，若对任意添加的低阶项，它仍保持是双曲型的，则称为**强双曲型**(strongly hyperbolic type)的，不然则称为**弱双曲型**(weakly hyperbolic type)的.

对双曲性的一个必要条件是：所有特征根 $\lambda_j(t,x,\xi)$ 对任意的 t，x 和 ξ 都是纯虚的.

在常系数情形，双曲型算子已由 Gårding 所刻划([3]).

关于变系数算子，已知正则双曲型算子是强双曲型的. 考虑这样一个算子 L 的双曲性，在特征根的重数都是常数且至多为 2 的假定下，它不是正则双曲的，亦即假定特征多项式

$$L_N(t,x,\lambda,i\xi)=\lambda^N+\sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha|=N\\ \alpha_0\leqslant N-1}}a_{\alpha_0\alpha}(t,x)\lambda^{\alpha_0}(i\xi)^{\alpha}$$

可分解为

$$L_N(t,x,\lambda,i\xi)=\prod_{j=1}^{s}(\lambda-\lambda_j(t,x,\xi))^2\times\prod_{j=s+1}^{N-s}(\lambda-\lambda_j(t,x,\xi)),$$

$$\inf_{\substack{(t,x)\\ |\xi|=1,\,j\neq k}}|\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_k(t,x,\xi)|=c>0.$$

考虑到前面的说明，我们假定 $\lambda_j(t,x,\xi)$，$j=1,2,\cdots,N-s$，都是纯虚的.

于是，L 是双曲型的充分必要条件是它满足 E. E. Levi 条件，即

$$l_j(t,x,\xi)=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L_N}{\partial\lambda^2}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t}+\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2 L_N}{\partial\lambda\partial\xi_\alpha}\frac{\partial\lambda_j}{\partial x_\alpha}\right)+L_{N-1}\right]_{\lambda=\lambda_j}=0$$

对所有的 t,x,ξ，$j=1,2,\cdots,s$，

这里 L_{N-1} 表示 L 的低阶项的 $N-1$ 阶的齐次部分(溝畑茂和大矢勇次郎[23]). 这样，对一个具有变系数的弱双曲型算子，甚至其主部也不一定是双曲型的.

J. Chazarain ([20]) 研究了具有任意常数重数的特征根的弱双曲型算子. 至于具有非常数重数的弱双曲型算子，我们只举出 O. A. Олейник 关于二阶算子的工作[24].

【双曲型算子的隙窝】 双曲型算子的基本解的隙窝理论是由 Петровский 开创的([10])，在 Atiyah, Bott 和 Gårding 的一篇文章([18]) 中得到了进一步的发展.

设 $P(\xi)=a(\xi)+b(\xi)$ 是关于向量 $\theta\in\boldsymbol{R}^n-0$ 的一个双曲多项式，这里 $a(\xi)$ 是 P 的主部；这是指当 $|\mathrm{Im}\,t|$ 充分大时，$a(\theta)\neq0$ 和 $P(\xi+t\theta)\neq0$. 于是 P 有一个下列形式的基本解 $E=E(P,\theta,x)$：

$$E(P, \theta, x) = (2\pi)^{-n} \times \int P(\xi - ic\theta)^{-1} e^{ix(\xi - ic\theta)} d\xi,$$

这里 c 充分大且积分是在广义函数意义下考虑的. E 的支集的凸包是一个锥面，记为 $K = K(P, \theta) = K(A, \theta)$，它只依赖于复超曲面 A: $a(\xi) = 0$ 的实部 ReA 且包含在原点和半空间 $x \cdot \theta > 0$ 的并集中. 设 A_ξ 是被迁移到原点的 A 在 ξ 的切线劈锥曲面，且由对 $\xi \neq 0$ 的所有 $K(A_\xi, \theta)$ 的并集定义了波前曲面 $W(A, \theta)$. 于是可以证明: $E(P, \theta)$ 和所有 $E(a^k, \theta)$ 的奇支集都包含在 $W(A, \theta)$ 中，而且它们在 W 之外是局部全纯的. 在 [18] 中，Herglotz-Петровский-Leray 公式被推广到任意非精确的 $a(\xi)$. 这样，当 $x \in K(A, \theta) - W(A, \theta)$ 时，我们有

$$(20) \quad D^\beta E(a^k, \theta, x) = C \int_{\alpha^*} (x \cdot \xi)^q \xi^\beta a(\xi)^{-k} \omega(\xi), \ q > 0,$$

$$(20') \quad D^\beta E(a^k, \theta, x) = C \int_{t_x \cdot \partial\alpha^*} (x \cdot \xi)^q \xi^\beta a(\xi)^{-k} \omega(\xi), q \leq 0.$$

这里，C 为常数，$q = mk - |\beta| - n$ 是左端齐次性的次数，m 是 $a(\xi)$ 的次数，$\omega = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \xi_j d\xi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \cdots \wedge d\xi_n$. 被积函数是 $n-1$ 维复射影空间上的闭有理的 $(n-1)$ 形式，且在某些同调类 $\alpha^* = \alpha(A, \theta, x)^*$ 和 $t_x \cdot \partial\alpha^*$ 上积分. 这些公式提供了获得隙窝的拓扑准则的手段. 若 $E(P, \theta, x)$ 是一个整函数在 L 中的限制(等于 0)，则称 $K(A, \theta) - W(A, \theta)$ 的一个连通分量 L 为 P 的一个**弱的(强的)隙窝**(weak (strong) lacuna). 在[18]中证明了，当且仅当 $\partial\alpha^* = 0$ 时，x 属于对所有 $E(a^k, \theta, \cdot)$ 的一个弱隙窝. 充分性可直接由(20′)导出，必要性则由 A. Grothendieck [21] 的一个定理导出，这个定理是说: 在 (20′)中出现的有理形式张成所讨论的所有上同调类.

【混合初-边值问题】 设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中具有充分光滑的边界 Γ 的一个域，设 $L(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x)$ 是定义在 $[0, \infty) \times \bar{\Omega} = \{(t, x) | t \in [0, \infty), x \in \bar{\Omega}\}$ 中的一个 N 阶线性双曲型算子，且设 $B_j(t, x, \partial/\partial t, \partial/\partial x)$, $j = 1, 2, \cdots, b$, 是定义在 $[0, \infty) \times \Gamma$ 的一个邻域中的 N_j 阶线性微分算子.

求一个函数 $u(t, x)$ 满足条件:

$$(21) \quad \begin{aligned} &L[u] = 0 \quad 在 \ (0, \infty) \times \Omega \ 中, \\ &B_j[u] = 0 \quad 在 \ (0, \infty) \times \Gamma \ 上, \\ &\qquad j = 1, 2, \cdots, b, \\ &\partial^k u / \partial t^k (0, x) = u_k(x), \ 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned}$$

的问题称为**混合初-边值问题**(mixed initial-boundary value problem). 混合问题的一个典型例子是 $L = \square \ (n = 2)$ 和 $B[u] = u(t, x)$，它描述具有固定边界的膜的振动.

如果对任意的与边界条件相容的初始数据 $u_k(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ 都存在唯一的解 $u(t, x) \in C^\infty([0, \infty) \times \bar{\Omega})$，则称混合问题(21)为适定的.

对二阶双曲型方程的混合问题在 [6] 中考虑了. 关于高阶双曲型方程的混合问题，我们作如下四个假定: (i) $\Omega = \boldsymbol{R}_+^n = \{(x', x_n) | x' \in \boldsymbol{R}^{n-1}, x_n > 0\}$, (ii) $\Gamma = \{x | x_n = 0\}$ 对 L 或 B_j 不是特征的，(iii) L 是正则双曲型的，(iv) $N_j \leq N - 1$ 且 $N_j \neq N_k$ 当 $j \neq k$.

我们把 L 和 B_j 的主部分别表示为 $L_N(t, x', x_n, \partial/\partial t, \partial/\partial x', \partial/\partial x_n)$ 和 $B_{j0}(t, x', \partial/\partial t, \partial/\partial x', \partial/\partial x_n)$. 由 L 的双曲性，对 κ 的一个方程

$$L_N(t, x', 0, \lambda, \xi', \kappa) = 0$$
$$对 \ \mathrm{Im}\lambda < 0, \ \xi' \in \boldsymbol{R}^{n-1}$$

有 μ 个 $\mathrm{Im}\kappa_j^+ > 0$ 的根 κ_j^+ 和 $N - \mu$ 个 $\mathrm{Im}\kappa_j^- < 0$ 的根 κ_j^-，数 μ 与 (t, x') 及 (λ, ξ') 无关. 对混合问题(21)的适定性的一个必要条件是: 边界条件的个数与这个整数 μ 相符. 由下式定义的函数 R 称为 Лопатинский 行列式:

$$R(t, x', \lambda, \xi') = \det\left[\oint_C \frac{B_{j0}(t, x', \lambda, \xi', \kappa)\kappa^{i-1}}{L^+(t, x', \lambda, \xi', \kappa)} d\kappa\right]_{j,i=1,2,\cdots,\mu},$$

这里 $L^+ = \prod_{j=1}^{\mu} (\kappa - \kappa_j^+(t, x', \lambda, \xi'))$, C 是把所有 κ_j^+ 都包含在其内的周线.

若

$$\inf_{\substack{(t,x'),\,\mathrm{Im}\lambda<0\\|\xi'|+|\lambda|=1}} |R(t, x', \lambda, \xi')| = c > 0,$$

那末就说，L 和 B_j 满足一致的 Лопатинский 条件. 当满足一致的 Лопатинский 条件时，混合问题 (21) 是适定的，且 (21) 表示了具有有限传播速度的一个现象，这是和对 $L[u]=0$ 的 Cauchy 问题的现象一样的 (T. Balaban [19], H. O. Kreiss [22], 和 R. Sakamoto [25]). 在具有紧边界 Γ 的一个域 Ω 的情形，如果 L 和 B_j 在 Γ 的每一点上满足一致的 Лопатинский 条件，则类似的结果成立.

在处理不满足一致的 Лопатинский 条件的 L 和 B_j 的混合问题时，对常系数算子在 $\Omega=\boldsymbol{R}^n_+$ 的情形的适定问题已有描述. 但是，对一般域来说，混合问题的适定性，不仅依赖于 Лопатинский 行列式的性质，而且也依赖于域的形状.

【参】 [1] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II, Interscience, 1962 (中译本: R. 柯朗, D. 希尔伯特, 数学物理方法 II, 科学出版社, 1977); [2] K. O. Friedrichs, Symmetric hyperbolic linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **7** (1954), 345—392; [3] L. Gårding, Linear hyperbolic equations with constant coefficients, Acta Math., **85** (1951), 1—62; [4] J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, 1932; [5] F. John, Plane waves and spherical means applied to partial differential equations, Interscience, 1955; [6] M. Krzyzanski-J. Schauder, Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus, Gemischte Randwertaufgaben, Studia Math., **6** (1936), 162—189; [7] J. Leray, Hyperbolic differential equations, Lecture notes, Princeton, 1952; [8] 溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波, 1965; [9] I. G. Petrovskiĭ (И. Г. Петровский), Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen, Mat. Sb., **2** (44)(1937), 815—870; [10] I. G. Petrovskiĭ (И. Г. Петровский), On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations, Mat. Sb., **17** (59) (1945), 289—370; [11] J. Schauder. Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, Fund. Math., **24** (1935), 213—246; [12] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа вматематической физике, Ленинград. Государ. Унив., Ленинград, 1950 (中译本: С. Л. 索伯列夫, 泛函分析在数学物理中的应用, 科学出版社, 1959); [13] M. Yamaguti (山口昌哉), On the a priori estimate for solutions of the Cauchy problem for some non-linear wave equations, J. Math. Kyoto Univ., **2** (1962), 55—60; [14] R. Courant - K. O. Friedrichs, Supersonic flow and shock waves, Interscience, 1948; [15] J. S. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, Hermann, 1903 (Chelsea, 1949); [16] F. John, Partial differential equations, Springer, 1971; [17] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Гостехиздат, 1953, (中译本: И. Г. 彼得罗夫斯基, 偏微分方程讲义, 高等教育出版社, 1956); [18] M. F. Atiyah- R. Bott - L. Gårding, Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients, I and II, Acta Math., **124** (1970), 109—189; **134** (1973) 145—206; [19] T. Balaban, On the mixed problem for a hyperbolic equation, Mem. Amer. Math. Soc., no. **112** (1971); [20] J. Chazarain, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier, **24** (1974), 173—202; [21] A. Grothendieck, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Publ. Math. Inst. HES, **29** (1966), 351—359; [22] H. O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 277—298; [23] S. Mizohata (溝畑茂)-Y. Ohya(大矢勇次郎), Sur la condition de E. E. Levi concernant des équations hyperboliques, Publ. Res. Inst. Math. Sci. (Kyoto), (A) **4** (1968), 511—526; Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples II, Jap. J. Math., **40** (1971), 63—104; [24] O. A. Oleĭnik (O. A. Олейник), On the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Comm. Pure Appl. Math., **23** (1970), 569—586; [25] R. Sakamoto (坂本礼子), Mixed problems for hyperbolic equations, I and II, J. Math. Kyoto Univ., **10** (1970), 349—373, 403—417; [26] B. Я. Иврий- B. M. Петков, Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений, Успехи Матем. Наук, **29**(1974), 5 (179), 3—70.

抛物型偏微分方程 [英 partial differential equation of parabolic type 法 équation aux dérivées artielles du type parabolique 德 partielle Differepntialgleichung vom parabolischen Typus 俄 дифференциальное уравнение с частными производными параболического типа 日 放物型偏微分方程式] 关于自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数 u 的二阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}=f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad a_{ik}=a_{ki},$$

当在一个域的各点上有 $\det(a_{ik})=0$ 时，就称这个方程为**抛物型偏微分方程**.

【热传导方程】 在抛物型偏微分方程论中最初处理的方程之一，是最简单的具有代表性的**热传导方程** (equation of heat conduction)

$$L[u]\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{1}$$

(1)又称为**热方程** (heat equation). 从物理意义考虑，就是要求在 $a\leqslant x\leqslant b, t>0$ 上满足方

程(1),并且满足边界条件与初始条件

$$(2)\qquad u(a,t)=u(b,t)=0,\quad \lim_{t\downarrow 0}u(x,t)=\varphi(x),\quad a<x<b$$

的连续解 $u(x,t)$. 考虑两端为 $x=a$, $x=b$ 的金属杆的温度分布,初始(当 $t=0$ 时)温度分布为 $\varphi(x)$,金属杆的两端接触零度的恒温槽(因此 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$),在这些条件下,试求时刻 t 金属杆上点 x 的温度 $u(x,t)$. Fourier 指出,这个问题的解是把特解 $u_n=\sin\sqrt{\lambda_n}(x-a)\exp(-\lambda_n t)$ 叠加起来所得的 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n$. 此处 λ_n 是 $\sin\sqrt{\lambda_n}(b-a)=0$ 的根,c_n 应该由 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n(x,0)=\varphi(x)$ 来确定. 实际上,如果 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,那末上面的 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n u_n(x,t)$ 就是所要求的解. 于是,这个问题就化为把给定的函数 $\varphi(x)$ 展开为 Fourier 级数的问题.

无限长的金属杆的温度分布,是由当 $t>0$ 时满足(1),而对于给定的初始温度分布 $\varphi(x)$ 满足

$$(3)\qquad \lim_{t\downarrow 0}u(x,t)=\varphi(x)$$

的连续解 $u(x,t)$所给出. 也就是说,如果$\varphi(x)$有界,那末

$$(4)\qquad u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)e^{-(\alpha-x)^2/4t}d\alpha,\quad \text{当 } t>0 \text{ 时},$$
$$=\varphi(x),\qquad \text{当 } t=0 \text{ 时}$$

就是由(1)的特解 $e^{-(\alpha-x)^2/4t}$ 的叠加而得到的.

可是,抛物型偏微分方程之所以重要,不仅是由于包含有热传导方程,而且也由于包含有描述扩散†过程的方程(假定 t 为时间,见后面(24′)). 因为描述随机过程†的 Fokker -Planck 方程† 与扩散方程(24′)具有相同形式,所以抛物型方程在概率论的解析处理中也就出现了(→随机过程,公式 15).

【两个变量的抛物型偏微分方程】 下面以两个自变量的抛物型偏微分方程

$$(5)\qquad a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+c(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+f\left(x,t,u\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0,\quad ac=b^2$$

作为主要对象来论述. 因为在使得 $|a|+|c|>0$ 的某域中,(5)可在适当变量变换 $\xi=U(x,t)$, $\tau=V(x,t)$ 下变成 $\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi^2}+F\left(\xi,\tau,\omega,\frac{\partial\omega}{\partial\xi},\frac{\partial\omega}{\partial\tau}\right)=0$ 的形式,所以,不失一般性,可以认为方程的标准型是:

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial t}\right)=0.$$

这个方程的特征曲线†由

$$(7)\qquad t=\text{常数}$$

给出. 关于(6),我们考虑下面四种具有代表性的问题.

第一种问题是,给定处处都不与特征曲线相切的曲线 C,指定 C 上 u 的值和沿 C 的法线 n 方向的导数 $\partial u/\partial n$ 的值,或者这两者之间的线性关系,来求与此相应的解 $u(x,t)$ 的问题. 例如,设 $g(t)$,$h(t)$ 是给定的函数,求使得$u(x_0,t)=g(t)$, $u_x(x_0,t)=h(t)$ 的解 $u(x,t)$ 的问题. E. Holmgren 指出,当方程为

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

域为 $a<t<b$, $x_0\leqslant x$,并且在此域上$g'(t)$有界连续时,使得

$$(9)\qquad \lim_{x\downarrow x_0}u(x,t)=g(t),\quad \lim_{x\downarrow x_0}u_x(x,t)=h(t)$$

的解 $u(x,t)$ 存在的充分必要条件是

$$(10)\qquad h(t)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_a^t\frac{g'(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=k(t)$$

无限次可微,并且存在正的常数 M, r, 使得

$$(11)\qquad |k^{(n)}(t)|\leqslant M(n!)^2/r^n$$

成立.

第二种问题是,当域的形式为

$$(12)\qquad \varphi_1(t)\leqslant x\leqslant\varphi_2(t),\ t_1<t<t_2$$

时，求 (6) 的解，使得它在靠近这个域的边界时取给定值的问题．此处设 $x=\varphi_1(t)$，$x=\varphi_2(t)$ 是与特征曲线(7)不相切的曲线．M. Gevrey 指出，对于 (8) 如果这样的解存在，那末 $\varphi_1(t)$ 与 $\varphi_2(t)$ 就必须满足指数 $\alpha>1/2$的 Hölder 条件：对于充分小的 h，

$$(13)\qquad |\varphi_i(t+h)-\varphi_i(t)|\leqslant c|h|^{\alpha},\quad c=\text{常数}$$

成立．特别是，在满足这个条件的 $\varphi_1(t)=$ 常数，$\varphi_2(t)=$ 常数的情况，就是最初论述的热传导问题．

第三种问题是，对于上面那样的域，例如，

$$(12')\qquad a\leqslant x\leqslant b,\ t>0,$$

求(6)的解，使得它满足下列条件：

$$(14)\qquad \lim_{t\downarrow 0}u(x,t)=\varphi(x),$$

在 $x=a$ 处 $\partial u/\partial x-hu=0$，$h=$ 常数 >0，在 $x=b$ 处 $\partial u/\partial x+Hu=0$，$H=$ 常数 >0．对于 (8) 而言，这也是热传导问题．如果 $\varphi(x)$ 具有连续导数，那末这个解就可展开成

$$(15)\qquad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x),$$

$$c_n=\int_a^b\varphi(x)\varphi_n(x)dx.$$

此处 $\varphi_n(x)$ 是

$$(16)\qquad d^2\varphi_n(x)/dx^2=-\lambda_n\varphi_n(x)$$

的满足边界条件

$$(17)\qquad \varphi_n'(a)-h\varphi_n(a)=0,\quad \varphi_n'(b)+H\varphi_n(b)=0$$

的正规化了 $\left(\int_a^b\varphi_n^2(x)dx=1\right)$ 的解．

第四种问题是：求一个函数 $u(x,t)$，使得它当 $t>0$ 时满足 (6) 且满足初始条件 $\lim_{t\to 0}u(x,t)=\varphi(x)$．这相应于无限长杆的热传导问题．

【Green 公式】 (1)中所给微分式 $L[u]$ 的伴随微分式†是

$$(18)\qquad M[v]\equiv\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial t},$$

利用分部积分，对于由曲线 C 所包围的域 G，沿着 C 的正方向作曲线积分，则有

$$(19)\qquad \iint_G(\psi L[\varphi]-\varphi M[\psi])\,dx\,dt=\int_C\varphi\psi\,dx+\int_C\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)dt$$

成立．我们把此式称为关于抛物型偏微分方程 (1) 的 **Green 公式**．同椭圆型偏微分方程的情形 (→椭圆型偏微分方程) 相类似，可以利用这个公式来证明 (1) 的解的唯一性和推导它的解的表达式．

例如，对于解的唯一性可证明如下：在图 1 中设曲线 $\widehat{AD}$，$\widehat{BE}$ 与特征曲线只在一点相交．在闭域 $(ABED)$ 上连续，在 $\widehat{AD}$，$\widehat{BE}$ 及直线 $\overline{AB}$ 上为 0，而且在域 $(ABED)$ 除掉 AB 外的地方满足 (1) 的解 $u(x,t)$ 恒等于 0．这是因为在 (19) 中令 $\psi\equiv 1$，$\varphi=u^2$，设域 G 为 $(ABQP)$，则得

$$2\iint_G\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx\,dt+\int_{\overline{PQ}}u^2dx=0.$$

如果把 Green 公式由 (1) 推广到一般的线性抛物型方程，那末可以用类似的方法证明上述四个问题的解的唯一性．

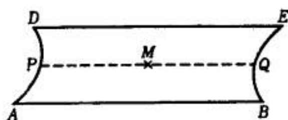


图 1

其次，为了得到解的表达式，可按下述方式进行：设 $u(x,t)$ 为(1)的解，取(1)的特解

$$(20)\qquad U(\alpha,\beta,x,t)=\frac{1}{\sqrt{\beta-t}}e^{-(\alpha-x)^2/4(\beta-t)},$$

在域 $(PABQMP)$ 上应用 Green 公式．设 h 为正数，M 的坐标为 (x_0,t_0)，设 $\varphi=u(x,t)$，$\psi=U(x_0,t_0+h,x,t)$，则有

$$\int_{\overline{PQ}}u(x,t_0)e^{-(x_0-x)^2/4h}\frac{dx}{\sqrt{h}}=\int_{\overline{PABQ}}u(x,t)U(x_0,t_0+h,x,t)dx+\left(U\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial U}{\partial x}\right)dt.$$

令 $h\downarrow 0$，则左端收敛于 $2\sqrt{\pi}\,u(x_0,t_0)$，因此，

得到 $u(x_0, t_0)$ 的表达式

$$(21)\quad u(x_0, t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\overline{PABQ}} u(x,t)U(x_0,t_0,x,t)dx + \left(U\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial U}{\partial x}\right)dt.$$

也就是说，$u(x_0, t_0)$ 是当知道 u 及 $\partial u/\partial x$ 在一部分边界 $\overline{PABQ}$ 上的值后，把特解(20)叠加起来所得到的结果. 因为(20)与关于 Laplace 方程 $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$ 的基本解 $\log r$ $(r = ((\alpha-x)^2+(\beta-y)^2)^{1/2})$ 起着同样的作用，所以把(20)称为(1)的**基本解** (fundamental solution).

【Laplace 变换解法】 例如，对于 $t>0$ 的(1)的解 $u(x,t)$ 施行 Laplace 变换†

$$(22)\quad v(x,\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}u(x,t)dt,\ \lambda>0,$$

则由分部积分可得

$$(23)\quad \int_0^\infty e^{-\lambda t}u_t(x,t)dt = [e^{-\lambda t}u(x,t)]_{t=0}^{t=\infty} + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}u(x,t)dt = -\varphi(x)+\lambda v(x,\lambda)$$

(这里假定了 $\lim_{t\to\infty}e^{-\lambda t}u(x,t)=0$, $\lim_{t\downarrow 0}u(x,t)=\varphi(x)$)，利用(1)消去 t 得到

$$(23')\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \lambda v(x,\lambda) - \varphi(x).$$

从这个解 $v(x,\lambda)$ 再施行 Laplace 变换(22)的反演，就求出 $u(x,t)$ 了. 这种考虑，也可以应用到 n 个变量的常系数线性抛物型方程上去，例如应用于

$$(24)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}.$$

【一般的抛物型偏微分方程】 关于把(24)一般化了的方程

$$(24')\quad \frac{\partial u}{\partial t} = Au$$

(设 A 是关于变量 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 的椭圆型偏微分算子，由其二阶偏导数 $\partial^2u/\partial x_i\partial x_j$ 的系数 $a_{ij}(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 所构成的行列式在给定区域上是正的) 不能直接应用 Laplace 变换，但是代替它可以应用线性算子的单参数的半群理论(→线性算子)而得到同上面类似的结果. 也就是说，如果适当地假定区域和靠近其边界时 u 的边界条件，那末可以证明

$$(25)\quad v(x_1,\cdots,x_{n-1},\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}u(x_1,\cdots,x_{n-1},t)dt,\ \lambda>0$$

满足椭圆型方程

$$(25')\quad Av = \lambda v - \varphi,$$
$$\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1}) = \lim_{t\downarrow 0}u(x_1,\cdots,x_{n-1},t).$$

在这种情形，相应于上述 Laplace 变换的反演的过程如下所述： 在某些条件下，v 由 φ 唯一地确定，令 $\lambda = mt^{-1}$ 且从 φ 出发，把从 φ 得到 $\lambda v = mt^{-1}v$ 的过程重复 m 次，令 $m\to\infty$，则得到使 $\lim_{t\downarrow 0}u(x_1,\cdots,x_{n-1},t) = \varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 的解 $u(x_1,\cdots,x_{n-1},t)$.

考虑方程(24')，设 $x=(x_1,\cdots,x_{n-1})$ 的变化域为 D(不一定有界)，D 的边界为充分光滑的超曲面 S，则关于求满足初始条件与边界条件

$$(14')\quad \lim_{t\downarrow 0}u(x,t) = \varphi(x),\ x\in D$$
$$\partial u(x,t)/\partial n_x + h(x,t)u(x,t) = f(x,t),\quad x\in S$$

($\partial/\partial n_x$ 是在 $x\in S$ 处的 S 的外法线方向上的导数，并且 $h(x,t)\geqslant 0$) 的解的问题，已知有下面的结果. 此处(24')中 A 的系数也可以是与 t 有关. i) 存在 x, t 的函数 $u = U(\xi,\tau,x,t)$ $(x,\xi\in D, t>\tau\geqslant 0)$ 满足方程(24')与齐次边界条件(14')(即 $\varphi=0, f=0$)，ii) 函数 $u(x,t)$：

$$(21')\quad u(x,t) = \int_D \varphi(\xi)U(\xi,0,x,t)d\xi + \int_0^t d\tau\int_S f(\xi,\tau)\left(U(\xi,\tau,x,t) - \frac{\partial U(\xi,\tau,x,t)}{\partial n_\xi}\right)dS_\xi$$

是(24')的解且满足(14'). 也就是说，$U(\xi,\tau,x,t)$ 是函数(20)的一般化，称为关于边界条件(14')的线性抛物型方程(24')的**基本解**. 基本

解除具有上述性质外，还满足 $U(\xi,\tau,x,t)\geqslant 0$，$\int_D U(\xi,\tau,z,\omega)U(z,\omega,x,t)dz=U(\xi,\tau,x,t)$ $(\tau<\omega<t)$，又由于在某些条件下有 $\int_D U(\xi,\tau,x,t)dx=1$，因此它在概率论上具有重要的意义(→扩散过程)。

就抛物型方程 (24′) 而言，可以证明：弱解†就是真解†．也就是说，若 $u(x,t)$ 是局部可积的函数，且对于在 $(0,\infty)\times D$ 中为二次连续可微、在 D 的紧子集之外恒等于 0 的任意函数 $\varphi(x,t)$ 有

$$\int_0^\infty\int_D u(x,t)\left(\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t}-A^*\varphi(x,t)\right)dx\,dt=0$$

(A^* 是 A 的伴随偏微分算子，$dx=dx_1\cdots dx_{n-1}$)，那末 $u(x,t)$ 是在 $(0,\infty)\times D$ 中(24′)的通常意义下的解．特别当 A 中的系数无限次连续可微时，若 $u(x,t)$ 是 (24′) 的广义函数意义下的任意解，则 $u(x,t)$ 就是真解 (→广义函数)．

特别是，若 A 与边界条件(14′)中的 h 都与 t 无关，则基本解 $U(\xi,\tau,x,t)$ 当 ξ,x 固定时只是 $t-\tau$ 的函数，且可写成 $U(\xi,x;t-\tau)$ $(t>\tau)$的形式．更有，如果 A 是自伴的†，那末存在一个特征函数 $\phi_p(x;\lambda)$ $(A\phi_p+\lambda\phi_p=0)$ 的族 $\{\phi_p\,|\,p=1,2,\cdots\}$ 与实轴上的测度族 $\{\rho_p(\Lambda)\}$，使得基本解可写成

$$U(\xi,x;t)=\sum_{p=1}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda t}\phi_p(\xi;\lambda)\phi_p(x;\lambda)d\rho_p(\lambda).$$

这时，(24′)的满足在 $f(x,t)\equiv 0$情况下的(14′)的解 $u(x,t)$，可以展开成

$$u(x,t)=\sum_{p=1}^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda t}\phi_p(x;\lambda)\varphi_p(\lambda)d\rho_p(\lambda),$$

此处

$$\varphi_p(\lambda)=\int_D\phi_p(x;\lambda)\varphi(x)dx$$

($\varphi(x)$ 是在(14′)中所给定的函数)．

以上的事实在适当的条件下，也可以推广到 A 是一般的偶数阶线性椭圆型偏微分算子的情形．

【参】 [1] L. Bers-S. Bochner-F. John, Contributions to the theory of partial differential equations, Ann. of Math. Studies. **33** (1954); [2] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II, Interscience, 1962 (中译本：R. 柯朗、D. 希尔伯特，数学物理方法 II，科学出版社，1977); [3] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace Transformation, Springer, 1937; [4] G. F. D. Duff, Partial differential equations, Toronto, 1956; [5] M. Gevrey, Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, J. Math. Pures Appl., (6) **9** (1913), 305—471, **10** (1914), 105—148; [6] E. Goursat, Cours d'analyse mathématique III, Gauthier-Villars, 1923; [7] А. М. Ильин-А. С. Калашников-О. А. Олейник, Линейные уравнения второго порядка параболического типа, Успехи Матем. Наук, **17** (1962), вып. 3 (105), 3—146; [8] S. Itô (伊藤清三), Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems, Japan J. Math., **27**(1957),55—102; [9] 福原満洲雄，偏微分方程式論，岩波講座数学，1935; [10] 犬井鉄郎，応用偏微分方程式論，岩波，1951; [11] 吉田耕作，微分方程式の解法，岩波全書，1954; [12] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, Наука, 1964; [13] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, 1964; [14] О. А. Ладыженская - В. А. Солонников - Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, Наука, 1967; [15] J. L. Lions, Equations différentielles opérationelles et problèmes aux limites, Springer, 1961; [16] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, Наука, 1964(英译本：S. D. Eidel'man, Parabolic systems, North-Holland, 1969).

混合型偏微分方程 [英 partial differential equation of mixed type 法 équation aux dérivées partielles du type mixte 德 partielle Differentialgleichung vom gemischten Typus 俄 дифференциальное уравнение с частными производными смешанного типа 日 混合型偏微分方程式]

二阶拟线性偏微分方程，当在所考虑问题中的区域的某一部份是椭圆型†，而在其他部分是双曲型†时，就称为**混合型** (mixed type) 的，例如，无粘性的可压缩流体的定常的二维无旋运动方程就是：

$$(1)\qquad \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\frac{2uv}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

这里 φ 为速度势，$u=\partial\varphi/\partial x$，$v=\partial\varphi/\partial y$ 为速度分量，c 为局部音速，它是速度 $q=(u^2+v^2)^{\frac12}$ 的函数．因为 (1) 在 $q<c$，即**亚音速**

(subsonic) 的点上是椭圆型的,在 $q > c$, 即**超音速** (supersonic) 的点上是双曲型的,所以在流动中亚音速的点与超音速的点共存时就是混合型. 随着高速喷气飞机的发展,使得混合型偏微分方程的研究变得重要起来了.

【Чаплыгин 方程】 由于方程(1)是非线性的,因而原封不动地去处理是困难的,但是若把 q 与 $\theta = \arctan(v/u)$ 取作自变量 (速端曲线变换†),则(1)便成为

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - K(x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \ xK(x) \geqslant 0$$

的形式. 我们把(2)称为 **Чаплыгин 方程** (Čaplygin's equation). 方程(2)当 $x > 0$ 时为双曲型,当 $x < 0$ 时为椭圆型. 对于混合型方程,即使是线性的,同椭圆型或者双曲型这种定型的方程比较,处理起来也有着显著的困难. 而更一般形式的混合型偏微分方程的研究尚未进行,直到现在所进行的研究几乎全是关于方程(2)或者它的形式稍有变化的方程的.

【Tricomi 方程】 混合型偏微分方程(2)的最简单的情形是

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

这个方程称为 **Tricomi 方程** (Tricomi's equation). 关于(3), F. G. Tricomi 考虑了如下的边值问题. 在图 1 中,曲线 AC, BC 是(3)的特征曲线†, σ 是连结 A, B 的 Jordan 曲线. 要求在由 BC, AC 及 σ 围成的区域 D 上满足(3)、在特征曲线之一例如 AC 及曲线 σ 上取给定的边界值的函数 z. 这个问题称为 **Tricomi 问题** (Tricomi's problem). Tricomi 在关于曲线 σ 的形式及边值的光滑性的某些条件下,证明了他的问题的解的存在与唯一性. Tricomi 以

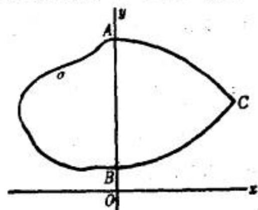


图 1

后,对于(2)的 Tricomi 问题或者同它类似的边值问题,已经有很多人作了研究([2]).

对于混合型偏微分方程也考虑下述问题. 求(3)(或者(2))的解 z, 使之在方程的椭圆型域与双曲型域的边界 $x = 0$ 上满足初始条件

$$z(0, y) = z_1(y), \ \frac{\partial z}{\partial x}(0, y) = z_2(y),$$

这样的问题称为**奇异初值问题** (singular initial value problem). S. Bergman 在函数 $z_1(y)$, $z_2(y)$ 为实解析的假定下,建立了(3)的奇异初值问题的解的积分表达式([3]).

【Friedrichs 的研究】 对混合型偏微分方程的研究,若能有不受所谓椭圆型、双曲型的分类限制的偏微分方程的边值问题的一般理论,那是最好不过的了. 但是,对于椭圆型偏微分方程的 Dirichlet 问题,双曲型偏微分方程的 Cauchy 问题等,因为按方程的型分别给定的"适定的"边界条件不同,解的解析性质也不同,所以,建立上述意义下的一般理论的问题从来被看作是困难的. K. O. Friedrichs 是解决这个问题的第一个有贡献的人([4]). 他注意到 Dirichlet 问题与 Cauchy 问题的处理方法虽然很不相同,但是有一个共同点,即在证明解的唯一性时都利用的所谓能量积分,他以此为手段把包含椭圆型、双曲型、抛物型,还有 Tricomi 方程等各个方程的适定的边值问题归结为被他称为**正对称组** (symmetric positive system) 的一阶偏微分方程组的"可容许"边值问题,成功地进行了统一的论证. 但是, Friedrichs 的理论中有一个困难,就是没有给出为把给定方程的给定边值问题化为正对称组的可容许问题的统一方法. 比(3)或者(2)更复杂形式的混合型偏微分方程用 Friedrichs 的理论来处理是否可行,尚不得而知.

推广 Tricomi 方程或者 Чаплыгин 方程到三个以上变量的情形、高阶的情形或者方程组的情形等等的研究也多少有些工作. 例如,

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} + \frac{t}{|t|}\frac{\partial z}{\partial t} = 0 \ ([5]),$$

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{y}{|y|}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n z = 0 \ ([6])$$

(б) $G(y)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-K(y)z=h$ ([7]),

$z=(z_1,\cdots,z_n)$, $G(y)$, $K(y)$ 为对称矩阵等等就是.

【参】 [1] F. Tricomi, Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di typo misto, Atti Accad. Naz. Lincei, **14** (1923), 133—248 (中译本: F. 特里谷米, 论二阶混合型偏微分方程,科学出版社,1957); [2] L. Bers, Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, John Wiley. 1958; [3] S. Bergman, An initial value problem for a class of equations of mixed type, Bull. Amer. Math. Soc., **55** (1949). 165—174; [4] K. O. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., **11** (1958), 333—418; [5] А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа в многомерных областях, Докл. Акад. Наук, СССР, **110** (1956), 901—902; [6] В. И. Жегалов, Краевая задача для уравнения смешанного типа высшего порядка, Докл. Акад. Наук, СССР, **136** (1961), 274—276; [7] В. П. Диденко, О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного типа, Докл. Акад. Наук, СССР, **144** (1962), 709—712. [8] А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Академия Наук СССР, 1959 (英译本: Equations of the mixed type, Pergamon, 1964.)

Green 函数 [英 Green function 法 fonction de Green 德 Greensche Funktion 俄 функция Грина 日 グリーン関数] Green 函数出现在常微分方程与椭圆型†或者抛物型†偏微分方程的边值问题中. 作为一个例子, 考虑三个变量的 Laplace 算子 $L[u]\equiv(\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2)u$ 的边值问题. 设域 D 是具有光滑边界 S 的有界域, 给定了边界 S 上的齐次边界条件 B): $u(x)=0\ (x\in S)$ (第一类) 或者 $\partial u/\partial n+\beta u=0(x\in S)$ (第三类). 此处 n 为外法线, $\beta(x)\geqslant 0$, $\beta(x)\not\equiv 0$. 满足下列条件的函数 $g(x_1,x_2,x_3;\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ 称为关于算子 L (或者偏微分方程 $L[u]=0$) 与边界条件 B) 的 **Green 函数** (以下把 (x_1,x_2,x_3) 简写为 x): 当 $\xi\in D$ 固定时 i) $g(x,\xi)$ 除 $x=\xi$ 外满足 $L_x[g(x,\xi)]=0$; ii) 取 $g(x,\xi)=-1/4\pi r+\omega(x,\xi)$ 的形式,此处 $r=(\sum(x_i-\xi_i)^2)^{\frac{1}{2}}$, $\omega(x,\xi)$ 为(适当可微意义下的)正则函数; iii) $g(x,\xi)$ 满足边界条件 B). 也就是说

$$g(x,\xi)=0,\ x\in S\ (\text{第一类}),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}+\beta\right)g(x,\xi)=0,\ x\in S\ (\text{第三类}).$$

条件 i), ii) 表明, $g(x,\xi)$ 是 L 的一个基本解†, 即 $L_x[g(x,\xi)]=\delta(x-\xi)$, $\delta(x-\xi)$ 是在点 $x=\xi$ 的 Dirac 测度†. 虽然 L 的基本解具有可以附加齐次方程 $L(u)=0$ 的任意解的任意性, 但是 $g(x,\xi)$ 却是在那些基本解中特别满足边界条件的基本解. 实际上, 在第一类边界条件的情形,上面的 $g(x,\xi)$ 可以用 L 的一个基本解 $-1/4\pi r$ 加上 Dirichlet 问题†$\Delta_x\omega(x,\xi)=0$, $\omega(x,\xi)=1/4\pi r(x\in S)$ 的解 ω 来构成. 此外,在很多情形也可用定义 $g(x,\xi)=1/4\pi r+\omega(x,\xi)$ 或者 $g(x,\xi)=1/r+\omega(x,\xi)$ 的形式来代替上述条件 ii).

在上述情形, 关于各个边界条件的 Green 函数是唯一存在的. 一般说来,当这样的 Green 函数存在时, 对于任意的正则的 $v(x)$, 函数 $u(x)=\int_D g(x,\xi)v(\xi)d\xi$ 就满足方程 $L[u]=v$ 与边界条件 B). 更确切地说, 如果 $v(x)$ 在 D 上满足 Hölder 条件 $|v(x)-v(x')|\leqslant L|x-x'|^{\alpha}(0<\alpha\leqslant 1)$ (L, α 为正的常数), 则 $u(x)$ 在 D 上二次连续可微. 反之,如果函数 $u(x)$ 满足方程 $L[u]=v$ 与边界条件, 则它就可表示为上面的形式. 这就是说, 若把 u 与 v 相对应的算子记作 G, 则 G 就是附加了边界条件的微分算子 L 的逆算子, 而 Green 函数便是这个算子的积分核. 利用这种性质, 可以把关于微分算子 L 的边值问题化为积分算子 G 的问题. 例如,含有参数 λ 的微分方程 $L[u]+\lambda u=f$ 在边界条件 B) 之下的求解问题, 与把方程两端作用 G 以后所得积分方程 $u+\lambda G[u]=G[f]$ 的求解问题是等价的. 因为积分方程在理论上比微分方程容易处理, 所以采用上述变换是方便的.

此外, 在关于高阶椭圆型微分算子的一般边值问题的情形下, Green 函数也可同样地去定义(→Green 算子). 并且在应用上重要的是, L 及边界条件 B) 是自伴的†情形. 这时,Green 函数是对称的 ($g(x,\xi)=g(\xi,x)$).

实际去求 Green 函数，一般说来，并不容易，但是在一些特殊情形下，可以比较简单地求出来．下面举出两三个重要的例子（→公式 15）．

【自伴二阶线性常微分方程】 在区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 上考虑 $L[u] = (p(x)u')' + q(x)u$ ($p(x) > 0$，“ ′ ”为 d/dx)．作为边界条件，是在两端给出 $\alpha u' + \beta u = 0$ 形式的关系．Green 函数 $g(x, \xi)$ 是被定义为满足如下条件的函数：i) 对 $x \neq \xi$，$L[g(x, \xi)] = 0$；ii) $[\partial g(x, \xi)/\partial x]_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = 1/p(\xi)$；iii) 若把 ξ 固定，则 $g(x, \xi)$ 在 $x = a$ 及 b 满足给定的齐次边界条件．条件 i), ii) 表示 $L[g(x, \xi)] = \delta(x - \xi)$．$g(x, \xi)$ 可按下述方式来构造：设 $u_1(u_2)$ 为 $L[u] = 0$ 的在 $x = a$ ($x = b$) 满足边界条件的解．如果 u_1, u_2 线性无关，那末可以选取适当的常数因子，使得 $p(u_1' u_2 - u_1 u_2') =$ 常数 $= 1$，于是，只要在 $x \leqslant \xi$ 令 $g(x, \xi) = u_1(x)u_2(\xi)$，在 $x \geqslant \xi$ 令 $g(x, \xi) = u_1(\xi)u_2(x)$ 就成了．

若 u_1, u_2 不是线性无关的，则通常的 Green 函数是不存在的．但是把那个定义少加变动就可构造出起着类似作用的广义 Green 函数（例如[3]）．

上面的方法对于高阶微分方程也适用．

【Laplace 算子】 当区域 D 是以原点为中心的 n 维球时，Laplace 算子 $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 的关于边界条件 $u = 0$ 的 Green 函数可按下述方法得到．设 $E(r)$ 是如下的基本解：当 $n = 2$ 时为 $(2\pi)^{-1} \log r$，当 $n \geqslant 3$ 时为 $-((n-2)\omega_n r^{n-2})^{-1}$ ($\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ 是 n 维单位球的表面积)．于是 Green 函数 $g(x, \xi)$ 定义如下：

$$g(x, \xi) = E(r) - E(\rho r'/a),$$

这里 $\rho = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$r' = (\sum (x_i - \xi_i')^2)^{\frac{1}{2}}$，$\xi_i' = (a/\rho)^2 \xi_i$．

【Helmholtz 方程】 在 $\boldsymbol{R}^3$ 的某有界域外部的域 D 上满足 **Helmholtz 方程** $(\Delta + k^2)u(x) = f(x)$ ($k > 0$) 的带有边界条件例如 $u(x) = 0$ ($x \in S$) (S 为 D 的边界) 的边值问题，在数学物理中是经常出现的．这时，关于解在无穷远处的性状，通常是附加 **Sommerfeld 辐射条件** (Sommerfeld's radiation condition)：当 $|x| \to +\infty$ 时

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)\Big|_{|x|=r} = o(|x|^{-1})$$

($\partial/\partial r$ 为沿径向微分)，再来考虑解的．这时，解的唯一性成立(**Rellich 唯一性定理**(Rellich's uniqueness theorem))．这时，如果对于任意的 $k (> 0)$ 都能构造 Green 函数 $G(x, \xi)$，而 $f(x)$ 是光滑的并且在 $|x|$ 充分大时恒等于 0 的函数，则 $u(x) = \int_D G(x, \xi) f(\xi) d\xi$ 满足方程 $(\Delta + k^2)u(x) = f(x)$，在边界上等于 0 并且满足辐射条件．在这种情形设

$$G(x, \xi) = -\frac{e^{ik|x-\xi|}}{4\pi|x - \xi|} + K_c(x, \xi),$$

$$|x - \xi| = \left(\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

则由求解 Fredholm 型积分方程可以求出 $K_c(x, \xi)$ ([4],[5])．还有，在这个问题上要注意，以 $L_2(D)$ 作为基础的 Green 算子已经不存在了．这时，可以把 $G(x, \xi)$ 考虑为一个“广义 Green 函数”([5])．

【Stokes 方程】 在光滑曲面 S 所围成的 $\boldsymbol{R}^3$ 中的有界域 D 中，考虑求满足 **Stokes 方程**

$$\mu \Delta u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho X_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0$$

(μ, ρ 为正的常数)，且满足边界条件，例如，$u_i(x) = 0$ ($x \in S$, $i = 1, 2, 3$) 的解 ($u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $p(x)$) 的问题 ($X_i(x)$ 为给定函数)，这个问题出现在流体力学上．在此情形，可以构造 Green 张量 $G_{ij}(x, \xi)$，$g_j(x, \xi)$，且对于光滑的 $X_i(x)$ ($i = 1, 2, 3$)，解可由

$$u_i(x) = \rho \sum_{j=1}^{3} \int_D G_{ij}(x, \xi) X_j(\xi) d\xi,$$

$$p(x) = \rho \sum_{j=1}^{3} \int_D g_j(x, \xi) X_j(\xi) d\xi$$

唯一地表示出来([6])．

【抛物型偏微分方程】 作为一个例子，考

虑关于一维的热传导方程† $L[u] \equiv \partial u/\partial t - c^2\partial^2 u/\partial x^2 = f(x, t)$ 的下述边值问题（初-边值问题）。就是求这样的解 $u(x, t)$：当 $t > 0$，$a < x < b$ 时满足方程 $L(u) = f(x, t)$，当 $t = 0$ 时满足初始条件 $u(x, 0) = \varphi(x)$，在 $x = a$ 及 b 上满足齐次边界条件。这时，如果我们可以构造函数 $g(x, t; \xi, \tau)$ $(t \geqslant \tau)$，满足下列条件：i) 除 $x = \xi, t = \tau$ 外满足 $L[g] = 0$；ii) 具有 $g(x, t; \xi, \tau) = (2c)^{-1}\pi^{-\frac{1}{2}}(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}\exp(-(x - \xi)^2/4c^2(t - \tau)) +$（正则函数）的形式；iii) 在 $x = a$ 及 b 上满足给定的齐次边界条件，那末对于正则的 f, φ，

$$u(x, t) = \int_0^t \int_a^b g(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_a^b g(x, t; \xi, 0)\varphi(\xi) d\xi$$

就给出上述问题的解。函数 $g(x, t; \xi, \tau)$ 称为关于边值问题的 Green 函数。至于 Green 函数的具体构造，在[7]有详细论述。

【核函数】 核函数是与平面域的 Laplace 算子 Δ 的第一类 Green 函数（在函数论中，常常把它简称为"Green 函数"）相联系的函数。一般说来，当集合 E 上的复值函数族 $\mathfrak{F}$ 构成 Hilbert 空间†时，假如 $E \times E$ 上的函数 $K(x, y)$ 满足：i)当 y 固定时，作为 x 的函数属于 $\mathfrak{F}$，ii) 对于任意的 $f(x) \in \mathfrak{F}$，恒有 $(f(x), K(x, y))_x = f(y)$，那末就把 $K(x, y)$ 称为**核函数**（kernel function）或者**再生核**（reproducing kernel）。核函数如果存在，那末就只有一个，是 Hermite 的，且是正定的，也就是恒有

$$(1) \qquad \sum_{j,k=1}^{n} K(y_j, y_k)\xi_j \xi_k \geqslant 0.$$

反之，任一正定的函数必是某 Hilbert 空间的核函数。使核函数存在的充分必要条件是，对于 $f \in \mathfrak{F}$ 由任意的 $y \in E$ 所确定的泛函 $f \to f(y)$ 是有界的。这时，在使得 $f(y) = 1$ 的 $f \in \mathfrak{F}$ 之中其最小范数是在 $K(x, y)/K(y, y)$ 上达到的，最小值为 $K(y, y)^{-\frac{1}{2}}$。如果 $\mathfrak{F}$ 是可分的†，那末由正规正交系 $\{\varphi_\nu(x)\}$ 有

$$(2) \qquad K(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x)\overline{\varphi_\nu(y)},$$

K 的具体形式便由(2)构成。

作为核函数的例子，设 E 为 n 维复解析流形，φ, ψ 为 E 上的 n 次解析微分形式，内积为 $(\varphi, \psi) = \int_E \varphi \wedge \bar{\psi}$，而 $\mathfrak{F} = \{\varphi \mid (\varphi, \varphi) < \infty\}$ 的情形最为著名，我们把这个核函数称为**核微分形式**(kernel differential form)。当 E 是 $\mathbf{C}^n$ 内的域时，把微分形式的系数看作函数，则核函数称为 **Bergman 核函数**(Bergman's kernel function)。这时，进而如果 E 可以用一个一一解析映射，被映射到有界域上，那末

$$ds^2 = \sum (\partial^2 \log K(z, \bar{z})/\partial z_j \partial \bar{z}_k) dz_j d\bar{z}_k$$

就是正定的 Hermite 型，且在 E 中给出了 Kähler 度量†。我们把它称为 **Bergman 度量**(Bergman metric)。

【复平面域的核函数】 以下设 E 为复平面 $(z = x + iy)$ 上的域 D。如果设 $K(z, \zeta)$ 为 D 的 Bergman 核函数，$G(z, \zeta)$ 为以 D 的点 ζ 为极点的对 Laplace 算子 Δ 的第一类 Green 函数，那末就有

$$(3) \qquad K(z, \zeta) = -(2/\pi)\partial^2 G(z, \zeta)/\partial z \partial \bar{\zeta}.$$

此外，如果设 $U(z, \zeta)$ 为由在 $\mathfrak{F}$ 内的积分是单值的函数（正确地说是微分形式）所组成的 Hilbert 子空间的核函数，并设 $N(z, \zeta)$ 为 D 的关于 Δ 的 **Neumann 函数** (Neumann's function)，也就是这样的函数：在 $D - \{\zeta\}$ 中是调和的，在 ζ 具有与 G 相同的奇性，在 D 的边界 Γ 上它的法向导数 $\partial N/\partial n$ 是常数，则有

$$(4) \qquad U(z, \zeta) = (2/\pi)\partial^2 N(z, \zeta)/\partial z \partial \bar{\zeta}.$$

于是 $(N(z, \zeta) - G(z, \zeta))/2\pi = H(z, \zeta)$ 就是由在 D 上是实调和的在边界 Γ 上的积分平均值为 0 的函数族所组成的、以 Dirichlet 积分 $\iint_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) dx dy$ 为内积的 Hilbert 空间的核函数（**调和核函数** (harmonic kernel function)）。

当 D 的边界 Γ 是分段光滑的曲线时，对于在 D 上单值正则、在 Γ 上连续的函数族，赋予内积 $(\varphi, \psi) = \int_\Gamma \varphi\bar{\psi}\, ds$（$ds$ 为 Γ 上的线元）而

构成的 Hilbert 空间的核函数称为 **Szegö 核函数** (Szegö's kernel function). 这个核函数与有界函数有着密切关系.

此外，我们可以用以上各个核函数去表达把域 D 映射到各种标准域上的解析函数 (→保角映射).

【参】 [1] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics I, II, Interscience, 1953, 1962 (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特, 数学物理方法, 科学出版社, I, 1958, II, 1977); [2] 犬井鉄郎, 応用偏微分方程式論, 岩波, 1951; [3] 吉田耕作, 積分方程式論, 岩波全書, 1951; [4] В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, 1950 (德译本: W. D. Kupradse, Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen, Deutscher Verlag der Wiss., 1956); [5] 溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波, 1965; [6] F. K. G. Odqvist, Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssigkeiten, Math. Z., 32 (1930), 329—375; [7] E. E. Levi, Sull' equazione del calore, Ann. Mat. Pura Appl., 1908. 关于核函数有: [8] S. Bergman, The kernel function and conformal mapping, Amer. Math. Soc., Surveys 5, 1950; [9] S. Bergman-M. Schiffer, Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics, Academic Press, 1953; [10] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc., 68 (1950), 337—404; [11] H. Meschkowski, Hilbertsche Räume mit Kernfunktion, Springer, 1962.

Green 算子 [英 Green's operator 法 opérateur de Green 德 Greenscher Operator 俄 оператор Грина 日 グリーン作用素] 考虑关于椭圆型偏微分方程†.

$$A[u] = -\Delta u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x)$$

的第一及第三边值问题 (→椭圆型偏微分方程). 这里的 D 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的有界域，其边界 S 由有限个光滑的超曲面所构成. 假如我们根据正射影法†来考虑，那末算子 A 的定义域 $\mathscr{D}(A)$ 就是: i) 对第一边值问题为 $\{u(x) \in H^2(D) \mid u(x) = 0,\ x \in S\}$ ii) 对第三边值问题为 $\{u(x) \in H^2(D) \mid \partial u/\partial n + \beta(x)u = 0,\ x \in S\}$，这里 $H^2(D)$ 是 Соболев 空间(→函数空间). 此时，若 A 为由定义域 $\mathscr{D}(A)$ 到 $L_2(D)$ 全体上的一一映射，则称其逆算子 A^{-1} (写作 G) 为对边值问题的 **Green 算子**. 这时，一般说来，A^{-1} 不一定存在，但是，当实数 ι 取得充分大时，可证 $(A + \iota I)^{-1} = G_\iota$ 是存在的，通常，设 λ 是复参数，对于方程

$$(\lambda I - A)[u] = f(x),\ f(x) \in L_2(D)$$

从左端，用 G_ι 作用，则得

$$(I - (\lambda + \iota)G_\iota)[u] = -G_\iota f.$$

反之，若把此方程看做 $L_2(D)$ 中的方程，而 $u(x)$ 是一个解，则显见 $u(x) \in \mathscr{D}(A)$，且 $u(x)$ 为偏微分方程的解并满足边界条件. 在上述方程中 G_ι 是 $L_2(D)$ 的紧算子，因此，可利用 F. Riesz-Schauder 理论 (→紧算子). 特别是，当 $\lambda + \iota$ 不是 G_ι 的特征值时，$u(x) = (\lambda I - A)^{-1}f = -(I - (\lambda + \iota)G_\iota)^{-1}G_\iota f$ 表示唯一的解.

在上式中特别是当 $a_i(x) = 0$ 并且 $c(x)$，$\beta(x)$ 为实函数时，则 G_ι 成为 $L_2(D)$ 中的自伴算子†，就可利用推广的 Hilbert-Schmidt 理论. 也就是说，设 $\{\lambda_i\}$ 为 A 的特征值，$A\omega_i(x) = \lambda_i\omega_i(x)$，这里 $\{\omega_i(x)\}$ 为 A 的适当地正规正交化的特征函数序列，于是对于任意的 $f(x) \in L_2(D)$，有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \omega_i)\omega_i(x)$$

成立，右端是在平均收敛†意义下的. 又当 $f(x) \in \mathscr{D}(A)$ 时，在同样意义下，展开式

$$(Af)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(f, \omega_i)\omega_i(x)$$

成立.

当 G_ι 不是自伴的情形，设 G_ι^* 为 G_ι 在 $L_2(D)$ 上的伴随算子†，于是 G_ι^* 表示关于方程

$$(A^* + \iota I)[v] = -\Delta v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{a_i(x)}v) + (\overline{c(x)} + \iota)v = g(x)$$

对应于下列边界条件时的 Green 算子: i) 在第一边值问题时，$v(x) = 0$ $(x \in S)$，ii) 在第三边值问题时，$\partial v/\partial n + \beta'(x)\ v = 0$ $(x \in S)$ $(\beta'(x) = \overline{\beta(x)} + \sum_i \overline{a_i(x)} \cos nx_i)$ ([2]).

【高阶椭圆型方程】 对于高阶椭圆型方程的一般边值问题，也可以同样定义 Green 算子. 问题提法为:

(1) $A(x, \partial/\partial x)u(x) = f(x),\ x \in D;$

$$B_j(x, \partial/\partial x)u(x) = 0,\ x \in S,$$
$$j = 1, 2, \cdots, b(=m/2),$$

A 为 m 阶椭圆型算子†，边界微分算子 $\{B_j\}$ 满足下列两个条件：i) 在 S 的一切点 x 上其法线方向不是任一 B_j 的特征曲线的方向；ii) B_j 的阶数 m_j 比 m 小，并且 $m_j \neq m_k$ $(j \neq k)$．A 的定义域 $\mathscr{D}(A)$ 由下式确定：

$$\mathscr{D}(A) = \{u \in H^m(D) \mid B_j(x, \partial/\partial x)u(x) = 0,\ x \in S,\ j = 1, 2, \cdots, b\}.$$

当 A 为由 $\mathscr{D}(A)$ 到 $L_2(D)$ 全体上的一一映射时，$G = A^{-1}$ 称为 **Green 算子**．此时，若 A 和 $\{B_j\}$ 之间存在适当的代数关系 (M. Schechter [5])，则当 $u(x) \in L_2(D)$ 时，$G[u] \in H^m(D)$ 成立，并且此对应关系是连续的．所以，当 $m > n/2$ 时，根据 Соболев 引理†，G 是由 $L_2(D)$ 到 $C^0(\overline{D})$ 的连续映射，且 G 可以用 Hilbert-Schmidt 型的核来表示 (L. Gårding[6])．也就是说，对于任意的 $f(x) \in L_2(D)$，有

$$(Gf)(x) = \int_D G(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$\iint |G(x, \xi)|^2 dx d\xi < +\infty$$

成立．一般说来，作为 Green 算子 G 的**核表示** (kernel representation) 所求得的函数 $G(x,\xi)$ 称为 **Green 函数** (Green function)．

另一方面，Green 函数也可定义如下 (→Green 函数)．对于△的 Dirichlet 问题†的 Green 函数，当 $n = 3$ 时，是 $G(x, \xi) = -(1/4\pi)(1/|x-\xi|) + u(x, \xi)$，其中 $u(x,\xi)$ 满足：i) 对于 $\xi \in D$，$\Delta_x u(x, \xi) = 0$；ii) $G(x, \xi)|_{x\in S} = 0$．可以证明这样定义的 Green 函数，和上述的从 Green 算子出发的定义是一致的([1]，[2])．

在上述问题(1)中，设 $A(x, \partial/\partial x)$ 为不依赖于 x 的常系数椭圆型算子．此时，设 $A(\partial/\partial x)$ 的 (一个) 基本解†为 $E(x)$．也就是说，$E(x)$ 在广义函数的意义下满足

$$A(\partial/\partial x)E(x) = \delta(x)$$

(此处 $\delta(x)$ 为 Dirac 广义函数†，→微分算子)．$E(x)$ 除原点外为 C^∞ 类函数，在 $x = 0$ 的邻域中下列估计成立．对于 $|\alpha| < m$，恒有

$$|(\partial/\partial x)^\alpha E(x)| \begin{cases} \leqslant c|x|^{m-n-|\alpha|}, & m-n-|\alpha| < 0, \\ \leqslant c\log|x|^{-1}, & m-n-|\alpha| = 0, \\ \leqslant c, & m-n-|\alpha| > 0. \end{cases}$$

这里 c 是适当的正的常数．使用此基本解，对问题(1)具有 Green 算子 G 的情形，一般说来，我们可以得到下述结论：Green 函数存在，且可写为 $G(x,\xi) = E(x-\xi) + u(x, \xi)$，这里 $u(x, \xi)$ 满足：i) 对于 $\xi \in D$，$A(\partial/\partial x)u(x, \xi) = 0$；ii) 对于 $\xi \in D$，$B_j(x, \partial/\partial x)G(x,\xi) = 0$ $(x \in S,\ j = 1, 2, \cdots, b)$．

【准椭圆算子】 设

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

为一般的偏微分算子．为了简单起见，假定系数为 C^∞ 类函数．当核 $E(x, \xi)$ 满足

$$A(x, \partial/\partial x)E(x, \xi) = \delta(x-\xi)$$

时，换言之，对任意的 $\varphi(x) \in \mathscr{D}$，

$$\langle E(x, \xi), {}^tA(x, \partial/\partial x)\varphi(x)\rangle_x = \varphi(\xi)$$

成立时，称 $E(x, \xi)$ 为对于 A 的 (一个) **基本解** (fundamental solution)．这里 ${}^tA$ 表示 A 的**转置算子** (transposed operator)：

$${}^tA\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant m}(-1)^{|\alpha|} \times \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x)v(x)).$$

此时，若对于 ${}^tA(x, \partial/\partial x)$ 存在一个基本解 $E'(x, \xi)$，使得：i) 它定义了由 $\mathscr{D}_\xi$ 到 $\mathscr{E}_x$ 的，又同时由 $\mathscr{D}_x$ 到 $\mathscr{E}_\xi$ 的连续映射，ii) 对 $x \neq \xi$，若 $E'(x,\xi)$ 为两个变量的 C^∞ 类函数，则满足方程 $A(x, \partial/\partial x)u(x) = g(x)$ 的任意的广义函数解 $u(x)$，当 $g(x)$ 为 C^∞ 类函数时，它也同样是 C^∞ 类函数．一般说来，对于偏微分算子 A，若当 $g(x)$ 为 C^∞ 类函数时，$u(x)$ 也是 C^∞ 类函数，我们就称此算子为**准椭圆型算子** (hypoelliptic operator)．椭圆型算子及抛物型算子都是准椭圆型算子．L. Hörmander 曾刻画了常系数准椭圆型微分算子的代数特征 ([8]) (→微分算

子). 若核 $E(x,\xi)$ 满足 $A(x,\partial/\partial x)E(x,\xi)=\delta(x-\xi)+\omega(x,\xi)$, 而 $\omega(x,\xi)$ 为两个变量的 C^∞ 类函数,则 $E(x,\xi)$ 称为 A 的(一个)**拟基本解** (parametrix). 为了证明 A 是准椭圆型的,只需证明具有上述性质 i), ii) 的拟基本解 $E(x,\xi)$ 存在就足够了.

对于发展方程'

$$L[u]=\frac{\partial^m}{\partial t^m}u(x,t)+\sum_{j<m}a_{\alpha,j}(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha\frac{\partial^j}{\partial t^j}u(x,t)=0,$$

$$x\in\boldsymbol{R}^n,\quad t_0\leqslant t\leqslant T,$$

当核 $E(x,t;\xi,t_0)\ (t_0\leqslant t\leqslant T)$, 满足 $L_{x,t}(E(x,t;\xi,t_0))=0\ (t>t_0)$, 并且满足初始条件

$$\lim_{t\to t_0+0}\frac{\partial^j}{\partial t^j}E(x,t;\xi,t_0)=\begin{cases}0, & 0\leqslant j\leqslant m-2,\\ \delta(x-\xi), & j=m-1\end{cases}$$

时,就称 $E(x,t;\xi,t_0)$ 为此发展方程的**基本解**.

【参】 [1] H. G. Garnir, Les problèmes aux limites de la physique mathématique, Birkhäuser, Basel, 1958; [2] 溝畑茂, 偏微分方程式論, 岩波, 1965; [3] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics II, Interscience, 1962 (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特, 数学物理方法, II, 科学出版社, 1977); [4] L. Gårding, Dirichlet's problem for linear elliptic differential equations, Math. Scand., 1 (1953), 55—72; [5] M. Schechter, General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 457—486; [6] L. Gårding, Applications of the theory of direct integrals of Hilbert spaces to some integral and differential operators, Univ. of Maryland series no. 11, 1954; [7] L. Schwartz, Théorie des distributions I, Hermann, 1950, [8] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, Acta Math., 94 (1955), 161—248 (中译本: L. 霍玛特, 一般偏微分算子理论, 上海科学技术出版社, 1964).

积分方程 [英 integral equation 法 équation intégrale 德 Integralgleichung 俄 интегральное уравнение 日 積分方程式] 包含未知函数的积分的方程称为**积分方程**. 现在研究得比较彻底的方程,主要是**线性积分方程** (linear integral equation), 特别是下面形式的重要方程.

设 D 为 n 维 Euclid 空间的区域, $f(x)$, $K(x,y)$ 为在 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in D$ 定义的已知函数,当令 $\varphi(x)$ 为 D 上的未知函数时,下面这样的方程

$$(1)\qquad \int_D K(x,y)\varphi(y)dy=f(x),$$

$$(2)\qquad \varphi(x)-\int_D K(x,y)\varphi(y)dy=f(x),$$

$$(3)\qquad A(x)\varphi(x)-\int_D K(x,y)\varphi(y)dy=f(x),$$

一般称为 **Fredholm 型积分方程**或者 **Fredholm 积分方程** (Fredholm's integral equation), 特别, 把(1)称为**第一类** (first kind), 把(2)称为**第二类**(second kind),把(3)称为**第三类** (third kind). 这里 $\int_D dy$ 是 D 上的 n 重积分 $\int\cdots\int_D dy_1\cdots dy_n$ 的意义. 在这些方程之中研究得最详细的是第二类. 第三类在许多情形都可以形式地变成第二类. $K(x,y)$ 称为积分方程的**核** (kernel).

当自变量的变化域是一维的, 也就是实数区间时,方程

$$(1')\qquad \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x),$$

$$(2')\qquad \varphi(x)-\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x),$$

$$(3')\qquad A(x)\varphi(x)-\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

一般称为 **Volterra 型积分方程**或者 **Volterra 积分方程** (Volterra's integral equation), 而且把(1′)称为**第一类**,把(2′)称作**第二类**,把(3′)称为**第三类**. 虽然可以把 Volterra 型积分方程考虑为当 $x<y$ 时具有 0 核的 Fredholm 型积分方程,但是它们两者之间有着很大差别,因此通常对它们分别进行处理.

上述各种方程,特别是后面几个,和特征值问题有联系, 常常是把核写成包含参数 λ 的形式 $\lambda K(x,y)$ 来处理.

积分方程的理论, 是 N. H. Abel 在 1823 年为了论证在重力场中落体运动的轨道形式与落下时间的关系时开始的. 一般, 对于随时间 t 变化的量 φ, 若它与过去或者未来某一时间间隔中的 φ 的值按某规律相联系, 将此关系用数学形式表达出来, 就将得到关于 $\varphi(t)$ 的

积分方程.如果自变量不是时间而是空间坐标，那末事情也是同样的.这样一来，许多应用问题都可以转化为积分方程问题([13]).

【与微分方程的联系】 许多关于微分方程的问题可以化为积分方程. 根据这一点，常常可以使得问题的处理变得容易，解的性质变得清楚. 例如，对于二阶线性常微分方程 $d^2y/dx^2+\lambda y=0$ 在边界条件 $y(0)=y(1)=0$ 下的求解问题，令 $d^2y/dx^2=u(x)$，积分二次，交换积分顺序，并考虑到边界条件，则得

$$y=\int_0^x(x-\xi)u(\xi)d\xi-\int_0^1 x(1-\xi)u(\xi)d\xi.$$

因此，开始的微分方程就化为

$$u=\lambda\int_0^1 x(1-\xi)u(\xi)d\xi-\lambda\int_0^x(x-\xi)u(\xi)d\xi.$$

若把右端的第一个积分分成积分域为$(0,\ x)$与$(x,\ 1)$的两个积分，并把前者同第二个积分加在一起，则得第一类 Fredholm 型积分方程

$$u=\lambda\int_0^1 G(x,\ \xi)u(\xi)d\xi,$$

$$G=\begin{cases}\xi(1-x),\ 0\leqslant\xi\leqslant x\\ x(1-\xi),\ x\leqslant\xi\leqslant 1.\end{cases}$$

求解这个积分方程与求解原来的微分方程是等价的.这个函数G就称为上面边值问题的 Green 函数†. 至于高阶微分方程，也可同样地去处理(→常微分方程的边值问题，特征值问题)·线性常微分方程的初值问题†，可用同样的处理方法化为 Volterra 型积分方程.

还有，关于平面上的 Dirichlet 问题†，也就是求这样的函数u的问题：i) 在闭曲线 $C(\xi=\varphi(s),\ \eta=\psi(s),\ 0\leqslant s\leqslant l)$ 的内部(不包含C本身)是调和的；ii) 设$F(s)$为在C上定义的连续函数，当从C的内部向C上一点$(x_0,\ y_0)$靠近时，关于$(x_0,\ y_0)$一致地有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=F(s)$. 对此，令

$$f(s)=\frac{F(s)}{\pi},$$

$$K(s;t)=\frac{(\psi(s)-\psi(t))\varphi'(t)-(\varphi(s)-\varphi(t))\psi'(t)}{\pi((\varphi(s)-\varphi(t))^2+(\psi(s)-\psi(t))^2)},$$

于是由第二类 Fredholm 型积分方程

$$\mu(s)=f(s)-\int_0^l K(s;\ t)\mu(t)dt$$

的连续解$\mu(s)$，可把问题的解u表达为

$$u(x,\ y)=\int_0^l\mu(s)\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}ds,$$

$r^2=(\varphi(s)-x)^2+(\psi(s)-y)^2$，$n$为内法线.同样地，对于把 ii) 换成 ii′)“当从C的内部向C上一点$(x_0,\ y_0)$靠近时关于$(x_0,\ y_0)$一致地有 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\partial u}{\partial n}(x,\ y)=F(s)$”的 Neumann 问题†，令

$$f(s)=\frac{F(s)}{\pi},$$

$$L(s;t)=\frac{(\psi(s)-\psi(t))\varphi'(s)-(\varphi(s)-\varphi(t))\psi'(s)}{\pi((\varphi(s)-\varphi(t))^2+(\psi(s)-\psi(t))^2)},$$

则问题的解u可由第二类 Fredholm 型积分方程

$$\mu(s)=f(s)-\int_0^l L(s;\ t)\mu(t)dt$$

的连续解$\mu(s)$表达为

$$u(x,\ y)=-\int_0^l\mu(s)\log\frac{1}{r}ds+C.$$

但是，为了求解这个积分方程，条件 $\int_0^l F(s)ds=0$ 是充分必要的. 这里C为任意常数，问题的解，除了这个附加常数外，被唯一地确定([2]第5章). 至于一般的椭圆型偏微分方程†，也可同样地去处理.

【Fredholm 型积分方程】 以下就自变量为一维，也就是D为实数的有限区间$[a,\ b]$，并且$K(x,\ y)$及$f(x)$为连续函数的情形，进行论述（直到 Hilbert-Schmidt 核一节为止). 至于对n维有界闭域D的情形，也是同样的.

【逐次迭代法】 作为第二类 Fredholm 型积分方程的解法，最简单的是**逐次迭代法** (successive iteration)(也称为**逐次逼近法** (successive approximation)). 从(2)得

$$\varphi(x)=f(x)+\int_D K(x,\ y)\varphi(y)dy.$$

将这个式子的右端代入这个右端积分内的φ，

并且重复这种操作,便得

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\int_D K^i(x,y)f(y)dy+\int_D K^{n+1}(x,y)\varphi(y)dy,$$

这里 K^i 顺次是由

$$K^1(x,y)=K(x,y),$$

$$K^i(x,y)=\int_D K^{i-1}(x,s)K(s,y)ds$$

所定义. 我们把它们称为**叠核**(iterated kernel). 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}K^n(x,y)$ 一致收敛,那末当令

$$(4)\qquad R(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}K^n(x,y)$$

时,(2)的解就由

$$(5)\qquad \varphi(x)=f(x)+\int_D R(x,y)f(y)dy$$

给出. (4)的右边的级数称为 **Neumann 级数**(Neumann series).

一般,对于核 $K(x,y)$, 我们把满足

$$K(x,y)-R(x,y)+\int_D K(x,s)R(s,y)ds=0$$

$$K(x,y)-R(x,y)+\int_D R(x,s)K(s,y)ds=0$$

的 $R(x,y)$ 称为 $K(x,y)$ 的**预解核**(resolvent kernel)(也有人把 $-R(x,y)$ 称为预解核).当预解核存在时,(2)的解由(5)给出. 当 Neumann 级数一致收敛时,(4)就给出 $K(x,y)$ 的预解核. 在 Volterra 型积分方程的情形,叠核成为

$$K^i(x,y)=\int_y^x K^{i-1}(x,s)K(s,y)ds,$$

但是,这时 Neumann 级数一致绝对收敛.

【Fredholm 解法】 设D为有界闭域,核 $K(x,y)$ 为连续的. 在 Fredholm 型积分方程的情形, Neumann 级数当 $K(x,y)$ 的值充分小时或者D充分小时,是一致收敛的并给出了一个预解核,但是,在一般情形却并不一定收敛. 因此, E. I. Fredholm 给出了更一般情形的预解核. 取以 $\lambda K(x,y)$ 为核的积分方程,令

$$K\begin{pmatrix}x_1,\cdots,x_n\\ y_1,\cdots,y_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}K(x_1,y_1)\cdots K(x_1,y_n)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ K(x_n,y_1)\cdots K(x_n,y_n)\end{vmatrix},$$

$D(\lambda)$ 及 $D(x,y;\lambda)$ 分别由

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_D\cdots\int_D K\begin{pmatrix}s_1,\cdots,s_n\\ s_1,\cdots,s_n\end{pmatrix}ds_1\cdots ds_n,$$

$$D(x,y;\lambda)=K(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\int_D\cdots\int_D K\begin{pmatrix}x,s_1,\cdots,s_n\\ y,s_1,\cdots,s_n\end{pmatrix}ds_1\cdots ds_n,$$

来定义. 这些级数是一致收敛的,而且是 λ 的整函数. 当 $D(\lambda)\neq 0$ 时,若设关于 $\lambda K(x,y)$ 的预解核为 $\lambda R(x,y;\lambda)$, 那末

$$\frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)}=R(x,y;\lambda).$$

我们把 $D(\lambda)$ 称为关于核 $K(x,y)$ 的 **Fredholm 行列式**(Fredholm's determinant), 把 $D(x,y;\lambda)$ 称为 **Fredholm 初余子式**(Fredholm's first minor). $D(\lambda)$与关于 $\lambda K(x,y)$的 Neumann 级数之间(当 λ 很小时)有着

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{n-1}\int_D K^n(s,s)ds$$

的关系. 为了给出当 $D(\lambda)=0$ 时的解, Fredholm 利用了 **Fredholm r 次余子式**(Fredholm's r-th minor) $D\begin{pmatrix}x_1,\cdots,x_r\\ y_1,\cdots,y_r\end{pmatrix};\lambda\Big)$:

$$D\begin{pmatrix}x_1,\cdots,x_r\\ y_1,\cdots,y_r\end{pmatrix};\lambda\Big)=K\begin{pmatrix}x_1,\cdots,x_r\\ y_1,\cdots,y_r\end{pmatrix}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\times\int_D\cdots\int_D K\begin{pmatrix}x_1,\cdots,x_r,s_1,\cdots,s_n\\ y_1,\cdots,y_r,s_1,\cdots,s_n\end{pmatrix}ds_1\cdots ds_n$$

([2]第 4 章).

【特征值问题, Fredholm 择一定理】 考虑第二类**齐次积分方程**(homogeneous integral equation):

$$(6)\qquad \varphi(x)-\lambda\int_D K(x,y)\varphi(y)dy=0.$$

仍然设D为有界闭域,核 $K(x,y)$ 为连续的.对于(6),当它具有 $\varphi\equiv 0$ 以外的解时,就把 λ 称为**特征值**(proper value, eigenvalue),把 $\varphi(x)\not\equiv 0$ 的解称为**特征函数**(proper function, eigenfunction). 因为若 $D(\lambda)\neq 0$ 则无恒等于 0 以外的解,所以特征值必是整函数 $D(\lambda)$ 的零点. 从一个特征值所对应的特征函数中选择有限个线

性无关的组，而其余的特征函数都可表成它的线性组合，这样的特征函数组称为对应于那个特征值的**基本函数系**(system of fundamental functions)，系中所包含的特征函数的个数称为特征值的**指数**（index）．这个指数同关于(6)的**相伴方程**（associated equation）(也称为**转置方程**(transposed equation))

$$(6')\qquad \psi(y)-\lambda\int_D K(x,y)\psi(x)dx=0$$

的指数一致．特征值 λ 的，作为整函数 $D(\lambda)$ 的零点的重数称为它的**相重数**（multiplicity）．如果具有相重数 p，指数 q 的特征值 λ 成为 $R(x,y;\lambda)$ 的 r 重极点，那末它们之间就有关系式 $p+1\geqslant r+q$ 成立．特别，当 $r=1$ 时有 $p=q$，于是指数与相重数一致．在后面将要叙述的对称核的情形就是一例（[6]）．即使在有无限多个特征值的情形，也没有有限值的聚点．

当 λ 与特征值相异时，则非齐次方程

$$(7)\qquad \varphi(x)-\lambda\int_D K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

对于任意的连续函数 $f(x)$ 可以唯一地解出．这时，因 $D(\lambda)\neq 0$，所以关于 $\lambda K(x,y)$ 的预解核 $R(x,y;\lambda)$ 是存在的．当 λ 为特征值时，因有 $D(\lambda)=0$，于是使 (7) 具有解的充分必要条件是，对于 (6′) 的一切解（线性无关的有限个）$\psi(y)$ 有

$$\int_D \psi(x)f(x)dx=0$$

成立．这个事实称为 **Fredholm 择一定理** (Fredholm's alternative theorem)（→紧算子[Riesz-Schauder 定理]）．

当核成为 $K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}X_i(x)Y_i(y)$ 的形式时，称为**可分核**(separated kernel, degenerate kernel) 或者称为 **Pincherle-Goursat 核** (Pincherle-Goursat kernel)．在这种情形，$D(\lambda)=\det\left(\delta_{jk}-\lambda\int_a^b X_j(t)Y_k(t)dt\right)$，特征值、特征函数是容易求出的．一般的核也可以作为可分核的极限来处理．

【对称核】 我们把 $K(x,y)$ 是实数值并且 $K(x,y)=K(y,x)$ 的核称为**对称核**(symmetric kernel)．下面设 D 为有界闭域，$K(x,y)$ 为连续对称核．在这种情形，齐次积分方程(6)同它的相伴方程(6′)是一致的．

对称核 $K(x,y)$，除了恒等于 0 的情形外必具有特征值、特征函数．这些特征值都是实数．对应于相异的特征值的特征函数是互相正交的．如果把对应于各个特征值的基本函数系分别正规正交化，且从对应于绝对值小的特征值的基本函数系开始编号，那末就得到正规正交函数系 $\{\varphi_i(x)\}$．我们把它称为**完备正规正交(基本)函数系**(complete orthonormal system of fundamental functions)或者简单地称为**完备（正规）正交系**等．如果特征值也是分别把指数的重数计算进去，按绝对值的顺序编号．那末就有下面的等式成立：

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i^2}=\int_D\int_D(K(x,y))^2dxdy.$$

对应于叠核 $K^m(x,y)$ 的特征值是 $\{\lambda_i^m\}$，它的完备正规正交基本函数系可以选得同原核 $K(x,y)$ 的一致．

特征函数、特征值可以按下面那样求出：令 $\int_D K^n(s,s)ds=u_n$，则有极限(一致收敛)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{2n}}{u_{2n+2}}=\lambda^2<+\infty$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\lambda^{2n}K^{2n}(x,y)=\varphi(x,y)$$

存在，若取使得 $\varphi(x,c)\neq 0$ 的常数 c，则 $\varphi(x,c)$ 就是 $K^2(x,y)$ 的特征函数，λ^2 就是它的特征值．

一般，当设 $K(x,y)$ 的叠核 $K^n(x,y)$ 的特征值为 λ^n，对应的特征函数为 $\varphi(x)$ 时，设 1 的原始 n 重根之一为 ε，作

$$\phi_j(x)=\varphi(x)+\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon^{kj}\lambda^k\int_D K^k(x,y)\phi(y)dy,$$
$$j=0,1,2\cdots,n-1,$$

则至少对于一个 j 而言，$\varepsilon^j\lambda$ 是原核 $K(x,y)$ 的特征值，$\phi_j(x)$ 是对应的特征函数．叠核与原核的特征值、特征函数之间的这种关系，对于不

对称的核一般也成立([1]).

当有正规正交化了的 n 个特征函数 $\varphi_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ 存在时,令

$$K(x,y)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}=K_n(x,y),$$

则 $K_n(x,y)$ 的特征值与完备正规正交基本函数系正好是,相应于 $K(x,y)$ 的从其中除去 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 与 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 后的特征值与完备正交系.

设 $\varphi(x)$ 为使得 $\int_D(\varphi(x))^2dx=1$ 的任意函数,于是,当 $\varphi(x)$ 正好是关于 $K^2(x,y)$ 的最小特征值 λ_1^2 的特征函数时,二个变量的积分

$$J=\int_D\int_D K^2(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$$

取最大值. 把 $K(x,y)$ 的特征值 λ_n 按绝对值的顺序 $|\lambda_n|\leqslant|\lambda_{n+1}|$ 排列并且编号,对于 n 个给定的函数 $\psi_i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$, 设 $\varphi(x)$ 为使得

$$\int_D\psi_i(x)\varphi(x)dx=0,\quad\int_D(\varphi(x))^2dx=1$$

的任意函数,于是,当 $\{\psi_1(x),\cdots,\psi_n(x)\}$ 的线性组合的全体与 $\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$ 的线性组合的全体一致时,二重积分

$$J=\int_D\int_D K^2(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy$$

的最大值就成为最小, 这时使得 J 成为最大的 $\varphi(x)$ 就是关于 $K^2(x,y)$ 的特征值 λ_{n+1}^2 的特征函数. 这样一来, 特征值也可由这个变分问题确定出来.

【展开定理】 当 $K(x,y)$ 为连续对称核, $h(x)$ 在有界闭域 D 上平方可积时,对于

$$f(x)=\int_D K(x,y)h(y)dy$$

的 $f(x)$, 可以引用 $K(x,y)$ 的完备正规正交基本函数系 $\{\varphi_i(x)\}$ 展开成一致收敛级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x),\quad c_n=\int_D f(x)\varphi_n(x)dx.$$

我们把它称为 **Hilbert-Schmidt 展开定理** (Hilbert-Schmidt expansion theorem). 应用这个定理,对称核的第二类 Fredholm 型积分方程(7)的解,当 λ 不是特征值时可由

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i-\lambda}\int_D f(x)\varphi_i(x)dx$$

给出. 还有,当 $m\geqslant 2$ 时,则

$$K^m(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i^m}\text{(一致收敛)}.$$

若设对称核 $\lambda K(x,y)$ 的预解核为 $\lambda R(x,y;\lambda)$, 则

$$R(x,y;\lambda)=K(x,y)+\lambda\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i(\lambda_i-\lambda)}.$$

当对称核 $K(x,y)$, 对于任意的 $\varphi(x)$ 常满足不等式

$$\int_D\int_D K(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy\geqslant 0$$

时,就把它称为**半正定核** (positive (semidefinite) kernel). 特别,若等号只限制在 $\varphi(x)\equiv 0$ 的情形成立, 就把它称为**正定核** (positive definite kernel). 半正定核的特征值 λ_i 全是正的, 并且

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}\text{(一致收敛)}.$$

这个事实称为 **Mercer 定理**。此外,当实连续函数 $K(x,y)$ 为非对称的时,若设

$$\int_D K(x,s)K(y,s)ds=\hat{K}_1(x,y),$$

$$\int_D K(s,x)K(s,y)ds=\hat{K}_2(x,y),$$

则 $\hat{K}_\nu(x,y)$ $(\nu=1,2)$ 便是半正定核,两者的特征值的全体是一致的,并且都是正的,把它们设为 $\lambda_i^2(i=1,2,\cdots)$,当把关于它们的 $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$ 的完备正规正交基本函数系分别设为 $\{\varphi_i(x)\}$, $\{\psi_i(x)\}$ 时,则有

$$\lambda_i\int_D K(y,x)\varphi_i(y)\,dy=\psi_i(x),$$

$$\lambda_i\int_D K(x,y)\psi_i(y)\,dy=\varphi_i(x)$$

的关系成立. 对在 D 上平方可积的 $h(x)$, 由

$$f(x)=\int_D K(x,y)h(y)dy$$

表达的函数 $f(x)$, 可以被展开成一致收敛的级数:

$$(8)\quad f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\varphi_i(x),\quad c_i=\int_D f(x)\varphi_i(x)dx.$$

为使不限于对称的一般核的第一类 Fred-

holm 型积分方程 (1) 有平方可积的解 $\varphi(x)$ 存在，其充分必要条件是：$f(x)$ 可以展开成一致收敛的级数(8)，并且 $\sum_{i=1}^{\infty}(c_i\lambda_i)^2 < +\infty$. 那种解中之一是 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi_n(x)$（平均收敛†）([6]).

此外，上面的对称核理论可以推广到复数值的 **Hermite 核** (Hermitian kernel)：$K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.

对于以上所处理的限于在有界闭域 D 上具有连续核 $K(x, y)$ 的 Fredholm 型积分方程，在连续函数空间 $C(D)$，可以作为从 $C(D)$ 到 $C(D)$ 的紧算子 $T\varphi(x) = \int_D K(x, y)\varphi(y)dy$ 的理论，利用泛函分析的方法来处理（→紧算子）.

【Hilbert-Schmidt 型核】 对于 D 即使不是有界的，在 $D \times D$ 上在 Lebesgue 积分意义下平方可积的核 $K(x, y)$ 的情形（这种核叫作 **Hilbert-Schmidt 型核** (kernel of Hilbert-Schmidt type))，由于上述积分算子† T 成为 $L_2(D) \to L_2(D)$ 的紧算子，因此，上述关于连续核 $K(x, y)$ 的积分方程所得到的结果，大体上在这里也都同样地成立([4]，→紧算子).

【奇核】 一般，对于核 $K(x, y)$ 不能直接应用这种理论的情形，若其叠核 $K^m(x, y)$ 具有预解核 $R_m(x,y)$，则 $K(x,y)$ 具有预解核 $R(x, y) = R_m(x, y) + H_m(x, y) + \int_D R_m(x, s)H_m(s, y)ds$, $H_m(x, y) = \sum_{i=1}^{m-1} K^i(x, y)$. 在核含有参数 λ 的情形，前面所叙述的叠核与原来核的特征值、特征函数之间的关系，在这里还是同样地成立. 若 $K(x, y)$ 在 $x \neq y$ 处连续，而在 $x = y$ 的邻域中具有与 $|x-y|^{-\alpha}(0<\alpha<1)$ 相同的奇性，则对于使得 $(1-\alpha)m \geqslant 1$ 的 m，叠核 $K^m(x, y)$ 是连续的. 椭圆型偏微分方程的 Green 函数†具有这种性质.

一般，我们把平方不可积的核称为**奇核** (singular kernel)，以奇核为核或者积分区域是无界的积分方程称为**奇异积分方程** (singular integral equation). 例如，对于任意的实数 α，因为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} \sin xy\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\alpha y} + \frac{y}{\alpha^2+y^2}\right)dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\alpha x} + \frac{x}{\alpha^2+x^2},$$

所以在 $(0,\infty)$ 上的连续核 $\sqrt{2/\pi}\sin xy$ 的特征值 1 的指数是无穷大. 又，设 α 为任意实数，因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}e^{-i\alpha y}dy = \frac{2}{1+\alpha^2}e^{-i\alpha x},$$

所以在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续核 $e^{-|x-y|}$ 是以比 1/2 大的所有的 $\lambda = (1+\alpha^2)/2$ 为其特征值. 在这种情形，特征值的集合即**谱** (spectrum) 形成连续统. 这样的谱称为**连续谱** (continuous spectrum).

特别，具有 **Carleman 型核** (kernel of Carleman's type)
$K(x, y) = G(x, y)/(y-x)$, $G(x, y)$ 有界的积分方程在应用上是很重要的. 对这种情形说来，在方程中所出现的积分是 Cauchy 主值†意义下的. 积分区域为有限、无限的两种情形都可以利用 Hilbert 变换†来研究([8]). 此外，关于奇异积分算子† →线性算子〔线性算子的例〕. 还可→特征值问题.

【积分方程组】 第二类 Fredholm 型积分方程组可以直接地归结为单个的方程. 为简单起见把积分域设为 $[0,1]$，考虑方程组

$$\varphi_i(x) - \lambda\int_0^1 K_{ij}(x, y)\varphi_j(y)dy = f_i(x),$$
$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

对于 $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$，如果把 Φ, F, K 按

$$\Phi(x+i-1) = \varphi_i(x),$$
$$F(x+i-1) = f_i(x),$$
$$K(x+i-1, y+j-1) = K_{ij}(x, y)$$

来定义，那末方程组就化为如下的单个方程

$$\Phi(x) - \lambda\int_0^n K(x, y)\Phi(y)dy = F(x).$$

对于第二类 Volterra 型积分方程组，可以顺次地消去未知函数而化为单个方程.

【Volterra 型积分方程】 关于第一类 Volterra 型积分方程

$$\int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy = f(x),$$

如果 $K(x, x) \neq 0$, $K_x(x, y)$, $f'(x)$ 连续，那末两边微分便得第二类 Volterra 型积分方程

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K_x(x, y)}{K(x, x)} \varphi(y)dy = \frac{f'(x)}{K(x, x)}.$$

关于一般的 **Abel 积分方程**(Abel's integral equation)

$$(9) \qquad \int_0^x \frac{G(x, y)}{(x-y)^\alpha} \varphi(y)dy = f(x), 0 < \alpha < 1,$$

如果 G, G_x, f' 连续，$G(x, x) \neq 0$，那末适当地变形就可化为

$$\int_0^u H(u, y)\varphi(y)dy = \int_0^u f(x)(u - x)^{\alpha-1}dx.$$

其中

$$H(u, y) = \int_y^u \frac{G(x, y)dx}{(u - x)^{1-\alpha}(x - y)^\alpha}.$$

从而，由于 $H(u, u) = (\pi/\sin \alpha\pi)G(u, u) \neq 0$，则得第二类 Volterra 型积分方程

$$\varphi(u) + \int_0^u \frac{H_u(u, y)}{H(u, u)} \varphi(y)dy = g(u),$$

其中

$$g(u) = H(u, u)^{-1} \frac{d}{du} \int_0^u f(x)(u - x)^{\alpha-1} dx$$

$$= H(u, u)^{-1} \left(u^{\alpha-1}f(0) + \int_0^u (u - x)^{\alpha-1}f'(x)dx\right).$$

在本条开头所提到的 Abel 的研究，就是给定落下所需时间要求出曲线的问题（这个问题称为 **Abel 问题** (Abel's problem))，而这个问题在(9)中由 $G(x, y) \equiv 1, \alpha = 1/2$ 的情形所给出．在 $G(x, y) \equiv 1$ 的情形，(9)的解可由

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\left(x^{\alpha-1}f(0) + \int_0^x (x - t)^{\alpha-1}f'(t)dt\right)$$

表达出来．

【非线性积分方程】 含有参数 λ 的**非线性积分方程** (non-linear integral equation)，在 λ 值上往往出现**分歧点** (bifurcation point)．也就是说，当变动实参数 λ 使其通过特定的值 λ_0 时，对应的实数值方程的实数值解的个数往往发生变化．根据下面的例子

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi^2(y)dy = 1,$$

对于 $\lambda \leqslant 1/4$，则 $\varphi(x) = (1 \pm \sqrt{1 - 4\lambda})/2\lambda$ 便是实数值解，而对于 $\lambda > 1/4$，便没有实数值解．因此，$\lambda_0 = 1/4$ 就是分歧点．

在非线性积分方程中，关于下面的 **Hammerstein 积分方程**(Hammerstein's integral equation) 已有详细的研究([8],[9])：

$$(10) \qquad \varphi(x) + \int_D K(x, y)f(y, \varphi(y))dy = 0.$$

如果 $K(x, y)$ 与 $f(y, 0)$ 平方可积，$f(y, u)$ 满足关于 u 的适当小的系数的 Lipschitz 条件，那末(10)就可以用逐次逼近法去解．如果 $K(x, y)$ 是平方可积的半正定核，且 $\int_D |K(x, y)|^2dy$ 有界，那末在关于 $f(y, u)$ 的比 Lipschitz 条件宽的限制下，可以证明 (10) 的解的存在性与唯一性．在非对称核的情形，如果把"半正定核"代替为**均方连续** (continuous in the mean)，也就是当 $x' \to x$ 时

$$\int_D |K(x', y) - K(x, y)|^2dy \to 0,$$

以及满足交换了 x 与 y 的同样的条件，那末可得类似的结果．

非线性 Volterra 型积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x F(x, y; \varphi(y))dy,$$

如果 $F(x, y; u)$ 满足关于 u 的以(x, y)的平方可积函数为系数的 Lipschitz 条件，且 $\left|\int_a^x F(x, y; f(y))dy\right|$ 被一个 x 的平方可积函数所限制，那末就可用逐次逼近法去解．这里，设 $F(x, y; u)$ 与 $f(x)$ 都是平方可积的．在它们是连续函数的情形，仿照常微分方程的初值问题的处理方法，就可给出连续解的存在性与唯一性的条件以及比较定理†([12])．

【**数值解法**】 在假定函数都是连续的，积分方程只具有一个解的前提下，来阐述**积分方程的数值解法** (numerical solution of integral equations)．数值解法大致可以分为两类：将上述理论解法原封不动地利用于近似计算的方法与把积分方程变换为其他种类的方程的方法．

i) 利用数值积分的方法．考虑积分方程

$$\int_a^b F(x, y, \varphi(x), \varphi(y))dy = 0.$$

在区间 $[a, b]$ 的分点 $a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ 上令 $\varphi(x)$ 的值为 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$,若利用数值积分法,则得关于 φ_i 的方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_j F(x_i, x_j, \varphi_i, \varphi_j) = 0, \ i = 1, 2, \cdots, n.$$

这与把微分方程用差分近似求解属于同一思想,因此,可以有与那种情形(→常微分方程的数值解法)同样的误差分析理论. 特别,在第二类 Fredholm 型积分方程的情形,可得关于 φ_i 的线性方程组. 利用由此解得的 φ_i 值,若把原来积分方程中的积分用数值积分来替换,则不用插值法也可得出 $\varphi(x)$ 的值.

ii) 利用递推公式的方法. 令 Fredholm 行列式 $D(\lambda)$ 与 Fredholm 第一子行列式 $D(x, y; \lambda)$ 的关于 λ 的展开式的 λ^n 的系数分别为 d_n 与 $d_n(x, y)$,则有如下的递推公式

$$d_n(x, y) = d_n K(x, y) + \int_a^b K(x, s) d_{n-1}(s, y) ds,$$

$$d_{n+1} = -\frac{1}{n+1}\int_a^b d_n(s, s) ds,$$

$$d_0 = 1,$$

$$d_0(x, y) = K(x, y)$$

成立,对此可以利用第二类 Fredholm 型积分方程的数值解法([13]).

iii) 利用近似核的方法. 如果把第二类 Fredholm 型积分方程的核用近似核来替换,那末所得到的方程的解就是原来方程的近似解. 如果选择在数值上处理比较容易的核作为近似核,则数值解法就可利用. F. G. Tricomi 给出了这种情形的误差估计([14]).

iv) 迭代法. 对于积分方程

$$\varphi(x) = \int_a^b F(x, y, \varphi(x), \varphi(y)) dy,$$

适当地规定 $\varphi_0(x)$,根据

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b F(x, y, \varphi_n(x), \varphi_n(y)) dy$$

相继地作出 $\varphi_n(x)$. 在已知近似序列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ 收敛于原来方程的解的情形下,若中断在有限次迭代上则可得到近似解 $\varphi_n(x)$. 特别是,如果在含有参数 λ 的第二类 Fredholm 型积分方程中 λ 的绝对值比特征值的最小绝对值还小,那末这个方法就可利用.

v) 应用变分法的方法. 积分方程

$$G(x, \varphi(x)) + \int_a^b F(x, y, \varphi(x), \varphi(y)) dy = 0,$$

在适当的条件下可以成为变分问题

$$(11) \quad J[u] \equiv \int_a^b\int_a^b E(x, y, u(x), u(y))\, dx\, dy + \int_a^b H(x, u(x)) dx = \text{极值}$$

的 Euler 方程'. 因此,积分方程的数值解法便可化为变分问题(11)的数值解法([15]).

vi) Enskog 法. 如果在包含参数 λ 的第二类 Fredholm 型积分方程的两边乘以函数 $\varphi_n(x)$ 而后积分,那末就得到

$$\int_a^b \varphi(x)\, \psi_n(x)\, dx = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx,$$

这里

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \lambda \int_a^b K(y, x) \varphi_n(y) dy.$$

如果 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是完备正规正交基本函数系,那末把 $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 正规正交化就可作出完备正规正交基本函数系 $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$,关于这个函数系的解 $\varphi(x)$ 的 Fourier 系数可根据上面得到的关系式来计算. 这个结果可以利用于数值解法([8]). 我们把它称为 **Enskog 法** (Enskog's method).

Volterra 型积分方程适用于上述的 i), iv) 等. 那时,由于稳定性等的缘故,通常都是把第一类 Volterra 型积分方程进行微分,化为第二类 Volterra 型积分方程来直接进行处理.

【参】 [1] G. Vivanti-F. Schwank, Elemente der Theorie der lineare Integralgleichungen, Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover, 1929; [2] 竹内瑞三, 積分方程式論, 共立出版, 1934; [3] E. Hellinger-O. Toeplitz, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichen Unbekannten, Teubner, 1928; [4] 吉田耕作, 積分方程式論, 岩波全書, 1950; [5] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen, Springer, 1931; [6] 佐藤常三, 積分方程式論とグリーン函数, 柏葉書院, 1944; [7] 福原満洲雄, 積分方程式, 共立出版, 1955; [8] F. G. Tricomi, Integral equations, Interscience, 1957; [9] H. Schaefer, Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen, Akademie-Verlag, 1955; [10] M. A. Красносельский, Топологические методы в нелинейных интегральных

уравнений, Москва, 1956; [11] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里, 奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966), [12] T. Satô (佐藤德意), Sur l'équation intégrale non linéaire de Volterra, Compositio Math., **11** (1953), 271—290. 关于数值解法: [13] 日高孝次, 応用積分方程式論, 河出, 1943; [14] H. Bückner, Die praktische Behandlung von Integralgleichungen, Springer, 1952; [15] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer, 1951; [16] F. Smithies, Integral equations, Cambridge Univ. Press, 1958; [17] С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962 (中译本: С. Г. 米赫林, 多维奇异积分与积分方程, 上海科学技术出版社, 1964); [18] Л. Я. Канторович, В. И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, изд. 3, Гостехиздат, 1949.

积分微分方程 [英 integro-differential equation 法 équation intégro-différentielle 德 Integro-Differentialgleichung 俄 интегро-дифференциальное уравнение 日 積分微分方程式] 对包含一个算子 T 的泛函方程

(1) $$f(t, x'(t), x(t), (Tx)(t)) = 0, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

(2) $$x(t_0) = x_0,$$

根据所给 T 的特殊形式,它可表示微分方程,差分微分方程,积分方程,积分微分方程等([1],[6]),特别令

(3) $$f(t, x, y, z) = x - g(t, y) - z,$$

(4) $$(Tx)(t) = \int_{t_0}^{\varphi(t)} K(t, s, x(s))ds,$$

我们就得到**积分微分方程**

(5) $$x'(t) = g(t, x(t)) + \int_{t_0}^{\varphi(t)} K(t, s, x(s))ds.$$

在这里,$\varphi(t)=$常数的情形称为 **Fredholm 型** (Fredholm type)积分微分方程,$\varphi(t)=t$ 的情形称为 **Volterra 型** (Volterra type) 积分微分方程.

【初值问题】 设 $I: t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $I_0: t_0 < t \leqslant t_1$, $C(I)$ 是 I 上连续函数的集合. T 是当 $x \in C(I)$ 时使 $Tx \in C(I_0)$ 的算子, $\mathfrak{F}$ 是 T 的全体, $\mathfrak{F}_+$ 是由下面这样的 T 所组成的 $\mathfrak{F}$ 的子集: 对任意的 $x, y \in C(I)$, $s \in I_0$, 如果 $x(t) < y(t)$ (当 $t_0 \leqslant t < s$), 则有 $Tx \leqslant Ty$ (当 $t = s$). Z 是在 I 上连续且在 I_0 上可微的函数集合. $f \in M$ 是指: 函数 $f(t, x, y, z)$ 对 $t \in I_0$, $|x|, |y|, |z| < \infty$ 有定义且满足 $f(t, x_1, y, z_1) \geqslant f(t, x_2, y, z_2)$ $(x_1 \geqslant x_2, z_1 \leqslant z_2)$. 现在假定, 在(1)中 $f(t, x, y, z)$ 是对 $t \in I_0, |x|, |y|, |z| < \infty$ 定义的,而且 $T \in \mathfrak{F}$. 又设 $\gamma > 0$, 且对满足(1),(2)的两个解 $x_1, x_2 \in Z$, 总存在一个函数 $\omega \in M$ 和一个算子 $\Omega \in \mathfrak{F}_+$, 使得不等式

$$\omega(\bar{t}, x_2' - x_1', x_2 - x_1, \Omega(x_2 - x_1)) \leqslant 0$$

对所有这样的 $\bar{t} \in I_0$: $x_2(\bar{t}) - x_1(\bar{t}) = \gamma$ 且 $x_2(t) - x_1(t) < \gamma$ (当 $t_0 < t < \bar{t}$ 时) 成立. 再设存在一个函数 $\rho \in Z$, 满足下列条件:

$$0 \leqslant \rho \leqslant \gamma, \quad t \in I_0;$$

$$\omega(t, \rho', \rho, \Omega\rho) > 0, \quad t \in I_0;$$

$$\rho(t_0 + 0) > x_2(t_0 + 0) - x_1(t_0 + 0).$$

于是(1),(2)至多只有一个解 $x \in Z$. 这个结果可以由对两个具有不同初值 $x(0) = \eta_i$ $(i = 1, 2)$ 的(1)的解 $x_i(t)$, 求出 $|x_1(t) - x_2(t)|$ 的估计而得到证明. 特别是,对 Fredholm 型积分微分方程,假定满足下列条件:

$$g(t, y_1) - g(t, y_2) \leqslant L(t)(y_1 - y_2),$$
$$t \in I_0, \ y_1 \geqslant y_2, \ L(t) \in C(I_0);$$

$$\int_0^{t_0} (K(t, s, w_1(s)) - K(t, s, w_2(s)))ds$$

$$\leqslant N(t) \int_0^t M(s)(w_1(s) - w_2(s))ds, \quad t \in I,$$

$$w_1, \ w_2 \in C(I), \ w_1 \geqslant w_2, \ t \in I,$$
$$N, M \in C(I), \ N \geqslant 0, M \geqslant 0, t \in I;$$

$$\int_0^t sM(s)ds < \infty, \quad t \in I_0;$$

$$N(t) + tL(t) \leqslant 1 + t^2M(t), \quad t \in I_0.$$

于是有

$$\omega(t, x, y, z) = x - L(t)y - N(t)z, \quad t \in I_0,$$

$$\Omega w = \int_0^t M(s)w(s)ds,$$

$$\rho(t) = \beta t(1 + t)\exp\int_0^t s(1 + s)M(s)ds,$$

对充分小的 β.

【其他问题】 类似于线性常微分方程的边值问题或特征值问题的一个问题,是求解具有边界条件 $u = 0$ 的线性积分微分方程

$$(pu')' - qu + \lambda\left(\rho u + \int_G k(x, y)u(y)dy\right) = 0.$$

设

$$D[\varphi] = \int_G p\varphi'^2 dx, + \int_G q\varphi^2 dx,$$

$$H[\varphi] = \int_G \rho\varphi^2 dx + \int_G\int_G k(x, y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy,$$

于是上面这个问题可由在 $H[\varphi]=$ 常数的条件下使 $D[\varphi]$ 为极小的问题导出. 对上面边值问题的正交条件由

$$\int_G \rho u_i(x)u_j(x)dx + \int_G\int_G k(x, y)u_i(x)u_j(x)dxdy = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

给出([2]).

积分微分方程和数学物理或工程的问题有着紧密关系，在有旋流体的平衡问题([3])，三维机翼理论的 Prandtl 积分微分方程([4])，反应堆动力学等等的许多研究中常常出现. 关于第二个问题，具有常速度 V 的动翼翼幅上的环流分布 $\Gamma(y)$ 是由下列方程所决定的:

$$\alpha(y) = \frac{\Gamma(y)}{\pi k(y)t(y)V} + \frac{1}{\pi V}\text{ p.v.}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{d\Gamma(y')}{y - y'}.$$

我们称这个方程为 **Prandtl 积分微分方程** (Prandtl's integro-differential equation). 其中 b 是翼幅，y, y' 是与翼幅中央的距离，t 是机翼长，α 是从浮力为 0 的位置所测的倾角，$2\pi k$ 是浮力系数对倾角的曲线的斜率，p. v. 表示积分时取 Cauchy 主值'.

在随机过程方面的应用是 **Wiener-Hopf 型积分微分方程** (Wiener-Hopf integro-differential equation):

(6) $$\prod_{k=1}^{n}(D + \lambda_k)f(x) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\int_0^\infty f(x + t)dH(t),$$
$$x \geqslant 0,\ D = d/dx,$$

当 $x\to\infty$ 时具有有限极限的解的研究. 对于这个问题，利用算子半群'方法，方程(6)可以扩展成

$$\prod_{k=1}^{n}(A + \lambda_k)f(x) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\int_0^\infty(T_tf)(x)dH(t),\ x\in I,$$

其中 A 是算子半群 $\{T_t\}$ 的生成算子' (infinitesimal generator)，对它得到了类似于对(6)所得到的结果([5]).

【参】[1] Karl Nickel, Fehlerabschätzungs-und. Eindeutigkeitssätze für Integro-Differentialgleichungen, Arch. Rational Mech. Anal., **8** (1961), 158—180; [2] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics I, Interscience, 1953 (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特,数学物理方法 I, 科学出版社, 1958); [3] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Springer, 1931; [4] W. F. Durand, Aerodynamic theory II, Stanford Univ., 1935; [5] S. Karlin-G. Szegö, On certain differential-integral equations, Math. Z., **72** (1960)-205—228; [6] M. Namik Oğuztöreli, Time-lag control systems, Academic Press, 1966; [7] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946 (中译本: Н. И. 穆斯海里什维里,奇异积分方程, 上海科学技术出版社, 1966); [8] T. L. Saaty, Modern nonlinear equations, McGraw-Hill, 1967.

特殊函数方程

[英 special functional equations 法 équations fonctionelles spéciales 德 spezielle Funktionalgleichungen 俄 специальные функциональные уравнения 日 特殊関数方程式]

所谓**特殊函数方程**是指不包含极限运算的函数方程. 这种函数方程虽然在各种领域经常出现，但是没有统一的解法. 通常是把它们化为已知的标准型来求解. 在本条中，主要考虑的是非间断的取实数值的实变函数.

【加性函数和它的变形】函数方程

(1) $$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

的连续解只限于 $f(x) = cx$ (c 是常数) (A. L. Cauchy). 即使假定 $f(x)$ 在某点连续，在某点的邻域内是有界的或是可测函数，(1)的解也只限于 cx. 但是，G. Hamel 及 H. Lebesgue 利用超限归纳法证明了: 除 cx 外还存在无穷多个非可测的解(辻正次 [2] p. 94). 另一方面，A. Ostrowski 证明了: 如果(1)的解 $f(x)$ 在一个测

度为正的集合上不取两个相异值之间的值，那末 $f(x)$ 是连续的([3]). 这个事实一般也可以推广到 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示 n 维 Euclid空间中的点的情形. 这时，连续解只限于 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i$ (C_i 是常数). 这个方程的解恒满足方程

(2) $$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

(2)的连续解只限于 $f(x)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i + C_0$ (C_i 是常数). 对此也和(1)一样，如果一个在凸域 K 上满足(2)的解，在一个测度为正的集合上不取两个相异值之间的值，那末它是连续的(福原满洲雄[4]).

考虑

(3) $$g(x+y)=g(x)g(y)$$

的解. 如果存在 ξ 使得 $g(\xi)=0$，那末 $g(x)$ 恒等于 0，因此假设 $g(x)\neq 0$. 如果令 $x=y$，那末可以看到恒有 $g(x)>0$. 令 $f(x)=\log g(x)$，于是(3)可以化为(1). 因此，(3)的连续解只限于 $g(x)=\exp(cx)$.

考虑

(4) $$g(uv)=g(u)g(v)$$

的解. 如果存在 ξ，$\xi\neq 0$，使得 $g(\xi)=0$，那末 $g(u)$ 恒等于 0，因此假定 $u\neq 0$ 时 $g(u)\neq 0$. 对于 $u, v>0$ 令 $x=\log u$，$y=\log v$，于是(4)就化为(3). 又在(4)中如果令 $v=-1$，那末有 $g(-u)=g(-1)g(u)$，因为必须有 $g(-1)=\pm 1$，所以(4)的连续解是 $|u|^c$ 或 $(\mathrm{sign}\,u)\cdot|u|^c$.

【一般加法定理】 **一般加法定理** (general addition theorem) 是：如果方程

(5) $$f(x+y)=F(f(x), f(y))$$

在 $-\infty<x<+\infty$ 中存在连续的非常数解 $f(x)$，那末 $f(x)$ 是严格单调函数，而 $F(u, v)$ 是关于 u, v: $\alpha<u$, $v<\beta$ 的严格单调递增连续函数，且 $\alpha<F(u, v)<\beta$. 还存在一个 c 使得 $F(c, c)=c$，而且关于 (α, β) 中的任意的 u, v, w 有恒等式 $F(F(u, v), w)=F(u, F(v, w))$. 反之，如果 F 是具有这样性质的函数，那末在 $-\infty<x<+\infty$ 中存在连续的非常数解 $f(x)$. 假定 $f(x)$ 是这样的一个解，于是 $f(cx)$ 就给出了其它的连续解. 如果 $F(u, v)$ 还是连续可微的，那末 $f(x)$ 就是微分方程

$$f'(x)=F_v(f(x), a)c, \quad c=f'(0)$$

在初始条件 $f(0)=a$ 之下所得到的解.

假设 $F(u, v, w)$ 是 u, v, w 的有理整式. 如果 $F(f(x), f(y), f(x+y))=0$ 具有一个亚纯函数解 $f(x)$，那末 $f(x)$ 必须是有理函数，$\exp cx$ 的有理函数或椭圆函数([1] p. 64).

(6) $$f(x+y)+f(x-y)=2(f(x)+f(y))$$

在 $-\infty<x<+\infty$ 中的连续解都是 $f(x)=cx^2$. 当 x 是 m 维向量时，$f(x)$ 是 x 的同维数的二次函数 $f(x)=\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}x_i x_j$.

(7) $$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

在 $-\infty<x<+\infty$ 中的连续解是 $f(x)=\cosh cx=(e^{cx}+e^{-cx})/2$，或 $f(x)=\cos cx$. 如果允许取复数值，那末 $f(x)=(e^{ax}+e^{-ax})/2$ (a 是复数)，特别，当 a 取纯虚数时就包含 $\cos x$.

【Schröder 函数方程】函数方程

(8) $$f(\theta(x))=cf(x)$$

(其中 $\theta(x)$ 是给定的已知函数，c 是常数)称为 **Schröder 函数方程** (Schröder's functional equation). 如果 $f_1(x)$ 是它的特解 ($\neq 0$)，那末(8)的通解由 $f(x)=f_1(x)\varphi(x)$ 给出，其中 $\varphi(x)$ 是 $\varphi(\theta(x))=\varphi(x)$ 的通解. 现在假定存在一点 a 使得 $\theta(a)=a$，并且在 $x=a$ 的邻域中 $\theta(x)$ 和 $f(x)$ 都是可微的，于是 $f'(a)=0$ 或 $\theta'(a)=c$. 下面考虑 $\theta'(a)=c$ 的情形. 如果 $\theta(x)$ 在 $x=a$ 二次可微，且 $|c|<1$，那末在 $x=a$ 的邻域中序列 $\{(\theta_n(x)-a)c^{-n}\}$ ($\theta_0(x)=x, \theta_n(x)=\theta(\theta_{n-1}(x)), n=0,1,2,\cdots$) 一致收敛，它的极限 $f(x)$ 是所求(8)的一个解. 如果 $|c|=|\theta'(a)|>1$，且令 $\theta(x)=u$，那末在 $u=a$ 的邻域中 $f(\theta^{-1}(u))=c^{-1}f(u)$，这样就化为前面的情形.

关于 Schröder 方程(8)的结果，可以推广到函数方程组

(9) $$f_i(\theta_1(x), \theta_2(x), \cdots, \theta_n(x))$$

$$= \lambda_j f_j(x) + \delta_j f_{j-1}(x) + g_j(x)$$

$$j = 1, 2, \cdots, n,$$

这里 $\theta_i(x)$ 在 $x = 0$ 是 0，在 $x = 0$ 的邻域中是已给的全纯函数，由它们的一次项 $\theta_{j1}(x) = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n$ 的系数所组成的矩阵 A 的 Jordan 标准型†，是右端 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的系数的矩阵．假设特征值 $\lambda_j (j = 1, \cdots, n)$ 的绝对值是正的且小于 1，而 $g_j(x)$ 是只包含使 $\lambda_j = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_n^{m_n}$ 成立的那种项 $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$ 的多项式，于是适当选取 $g_j(x)$ 的系数，可以使得 (9) 在 $x = 0$ 的邻域中具有全纯解．对所有特征值 λ_j 的绝对值大于 1 的情形，可以得到同样的结论．

与此相关的是 **Abel 方程**

(10) $$f(\theta(x)) = f(x) + 1,$$

如果令 $\exp f(x) = \varphi(x)$，那末就得到形式上的 Schröder 方程

$$\varphi(\theta(x)) = c\varphi(x).$$

又考虑方程

(11) $$f(x+1) = A(x) f(x),$$

如果令 $\log f(x) = \varphi(x)$，那末由于得到所谓的差分方程

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \log A(x),$$

于是解它就行了．

【参】 [1] E. C. Picard, Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Gauthier-Villars, 1928; [2] 辻正次，集合論，共立出版，1933; [3] A. Ostrowski, Mathematische Miszellen XIV, Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen, Jber. Deutsch. Math. Verein., **38** (1929), 54—62; [4] 福原満洲雄，初等函数によって満足される函数方程式について I，函数方程式，7—2 (1954)，3—18; [5] 桑垣煥，函数方程式概論，基礎数学シリーズ，朝倉，1967; [6] F. Hausdorff, Mengenlehre, Walter de Gruyter, 第二版 1927, p. 175; (英译本：Set theory, Chelsea), 1962, (中译本：F. 豪斯道夫，集论，科学出版社，1960); [7] J. Aczél, Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, 1966 (translation of a German edition, 1961).

十四、特殊函数

特殊函数 [英 special functions, special functions for mathematical physics 法 fonctions spéciaux 德 spezielle Funktionen 俄 специальные функции 日 特殊関数] **特殊函数**一词，是下述各类函数族的总称. 有时也用**高等函数**或者**高等超越函数**(higher transcendental functions) 等名称. 1) Γ 函数以及有关的函数 (→Γ 函数); 2) 能用初等函数的不定积分表示的 Fresnel 积分、误差函数、对数积分等 (→ 合流型函数 [初等函数的不定积分]); 3) 椭圆函数 (→ 椭圆函数); 4) 在各种曲线坐标†系中将 Laplace 方程†等进行变量分离而得到的二阶线性常微分方程的解.

关于上述 1)—3) 各类函数，分别在各有关条中叙述；关于第 4 类函数，现在稍作叙述. 根据这类函数所满足的微分方程的奇点的性质，可以进一步将它分成如下的三种函数. 而如果方程所具有的奇点的个数少于下面的 i)—iii) 中所说的方程的奇点的个数，则此方程的解就能用初等函数来表示.

i) **超几何型特殊函数** (special function of hypergeometric type). 若微分方程在复球面上只有三个正则奇点†，则称这种方程的解为超几何型特殊函数. 超几何函数、Legendre 函数等都属于这种类型. 通过简单的变换，可以将任意的这种函数归结为超几何函数 (→ 超几何函数，球函数).

ii) **合流型特殊函数** (special function of confluent type). 若超几何微分方程†的正则奇点有两个汇合，即正则奇点有一个趋于另一个而使这样得到的奇点成为第一类非正则奇点†，则称满足这种方程的函数为合流型特殊函数 (→ 合流型函数). 这些函数都可用 Whittaker 函数†表示，Bessel 函数 (→ Bessel 函数) 以及其他许多重要的特殊函数都属于这种类型. 此外，只在无穷远点处具有第二类非正则奇点的微分方程的解，即抛物柱面函数†，也可以归结为这种类型.

iii) **椭球型特殊函数** (special function of ellipsoidal type). 若微分方程只有四个或五个正则奇点，其中某些也可能汇合而成为非正则奇点，则称满足这种方程的函数为椭球型特殊函数. Lamé 函数，Mathieu 函数，球体波函数 (→ Mathieu 函数，椭球调和函数) 等都属于这种类型. 这些函数与 i), ii) 不同，用差分微分方程来刻画它们是有困难的，这方面的研究也还没有充分地进行. 最狭义地讲，“特殊函数”这个名词用于 i) 和 ii) 两种函数，而不包括 iii).

【特殊函数的统一理论】 多数特殊函数是因解决实际问题的需要而分别引入的，但是，关于把这些函数作统一处理的理论，曾经提出过各种各样的考虑. 上一节中根据微分方程进行分类，也可以看作是一种统一的理论. 除此而外，还有如下的尝试.

1) 用 Barnes 的广义超几何函数†来表达，或者由形如

$$\int (\zeta-a_1)^{b_1}(\zeta-a_2)^{b_2}\cdots(\zeta-a_m)^{b_m}(\zeta-z)^c d\zeta$$

的定积分把它推广到多变数的情形而用推广的这种函数来表达 (→ 超几何函数).

2) 基于 Truesdell 的差分微分方程

$$\partial F(z,\alpha)/\partial z = F(z,\alpha+1)$$

的统一理论，它包括 Γ 函数在内 ([13]).

3) 基于用微分算子 (Laplace 算子) 的球带函数进行展开的观点加以统一，这种微分算子在作用于对称 Riemann 流形的可迁运动群下是不变的 (→ 酉表示). 由此特别可以统一地得

到各种公式.

【参】 [1] 犬井鉄郎, 特殊函数, 岩波全書, 1962; [2] 犬井鉄郎, 球函数・円壔函数・超幾何函数, 河出, 1948; [3] 石津武彦, 特殊関数論, 朝倉, 1963; [4] I. N. Sneddon, Special functions of mathe matical physics and chemistry, Oliver and Boyd, 1956; [5] 小谷正雄-橋本英典, 特殊函数, 岩波講座現代応用数学, 1958 (中译本: 小谷正雄, 橋本英典, 特殊函数, 上海科学技术出版社, 1962); [6] 森口繁一-宇田川銈久-一松信, 数学公式 III, 岩波全書, 1960; [7] 柴垣和三雄, 特殊函数論, 共立出版, 1956; [8] E. T. Whittaker-G. N. Watson, Modern analysis, Cambridge, 初版 1902, 第十版 1958; [9] E. Jahnke-F. Emde, Funktionentafeln, Teubner, 1933; [10] W. Magnus-F. Oberhettiner, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer, 1948, 修订版(英文版), 1966; [11] R. Courant-D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I, Springer, 第2版 1930 (中译本: R. 柯朗、D. 希尔伯特, 数学物理方法 I, 科学出版社, 1958); [12] A. Erdélyi 编, Higher transcendental functions I, II, III, McGraw-Hill, 1953—55, (中译本: A. 爱尔台里主编, 高级超越函数, 科学出版社, 1957); [13] C. A. Truesdell, An essay toward a unified theory of special functions based upon the functional equation $\partial F(z,\alpha)/\partial z = F(z,\alpha+1)$, Ann. of Math. Studies, Princeton, 1948; [14] F. W. Schäfke, Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik, Springer, 1963; [15] 小松勇作, 特殊函数, 朝倉, 1967; [16] J. Meixner, Spezielle Funktionen der mathematischen Physik, Handbuch der Physik II, Springer, 第二版 1933; [17] G. Szegö, Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 修订版 1959; [18] E. D. Rainville, Special functions, Macmillan, 1960; [19] Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, Физматгиз, 1965; (英译本: Special functions and the theory of group representations, Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs, Vol. 22, 1968); [20] W. Miller, Jr., Lie theory and special functions, Academic Press, 1968; [21] Y. L. Luke, The special functions and their approximations I, II, Academic Press, 1969; [22] 王竹溪-郭敦仁, 特殊函数概论, 科学出版社, 1979.

母函数 [英 generating function 法 fonction génératrice 德 erzeugende Funktion 俄 производящая функция 日 母関数] 给出了关于 t 的在 $t=0$ 的某个邻域内收敛的幂级数

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n,$$

就确定了数列 $\{a_n\}$. 这时称 $g(t)$ 为序列 $\{a_n\}$ 的**母函数**或**生成函数**. 对于函数列 $\{f_n(x)\}$ 也类似, 把在 (x, t) 空间的某个域内关于 x, t 收敛的级数

$$K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n$$

称为函数序列 $\{f_n(x)\}$ 的母函数. 还有, 当

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n$$

时, 有时称 $g(t)$ 为数列 $\{a_n\}$ 的**指数母函数** (exponential generating function). 例如, 二项式系数†和 Legendre 多项式†的母函数分别为 $(1+t)^n$ 和 $(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}$. 若已知 $\{a_n\}$ 或 $\{f_n(x)\}$ 的母函数, 就可以给出 a_n 和 $f_n(x)$ 的积分表示. 例如, 对后一种情况, 有

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C K(x,t)\frac{dt}{t^{n+1}},$$

其中积分路径 C 是以原点为中心的、正方向的、充分小的圆周. 可以把母函数关于 t 解析开拓到幂级数的收敛域以外. 许多重要的正交函数系的简单母函数是已知的(→正交函数系). 借助于母函数, 我们可以导出数列和函数列的解析性质, 因此, 它被广泛地应用. 在参数不是整数 n 而是连续的情形下, 一般说来, 把母函数作为 Laplace 变换†或 Fourier 变换†的形式来定义是方便的. 特别是对于随机分布的分布函数† $F(x)$, 对于 $F(x)$ 的矩 $\{a_n\}$ 的指数母函数

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tx}dF(x),$$

称为关于 $F(x)$ 的**矩量母函数** (moment generating function).

【Bernoulli 多项式】 用母函数

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

定义多项式系

$$B_n(x)=B_0(0)x^n+\binom{n}{1}B_1(0)x^{n-1}$$

$$+\binom{n}{2}B_2(0)x^{n-2}+\cdots+B_n(0),$$

称 $B_n(x)$ 为 n 次 **Bernoulli 多项式** (Bernoulli polynomial). 由于 $B_k(0)$ 是

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(0)\frac{t^n}{n!}$$

中 $t^k/k!$ 的系数, 所以我们有

$$B_0(0)=1,$$
$$B_1(0)=-1/2,$$
$$B_2(0)=1/6,\cdots;$$
$$B_{2n+1}(0)=0,\qquad n\geqslant 1;$$

当 $n\geqslant1$ 时，$(-1)^{n-1}B_{2n}(0)>0$. 称 $\boldsymbol{B}_n=|B_n(0)|$ 为 **Bernoulli 数**（Bernoulli number）（⇀数表 5）. 但是，有时也将 $B_n(0)$ 本身当作 B_n，也有时跳过第奇数个，而将 B_{2n} 写作 B_n. Bernoulli 多项式具有下述性质：

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1},$$
$$dB_n(x)/dx=nB_{n-1}(x),$$

它们可以应用于插值法†. 例如，差分方程

$$f(x+1)-f(x)=\sum_{n=0}^{m}a_nx^n$$

的多项式解，可以用

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n}{n+1}B_{n+1}(x)+\text{任意常数}$$

给出. 特别是，我们有 $1^n+2^n+\cdots+p^n=(B_{n+1}(p+1)-B_{n+1}(1))/(n+1)$.

【Euler 多项式】 用母函数

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

定义多项式系

$$E_n(x)=a_0x^n+\binom{n}{1}a_1x^{n-1}+\binom{n}{2}a_2x^{n-2}+\cdots+a_n,$$

称 $E_n(x)$ 为 n 次 **Euler 多项式**（Euler polynomial）. 其中 a_k 定义为 $a_k=E_k(0)$，

$$\frac{2}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{t^n}{n!},$$

从而 $a_0=1$, $a_1=-1/2$, $a_3=1/4,\cdots$, $a_{2n}=0$ $(n\geqslant1)$. 有时称 a_n 为 Euler 数. 然而，更经常的是把由

$$E_n=(-1)^n\sum_{\mu=0}^{n}2^{\mu}\binom{n}{\mu}a_{\mu},$$

即

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=\operatorname{sech}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{E_n}{n!}x^n$$

定义的 $\boldsymbol{E}_n$ 称为 **Euler 数**（Euler number）（⇀数表 5）. E_n 全都是整数，第奇数个为 0，即 $E_{2m+1}=0$ $(m=0,1,\cdots)$，而第偶数个为正，即 $E_{2m}>0$ $(m=0,1,\cdots)$；用十进制表示时，E_{4m} $(m\geqslant1)$ 的末位数字是 5，E_{4m+2} $(m\geqslant1)$ 的末位数字是 1. 有时也将 E_{2n} 写成 E_n. 它还满足 $\sec x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}x^n$. Euler 多项式满足

$$E_n(x)+E_n(x+1)=2x^n,$$
$$E_n(1-x)=(-1)^nE_n(x),$$
$$dE_n(x)/dx=nE_{n-1}(x).$$

特别是，$-1^n+2^n-3^n+4^n-\cdots+(-1)^pp^n=((-1)^pE_n(p+1)-E_n(1))/2$.

【参】［1］ 林桂一，数值計算，岩波，1941；［2］ 石津武彦，特殊函数論，朝倉，1963；［3］ E. B. McBride, Obtaining generating functions, Springer, 1971.

椭圆函数 ［英 elliptic function 法 fonction elliptique 德 elliptische Funktion 俄 эллиптическая функция 日 楕円関数］ 【椭圆积分】 设 $\varphi(z)$ 是关于 z 的复系数的三次或四次多项式，$R(z,w)$ 是关于 z, w 的有理函数，则称 $R(z,\sqrt{\varphi(z)})$ 为**椭圆无理函数**（elliptic irrational function），形如 $\int R dz$ 的积分总称为**椭圆积分**（elliptic integral）. 之所以有这个名称，是由于这些积分是在计算椭圆弧长时出现的. 任何椭圆积分，通过适当的变量变换，都能够表示为下述三种椭圆积分

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$
$$\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz,$$
$$\int\frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

与初等函数之和（⇀公式 16 I）. 分别称这三种积分为 **Legendre-Jacobi 标准型**（Legendre-Jacobi standard form）下的**第一类、第二类、第三类椭圆积分**（elliptic integral of the first, second, third kind）. 这种分类法相应于 Abel 积分†的分类，常数 k 称为该椭圆积分的**模数**（modulus），a 称为**参数**（parameter）. 设 $\varphi(z)$ 的四个根为 α_1, α_2, α_3, α_4（在 $\varphi(z)$ 是三次多项式的情况下，

可以认为其中有一个是 ∞）．对应于椭圆无理函数的 Riemann 面† $\mathfrak{R}$，以零点 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为分歧度 1 的分枝点†，而且由两叶构成，亏格†为 1．若被积函数没有残数†不为 0 的极点，则积分的多值性完全是由于沿 $\mathfrak{R}$ 的正截口（同调群的基）的积分值（称为**周期模数**（periodicity modulus））不等于零而引起的．

【第一类椭圆积分】　这是 R 除分枝点以外没有奇点，因而 R 的积分的多值性只是由于 $\mathfrak{R}$ 的拓扑结构而产生的情形．它的标准型是

$$(1)\qquad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = w = F(k,\varphi),$$

其中 $z=\sin\varphi$．这个积分是 $\operatorname{sn} w$ 的反函数．当设

$$K = K(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(k,\pi/2)$$

$$K' = K(k'),\quad k'^2 = 1-k^2$$

时，周期模数为 $2iK'$, $4K$．$K(k)$ 称为**第一类完全椭圆积分**（complete elliptic integral of the first kind)．与此相应，$F(k,\varphi)$ 称为**第一类不完全**（incomplete）**椭圆积分**（→ 数表 16）．若设

$$(2)\qquad \sin\varphi_1 = \frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$k_1 = \frac{1-k'}{1+k'},$$

则有 $F(k,\varphi) = (1+k_1)F(k_1,\varphi_1)/2$ 的关系，称为 **Landen 变换**（Landen's transformation)．由于当 $0<k<1$ 时有 $k_1<k$，根据这个变换，可以将椭圆积分的计算归结为模数 k 较小的积分．

【第二类椭圆积分】　这是 R 具有残数为 0 的极点，因而它的积分除极点外没有其他奇点的情形．它的标准型是

$$(3)\qquad F(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(k,\varphi),$$

其中 $z=\sin\varphi$．若设 $z=\operatorname{sn} u$，则变成

$$F(z) = \int_0^u dn^2u du = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + \frac{E}{K}u,$$

其中 Θ 是 Jacobi 的 Θ 函数，

$$\Theta(u) = \vartheta_4\left(\frac{u}{2K}, \frac{iK'}{K}\right),$$

而 ϑ_4 是后面所述的 ϑ 函数，K, K' 就是上面第一类椭圆积分中所述的量．此外，还有量

$$E = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}\,dz = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(k,\pi/2),$$

称为**第二类完全椭圆积分**．

【第三类椭圆积分】　这是 R 具有残数不为 0 的极点，因而它的积分具有对数奇点的情形．在这种情形，残数也引起积分的多值性．它的标准型是

$$F(z) = \int_0^z \frac{dz}{(1-a^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-a^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

若设 $z=\operatorname{sn} u$, $a^2 = k^2\operatorname{sn}^2\alpha$，则可表示为

$$F(z) = \frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn}\alpha}\left(\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-\alpha)}{\Theta(u+\alpha)} + u\frac{\Theta'(\alpha)}{\Theta(\alpha)}\right) + u$$

（→ 公式 16）．

【椭圆函数与周期函数】　椭圆函数在历史上是作为椭圆积分的反函数而引入的，由于已经知道椭圆函数的特点在于它的双周期性，所以现在它是作为双周期函数而定义的．

一般地说，在加法群† G 上定义的函数 $f(x)$，如果对于某个 $\omega\in G$，关系式 $f(x+\omega)=f(x)$ 对一切 $x\in G$ 成立，则称 ω 为 $f(x)$ 的**周期**（period)．具有不等于 0（G 的单位元素）的周期的函数 $f(x)$，称为**周期函数**（periodic function)．$f(x)$ 的周期的全体，构成 G 的子群．若存在该子群的基 $\omega_1,\cdots,\omega_n$，则称这些 $\omega_1,\cdots,\omega_n$ 为 $f(x)$ 的**基本周期**（fundamental period)．

一个实变量的不等于常数的连续周期函数，只具有一个正的基本周期，称为**单周期函数**(simply periodic function)．三角函数†是其代表，$\sin x$，$\cos x$ 具有基本周期 2π，$\tan x$，$\cot x$ 具有基本周期 π (→ Fourier 级数)．

n 个复变量的单值亚纯函数，只要不是常数，那么它在实数域上具有的线性无关的基本周期的个数不能多于 $2n$ 个．具有两个基本周期的单复变函数，称为**双周期函数** (doubly periodic function)．设某个双周期函数的基本周期为 ω，ω'，对于任意的数 a，以 a，$a+\omega$，$a+\omega'$，$a+\omega+\omega'$ 等四点作为顶点的平行四边形，称为**基本周期平行四边形** (fundamental period-parallelogram)．复平面被基本周期平行四边形和将它平行移动了 $m\omega+n\omega'$ $(m,n=0,1,\cdots)$ 而得到的全等的平行四边形的网络所覆盖．这些平行四边形称为**周期平行四边形** (period-parallelogram)．

在有限复平面上亚纯的双周期函数 $f(u)$，称为**椭圆函数**．为了易于处理各种公式，通常将椭圆函数的基本周期写为 $2\omega_1$，$2\omega_3$，并引入由关系 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$ 定义的 ω_2．椭圆函数的导数，因而高阶导数，也是具有相同的双周期的椭圆函数．具有相同的双周期的椭圆函数的全体，构成一个域†．在一个周期平行四边形内的极点的数目是有限的．这些极点的阶数之和，称为椭圆函数的**阶数** (order)．在一个周期平行四边形内没有极点的椭圆函数是常数(**Liouville 第一定理**)．椭圆函数在任何一个周期平行四边形内的极点处的残数之和必为 0 (**Liouville 第二定理**)．因而不存在所谓一阶的椭圆函数．n 阶椭圆函数在一个周期平行四边形内取任一值 n 次 (**Liouville 第三定理**)．在一个周期平行四边形内的零点之和与极点之和的差，等于一个周期 (**Liouville 第四定理**)．

【Weierstrass 椭圆函数】 K. Weierstrass 将

$$\wp(u)=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left(\frac{1}{(u-\Omega)^2}-\frac{1}{\Omega^2}\right)$$

定义为最简单的椭圆函数．式中 $\Omega=2m\omega_1+2n\omega_3$，$m$，$n$ 为整数．$\sum'$ 表示分别对 m，n 自 $-\infty$ 至 $+\infty$ (除 $\Omega=0$ (即 $m=n=0$) 外)求和，这是基本周期为 $2\omega_1$，$2\omega_3$ 的二阶椭圆函数，称为 Weierstrass 的 **$\wp$ 函数** (pe-function)．Weierstrass 还按照

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum{}'\left(\frac{1}{u-\Omega}+\frac{u}{\Omega^2}+\frac{1}{\Omega}\right),$$

$$\sigma(u)=u\prod{}'\left(\left(1-\frac{u}{\Omega}\right)\exp\left(\frac{u}{\Omega}+\frac{u^2}{\Omega^2}\right)\right)$$

定义了 **ζ 函数** (zeta function) 和 **σ 函数** (sigma function)．它们具有拟周期性，即

(4) $\qquad \zeta(u+2\omega_i)=\zeta(u)+2\eta_i,$

(5) $\qquad \sigma(u+2\omega_i)=-e^{2\eta_i(u+\omega_i)}\sigma(u),$

$$\eta_1+\eta_2+\eta_3=0,\quad \eta_i=\zeta(\omega_i),\quad i=1,2,3;$$

它们还满足下列关系式:

(6) $\qquad \wp(u)=-\zeta'(u),$

(7) $\qquad \zeta(u)=d\log\sigma(u)/du=\sigma'(u)/\sigma(u).$

$\wp(u)$ 是偶函数，$\zeta(u)$，$\sigma(u)$ 是奇函数．若沿基本周期平行四边形的边界一周积分 $\zeta(u)$，就得到

(8) $$\left.\begin{matrix}\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1\\ \eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2\\ \eta_3\omega_2-\eta_2\omega_3\end{matrix}\right\}=\pm\frac{\pi}{2}i,\quad \Im\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)\leqslant 0;$$

称为 **Legendre 关系** (Legendre's relation)．

$\wp$ 函数的导数为

$$\wp'(u)=-2\sum 1/(u-\Omega)^3,$$

它是三阶椭圆函数，在它与 $\wp$ 函数之间，有下列关系成立:

(9) $$\begin{aligned}(\wp'(u))^2&=4(\wp(u))^3-g_2\wp(u)-g_3\\&=4(\wp(u)-e_1)(\wp(u)-e_2)(\wp(u)-e_3),\end{aligned}$$

$$g_2=60\sum{}' 1/\Omega^4,\quad g_3=140\sum{}' 1/\Omega^6,$$

$$e_i=\wp(\omega_i),\quad i=1,2,3.$$

已经知道，将此式逐次微分，当 n 是偶数时，$\wp^{(n)}(u)$ 可以表示为 $\wp(u)$ 的有理整式；当 n 是奇数时，可以表示为 $\wp(u)$ 与 $\wp'(u)$ 的有理整式之积．

特别是，当在(9)中设 $\wp(u)=z$ 时，则可发现 $\wp$ 函数是椭圆积分

$$u=\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}$$

的反函数 (→ 公式 16 IV)．

任何椭圆函数都能用 Weierstrass 函数来表示．例如，若假定 $f(u)$ 的极点为 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，它们的阶数顺次为 $h_1, h_2, \cdots, h_m$，$f(u)$ 在极点 a_k 邻近展开的主要部分†为

$$(10)\quad \sum_{j=1}^{h_k}\frac{A_{kj}}{(u-a_k)^j},\quad k=1,2,\cdots,m,$$

则有

$$(11)\quad f(u)=C+\sum_{k=1}^{m}\Big(A_{k1}\zeta(u-a_k)+\sum_{j=1}^{h_k}\frac{(-1)^jA_{kj}}{(j-1)!}\wp^{(j-2)}(u-a_k)\Big).$$

C 是根据 $f(u)$ 确定的常数．将此式加以整理，应用 $\wp$ 函数和 ζ 函数的加法定理（→公式 16），就可以把上式写为

$$f(u)=A+B\wp'(u)$$

的形式，其中 A，B 是 $\wp(u)$ 的有理函数．因而，若将具有相同周期的两个椭圆函数象上面那样用 $\wp$ 和 $\wp'$ 的有理函数来表示，并由其中消去 $\wp$ 和 $\wp'$，则得到一个系数为常数的代数方程．作为一个特例，由于 $f'(u)$ 也是一个与 $f(u)$ 具有相同周期的椭圆函数，在 $f(u)$ 和 $f'(u)$ 之间进行上面的运算，则可以知道，每一个椭圆函数满足一个常系数一阶代数微分方程†．此外，$f(u+v)$，$f(u)$，$f(v)$ 还满足一个代数方程．因而对于任何椭圆函数，都有一条代数的加法定理．

【第二类椭圆函数】 将椭圆函数的定义推广，如果亚纯函数对于基本"周期" $2\omega_1$，$2\omega_3$ 满足

$$(12)\quad f(u+2\omega_1)=\mu_1 f(u),\quad f(u+2\omega_3)=\mu_3 f(u)$$

（μ_1，μ_3 为常数），则称 $f(u)$ 为**第二类椭圆函数**（elliptic function of the second kind）．与此相应，我们把前面所说的椭圆函数称为**第一类椭圆函数**．若 ρ，v 是常数，则

$$(13)\quad f(u)=e^{\rho u}\sigma(u-v)/\sigma(u)$$

是第二类椭圆函数的一例．在这种情况下，有

$$(14)\quad \mu_i=e^{2\rho\omega_i-2v\eta_i},\quad i=1,3.$$

在给定 μ_1，μ_3 时，由此式可以决定 ρ，v，于是第二类椭圆函数可以用上面的函数 (13) 与第一类椭圆函数之积来表示．

【第三类椭圆函数】 如果亚纯函数 f 对于其"周期" $2\omega_1$，$2\omega_3$，下列关系成立：

$$(15)\quad f(u+2\omega_i)=e^{a_iu+b_i}f(u),\quad i=1,3,$$

（a_i，b_i 是常数），则称 $f(u)$ 为**第三类椭圆函数**（elliptic function of the third kind）（→Abel 簇 [Θ 函数]）．Weierstrass 的 σ 函数是其一例．此外，当以

$$(16)\quad \sigma_i(u)=-\frac{e^{\eta_i u}\sigma(u-\omega_i)}{\sigma(\omega_i)},\quad i=1,2,3$$

来定义 **σ_1，σ_2，σ_3 函数**时，它们也是第三类椭圆函数．对于第二类、第三类椭圆函数，$2\omega_1$，$2\omega_3$ 不是前面定义的意义下的周期，但是，为了方便起见，在这种情形下也沿用"周期"这个词．函数 σ_i 称为**余 σ 函数**（co-sigma function）．

【椭圆 ϑ 函数】 设 $q=e^{i\pi\tau}$，$\Im\tau>0$，由

$$(17)\quad \vartheta_1(v,\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nq^{(n+\frac{1}{2})^2}\sin(2n+1)\pi v,$$

$$\vartheta_2(v,\tau)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{(n+\frac{1}{2})^2}\cos(2n+1)\pi v,$$

$$\vartheta_3(v,\tau)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi v,$$

$$\vartheta_4(v,\tau)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nq^{n^2}\cos 2n\pi v$$

定义的函数，称为**（椭圆）ϑ 函数**（theta function）．这些式子称为 ϑ 函数的 **q 展开式**（q-expansion formula）．有时 ϑ_4 也写为 ϑ_0．ϑ 函数是周期为 1，τ 的第三类椭圆函数，任何椭圆函数都可以表示为几个 ϑ 函数的商（具体例子→公式 16）．由于 ϑ 函数的 q 展开式的各项是按 q 的 n^2 次幂排列的，收敛得快，对于数值计算非常便利．

还可以把基本周期为 $2\omega_1$，$2\omega_3$ 的一个椭圆函数看作以 $2\omega_1'=2\omega_3$，$2\omega_3'=-2\omega_1$ 为基本周期的椭圆函数．因而，以 $\tau=\omega_3/\omega_1$ 为参数的 ϑ 函数可以用以 $\tau'=\omega_3'/\omega_1'=-\omega_1/\omega_3=-1/\tau$ 为参数的 ϑ 函数来表示：

$$(18)\quad \begin{aligned} \vartheta_1(v,\tau) &= iA\vartheta_1(v/\tau,-1/\tau),\\ \vartheta_2(v,\tau) &= A\vartheta_4(v/\tau,-1/\tau),\\ \vartheta_3(v,\tau) &= A\vartheta_3(v/\tau,-1/\tau),\\ \vartheta_4(v,\tau) &= A\vartheta_2(v/\tau,-1/\tau),\\ A &= \sqrt{i/\tau}\exp(-\pi i v^2/\tau), \end{aligned}$$

称为 **Jacobi 虚数变换**(Jacobi's imaginary transformation). 当 $\Im_\tau \doteqdot 0$ 时，由于 $|q| \doteqdot 1$，所以 q 展开式收敛得慢，然而，若进行虚数变换，由于 $\Im(-1/\tau) \gg 1$，$|q| \doteqdot 0$，则计算就容易得多.

此外，ϑ 函数满足热传导型偏微分方程

$$(19)\quad \partial^2\vartheta(u,\tau)/\partial u^2 = 4\pi i\partial\vartheta(u,\tau)/\partial\tau$$

(→ 公式 16 II).

【Jacobi 椭圆函数】 C. G. J. Jacobi 将椭圆积分定义为 Legendre-Jacobi 标准型 (1) 的第一类椭圆积分的反函数. 采用上面的符号，则有如下的形式. 令 $w = \sqrt{e_1 - e_3}\,u$，$v = u/2\omega_1$，有

$$(20)\quad \operatorname{sn} w = \sqrt{e_1 - e_3}\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)},$$

$$(21)\quad \operatorname{cn} w = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)},$$

$$(22)\quad \operatorname{dn} w = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} = \frac{\vartheta_4(0)}{\vartheta_3(0)}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_4(v)}.$$

在这些 **sn, cn, dn 函数**之间，下列关系式成立:

$$(23)\quad \begin{aligned} \operatorname{sn}^2 w + \operatorname{cn}^2 w &= 1,\\ k^2\operatorname{sn}^2 w + \operatorname{dn}^2 w &= 1, \end{aligned}$$

式中

$$(24)\quad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{(\vartheta_2(0))^4}{(\vartheta_4(0))^4}.$$

k 称为**模数**，$k' = \sqrt{1-k^2}$ 称为**补模数** (complementary modulus). 此外，有 $d\operatorname{sn} w/dw = \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w$，而 $z = \operatorname{sn} w$ 是椭圆积分 (1) 的反函数. 关于其他各种性质 → 公式 16 III.

【参】 [1] 友近晋，楕円函数論，共立出版，1958; [2] 竹内端三，楕円函数論，岩波全書，1936; [3] C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum(收录于C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke, Berlin, 1881); [4] H. G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications I, II, III, Gauthier-Villars, 1886—91; [5] A. Hurwitz and R. Courant, Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen, Springer, 第三版 1929.

Γ 函数 [英 gamma function 法 fonction gamma 德 Gammafunktion 俄 гамма-функция 日 ガンマ関数] 【Γ 函数】 以无穷乘积

$$\frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$$

定义的函数 (L. Euler, 1729) $\Gamma(x)$，按照 A. M. Legendre 的命名，被称为 **Γ 函数**，或**第二类 Euler 积分** (Euler's integral of the second kind). 后一个名称是由于当 x 为正实数时，就有

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

的缘故. 这个函数有 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 这样的函数关系. 因而，当 x 为正整数时，$\Gamma(x+1) = x!$. 即使 x 不是正整数，C. F. Gauss 也将 $\Gamma(x+1)$ 表示为 $\Pi(x)$ 或 $x!$，现在也称它为**阶乘函数** (factorial function). Γ 函数也可以定义为函数关系 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 在条件 $\Gamma(1) = 1$，$\lim_{n\to\infty}\Gamma(x+n)/\Gamma(n)n^x = 1$ 下的解，而且可以写成如下的形式:

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{Cx}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n};$$

称为 **Weierstrass 标准型** (Weierstrass canonical form). 其中 C 称为 **Euler 常数** (Euler's constant)，其定义为

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right).$$

其数值近似为

0.577215664901532860606512090082 ….

虽然猜想它是超越数[†]，但是至今还不知道它是不是无理数. C 的数值，Adams (1878) 曾计算到 260 小数位，近年来用电子计算机计算到 1200 小数位以上，最近更进一步计算到 7000 小数位以上 (W. A. Beyer and M. S. Waterman, Math. Comp. **28** (1974)).

在复数 x 平面上，$\Gamma(x)$ 除了在 $x = 0, -1, -2, \cdots$ 处具有一阶极点而外，是全纯的. 在 $\Re x > 0$ 时，求 $\Gamma(x)$ 的积分表示，就得到

Hankel 的积分表示：

$$\Gamma(x) = -\frac{1}{2i\sin\pi x}\int_C(-t)^{x-1}e^{-t}dt,\quad x \neq \text{整数},$$

其中周线 C 是位于沿正实轴切开的复平面上，从 $+\infty$ 出发，按正方向绕原点一周再回到 $+\infty$ 的积分路径.

在该函数的各种性质中（→ 公式 17 I），特别是在数值计算方面，下面两个公式是有用的：

Binet 公式

$$\log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \left(\frac{1}{2}\right)\log 2\pi + 2\int_0^\infty \frac{\arctan\left(\frac{t}{x}\right)}{e^{2\pi t}-1}dt,\quad \Re x > 0,$$

以及在 $|\arg x| \leqslant (\pi/2)-\delta$ $(\delta > 0)$ 的条件下成立的渐近展开式（**Stirling 公式**）

$$\log\Gamma(x) \sim \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \left(\frac{1}{2}\right)\log 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}}{2n(2n-1)x^{2n-1}},$$

其中 B_n 是 Bernoulli 数†. 将后一个公式进行变形，可以得到

$$\Gamma(x+1) = x! \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x},$$

对于大的正整数 x，可以使用此式.

此外，积分

$$\int_0^\lambda e^{-t}t^{x-1}dt,\quad \int_\lambda^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,\quad \Re x > 0,$$

称为**不完全 Γ 函数** (incomplete gamma function)，在统计学、分子结构论等领域中经常出现.

【多 Γ 函数】 Γ 函数的导数具有如下的定义和名称：**双 Γ** (digamma) **函数**或 ψ (psi) **函数** $\psi(x) = d\log\Gamma(x)/dx$；**三 Γ** (trigamma) **函数** $\psi'(x)$；**四 Γ** (tetragamma) **函数** $\psi''(x)$；**五 Γ** (pentagamma) **函数** $\psi'''(x)$ 等. 这些总称为**多 Γ 函数** (polygamma functions). 其中 $\psi(x)$ 是函数方程

$$\psi(x+1)-\psi(x) = 1/x,\quad \psi(1) = -C,$$
$$\lim_{n\to\infty}(\psi(x+n)-\psi(1+n)) = 0$$

的解.

【B 函数】 **第一类 Euler 积分** (Euler's integral of the first kind)

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,\quad \Re x > 0,\quad \Re y > 0,$$

称为 **B 函数** (beta function)，它是两个变量 x, y 的解析函数†. 它与 Γ 函数之间有下列关系式：

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

若将此积分的上限 1 换成变数 α，便定义了**不完全 B 函数** (incomplete beta function) $B_\alpha(x,y)$.

【参】 [1] E. T. Whittaker-G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge, 第十版 1958; [2] K. Pearson, Tables of the incomplete Γ-function, Cambridge Univ. Press, 第二版 1968; [3] K. Pearson, Tables of the incomplete beta-function, Cambridge, 修订版 1951; [4] E. Artin, Einführung in die Theorie der Gammafunktionen, Hamburg, 1931 (英译本: E. Artin, The gamma function, Holt, Rinchart and Winston, 1964); [5] 福原満洲雄，ガンマ函数，弘文堂，1951; [6] 柴垣和三雄，ガンマ函数の理論と応用，岩波 1952. 此外，→ 特殊函数的 [参].

超几何函数 【英 hypergeometric function 法 fonction hypergéométrique 德 hypergeometrische Funktion 俄 гипергеометрическая функция 日 超幾何関数】【超几何函数】 复变数 z 的幂级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\Gamma(\gamma+n)}z^n,$$

称为 **Gauss 级数**或**超几何级数** (hypergeometric series). 它在 $|z| < 1$ 时对于 α, β, γ 的所有值是收敛的；在 $|z| = 1$ 时对于 $\Re(\alpha+\beta-\gamma) < 0$ 是收敛的；在 $z = 1$ 时的值为 $\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)/\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)$（假定 γ 不是 0 或负整数）. 把用超几何级数确定的函数进行解析开拓†，就得到在分枝点 $z = 1$ 与 $z = \infty$ 之间切开的全复平面上连续的单值解析函数，这个函数称为**超几何函数**（→ 公式 18 I）.

超几何函数是微分方程

$$(1)\quad z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2} + (\gamma-(\alpha+\beta+1)z)$$

$$\times \frac{dw}{dz} - \alpha\beta w = 0$$

的解. 这个方程称为**超几何微分方程** (hypergeometric differential equation) 或 **Gauss 微分方程** (Gaussian differential equation). 这是在 0, 1, ∞ 处具有正则奇点†的 Fuchs 型†微分方程, 用 Riemann 的 P 函数†表示它的解,则有

$$w = P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & z \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{matrix}\right\}.$$

但是, 当 $\gamma, \gamma-\alpha-\beta, \alpha-\beta$ 中有一个是整数时, 存在含有 $\log z$ 的级数, 它表示微分方程 (1) 在相应的奇点的邻域内的解. 当 $\gamma, \gamma-\alpha-\beta, \alpha-\beta$ 中没有一个是整数时, 由于奇点能按一次变换 $z'=z$, $z'=1/z$, $z'=1-z$, $z'=z/(z-1)$, $z'=(z-1)/z$, $z'=1/(1-z)$ 进行置换,因此奇点附近的解有 24 类. 这一点是 E. E. Kummer (1836) 最先发现的.

存在各种曲线 C, 使得沿 C 的积分

$$w = \int_C u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-zu)^{-\beta}du$$

成为 (1) 的解. 但是, 当 $\Re\alpha>0$, $\Re(\gamma-\alpha)>0$ 时,我们可取 C 为线段 $[0, 1]$. 于是,相应的解在单位圆内是全纯的,且有

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \times \int_C u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha}(1-zu)^{-\beta}du.$$

由于被积函数在 0, 1, $1/z$ 处有分枝点,若 γ 不是整数,则有

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{1}{(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})(1-e^{2\pi i\alpha})} \times \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \oint^{(1+,0+,1-,0-)} u^{\alpha} \times (1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-zu)^{-\beta}du,$$

$\Re\alpha>0$, $\Re(\gamma-\alpha)>0$; 若 γ 是整数, 就得到

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{1}{(1-e^{-2\pi i\alpha})} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \times \oint^{(1+,0+)} u^{\alpha}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-zu)^{-\beta}du.$$

其中的积分路径,例如关于第一个式子,意味着分别以正,正,负,负的方向,依次绕 1, 0, 1, 0 各一周. 有时就以这些式子作为对于 z 的一般的超几何函数的定义. 此外,还有其他的积分表示式 (→ 公式 18 I).

【升降算子法】 在复球面上具有三个正则奇点的二阶线性常微分方程, 可以通过简单的变换归结为 (1) 的形式. 在这类方程中, 对于含有参数的方程, 可以用两种方法将其主部分解为两个一阶因子之积, 然后作出关于参数的递推公式而直接求解, 这种求解的方法往往是有效的. 这种方法称为**升降算子法** (ladder method) 或**因子分解方法** (factorization method).

例如, 若将 Legendre 微分方程写成

$$L_n[w] \equiv (1-z^2)(((1-z^2)w')' + n(n+1)w) = 0,$$

就能作如下的分解:

$$L_n = S_n \cdot T_n + n^2 = T_{n+1} \cdot S_{n+1} + (n+1)^2,$$

$$T_n = (1-z^2)\frac{d}{dz} + nz,$$

$$S_n = (1-z^2)\frac{d}{dz} - nz.$$

所以若 w_n 是 $L_n[w]=0$ 的解, 那么在 $S_n \cdot T_n[w_n] + n^2 w_n = 0$ 的两边乘以 T_n, 就得到 $T_n \cdot S_n(T_n[w_n]) + n^2(T_n[w_n]) = 0$, 于是 $T_n[w_n]$ 就是 $L_{n-1}[w]=0$ 的解. 类似地 $S_{n+1}[w_n]$ 是 $L_{n+1}[w]=0$ 的解. 在这个意义上,分别称 S_n, T_n 为关于参数 n 的**上升算子** (step up operator, up-ladder) 和**下降算子** (step down operator, down-ladder). 上面的关系,归根到底,无非是 Legendre 函数的递推公式.

【超几何函数的推广】 J. Thomas (1870) 提出由

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_h)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n\cdots(\beta_h)_n} z^n,$$

$$(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)$$

定义的级数作为超几何级数的一个推广. 这个级数的和满足下面的 h 阶微分方程

$$(1-z)\frac{d^h w}{dt^h} + (A_1 - B_1 z)\frac{d^{h-1}w}{dt^{h-1}} + (A_2 - B_2 z)\frac{d^{h-2}w}{dt^{h-2}} + \cdots + (A_h - B_h z)w = 0, \quad t = \log z.$$

在 $h=2,\beta_1=1$ 的情形，它就是通常的超几何级数. 广义超几何级数的符号为

$$
{}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_q;z)
$$

$$
(2)\qquad =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{n!(\beta_1)_n(\beta_2)_n\cdots(\beta_q)_n}z^n.
$$

由于这个符号是由 L. Pochhammer 提出、由 E. W. Barnes 进行修正的，所以常称为 **Barnes 的广义超几何函数** (Barnes' extended hypergeometric function). 采用这样的符号，上面的 Gauss 级数就成为 ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$. 采用与超几何函数的 Barnes 的积分表示相同的形式，可以得到上面的 h 阶微分方程的解

$$
w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C-i\infty}^{C+i\infty}K(\zeta)H(\zeta)z^{-\zeta}d\zeta,
$$

其中

$$
K(\zeta)=K(\zeta+1),
$$

$$
H(\zeta)=\frac{\Gamma(\zeta+\alpha_1)\Gamma(\zeta+\alpha_2)\cdots\Gamma(\zeta+\alpha_h)}{\Gamma(\zeta+1+\beta_1)\Gamma(\zeta+1+\beta_2)\cdots\Gamma(\zeta+1+\beta_h)}.
$$

此外，超几何函数可以用形如

$$
\int\zeta^a(\zeta-1)^b(\zeta-z)^c d\zeta
$$

的定积分表示，若将它推广，就成为

$$
\int(\zeta-a_1)^{b_1}(\zeta-a_2)^{b_2}\cdots(\zeta-a_m)^{b_m}(\zeta-z)^c d\zeta
$$

的形式. 微分方程

$$
\sum_{\nu=0}^{m}\varphi_\nu(z)\frac{d^\nu w}{dz^\nu}=0
$$

称为 **Tissot-Pochhammer 微分方程** (Tissot-Pochhammer differential equation)，其中

$$
\varphi_\nu(z)=\frac{(-1)^{m-1-\nu}}{(h+m-2)\cdots(h+1)h}
$$

$$
\times\left(\binom{h+m-\nu-2}{m-\nu-1}P_1^{(m-1-\nu)}(z)\right.
$$

$$
\left.+\binom{h+m-\nu-2}{m-\nu}P_0^{(m-\nu)}(z)\right),
$$

$$
P_1(z)=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m),
$$

$$
P_1(z)=P_2(z)\left(\frac{\beta_1}{z-a_1}+\frac{\beta_2}{z-a_2}\right.
$$

$$
\left.+\cdots+\frac{\beta_m}{z-a_m}\right).
$$

这个方程有一个解

$$
w(z)=\int_C(\zeta-a_1)^{\beta_1-1}(\zeta-a_2)^{\beta_2-1}\cdots
$$

$$
(\zeta-a_m)^{\beta_m-1}(\zeta-z)^{h+m-2}d\zeta.
$$

Pochhammer (1870) 将此函数命名为广义超几何函数.

另一方面，H. E. Heine (1846) 将 Gauss 级数作另一种推广而引进了 Heine 级数，即

$$
\varphi(a,b,c;q;z)=1+\frac{(1-q^a)(1-q^b)}{(1-q)(1-q^c)}q^z
$$

$$
+\frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})(1-q^b)(1-q^{b+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^c)(1-q^{c+1})}q^{2z}
$$

$$
+\cdots.
$$

设 $q=1+\varepsilon,\ z=(1/\varepsilon)\log x$，并取极限 $\varepsilon\to 0$，上面的级数就成为 Gauss 级数.

P. Appell (1880) 将 Gauss 级数在形式上推广为两个变量的级数，定义了四种函数 ([3]). 称它们为 **Appell 二变量超几何函数** (Appell's hypergeometric function of two variables) (→ 公式 18 I 5). C. E. Picard (1881) 指出，它们都可以用形如

$$
\int_0^1 u^\alpha(1-u)^\beta(1-xu)^\gamma(1-yu)^\delta du
$$

的积分表示.

【矩阵变量的超几何函数】 对于 m 阶的对称矩阵 Z，C. S. Herz 按下述方式定义了**矩阵变量的超几何函数** (hypergeometric functions of matrix argument) ([5]). 设矩阵 Z 的迹的指数函数 $\exp(\operatorname{tr} Z)$ 为 $\operatorname{etr} Z$，令

$$
{}_0F_0(Z)=\operatorname{etr} Z,
$$

$$
(3)\qquad {}_{p+1}F_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots,\beta_q;\gamma;Z)
$$

$$
=\frac{1}{\Gamma_m(\gamma)}\int_{\Lambda>0}\operatorname{etr}(-\Lambda)_pF_q(\alpha_1,
$$

$$
\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots,\beta_q;\Lambda Z)
$$

$$
\times(\det\Lambda)^{\gamma-p}d\lambda_{11}d\lambda_{22}\cdots d\lambda_{mm},
$$

$$
(4)\qquad {}_pF_{q+1}(\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots,\beta_q;\gamma;\Lambda)
$$

$$
=\frac{\Gamma_m(\gamma)}{(2\pi i)^{m(m+1)/2}}\int_{\Re Z=X_0>0}\operatorname{etr}Z\,{}_pF_q(\alpha_1,
$$

$$
\cdots,\alpha_p;\beta_1,\cdots\beta_q;\Lambda Z^{-1})
$$

$$
\times(\det Z)^{-\gamma}dz_{11}dz_{22}\cdots dz_{mm}.
$$

其中

$$
\Lambda=(\lambda_{ij})_{i,j=1,\cdots,m}.
$$

$$Z = ((1+\delta_{ij})z_{ij}/2)_{i,j=1,\cdots,m},$$
$$\Gamma_m(\gamma) = \pi^{m(m-1)/4}\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-1/2)\cdots \Gamma(\gamma-(m-1)/2),$$

$\Lambda > 0$ 表示 Λ 是正定的†．当 $\Re\gamma > (m-1)/2$ 时 (3) 对于 $-Z>0$ 收敛，当 $\Re\gamma$ 充分大时，适当地取 X_0，(4) 在 Λ 空间的某个域内收敛，且成为其变量的解析函数．特别是有

$${}_1F_0(\alpha; Z) = (\det(E-Z))^{-\alpha}.$$

以此为基础，许多特殊函数和与此有关的公式都可以推广为矩阵变量的情形．例如，

$$(5)\quad A_\delta(Z) = \frac{{}_0F_1(\delta+(m+1)/2; -Z)}{\Gamma_m(\delta+(m+1)/2)}$$

是 Bessel 函数†的一个推广，当 $m=1$ 时归结为

$$(t/2)^{-\delta}J_\delta(t) = A_\delta((t/2)^2).$$

(5) 可以应用于数理统计学的非中心 Wishart 分布†．

【参】 [1] F. Klein, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktionen, Springer, 1933; [2] 福原滿洲雄，常微分方程式ノ解法 II，線型ノ部，岩波，1941．其他→特殊函数的[参]．特别是关于多变量的超几何函数：[3] P. Appell, Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, Mémor. Sci. Math., Gauthier-Villars, 1925.关于升降算子法的应用；[4] L. Infeld-T. E. Hull, The factorization method, Rev. Mod. Phys. **23** (1951), 21—68. 关于矩阵变量的情形，[5] C. S. Herz, Bessel functions of matrix argument, Ann. of Math., **61** (1955), 474—523; [6] L. J. Slater, Generalized hypergeometric functions, Cambridge Univ. Press, 1966.

球函数 【英 spherical function 法 fonction sphérique 德 Kugelfunktion 俄 сферическая функция 日 球関数】 现代数学中，"球函数"一词的含意已推广到一般的对称 Riemann 空间的不可约表示的情形(→西表示)，然而在本条中，只阐述三维空间内关于旋转群的古典 Laplace 球函数．

如果 V 满足 Laplace 方程† $\Delta V=0$，而且是正交坐标 x, y, z 的 n 次齐次函数，则称 V 为 n 次**立体(调和)函数** (solid harmonics)．当 n 是正整数时，存在 $2n+1$ 个线性无关的 n 次立体函数．在极坐标系 (r,θ,φ) 中写出，则为 $r^nY_n(\theta,\varphi)$，$Y_n(\theta,\varphi)$ 称为 n 次**面(调和)函数** (surface harmonics)．$Y_n(\theta,\varphi)$ 满足微分方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0,$$

对于 θ, φ 进行分离变量，并取 $z=\cos\theta$，则 φ 分量就可以用三角函数表示，而 θ 分量可以归结为下面的 **Legendre 连带的微分方程** (Legendre's associated differential equation) 的解：

$$(1)\quad (1-z)^2\frac{d^2w}{dz^2}-2z\frac{dw}{dz} + \left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-z^2}\right)w = 0.$$

【Legendre 函数】 (→公式 18 II)．在 (1) 中取 $m=0$，并将 n 替换成任意的复数 ν，这样得到的方程

$$(2)\quad (1-z^2)d^2w/dz^2-2zdw/dz + \nu(\nu+1)w = 0,$$

称为 **Legendre 微分方程** (Legendre's differential equation)．其基本解可以用

$$(3)\quad P_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint^{(1+,z+)}\frac{(\zeta^2-1)^\nu}{2^\nu(z-\zeta)^{\nu+1}}d\zeta,$$

$$(4)\quad Q_\nu(z) = \frac{1}{4i\sin\nu\pi}\oint^{(1+,-1+)}\frac{(\zeta^2-1)^\nu}{2^\nu(z-\zeta)^{\nu+1}}d\zeta$$

来表示．其中 (3) 的积分路径，是在沿 $(-\infty,-1)$ 剪开的 ζ 平面上的一条正向闭曲线，且使 $1, z$ 是该闭曲线所围的域的内点；(4) 的积分路径是在 ζ 平面上沿负向绕 1 一周，沿正向绕 -1 一周的横写的 8 字 (∞) 形的闭曲线．分别称函数 P_ν, Q_ν 为 ν 次的**第一类 Legendre 函数**和**第二类 Legendre 函数** (Legendre function)．(3) 称为 $P_\nu(z)$ 的 **Schläfli 积分表示** (Schläfli's integral representation)．若 $\Re(\nu+1)>0$，也可以将 (4) 的积分路径变形而得到

$$(5)\quad Q_\nu(z) = \frac{1}{2^{\nu+1}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-\zeta^2)^\nu}{(z-\zeta)^{\nu+1}}d\zeta.$$

当 ν 是整数时，用 (5) 比较方便．

从上面的定义式 (3)—(5)，能够推出次数不同的 Legendre 函数之间的递推公式．关于 $P_\nu(z)$ 的递推公式和关于 $Q_\nu(z)$ 的递推公式在形式上是完全相同的 (→公式 18 II)．将 $P_\nu(z)$ 的被积函数按 $z-1$ 展开，当 $|1-z|<2$ 时，

可以将 $P_\nu(z)$ 用超几何级数表示，即 $P_\nu(z) = F(\nu+1, -\nu, 1, (1-z)/2)$；将 $Q_\nu(z)$ 的被积函数按 ζ/z 展开，当 $|z|>1$，$|\arg z|<\pi$ 时，可以将 $Q_\nu(z)$ 用超几何级数†表示，即

$$Q_\nu(z) = \left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{(2z)^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)}\right) \times F\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu+2}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right).$$

这些展开式分别表示 Legendre 微分方程在正则奇点† $z=1$ 和 $z=\infty$ 的邻域内的级数解（→公式 18 II）。

在 ν 是正整数 n 的情况下，由于在 (3) 中，$\zeta=1$ 不是分枝点，所以可以把它表示为

$$(6)\qquad P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\frac{(\zeta^2-1)^n}{2^n(z-\zeta)^{n+1}}d\zeta = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n,$$

称为 **Rodrigues 公式**．在此情形下，$P_n(z)$ 是一个 n 次多项式：

$$P_n(z) = \sum_{r=0}^{[n/2]}(-1)^r \times \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!}z^{n-2r},$$

$$P_0(z) = 1,$$

称为 **Legendre 多项式** (Legendre's polynomial) (A. M. Legendre, 1784)．若取用极坐标表示的两点 (ρ,θ)，$(1,0)$ 的距离的倒数 $(1-2\rho\times\cos\theta+\rho^2)^{-\frac{1}{2}}$ 作为母函数†，把它按 ρ 展开，并设 $z=\cos\theta$，则可以得到 $\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)\rho^n$．由于 $P_n(z)$ 是作为 ρ^n 的系数而出现的，所以也称为 **Legendre 系数** (Legendre's coefficient)．当 z 是实数时，$((2n+1)/2)^{\frac{1}{2}}P_n(z)$ 构成区间 $[-1,+1]$ 上的正规正交系（→正交函数系）．$P_n(z)$ 的 n 个零点全是实的单根，并且处于区间 $(-1,+1)$ 内．当 n 充分大时，有下列渐近式：

$$P_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{n\pi\sin\theta}}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$Q_n(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\pi}{2n\sin\theta}}\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

【连带的 Legendre 函数】（→公式 18 II）设 m 是正整数，由 Legendre 函数，按照

$$P_\nu^m(z) = (1-z^2)^{m/2}d^m P_\nu(z)/dz^m,$$
$$Q_\nu^m(z) = (1-z^2)^{m/2}d^m Q_\nu(z)/dz^m$$

定义的 $P_\nu^m(z)$，$Q_\nu^m(z)$，分别称为**第一类连带的 Legendre 函数**和**第二类连带的 Legendre 函数** (associated Legendre function)．这个定义是 N. M. Ferrers 给出的，对于 $-1<z<1$ 的情形，应用起来是方便的．对于一般的复数 z（正确地说，在复平面上除去线段 $[-1,+1]$ 后得到的域 G 内的复数 z），可以采用 H. E. Heine 和 E. W. Hobson 的定义：

$$P_\nu^m(z) = (z^2-1)^{m/2}d^m P_\nu(z)/dz^m,$$
$$Q_\nu^m(z) = (z^2-1)^{m/2}d^m Q_\nu(z)/dz^m.$$

连带的 Legendre 函数满足连带的 Legendre 微分方程 (1)．特别是在 $\nu=n$（正整数），$z=x$（实数）的情形，$\left\{\frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\right\}^{\frac{1}{2}}P_n^m(x)$ $(n=0,1,2,\cdots, m=$ 常数) 构成 $[-1,1]$ 上的正规正交函数系．

Legendre 函数的**加法定理** (addition theorem) 是：

$$P_n(z_1z_2 \pm \sqrt{\pm(1-z_1^2)}\sqrt{\pm(1-z_2^2)}\cos\varphi) = P_n(z_1)P_n(z_2) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times P_n^m(z_1)P_n^m(z_2)\cos m\varphi.$$

其中各复号的顺序相同，取上面的正号的等式是按 Ferrers 定义得出的，而取下面的负号的等式是按 Heine-Hobson 定义得出的．

【面调和函数】 由上面的考察知道，对于面调和函数 $Y_m(\theta,\varphi)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，有 $2n+1$ 个无关的解

$$P_n(\cos\theta),$$
$$P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi,$$
$$P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi;$$
$$1\leqslant m\leqslant n.$$

因为 $P_n(\cos\theta)$ 在单位球面的 n 个纬度线上为 0，$P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi$，$P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi$ 在 $n-m$ 个纬度线和 m 个经度线上为 0，所以前者称为**带（调和）函数** (zonal harmonics)，后者称为**田形（调和）函数** (tesseral harmonics)．n 次的一般的面调和函数 Y_n 可以用带调和函数和田形调和函数的线性组合来表示：

$$(7)\quad Y_n(\theta,\varphi)=A_{n,0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(A_{n,m}\cos m\varphi+B_{n,m}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta).$$

若将两个面调和函数 $Y_n^{(1)}$，$Y_l^{(2)}$ 表示为 (7) 的形式，则下列正交关系成立：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}Y_n^{(1)}(\theta,\varphi)Y_l^{(2)}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi=\delta_{n,l}\times\frac{4\pi}{2n+1}\left(A_{n,0}^{(1)}A_{n,0}^{(2)}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\times(A_{n,m}^{(1)}A_{n,m}^{(2)}+B_{n,m}^{(1)}B_{n,m}^{(2)})\right).$$

由于带调和函数和田形调和函数的全体构成球面上的完备正交系†，因此，象 Fourier 级数那样，球面上的函数 $f(\theta,\varphi)$ 可以展开成一个正交级数

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n,0}P_n(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{n}(A_{n,m}\cos m\varphi+B_{n,m}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta)\right).$$

为了求出面调和函数，下面的方法是有用的．设与方向余弦 l，m，n 成比例的方向为 ν，则函数

$$\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{r}=\alpha\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{r}\right),$$
$$\alpha=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

是 Laplace 方程的解．这相当于物理上的矩为 α，方向为 ν 的双极的势†．一般的多极的势

$$V=c\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial}{\partial\nu_i}\right)\left(\frac{1}{r}\right)$$

也满足 Laplace 方程．若令这个 V 为 $U_n(x,y,z)r^{-2n-1}$，则 U_n 为 n 阶球面函数 (**Maxwell 定理**)．若 ν_i 取各个特殊方向，则相应地可以得到各个球面函数．例如，若取所有的 ν_i 为 z，则可以得到带调和函数；若取 $n-m$ 个 ν_i 为 z，而 m 个 ν_i 对称地取在 xy 平面上，则可以得到田形调和函数．设连接原点与极坐标中两点 (r,θ,φ) 和 (r',θ',φ') 的两直线间的夹角为 γ，则 $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$，若取连接原点和 (r',θ',φ') 的直线作为定义 P_n 的轴，则得

$$P_n(\cos\gamma)=(-1)^n\frac{r^{n+1}}{n!}\left(\frac{x'}{r'}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y'}{r'}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{z'}{r'}\frac{\partial}{\partial z}\right)^n\left(\frac{1}{r}\right),$$

称为**双轴球面函数** (biaxial spherical surface function)．根据 $P_n(z)$ 的加法定理，还可以把双轴球面函数用关于每个轴的球面函数来表示．

【Legendre 函数的推广】 现在将 m 为正整数的连带函数推广到 m 不是正整数的情形．首先考虑 m 是负整数的情形，将 m 改写为 $-m$，并设

$$P_\nu^{-m}(z)=(1-z^2)^{-m/2}\int_1^z d\zeta_m\int_1^{\zeta_m}d\zeta_{m-1}\cdots\int_1^{\zeta_3}d\zeta_2\int_1^{\zeta_2}P_\nu(\zeta_1)d\zeta_1,$$

$$Q_\nu^{-m}(z)=(1-z^2)^{-m/2}\int_\infty^z d\zeta_m\int_\infty^{\zeta_m}d\zeta_{m-1}\cdots\int_\infty^{\zeta_3}d\zeta_2\int_\infty^{\zeta_2}Q_\nu(\zeta_1)d\zeta_1$$

(Ferrers 的定义)．这时，下列关系式成立：

$$P_\nu^{-m}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(z),$$
$$Q_\nu^{-m}(z)=(-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(z).$$

(若取 Heine-Hobson 的定义，便可去掉其中的 $(-1)^m$.) 进而对于一般的 m，利用下列**超球微分方程** (hyperspherical differential equation)

$$(1-z^2)d^2w/dz^2-2(\mu+1)zdw/dz+(\nu-\mu)(\nu+\mu+1)w=0$$

的两个基本解，即**超球函数** (hyperspherical function)：

$$P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)=\frac{e^{-\nu\pi i}}{2^{\nu-\mu}4\pi\sin\nu\pi}$$

$$\times \oint^{(z+,1+,z-,1-)} \frac{(\zeta^2-1)^\nu}{(\zeta-z)^{\nu+\mu+1}} d\zeta,$$

$$Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z) = \frac{e^{(1+\nu)\pi i}}{2^{\nu-\mu}4i\sin\nu\pi} \times \oint^{(-1+,1-)} \frac{(\zeta^2-1)^\nu}{(\zeta-z)^{\nu+\mu+1}} d\zeta$$

（积分路径，例如后一式中，是以正方向绕 -1 一周，以负方向绕 1 一周），定义关于任意的 μ 的连带的 Legendre 函数为：

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^\mu\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{\mu/2}P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z),$$

$$Q_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{2^\mu\Gamma(\nu+1)}(z^2-1)^{\mu/2}Q_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z).$$

特别是，上面的基本解中的第一个，即 $P_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z)$，在 $\nu-\mu$ 为正整数时，称为 **Gegenbauer 多项式**（Gegenbauer polynomial），记作 $C_{\nu-\mu}(z)$，它可以作为母函数的 $(1-2hz+h^2)^{-(2\mu+1)/2}$ 的展开式的系数而得到.

关于多变量的球函数，P. Appell, J. Kempé de Fériet 曾进行过研究（[2]）.

【参】 [1] E. W. Hobson, The theory of spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge Univ. Press, 1931 (Chelsea, 1955); [2] P. Appell-J. Kempé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, 1926. 其他→特殊函数的[参].

合流型函数 [英 function of confluent type, 法 fonction du type confluent 德 Funktion vom konfluenten Typ 俄 конфлюентная функция 日 合流型関数] 【合流型超几何函数】 Fuchs 型†常微分方程的几个正则奇点汇合而成的微分方程，称为**合流型微分方程**，其解称为**合流型函数**. 实用上最常见的是超几何微分方程†的一个正则奇点与无穷远点重合而成为第一类非正则奇点†的**合流型超几何微分方程**（confluent hypergeometric equation），即

$$(1)\qquad z\frac{d^2w}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{dw}{dz}-\alpha w=0$$

以及与其有关的方程. (1) 以 $z=0$ 为正则奇点，因而具有级数解（收敛半径为 ∞）

$$(2)\qquad F(\alpha,\gamma;z) = {}_1F_1(\alpha,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}z^n$$

（$\gamma\neq 0$ 或负整数）. 上式中的 ${}_1F_1$ 是 Barnes 的广义超几何函数†. (2) 称为**合流型超几何函数** [hypergeometric function of confluent type) 或 **Kummer 函数**. 若 $\gamma\neq$ 正整数，方程 (1) 的另一个与 (2) 无关的解可由 $z^{1-\gamma}F(1+\alpha-\gamma, 2-\gamma;z)$ 给出（→公式 19 I）.

【Whittaker 函数】 若在 (1) 中设 $w=e^{z/2}\cdot z^{-\gamma/2}W$，$\gamma-2\alpha=2k$，$\gamma^2-2\gamma=4m^2-1$，就得到 **Whittaker 微分方程**

$$(3)\quad \frac{d^2W}{dz^2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{k}{2}+\frac{1/4-m^2}{z^2}\right)W=0.$$

若 $2m$ 不是整数，(3) 具有对于所有有限值成立的两个级数解

$$M_{k,m}(z) = z^{1/2+m}e^{-z/2} \times F(1/2+m-k, 1+2m;z),$$

$$M_{k,-m}(z) = z^{1/2-m}e^{-z/2} \times F(1/2-m-k, 1-2m;z).$$

在 $2m$ 为整数的情形，由于 $M_{k,m}$ 和 $M_{k,-m}$ 线性相关，E. T. Whittaker 考虑了如下形式的解：

$$W_{k,m}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\Gamma\left(k+\frac{1}{2}-m\right)z^k e^{-z/2} \times \int_\infty^{(0+)}(-t)^{-k-\frac{1}{2}+m}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} \times e^{-t}dt.$$

然而，由于当 $k-1/2-m$ 为负整数时该积分没有意义，所以在 $\Re(k-1/2-m)\leqslant 0$ 的情形，以将上式变形而得到的函数

$$W_{k,m}(z) = \frac{z^k e^{-z/2}}{\Gamma(1/2-k+m)}\int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+m} \times \left(1+\frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+m} e^{-t}dt$$

作为定义. 这样的定义对于除负实数以外的所有 z，对于任意的 m, k 都适用. 函数 $M_{k,m}$, $W_{k,m}$ 称为 **Whittaker 函数**. Bessel 函数†是它的特殊情形，且有下列关系：

$$J_n(z) = \frac{z^{-1/2}}{2^{2n+1/2}i^{n+1/2}\Gamma(n+1)}M_{0,n}(2iz).$$

对于 Whittaker 微分方程，由于 $W_{-k,m}(-z)$ 也

是解，且 $W_{k,m}(z)/W_{-k,m}(-z)$ 不是常数，所以可将 $W_{k,m}(z)$ 与 $W_{-k,m}(-z)$ 作为一对基本解(→ 公式 19 II).

【抛物柱面函数】 若设 $x=(\xi^2-\eta^2)/2$, $y=\xi\eta$，则分别对应于 $\xi=$ 常数和 $\eta=$ 常数的曲线是互相正交的抛物线族. 三维曲线坐标 (ξ,η,z) 称为**抛物柱面坐标** (parabolic cylinder coordinates). 用抛物柱面坐标将 Laplace 方程中的变数分离成 $f(\xi)g(\eta)e^{iaz}$ 的形式，通过简单的变换，可知 f 和 g 满足如下形式的微分方程:

$$(4)\qquad \frac{d^2F}{dz^2}+\left(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z^2\right)F=0.$$

(4) 的一个解 $D_n(z)$ 可以用 Whittaker 函数 $W_{k,m}(z)$ 表示为

$$D_n(z)=2^{n/2+1/4}z^{-1/2}W_{n/2+1/4,-1/4}(z^2/2).$$

方程 (4) 称为 **Weber** (或 **Weber-Hermite**) **方程**，函数 $D_n(z)$ 称为 **Weber 函数**. (4) 的另一个解是 $D_{-n-1}(iz)$ 或 $D_{-n-1}(-iz)$. 此方程的解一般称为**抛物柱面函数**(parabolic cylinder function). 特别是在 n 为正整数或 0 的情形，若设

$$H_n(z)=2^{-n/2}\exp(z^2/2)D_n(\sqrt{2}\,z),$$

则 $H_n(z)$ 是 n 次 Hermite 多项式†. 在量子力学中，谐振子的微分方程的解为这种形式.

在一般情形下，对于二阶线性常微分方程，若在复球面上三个正则奇点于无穷远点汇合成为一个第二类非正则奇点，且没有其他奇点，那么，这样的二阶线性常微分方程可以变换为(4)的形式，其解可用抛物柱面函数来表示. 如果取 z^2为自变量，则形如(4)的微分方程就可以归结为合流型超几何微分方程 (→ 公式 20 III).

【初等函数的不定积分】 由于指数函数、三角函数能够作为特殊的 Kummer 函数来表示，它们的不定积分中不能用初等函数表示的，例如不完全 Γ 函数†，误差函数

$$\mathrm{Erf}\,z=\int_0^z\exp(-t^2)dt$$

等，可以用 Kummer 函数或 Whittaker 函数来表示，而包含在合流型特殊函数†之中. 由

$$C(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt,$$

$$S(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$$

定义的函数称为 **Fresnel 积分** (Fresnel integral)，它也可以用 Whittaker 函数表示如下:

$$C(z)-iS(z)=\frac{1-i}{2}\times\left(1-\frac{e^{-\pi i/8}}{\sqrt{\pi}}z^{1/4}e^{-z^2/2}W_{-1/4,1/4}(iz)\right).$$

Fresnel 积分在历史上首先出现在波的衍射理论中，近年来还应用在高速汽车公路的回旋曲线中. 再有，设 $z=\pi u^2/2$ 而得到的函数

$$C(u)=\int_0^u\cos\frac{\pi}{2}s^2ds,$$

$$S(u)=\int_0^u\sin\frac{\pi}{2}s^2ds,$$

也用同样名称，称为 Fresnel 积分. 对它们都制有函数表. 以 z 或 u 作为参数画出的曲线 $x=C$, $y=S$ 称为 **Cornu 螺线** (Cornu's spiral) (图 1).

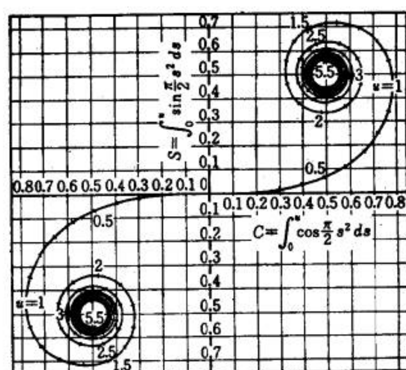


图 1

由

$$\mathrm{Li}\,x=\int_0^x\frac{dt}{\log t},\qquad \mathrm{Ei}\,x=\int_{-\infty}^x\frac{e^t}{t}dt$$

(但当 $x>0$ 时，在 $t=0$ 处取积分主值†)，

$$\mathrm{Si}\,x=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt,\quad \mathrm{Ci}\,x=-\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}dt$$

定义的函数分别称为**对数积分** (logarithmic

integral)，**指数积分** (exponential integral)，**正弦积分** (sine integral)，**余弦积分** (cosine integral)(也称为**积分对数,积分指数,积分正弦,积分余弦**). 它们之间有关系

$$\mathrm{Ei}\, x = \mathrm{Li}\, e^x,$$

$$\mathrm{Ei}\, ix = \mathrm{Ci}\, x + i\,\mathrm{Si}\, x + (\pi/2)i.$$

$\mathrm{Ei}\, x$ 在量子力学中，$\mathrm{Si}\, x$，$\mathrm{Ci}\, x$ 在通讯工程中有重要应用，$\mathrm{Li}\, x$ 还出现在估计比 x 为小的素数† 个数的问题中 (→ 素数的分布). $\mathrm{Li}\, x$ 也可记为 $\mathrm{li}\, x$ (→ 公式 19 II).

【Stokes 方程】 包含无穷远点在内，具有五个正则奇点，而且在每个奇点上特征指标的差为 1/2 的二阶线性常微分方程，称为**广义 Lamé 方程** (generalized Lamé equation). F. Klein 和 M. Bôcher 证明了通常出现在数学物理中的线性常微分方程都能用合流型的广义 Lamé 方程来表示. 其中,五个奇点全部在无穷远点汇合的方程称为 **Stokes 方程**，它应用在衍射的研究中，将自变量和因变量进行适当的变换，可以把它归结为 1/3 阶的 Bessel 微分方程†.

【参】 [1] H. Buchholz, Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Erg. Angew. Math., 2, Springer, 1953 (英译本: The confluent hypergeometric function with special emphasis on its applications, Springer, 1969); [2] L. J. Slater, Confluent hypergeometric functions, Cambridge Univ. Press, 1960; 关于对数积分等: [3] N. Nielsen, Theorie der Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten, Teubner, 1906; [4] British Ass. Adv. Sci., Mathematical tables 1, London, 1931; [5] National Bureau of Standards, Tables of sine, cosine and exponential integrals I, II, New York, 1940; 其他 → 特殊函数的[参].

Bessel 函数

[英 Bessel function 法 fonction bessélienne, fonction cylindrique 德 Besselsche Funktion 俄 функция Бесселя 日 ベッセル関数] 在历史上，Bessel 函数是为了解关于行星运动的 Kepler 方程†而提出的，1824 年由 F. W. Bessel 进行了系统的研究. 后来它出现在各种问题中，在应用上占有重要的地位.

【Bessel 函数】 (→ 公式 19 III) 若将 Helmholtz 方程 $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$ 用柱面坐标进行变量分离，则得到径向分量所满足的方程即 **Bessel 微分方程**

$$(1)\quad \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)w = 0.$$

它的两个线性无关的解

$$(2)\quad \boldsymbol{H}_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{L_1} e^{-iz\sin\zeta + i\nu\zeta}d\zeta,$$

$$\boldsymbol{H}_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{L_2} e^{-iz\sin\zeta + i\nu\zeta}d\zeta,$$

分别称为**第一类**和**第二类 Hankel 函数** (Hankel function of the first (second) kind)，其中积分路径 L_1 是从 $(-\pi+0)+i\infty$ 到 $-0-i\infty$ 的曲线，而 L_2 是从 $+0-i\infty$ 到 $(\pi-0)+i\infty$ 的曲线. 如果变量 z 和阶数 ν 都是实数，在上面加 ‾ 表示共轭复数，则有

$$(3)\quad \overline{H_\nu^{(1)}(z)} = H_\nu^{(2)}(z),\quad \overline{H_\nu^{(2)}(z)} = H_\nu^{(1)}(z).$$

因此，

$$(4)\quad J_\nu(z) = (H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z))/2,$$

$$N_\nu(z) \equiv Y_\nu(z) = (H_\nu^{(1)}(z) - H_\nu^{(2)}(z))/2i$$

是实函数. 在 z，ν 为复数的情况，以上式定义的函数 $\boldsymbol{J}_\nu(z)$，$\boldsymbol{N}_\nu(z)$ 分别称为**(狭义的) Bessel 函数**和 **Neumann 函数** (Neumann function). 还分别称 $J_\nu(z)$，$N_\nu(z)$，$H_\nu(z)$ 为**第一类、第二类、第三类 Bessel 函数**. 它们都满足下面的递推公式

$$(5)\quad 2\frac{dC_\nu(z)}{dz} = C_{\nu-1}(z) - C_{\nu+1}(z),$$

$$(2\nu/z)C_\nu(z) = C_{\nu-1}(z) + C_{\nu+1}(z).$$

一般地说，满足差分微分方程组 (5) 的函数称为**柱面函数** (cylindrical function). 柱面函数 $C_\nu(z)$ 一般可以表示为 $C_\nu(z) = a_1(\nu)H_\nu^{(1)}(z) + a_2(\nu)H_\nu^{(2)}(z)$ 的形式，其中 $a_1(\nu)$，$a_2(\nu)$ 是关于 ν 周期为 1 的任意周期函数.

当 $\nu = n$ (整数) 时，有

$$(6)\quad J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z),$$

$$N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z),$$

这说明 J_n 与 J_{-n}，N_n 与 N_{-n} 分别不是线性无关的. 当 $\nu \neq n$ (整数) 时，可以取 J_ν 和 $J_{-\nu}$，或者 N_ν 和 $N_{-\nu}$ 为 (1) 的基本解. 在 (2) 中，若取积分路径为从 $(-\pi+0)+i\infty$ 到 $(\pi-0)+i\infty$

的曲线，就得到对于 $J_\nu(z)$ 的积分表示，由此得到

(7) $$J_\nu(ze^{im\pi}) = e^{im\nu\pi}J_\nu(z),$$
$$J_{-\nu}(ze^{im\pi}) = e^{-im\nu\pi}J_{-\nu}(z).$$

当 $\nu = n$ (整数), $\Re z > 0$ 时，可以得到积分

(8) $$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\sin\zeta + in\zeta}d\zeta,$$

(9) $$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\zeta - n\zeta)d\zeta,$$

称为 **Bessel 积分** (Bessel's integral). 由此得到 $J_n(z)$ 的母函数表达式

(10) $$e^{iz\sin\zeta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\zeta},$$

(11) $$\cos(z\sin\zeta) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos 2n\zeta,$$

$$\sin(z\sin\zeta) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\zeta.$$

若再在 (2) 中进行变量变换 $u = \exp(-i\zeta)$，则有

(12) $$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \exp\left(\frac{z}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)\right)u^{-\nu-1}du,$$

其中积分路径 L 是从辐角为 $-\pi$ 的无穷远点出发，沿正方向绕原点而到辐角为 π 的无穷远点. 由此得到幂级数展开式

(13) $$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \times \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu+m+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

这也可以作为 (1) 在正则奇点† $z = 0$ 处的幂级数解而得到. 至于 $N_\nu(z)$，若将 (13) 代入下列关系式:

(14) $$N_\nu(z) = (\cos\nu z J_\nu(z) - J_{-\nu}(z))/\sin\nu\pi,$$

便得到它的幂级数展开式. 而在 $\nu = n$ (整数) 时，取极限 $\nu \to n$，可得到 $N_n(z)$ 的幂级数展开式(公式19). 特别是当 ν 是半奇数($\nu = n + 1/2$, n 是整数) 时，能够用初等函数表示如下:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n\frac{(2z)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\frac{d^n}{d(z^2)^n}\left(\frac{\sin z}{z}\right),$$
$$n = 0, 1, 2, \cdots.$$

当将 Helmholtz 方程用球面坐标分离变量时，在径向分量所满足的方程中也会出现半整数阶的 Bessel 函数，有时简称为**半 Bessel 函数** (half Bessel function). 还有，附加因子 $\sqrt{\pi/2z}$ 而得到的 $j_n(z) = \sqrt{\pi/2z}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ 等被称为**球 Bessel 函数** (spherical Bessel function).

由 $J_\nu(\alpha z)$ 满足的微分方程，立即可以导出

(15) $$(\alpha^2 - \beta^2)\int_0^1 zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz = \beta J_\nu(\alpha)J_\nu'(\beta) - \alpha J_\nu'(\alpha)J_\nu(\beta).$$

设 α, β 为 $J_\nu(z) = 0$ 的两个相异的根，则有

(16) $$\int_0^1 zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz = 0, \quad \Re\nu > -1,$$

在 (15) 右端取极限 $\beta \to \alpha$，则有

(17) $$\int_0^1 z(J_\nu(\alpha z))^2dz = \frac{1}{2}\left(\left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)(J_\nu(\alpha))^2 + (J_\nu'(\alpha))^2\right).$$

积分公式 (15)—(17) 称为 **Lommel 积分** (Lommel integral).

关于 $J_\nu(z)$ 的零点，已知有下述事实. 对于 $\nu > 0$，有 $J_\nu(0) = 0$. $J_\nu(z)$ 除原点 $z = 0$ 以外没有其他多重零点. 若 $J_\nu(\alpha) = 0$，则 $J_\nu(-\alpha) = 0$. 若 $\nu > -1$，则 $J_\nu(z)$ 的零点全是实数. 在 $J_\nu(z)$ 的相邻的两个正零点之间，分别有且只有一个 $J_{\nu-1}(z)$ 和 $J_{\nu+1}(z)$ 的零点. $J_\nu(z)$ 在实轴上具有可数无限多个零点.

此外，如下的**加法定理** (addition theorem) 成立:

$$H_n^{(\mu)}(k\rho)e^{in\phi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(kr_2)H_{n+m}^{(\mu)}(kr_1)e^{im\varphi},$$

其中 ρ, ϕ 由 r_1, r_2, φ 给出:

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi},$$
$$\rho\cos\phi = r_1 - r_2\cos\varphi,$$
$$\rho\sin\phi = r_2\sin\varphi.$$

【按 Bessel 函数的展开】 设 $f(r, \varphi)$ 是在 $0 < r < 1$, $-\pi < \varphi < \pi$ 上定义的函数，并设 $J_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) 的正的零点按从小到大的顺序为 $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \cdots, \alpha_{n,i}, \cdots$，则展开式

(18) $$f(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(a_{n,i}\cos n\varphi$$

$$+ b_{n,s}\sin n\varphi)J_n(\alpha_{n,s}r)$$

成立，称为 **Fourier-Bessel 级数**(Fourier-Bessel series). 展开式的系数 $a_{n,s}$, $b_{n,s}$ 由 Fourier 级数†的性质及 (16), (17) 来决定:

$$\left.\begin{matrix}a_{n,s}\\ b_{n,s}\end{matrix}\right\} = \frac{\varepsilon_n}{\pi(J_{n+1}(\alpha_{n,s}))^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} f(r,\varphi) \times J_n(\alpha_{n,s}r)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{matrix} r\,d\varphi\,dr,$$

$$\varepsilon_0 = 1,\quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = 2.$$

对 $f(x)$ 的积分变换

$$g(y) = \int_0^\infty x f(x) J_n(xy)dx, \tag{19}$$

称为 $f(x)$ 的 **Fourier-Bessel 变换** (Fourier-Bessel transform). 若 $f(x)$ 充分光滑，并在 $x\to\infty$ 时很快地趋于 0，则下列反演公式成立:

$$f(x) = \int_0^\infty y g(y) J_n(xy)dy. \tag{20}$$

此外，用 Bessel 函数得到的函数展开式，还有 **Dini 级数** (Dini's series)

$$\sum_{m=1}^\infty a_m J_\nu(\lambda_m x)$$

(λ_m 是 $xJ'_\nu(x) + HJ_\nu(x) = 0$ 的第 m 个正根，H 是实常数), **Kapteyn 级数** (Kapteyn's series)

$$\sum_{m=1}^\infty a_m J_{\nu+m}((\nu+m)x),$$

Schlömilch 级数 (Schlömilch's series)

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=0}^\infty a_m J_0(mx),$$

广义 Schlömilch 级数 (generalized series of Schlömilch)

$$\frac{1}{2}\frac{a_0}{\Gamma(\nu+1)} + \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m J_\nu(mx) + b_m \boldsymbol{H}_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}$$

等，其中 $\boldsymbol{H}_\nu(mx)$ 是 Struve 函数†.

【渐近展开】 当 $|z|$ 或 $|\nu|$ 充分大时的Bessel 函数的渐近表示，例如在 (2) 中应用最速下降法† 即可得到. 对于 $|z| > |\nu|$，有

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$-\pi < \arg z < 2\pi,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left(-i\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

$$-2\pi < \arg z < \pi,$$

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$-\pi < \arg z < \pi,$$

$$N_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right).$$

因此，在 z 的上半面内，当 $|z|\to\infty$ 时，$H_\nu^{(1)}(z)$ 收敛到 0; 在下半面内，当 $|z|\to\infty$ 时，$H_\nu^{(1)}(z)$ 以指数函数形式增大. $H_\nu^{(2)}(z)$ 则与此相反，即将上一句话中的“上半平面”和“下半平面”交换.

当 $|z|$, $|\nu|$ 都充分大时，有 **Debye 渐近表示** (asymptotic representation of Debye). 例如，若 $z = \nu\sec\beta$ ($\nu > 0, \beta > 0$)，则有

$$H_\nu^{(1,2)}(\nu\sec\beta) \sim (\pi\nu\tan\beta/2)^{-1/2} \times \exp(\pm i(\nu(\tan\beta - \beta) - \pi/4)).$$

若 $z = \nu\,\mathrm{sech}\,\alpha$ ($\nu > 0, \alpha > 0$)，则有

$$J_\nu(\nu\,\mathrm{sech}\,\alpha) \sim (2\pi\nu\tanh\alpha)^{-1/2} \times \exp\nu(\tanh\alpha - \alpha)$$

$$N_\nu(\nu\,\mathrm{sech}\,\alpha) \sim -(\pi\nu\tanh\alpha/2)^{-1/2} \times \exp\nu(\alpha - \tanh\alpha).$$

此外，当 $|\nu| \sim |z|$ 时，有

$$H_\nu^{(1,2)}(\nu\sec\beta) \sim \frac{\tan\beta}{\sqrt{3}}\exp\left\{\pm i\left(\frac{\pi}{6} + \nu \times\left(\tan\beta - \frac{1}{3}\tan^3\beta - \beta\right)\right)\right\} \times H_{1/3}^{(1,2)}((\nu/3)\tan^3\beta) + O(\nu^{-1}),$$

称为 **Watson 公式** (Watson's formula).

【Wagner 函数】 作为 Bessel 函数的应用的例子，Th. Theodorsen 在非定常机翼理论中引入了函数 ([6])

$$C(z) = H_1^{(2)}(z)/(H_0^{(2)}(z) + H_1^{(2)}(z)),$$

H. Wagner 更进一步考虑了函数 ([5])

$$k_1(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Br}} e^{ws}\frac{2C(-iw)}{w}dw.$$

其中 $H_0^{(2)}(z)$, $H_1^{(2)}(z)$ 是 Hankel 函数，$\int_{\mathrm{Br}}$ 表示给出逆 Laplace 变换的 Bromwich 积分. $C(z)$ 称为 **Theodorsen 函数** (Theodorsen's function), $k_1(s)$ 称为 **Wagner 函数** (Wagner's function).

单位翼弦长的二维平板翼突然开始运动，并保持倾角为 $1/\pi$，沿直线方向前进 s 的距离时，其升力系数等于 $k_1(s)$。

【有关的诸函数】 作为 Bessel 函数的变形，有将变量 z 替换为 iz 的修正 Bessel 函数†，将 z 替换为 $e^{\pm 3\pi i/4}z$ 的 Kelvin 函数†，还有与 Bessel 函数有关的 Struve 函数†，Anger 函数†，Weber 函数†等. 此外还有 Airy 积分†，当初这是从其他方面引入的，后来知道能用 Bessel 函数表示. 关于这类函数，→ 公式 19 IV.

【参】 [1] G. N. Watson, Theory of Bessel functions, Cambridge Univ. Press, 1922; [2] A. Gray-G. B. Mathews, Bessel functions and their application to physics, Macmillan, 第二版 1922; [3] R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, 1937; [4] F. Bowman, Introduction to Bessel functions, Longmans-Green, 1938; [5] H. Wagner, Über die Entstehung des dynamische Auftriebes von Tragflügeln, Z. A. M. M., **5** (1925), 17—35; [6] Th. Theodorsen, General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, NASA Tech. Rep., **496** (1935). 其他→特殊函数，合流型函数的 [参].

椭球调和函数 [英 ellipsoidal harmonics 法 harmonique ellipsoïdale 德 ellipsoidale Harmonik 俄 эллипсоидальная гармоническая функция 日 楕円体調和関数] 【椭球坐标】 设 $a>b>c$ 时，对于任意给定的 $(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3$，$\theta$ 的三次方程

$$F(\theta)=\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0$$

的三个根都是实数，并在区间 $\theta>-c^2$，$-c^2>\theta>-b^2$，$-b^2>\theta>-a^2$ 内各有一个. 设这三个根为 $\theta=\lambda$，$\theta=\mu$，$\theta=\nu$ $(\lambda>-c^2>\mu>-b^2>\nu>-a^2)$，则 $F(\lambda)=0$，$F(\mu)=0$，$F(\nu)=0$ 分别是与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

共焦点，通过点 (x,y,z) 且互相正交的椭球面、单叶双曲面、双叶双曲面. 称 (λ,μ,ν) 为点 (x,y,z) 的**椭球坐标** (ellipsoidal coordinates). 直角坐标 x, y, z 可由椭球坐标 λ, μ, ν 表示如下：

$$(1)\quad x^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

以及循环置换 (a,b,c)，(x,y,z) 而得到的式子.

【椭球调和函数】 若三个实变数的调和函数† ϕ，在椭球坐标 (λ,μ,ν) 中 $\lambda=$常数或 $\mu=$常数或 $\nu=$常数的曲面上有 $\phi=$常数，则称 ϕ 为**椭球调和函数**. 将 Laplace 方程 $\Delta\phi=0$ 进行变数分离，求形式为 $\phi=\Lambda(\lambda)\times M(\mu)N(\nu)$ 的解. 把方程 $\Delta\phi=0$ 写成下列形式：

$$\sum(\mu-\nu)\Delta_\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\Delta_\lambda\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right)=0,$$

对 (λ,μ,ν) 的所有偶排列求和，

$$\Delta_\lambda=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

Λ 满足常微分方程

$$(2)\quad 4\Delta_\lambda\frac{d}{d\lambda}\left(\Delta_\lambda\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right)=(K\lambda+C)\Lambda.$$

M, N 可以分别由与此形式相同，将 λ 改为 μ，ν 的方程来确定. K, C 称为分离常数，方程 (2) 称为 **Lamé 微分方程** (Lamé's differential equation).

当 $n=0,1,2,\cdots$ 时取 $K=n(n+1)$，则对于 C 的适当的值（特征值），方程 (2) 具有下列形式的解：λ 的多项式；或 λ 的多项式与 $\sqrt{a^2+\lambda}$，$\sqrt{b^2+\lambda}$，$\sqrt{c^2+\lambda}$ 中的一个、两个或三个的乘积. 在这些解中，线性无关的有 $2n+1$ 个，把它们记为 $\Lambda=f_n^m(\lambda)$ $(m=1,2,\cdots,2n+1)$. 这与 Lamé 函数在实质上是相同的 (Lamé 函数的定义在本节末给出). 具体地说，若设

$$\lambda+(a^2+b^2+c^2)/3=\xi,$$
$$C=B+n(n+1)(a^2+b^2+c^2)/3,$$
$$e_1=(b^2+c^2-2a^2)/3,\cdots;$$
$$e_1+e_2+e_3=0,$$

则有

$$(3)\quad \frac{d^2\Lambda}{d\xi^2}+\left(\frac{1/2}{\xi-e_1}+\frac{1/2}{\xi-e_2}+\frac{1/2}{\xi-e_3}\right)\frac{d\Lambda}{d\xi}=\frac{n(n+1)\xi+B}{4(\xi-e_1)(\xi-e_2)(\xi-e_3)}\Lambda.$$

若应用 Weierstrass 的 $\mathscr{P}$ 函数†，设 $\xi=\mathscr{P}(u)$，则方程 (3) 也可写成

(4) $d^2\Lambda/du^2 = (n(n+1)\mathscr{P}(u) + B)\Lambda$.

微分方程 (3) 以四个点 $\xi = e_1, e_2, e_3, \infty$ 为正则奇点†.

在微分方程 (3) 的解中，ξ 的多项式或者 ξ 的多项式与 $\sqrt{\xi - e_1}$, $\sqrt{\xi - e_2}$, $\sqrt{\xi - e_3}$ 中的一个、两个或三个的乘积，称为**第一种 Lamé 函数** (Lamé function of the first kind).

【Lamé 函数的分类】 方程 (2) 的 $2n+1$ 个线性无关的解 $f_n^m(\lambda)$ 可以分为如下的四种类型. 当 n 为偶数 $2p$ 时，$2n+1$ 个解 $f_n^m(\lambda)$ 中有 $p+1$ 个是 λ 的 p 次多项式，其他 $3p$ 个是 λ 的 $p-1$ 次多项式与 $\sqrt{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$, $\sqrt{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)}$ 或 $\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}$ 的乘积. 由于所有这些多项式都可以分解成一次实因子，第一种类型的解具有

(5) $f_n^m(\lambda) = (\lambda - \theta_1)(\lambda - \theta_2)\cdots(\lambda - \theta_{n/2})$

的形式，而后几种类型的解具有

$$(6)\qquad f_n^m(\lambda) = \begin{Bmatrix} \sqrt{(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \\ \sqrt{(c^2+\lambda)(a^2+\lambda)} \\ \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} \end{Bmatrix} \times (\lambda - \theta_1)(\lambda - \theta_2)\cdots(\lambda - \theta_{n/2-1})$$

的形式. 函数 (5), (6) 分别称为**第一类** (first species) 和**第三类 Lamé 函数**. 而在 n 为奇数 $2p+1$ 的情况下，$2n+1$ 个解 $f_n^m(\lambda)$ 中有 $3(p+1)$ 个具有

$$(7)\qquad f_n^m(\lambda) = \begin{Bmatrix} \sqrt{a^2+\lambda} \\ \sqrt{b^2+\lambda} \\ \sqrt{c^2+\lambda} \end{Bmatrix} (\lambda - \theta_1) \times (\lambda - \theta_2)\cdots(\lambda - \theta_{(n-1)/2})$$

的形式，其他 p 个具有

$$(8)\qquad f_n^m(\lambda) = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \times (\lambda - \theta_1)(\lambda - \theta_2)\cdots(\lambda - \theta_{(n-3)/2})$$

的形式. (7), (8) 分别称为**第二类**和**第四类 Lamé 函数**. 因此，无论哪一种情况，都有 $2n+1$ 个线性无关的 Lamé 函数.

当 n 为偶数时，把属于第一类的 $f_n^m(\lambda)$, $f_n^m(\mu)$ 和 $f_n^m(\nu)$ 相乘，得到一个椭球调和函数

$$\varphi_n^m = \prod_{p=1}^{n/2} (\lambda - \theta_p)(\mu - \theta_p)(\nu - \theta_p).$$

而且，这时若令

$$\Theta_p = \frac{x^2}{a^2+\theta_p} + \frac{y^2}{b^2+\theta_p} + \frac{z^2}{c^2+\theta_p} - 1 = \frac{(\lambda-\theta_p)(\mu-\theta_p)(\nu-\theta_p)}{(a^2+\theta_p)(b^2+\theta_p)(c^2+\theta_p)},$$

不计常数系数，就有

(9) $\qquad \psi_n^m = \Theta_1\Theta_2\cdots\Theta_{n/2}$.

若用第三类 Lamé 函数 (6)，并参照 (1)，则有

(10) $\quad \psi_n^m = (yz \text{ 或 } zx \text{ 或 } xy)\Theta_1\Theta_2\cdots\Theta_{n/2-1}$.

当 n 为偶数时，能够用 x, y, z 的 n 次多项式表示的线性无关的椭球调和函数可以写为函数 (9)和(10) 的线性组合. (9) 和 (10) 分别称为**第一类**和**第三类椭球调和函数**. 类似地，当 n 为奇数时，由第二类和第四类 Lamé 函数可形成**第二类**和**第四类椭球调和函数**

(11) $\quad \psi_n^m = (x \text{ 或 } y \text{ 或 } z)\Theta_1\Theta_2\cdots\Theta_{(n-1)/2}$,

(12) $\qquad \psi_n^m = xyz\Theta_1\Theta_2\cdots\Theta_{(n-3)/2}$,

当 n 为奇数时，它们是能够用 x, y, z 的 n 次多项式表示的线性无关的椭球调和函数的完备系.

Lamé 函数的零点 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ 全都是互不相等的实数，并且也与 e_1, e_2, e_3 的任何一个不同. 当 $e_1 > e_2 > e_3$ 时，p 个 ξ_i 全都处于 e_1 与 e_3 之间；对于满足 $0 \leqslant m \leqslant p$ 的任意整数 m，存在唯一的 (具有给定类型的) Lamé 函数，使它的 m 个零点处于 e_1 与 e_2 之间，而其他 $p-m$ 个零点处于 e_2 与 e_3 之间 (**Stieltjes 定理**). 由于 m 能取的值有 $p+1$ 个，所以由此能得到线性无关的一定类型的 Lamé 函数的一个完备系.

当微分方程 (3) 中的常数 B 取特定的特征值，因而方程 (3) 以第一种 Lamé 函数作为它的解时，该微分方程还具有第二个解 Λ，使得当 $\xi \to \infty$ 时，$\Lambda \to \xi^{-(n+1)/2}$. 函数 Λ 称为**第二种 Lamé 函数**.

【回转椭球】 对于基本椭球为旋转椭球

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的情形，使用球体坐标 (ξ, η, φ) 是方便的. 若 $a^2 < c^2$ (长椭球)，坐标变换为

(13) $$x = l\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi,$$
$$y = l\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,$$
$$z = l\xi\eta, \qquad l = \sqrt{c^2-a^2},$$

若 $a^2 > c^2$（扁椭球），坐标变换为

(14) $$x = l\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\cos\varphi,$$
$$y = l\sqrt{(\xi^2+1)(1-\eta^2)}\sin\varphi,$$
$$z = l\xi\eta, \qquad l = \sqrt{a^2-c^2}.$$

Laplace 方程的解中，在所有有限点处均为正则的那些解，在长椭球情况下为

$$\phi = P_n^m(\xi)P_n^m(\eta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi,$$

在扁椭球情况下为

$$\phi = P_n^m(i\xi)P_n^m(\eta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi.$$

其中 P_n^m 是第一类连带的 Legendre 函数†. 在有限的椭球外部为正则的解，也可以不用 $P_n^m(\xi)$ 或 $P_n^m(i\xi)$ 而用第二类连带的 Legendre 函数 $Q_n^m(\xi)$ 或 $Q_n^m(i\xi)$ 组成.

【球体波函数】 在长的球体坐标 (13) 中变换 Helmholtz 方程 $\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$，则有

(15) $$\frac{1}{(\xi^2-\eta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2-1)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{1}{\xi^2-1}+\frac{1}{1-\eta^2}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \kappa^2\Psi = 0, \qquad \kappa = kl.$$

若进行如下的变量分离：

$$\Psi = X(\xi)Y(\eta)\frac{\cos}{\sin}m\varphi,$$

便得到 X, Y 应当满足的方程：

(16a) $$\frac{d}{d\xi}\left((1-\xi^2)\frac{dX}{d\xi}\right) + \left(\lambda - \kappa^2\xi^2 - \frac{m^2}{1-\xi^2}\right)X = 0,$$

(16b) $$\frac{d}{d\eta}\left((1-\eta^2)\frac{dY}{d\eta}\right) + \left(\lambda - \kappa^2\eta^2 - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right)Y = 0.$$

(16a) 与 (16b) 形式完全相同，只是定义域不同，(16a) 为 $1 < \xi$，(16b) 为 $-1 < \eta < 1$. 就是在扁的旋转椭球的情况下，由变换 (14) 也可以得到下列方程：

(17) $$\frac{1}{(\xi^2+\eta^2)}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}(\xi^2+1)\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}(1-\eta^2)\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{1}{1-\eta^2}+\frac{1}{\xi^2+1}\right)\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2} + \kappa^2\Psi = 0.$$

若进行与 (15) 同样的变量分离，$Y(\eta)$ 满足与 (16b) 同样的方程；而 $X(\xi)$ 满足在 (16a) 中以 $i\xi$ 代替 ξ 而得到的方程. 这些方程全都是

(18) $$\frac{d}{dz}\left((1-z^2)\frac{du}{dz}\right) + \left(\lambda - \kappa^2z^2 - \frac{m^2}{1-z^2}\right)u = 0$$

的形式. 微分方程 (18) 的解是**球体波函数** (spheroidal wave function)，也称为**球体函数**（德 Sphäroidfunktion). 由于 (18) 以 ±1 为正则奇点，以 ∞ 为第一类非正则奇点，所以在区间 $[-1, 1]$ 内表现出与 Legendre 函数相似的性质，在 ∞ 的邻域内表现出与 Bessel 函数相似的性质.

如果 z 包含在区间 $[-1, 1]$ 内，则当书写方程 (18) 的解时，习惯上总是用 x 代替 z. 我们用 $pe_n^m(x)$ 表示 (18) 在整个定义域 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 内正则的解，而用 $\lambda_{n,m}$ 表示对应的特征值（在本节所述的关于奇异性的边界条件的假定下). 特别是在 $\kappa\to0$ 的情形，方程 (18) 归结为 Legendre 连带微分方程†，λ 的特征值为 $n(n+1)$（n 是正整数），特征函数为第一类连带的 Legendre 函数†

(19) $$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}d^mP_n/dx^m.$$

由此 $pe_n^m(x)$ 是这样的解，当 $x\to0$ 时，它趋于 $P_n^m(x)$ 的常数倍. $pe_n^m(x)$ 可以用正交函数系 $P_n^m(x)$ 展开为：

(20) $$pe_n^m(x) = \sum_{l\geqslant m} A_{n,l}^m P_l^m(x),$$
$$|l-n| = \text{偶数}.$$

系数 A 满足递推公式

$$(21)\ \left(\lambda_{n,m}-l(l+1)+\kappa^2\frac{2l^2+2l-1-2m^2}{(2l-1)(2l+3)}\right)\times A^m_{n,l}-\kappa^2\frac{(l-m-1)(l-m)}{(2l-3)(2l-1)}\times A^m_{n,l-2}-\kappa^2\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+3)(2l+5)}\times A^m_{n,l+2}=0.$$

函数 $pe^m_n(x)$, $pe^m_l(x)$ 在 $-1<x<1$ 内构成正交函数系.

在方程 (18) 的属于特征值 $\lambda_{n,m}$ 的解中，存在着与 $pe^m_n(x)$ 无关的、且奇偶性与它正好相反的解：

$$(22)\ qe^m_n(x)=\sum_{l\geq -m,\ l-n=\text{偶数}}A^m_{n,l}Q^m_l(x)+\sum_{j\geq m,\ j-n=\text{奇数}}B^m_{n,j}P^m_j(x).$$

这里的 $A^m_{n,l}$ 与 (20) 中的 $A^m_{n,l}$ 相同，其值由递推公式 (21) 决定. 对于 $j\geq m+2$, $B^m_{n,j}$ 满足如下的递推公式：

$$(23)\ \left(\lambda_{n,m}-j(j+1)+\kappa^2\frac{2j^2+2j-1-2m^2}{(2j-1)(2j+3)}\right)\times B^m_{n,j}+\kappa^2\frac{(j-m-1)(j-m)}{(2j-3)(2j-1)}\times B^m_{n,j-2}+\kappa^2\frac{(j+m+1)(j+m+2)}{(2j+3)(2j+5)}\times B^m_{n,j+2}=0.$$

由于第二类连带的 Legendre 函数 $Q^m_l(x)=(1-x^2)^{m/2}d^mQ_l/dx^m$ 对于 $l\geq m$ 具有

$$Q^m_l(x)=P^m_l(x)\log\sqrt{(1+x)(1-x)}+(1-x^2)^{-m/2}\times(x\text{ 的多项式})$$

的形式，因此含有 $Q^m_l(x)$ 的 $qe^m_n(x)$ 以 $x=\pm1$ 为奇点.

由方程 (18) 的解的积分表示知道，pe^m_n 满足下列积分方程：

$$(24)\ i^{n-m}\nu_{n,m}pe^m_n(x)=\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{m/2}(1-\xi^2)^{m/2}e^{i\kappa x\xi}pe^m_n(\xi)d\xi.$$

这里，系数 $\nu_{n,m}$ 与 $p^m_n(0)$ 或 $p^{m\prime}_n(0)$ 有关.

为了将 $pe^m_n(x)$, $qe^m_n(x)$ 的定义域开拓到区间 $[-1,1]$ 之外，在复平面去掉区间 $[-1,1]$ 的域 G 中，不用 N. M. Ferrers 所定义的连带的 Legendre 函数 (19)，而用 Heine-Hobson 的定义：

$$(25)\qquad P^m_n(z)=(z^2-1)^{m/2}d^mP_n/dz^m,$$

若考虑与 (20) 相同形式的函数

$$(26)\qquad Pe^m_n(z)=\sum_{l\geq m}A^m_{n,l}P^m_l(z),\quad |l-n|=\text{偶数},$$

则可得到方程 (18) 在域 G 内的解. 在这种情形，形如 (24) 的积分方程也成立，由此得到下列展开式：

$$(27)\ pe^m_n(z)=\frac{\sqrt{2\pi}}{\nu_{n,m}}\frac{(z^2-1)^{m/2}}{(\kappa z)^m}\times\sum_{l\geq m}(-1)^{(l-n)/2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A^m_{n,l}\frac{J_{l+1/2}(\kappa z)}{\kappa z},\quad |l-n|=\text{偶数},$$

对此乘以常数因子，我们定义

$$je^m_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(z^2-1)^{m/2}}{z^m}\sum_{l\geq m}(-1)^{(l-n)/2}\times F^m_{n,l}\frac{J_{l+1/2}(\kappa z)}{\sqrt{\kappa z}}\Big/\sum_{l\geq m}F^m_{n,l},\quad F^m_{n,l}=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}A^m_{n,l},$$

在 $|z|\gg1$ 时，上式渐近地取下列形式：

$$je^m_n(z)\sim\sin(\kappa z-n\pi/2)/\kappa z.$$

同样存在一个解：

$$ne^m_n(z)=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(z^2-1)^{m/2}}{z^m}\sum_{l\geq m}(-1)^{(l-n)/2}\times F^m_{n,l}\frac{N_{l+1/2}(\kappa z)}{\sqrt{\kappa z}}\Big/\sum_{l\geq m}F^m_{n,l},$$

它具有

$$ne^m_n(z)\sim\cos(\kappa z-n\pi/2)/\kappa z$$

这种渐近形式. 这和将 (22) 中第二类连带的 Legendre 函数替换为 $Q^m_n(z)=(z^2-1)^{m/2}\times d^mQ_n/dz^m$ 而得到的相同形式的式子所定义的函数，除了常数因子外是一致的.

【参】 [1] M. J. O. Strutt, Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Erg. Math., Springer, 1932; [2] E. W. Hobson, Spherical and ellipsoidal harmonics, Cambridge, 1931; [3] 萩原雄祐，廻転流体の平衡形状論の回顧，岩波講座数学，1933;

[4] 小谷正雄-橋本英典，特殊函数，岩波講座現代応用数学，1958 (中译本：小谷正雄、橋本英典，特殊函数，上海科学技术出版社，1962); [5] C. Flammer, Spheroidal wave functions, Stanford Univ. Press, 1957; [6] J. A. Stratton-P. M. Morse-L. J. Chu-J. D. C. Little-F. J. Corbato, Spheroidal wave functions including tables of separation constants and coefficients, John Wiley, 1956.

Mathieu 函数 [英 Mathieu functions 法 fonctions de Mathieu 德 Mathieusche Funktionen 俄 функции Матье 日 マチウ関数] 若将二维 Helmholtz 方程† $(\Delta+k^2)\Psi=0$ ($\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$) 用椭圆坐标† $x=c\cosh\xi\cos\eta$，$y=c\sinh\xi\sin\eta$ 进行变量分离，求形如 $\Psi=X(\xi)\times Y(\eta)$ 的解，则 $Y(\eta)$，$X(\xi)$ 分别满足下列形式的方程：

(1) $d^2u/dz^2+(a-2q\cos 2z)u=0$,

(2) $d^2u/dz^2-(a-2q\cosh 2z)u=0$

(a 是任意常数，$q=k^2c^2/4$). 在(1)中若以 $\pm iz$ 代替 z，就可以得到(2). (1)称为 **Mathieu 方程** (Mathieu's equation)，它的解称为 **Mathieu 函数**；(2)称为**修正** (modified) **Mathieu 方程**，它的解称为**修正 Mathieu 函数**.

【Hill 方程】 设 $F(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，这时二阶线性常微分方程

(3) $d^2u(x)/dx^2+F(x)u=0$,

称为 **Hill (微分) 方程** (Hill's differential equation). 这是 G. W. Hill 为研究月球轨道而加以考察的，所以采用了这样的名称. Mathieu 方程，Lamé 微分方程†都是它的特殊情形；通过适当的变换，Legendre 微分方程†，合流型超几何微分方程†也可以归结为 Hill 方程.

虽然 $F(x)$ 是周期函数，但方程(3)的解不一定具有周期性. 然而，必定存在具有拟周期性即满足

(4) $u(x+2\pi)=\sigma u(x)$, $\sigma=$ 常数

的解. 亦即存在形如

(5) $u(x)=e^{\mu x}\varphi(x)$, $\varphi(x+2\pi)=\varphi(x)$

的解 (**Floquet 定理**). 其中 $\sigma=e^{2\pi\mu}$ 是常数，$\varphi(x)$ 是周期为 2π 的周期函数. μ 称为**特征指数** (characteristic exponent).

由于(1)是 Hill 方程的特殊情形，根据 Floquet 定理知道，其通解可以写成

(6) $u(z)=Ae^{\mu z}\varphi(z)+Be^{-\mu z}\varphi(-z)$

的形式，其中 $\varphi(z+\pi)=\varphi(z)$. 若 a 取适当的值 (称为**特征值** (eigenvalue))，而使特征指数 μ 成为 0 或 i，则 $u(z)$ 成为以 π 或 2π 为周期的周期函数，称为**第一类 Mathieu 函数**. 因为这个函数出现在椭圆柱面对光波的衍射问题中，所以又称为**椭圆柱函数** (elliptic cylinder function). 有时就称这种函数为"Mathieu 函数"，而称方程(1)的其他解为**广义 Mathieu 函数**.

若将 $F(x)$ 按 Fourier 级数†展开：

(7) $$F(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m e^{imx},$$

则由 Floquet 定理知道，(3)的解可写为

(8) $$u=e^{\mu x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n e^{inx}$$

的形式. 将(7)，(8)代入(3)并比较 $e^{(\mu+in)x}$ 的系数，可以得到下列无限多个一次方程：

(9) $$(\mu+in)^2b_n+\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m b_{n-m}=0,$$

$$n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots.$$

若由此消去 b_n，便得到形如

(10) $\Delta(\mu)=|B_{rs}|=0$

的无穷行列式方程，称为 **Hill 行列式方程** (Hill's determinantal equation). 而 **Hill 行列式** $\Delta(\mu)$ 的元素 B_{rs} 为

$$B_{rs}=1,\quad \text{当 } r=s \text{ 时};$$

$$B_{rs}=a_{r-s}/((\mu+ir)^2+a_0),\ \text{当 } r\neq s \text{ 时}.$$

这里，**无穷行列式** (infinite determinant) $D=|B_{mn}|$ $(m,n=-\infty,\cdots,\infty)$ 定义为 $D_m=\det(B_{ij})$ $(i,j=-m,\cdots,m)$ 当 $m\to\infty$ 时的极限 (若此极限存在的话). (10)能够变为更简单的形式：

(11) $\sin^2\pi i\mu=\Delta(0)\sin^2\pi\sqrt{a_0}$.

若对此求解，求出特征指数 μ，代入(9)，定出系数 b_n，就可以得到解(8). 这种方法称为 **Hill 解法** (Hill's method of solution).

若将 Hill 解法应用于(1)，就能够得到特征指数 μ 的方程

(12) $\sin^2(\pi/2)i\mu=\Delta(0)\sin^2(\pi/2)\sqrt{a}$,
由此求出特征指数 μ. 这里 $\Delta(0)=|B_{mn}|$ 是无穷行列式,其元素为 $B_{mm}=1$, $B_{m,m\pm1}=-2q/(a-m^2)$, 其他的 $B_{mn}=0\ (m=\cdots,-1,0,1,\cdots)$. 当 $q\to0$ 时,下式成立:

(13) $$\Delta(0)=1+2(2q)^2\frac{\pi}{8\sqrt{a}(1-a)}\times\cot\frac{\pi\sqrt{a}}{2}+O(q^4).$$

因而当 $q=0$ 时 $\Delta(0)=1$, 由 (12) 知道, $a=4n^2$, $(2n+1)^2$ 分别对应于 $\mu=0,i$.

【第一类 Mathieu 函数】 第一类 Mathieu 函数可以进一步分成下列四种类型:

(14.1) $$ce_{2n}(z,q)=\sum A_r^{(2n)}\cos2rz,\quad (a_{2n}),$$

(14.2) $$se_{2n+1}(z,q)=\sum B_{2r+1}^{(2n+1)}\sin(2r+1)z,\quad (b_{2n+1}),$$

(14.3) $$ce_{2n+1}(z,q)=\sum A_{2r+1}^{(2n+1)}\cos(2r+1)z,\quad (a_{2n+1}),$$

(14.4) $$se_{2n+2}(z,q)=\sum B_{2r+2}^{(2n+2)}\sin(2r+2)z,\quad (b_{2n+2}),$$

$(n,r=0,1,2\cdots)$. 其中 ( ) 内的 a_{2n}, b_{2n+1}, $\cdots$ 是特征值, q 为一定值时,顺序为 $a_{2n}<b_{2n+1}<a_{2n+1}<b_{2n+2}$, 而且随着 n 增大而增大. 上面的每个展开式对一切有限的 z 都是一致绝对收敛的,在 $0<z<\pi/2$ 中有 n 个零点; 此外, 还满足下列正规正交条件:

$$\int_0^{2\pi}ce_m(x)se_n(x)dx=0,$$

$$\int_0^{2\pi}ce_m(x)ce_n(x)dx=\int_0^{2\pi}se_m(x)se_n(x)=\pi\delta_{m,n}.$$

当 $q\to0$ 时, $ce_0(z)\to1/\sqrt{2}$, $ce_m(z)\to\cos mz$, $se_m(z)\to\sin mz$.

当 q 的值很小时, 若对有关的量作出下列 q 的幂级数展开:

$$a=m^2+\alpha q+\beta q^2+\cdots,$$

$$ce_m(z)=\cos mz+qF_1(z)+q^2F_2(z)+\cdots,$$

并代入 (1), 就能够逐次决定 $\alpha,\beta,\cdots$, $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots$ (**Mathieu 方法** (Mathieu's method)).

关于一般的 q, 将 (14) 代入 (1), 可以得到系数 $A_s^{(m)}$, $B_s^{(m)}$ 之间的递推公式

(15) $$-aA_0^{(2n)}+qA_2^{(2n)}=0,$$
$$2qA_0^{(2n)}+(4-a)A_2^{(2n)}+qA_4^{(2n)}=0,$$
$$qA_{2r-2}^{(2n)}+(4r^2-a)A_{2r}^{(2n)}+qA_{2r+2}^{(2n)}=0,$$
$$r>1.$$

例如, 就 $ce_{2n}(z)$ 来说, 消去 $A_{2r}^{(2n)}$, 就可以得到关于特征值 a_{2n} 的方程

(16) $$\begin{vmatrix} a & -q & 0 & 0 & 0\cdots \\ -2q & a-4 & -q & 0 & 0\cdots \\ 0 & -q & a-16 & -q & 0\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0,$$

或者,还可以表示为下列连分式†:

(17) $$a=\frac{2q^2}{a-4-}\ \frac{q^2}{a-16-}\ \frac{q^2}{a-36-}\cdots.$$

给定了 q, 就可以根据 (17) 决定 a_{2n}, 从而根据 (15) 决定 $A_{2r}^{(2n)}$ (**Ince-Goldstein 方法** (Ince-Goldstein method)).

【第二类 Mathieu 函数和修正 Mathieu 函数】 对应于每个周期(或半周期)特征值, 方程 (1) 只存在一个周期解(或半周期解). 因此,相应于同一 a_m, b_m, 并与 $ce_m(z,q)$, $se_m(z,q)$ 无关的其他解是非周期的. 它们称为**第二类 Mathieu 函数**, 记为 $fe_m(z,q)$, $ge_m(z,q)$.

在 (14) 中若以 iz 代替 z, 可以得到**第一类修正 Mathieu 函数**的公式

(18) $$Ce_m(z,q)=ce_m(iz,q),$$
$$Se_m(z,q)=-ise_m(iz,q).$$

当 $q\to0$ 时,有 $Ce_0(z)\to1/\sqrt{2}$, $Ce_m(z)\to\cosh mz$, $Se_m(z)\to\sinh mz$. 类似地, 在第二类 Mathieu 函数中以 iz 代替 z 而得到的函数, 称为**第二类修正 Mathieu 函数**. 此外, 在第一类、第二类修正 Mathieu 函数的线性组合中, 当 $z\to\infty$ 时渐近地成为

$$e^{-iy}/\sqrt{y}\ \ (y=\sqrt{q}\,e^z)$$

这样的函数, 称为**第三类修正 Mathieu 函数**.

对于 Mathieu 函数, 除了如 (7) 那样的 Fourier 展开式而外, 还可以用 Bessel 函数† 展开. 例如, 取 $q=h^2$, 有

(19.1) $Ce_{2n}(z,q)=\sum A_{2r}\cosh 2rz$,

(19.2) $=(A_0)^{-1}ce_{2n}(\pi/2,q)\sum(-1)^r \times A_{2r}J_{2r}(2h\cosh z)$,

(19.3) $=(A_0)^{-1}ce_{2n}(0,q)\sum A_{2r} \times J_{2r}(2h\sinh z)$,

(19.4) $=(A_0)^{-2}ce_{2n}(0,q)ce_{2n}(\pi/2,q) \times \sum(-1)^r A_{2r}J_r(he^{-z})J_r(he^{z})$.

这些级数对于 z 的所有有限值是一致绝对收敛的. 分别用 $N_{2r}(2h\cosh z)$, $N_{2r}(2h\sinh z)$, $J_r(he^{-z})N_r(he^{z})$ 代替 (19) 右边的 J 而得到的无穷级数也满足 (2), 记为 $Fey_{2n}(z,q)$. 用同样方法可以得到其他第二类修正 Mathieu 函数 $Gey_{2n+1}(z,q)$, $Fey_{2n+1}(z,q)$, $Gey_{2n+2}(z,q)$. 由于它们比 $fe_m(iz,q)$, $ge_m(iz,q)$ 收敛得快等原因,在实际应用上是方便的.

在 (1), (2) 中以 $-q$ 代替 q 而得到的方程,即

(20) $d^2u/dz^2+(a+2q\cos 2z)u=0$,

(21) $d^2u/dz^2-(a+2q\cosh 2z)u=0$,

在解方程 $(\Delta-k^2)\varphi=0$ 时会出现. 一般地说,若设 $f(z,q)$ 为 (1) 的解,则 $f(\pi/2-z,q)$ 是 (20) 的解. 因而可以采用

(22.1) $ce_{2n}(z,-q)=(-1)^n \times ce_{2n}(\pi/2-z,q)$,

(22.2) $ce_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n \times se_{2n+1}(\pi/2-z,q)$,

(22.3) $se_{2n+1}(z,-q)=(-1)^n \times ce_{2n+1}(\pi/2-z,q)$,

(22.4) $se_{2n+2}(z,-q)=(-1)^n \times se_{2n+2}(\pi/2-z,q)$

定义 $q<0$ 时的 $ce_m(z,q)$, $se_m(z,q)$ (**Ince 定义**). 由此,用修正 Bessel 函数 I_m 代替 (19) 中的 J_m, 可以得到 Ce 的展开式, 而且, 用 $(-1)^m K_m/\pi$ 代替 I_m 所得到的展开式也是(21)的一个解,记为

(23) $Fek_{2n}(z,-q)=(-1)^n(\pi A_0)^{-1}ce_{2n}(\pi/2,q)\sum A_{2r}K_{2r}(2k\sinh z)$.

同样可以定义 $Fek_{2n+1}(z,-q)$, $Gek_{2n+1}(z,-q)$, $Gek_{2n+2}(z,-q)$, 这些函数由于在 $z\to\infty$ 时以指数函数的方式趋于 0, 所以它们无非是第三类修正 Mathieu 函数而已.

【稳定性】 若在 $u_1(0)=1$, $u_1'(0)=0$; $u_2(0)=0$, $u_2'(0)=1$ 的条件下决定方程 (3) 的基本解组, $u_1(x)$, $u_2(x)$, 则, (4), (5) 中的 σ, μ 就可以由

(24) $\sigma=e^{2\pi\mu}$, $\quad 2\pi\mu=\operatorname{arccosh} A$, $\quad 2A=u_1(2\pi)+u_2'(2\pi)$

给出. 由于能决定出两个满足 (24) 的 μ, 设它们分别为 μ_1, μ_2 $(\mu_2=-\mu_1)$. 若设 $F(x)$ 是实函数, 则 $u_1(x)$, $u_2(x)$ 也是实函数, A 是一个实数. 由 (24) 知道, $\pm 2\pi\mu=\operatorname{arccosh}|A|+\pi i$, $i(\operatorname{arccosh}|A|+\pi)$, $i\arccos A$, $\operatorname{arccosh} A$ 分别相应于 $A<-1$, $-1<A<0$, $0<A<1$, $1<A$. 因此, 如果 $|A|<1$, (3) 的通解当 x 趋于无穷时既不发散也不趋于 0. 这样的解称为 Hill 方程的**稳定解** (stable solution), 有时还称为 **Hill 函数** (Hill's function). 如果 $|A|>1$, 则 $e^{\mu_1 x}$, $e^{\mu_2 x}$ 中必定有一个随 x 增大而无限增大. 这样的解称为**不稳定解** (unstable solution). $A=1$, -1 时, $\mu=0$, $i/2$, (3) 具有 $u=\varphi(x)$, $e^{ix/2}\varphi(x)$ 这样形式的解. 由于这些函数分别是以 2π, 4π 为周期的周期函数, 所以称为**周期解** (periodic solution), **半周期解** (half-periodic solution).

当应用 Mathieu 函数于振动理论, 量子力学等物理学和工程学时, 将 (3) 写成下列含有参数 λ, γ 的形式是方便的:

(25) $d^2u/dx^2+(\lambda+\gamma\Phi(x))u=0$.

当 γ 保持一定而 λ 变化时, 使 (25) 具有周期解或半周期解的 λ 值 (称为特征值) 有可数无限个, 若令这些特征值为 $\lambda_0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$, $\bar\lambda_1\leqslant\bar\lambda_2\leqslant\cdots$, 则有

$$\lambda_0<\bar\lambda_1\leqslant\bar\lambda_2<\lambda_1\leqslant\lambda_2<\cdots<\bar\lambda_{2k-1}\leqslant\bar\lambda_{2k}<\lambda_{2k-1}\leqslant\lambda_{2k}<\cdots.$$

当 λ 值在图 1 的实线区间上时, 解是稳定的; 在虚线区间上时, 解是不稳定的. 这称为 **Haupt 定理** (Haupt's theorem).

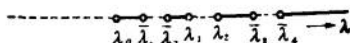


图 1

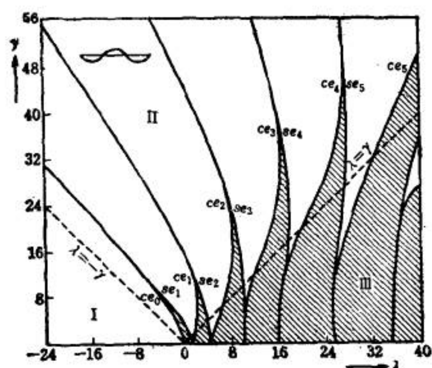


图 2

当 λ, γ 都变化时，根据特征指数 μ 是否为纯虚数，把 λ, γ 平面分成稳定解的区域和不稳定解的区域. 例如，在 (25) 中设 $\Phi(x)=2\cos x$ 就可以得到 Mathieu 方程. 在这种情形，图 2 中画斜线的部分表示稳定解区域，其余的部分表示不稳定解的区域. 其交界的曲线给出对应于周期解或半周期解的特征值. 在另一个具体例子中，即当 $\Phi(x)$ 是阶梯函数

$$\Phi(x)=1, \qquad 0<x<\pi;$$
$$=-1, \quad \pi<x<2\pi$$

时，相应的 Hill 方程利用三角函数是很容易积分的，在这种情形，象图 2 那样划分 λ, γ 平面的稳定区域和不稳定区域，可以得到图 3.

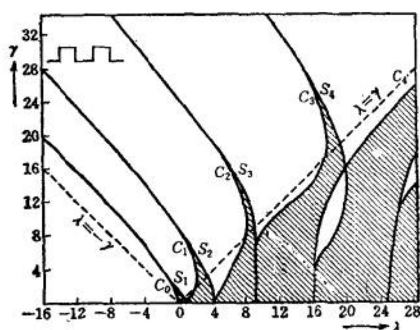


图 3

【参】 [1] E. T. Whittaker-G. N. Watson, A course of modern analysis, Cambridge Univ. Press, 第十版 1958; [2] M. J. O. Strutt, Lamésche-, Mathieusche-, und verwandte Funktionen in Physik und Technik, Erg. Math., Springer, 1932; [3] N. W. McLachlan, Theory and application of Mathieu functions, Clarendon Press, 1947; [4] J. Meixner-F. W. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer, 1954; [5] 小谷正雄-橋本英典，特殊函数，岩波講座現代応用数学，1958 (中译本：小谷正雄、桥本英典，特殊函数，上海科学技术出版社，1962); [6] 寺沢寛一編，自然科学者のための数学概論応用編，A5 章，岩波，1960.

十五、计 算 数 学

数值计算 [英 numerical calculation 法 calcul numérique 德 numerisches Rechnen 俄 численные расчеты 日 数值計算法] 数学的发展，特别在初期，可以认为是以数值计算为其直接目的的. 数值计算是技术性很强的工作，因此，随着历史的发展，在方法上也有很大变化. 作为典型例子，我们来考察一下函数值的计算. 首先，由于发明了对数表，使得在笔算中麻烦的乘除运算可以用比较容易计算的加减运算来代替. 因此，对三角函数值等的计算也都使用了三角函数对数表. 但是，到十九世纪中期出现了台式计算机，进行乘除运算也不费力了. 所以三角函数表又代替了三角函数对数表. 近年来进入了电子计算机时代，获得了计算的高速度. 然而把函数表存入机器中或从机器读出函数值，也还是有点棘手的，不如利用计算机的高速性能，每当需要函数值时，就让计算机直接逐个计算. 为此，又导致人们去研究或改善计算函数值的近似公式([2]).

由于计算机的高速度又使大批量处理成为可能. 从而，曾经连想都不敢想的数百阶的线性方程组等问题现在也能解决了(→线性方程组的数值解法). 而且，在根据各种近似法求微分方程等函数方程的近似数值解的方法即**数值解法** (numerical solution) 中，都积极地使用着电子计算机(→常微分方程的数值解法，偏微分方程的数值解法). 另一方面，依靠计算机的高速度和大批量处理的能力，像通过大量的随机试验来计算多重积分和求解偏微分方程的 Monte-Carlo 方法†等也都可以实现了(→模拟).

电子计算机的特点在于自动地控制计算过程. 因此，可以利用计算机来综合地处理大规模的计算系统. 在这种**系统分析** (systems analysis) 中，经常使用的是新观点下的变分原理. 和这种数值计算直接有关的问题，在文献[10]中有详细的处理.

但是，由于电子计算机能自动处理大量的数据，与手算时不同，误差分析(→误差分析)就成了十分复杂和困难的问题. 运用现代的数学方法研究这种问题的领域，有时特别地称为**数值分析** (numerical analysis).

另外，数值计算在纯粹数学中也是很有用的，例如在数论中就是如此(→数论). 利用计算机很容易实现这种应用. 就这点来说，电子计算机对纯粹数学的发展是有着相当大的贡献的. 在这方面，[7]是一个较好的综合报告.

【参】 [1] 森口繁一-高田勝，数值計算法，岩波講座現代応用数学，1958 (中译本：森口繁一，高田胜，数值计算法，现代应用数学丛书，上海科学技术出版社，1963); [2] 一松信，近似式，竹内書店，1963; [3] 一松信，数值計算，至文堂，1963; [4] 宇野利雄，計算機のための数值計算，朝倉，1963; [5] 山内二郎-森口繁一-一松信编，電子計算機のための数值計算法 I, II，培風館，1964, 1967; [6] 杉山昌平-高橋磐郎，数值解析，広川書店，1965; [7] 田中稔，整数論と電子計算機，数学，**15** (1964), 168—172; [8] R. G. Stanton, Numerical methods for science and engineering, Prentice-Hall, 1965; [9] J. Todd, A survey of numerical analysis, McGraw-Hill, 1962; [10] T. L. Saaty-J. Bram, Nonlinear mathematics, McGraw-Hill, 1964; [11] P. Henrici, Elements of numerical analysis, John Wiley, 1965; [12] J. Walsh (ed.), Numerical analysis, an introduction, Academic Press, 1967; [13] F. John, Lectures on advanced numerical analysis, Gordon and Breach, 1967; [14] A. Ralston-H. S. Wilf (eds.), Mathematical methods for digital computers, John Wiley, I, 1960; II, 1967 (中译本：A. 拉尔斯登，H. S. 维尔夫等，数字计算机上用的数学方法，第一卷，第二卷，上海科学技术出版社，1963，1976); [15] B. Wendroff, Theoretical numerical analysis, Academic Press, 1966.

插值法 [英 interpolation 法 interpolation 德 Interpolation 俄 интерполяция 日 補間法] 设实变量 x 的实函数 $f(x)$ 具有直到某阶的导数，它在 $n+1$ 个不同的点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的值分

别为 $f_0, f_1, \cdots, f_n$，使用这些值来求 $f(x)$ 在其它 x 处的值 f 的方法，称为**插值法** (interpolation). 通常是过 $n+1$ 个点 (x_i, f_i) 作 n 次多项式(称为**插值多项式** (interpolation polynomial))来进行插值，这种方法称为 **Lagrange 插值法** (Lagrange's interpolation). 若令

$$\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i),$$

作 $l_i(x) = \Pi(x)/((x - x_i)\Pi'(x_i))$，则过 $n+1$ 个点的 **Lagrange 插值多项式**(Lagrange's interpolation polynomial) 为

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f_i.$$

对给定的 x，求出 $L(x)$ 的值作为 $f(x)$ 在 x 处的插值 f 的近似值. 特别是，当 x 的值介于 x_i 的最大值和最小值之间时，称为**内插**或**插值**，否则称为**外插** (extrapolation). 反之，对已知的值 f 求 x 的值的方法，称为**反插值法** (inverse interpolation). Lagrange 插值多项式的误差为 $f^{(n+1)}(\xi)\Pi(x)/(n+1)!$，其中 ξ 位于 x_i 的最大值和最小值之间.

Aitken 方法 (Aitken's method)，作为逐步求 Lagrange 插值多项式的方法是很有用的. 首先求出

$$I_{0i}(x) = \frac{1}{x_i - x_0}\begin{vmatrix} f_0 & x_0 - x \\ f_i & x_i - x \end{vmatrix},$$

$$i = 1, 2, \cdots, n,$$

然后依次求出

$$I_{01\cdots ki} = \frac{1}{x_i - x_k}\begin{vmatrix} I_{01\cdots k}(x) & x_k - x \\ I_{01\cdots k-1i}(x) & x_i - x \end{vmatrix},$$

$$i = k+1, \cdots, n.$$

重复这个计算过程，直到 $I_{01}(x), I_{012}(x), \cdots$ 中出现相邻两项在所要求的精度范围内一致时为止. 在这种情形下，不必要求 x_i 为单调的，即不必按大小顺序排列 $x_0, x_1, \cdots, x_n$，而从靠近 x 的点开始排列为宜. $I_{01\cdots n}(x)$ 同 Lagrange 插值多项式是一致的. 另外，即使点数 $n+1$ 无限增加，插值多项式也不一定收敛于 $f(x)$.

【利用差分的插值法】 在分点为等距的情形下，利用差分的插值法在原理上虽与上述插值法相同，但在实用上更为方便. 设分点为 $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \cdots)$，与它对应的函数值为 f_i，则称 $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ 为一阶**差分** (difference). 进而由 $\Delta^{k+1}f_i = \Delta^k f_{i+1} - \Delta^k f_i$ 定义 $k+1$ 阶差分. 若将算子 E 定义为 $Ef_i = f_{i+1}$，则算子 Δ 能表示为 $\Delta = E - 1$. 此外，有时还使用**后向差分** (backward difference) $\nabla = 1 - E^{-1}$ (相应地，称 Δ 为**前向差分** (forward difference))，**中心差分** (central difference) $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$. 与 δ 相对应地有表示**平均运算** (average operation) 的算子 $\mu = (E^{1/2} + E^{-1/2})/2$. 如果用 D $(Df(x) = df(x)/dx)$ 表示**微分算子** (differentiation operator)，那么，上述算子之间的关系如表 1 所示.

表 1

	E	Δ	δ	∇	hD
E	E	$1+\Delta$	$1+\frac{\delta^2}{2}+\delta\mu$	$\frac{1}{1-\nabla}$	e^{hD}
Δ	$E-1$	Δ	$\delta\mu+\frac{\delta^2}{2}$	$\frac{\nabla}{1-\nabla}$	$e^{hD}-1$
δ	$E^{1/2}-E^{-1/2}$	$\frac{\Delta}{(1+\Delta)^{1/2}}$	δ	$\frac{\nabla}{(1-\nabla)^{1/2}}$	$2\sinh(hD/2)$
∇	$1-E^{-1}$	$\frac{\Delta}{1+\Delta}$	$\delta\mu-\frac{\delta^2}{2}$	∇	$1-\frac{1}{e^{hD}}$
hD	$\log E$	$\log(1+\Delta)$	$2\,\mathrm{arcsinh}(\delta/2)$	$-\log(1-\nabla)$	hD
μ	$\frac{E^{1/2}+E^{-1/2}}{2}$	$\frac{1+\Delta/2}{(1+\Delta)^{1/2}}$	μ	$\frac{1-\nabla/2}{(1-\nabla)^{1/2}}$	$\cosh(hD/2)$
	$\mu=(1+\delta^2/4)^{1/2}$				

表 2

f_{-2}			f_{-2}			f_{-2}		
	Δf_{-2}			∇f_{-1}			$\delta f_{-3/2}$	
f_{-1}		$\Delta^2 f_{-2}$	f_{-1}		$\nabla^2 f_0$	f_{-1}		$\delta^2 f_{-1}$
	Δf_{-1}			∇f_0			$\delta f_{-1/2}$	
f_0		$\Delta^2 f_{-1}$ ···	f_0		$\nabla^2 f_1$ ···	f_0		$\delta^2 f_0$ ···
	Δf_0			∇f_1			$\delta f_{1/2}$	
f_1		$\Delta^2 f_0$	f_1		$\nabla^2 f_2$	f_1		$\delta^2 f_1$
	Δf_1			∇f_2			$\delta f_{3/2}$	
f_2			f_2			f_2		

在函数值的相邻处依次排列差分的表称作**差分表** (difference table). 表 2 中的三个表在数值上完全相同，只是在符号上有差异. 如果 $f(x)$ 是 k 次多项式，则 $\Delta f(x)$ 是 $k-1$ 次式，k 阶差分是常数，$k+1$ 阶差分 $\Delta^{k+1}f(x)$ 是零. 因此，一看差分表，就可推测出以几次插值多项式才能很好地逼近 $f(x)$. 另外，如果值 f_i 有误差，则由于在差分表的相应位置上该误差是按二项式系数倍扩大的，所以容易发现表值的错误.

使用差分表，对于在点 $x=x_0+ph$ 处的值 f_p 作插值的公式如下：由 $f_p=E^pf_0=(1+\Delta)^pf_0$，得 **Newton 向前插值公式** (Newton's forward interpolation formula):

$$f_p=f_0+p\Delta f_0+\frac{p(p-1)}{2}\Delta^2 f_0+\cdots.$$

从 $f_p=E^pf_0=(1-\nabla)^{-p}f_0$，得 **Newton 向后插值公式** (Newton's backward interpolation formula):

$$f_p=f_0+p\nabla f_0+\frac{p(p+1)}{2}\nabla^2 f_0+\cdots.$$

这些公式作为理论的基础是重要的. 但是，在实际中只有在不得已时才在函数表的开头使用公式的原始形式. 向前插值公式，可以用阶乘多项式 $x^{(k)}=x(x-1)\cdots(x-k+1)$ 表示为 $f_p=a_0+a_1p^{(1)}+a_2p^{(2)}+\cdots$ 的形式，其中系数 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 由关系式 $\Delta x^{(k)}=kx^{(k-1)}$ 及 $\Delta^k f_p$ 在 $p=0$ 的值所确定. 在实际中常用的是下述 **Everett 插值公式** (Everett's interpolation formula). 设 $q=1-p$，则

$$f_p=qf_0+E_2\delta^2 f_0+E_4\delta^4 f_0+\cdots+pf_1+F_2\delta^2 f_1+F_4\delta^4 f_1+\cdots,$$

其中

$$E_2=(q-1)q(q+1)/3!,$$
$$E_4=(q-2)(q-1)q(q+1)(q+2)/5!,\cdots,$$
$$F_2=(p-1)p(p+1)/3!,$$
$$F_4=(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)/5!,\cdots.$$

此外，还有 Bessel, Gauss, Stirling 等公式，但它们在本质上都是相同的 (→ 公式 21).

对于不等距的 x_i，有时还使用**差商**

$$f_{ij}=\frac{f_i-f_j}{x_i-x_j},\quad f_{ijk}=\frac{f_{ij}-f_{jk}}{x_i-x_k},\cdots.$$

它们关于下标具有对称性，例如 $f_{01\cdots k}$ 可表为

$$f_{01\cdots k}=\sum_{i=0}^{k}\frac{f_i}{\Pi'(x_i)},$$

$$\Pi(x)=\prod_{i=0}^{k}(x-x_i).$$

对于 n 次多项式作差商，则变成 $n-1$ 次多项式；依次做下去，次数逐次下降. 在 x 处的值 f 可用差商表示为

$$f=f_0+(x-x_0)f_{01}+(x-x_0)\times(x-x_1)f_{012}+\cdots+(x-x_0)\times(x-x_1)\cdots(x-x_n)f_{01\cdots nx}.$$

如去掉其最后一项，则得到在 $x=x_i$ 处与 $f(x)$ 取相同值的 n 次多项式，可用它来进行插值；如改写其中的差商，则它就成为 Lagrange 插值多项式.

同样可以讨论多变量函数的插值法 (→ 公式 21).

【参】 [1] C. Lanczos, Linear differential operators, van Nostrand, 1961; [2] W. E. Milne, Numerical calculus, Princeton Univ. Press, 1949 (中译本，W. E. 密伦，数值计算，科学出版社，1959); [3] National Physical Laboratory 编), Modern computing methods, 第二版, Notes on Applied Science, no. 16, Her Majesty's Stationary Office, London, 1961; [4] 石田保士，補間係数表，培風館，1953; [5] 山内二郎-森口繁一-一松信编，電子計算機のための数值計算法 I, 第 3 章，培風館，1965; [6] J.

Walsh (ed.), Numerical analysis, an introduction, Academic Press, 1967; [7] P. J. Davis, Interpolation and approximation, Blaisdell, 1963.

误差分析 [英 theory of errors 法 théorie des erreurs 德 Fehlertheorie 俄 теория погрешностей 日 誤差論] 误差是一个量的近似值与精确值之差. 误差分析,本来是为整理天文学、测量学等方面的观测值的需要而产生的，在以前以统计处理方法为主(→统计线性模型). 但是,近年来随着电子计算机的发展，使大规模的数值计算成为可能,所以,在现代的数值计算中精细的误差分析已成为绝对必要的工作，这也是**误差分析**的中心研究课题.

【误差】 计算物体个数时,如果个数少,那么出错的机会也少,能够得到精确的值. 与此相反,测量连续量(例如长度等)时,无论采用多么精密的测定方法，也不可能得到绝对精确的值,偶然误差(即使很小)总是会出现的. 离散的有限量是**数字量** (digital quantity)，而连续量是**模拟量** (analog quantity)，两者有本质的不同. 数字量的值是分布在若干个离散的点上的. 反之,模拟量的值是按连续的概率分布的. 即使是数字量,计算它时,如有出错的机会,也会产生误差，但这时的答案也在如上所述的离散的点上，因此容易检验. 但如果可能取的值非常多,则上述离散的点非常稠密,差不多要和模拟量同样地来考虑了.

另一方面，对模拟量而言，当用模拟计算机[†]来处理它时，仍旧变换成模拟量. 但是，进行数字量处理时，首先把该量表示为某单位量的 x 倍，再把 x 展成十进制或二进制数. 该展开式本来是无穷位小数,但实际上,把它舍入成人或计算机的能力所能接受的有限位近似值. 相应于规定小数点后取几位或者取多少位有效数字,数的舍入方法分为**定点** (fixed point) 法和**浮点** (floating point) 法.

由人或数字计算机处理输入数据时，所得结果和精确值之差,一般称为**误差** (error). 误差还可分类如下: 1) **输入误差**或**数据误差** (error of input data). 它是输入数据中已经存在的误差. 用有限位小数表示公式中的1/3, $\sqrt{2}$, π 等时所产生的误差也属于此类. 2) **截断误差** (truncation error). 它是由于在计算过程中所使用的计算公式是近似式而产生的误差，即近似式的误差. 3) **舍入误差** (round-off error, rounding off error). 它是在计算的各个步骤中，将所得到的数值舍入成某有限位数所产生的误差. 当然，如果可以计算到无穷多位(实际上是不可能的)，则这种误差就不存在了.

用定点法舍入还是浮点法舍入，其区别在于前者适合于加减法,后者适合于乘除法. 按定点方式进行舍入时,假如小于1的数乘多次,则发生所谓**下溢** (underflow) 现象，此时，数字全部消失,因此丢掉信息. 在乘除运算很多的科学计算中适合于用浮点法，但这时由于加减法也产生舍入误差，因此可能存在大量丢失信息的危险性. 这就是所谓的**位抵消** (cancelling)，例如 7.6325071 − 7.6318425 = 0.0006646，由于有效数字的前几位相同的两数相减，在结果中有效数位大为减少. 此时，相对误差大大增加. 如该数在后面的计算中起作用，则增大了的相对误差将影响全局，使计算结果极为不正确. 在能发生位抵消现象的情形下，如用更多的位进行计算,则位数减少的现象相对减少,所以能减少位抵消的坏影响. 以多位数进行计算的所谓**高精度计算** (high precision computation) 的优点也就表现于此.

【误差的传播】 为了分析**误差的传播** (英 propagation of errors 德 Fehlerfortpflanzung)，假定能对无穷多位数进行计算而不发生舍入误差. 对给定的输入数据 $x_1, \cdots, x_n$，按照 $y=f(x_1, \cdots, x_n)$ 计算 y. 设近似式的截断误差为 η. 如果输入数据 x_i 存在输入误差 δ_i，则 y 中出现的误差 δ 为

$$\eta+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\delta_i.$$

上面曾假定全部计算是以无穷多位数进行的，但最后把结果舍入成有限位数，由此产生的舍入误差设为 ε，则 y 的最后误差 δ 是

$$\delta = \varepsilon + \eta + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta_i.$$

在分为若干个步骤的计算中，在每一步都要考虑上述过程. 设 $y = f(x_1, \cdots, x_n)$ 是在某步上的计算结果，则上式中的 δ_i 是该步开始时的输入误差，它除包括最初的输入误差外，还包括以前各步中所产生的全部误差，即 δ_i 是一个**累积误差** (accumulated error). 这时，若前一步的误差对后一步的影响变得较小，而且随着计算的继续进行其影响逐渐消失，则整个计算结果就是稳定的. 反之，如果前一步的误差对后一步的影响增大，误差逐步累积，则计算结果就远远离开了正确答案. 我们用 Bessel 函数†的递推公式

$$J_{n+1}(x) = (2n/x)J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

作为计算过程中舍入误差累积的例子. 由此公式，对给定的 x，从已知的 $J_0(x)$, $J_1(x)$ 之值开始逐步算出 $J_n(x)$，是一个有名的古典方法. 设 $J_{n-1}(x) = y_n$, $J_n(x) = z_n$，则上述递推公式可以看作从平面上的点 $P_n(y_n, z_n)$ 到点 $P_{n+1}(y_{n+1}, z_{n+1})$ 的线性变换

$$y_{n+1} = z_n, \quad z_{n+1} = -y_n + (2n/x)z_n.$$

此差分方程的特征值为

$$\lambda_1 = \frac{n}{x} + \sqrt{\frac{n^2}{x^2} - 1},$$

$$\lambda_2 = \frac{n}{x} - \sqrt{\frac{n^2}{x^2} - 1}.$$

当 $n < |x|$ 时，$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$，但当 $n > |x|$ 时，λ_1 为正且大于1，并且随着 n 的增大而急剧增加. 因此，即使由于舍入误差使 P_n 的位置有微小偏离，误差也会逐渐迅速扩大，使最后的结果成为毫无意义的值. 这时如能进行无穷多位数的计算，就不会发生这种现象. 因此，如果取充分多的有效位数进行计算，则可使 P_n 开始偏离真实位置的时刻来得很晚. 这样的例子在 [3] 中已讨论过.

特别是在常微分方程的数值解法中，关于误差传播问题，研究的比较多 ([2], [4], → 常微分方程的数值解法).

另外，为了设法防止产生舍入误差，还有很有趣味的方案，例如，将所有的量用整数来表示，并利用关于素数 p 的 mod p 的计算 ([6]). 关于线性方程组的误差 → [1], [5].

【参】 [1] J. von Neuman-H. H. Goldstine, Numerical inverting of matrices of higher order, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 1021—1099; [2] P. Henrici, Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley, 1962; [3] 宇野利雄，誤差伝播の問題，数学，**15** (1963), 30—40; [4] 伊理正夫，常微分方程式の数値解法における不安定現象に対する一対策，情報処理，**4** (1963), 249—260; [5] 永坂秀子，ある種の三项方程式における誤差伝播，情報処理，**5** (1964), 195—202; [6] 高橋秀俊-石橋善弘，電子計算機による exact な計算の新方法，情報処理，**1** (1960), 78—86; [7] J. H. Wilkinson, Rounding errors in algebraic processes, Prentice-Hall, 1963; [8] L. B. Rall (ed.), Error in digital computation I, II, John Wiley, 1965.

线性方程组的数值解法 [英 numerical solution of linear equations 法 solution numérique des équations linéaires 德 numerische Lösung der linearen Gleichungen 俄 численное решение систем линейных уравнений 日 連立1次方程式の数値解法] 若将线性方程组

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i, \quad i = 1, \cdots, n$$

写成矩阵形式，则得

$$(2) \qquad AX = c; \quad A = (a_{ij}), \quad c = (c_i), \quad X = (x_i).$$

从理论上，用行列式容易求出 (1) 的解，但实际上，特别是当 n 较大 (例如几十以上) 时，由 $n!$ 个项计算行列式是不大可能的. 数值解法，大致可分成消元法和迭代法两种.

【消元法】 所谓**消元法** (elimination method)，就是依次作 (1) 式的线性组合来消去未知量的方法. 表 1 是按下列计算格式构成的:

$$(3) \qquad a_{ij}^{(m+1)} = a_{ij}^{(m)} - a_{im}^{(m)}a_{mj}^{(m)}/a_{mm}^{(m)},$$
$$c_i^{(m+1)} = c_i^{(m)} - a_{im}^{(m)}c_m^{(m)}/a_{mm}^{(m)},$$
$$i, j = m+1, m+2, \cdots, n.$$

设 $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$, $c_i^{(1)} = c_i$，按 (3) 从 $m = 1$ 一直计算到 $m = n-1$，称作**消元过程** (forward steps). 这个过程结束时，则得系数成为三角矩阵的线性方程组:

$$(4)\quad \sum_{j=m}^{n} a_{mj}^{(m)} x_j = c_m^{(m)}, \quad m = 1, \cdots, n.$$

表　1

a_{11}	a_{12}	a_{13}	…	a_{1n}	c_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	…	a_{2n}	c_2
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	…	a_{nn}	c_n
	$a_{22}^{(2)}$	$a_{23}^{(2)}$	…	$a_{2n}^{(2)}$	$c_2^{(2)}$
	$a_{32}^{(2)}$	$a_{33}^{(2)}$	…	$a_{3n}^{(2)}$	$c_3^{(2)}$
	$a_{n2}^{(2)}$	$a_{n3}^{(2)}$	…	$a_{nn}^{(2)}$	$c_n^{(2)}$

对于(4)式，从后面逐个地求出 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$，就得到原方程组的解，称这个过程为**回代过程**(backward steps). 表中元素 $a_{mm}^{(m)}$ 在进入下一阶段的计算中起着重要的作用，称它为**主元**(pivot). 主元之积等于系数矩阵的行列式，即

$$|A| = a_{11}a_{22}^{(2)}\cdots a_{nn}^{(n)}.$$

若某一主元等于 0，或有效数字的位抵消[†]显著，那么往下的计算就不能进行. 这时就必须改变主元的位置. 通常是，在每一阶段都选择 $a_{ij}^{(m)}$ 中绝对值最大者作为主元进行下一阶段的计算，称此为**主元选取法**(method of pivot selection). 使用此法时，根据最后第几个主元处出现零就能确定出系数矩阵的秩[†]，还能够判别方程组的不稳定性或是否可解等问题.

有很多种解法，它们在本质上与消元法相同，只是消元顺序不同. 其中最简明的有**括去法**(sweeping out method). 该方法也称为 **Gauss-Jacobi 消元法**(Gauss-Jacobi elimination method). (相应地将前面提出的方法，有时称为 **Gauss 消元法**(Gauss' elimination method).) 这个方法是按着下列计算格式进行的. 对 $m=2$ 的情形，如表 2 所示.

表　2

1	0	$a_{13}^{(3)}$	…	$a_{1n}^{(3)}$	$c_1^{(3)}$
0	1	$a_{23}^{(3)}$	…	$a_{2n}^{(3)}$	$c_2^{(3)}$
0	0	$a_{33}^{(3)}$	…	$a_{3n}^{(3)}$	$c_3^{(3)}$
0	0	$a_{n3}^{(3)}$	…	$a_{nn}^{(3)}$	$c_n^{(3)}$

$$(5)\quad a_{mj}^{(m+1)} = a_{mj}^{(m)}/a_{mm}^{(m)}, \quad c_m^{(m+1)} = c_m^{(m)}/a_{mm}^{(m)},$$
$$j = m, m+1, \cdots, n;$$
$$a_{ij}^{(m+1)} = a_{ij}^{(m)} - a_{im}^{(m)}a_{mj}^{(m)}/a_{mm}^{(m)},$$
$$c_i^{(m+1)} = c_i^{(m)} - a_{im}^{(m)}c_m^{(m)}/a_{mm}^{(m)},$$
$$j = 1, \cdots, n, \quad j \neq n;$$
$$i = m+1, \cdots, n.$$

当计算到 $m = n$ 时，则系数矩阵变成单位矩阵，且右端所出现的 $c_i^{(n)}$ 就是方程组的解，即 $x_i = c_i^{(n)}$. 这个方法只需要消元过程，而不需要回代，虽运算量比 Gauss 消元法稍多些，但程序简单. 当方程组的右端不是一个列向量 c 而是有若干个并列的列向量时，则该方法能同时解系数矩阵相同，而只是改变了右端的数个线性方程组. 特别是，若右端是单位矩阵，则按此法计算到第 n 步时便得到矩阵 A 的逆矩阵.

【迭代法】 **迭代法**(iteration method)，是当系数矩阵的对角线元素之绝对值和其他元素的绝对值相比占优势时所采用的方法. **Gauss 迭代法**(Gauss' iteration method)，是以 $x_i^{(0)} = c_i/a_{ii}$ 为初始值，按下列计算公式进行迭代的：

$$(6)\quad x_i^{(m+1)} = \left(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right)\Big/ a_{ii},$$
$$i = 1, \cdots, n.$$

根据残量 $r_i^{(m)} = x_i^{(m+1)} - x_i^{(m)}$ 是否逐渐变小能检验 $x_i^{(m)}$ 的收敛性. 当收敛时，其极限值即为所求的解 x_i.

将(6)式右端的 $x_j^{(m)}$ $(j \leqslant i-1)$，用已算得的值 $x_j^{(m+1)}$ 代替便得到 **Gauss-Seidel 迭代法**(Gauss-Seidel iteration method). 这个方法在电子计算机上执行时，不仅节省存储单元，而且还往往能加快收敛速度. 另外，至少在理论上，当系数矩阵 A 是正定 Hermite 矩阵时，则 Gauss-Seidel 迭代法收敛.

【共轭斜量法】 **共轭斜量法**(conjugate gradient method)，原来是作为迭代法来考虑的，但在理论上，如消元法那样，n 步就收敛. 当 A 为实对称正定矩阵时，取任意向量 X_0 为初始向量. 从 $p_0 = r_0 = c - AX_0$ 出发，按照下列公式重复计算 n 次即可：

$$a_i = |r_i|^2/(p_i, Ap_i),$$
$$X_{i+1} = X_i + a_i p_i,$$
$$r_{i+1} = r_i - a_i A p_i,$$
$$b_i = |r_{i+1}|^2/|r_i|^2,$$
$$p_{i+1} = r_{i+1} + b_i p_i,$$

其中，X_i, r_i, p_i 是列向量，a_i, b_i 是纯量. 另外 r_i 等于残向量 $c - AX_i$，而 r_i 相互正交，因此第 $n+1$ 个 r_n 必变成零，X_n 就是所求之解向量. 当 A 为非实对称矩阵时，对原方程乘以 ^tA（转置矩阵）把它变成 $^tAAX = {}^tAc$，那么 ^tAA 就是对称正定的，所以对此方程应用上述方法即可.

比较上述三种方法，消元法虽属最原始的方法，但它最好，主元选取法也更无问题. 即使系数矩阵为**病态的情形**（ill-conditioned case），用消元法也能得到相当精确的近似解. 但利用共轭斜量法时，可能得到错误的解. 当谈到系数矩阵 A 具有病态时，乃是以矩阵 ^tAA 的最大特征值 λ，与其最小特征值 μ 作的比值 $\sqrt{\lambda}/\sqrt{\mu}$ 来衡量的. 比值越大病态越重. 在矩阵 A 是退化的情形（即 $|A| = 0$ 时），$\mu = 0$，则上述比值变成∞. 利用差分方法解偏微分方程时，系数矩阵中出现许多零，这时用迭代法解是有效的. 为使 $x_i^{(m)}$ 很快收敛，有时进行加速（→偏微分方程的数值解法）.

【正规方程组】 在线性方程组

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = c_i, \quad i = 1, \cdots, N$$

中，当方程的个数 N 大于未知量的个数 n 时，一般来说，该方程组是不可解的. 但不要求精确满足 (7)，而要确定 x_i 使得残量

$$r_i = c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

之平方和 $\sum_{i=1}^{n} r_i^2$ 最小，这还是可能的. 这样来求 x_i 的方法就是所谓**最小二乘法**（method of least squares）. 该方法，通过作

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{N} r_i^2\right) = 0, \quad k = 1, \cdots, n,$$

把问题归结为解线性方程组

$$(8) \qquad \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} a_{ik} a_{ij}\right) x_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ik} c_i,$$
$$k = 1, \cdots, n.$$

在最小二乘法中，方程组 (8) 称作**正规方程组**（normal equations）.

【参】 [1] P. S. Dwyer, Linear computation, John Wiley, 1951; [2] Д. К. Фаддеев-В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, 1963 (中译本，Д. К. 法捷耶夫，В. Н. 法捷耶娃，线性代数计算方法，上海科学技术出版社，1965); [3] L. Fox, An introduction to numerical linear algebra, Clarendon Press, 1964; [4] 古屋茂，連立1次方程式および逆行列に関する数值計算法，数学，9 (1958)，240—249; [5] 永坂秀子，行列および連立1次方程式，情報処理学会编，電子計算機ハンドブック，第5篇第2章，オーム社，1966; [6] R. S. Varga, Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962 (中译本：R. S. 瓦格，矩阵迭代分析，上海科学技术出版社，1966); [7] J. Walsh (ed.), Numerical analysis, an introduction, Academic Press, 1967; [8] F. John, Lectures on advanced numerical analysis, Gordon and Breach, 1967. 另→特征值的数值计算法的【参】.

代数方程的数值解法 [英 numerical solution of algebraic equations 法 solution numérique des équations algébriques 德 numerische Lösung der algebrischen Gleichungen 俄 числовое решение алгебраических уравнений 日 代数方程式の数值解法] 求方程（不限于代数方程）$f(x) = 0$ 的根 α 的数值计算法，大致分成以下两种. 1) 首先适当地给出根 α 的初始近似值，然后逐次改善它的精度的方法，如 Newton-Raphson 法等. 2) 直接寻找根 α 的较好的近似值，而不需要初始近似值的方法，如对高次代数方程有 Graeffe 法，Bernoulli 法等. 一般来讲，画出图象是有用的. 属于 1) 和 2) 的方法可以单独使用. 但对 1) 中的方法，如果初始近似值给的不恰当，那么可能不收敛于根 α. 至于 2) 中的方法，虽收敛，但速度较慢. 为逼近精确解，不取充分多的位数进行计算是难以保证所要的精度的. 因而在使用电子计算机进行计算时，两种方法联合使用是有利的（[1]）. 近年来，随着电子计算机的发展，具有大范围收敛性的解法越来越得到重视（[13]，[17]）.

【迭代法】 当把方程 $f(x) = 0$ 变形为 $x = F(x)$，用迭代公式 $x_{i+1} = F(x_i)$ $(i = 0,$

1, 2, …) 求根时，则迭代公式收敛的必要条件如下：令 α 为方程的一个根，则由 $x_{i+1}-\alpha=F(x_i)-\alpha$，得 $(x_{i+1}-\alpha)/(x_i-\alpha)=F'(\xi)$ ($x<\xi<\alpha$ 或 $x>\xi>\alpha$)．从而如果 $0<F'(\xi)<1$，则 x_i 单调地收敛于根 α；如果 $0>F'(\xi)>-1$，则振动地收敛．假如 $|F'(\xi)|>1$ 时，设 $F^{-1}(x)$ 为 $F(x)$ 的反函数，那么 $x=F^{-1}(x)$ 形式的迭代法收敛．迭代法的收敛速度以阶表示如下：即 $\lim_{i\to\infty}x_i=\alpha$ 时，若

$$\lim_{i\to\infty}(x_{i+1}-\alpha)/(x_i-\alpha)^k=c\neq 0,$$

则称该迭代法的收敛速度为 **k 阶** (k-th order)．收敛速度为 k 阶的充分必要条件是

$$\alpha=F(\alpha),$$
$$F'(\alpha)=F''(\alpha)=\cdots=F^{(k-1)}(\alpha)=0,$$
$$F^{(k)}(\alpha)\neq 0.$$

在数值计算中使用的主要的迭代法列举如下：

【试位法】 **试位法**（拉 regular falsi，英 method of false position），是以左右夹击的方式求方程 $f(x)=0$ 的实根 α 的方法，其计算过程如下：对夹住 α 的两个近似值 x_p, x_q，设 $f(x_p)>0$，$f(x_q)<0$，则以

$$\bar{x}=(x_qf(x_p)-x_pf(x_p))/(f(x_p)-f(x_q))$$

求出新的近似值 $\bar{x}$．若 $f(\bar{x})>0$，则 $\bar{x}\to x_p$，若 $f(\bar{x})<0$，则 $\bar{x}\to x_q$，如此反复计算下去（符号"→"表示替换）．试位法的收敛条件和收敛速度如下：设

$$F(x)=(x_qf(x)-xf(x_p))/(f(x)-f(x_q)),$$

则

$$F'(\alpha)=(f(x_q)+(\alpha-x_q)f'(\alpha))/f(x_q).$$

但是，如果在 α 附近 f', f'' 连续，则

$$f(x_q)=f(\alpha)+(x_q-\alpha)f'(\alpha)+(1/2)(x_q-\alpha)^2f''(\xi)$$
$$(\alpha>\xi>x_q \text{ 或 } \alpha<\xi<x_q).$$

从而，假定

$$F'(\alpha)=(1/2)(x_q-\alpha)^2f''(\xi)/f(x_q)\neq 0,$$

那么当 x, x_q 靠近 α 时，就能使 $|F'(x)|<1$．成立．因此，只要初始值选得适当，就能以一阶的收敛速度收敛（在 [21] 中已证明此法的敛速为 $(1+\sqrt{5})/2$ 阶的．译者）．试位法的特点是只需计算 $f(x)$ 而不需计算 $f'(x)$．另外，当两个实根很靠近，并且在这些根附近 $f'(x)$ 很小时，在以试位法求根 α 的过程中不必担心被邻根 β 所换掉．

这种方法属于线性反插值法．这种反插值法，还有利用 Lagrange 插值公式†的 Muller 法 ([3])，利用 Stirling 插值公式的 Whittaker 法 ([4]) 等等．这些方法虽比线性反插值法收敛速度快，但公式较复杂．求高次代数方程 $f(x)=0$ 实根的 **Sturm 法**（根据 Sturm 定理缩小根所在区间的方法，即对分区间套法），**Horner 法**（逐位求 10 进制小数的方法）等也属于这种方法．还有，用连分数形式求得实根 α 的 **Lagrange 法** ([14])，它是用完全不含舍入误差的整数进行计算的，所以此法对分离位置很接近的根是有用的．

【Newton-Raphson 法】 为了求方程 $f(x)=0$ 的实根 α，当能计算 $f'(x)\neq 0$ 时，可使用收敛速度较快的 **Newton-Raphson 法**（或 **Newton 迭代法**）．设根 α 的一个适当的第 i 次近似值为 x_i，则 $x_{i+1}=x_i-f(x_i)/f'(x_i)$ 比 x_i 更接近于精确解．如此重复下去，当 $|x_{i+1}-x_i|$ 充分小时，就认为迭代法已收敛．收敛条件和收敛速度如下：设 $F(x)=x-f(x)/f'(x)$，则

$$F'(x)=f(x)f''(x)/(f'(x))^2,$$
$$F'(\alpha)=0.$$

从而，如果 $f'(\alpha)\neq 0$, $f''(\alpha)\neq 0$，则 $F''(\alpha)\neq 0$，因此如能在 α 附近确定适当的近似值 x_i 使 $|F'(x_i)|<1$，那么收敛速度就是二阶的．特别是，如果 $f(x_0)f'(x_0)\neq 0$, $h_0=-f(x_0)/f'(x_0)$, $|f''(x)|<M$, $|f'(x_0)|\geqslant 2h_0M$，则从 x_0 开始的 Newton 近似值 x_i 全部包含在比 $|h_0|$ 小的区间之内，其中方程只有一个根 α 且 $x_i\to\alpha$．此外还有 $|\alpha-x_{i+1}|\leqslant M|x_i-x_{i+1}|^2/2|f'(x_i)|$ $(i=1,2,\cdots)$（例如 [5], §37)．

Newton-Raphson 法也适用于复变量的全纯函数．这时，多半是把各方程分成实部和虚部进行实际计算（如 [1]）．占部实研究了考虑到舍入误差的收敛性判定和误差估计 ([7])．一

般说来，除 $f'(x)$ 之外还用到 $f''(x)$ 的 Newton-Raphson 法的收敛阶是 3 ([9]). 当 $f'(x)\approx 0$ 时,必须使用 $f''(x)\neq 0$. 在这方面有一松信的研究工作 ([6]). 另外，W. Kizner 报告了不用 $f''(x)$ 以上的高阶导数但具有 5 阶收敛速度的迭代法 ([10]). 该方法的原理是,设 x_1 为方程 $f(x)=0$ 的根 $\bar{x}$ 的第一近似，则

$$\bar{x}=\int_{f(x_1)}^{0}\frac{dx}{df}\,df+x_1,$$

其中的积分部分用 Runge-Kutta 法[†]进行数值积分. 对固定的收敛阶数 k，解 $f(x)=0$ 的迭代法不只一种,例如,求方程 $f(x)=x^2-a=0$ 的根，即求平方根 $\alpha=\sqrt{a}$ 的迭代法

$$x_{i+1}=(x_i+a/x_i)/2$$

和迭代法

$$x_{i+1}=2x_i^3/(3x_i^2-a)$$

都具有二阶收敛速度. 求 $f(x)=x^3-a=0$ 的根，即求立方根 $\alpha=\sqrt[3]{a}$ 的迭代法

$$x_{i+1}=x_i+(a/x_i^2-x_i)/3$$

以二阶速度收敛,而

$$x_{i+1}=x_i/2+(a+a/2)/(2x_i^2+a/x_i)$$

以三阶速度收敛.

对于两个变量的方程组 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$，可以把它变成 $x=\varphi(x,y)$，$y=\psi(x,y)$，如果

$$|\partial\varphi/\partial x|+|\partial\psi/\partial x|<1,$$
$$|\partial\varphi/\partial y|+|\partial\psi/\partial y|<1,$$

则迭代程序 $x_{i+1}=\varphi(x_i,y_i)$，$y_{i+1}=\psi(x_i,y_i)$ 是可用的. 对 Newton-Raphson 法，设 Δx_i，Δy_i 为第 i 近似值 x_i, y_i 的修正值,则它们可由解方程组

$$f_x(x_i,y_i)\Delta x_i+f_y(x_i,y_i)\Delta y_i=-f(x_i,y_i),$$
$$g_x(x_i,y_i)\Delta x_i+g_y(x_i,y_i)\Delta y_i=-g(x_i,y_i)$$

而得到,并把

$$x_{i+1}=x_i+\Delta x_i,$$
$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i$$

作为进行下一步计算的近似值. 将这个过程反复进行到 $|\Delta x_i|$, $|\Delta y_i|$ 充分小为止.

【Bairstow 法】 **Bairstow 法**也称为 **Hitchcock 法**，它是为求实系数代数方程 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的复根而求 $f(x)$ 的二次因式 $x^2+p^*x+q^*$ 的方法. 首先，确定适当的二次试验因式 x^2+px+q. 其次，根据二次因式的综合除法，由

$$b_j=a_j-pb_{j-1}-qb_{j-2}$$
$$(j=0,1,\cdots,n),$$
$$c_j=b_j-pc_{j-1}-qc_{j-2}$$
$$(j=0,1,\cdots,n-1)$$

求出 b_j, c_j. 其中令 $b_{-1}=b_{-2}=C_{-1}=C_{-2}=0$. 解方程组

$$c_{n-2}\Delta p+c_{n-3}\Delta q=b_{n-1},$$
$$\bar{c}_{n-1}\Delta p+c_{n-2}\Delta q=b_n,$$

其中

$$\bar{c}_{n-1}=c_{n-1}-b_{n-1},$$

求出 Δp, Δq. 然后算出 $p^*=p+\Delta p$, $q^*=q+\Delta q$，把 $x^2+p^*x+q^*$ 作为新的试验因式. 如此重复到 Δp, Δq 充分小为止. 这个方法相当于两个变量的 Newton-Raphson 方法，所以它具有二阶收敛速度. 只要 p, q 选得适当，其收敛速度是很快的.

这种方法的原理是: 设 R_1x+R_2 为用 x^2+px+q 除 $f(x)$ 所得的余式，然后确定 p, q 使得 $R_1(p,q)=R_2(p,q)=0$. 一般地，使得做除法后的余式为 $r(x)=r_1x^{k+1}+r_0x^k$ 也是同样可行的. 这种推广是 A. A. Grau 作出的 ([11]). 当 $k=0$ 时，就是 Bairstow 法，而当 $k=n-2$ 时,就相当于 McAuley 法([12]).

【求根的较好初始近似值的方法】 下面列举求根的较好初始近似值的几种主要的方法.

【Bernoulli 法】 **Bernoulli 法**是对代数方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$$

反复运用迭代公式

$$S_k=-a_1S_{k-1}-a_2S_{k-2}-\cdots-a_nS_{k-n}$$

的方法. 迭代初值可按下列两种方法中的某一种选取: 1) $S_0=S_1=\cdots=S_{n-2}=0$, $S_{n-1}=1$; 2) $S_k=-(a_1S_{k-1}+a_2S_{k-2}+\cdots+a_{k-1}S_1+a_kk)$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 设 $f(x)=0$ 的根为 α_1, α_2, $\cdots$, α_n ($|\alpha_1|>|\alpha_2|>\cdots>|\alpha_n|$)，如果 α_1 是实的单根且 $|\alpha_1|>|\alpha_2|$，则 $S_k/S_{k-1}\to\alpha_1$,

如果 α_1, α_2 是复根，设 $\alpha_1 = re^{i\theta}$, $\alpha_2 = re^{-i\theta}$, $|\alpha_3| < r$，则由于

$(S_k^2 - S_{k+1}S_{k-1})/(S_{k-1}^2 - S_kS_{k-2}) \to r^2$,

$(S_kS_{k-1} - S_{k+1}S_{k-2})/(S_{k-1}^2 - S_kS_{k-2}) \to 2r\cos\theta$,

所以 $x^2 - (2r\cos\theta)x + r^2 = 0$ 的二个根就是 α_1, α_2, 其中，S_k 是方程的 n 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的 k 次幂之和. 计算 S_k 时，C. Lanczos 使用了 $xf'(x)/f(x) = n + S_1/x + S_2/x^2 + \cdots + S_k/x^k + \cdots$ ([9], p. 26—30).

这个方法是把上述代数方程作为下面的矩阵 A 的特征方程来求解导出的:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

设矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ($|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$), 则 Bernoulli 法就等价于求最大特征值 λ_1 的幂法*(→特征值的数值计算法 [幂法]).

【Lehmer 法】 **Lehmer 法**([13]), 是在复平面上寻找复系数代数方程

$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = 0$

的 n 个根的方法. 计算过程如下:

第一步. 任意给定半径 r，以原点为中心画半径为 $R = r2^{-\theta}$ (θ 是任意给定的整数) 的圆，然后判断在该圆内是否存在 $f(z) = 0$ 的根 (判断中利用 Lehmer 定理). 当无根时，作 $2R \to R$, 有根时，作 $R/2 \to R$, 再检查相应的圆内是否有方程的根. 重复这一过程直到求出一个 R 使圆环 $R < |z| < 2R$ 中有根为止.

第二步. 以 $\beta_k = (5R/3)\exp(i2\pi k/8)$ 为圆心 ($k = 0, 1, \cdots, 7$), 逐次作半径为 $\mu = (5R/3)/2$ 的小圆并以此覆盖第一步中求得的圆环，然后检查根 α 在哪一个小圆内部. 如果已知 α 在 $k = i$ 时的圆内，就把原点移到 β_i 并回到第一步.

若按第一步求得满足 $R_1 < |z - \beta_i| < 2R_1$ 的 R_1, 则 $R_1 \leqslant (5/6)R$. 因此，第一步重复进行 N 次后，根 α 就在半径比 $(5/6)^NR$ 小的小圆内，这时小圆的中心 β 就是根 α 的一个较好的近似值.

【下山法】 这是求多变量函数的极值的方法之一，它也可以用来求方程组的近似解. 现以两个变量的情形来说明**下山法** (down-hill method). 设已给方程组 $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, 再设 $J(x, y) = f^2 + g^2$, 则求该方程组的实根的问题可转化成求使 $J(x, y)$ 达到极值零的坐标 (α, β) 的问题. 以 (α, β) 的任意近似值 (x_1, y_1) 为中心、h 为步长，在由 $x = x_1, x_1 \pm h$; $y = y_1, y_1 \pm h$ 组合成的 3^2 个点上计算 $J(x, y)$ 的值. 我们以 3^2 个点上的函数值为基础，用二次曲面 $b_0 + b_1x + b_2y + b_{11}(3x^2 - 2) + b_{22}(3y^2 - 2) + b_{12}xy$ 逼近 $J(x, y)$. 用最小二乘法计算 $b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{22}, b_{12}$, 并求出近似二次曲面的中心 (x_1^*, y_1^*), 然后以 $x_1 + x_1^* \to x_1$, $y_1 + y_1^* \to y_1$ 作为下一步的近似值. 再适当缩小步长 h 并重复上述过程. 这个方法是 G. E. P. Box-K. B. Wilson (1954) 在反应曲面的探索中为求得最优条件所使用的逐次实验规划法的改进.

【其他方法】 为求代数方程的根的初始近似，从前经常使用 **Graeffe 法**, 此法是逐次做方程，使其根为前一方程根的平方，以此来分离所给方程的根. 但是用电子计算机计算时，还是前述诸方法更为方便.

对方程 $f(x) = 0$, 根据函数逼近的方法作 $f(x)$ 的近似函数 $g(x)$, 将 $g(x) = 0$ 的根作为 $f(x) = 0$ 的根的近似值，这种方法，称为 **Lanczos 法**([9]). 对三次方程，用二次方程逼近的山内二郎的方法是，求下述二次方程的根来作为三次方程 $x^3 + ax^2 + bx - c = 0$ ($c > 0$) 的实根的近似值的. 设 $V = c^{1/3}$. i) 如果 $aV + b > 0$, 则解 $(a + (3/2)V)x^2 + (b - (9/16)V^2)x - (31/32)c = 0$ 并取满足条件 $0 < x < V$ 的根. ii) 如果 $aV + b < 0$, 则解 $(31/32)x^2 + (a + (9/16)V)x + (b - (3/2)V^2) = 0$ 并取满足条件 $V < x$ 的根. iii) 如果 $aV + b = 0$, 则取 $x = V$. 采用这些公式，可给出相对误差为 4—5% 的实根的初始近似值.

在求正交多项式(例如 Legendre 多项式†)的零点时，有时以渐近展开作为近似函数 $g(x)$，可以得到根的相当精确的初始近似值.

【参】 [1] H. S. Wilf, The numerical solution of polynomial equations, Mathematical methods for digital computers, John Wiley, 1959, p. 233–241; [2] D. R. Hartree, Notes on iterative processes, Proc. Cambridge Philos. Soc., **45** (1949), 230–236; [3] D. E. Muller, A method for solving algebraic equations using an automatic computer, Math. Tables Aids Comput., **10** (1956), 208–215; [4] E. T. Whittaker- G. Robinson, Calculus of observations, Blackie, 1924; [5] 一松信，数值計算，至文堂，1963; [6] S. Hitotumatu (一松信), A method of successive approximation based on the expansion of second order, Math. Japonicae, **7** (1962), 31–50; [7] M. Urabe (占部実), Error estimation in numerical solution of equations by iteration process, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A, **26** (1962), 77–91; [8] A. S. Householder, Principles of numerical analysis, McGraw-Hill, 1953; [9] C. Lanczos, Applied analysis, Prentice-Hall, 1956; [10] W. Kizner, A numerical method for finding solutions of nonlinear equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12 (1964), no. 2, 424–428; [11] A. A. Grau, A generalization of Bairstow process, J. Soc. Indust. Appl. Math., **11** (1963), no. 2, 508–519; [12] V. A. McAuley, A method for real and complex roots of a polynomial, J. Soc. Indust. Appl. Math., **10** (1962), no. 4, 657–667; [13] D. H. Lehmer, A machine method for solving polynomial equations, J. Assoc. Comput.Mach., **8** (1961), 151–162; [14] 戸田英雄，方程式の実根の計算に連分数展開を利用する方法のプログテム，情報処理，5 (1964), no. 5, 283–287; [15] 戸田英雄，1 元高次代数方程式，山内二郎-森口繁一-一松信編，電子計算機のための数值計算法 I，第 2 章，培風館，1965; [16] P. Henrici, Finding zeros of a polynomial by the *Q–D* algorithm, Comm. ACM., **8** (1965), 570–574; [17] J. F. Traub, A class of globally convergent iteration functions for solution of polynomial equations, Math. Comp., **20** (1966), 113–138; [18] A. S. Householder, The numerical treatment of a single nonlinear equation, McGraw-Hill, 1970; [19] J. Walsh (ed.), Numerical analysis, an introduction, Academic Press, 1967; [20] F. John, Lectures on advanced numerical analysis, Gordon and Breach, 1967; [21] A. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, 1960, 1973.

特征值的数值计算法 [英 numerical computation of eigenvalues 法 calcul numérique des valeurs propres 德 numerische Rechnung der Eigenwerte 俄 численное вычисление собственных значений 日 固有值の数值計算法] 在特征值问题†中，有矩阵和微分方程等各种不同情况. 不用说对有限自由度的线性问题，即使对无限自由度的线性问题，在数值解法中，也是把它归结为有限自由度问题的. 所以在特征值问题的数值解法中，矩阵的特征值†、特征向量†的数值计算法是所有问题的基础. 下面对它加以论述. 计算矩阵 A 的特征值、特征向量的方法大致可分为两类. 第一类方法是: 首先计算出矩阵 A 的特征多项式† $p(\lambda)=\det(\lambda I-A)$ (其中 I 是单位矩阵)(或给出对任意给定的 λ 计算 $p(\lambda)$ 的值的方法)，其次数值地解代数方程 $p(\lambda)=0$ 求出特征值 λ_μ $(\mu=1,2,\cdots)$ (→ 代数方程的数值解法)，最后由方程 $(\lambda_\mu I-A)\mathbf{x}_\mu=0$ 求出特征向量 $\mathbf{x}_\mu$. 第二类方法是: 不借助于解代数方程，而直接求出部分或全部特征值和特征向量. 一般地说，对于实对称(或 Hermite) 矩阵已有一些有效的数值解法，但对其他矩阵，还没有总是有效的方法，往往只好用精度不高的第一类方法去计算. 为简单起见，下面只考虑具有实元素的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,\cdots,n)$. 所叙方法，可以很容易地推广到具有复元素的矩阵上去.

【Jacobi 法】 **Jacobi 法** (Jacobi method) 是由 C. G. J. Jacobi 所发现的一次求出实对称矩阵全部特征值和特征向量的逐次逼近法 ([7]). 该方法不适于手算，但用电子计算机计算却很适宜. 它在目前所有方法中是最有效的方法之一. 下面的算法可推广到 Hermite 矩阵上去，这只要将其中的正交变换†改为酉变换即可.

概括地说，Jacobi 法是反复使用二维平面的坐标旋转将给定矩阵 $A=(a_{ij})$ $(a_{ij}=a_{ji},$ $i,j=1,\cdots,n)$ 化为对角形. 首先令 $A^{(0)}=A$, $U^{(0)}=I$，再按下述步骤逐次计算出 $A^{(1)}$, $A^{(2)},\cdots$; $U^{(1)},U^{(2)},\cdots$: 先在 $A^{(l)}=(a_{ij}^{(l)})$ 的所有非对角元素中选出绝对值最大者，记为 $a_{pq}^{(l)}$. 计算 $\tan\theta=2a_{pq}^{(l)}\operatorname{sgn}(a_{pp}^{(l)}-a_{qq}^{(l)})/(|a_{pp}^{(l)}-a_{qq}^{(l)}|+\sqrt{(a_{pp}^{(l)}-a_{qq}^{(l)})^2+4(a_{pq}^{(l)})^2})$ (其中当 $x>0$, $=0$ 或 <0 时，设 $\operatorname{sgn}x=1$, 0 或 -1)，并由 $\cos\theta=(1+\tan^2\theta)^{-\frac{1}{2}}$ 和 $\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta$ 计算出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$，从而作出旋转矩阵 $T^{(l)}=(t_{ij}^{(l)})$ (其中设 $t_{pp}^{(l)}=t_{qq}^{(l)}=\cos\theta$;

当 $i \neq p, q$ 时，$t_{ii}^{(l)} = 1$；$-t_{pq}^{(l)} = t_{qp}^{(l)} = \sin\theta$；当 $i \neq j$，$i \neq p$ 或 $i \neq q$ 时，$t_{ij}^{(l)} = 0$）. 最后，由 $A^{(l+1)} = T^{(l)'}A^{(l)}T^{(l)}$（$'$ 表示转置）和 $U^{(l+1)} = U^{(l)}T^{(l)}$ 确定 $A^{(l+1)}$ 和 $U^{(l+1)}$. 在这个方法中，$T^{(l)}$ 表示在第 p 和第 q 个坐标轴所张成的平面中使得 $a_{pq}^{(l+1)} = a_{qp}^{(l+1)} = 0$ 的正交变换†（旋转）. 如果令

$$N(B) = \sum_{i,j} b_{ij}^2, \quad M(B) = \sum_{i \neq j} b_{ij}^2,$$

则 $N(B)$ 是正交变换下的不变量，因此

$$N(A^{(l)}) = N(A).$$

而且，因为 $a_{ii}^{(l+1)} = a_{ii}^{(l)}$ $(i \neq p, q)$，$(a_{pp}^{(l+1)})^2 + (a_{qq}^{(l+1)})^2 = (a_{pp}^{(l)})^2 + (a_{qq}^{(l)})^2 + 2(a_{pq}^{(l)})^2$，所以 $M(A^{(l+1)}) = M(A^{(l)}) - 2(a_{pq}^{(l)})^2$. 又因 $a_{pq}^{(l)}$ 为所有非对角元素中的绝对值最大者，故有 $(a_{pq}^{(l)})^2 \geqslant M(A^{(l)})/(n^2-n)$. 因此，

$$\begin{aligned} M(A^{(l+1)}) &\leqslant (1 - 2/(n^2-n))M(A^{(l)}) \\ &\leqslant (1 - 2/(n^2-n))^{l+1}M(A) \\ &< M(A)\exp(-2(l+1)/(n^2-n)). \end{aligned}$$

已经证明 [13]，当 $M(A^{(l)})$ 小于某个临界值时，则那以后的迭代过程是二阶收敛的，即存在一个由 A 的阶数 n 和 A 的特征值的排列所决定的正数 c，使得 $M(A^{(l+n(n-1)/2)}) < c(M(A^{(l)}))^2$. A 的特征值 λ_μ $(\mu = 1, \cdots, n)$ 等于 $A^{(l)}$ 的特征值，若使任意对称矩阵 B 的特征值，与它的对角元素在适当顺序下一一对应，则特征值与其对应的对角元素之差不大于 $M(B)^{1/2}$. 从而当 $l \to \infty$ 时，$a_{ii}^{(l)} \to \lambda_i$ $(i = 1, \cdots, n)$. 同时当 $l \to \infty$ 时，$U^{(l)} = (u_{ij}^{(l)})$ 的各列向量，在

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}v_{kj}^{(l)} - \lambda_j v_{ij}^{(l)} \to 0$$

的意义下，趋近于各特征值所对应的特征向量.

由 $A^{(l)}$，$U^{(l)}$ 求 $A^{(l+1)}$，$U^{(l+1)}$ 所需的计算量至多与 n 成正比. 故对给定的 ε (>0)，为使 $\max_i |a_{ii}^{(l)} - \lambda_i| < \varepsilon(M(A))^{1/2}$ 所需要的计算量至多与 n^3 成正比（因为 l 至多与 n^2 成正比）. 另外在实际计算中，为了选出 $A^{(l)}$ 中绝对值最大的非对角元素，要将所有元素一一比较，这部分工作量与 n^2 成正比，因此整个搜索过程的总工作量与 n^4 成正比. 为了改进这个搜索过程，经常使用**循环 Jacobi 法**（cyclic Jacobi method）和**阈值 Jacobi 法**（threshold Jacobi method）. 前一方法选择 $q > p$，$l = (p-1)\times(n-p/2) + (q-p)$ 的非对角元素作为 $a_{pq}^{(l)}$，即逐次采用序列 $a_{12}^{(1)}$，$a_{13}^{(2)}$，$\cdots$，$a_{1n}^{(n-1)}$，$a_{23}^{(n)}$，$a_{24}^{(n+1)}$，$\cdots$ 中的元素作为 $a_{pq}^{(l)}$. 而在后一方法中，只要非对角元素超过给定的阈值就按照类似于前面叙述的方法来选取 $a_{pq}^{(l)}$；但当一个元素比阈值小时，该元素就作为 $a_{pq}^{(l)}$ 的候选者列入下一序列里，这里的阈值在迭代过程中是逐渐减小的. 考虑到将 $A^{(l)}$ 变为 $A^{(l+1)}$ 时，只有位于矩阵的第 p，q 行和第 p，q 列中的元素改变其值，故对于绝对值最大元素的搜索就可以做得更有效些. 事实上，对于每行我们可分别记录其绝对值最大元素之值及其所在的列，这样可使搜索最大值的工作量平均来说多少与 n 成正比地缩减.

【Frame 法】 **Frame 法**是 J. S. Frame 在 1949 年提出的一个理论性稍强的方法，它同时确定矩阵 A 的特征多项式和 $\lambda I - A$ 的转置伴随矩阵 $C(\lambda)$（[2]）. 如果令

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots \\ &\quad + p_{n-1}\lambda + p_n, \\ C(\lambda) &= \lambda^{n-1}C_0 + \lambda^{n-2}C_1 + \cdots \\ &\quad + \lambda C_{n-2} + C_{n-1}, \quad C_0 = I, \end{aligned}$$

则 p_i 和 C_i 可由公式 $p_i = -\operatorname{tr} AC_{i-1}/i$，$C_i = AC_{i-1} + p_iI$ 计算出来，$i = 1, 2, \cdots, n$. 此时，$C_n = 0$，而 $-C_{n-1}/p_n$ 是 A 的逆矩阵. 求 $p(\lambda) = 0$ 的根可得到特征值 λ_μ，若 λ_μ 是单根，则与其对应的特征向量可由 $C(\lambda_\mu)$ 的任一列向量给出. 除解代数方程 $p(\lambda) = 0$ 所要的计算量外，总的计算量约与 n^4 成正比. 但这个方法的舍入误差较为严重，特别当 A 的行列式值很小时，精度就更差.

【幂法】 **幂法**（power method）特别适用于求绝对值最大特征值（[6]）. 设 A 的特征值 λ_1，$\cdots$，λ_n 满足 $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$，且 λ_1 为实数，对应于 λ_1 的左特征向量为 $\boldsymbol{y}_1$（即 $\boldsymbol{y}_1(\lambda I - A) = 0$）. 任取（实）向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 使 $\boldsymbol{y}_1 \cdot \boldsymbol{x}^{(0)} \neq 0$（对预定的 i_0，将第 i_0 分量正规化为 1，

即 $x_{i_0}^{(0)}=1$). 以 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 为初始近似，由 $A\boldsymbol{x}^{(l)}=\theta^{(l)}\boldsymbol{x}^{(l+1)}$ ($l=0,1,2,\cdots$; 用 $\theta^{(l)}$ 将 $\boldsymbol{x}^{(l+1)}$ 的第 i_0 分量正规化为1)计算出 $\theta^{(0)},\theta^{(1)},\cdots$; $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots$, 则有 $\lim\limits_{l\to\infty}\theta^{(l)}=\lambda_1$, $\lim\limits_{l\to\infty}\boldsymbol{x}^{(l)}=\boldsymbol{x}_1$. 从而求得特征值 λ_1 及其对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1$. 其收敛速度依赖于 $|\lambda_1/\lambda_2|$ 的大小. 当 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k$, $|\lambda_k|>|\lambda_{k+1}|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$ 时，也可用同样的计算方法求出 λ_1 以及对应于它的特征向量之一. 若对应于 λ_1 的初等因子† 为线性的，则收敛速度依赖于 $|\lambda_1/\lambda_{k+1}|$. 但当它为非线性时，则由于收敛速度太慢而不实用. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$, $|\lambda_1|=|\lambda_2|>|\lambda_3|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$, 则用上述方法算出的 $\theta^{(l)}$, $\boldsymbol{x}^{(l)}$ ($l=0,1,2,\cdots$), 一般不收敛而产生振荡. 然而，对充分大的 l, 从 $\theta^{(l)},\theta^{(l+1)},\boldsymbol{x}^{(l)},\boldsymbol{x}^{(l+1)},\boldsymbol{x}^{(l+2)}$ 可得近似特征值 λ_1 与 λ_2, 它们是下列 λ 的二次方程的根:

$$\begin{vmatrix} x_i^{(l)} & x_j^{(l)} & \theta^{(l)}\theta^{(l+1)} \\ x_i^{(l+1)} & x_j^{(l+1)} & \theta^{(l+1)}\lambda \\ x_i^{(l+2)} & x_j^{(l+2)} & \lambda^2 \end{vmatrix}=0,$$

i,j 除 $i\neq j$ 外可取任意值. x_i 表示 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 分量.

再由 $\boldsymbol{x}_1=\lambda_2\boldsymbol{x}^{(l+1)}-\boldsymbol{x}^{(l+2)}$, $\boldsymbol{x}_2=\lambda_1\boldsymbol{x}^{(l+1)}-\boldsymbol{x}^{(l+2)}$ 可分别算出对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2$. 当绝对值相等的最大特征值的个数多于两个时，显然也可做类似的推广. 当特征值为一对共轭复数时，也能照样处理. 这个方法对 $|\lambda_1|\approx|\lambda_2|$ 的情形也有效.

为了求其余的特征值，往往将幂法与后面的收缩法或“矩阵变换法”结合起来使用. 所需的计算量因 A 的特征值的排列和所需要的精度而异. 在求一个(或一对)特征值、特征向量的过程中，每做一次向量与矩阵之积的计算量是与 n^2 成正比的.

【近似值改进法】 设 λ_μ 为对称矩阵 A 的特征值，$\boldsymbol{x}_\mu$ 为其对应的特征向量，$\boldsymbol{x}_\mu$ 的近似向量为 $\boldsymbol{v}(=\boldsymbol{x}_\mu+O(\varepsilon))$, 则称 $\lambda_R=(\boldsymbol{v}'A\boldsymbol{v})/(\boldsymbol{v}'\boldsymbol{v})$ 为 **Rayleigh 商** (Rayleigh's quotient), 它是 λ_μ 的较好近似值. 事实上，$|\lambda_\mu-\lambda_R|=O(\varepsilon^2)$.

若 λ 是 A 的特征值而 $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量，则 $P(\lambda)$ 是 $P(A)$ 的特征值，且 $\boldsymbol{x}$ 是对应的特征向量，此处 $P(\xi)$ 是 ξ 和 ξ^{-1} 的多项式. 这个事实既可用来改变特征值绝对值的大小关系加速幂法的收敛速度，也可用来分离绝对值相等的特征值，又可用来求位于中间的特征值. 在实际使用中，对于 P 都采用特别简单的形式，如 $P(\lambda)=1/\lambda$ 或 $P(\lambda)=\lambda-c$ 等.

此外，为加速幂法的收敛速度，用 Aitken 的 δ^2 法也是有效的.

【收缩法】 若矩阵 A 的某一特征值 λ_μ 和对应的特征向量 $\boldsymbol{x}_\mu$ 是已知的(如果必要，还有对应的左特征向量 $\boldsymbol{y}'_\mu$), 则利用正交性等，可将它们从 A 中“减去”而得到一个仅含其余的特征值特征向量的问题，这个过程，一般地称为**收缩** (deflaticon). 这个方法常与幂法配合起来使用. 收缩法的两个例子如下: i) 当 $\boldsymbol{y}_\mu$ 也已知时，可构造 $B=A-\lambda_\mu\boldsymbol{x}_\mu\boldsymbol{y}'_\mu$ (其中 $\boldsymbol{x}_\mu,\boldsymbol{y}_\mu$ 已正规化: $\boldsymbol{y}'_\mu\cdot\boldsymbol{x}_\mu=1$), 则 B 的特征值和特征向量除 λ_μ 外与 A 的重合，而对应于 λ_μ 的 B 的特征值是 0 (特征向量为 $\boldsymbol{x}_\mu$). 在非线性初等因子的情况下，也有类似的方法，但稍复杂些. ii) 仅用右特征向量的方法是: 首先将 $\boldsymbol{x}_\mu$ 正规化，例如使它的第 n 分量为 1, 再算出 $b_{ij}=a_{ij}-x_{\mu i}\cdot a_{nj}$ ($i,j=1,\cdots,n-1$), 以作 $n-1$ 阶矩阵 $B=(b_{ij})$. 这时 B 的特征值除 λ_μ 外与 A 的特征值相等. 设 B 的对应于特征值 λ_k 的特征向量为 $\boldsymbol{w}_k$, 则由 $x_{ki}=w_{ki}+d_kx_{\mu i}$ ($i=1,\cdots,n-1$), $x_{kn}=d_k$ 可求出 A 的对应特征向量 $\boldsymbol{x}_k$, 其中 d_k, 当 $\lambda_k\neq\lambda_\mu$ 时，由

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_{ni}\boldsymbol{w}_{ki}=(\lambda_k-\lambda_\mu)d_k$$

确定. 当 $\lambda_k=\lambda_\mu$ 且

$$r=\sum_{i=1}^{n-1}a_{ni}w_{ki}=0$$

时，则令 $d_k=0$ 即可. 但当 $\lambda_k=\lambda_\mu$, $r\neq0$ 且 A 对 $\lambda_k=\lambda_\mu$ 有非线性初等因子时，就以 $x_{ki}=w_{ki}/r$, $x_{kn}=0$ 定义 $\boldsymbol{x}_k$, 则 $\boldsymbol{x}_k$ 是 A (在 $A\boldsymbol{x}_k=\lambda_\mu\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}_\mu$ 意义下)的广义特征向量.

【矩阵变换法】 矩阵变换法，是用适当的相似变换 $A\to B=S^{-1}AS$ 将给定的矩阵 A

变换为另一个容易求特征值的矩阵 B，然后再求 B 的特征值特征向量．今列举几种方法如下：**Givens 法**（Givens method）（[9]）是用平面旋转矩阵之积的正交矩阵 S，将对称矩阵 A 化为**三对角矩阵**（tridiagonal matrix）B（即当 $|i-j|\geq 2$ 时，$b_{ij}=0$ 的矩阵）的．**Householder 法**（Householder method）（[10]）是用一种特殊类型的正交矩阵 S，将对称矩阵 A 化为三角矩阵 B 的；而 **Lanczos 法**（Lanczos method）（[8]），则将一个一般矩阵 A 化为一个三对角矩阵 B．对于一般矩阵，也可应用如下几种方法：i）**Данилевский 法**（Danilevskiĭ method）：从下面开始顺次用消元法将 A 变换为 B，其中 S 是顺次除一行外为对角矩阵的一些矩阵之积，变换来的矩阵 B 是主对角线左侧为 1，除第一行外，其他元素皆为零的矩阵（[1]）．ii）**Givens 法**：S 为平面旋转矩阵的积，而 B 为 $i-j\geq 2$ 时 $b_{ij}=0$ 型的矩阵（[9]）．iii）**Hessenberg 法**（Hessenberg method）：使用三角矩阵 S 将 A 变为 ii）中 B 的形状（[3]）．所有这些方法每个所需要的计算量，除解代数方程部分外，都大约与 n^3 成正比．一般说来，对多重特征值的情况，都需要作特别处理．下面举一个例子来说明对一般矩阵的 Givens 法．令 $N=(n-1)(n-2)/2$．对 $l=0,1,\cdots N-1$，依次选取 $(p,q)=(3,2),(4,2),\cdots,(n,2);(4,3),(5,3),\cdots,(n,3);\cdots;(n-1,n-2),(n,n-2);(n,n-1)$．设 $T^{(l)}$ 是在 Jacobi 法中用过的同形状的矩阵，其中 $\tan\theta=a^{(l)}_{p,q-1}/a^{(l)}_{q,q-1}$，以此计算 $A^{(0)}=A$，$U^{(0)}=I$，$A^{(l+1)}=T^{(l)\prime}A^{(l)}T^{(l)}$，$U^{(l+1)}=U^{(l)}T^{(l)}$ $(l=0,1,\cdots,N-1)$．若令 $B=A^{(N)}$，则当 $i-j\geq 2$ 时，得 $b_{ij}=0$．求出这样简化来的 B 的特征值后，再利用 $U^{(N)}$ 将 B 的特征向量还原成 A 的特征向量．另外，为解对称的三对角矩阵的特征方程，利用基于 Sturm 定理的对分区间套法也是很有效的．

为了特征值的数值计算，还有关于特征值上、下界的估计法，误差估计等方面的许多研究工作，详见→[3]，[4]，[5]，[12]等．

【参】[1] H. Wayland, Expansion of determinantal equations into polynomial form, Quart. Appl. Math., **2** (1945), 277—306; [2] P. S. Dwyer, Linear computation, John Wiley, 1951; [3] R. Zurmühl, Matrizen, Springer, 1950; [4] L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akademische Verlag., 1949; [5] R. von Mises-H. Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, Z. Angew. Math. Mech., **9** (1929), 58—77, 152—164; [6] E. Bodewig, Matrix calculus, Interscience, 1956; [7] C. G. J. Jacobi, Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen, J. Reine Angew. Math., **30** (1846), 51—95; [8] C. Lanczos, An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators, Journal of Research of the National Bureau of Standards, **45** (1950), 255—282; [9] W. Givens, Computation of plane unitary rotations transforming a general matrix to triangular form, J. SIAM, **6** (1958), 26—50; [10] J. H. Wilkinson, Householder's method for symmetric matrices, Numer. Math., **4** (1963), 354—361; [11] P. A. White, The computation of eigenvalues and eigenvectors of a matrix, J. SIAM, **6** (1958), 393-437; [12] S. H. Crandall, Engineering analysis, McGraw-Hill, 1956; [13] A. Schönhage, Zur quadratischen Konvergenz des Jacobi-Verfahrens, Numer. Math., **6** (1964), 410—412; [14] J. H. Wilkinson, The algebraic eigenvalue problem, Clarendon Press, 1965; [15] T. Kato（加藤敏夫）, Perturbation theory for linear operators, Springer, 1966.

数值积分法［英 numerical integration 法 intégration numérique 德 numerische Integralrechnung 俄 численное интегрирование 日 数值積分法］

【数值积分法】 所谓**数值积分法**，是计算函数 $f(x)$ 的定积分的近似值的数值方法．通常是利用 $f(x)$ 的逼近函数（如插值多项式[†]）的积分来计算，即通过区间 $[a,b]$ 内 n（或 $n+1$）个点 $(x_0,)x_1,x_2,\cdots,x_n$ 上 $f(x)$ 的值 $(f_0,)f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的线性组合 $\sum W_kf_k$ 来近似计算 $\int_a^b f(x)dx$ 或带有权函数 $w(x)$ 的积分

$$\int_a^b w(x)f(x)dx.$$

按照点 x_i 及权 W_i 的选法，数值积分法有下列三种类型：

1）**Newton-Cotes 公式**．在 $w(x)$ 等于常数的情况下，选定 $n+1$ 个等距点 $x_i(=x_0+ih,\ i=0,1,2,\cdots,n)$，确定权 W_i，当 $f(x)$ 为不超过 n 次的多项式时，能精确地计算定积分的值，这样的公式就是 Newton-Cotes 公式．当 $n=1$ 时，得

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (f_0 + f_1)h/2$$

(**梯形公式**(trapezoidal rule)); 当 $n = 2$ 时,得

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = (f_0 + 4f_1 + f_2)h/3$$

(**Simpson 的 1/3 法则** (Simpson's 1/3 rule)); 当 $n = 3$ 时,得

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)3h/8$$

(**Simpson 的 3/8 法则** (Simpson's 3/8 rule)). 这些公式的截断误差分别用 $h^3f^{(2)}(\xi)/12$, $h^5f^{(4)}(\xi)/90$, $3h^5f^{(4)}(\xi)/80, \cdots$ 进行估计, 其中, ξ 是积分区间中的一个数, $f^{(i)}$ 表示 f 的 i 阶导数 (假定 $f(x)$ 可微). 一般地,当 n 为偶数时, 利用这些公式也能精确地计算出 n 次多项式的积分. 当积分区间 $[a, b]$ 很大时, 一般看来使用整个区间上的大 n 的公式, 不如将区间分成若干个小区间并在每个小区间上分别应用小 n 的公式. 例如,将 $[a,b]$ 分成 m 个小区间, 在每个小区间上应用 $n = 1$ 的公式, 则得**梯形公式**

$$\int_a^b f(x)dx = h((f_0 + f_m)/2 + (f_1 + f_2 + \cdots + f_{m-1})),$$

其中 $x_0 = a$, $x_m = b$, $h = (b - a)/m$, 截断误差为 $(b - a)^3f^{(2)}/12m^2$. 其次,利用 $n = 2$ 的公式时,则得 **Simpson 公式**

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2}{3} h((f_0 + f_{2m})/2 + 2(f_1 + f_3 + \cdots + f_{2m-1}) + (f_2 + f_4 + \cdots + f_{2m-2})),$$

其中 $x_0 = a$, $x_{2m} = b$, $h = (b - a)/2m$, 截断误差为 $(b - a)^5f^{(4)}/180(2m)^4$.

在区间 $[a, b]$ 上, 积分等距点的插值多项式也能得出 Newton-Cotes 公式. 在上面列举的公式中, 都利用了两个端点 a, b 上的值, 因此称作**闭型公式** (closed type formula). 反之, 不使用两个端点处的值所求得的公式称作**开型公式** (open type formula). 例如,

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = 4h(2f_1 - f_2 + 2f_3)/3,$$

其截断误差为 $14h^5f^{(4)}/45$. 开型公式在常微分方程的数值解法中是必要的. 另外, 也可导出包括使用积分区间外的值的积分公式. 例如, 为求 $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$, 可使用

$$(-f_{-1} + 13f_0 + 13f_1 - f_2)h/24.$$

若将区间 $[a, b]$ 分成 m 个小区间, 在每个小区间上利用该公式, 则等于在梯形公式中加上了修正项

$$(f_1 - f_{-1})/24 + (f_{m-1} - f_{m+1})/24 = (\Delta f_0 + \Delta f_{-1})/24 - (\Delta f_{m-1} + \Delta f_m)/24,$$

其中 Δf_i 就是 $f_{i+1} - f_i$.

2) **Чебышев 公式**. 将权 W_i 全部取成常数 W, 选择点 x_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得对次数不超过 n 的多项式的积分能计算出精确结果,这就得到 Чебышев 公式. 若用 $x = ((a + b) + (b - a)u)/2$ 将变量 x 变成 u, 则区间 $[a, b]$ 变成 $[-1, 1]$. 所以, 今后就使用区间 $[-1, 1]$ 并不失一般性. 设在区间 $[-1,1]$ 中取分点 $u_1, u_2, \cdots, u_n$, 其对应的函数值为 $f_1, f_2, \cdots, f_n$, 再由假设

$$\int_{-1}^{1} f(u)du = W(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$$

对 $f(u) = u^k$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 精确成立, 可得 $W = 2/n$, 并能作为 n 次多项式

$$\Pi_n(u) = \prod_{i=1}^{n} (u - u_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$$

的根来确定出 u_i, 而系数 a_k 由展开 $\Pi_n(u)$ 为 u 的幂级数:

$$\Pi_n(x) = u^n \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \log(1 - u_i/u)\right) = u^n \exp(-s_1/u - s_2/2u^2 - s_3/3u^3 - \cdots)$$

使两边 u^k $(k = 0, 1, \cdots, n)$ 的系数相等, 即可求出, 其中

$$s_i = \frac{n}{2}\int_{-1}^{1} u^i du = \begin{cases} 0, & i \text{ 奇数}, \\ n/(i + 1), & i \text{ 偶数}. \end{cases}$$

例如, $n = 2$ 时, $\Pi_2(u) = u^2 - 1/3$; $n = 3$ 时, $\Pi_3(u) = u^3 - u/2$. 因此, 将这些多项式的根 ($n = 2$ 时, $\pm 0.5773502692 (= \pm 1/\sqrt{3})$; $n = 3$ 时, 0 和 $\pm 0.7071067812 (= \pm 1/\sqrt{2})$) 取作分点即可. 但当 $n = 8$, $n \geqslant 10$ 时, 方程

$\Pi_n(x)=0$ 有复根，所以不能得到这种类型的公式.

3) **Gauss 公式**. 选取权 W_i 和分点 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$，使我们能算出次数不超过 $2n-1$ 次的多项式的积分的精确值时便得到 Gauss 公式. 若令

$$\Pi(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i),$$

则任意 $2n-1$ 次多项式可表示为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Pi(x)}{(x-x_k)\Pi'(x_k)}f_k+\Pi(x)\sum_{k=0}^{n-1}a_kx^k.$$

其中，$f(x_k)=f_k$，第一项是 Lagrange 插值多项式†. 根据假设以 $w(x)$ 为权的 $f(x)$ 的积分等于 $\sum_{k=1}^{n}W_kf_k$，所以得

$$W_k=\int_a^b\frac{w(x)\Pi(x)}{(x-x_k)\Pi'(x_k)}dx$$

和关系式

$$\int_a^b w(x)\Pi(x)x^kdx=0$$
$$(k=0,1,\cdots,n-1).$$

从而，分点 x_i 就是以 $w(x)$ 为权函数在区间 $[a,b]$ 上与 x^k $(k=0,1,\cdots,n-1)$ 正交的 n 次多项式的根.

i)（狭义的）**Gauss 积分公式**：当 $w(x)=1$，区间为 $[-1,1]$ 时，$\Pi(x)$ 就是 Legendre 多项式† $P_n(x)=(1/2^nn!)d^n(x^2-1)^n/dx^n$. 误差为 $(n!)^42^{2n+1}f^{(2n)}/(2n+1)((2n)!)^3$.

ii) **Gauss-Laguerre 积分公式**：当 $w(x)=\exp(-x)$，区间为 $[0,\infty)$ 时，$\Pi(x)$ 为 Laguerre 多项式† $L_n(x)=(\exp x)d^n(x^n\exp(-x))/dx^n$.

iii) **Gauss-Hermite 积分公式**：当 $w(x)=\exp(-x^2)$，区间为 $(-\infty,\infty)$ 时，$\Pi(x)$ 为 Hermite 多项式† $H_n(x)=(-1)^n\exp x^2\cdot d^n\cdot\exp(-x^2)/dx^n$.

iv) **Gauss-Чебышев 积分公式**：当 $w(x)=1/\sqrt{1-x^2}$，区间为 $[-1,1]$ 时，利用 Чебышев 多项式† $T_n(x)=2^{-(n-1)}\cos(n\arccos x)$. 在这种情形下，$W_i$ 都相等（但对 $f(x_i)w(x_i)$ 所取之和，系数并不相同. 而且此处的积分公式与 2) 中叙述过的 Чебышев 公式也不同).

此外，H. Mineur 提出了 $w(x)=\log x$，区间为 $[0,1]$ 的公式. 除上述各种公式外，还有利用差分表的公式，Maclaurin 公式等等各种公式.

【数值微分法】 与数值积分法一样，利用在 x_i 的函数值 f_i $(i=0,1,\cdots,n)$，求导数 $f'(x)$ 在点 x 的近似值的方法，称为**数值微分法**（numerical differentiation). 一般地，数值微分是以插值公式为基础，将插值多项式的导数作为 $f'(x)$ 的近似值. 例如，由微分 Lagrange 插值多项式† $L(x)$，给出函数 $f(x)$ 在 $x=x_k$ 的导数 f'_k 的近似值:

$$f'_k=\sum_{i\neq k}\frac{\Pi'(x_k)}{(x_k-x_i)\Pi'(x_i)}f_i+\sum_{i\neq k}\frac{1}{x_k-x_i}f_k$$

对 x_0, $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, 得 $f'_0=(-3f_0+4f_1-f_2)/2h$, $f'_1=(-f_0+f_2)/2h$, $f'_2=(f_0-4f_1+3f_2)/2h$. 这些公式也可这样导出：即对于每个 k $(k=0,1,\cdots,n)$，通过使

$$f'_k=\sum_{i=0}^{n}A_if_i$$

对次数尽可能高的多项式 $f(x)$ 精确成立来确定系数 A_i.

从微分算子和差分†算子之间的关系(一插值法)，也能导出，例如可导出

$$f'(x_0)=[Df(x)]_{x_0}=(1/h)\log(1+\Delta)f_0$$
$$=(1/h)(\Delta-\Delta^2/2+\Delta^3/3-\cdots)f_0,$$

或者

$$f'(x_0)=DEf_{-1}=(1/h)(1+\Delta)\log(1+\Delta)f_{-1}$$
$$=(1/h)(\Delta+\Delta^2/2-\Delta^3/6+\cdots)f_{-1}$$

等各种公式. 由于数值微分的分母中含有 h，当 h 很小时，舍入误差随之增长，常常达不到所要的精度. 所以，选择适当大小的 h，才可得较好的精度，

【参】 [1] 日高孝次，数值積分法，上卷，岩波，1949;
[2] W. E. Milne, Numerical calculus, Princeton Univ. Press, 1949.（中译本：W. E. 密伦，数值计算，科学出版

社, 1959); [3] C. Lanczos, Applied analysis, Pitman & Sons, London, 1957; [4] A. D. Booth, Numerical methods, Butterworths, London, 1955; [5] F. B. Hildebrand, Introduction to numerical analysis, McGraw-Hill, 1956; [6] 森口繁一-高田勝, 数値計算法, 岩波講座現代応用数学, 1958 (中译本: 森口繁一, 高田胜, 数值计算法, 现代应用数学丛书, 上海科学出版社, 1963); [7] 宇野利雄, 数値計算, 朝倉, 1963; [8] 一松信, 数値計算, 至文堂, 1963; [9] P. J. Davis-P. Rabinowitz, Numerical integration, Blaisdell, 1967.

常微分方程的数值解法 [英 numerical solution of ordinary differential equations 法 solution numérique des équations différentielles ordinaires 德 numerische Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen 俄 численное решение обыкновенных дифференциалъных уравнений 日 常微分方程式の数值解法] 常微分方程数值解法的对象大致包括初值问题†、边值问题†和特征值问题†. 若把数值解法广义地解释,那末也包括用模拟计算机†积分的方法. 通常的数值解法,一般说来,是把无限自由度的连续变量的问题近似地化为有限自由度的问题. 为此,作为技巧也使用以适当的函数组的线性组合去逼近解的方法(→[差分法以外的方法]). 虽也使用逐次代换法和幂级数展开,但它们并不比其它方法特别有利. 在各种近似方法中,应用最广泛的方法是所谓**差分法**(difference method, discrete variable method),它是用自变量的离散值和对应于它的未知函数值将所给问题简化为一个逼近问题来处理的. 一般地可用简单的迭代计算来进行,因此这个方法适用于近年来迅速发展起来的数字电子计算机. 在本条中主要是阐述这种方法([1],[2]).

【初值问题】 对常微分方程的初值问题只要考虑下面这样的问题就够了: 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 的范围内求满足 $y^{i'}(x) = f^i(x, y^1(x), \cdots, y^m(x))$, $y^i(a) = \eta^i$ (f^i 是给定的函数, a, η^i 是给定的常数, $i = 1, \cdots, m$) 的实变量 x 的函数 $y^i(x)$ $(i = 1, \cdots, m)$. 假设 f^i 具有在所考虑的区间上连续且满足 Lipschitz 条件†等所必需的光滑性. 记 $x_n = a + nh (n = 0, 1, \cdots)$, 称 h 为**步长** (step-size). 在数值解法里就是要求出逼近于 $y^i(x_n)$ 的数值解 y^i_n. 不考虑舍入误差的影响时, $e^i_n = y^i_n - y^i(x_n)$ 被称为**截断误差** (truncation error, discretization error). 设用有限位数进行计算所得的实际数值解为 $\tilde{y}^i_n$, 则称 $r^i_n = \tilde{y}^i_n - y^i_n$ 为**舍入误差** (round-off error) (总误差为 $e^i_n + r^i_n$). 对任意的 $x \in [a, b]$, 数值解法必须具有这样的性质: $\lim\limits_{h\to 0,\ x_n = x} e^i_n = 0$ (称它为**收敛性** (convergence)). 但是,特别是当 $e^i_n = O(h^p)$ $(x_n = x, h \to 0)$ 时,称这个解法的精度的**阶** (order) 为 p. 以下我们将 $f^i(x_n, y^i_n)$ 简写为 f^i_n, 并列举几种常用的方法.

【整体逼近法】 将区间 $x_n \leqslant x \leqslant x_{n+P}$ 上的微分方程改写成

$$y^i(x_{n+q}) - y^i(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+q}} f^i(x, y^i(x))dx,$$
$$q = 1, \cdots, P,$$

将它的右端用适当的等距分点的数值积分法†的公式来替换,则当给定 y^i_n 时,就得到求 $y^i_{n+1}, \cdots, y^i_{n+P}$ 的**整体逼近公式** (overall approximation formula):

$$y^i_{n+q} - y^i_n = h \sum_{r=0}^{P} c_{qr} f^i_{n+r},$$
$$q = 1, \cdots, P.$$

由于右端的 f^i_{n+r} 中含有 y^i_{n+r}, 所以,通常采用迭代法来解,即从适当的初始近似出发,将第 l 近似代入右端的 y^i_{n+r} 中,用来计算左端的 y^i_{n+q} 的第 $l+1$ 近似. $n = 0$ 的公式常常用来计算下述多步方法公式的开始值. 截断误差则依赖于对应的数值积分公式的截断误差. 举几个例子来说: 当 $P=1$ 时, $(c_{10}, c_{11}) = (1/2, 1/2)$ (误差为 $h^3 y^{i(3)}(x_n)/12 + O(h^4)$); $P = 2$ 时, $(c_{10}, c_{11}, c_{12}) = (5/12, 8/12, -1/12)$ (误差为 $-h^4 y^{i(4)}(x_n) + O(h^5)$), $(c_{20}, c_{21}, c_{22}) = (1/3, 4/3, 1/3)$ (误差为 $h^5 y^{i(5)}(x_n) + O(h^6)$); $P = 3$ 时, $(c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{13}) = (9/24, 19/24, -5/24, 1/24)$, $(c_{20}, c_{21}, c_{22}, c_{23}) = (1/3, 4/3, 1/3, 0)$, $(c_{30}, c_{31}, c_{32}, c_{33}) = (3/8, 9/8, 9/8, 3/8)$.

【Runge-Kutta 法】 所谓 **Runge-Kutta 法** (Runge-Kutta method) 是这样形式的公式:

$$y^i_{n+1} - y^i_n = h\Phi^i(x_n, y^i_n; h)$$

(Φ^i 是参数 α_r, β_{rs} 的函数，定义如下：$\Phi^i(x, y^j; h) = \sum_{r=0}^{P} \alpha_r k_r^i$, $k_0^i = f^i(x, y^j)$, $k_s^i = f^i\left(x+\beta_{r0}h, y^j + h\left(\beta_{r0} - \sum_{s=1}^{r-1} \beta_{rs}\right) k_0^j + \sum_{s=1}^{r-1} \beta_{rs} k_s^j\right)$ $(r = 1, \cdots, P)$). 根据这个公式，给了 y_n^i 就可以计算出 y_{n+1}^i. 从 $y_0^i = \eta^i$ 出发虽然可以逐次地求出 $y_1^i, y_2^i, \cdots$，但是从 y_n^i 到 y_{n+1}^i 前进一步对每个函数 f^i 必须计算 $P+1$ 次. 设 $z^i(t)$ 是满足 $z^i(x) = y^i$, $z^{i\prime}(t) = f^i(t, z^j(t))$ 的函数，令 $h\Delta^i(x, y^j; h) = z^i(x+h) - z^i(x)$，则存在由 $f^i(x, y^j)$ 及其偏导数所表示的函数 $\varphi^i(x, y^j)$，使得 $\Phi^i(x, y^j; h) - \Delta^i(x, y^j; h) = h^p \varphi^i(x, y^j) + O(h^{p+1})$. 对给定的 P，在使 p 最大的系数组 α_r, β_{rs} 中能选取尽可能简单的值. 如对 $P = 1$, $p = 2$ 的公式取 $\alpha_0 = \alpha_1 = 1/2$, $\beta_{10} = 1$ 或 $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_{10} = 1/2$; 对 $P = 3$, $p = 4$ 的公式取 $\alpha_0 = \alpha_3 = 1/6$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/3$, $\beta_{10} = \beta_{20} = \beta_{21} = 1/2$, $\beta_{30} = \beta_{32} = 1$, $\beta_{31} = 0$. 这是很有名的、经常使用的"古典 Runge-Kutta 法". 对于 $P = 3$, $p = 4$ 的公式，另外，还有抑制舍入误差的影响、节约计算机内存容量的 **Runge-Kutta-Gill 法** ([3]). 在理论上可以证明，对无论多大的 p，总可以定出 P, α_r, β_{rs}. 但是，从计算量等其他方面来看，$p \geq 5$ 是不实用的.

截断误差 e_n^i 是用 x 的光滑函数 $e^i(x)$ 由 $e_n^i = h^p e^i(x_n) + O(h^{p+1})$ 来估计的 ($O(h^{p+1})$ 是固定 $x_n = x \in [a, b]$ 令 $h \to 0$ 时的值，下同). $e^i(x)$ 和精确解 $y^i(x)$ 之间有着这样的关系：$e^{i\prime}(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j^i(x) e^j(x) + \varphi^i(x, y^j(x))$, $e^i(a) = 0$, $g_j^i(x) = [\partial f^i(x, y^k)/\partial y^j]_{y^k = y^k(x)}$. 因而，如果用步长 h 所求得的 $y^i(x)$ 的近似值为 $y_{n,h}^i$ $(n = (x-a)/h)$ 和用别的步长 h'（用同一公式）所求得的为 $y_{n',h'}^i$ $(n' = (x-a)/h')$，则 $y_{n,h}^i$ 的截断误差可以用 $e_{n,h}^i = (y_{n,h}^i - y_{n',h'}^i)/(1-(h'/h)^p) + O(h^{p+1})$ 来估计. 通常，取 $h' = 2h$. 这个想法也适用于下面的多步方法.

对于含有舍入误差的数值解 $\tilde{y}_n^i$，由

$$\tilde{y}_{n+1}^i - \tilde{y}_n^i = h\Phi^i(x_n, \tilde{y}_n^j; h) + \varepsilon_n^i$$

所定义的 ε_n^i 称为**局部舍入误差** (local round-off error). 但是，若对不同的 n，把 ε_n^i 看作是互相独立的、且服从平均值 $E(\varepsilon_n^i) = \mu p^i(x_n)$ 和协方差 $V(\varepsilon_n^i, \varepsilon_n^j) = \sigma^2 q^{ij}(x_n)$ (μ, σ^2 是常数，$p^i(x)$, $q^{ij}(x)$ 是 x 的函数）的概率分布*的随机变量，则可知**累积舍入误差** (accumulated round-off error) r_n^i 是按照平均值

$$E(r_n^i) = (\mu/h)(m^i(x_n) + O(h \lg h))$$

和协方差

$$V(r_n^i, r_n^j) = (\sigma^2/h)(v^{ij}(x_n) + O(h \lg h))$$

分布的. 这里 $m^i(x)$, $v^{ij}(x)$ 是由

$$m^{i\prime}(x) = \sum_{j=1}^{m} g_j^i(x) m^j(x) + p(x),$$

$$m^i(a) = 0,$$

$$v^{ij\prime}(x) = \sum_{l=1}^{m} (g_l^i(x) v^{lj}(x) + g_l^j(x) v^{il}(x)) + q^{ij}(x), \qquad v^{ij}(a) = 0$$

所定义的函数. 这些公式给出了舍入误差的统计估计.

Runge-Kutta 法的公式，对充分小的步长 h 具有上述那样的误差特性. 但是，当 h 一旦大到某种程度以上，就会给出一点也不像微分方程解的数值解（前者是稳定的，而后者却是发散的). 因此，步长的选择是要加以注意的 ([8]). 大致的标准是：只要选择 h 使 hg_j^i 充分小就可以了.

【多步方法】 用差分方程

$$\rho(E) y_n^i = h\sigma(E) f_n^i$$

(E 是将 n 增加 1 的算子，$\rho(\zeta) = \alpha_k \zeta^k + \alpha_{k-1} \cdot \zeta^{k-1} + \cdots + \alpha_1 \zeta + \alpha_0$, $\sigma(\zeta) = \beta_k \zeta^k + \beta_{k-1} \cdot \zeta^{k-1} + \cdots + \beta_1 \zeta + \beta_0$, $\alpha_k \neq 0$, $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$) 来逼近已给微分方程的方法称作**线性多步方法** (linear multistep methods). 特别，当 ρ, σ 是 k 次时就称为**线性 k 步方法** (linear k-step method). 利用这种方法的公式，只要给出 y_{n+k-1}^i, y_{n+k-2}^i, $\cdots$, y_n^i 就可求得 y_{n+k}^i. 当 $\beta_k = 0$ 时，能明显地求出 y_{n+k}^i，当 $\beta_k \neq 0$ 时，不能明显地求出 y_{n+k}^i，而能用逐次代换法等来求，因此分别称之为**显式**

(explicit) 公式和**隐式** (implicit) 公式. 在隐式情形,若 $|h|<|(\alpha_k/\beta_k)L|$ (假设 $f^i(x, y^j)$满足以 L 为常数的 Lipschitz 条件[†]),则逐次代换法是收敛的. 对 $k\geqslant 2$ 的公式,若在已给初值 $y_0^i=\eta^i$ 之外,不再给称作**开始值** (starting values) 的 $k-1$ 组值 $y_1^i, \cdots, y_{k-1}^i$, 那末就不能进行计算. 求开始值通常使用整体逼近法, Runge-Kutta 法等. 为了前进一步必需的函数值 f^i 的计算次数,用显式公式是 1 次,用隐式公式是等于直到逐次代换法收敛为止的迭代次数(通常选用二、三次就可以结束的 h 及初始近似). 对任意的 f^i, η^i 及满足

$$\lim_{h\to 0} y_\mu^i = \eta^i \quad (\mu=0, 1, \cdots, k-1)$$

的任意的开始值,使

$$\lim_{h\to 0,\ x_n=x} e_n^i = 0 \quad (x\in[a, b])$$

(即为使计算公式作为数值解法公式有效)的充分必要条件是: 多项式 ρ, σ 满足下列二条件:

i) **相容性** (consistency) 条件: $\rho(1)=0$, $\rho'(1)=\sigma(1)$;

ii) **稳定性** (stability) 条件: $\rho(\zeta)=0$ 的根的绝对值不超过 1, 且绝对值等于 1 的根都是单根.

$t_n^i=(\rho(E)y^i(x_n)-h\sigma(E)y^{i\prime}(x_n))/\sigma(1)$ 称为**局部截断误差** (local truncation error). 对于由 (ρ, σ) 所定义的公式,可以定出 $C_{p+1}(\neq 0)$ 和整数 $p(\geqslant 1)$ 使得

$$t_n^i = h^{p+1}C_{p+1}y^{i(p+1)}(x_n)/\sigma(1)+O(h^{p+2})$$

成立. 这个公式的精度可以用 p (阶数) 及 $C=C_{p+1}/\sigma(1)$ (**误差常数** (error constant)) 来表达. 满足上述条件 i), ii) 的 $\rho(\zeta)$ 一经给出, $\sigma(\zeta)$ 可以这样来选取: 首先使 p 尽可能地大,其次使 C 尽可能地小. 但是,经常因 $p\leqslant k+1$ (k 是奇数) 或 $p\leqslant k+2$ (k 是偶数), 而且为了使 $p=k+2$ 来选取 $\sigma(\zeta)$ 就必须使 $\rho(\zeta)$ 的零点的绝对值全都等于 1.

下面是常用的多步方法计算公式.

1) 显式公式:

a) **Adams-Bashforth 法** (Adams-Bashforth methods)

$$k=1,\quad \rho(\zeta)=\zeta-1,\quad \sigma(\zeta)=1,$$
$$p=1,\quad C=1/2$$

(称为 **Euler 法** (Euler method));

$$k=2,\quad \rho(\zeta)=\zeta(\zeta-1),$$
$$\sigma(\zeta)=(3\zeta-1)/2,\ p=2,\ C=5/12;$$
$$k=3,\ \rho(\zeta)=\zeta^2(\zeta-1),$$
$$\sigma(\zeta)=(23\zeta^2-16\zeta+5)/12,$$
$$p=3,\quad C=3/8;\ 等.$$

b) **中点法则** (mid-point rule)

$$k=2,\quad \rho(\zeta)=\zeta^2-1,\quad \sigma(\zeta)=2\zeta,$$
$$p=2,\quad C=1/6.$$

c) **Milne 预测式**

$$k=4,\quad \rho(\zeta)=\zeta^4-1,$$
$$\sigma(\zeta)=(8\zeta^3-4\zeta^2+8\zeta)/3,$$
$$p=4,\quad C=7/90.$$

2) 隐式公式:

a) **Adams-Moulton 法** (Adams-Moulton methods)

$$k=1,\quad \rho(\zeta)=\zeta-1,\quad \sigma(\zeta)=(\zeta+1)/2,$$
$$p=2,\quad C=-1/12$$

(称为**梯形法则** (trapezoidal rule));

$$k=2,\quad \rho(\zeta)=\zeta(\zeta-1),$$
$$\sigma(\zeta)=(5\zeta^2+8\zeta-1)/12,$$
$$p=3,\quad C=-1/24;\ 等.$$

b) **Milne 校正式** (或 Milne-Simpson 公式)

$$k=2,\quad \rho(\zeta)=\zeta^2-1,$$
$$\sigma(\zeta)=(\zeta^2+4\zeta+1)/3,$$
$$p=4,\quad C=-1/90.$$

当使用隐式公式 (ρ, σ) 时,作为对 y_{n+k}^i 的初始近似,可以采用同样阶数的显式公式 (ρ^*, σ^*) (在此情形下不一定要求满足条件 ii)) 所计算的 y_{n+k}^{i*}. 这样的计算方式称为**预测校正法** (predictor-corrector method, 简称为 **PC 法**). 这个方法已被广泛使用. 称公式 (ρ^*, σ^*) 为**预测式** (predictor), 公式 (ρ, σ) 为**校正式** (corrector). 有代表性的组合起来的例子是: 中点法则和梯形法则, Milne 预测式和 Milne 校正式 (称这个组合为 **Milne 法** (Milne's method)), Adams-Bashforth 法和与它同阶的 Adams-Moulton 法等等.

【多步方法的误差分析】 对于一个相容且稳定的方法(ρ,σ)，设$\rho(\zeta)=0$的根中绝对值为1的根是$\zeta_1=1,\zeta_2,\cdots,\zeta_s$；且$\rho_\mu(\zeta)=\rho(\zeta)/(\zeta-\zeta_\mu)$ $(\mu=1,\cdots,s)$；又设开始值的误差为$e_v^i=\bar{e}_v^i h^q+O(h^{q+1})$ $(v=0,1,\cdots,k-1$；$\bar{e}_v^i$与h无关)，并令$\theta_\mu^i=[\rho_\mu(E)\bar{e}_n^i]_{n=0}/\rho'(\zeta_\mu)$，$g_j^i(x)=[\partial f^i(x,y^k)/\partial y^j]_{y^k=y^k(x)}$，于是，当固定$x_n=x$且$h\to 0$时，截断误差$e_n^i$可表为

$$e_n^i=h^p e^i(x_n)+h^q\sum_{\mu=1}^{s}(\zeta_\mu)^n e_\mu^i(x_n)+O(h^{\min(p,q)}).$$

其中$e^i(x)$，$e_\mu^i(x)$ $(\mu=1,\cdots,s)$是下面所定义的函数：

$$e^{i'}(x)=\sum_{j=1}^{m}g_j^i(x)e^j(x)-Cy^{i(p+1)}(x),$$

$$e^i(a)=0;$$

$$e_\mu^{i'}(x)=\lambda_\mu\sum_{j=1}^{m}g_j^i(x)e_\mu^j(x),\quad e_\mu^i(a)=\theta_\mu^i,$$

$$\lambda_\mu=\sigma(\zeta_\mu)/(\zeta_\mu\rho'(\zeta_\mu)).$$

其次，如果我们定义局部舍入误差为$\varepsilon_n^i=\rho(\zeta)\tilde{y}_n^i-h\sigma(\zeta)f^i(x_n,\tilde{y}_n^j)$，并假定$\varepsilon_n^i$满足和Runge-Kutta法中一样的假定，则累积舍入误差r_n^i的平均值$E(r_n^i)$和协方差$V(r_n^i,r_n^j)$由下式给出：

$$E(r_n^i)=(\mu/(\rho'(1)h))(m^i(x_n)+O(h\log h)),$$

$$m^{i'}(x)=\sum_{j=1}^{m}g_j^i(x)m^j(x)+p(x),$$

$$m^i(a)=0,$$

$$V(r_n^i,r_n^j)=\frac{\sigma^2}{h}\left(\sum_{\mu=1}^{s}|\rho'(\zeta_\mu)|^{-2}v_\mu^{ij}(x_n)+O(h\log h)\right),$$

$$v_\mu^{ij'}(x)=\sum_{l=1}^{m}(\lambda_\mu g_l^i(x)v_\mu^{lj}(x)+\bar{\lambda}_\mu \bar{g}_l^j(x)v_\mu^{il}(x))+q^{ij}(x),$$

$$v_\mu^{ij}(a)=0.$$

在截断误差、舍入误差的表达式中对应于$e_\mu^i(x)$，$v_\mu(x)$ $(\mu\neq 1)$的误差成分称为**无关紧要成分**(insignificant component)。这些项在数值解中是随n而振动的成分．在矩阵$(\lambda_\mu g_j^i(x))$的特征值的实部为正的区域中，它的振动的振幅一般是(随着n)增大的．这样的现象称作**数值不稳定性**(numerical instability)。如果$s=1$(对$k=1$更不用说)，则不用担心这种不稳定．对中点法则及Milne法，$\rho(\zeta)=0$有根$\zeta_2=-1$，且对应于它的$\lambda_2<0$，因此，当在方程的精确解中有一个衰减成分时，就产生数值不稳定性．于是，用这样的方法在大范围内连续积分是不适宜的．但是，即使是这样的公式，如果附加一个适当的"滤波器"(filter)，想办法把不稳定消失在不增大无关紧要成分之内，那末它是实用的([1]，[9])。

当可以忽略无关紧要成分时，也可以用对"Runge-Kutta法"所用的同样做法得到截断误差的估计．但是，特别对预测校正法，却有着这样的特点：不需要化多大的力气就可以把局部截断误差估计出来．即设预测式(ρ^*,σ^*)及校正式(ρ,σ)的阶数都等于p，它们的误差常数分别为C^*和C，再设在x_{n+k}的预测值y_{n+k}^{i*}和以此为初始近似用校正式求得的值y_{n+k}^i之间的差为$D_n^i=y_{n+k}^{i*}-y_{n+k}^i$，则局部截断误差$t_n^i=KD_n^i+O(h^{p+2})$ $(n=0,1,\cdots)$，其中$K=\alpha_k^*C/(C-C^*)\sigma^*(1)$。

【边值问题】 边值问题一般是这样一个问题：求函数$y^i(x)$满足微分方程$y^{i'}(x)=f^i(x,y^1(x),\cdots,y^m(x))$及边界条件$B_k(y^1(x_{n_1}),\cdots,y^m(x_{n_1});y^1(x_{n_2}),\cdots,y^m(x_{n_2});\cdots;y^1(x_{n_s}),\cdots,y^m(x_{n_s}))=0$ $(i,k=1,\cdots,m)$(其中f^i，B_k是已给函数，$x_{n_1},\cdots,x_{n_s}$是常数)．若f^i，B_k关于y^j是线性的，则可以用初值问题的数值解法来求解，即求出在适当的初始条件下的微分方程的一个特殊解$y_0^i(x)$及相应的齐次微分方程的m个独立解$y_l^i(x)$ $(l=1,\cdots,m)$(在适当的点$x=a$上，根据已给初始条件$y_l^i(a)=\delta_l^i$来求)，再令

$$y^i(x)=y_0^i(x)+\sum_{l=1}^{m}\alpha_l y_l^i(x),$$

并代入边界条件的式子里，则可得关于α_l的线

性方程组，解它定出 α_l 即可（→线性方程组的数值解法）. 在方程或边界条件是非线性的情形，万能的方法是没有的. 通常用的方法有：改变各种初始条件，迭代地解微分方程直到解很好地满足所有的边界条件为止的尝试法；或者，用适当的差分算子代替微分算子的办法作出同时逼近微分方程和边界条件的(一般是非线性的)联立方程组，然后随便用某种方法来解此方程组等方法. 关于特征值问题，→特征值问题，特征值的数值计算法.

【差分法以外的方法】 有一些方法是基于这样的考虑：把求解 $y(x)$ 的范围限定在适当假定的某一有限维空间里，在此空间中求最佳满足微分方程及初始条件或边界条件的解. 为简单起见，设方程为 $L[y(x)]=0$，并设边界条件为线性的. 设

$$y(x)=y_0(x)+\sum_{l=1}^{q}\alpha_l y_l(x),$$

并根据使它"最佳"满足微分方程来确定 α_l. 其中 $y_0(x)$ 是满足初始条件或边界条件并且逼近所求精确解的函数，而 $y_l(x)$ $(l=1,\cdots,q)$ 是满足对应的齐次（初始或边界）条件、并体现 $y_0(x)$ 对精确解的典型偏差的函数. 根据"最佳"的各种不同意义就可以有各种不同的方法. 通常用的方法有：对适当选取的若干个 x 值，使 $L[y(x)]=0$ 以确定 α_l 的**配置法** (collocation method)；在所考虑的区间上使 $|L[y(x)]|^2$ 的积分最小以确定 α_l 的**最小二乘法** (method of least squares)；使 $L[y(x)]$ 和 $y_l(x)$ $(l=1,\cdots,q)$ 正交来定 α_l 的 **Галёркин 法** (Galerkin's method)；将 $L[y(x)]=0$ 作为 Euler 方程†的变分问题 $\delta J[y(x)]=0$（J 是 $y(x)$ 的某个泛函）(→变分法[根据直接法的微分方程解法]) 存在时，在 $y(x)=y_0(x)+\sum\alpha_l y_l(x)$ 的范围内，使 J 取极值以确定 α_l 的 **Ritz 法** (Ritz's method) 等.

【参】 [1] P. Henrici, Discrete variable methods in ordinary differential equations, John Wiley, 1962; [2] P. Henrici, Error propagation for difference methods, John Wiley, 1963; [3] S. Gill, A process for the step-by-step integration of differential equations in an automatic digital computing machine, Proc. Cambridge Philos. Soc., 47 (1951), 96—108; [4] W. Milne, Numerical solution of differential equations, John Wiley, 1953; [5] L. Collatz, Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer, 1951; [6] L. Collatz, Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen, Akademische Verlag., 1949; [7] 森口繁一—高田勝，数値計算法 II，岩波講座現代応用数学，1958（中译本：森口繁一，高田胜，数值计算法，现代应用数学丛书，上海科学出版社，1963）; [8] 宇野利雄，計算機のための数値計算，朝倉，1963; [9] 伊理正夫，常微分方程式の数値解法における不安定現象に対する一対策，情報処理，4 (1963), 249—260, [10] L. Fox (ed.), Numerical solution of ordinary and partial differential equations, Pergamon, 1962.

偏微分方程的数值解法 [英 numerical solution of partial differential equations 法 solution numérique des équations aux dérivées partielles 德 numerische Lösung der partiellen Differentialgleichungen 俄 численное решение дифференциальных уравнений с частными производными 日 偏微分方程式の数值解法] 偏微分方程的近似解法虽然很多（[5]，[9]），但是最一般的是 W. Ritz 及 Б. Г. Галёркин 等的方法和差分法.

【Ritz 法】 **Ritz 法** (Ritz's method) 主要以椭圆型偏微分方程的边值问题为其研究对象，它就是用于与边值问题等价的变分问题的直接法†（→变分法[用直接法的微分方程解法]）. 例如，在边界 S 所围的 $\boldsymbol{R}^N$ 的区域 Ω 上的 Poisson 方程†的边值问题

(1) $$\Delta u=-f,$$

(2) $$u|_S=\beta,$$

等价于以满足 (2) 的函数为**容许函数** (admissible function)、以

$$J[u]=\int_\Omega(|\mathrm{grad}\,u|^2-2uf)dx$$

为泛函的变分问题. 假定用作逼近于解 u 的**测试函数** (trial function) 为含有 k 个参变量 $\{\alpha_j\}$ $(j=1,\cdots,k)$ 的 $\varphi=\varphi(x;\alpha_1,\cdots,\alpha_k)$，将 $u=\varphi$ 代入 J，把它看作是 k 个变量 α_j 的函数，于是，从使 $J[\varphi]$ 极小化的条件来定出参数的值. 选择测试函数的方法如下：若边界条件是齐次的，则 φ 取这样的标准型：

(3) $$\varphi=\alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_k\varphi_k,$$

其中 $\{\varphi_i\}$ 是预先选定的满足这个齐次边界条件的函数组．若边界条件是非齐次的，则为了满足这个边界条件需要在(3)的右端添加适当的函数．当偏微分方程的特征值问题能用 Hilbert 空间的自共轭算子 A 写成 $Au=\lambda u$ 时，就设(3)中的 $\varphi_i\in\mathfrak{D}(A)$（算子 A 的区域），至于泛函，则使用 **Rayleigh 商** (Rayleigh's quotient) $R[u]=(Au,u)/(u,u)$．此外，若算子 A 可分解成 $A=T^*T$，则设 $\varphi_i\in\mathfrak{D}(T)$，且 $R[u]=\|Tu\|^2/\|u\|^2$．虽有关于 Ritz 法的收敛性、误差估计的各种研究([4]，[5])，但是，实际应用的效果则有赖于巧妙地选择测试函数．

设在区域 Ω 上已给由微分方程（不一定是线性的）$L[u]=0$ 和齐次边界条件所组成的边值问题，则由

(4)　$$\int_\Omega L[\alpha_1\varphi_1+\cdots+\alpha_k\varphi_k]\varphi_j dx=0,\quad j=1,\cdots,k$$

来决定(3)中 $\{\alpha_i\}$ 的方法称作 **Галёркин 法** (Galerkin's method)．这个方法有这样的特点，它可以用于非常一般的问题，它的收敛性等问题在不少的情况下也能得到证明([5])．如果问题是含有时间 t 的初值问题，则在(3)中应假定 α_i 是 t 的函数，它们由(4)所得的常微分方程来确定．

【用差分法解边值问题】　作为偏微分方程的近似解法的**差分法** (difference method)，是用近似于导数的差商来代替导数，把问题化为以代数方程组的形式表现的**差分模拟** (difference analogue)，然后，数值地解该方程组．这时，由于需要大量的计算，所以这种方法直到电子计算机发展之后才得到应用．但是，即使有了高速计算机，要解高维高精度的问题还是需要很长的机器时间．

例如，在边值问题(1)，(2)中，设 Ω 是 xy 平面上的正方形 Q $(0<x<1,\ 0<y<1)$．把 $Q+S$ 分割为网格间距为 $h=1/N$ 的正方形网格，落在 Q 内部的全体网格点 (mh,nh) 用 Ω_h 表示，落在 S 上的全体网格点用 S_h 表示．则在 $R_h=\Omega_h+S_h$ 上，逼近于解 u 的网格函数 u_h，由下列差分方程和边界条件所决定：

(5)　$$\Delta_h u_h(x,y)=-f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega_h,$$

(6)　$$u_h(x,y)=\beta(x,y),\quad (x,y)\in S_h.$$

这里 Δ_h 是由

$$\Delta_h\varphi(x,y)=[\varphi(x+h,y)+\varphi(x-h,y)+\varphi(x,y+h)+\varphi(x,y-h)-4\varphi(x,y)]/h^2$$

所定义的差分算子．当 $h\to0$ 时显然有 $\Delta_h\varphi\to\Delta\varphi$（至少在形式上）．所以，(5)是(1)的差分模拟，而问题(5)，(6)则是问题(1)，(2)的差分模拟．对一般的情形也可以遵照上面那样，同常微分方程的情形一样地构造差分模拟．为了改进精度及处理和网格割线不一致的边界，计算数学工作者提出了各种各样的办法．

关于差分法的**收敛性** (convergence)，一般说来，只要将网格间距 h 缩小就可以获得较好的精度．收敛性 $u_h\to u\ (h\to0)$ 对许多椭圆型边值问题业已证明．这时，即使用矩形网格，收敛性也并不依赖于网格比([2]，[3])．

当 $h\to0$ 时**误差** (error) $u-u_h$ 的渐近状态依赖于方程的系数和边界的光滑性．对上例(5)，(6)说来，在 $u\in C^4(\Omega+S)$ 的假定下，在 R_h 上一致地有 $|u-u_h|\leqslant Mh^2$，其中常数 M 与解 u 的四阶导数的上界有关．这并不是实用的误差估计．对一般情形也有同样情况．

【差分方程的数值解法】　正如例(5)，(6)所示那样，差分模拟边值问题是把问题化为含有许多未知量的结构比较简单的代数方程组．因此，数值解法可以用 Gauss-Seidel 迭代法*那样的**逐次代换法** (iteration)（也称**迭代法**）．具体地说来，将(5)写成

(7)　$$u_h(x,y)=F(u_h)=F(u_h)(x,y),\quad (x,y)\in\Omega_h,$$

其中 F 是一个作用在网格函数上的算子，定义为 $F(v)(x,y)=Mv(x,y)+(h^2/4)f(x,y)$，而 $Mv(x,y)$ 则是网格函数 v 在网格点 (x,y) 的前后左右四个网格点上的平均值．然后，在 Ω_h 上适当地假定 u_h 的初始近似值 $u_h^{(0)}$．一面按规定的顺序跑遍 Ω_h 的所有网格点，一面在各个

网格点上将 $u_h^{(0)}$ 代入 (7) 的右端来求修正值 $u_h^{(1)}$. 但是，此时在考虑 (6) 的同时，如果在应该代入 (7) 的右端的网格点上已经求到 $u_h^{(1)}$，那末就不用 $u_h^{(0)}$ 而用 $u_h^{(1)}$ 代入. 重复这一过程，直到近似序列 $u_h^{(n)}$ 在所要的精度内收敛为止. 这个 Gauss-Seidel 迭代法的特殊情形也称为 **Liebmann 法** (Liebmann's method).

为了加速收敛，经常使用**超松弛法** (over-relaxation) 和**群松弛法** (group relaxation). 前者是用 $\omega F(u_h)-(1-\omega)u_h$ 来替代 (7) 的右端. 关于参数 (加速常数) $\omega>1$ 的最佳选择，有著名的 D. Young 的理论 ([11]). 重复超松弛的求解方法称为**逐次超松弛法** (successive over-relaxation 简称 **SOR**). 至于群松弛法，是把上面那样修正每一点的近似值替换为：将 Ω_h 分割成若干个小块，对每一小块解代数方程组，这样来修正近似值. 通常是将各网格线上的网格点全体取作一个小块，这时就称为**线松弛法** (line relaxation). 另外，要用线松弛法进行逼近时，有时还将小块的分割方法改变成纵横网格线，互相交替地使用线松弛法，即**交替方向迭代法** (alternating direction iteration，简写为 **ADI**).

【初值问题】 关于用差分法解初值问题，我们仅叙述初值问题所特有的内容. 设 Ω 的定义如前，对 $u=u(t,x,y)$ 的初值问题，是由齐次边界条件 $u|_S=0$，初始条件 $u|_{t=0}=a$ 及微分方程 $u_t=\Delta u\ (0\leqslant t\leqslant T)$ 所给出. 关于空间变量用和前面一样的网格，关于 t 令网格间距为 τ，对于近似解 $\tilde{u}=\tilde{u}_{h,\tau}$ 所满足的近似差分方程取为

$$(8)\qquad (\tilde{u}(t+\tau,x,y)-\tilde{u}(t,x,y))/\tau = \Delta_h\tilde{u}(t,x,y).$$

对每个 $n\ (n=0,1,\cdots)$，如果把 $\tilde{u}(n\tau,x,y)$ 看作是 R_h 上的网格函数并写成 $\tilde{u}^{(n)}$，则从 (8) 及边界条件就得到用适当的矩阵 $\tilde{E}=\tilde{E}_{h,\tau}$ 表达的关系式

$$(9)\qquad \tilde{u}^{(n+1)}=\tilde{E}\tilde{u}^{(n)},\quad n=0,1,\cdots.$$

这和用 (关于 t 的) 后向差分的隐式差分方程

$$(10)\qquad (\tilde{u}(t,x,y)-\tilde{u}(t-\tau,x,y))/\tau = \Delta_h\tilde{u}(t,x,y)$$

代替 (8) 在原理上是一样的. 只是，为了从 $\tilde{u}^{(n)}$ 实际地求 $\tilde{u}^{(n+1)}$，需要解和 (5), (6) 同样的方程.

关于收敛性 $\tilde{u}\to u$，其充分必要条件是：当 $h\to 0$，$\tau\to 0$ 时矩阵 $(\tilde{E})^n$ 关于 h,τ,n $(0\leqslant n\tau\leqslant T)$ 一致有界. 亦即差分方程的**稳定性** (stability) 是必要且充分的条件 ([6]). 例如，设网格比 $\rho=\tau/h^2$ 保持一定且 h,τ 很小时，则当 $\rho\leqslant 1/4$ 时 (8) 是稳定的，而 (10) 则总是稳定的. 这种事实不一定限于抛物型方程，对一般的初值问题也是不变的. $\tilde{E}$ 的谱半径† 为 $1+O(\tau)$，这是稳定性的必要条件，称为 **von Neumann 条件** (von Neumann's condition). 稳定性还对实际数值计算中的舍入误差的累积问题有着重要的意义.

【有限元法】 近几年来对结构力学和工程的许多其它领域中的偏微分方程的求解问题，应用得最广泛的数值方法是**有限元法** (finite element method)，它的原型可以追溯到 R. Courant [14]，并且它是由工程人员在 50 年代所重新发现的 [15], [16]. 简单地说来，在数学上以一个变分公式为基础的有限元法，可以看作是 Ritz-Галёркин 法的一个类型；但是，由于它的测试函数的特殊选择，它所提供的数值方程，其系数组成一个稀疏矩阵，它常常反映支配着问题的物理规律的离散形式. 设已给一个边值问题 (1), (2) 且 $\beta=0$，则利用记号

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

$$\sigma(u,v)=\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx,$$

$$V=\{\varphi\in L_2(\Omega)\,|\,\nabla\varphi\in L_2(\Omega),\ \varphi|_S=0\},$$

问题可以化为：求一个函数 $u\in V$，使它满足

$$(11)\qquad \sigma(u,\varphi)=(f,\varphi),\quad \varphi\in V.$$

设 Ω 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的一个多边形，为了应用有限元法，首先将 Ω 划分成小的子区域，例如，三角形，称之为**有限元** (finite elements) 或**单元** (这个术语来自结构力学). 令 h 是划分的大小参数，即，单元的最大直径. 在有限元法中，测试函数

的集合 V_h，通常是由单元状的多项式函数所组成. 在目前的情况下，标准的选择是集合:

(12) $V_h=\{\varphi_h\in C(\bar{\Omega})|\varphi_h$ 在每个单元上是线性的，$\varphi_h|_S=0\}$.

如果列出 Ω 中所有单元的顶点 $P_1, P_2, \cdots, P_J$，并定义 $\varphi_h^{(j)}\in V_h$ 为 $\varphi_h^{(j)}(P_k)=\delta_k^j$ (Kronecker delta)，则 $\{\varphi_h^{(j)}\}$ 张成 V_h. 如果设近似解 u_h 的形式为

$$(13)\qquad u_h=\sum_{j=1}^{J}\alpha_j\varphi_h^{(j)},$$

则参数 α_j 就等于 u_h 在 P_j 的值. α_j 由条件

$$(14)\qquad \sigma(u_h, \varphi_h^{(j)})=(f, \varphi_h^{(j)}),\quad j=1, 2, \cdots, J$$

所确定. 因为 supp $\varphi_h^{(j)}$ 只和 P_j 邻接的单元有关，所以方程(14)的矩阵(以 α 为未知量)是稀疏的.

当 $h\to 0$ 时 $u_h\to u$ 的收敛性，只要划分过程满足某一个正则性条件，它是可以证明的. 而且，有限元法的收敛速度已经研究得十分彻底[20]，这是由于利用了已经很好发展的样条逼近理论，即，用分片多项式函数逼近([18]，[19]).

有限元法已在很多方面得到推广，包括对初值问题的应用，并提出了各种改进. 例如，在解高阶方程时，常常应用一个非标准型的有限元法，它使用的测试函数 $\notin V$ 且在某种情况下收敛.

【参】 [1] L. Collatz, The numerical treatment of differential equations, Springer, 第三版, 1960; [2] R. Courant-K. Friedrichs-H. Lewy, Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Math. Ann., **100** (1928), 32—74; [3] G. E. Forsythe-W. R. Wasow, Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley, 1960 (中译本: G. E. 福雪斯, W. R. 华沙, 偏微分方程的有限差分方法, 上海科学技术出版社, 1964); [4] S. H. Gould, Variational methods for eigenvalue problems, Univ. of Toronto Press, 第二版, 1966; [5] Л. В. Канторович-В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Гостехиздат, Изд. 5-ое 1962 (中译本: Л. В. 康脱洛维奇, В. И. 克雷洛夫, 高等分析近似方法, 上册, 科学出版社, 1966); [6] P. D. Lax-R. D. Richtmyer, Survey of the stability of linear finite difference equations, Comm. Pure Appl. Math., **9** (1956), 267—294; [7] R. D. Richtmyer, Difference method for initial value problems, Interscience, 1957, (第二版 1967) (中译本: R. D. 里奇特迈尔, 初值问题的差分方法, 科学出版社, 1966); [8] B. C. Рябенький-А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956 (中译本: B. C. 李亚宾涅基, A. Ф. 菲里波夫, 差分方程的稳定性, 科学出版社, 1961); [9] 寺沢寛一編, 自然科学者のための数学概論 (応用編), 岩波, 1960; [10] J. Todd (ed.), A survey of numerical analysis, McGraw-Hill, 1962; [11] D. Young, Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, Trans. Amer. Math. Soc., **76** (1954), 92—111; [12] 山内二郎-森口繁一-一松信編, 電子計算機のための数値計算法I, 第7章, 培風館, 1965; [13] F. John, Lectures on advanced numerical analysis, Gordon and Breach, 1967; [14] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, Bull. Amer. Math. Soc., **49** (1943), 1—23; [15] M. J. Turner-R. W. Clough-H. C. Martin,-L. J. Topp, Stiffness and deflection analysis of complex structures, J. Aero. Sci., **23** (1956), 805—823; [16] O. C. Zienkiewicz, The finite element method: from intuition to generality, Appl. Mech. Rev., **23** (1970), 249—256; [17] O. C. Zienkiewicz, The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1971; [18] J. H. Bramble-S. R. Hilbert, Estimation of linear functionals on Соболев spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation, SIAM J. Numer. Analysis, **7** (1970), 112—124; [19] J. H. Bramble-M. Zlámal, Triangular elements in the finite element methods, Math. Comp., **24** (1970), 809—820; [20] G. Strang-G. Fix, An analysis of the finite element method, Prentice-Hall, 1973; [21] P. Tong-J. N. Rossettos, Finite-Element Method: Basic Technique and Implementation MIT Press, 1977. [22] J. T. Oden-J. N. Reddy, An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Element, 1976; [23] A. R. Mitchell-R. Wait, The Finite Element Method in Partial Differential Equations, 1977; [24] P. G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, 1978.

松弛法 [英 relaxation methods 法 méthode de relaxation 德 Relaxationsmethode 俄 релаксационный метод 日 緩和法] 松弛法是一种基于变分法思想的逐次逼近数值计算法. 它是在1935年首先由 R. Southwell 成功地应用于实际以后发展起来的. 假设把无重量的弹性弦拉成水平后，在弦的一些点上加上负载 w_i，又假如在相应点上用和荷载一样大的力往上拉，那么弹性弦仍保持水平且不产生弹性力. 但是，只要把往上拉的力稍微一放松，弦就往下弯曲并产生弹性力. 设各点弹性力的垂直分量为 T_i，位移为 u_i，向上的力为 R_i，则有 $R_i=-T_i(u_i)+w_i$. 将力完全放松成为 $R_i=0$ 的状态时，则 u_i 变为 u_{is} 并有 $0=T_i(u_{is})+w_i$. 此种状态为松弛

状态，而有规则地逼近这种状态以求 u_{ij}，就是**松弛法**的思想(以及该术语的来源). 我们根据如下的实例,对本方法加以阐述.

实例 1) 解线性方程组 $2x+y=55$, $-x+3y=25$. 把它改写成: $R_x=2x+y-55$, $R_y=-x+3y-25$. 使剩余 R_x, R_y 变成 0 的 x, y 就是该方程组的解. 对于位移 $\Delta x=1$; $\Delta y=1$, 剩余的变化分别为 $\Delta R_x=2$, $\Delta R_y=-1$; $\Delta R_x=1$, $\Delta R_y=3$. 按这种原则, 从任意给定的初始近似值出发, 依次改变 Δx, Δy 使 R_x, R_y 接近最终状态 $R_x=R_y=0$. 计算过程如表 1 所示的**松弛表** (relaxation table). 为加快收敛速度,还有超松弛法†,群松弛法†及其他方法 (→ 偏微分方程的数值解法).

表 1　松　弛　表

		R_x	R_y	备　注
$x=0$	$y=0$	-55	-25	$x=0$,
$\Delta x=28$		1	-53	$y=0$
	$\Delta y=18$	19	1	是初始
$\Delta x=-9$		1	10	近似值
	$\Delta y=-3$	-2	1	
$\Delta x=1$		0	0	
$\sum\Delta x=x=20$,	$\sum\Delta y=y=15$	0	0	检　验

实例 2) 在某区域上, 解 Poisson 方程 $\Delta\varphi=\sigma$, 边界条件为 $\varphi=f$ (f 是已知函数). 我们用

$$\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i,j-1}-4\varphi_{i,j}=d^2\sigma_{i,j}$$

作为 Poisson 方程的差分逼近. 其中 d 是网格的步长, i, j 是网格点的坐标. 该差分格式的剩余为

$$R_{i,j}=\varphi_{i+1,j}+\varphi_{i-1,j}+\varphi_{i,j+1}+\varphi_{i,j-1}-4\varphi_{i,j}-d^2\sigma_{i,j}.$$

若在网格点 (i, j) 处施以 $+1$ 的位移, 则剩余的变化如图 1 所示. 利用这种性质使各点的 $R_{i,j}$ 接近零. 例如,为解图 2 所示的问题, 如图 3 那样将剩余写在过各网点的垂直网线的右侧, 其最上面的数是最终状态下的剩余. 在左侧写位移,其最下面的数是给定的初始近似值,

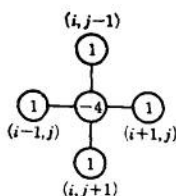


图 1　松弛型

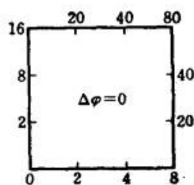


图　2

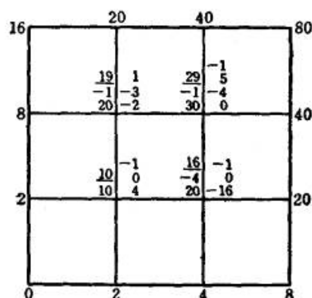


图　3

其最上面的数 (下面划有横线) 是位移的总和, 这就是问题的近似解. 这里所述方法适合于手算,而利用电子计算机时有许多变形的方法, 如 Liebman 法, Liebman 外推法, ADI 法 (交替方向迭代法) 等等.

除上述实例外, 松弛法也能用于解特征值问题,特别是能用于线性方程组的数值解法.

【参】 [1] 正野重方, 緩和法入門, 朝倉, 1963; [2] D. N. de G. Allen, Relaxation methods, McGraw-Hill, 1954; [3] R. V. Southwell, Relaxation methods in engineering sciences, Oxford Univ. Press, 1940; [4] R. V. Southwell, Relaxation methods in theoretical Physics, Clarendon Press, 1946; [5] F. S. Shaw, An introduction to relaxation methods, Dover, 1953.

P. L. K. 方法 [英 P. L. K. method 法 méthode de P. L. K. 德 P. L. K. Verfahren 俄 метод P. L. K. 日 ピー・エル・ケイ法] 对含参数 ε 的非线性微分方程

$$(1)\quad L[u]=L_0[u]+\varepsilon L_1[u]+\cdots=0,$$
$$L_i[u]=F_i(x, u, u', u'', \cdots, u^{(n)}),\quad i=0, 1, \cdots$$

(其中 $L_0[u]=0$ 是线性的, $'$ 是表示关于 x 的微分), 求 $\varepsilon\to0$ 时的解, 通常是用摄动†法. 即, 假定 $u=\sum\varepsilon^n u_n(x)$, 代入 (1), 比较 ε 的各次幂, 就导出对 $u_0, u_1, \cdots$ 的一组线性微分

方程 $L_0[u_0]=0$, $L_0[u_1]=-L_1[u_0],\cdots$, 解这一组方程，就可逐步定出 $u_0, u_1, \cdots$. 但是，若 $u_0(x)$ 对 x 的某个值 x_0 具有奇异性，那末一般地 x_0 是 $u_n(x)$ 的奇点，而且它的奇异性将随着 n 而增长. 因此，$\sum \varepsilon^n u_n(x)$ 在 x_0 的邻域内是发散的. 对此情形，考虑这样的方法：引入新的变量 ξ, 假定 u, x 为

(2) $$u=u_0(\xi)+\varepsilon u_1(\xi)+\cdots,\quad x=\xi+\varepsilon x_1(\xi)+\cdots,$$

通过适当确定 $x_n(\xi)$ 来减弱 $u_n(\xi)$ 的奇异性. 由此，在 x_0 的邻域内求一致收敛的解 $\sum\varepsilon^n u_n(\xi)$, 这样的设想是由 M. J. Lighthill 系统地发展的，因此称它为 **Lighthill 法** (Lighthill's technique). 这样的思想亦早已为 H. Poincaré 在考察

(3) $$dx_i/dt=X_i(x_1,\cdots,x_n;\varepsilon),\quad i=1,2,\cdots,n$$

所表达的非线性振动的周期解时用了. 即，对 $\varepsilon=0$, (3) 的解具有周期 T_0 时，则对 $\varepsilon\neq 0$, 将未知函数 x_i 和周期 T 同时展开成 ε 的幂级数：

$$x_i=\sum\varepsilon^n x_i^{(n)}(t),\qquad T=\sum\varepsilon^n T_n,$$

确定 T_n 使得 $x_i^{(n)}(t)$ 为周期函数. 另一方面，郭永怀 (Y. H. Kuo) 在研究关于平板的边界层时，将 Lighthill 法的应用范围显著地扩展到偏微分方程，因此，这个方法就以三个人的姓来命名，称作 **P. L. K. 方法** (Poincaré-Lighthill-Kuo method).

例如，用通常的摄动法求

(4) $$(x+\varepsilon u)du/dx+u=0$$

对边界条件 $u(1)=1$ 的解，是将它化为

$$xu_0'+u_0=0,\quad xu_1'+u_1=-u_0u_0',\ \cdots.$$

在边界条件 $u_0(1)=1$, $u_n(1)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ 之下求解. 于是得

$$u_0=x^{-1},\quad u_1=(x^{-1}-x^{-3})/2,\quad u_2=-(x^{-3}-x^{-5})/2,\cdots.$$

$x=0$ 是奇点，且 u_n 的奇异性与 n 俱增.

用 P. L. K. 方法，对 (2) 的 $u_n(\xi)$, $x_n(\xi)$ 所满足的方程

$$\xi u_0'+u_0=0,$$
$$\xi u_1'+u_1=-(u_0x_1'+u_0'x_1+u_0u_0'),\ \cdots.$$

在边界条件 $u_0(1)=1$, $u_n(1)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ 之下求解即可. 首先，初始近似是 $u_0=\xi^{-1}$. 其次，适当地选择 $x_1(\xi)$, 使得 $u_1(\xi)$ 在 $\xi=0$ 的奇异性不超过 ξ^{-1}. 为此，例如，使 u_1 的方程的右端为 0. 考虑到边界条件，结果得 $x_1=(\xi-\xi^{-1})/2$, $u_1=0$. 因此，第一近似为

(5) $$u=\xi^{-1},\quad x=\xi+\varepsilon(\xi-\xi^{-1})/2.$$

或，消去 ξ 得

(6) $$u=(-x+\sqrt{x^2+2\varepsilon+\varepsilon^2})/\varepsilon.$$

可以验证，它是 (4) 的精确解. $x=0$ 不是 (6) 的奇点，并且若 $\varepsilon\neq 0$, 则 $u(0)=\sqrt{1+2/\varepsilon}$. 从这个式子可知，在 $x=0$ 的邻域内 $u(x)$ 不能展成 ε 的幂级数. 又，设 $x\neq 0$, 若关于 ε 展开，则有 $u=x^{-1}+\varepsilon(x^{-1}-x^{-3})/2+\cdots$. 这和用普通的摄动法所得结果一致.

P. L. K. 方法也可用于解偏微分方程. 关于 P. L. K. 方法的收敛性的严格考察虽然只有 W. R. Wasow 对

$$(x+\varepsilon u)du/dx+q(x)u=r(x),\quad u(a)=b$$

所进行的研究 (ε, a, b 是正数, $q(x)$, $r(x)$ 在 $|x|\leqslant a$ 是全纯的)，但是在实用上，对飞机机翼理论、边界层理论、击波构造及传播等问题却是一个有力的工具.

【参】 [1] M. J. Lighthill, A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, Phil. Mag., **40** (1949), 1179—1201; [2] H. S. Tsien (钱学森), The Poincaré-Lighthill-Kuo method, Advances in Applied Mechanics, **4** (1956), 281—349; [3] 寺沢寛一編, 自然科学者のための数学概論, 応用編, B第3章, 岩波, 1960.

W. K. B. 方法 [英 W. K. B. method 法 méthode de W. K. B. 德 W. K. B. Verfahren 俄 метод W. K. B. 日 ダブリュー・ケイ・ビー法] 二阶线性常微分方程

(1) $$d^2y/dx^2+k^2P(x)y=0$$

对于 $k\to\infty$ 时的渐近解，最早由 G. B. Jeffreys (1925) 系统地讨论过. 与此独立地，G. Wentzel, H. Kramers, L. Brillouin (1926) 又与 Schrödinger 方程†联系起来各自独立地进行了

研究．因此，被称为 **W. K. B. 方法**（Wentzel-Kramers-Brillouin method）或 **Jeffreys 法**（Jeffreys' method）．若令

$$z=\int P^{\frac{1}{2}}\,dx,\quad y=P^{-1/4}w,$$

则 (1) 可化为下面的形式：

(2)　$d^2w/dz^2+(k^2-Q(z))w=0,$

其中

$$Q=P^{-1/4}d^2P^{1/4}/dz^2=-P^{-3/4}d^2P^{-1/4}/dx^2.$$

由 (2)，对应于 $P>0$ 或 <0，分别可得所谓三角函数形式的渐近解

(3)　$w\sim Ae^{ikz}+Be^{-ikz}$

或指数函数形式的渐近解

(4)　$w\sim A'e^{k|z|}+B'e^{-k|z|}.$

使 $P(x_0)=0$ 的点 x_0 称作**转向点**（turning point）．因为在转向点处 $Q\to\infty$，所以不能超过这个点去原样地解析开拓 (3) 和 (4)．当 x_0 是 $P(x)$ 的一阶零点时，连接两个解的**连接公式**（connection formula）是

(5)　$P^{-1/4}\cos(kz-\pi/4+y)$
$\qquad\to\sin y|P|^{-1/4}e^{k|z|},\quad y\neq 0,$

(6)　$P^{-1/4}\cos(kz-\pi/4)$
$\qquad\leftarrow(1/2)|P|^{-1/4}e^{-k|z|}.$

其中箭头是指，例如在 (5) 中，对 $P>0$，用左端所逼近的解是用 $P<0$ 时的右端来逼近的（反之，用右端所逼近的解不一定能用左端的来逼近．这是因为即使在 (5) 的左端加上 (6) 的右端的常数倍也行）．若 x_0 是 $P(x)$ 的一阶零点，则在 $x\sim x_0$ 处有 $Q\sim-(5/36)z^{-2}+O(z^{-2/3})$，(1) 的渐近解就成为 $P^{-1/4}z^{1/2}C_{1/3}(kz)$（$C_{1/3}$ 是 1/3 阶的柱面函数†）．这个解不论 $P>0$ 还是 $P<0$ 都成立．而且从柱面函数的渐近展开能导出上面的连接公式．还有，为了提高近似程度，例如，可以假定

$$y=\exp k(z_0+k^{-1}z_1+k^{-2}z_2+\cdots),$$

然后逐步定出未知系数 $z_0, z_1, \cdots$ 即可．

【参】［1］E. Kemble, Fundamental principles of quantum mechanics, McGraw-Hill, 1937;［2］寺沢寛一編，自然科学者のための数学概論，応用編，B第2章，岩波，1960,［3］A. Erdélyi, Asymptotic expansions, Dover, 1956.

最速下降法　［英 method of steepest descent　法 méthode du col　德 Sattelpunktmethode　俄 метод перевала　日 鞍部点法］最速下降法的设想，最初由 B. Riemann 提出，后来，P. Debye 成功地运用这个方法，得到了由下列积分给出的复变量 z 的函数 $f(z)$：

(1)　$f(z)=\int_C g(t)e^{zh(t)}dt$

当 $|z|$ 足够大时的渐近表达式，其中，$g(t)$，$h(t)$ 是解析函数，C 是复平面上的某一条曲线（[1]）．该方法有时也称作**鞍点法**（saddle-point method）．通过 Laplace 变换†，系数为 z 的一次式的线性微分方程的通解能写成 (1) 型的积分表示．所以，利用最速下降法能得到解的渐近表示．特别是，它可用来求 Bessel 函数†等特殊函数的渐近展开，同样可以用于统计力学中，对具有大自由度的系统进行系统性的渐近估计．

称 (1) 中使 $h'(t)=0$ 的 t_0 为函数 $e^{zh(t)}$ 的**鞍点**（saddle point, col）．在点 t_0 的邻域内令 $h(t)$ 的 Taylor 展开式为

$$h(t)=h(t_0)+(1/2)h''(t_0)(t-t_0)^2+\cdots.$$

当 t 沿着直线

$$\arg(t-t_0)=\pi/2-(1/2)\arg(zh''(t_0))$$

运动时，则有 $zh''(t_0)(t-t_0)^2\leqslant 0$．因此，在点 t_0 的邻域内，$|e^{zh(t)}|$ 的值沿着该直线方向由极大值 $|e^{zh(t_0)}|$ 最快地减小，而 $\operatorname{Im} zh(t)$ 是一常数．我们称该方向为 $e^{zh(t)}$ 在点 t_0 的**最速下降方向**（direction of steepest descent）．当 $|z|$ 充分大时，为了估计 (1)，若将积分路径 C 改成沿着最速下降方向通过 $e^{zh(t)}$ 的鞍点 t_0，那么，被积函数在 C 上的绝对值，当 t 在鞍点 t_0 的邻域内时达到最大，而对其他 t 则该绝对值急速下降．所以，在改取的积分路径 C 上积分 (1) 的值能以鞍点邻域内的积分 (1) 的值来充分逼近．这样一来，对较大的 $|z|$，寻找积分 (1) 的主项的方法就是最速下降法．

【参】［1］P. Debye, Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für grosse Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index, Math. Ann., 67 (1909), 535—558;［2］В. И. Смирнов, Курс высшей математики III, Физматгиз, 1960（中译本：В. И. 斯米尔诺夫，高等数学教程，第三卷，第一分册，第二分册，人民教育

出版社，1962)．另外一渐近级数的［参］.

算图 ［英 nomogram，nomography 法 nomographie 德 Nomogramm，Nomographie 俄 номограмма 日 計算図表］ 算图是一种计算图表．设在若干实变量 $u_1, \cdots, u_n$ 之间存在函数关系 $F(u_1, \cdots, u_n)=0$，若对给定的 $u_1, \cdots, u_{n-1}$ 的值，在一图表上总可找出满足上述函数关系的 u_n 的值，则称这种图表为**算图**.

【两个变量的算图】 考虑 $F(u_1, u_2)=0$. i) 双刻度对照尺． 当 $F(u_1, u_2)=0$ 可以改写为 $f_1(u_1)=f_2(u_2)$ 时，对照做出 $x=f_1(u_1)$, $x=f_2(u_2)$ 的刻度，就做成**双刻度对照尺**．具有华氏和摄氏对照刻度的温度计就是一例（图 3 中的 $x=p/2$ 也是一个例子）． ii) 函数坐标纸． 若关系式 $F(u_1, u_2)=0$ 可表示为

$$af_1(u_1)+bf_2(u_2)+c=0$$

的形式，令 $x=f_1(u_1)$, $y=f_2(u_2)$ 时，则得 $ax+by+c=0$. 在横轴上分刻 $x=f_1(u_1)$，在纵轴上分刻 $y=f_2(u_2)$ 的函数尺，并分别做纵横线制作出一种**函数坐标纸**，这时原来的曲线变成直线．对数坐标纸就是其中一例.

【三个变量的算图】 考虑 $F(u_1, u_2, u_3)=0$. i) 交织图． 设 u_1, u_2 是平面直角坐标，若 u_3 取值为 $k_1, k_2, \cdots$，则在 (u_1, u_2) 平面上产生一族曲线 $F(u_1, u_2, k_1)=0$, $F(u_1, u_2, k_2)=0, \cdots$. 对于满足 $F(a, b, k)=0$ 的 a, b, k，方程 $u_1=a$, $u_2=b$, $F(u_1, u_2, k)=0$ 有一公共点．该曲线族和这样确定的交织关系就称为**交织图** (intersection chart)．一般地，若能将 $F(u_1, u_2, u_3)=0$ 表示为一组关系 $f_1(x, y, u_1)=0$, $f_2(x, y, u_2)=0$, $f_3(x, y, u_3)=0$，则我们可以在 (x, y) 平面上构造出由 u_1, u_2, u_3 曲线族所构成的交织图（图 1）．特别，若 $F(u_1, u_2, u_3)=0$ 可以写成

$$(1)\quad \begin{vmatrix} f_1(u_1) & g_1(u_1) & h_1(u_1) \\ f_2(u_2) & g_2(u_2) & h_2(u_2) \\ f_3(u_3) & g_3(u_3) & h_3(u_3) \end{vmatrix}=0$$

的形式，则对 u_1, u_2 和 u_3 的曲线简化为直线．这

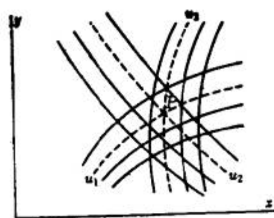


图 1

个性质在投影变换下是不变的． ii) 列线图．假设 $F(u_1, u_2, u_3)=0$ 可以表示为 (1) 的形式，且设函数尺是按照 $x_1=f_1/h_1$, $y_1=g_1/h_1$; $x_2=f_2/h_2$, $y_2=g_2/h_2$; $x_3=f_3/h_3$, $y_3=g_3/h_3$ 确定的．则对应于满足 $F(u_1, u_2, u_3)=0$ 的值 u_1, u_2, u_3 的点 (x_i, y_i), $i=1, 2, 3$，位于一条直

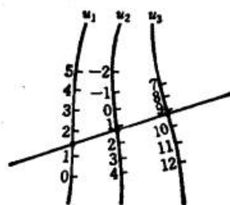


图 2

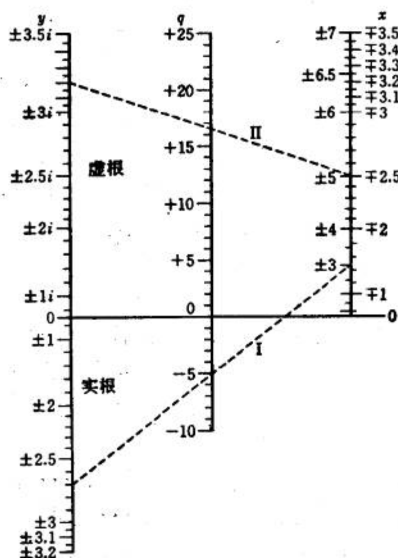


图 3

二次方程 $x^2+px+q=0$

I. $x^2+3x-5=0$, $x=-1.5\pm2.7$

II. $x^2+5x+16.5=0$, $x=-2.5\pm3.2i$

线上．使用这个性质，可通过 u_1 和 u_2 确定 u_3. 由这个方法所构成的图称为**列线图**（nomogram, alignment chart）（图 2，3）．作为具体例子，有 $f_1g_3+f_2h_3=f_3$（d'Ocagne 型），$(f_1+f_2)/(g_1+g_2)=f_3$（Soreau 型），$f_1f_2f_3+(f_1+f_2)g_3+h_3=0$（Clark 型）等形式．在对 x，y 的投影变换

$$x'=\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},$$

$$y'=\frac{a'x+b'y+c}{a''x+b''y+c''}$$

下，共线性是不变的，其中

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}\neq 0.$$

【四个变量的算图】 考虑 $F(u_1, u_2, u_3, u_4)=0$. i) 可分的情形．1) 交织图．若函数 $F(u_1,u_2,u_3,u_4)=0$ 能表示为 $F_1(u_1, u_2, t)=0$，$F_2(u_3, u_4, t)=0$，则将它称为**可分的**（separable）．这时若令

$$(2)\qquad f(x, y, t)=0\ (T),$$

$$g_1(x, y, u_1)=0,\quad h_1(x, y, u_2)=0,$$

$$(3)\qquad f(x, y, t)=0\ (T),$$

$$g_2(x, y, u_3)=0,\quad h_2(x, y, u_4)=0,$$

则因交织图 (2)，(3) 都包含有曲线族 T，故由 $(u_1, u_2)\to t$，$(t, u_3)\to u_4$ 能求出 u_4. 2) 列线图．若 (2) 和 (3) 能表示为

$$(2')\qquad \begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f_1(u_1) & g_1(u_1) & h_1(u_1) \\ f_2(u_2) & g_2(u_2) & h_2(u_2) \end{vmatrix}=0,$$

$$(3')\qquad \begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f_3(u_3) & g_3(u_3) & h_3(u_3) \\ f_4(u_4) & g_4(u_4) & h_4(u_4) \end{vmatrix}=0,$$

则 u_1，u_2，t 和 u_3，u_4，t 分别形成具有公共函数尺 t 的列线图．因此我们用 $(u_1, u_2)\to t$，$(t, u_3)\to u_4$ 就可以求出 u_4（图 4）．若 $F(u_1, u_2, u_3, u_4)=0$ 可以表示成

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & 0 & h_1 \\ f_2 & g_2 & 0 & h_2 \\ f_3 & 0 & g_3 & h_3 \\ f_4 & 0 & g_4 & h_4 \end{vmatrix}=0,$$

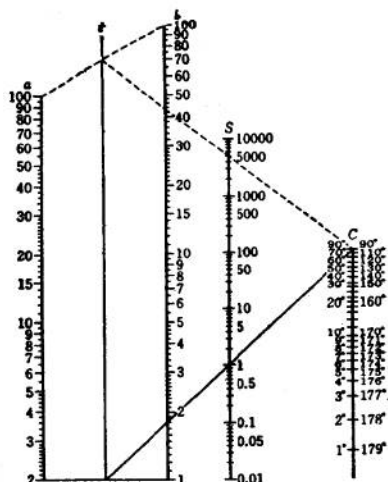


图 4　三角形的面积：$S=\frac{1}{2}ab\sin C$

则这个方程可以简化为 (2′) 和 (3′).

ii) 不可分的情形．若函数 $F(u_1,u_2,u_3,u_4)=0$ 不能变为上述形式时，我们就将它称为**不可分的**（inseparable）．即使是在这种情况下，若它能被表示为

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1) & g_1(u_1) & h_1(u_1) \\ f_2(u_2) & g_2(u_2) & h_2(u_2) \\ f_3(u_3,u_4) & g_3(u_3,u_4) & h_3(u_3,u_4) \end{vmatrix}=0,$$

则仍然可以形成具有关于 u_1，u_2 两个函数尺和关于 u_3，u_4 的一个函数网络的列线图（图 5）．$f_1(u_1)g_3(u_3, u_4)+f_2(u_2)h_3(u_3, u_4)=f_3(u_3, u_4)$ 也被包含在其中．此外，共圆图，空间的共面图，可移动函数尺的图表等也可用来制做算图．

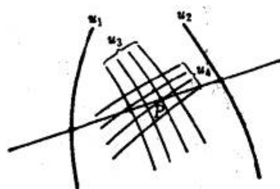


图 5

【参】［1］ 小倉金之助，計算図表，岩波全書，1940；［2］ 渡辺義勝，計算図表学，河出，1947；［3］ 近藤次郎-中口博，統計図表と計算図表，經営数学講座，みすず書房，1958；［4］ M. d'Ocagne, Traité de nomographie, Gauthier-Villars，第二版 1921；［5］ R. Soreau, Nomog

raphie, 第二版 1921; [6] H. Schwerdt. Lehrbuch der Nomographie, Springer 1924.

图解计算法 [英 graphical calculation 法 Calcul graphique 德 graphische Rechnung 俄 графическое исчисление 日 図式計算法] 所谓**图解计算法**是指使用直尺、圆规等通常使用的作图工具，全靠几何作图来计算的方法．有时也使用简单的辅助仪器．图解计算法的最主要缺点是在精度方面受到限制，但作为复杂数值计算的辅助手段有时还是有用的．从广义上说，它也包括几何光学中的图解计算法和图解力学(后述)．关于算图，→算图．

关于具体的图解计算法，在代数计算方面，著名的有 J. Massau (1887) 提出的多变量线性公式; F. J. van den Berg (1888) 的线性方程组的图解法; J. A. Segner (1761) 的多项式值的计算; 和 Lill (1867) 的代数方程解法等等．

在**图解微分法** (graphic differentiation) 中，为了画出函数 $y=f(x)$ 的图象的切线，用对给定方向求切点的办法比在一给定点划切线的精度一般要高．

【图解积分法】 Massau (1878) 给出了一个能够画出函数 $f(x)$ 的近似积分曲线的**图解积分法** (graphic integration) (图 1)．按照这个方法，使用一阶梯函数来代替原来的曲线 $y=f(x)$，而对不定积分

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx$$

图 1 $\overline{O'P}$ 的长度 $=1$, $N_iT_{i+1}//PH_i$

则用折线来逼近．Massau 还进一步地给出一个常微分方程 $dy/dx=f(x,y)$ 的图解积分法，按照这个方法，积分曲线可以上述类似的方法画出来．其它的方法还有用于线性微分方程的 Czuber 法; 用于二阶常微分方程的 Lord Kelvin 法 (1892); 以及完全遵从 Runge-Kutta 法†作图的图解积分法．

【统计推断图解法】 设 x_1, x_2 是两个相互独立†的服从正态分布†的随机变量，并设这些变量的总体均值†和总体方差†分别为 m_1, m_2; σ_1^2, σ_2^2．令 $z=X_1/X_2$，在可忽略 X_1 为负的概率的近似中，变量

$$t=(zm_1-m_2)/\sqrt{\sigma_1^2z^2+\sigma_2^2}$$

服从平均值为 0，方差为 1 的正态分布．因此，设横轴和纵轴的标度的平方根表示到原点的实际距离，则在这样作出的双平方根纸上，由点 $((m_1/2\sigma_1)^2, (m_2/2\sigma_2)^2)$ 到原点和点 $((X_1/\sigma_1)^2, (X_2/\sigma_2)^2)$ 连线(称为比 $(X_1/\sigma_1)^2:(X_2/\sigma_2)^2$ 的**裂分线** (split)) 的垂线段长度等于 $d=t/2$．另一方面，设 χ_1^2 和 χ_2^2 分别是自由度†为 f_1 和 f_2 的两个相互独立服从于 χ^2 分布†的随机变量，则 $\sqrt{2}\chi_i-\sqrt{2f_i}$ 近似于均值为 0、方差为 1 的正态分布．因此，若 $F=(\chi_1^2/f_1)/(\chi_2^2/f_2)$ 是一服从于自由度为 (f_1, f_2) 的 F 分布†的随机变量，则在双平方根纸上从点 $(f_1/2, f_2/2)$ 到比 $f_1F:f_2$ 的裂分线的垂线段，其长度等于 $d=t/2$．因此能简化为 F 分布的那些分布(例如二项分布†)问题都可以在这样的纸上用图解法处理．这样的图解计算法称为**统计推断图解法** (graphical method of statistical inference)．双平方根纸也以**二项概率纸** (binomial probability paper) 或**统计分析纸** (stochastic paper) 的名字出售．当 $f_2\to\infty$ 时，在横轴上的定点 $(f_1/2, 0)$ 和动点 $(\chi_1^2/2, 0)$ 之间的距离等于 d．因此可简化为 χ^2 分布的那些分布，诸如 Poisson 分布†问题，也可以在这样的纸上解决．

【图解力学】 图解力学 (graphical mechanics) 是用图解法处理力学问题，特别是平衡问题的．在这个领域中，虽然力的合成、分解、平衡的作图是基础，但由 d'Alembert 原理，在能简化为平衡问题的动力学问题中也可应用这个方法．力的合成或分解遵循向量加法法则．求

力 0123 的合力的向量图(见图 2(b)),称为**力多边形** (force polygon). 为了画出合力R的作用线的位置,做**环节多边形** (link polygon) 是简便的. 如在图 2(b) 中那样,取任意点P,以它为**极点** (pole) 做**射线** (ray) $P0$, $P1$, $P2$, $P3$. 在图 2(a) 中,多边形 $abcd$ 是环节多边形,它的各边分别平行于射线 $P0$, $P1$, $P2$, $P3$, 从 F_1 上的任意点 a 开始逐次做这些平行线就可求得点 b, c 和 d. 于是合力R的作用线通过d. 对

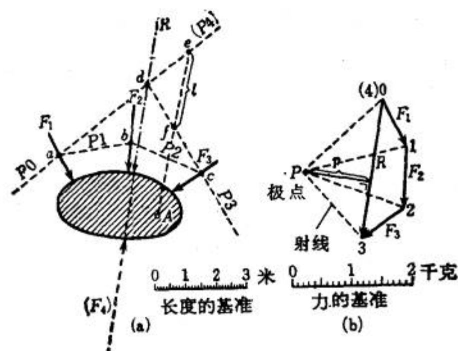


图 2　求三个给定的力 F_1, F_2 和 F_3 的合力及其作用线位置的图解法. 在图 (b) 的力多边形中,向量$\overrightarrow{03}$表示合力 R. 在图 (a) 中的环节多边形上,点 d 是合力作用线上的一点. 当第四个力 F_4 与 R 大小相等、方向相反时,两个多边形闭合,且四个力 F_1, F_2, F_3, F_4 是平衡的.

一给定点 A, 我们通过 A 画一条平行于R的直线. 设 $\overline{ef}=l(\mathrm{m})$ 是该直线为 $P0$, $P3$ 两射线所截得的线段长度,它代表合力 R, 并设 $p(\mathrm{kg})$ 是从极点到合力R的垂线长度. 则点A的转动力距M是乘积 $M=l_p(\mathrm{kg\text{-}m})$.

一般说来,使力 $\boldsymbol{F}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 平衡的充分必要条件是

$$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i=0,\quad \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{F}_i=0,$$

其中×是向量的外积,$\boldsymbol{r}_i$ 是从一定点到力 $\boldsymbol{F}_i$ 的作用点的位置向量. 如果所有这些力都在同一平面内,则这些条件等价于力多边形和环节多边形两者都闭合.

我们用简支梁作为例子,当其受垂直力作用时,梁上各点的力矩,均为环节多边形纵坐标长度 l 的 p 倍(图 3).

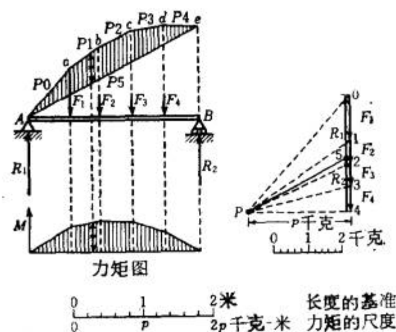


图 3　垂直力 F_1, F_2, F_3, F_4 作用于简支梁上时,支点反作用力和力矩图的确定.

【空间图形的图解力学】 对于直角坐标系来说,作用于空间一质点上的力的平衡条件是投影在任意两个不同坐标平面上的力多边形都同时闭合. 作用在一个刚体上的力的平衡条件是在像平面中的二个力多边形和在各坐标平面中的三个环节多边形同时闭合. 例如,要将作用于空间点O处的一个力$\boldsymbol{P}$分解为三个方向 $(\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3)$,我们可以画出两个闭合力多边形 $a'b'c'd'$ 和 $a''b''c''d''$ (如图 4 所画),其中 ′ 和 ″ 分别表示在平面和在正视面中的量.

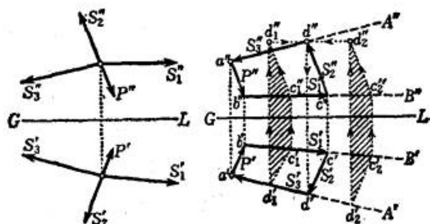


图 4　将所给的力 $\boldsymbol{P}(p', p'')$ 分解为空间的三个方向 S_1, S_2, S_3 上的力的作图法. 取 $a'b'=P'$, $a''b''=P''$, 作 $(a'A', a''A'')$, $(b'B', b''B'')$ 分别平行于 S_3, S_1 方向. 再作 $c_1'd_1'$, $c_2'd_2'$ 平行于 S_2', $c_1''d_1''$, $c_2''d_2''$ 平行于 S_2'', 连结 $d_1''d_2''$. 求 $d_1''d_2''$ 与 $a''A''$ 的交点d'', 在 $a'A'$ 上求 $d'(d'd''\perp GL)$, 则得二个闭合的力多边形 $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$. 这些多边形的各边给出了力$\boldsymbol{P}$在各给定方向上的分量.

【参】 [1] C. Runge-Fr. A. Willers, Numerische und graphische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, Enzykl. der Math., Bd. II, 3 Teil., 1 Hälfte, Heft 2, 1915. 关于统计推断图解法: [2] M. Masuyama (增山元三郎), Graphical method of statistical inference, 丸善, 1954. 关于图解力学: [3] 倉西正嗣-宮川松男, 図式力学, 金原出版, 1956; [4] C. B. Biezeno-R. Grammel,

Technische Dynamik, Springer, 1939; [5] H. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen I, II, Kröner, 1927.

曲线拟合 [英 curve fitting 法 adjustage de la courbe 德 Kurvenanpassung 俄 вычерчивание кривой по точкам 日 曲線のあてはめ] 当给定自变量 x 的离散值 $x_1, x_2, \cdots$ 上的观测值或测量值 $y_1, y_2, \cdots$ 时，求出尽可能好地拟合于点 (x_ν, y_ν) 的简单曲线 $y=f(x)$ 的方法，一般称作**曲线拟合**. 这种方法经常用于根据实验数据求经验公式，但也用于函数逼近和数据的平滑问题. 插值法[†]是构造通过所有给定点的多项式，但对实验数据的情形，因为它们含有测量误差，通常利用最小二乘法[†]构造曲线，这里不要求该曲线通过给定的所有点 (x_ν, y_ν).

【经验公式】 所谓**经验公式** (empirical formula)，是相对于在理论上导出的、描述某种现象的规律的函数 $y=f(a)$ 的**理论公式** (theoretical formula) 而言的. 它不仅使实验结果有个简明的记录，而且也有助于推断现象的变化规律. 为求得经验公式，一般是，首先确定含有若干个所谓**经验常数** (empirical constants) 的参变量的函数型，然后确定经验常数，使得该函数拟合实验数据. 一般来说，参数个数越多，拟合的精度也就越高，但这会使公式复杂化，不仅不实用，而且难以分析现象的本质. 所以一般是先描出图象，再估计函数型. 有时是先观察已准备好的各种曲线，从中找出与已知数据最靠近的曲线，然后作变量代换使之成为简单的形式，例如或者是直线.

以下举几个重要的例子. [ ] 内的量表示使图象变换成直线的变量代换的两个坐标. 1) $y=1/(a+bx)$ $[x, 1/y]$; 2) $y=a+bx^2$ $[x^2, y]$; 3) $y=a+b/x$ $[1/x, y]$; 4) $y=ax+bx^2$ $[y/x, x]$; 5) $y=ab^x$ $[x, \log y]$; 6) $y=ax^b$ $[\log x, \log y]$; 7) $(x+a)(y+b)=c$ $[x-x_1, (x-x_1)/(y-y_1)]$; 8) $y=a\exp(b/(x+c))$ $[\log(y/y_1)/(x-x_1), \log(y/y_1)]$; 9) $y=\varphi((x-m)/\sigma)$ $[x, t]$ (其中, $y=\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}(2\pi)^{-1/2}\exp(-t^2/2)dt$); 10) $y=\varphi((\log x-m)/\sigma)$ $[\log x, t]$ (其中 $y=\varphi(t)$, 见 9)). **半对数坐标纸** (semi-logarithmic paper), **对数坐标纸** (logarithmic paper), **概率(坐标)纸** (probability paper), 是分别为 5), 6), 9) 的 [ ] 中所示的变量代换容易进行而作的特殊的坐标纸.

多项式，关于一次式用得最多. 但在上述变换后，有时也用多项式，其次数至多为 5 次. 当 x 的离散自变量是等间隔时，可求出差分[†] $\Delta y, \Delta^2 y, \cdots$ 来估计多项式的次数. 如果 $\Delta^n y$ 是常数，则多项式为 n 次的. 当对等间隔的 x_i, y_i 已知时，则点 $(y_{i+1}/y_i, y_{i+2}/y_i)$ 位于直线 $\eta=M\xi+B$ 上，且有: i) 若 $M>0$, $B<0$, $M^2+4B>0$, 则 $y=ae^{\lambda x}+be^{\mu x}$; ii) 若 $M>0$, $M^2+4B=0$, 则 $y=(a+bx)e^{\lambda x}$; iii) 若 $M^2+4B<0$, 则 $y=e^{\lambda x}(a\cos\omega x+b\sin\omega x)$. 对于周期现象，通常使用 Fourier 级数[†]

$$y=a_0+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的部分和 (⇀ 调和分析). 对于增长或衰变的 S 型曲线，经常使用逻辑斯谛 (logistic) 曲线[†] $y=L/(1+e^{-\alpha t})$, 即 $y=A(\tanh\lambda t+1)$.

确定经验常数的方法有图象法 (图象为直线时特别简单)、选点法 (选取的点数等于参数个数)、平均法和最小二乘法等等. 另外，还必须同时从理论方面估计实验的规律性以助方法的选定.

【选点正交多项式】 当已给在等间隔点 $x=0, 1, \cdots, n-1$ 上的值 $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ 时，则在 $k(\leqslant n)$ 次多项式中，使

$$G_k(n)=\sum(y_m-f(m))^2$$

取极小的多项式为

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu q_\nu(n, x),$$

$$a_\nu=\sum_{m=0}^{n-1}y_m q_\nu(n, m)/S_\nu(n),$$

$$S_\nu(n)=\sum_m(q_\nu(n, m))^2,$$

此时，

$$G_k(n)=\sum_{m=0}^{n-1}y_m^2-\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu^2 S_\nu(n),$$

而 $q_\nu(n, x)$ 称作 **Чебышев q 函数** (Čebyšev q-function)，定义为

$$q_\nu(n, x) = \sum_{m=0}^{\nu} \binom{\nu+m}{m} \binom{\nu-n}{\nu-m} \binom{x}{m}.$$

实际计算时，最好以

$$q_\nu^*(n, x) = q_\nu(n, x)/2^{-\nu}\nu!M_\nu(n)$$

代替 $q_\nu(n, x)$，其中 $M_\nu(n)$ 是

$$\binom{\nu+m}{m}\binom{n-1-m}{\nu-m} \quad (m = 0, 1, \cdots, \nu)$$

的最大公约数．这样一来，诸数 $q_\nu^*(n, m)$ ($m = 0, 1, \cdots, n-1$) 是无公约数的整数，我们称 $q_\nu^*(n, x)$ 为**最简正交多项式** (simplest orthogonal polynomial)，或称**最简 Чебышев q 函数**，有时也用 $X_{n,m}(x)$，$\xi'_{n,m}(x)$，$\varphi_{n,m}(x)$ 等来表示．

另外，当

$$(f, g)_n = \sum_{m=0}^{n} f(m)g(m) = 0$$

时，称 f，g 为**选点正交**或**有限和正交** (orthogonal for finite sum)．据此，将 $1, x, x^2, \cdots, x^\nu$ 正交化，则得

$$P_{\nu,n}(x) = \sum_{m=0}^{\nu} (-1)^m \binom{\nu}{m} \binom{\nu+m}{m} \times \binom{x}{m} \Big/ \binom{n}{m}$$

它与 q_ν 之间有下列关系：

$$q_\nu(n, x) = ((-1)^\nu(n-1)!/2^\nu(n-\nu-1)!)P_{\nu,n-1}(x).$$

称 $P_{\nu,n}(x)$ 为 (Чебышев) **选点正交多项式**或简称**正交多项式** (orthogonal polynomial)．(它与属于正交函数系†的多项式 (→正交函数系) 不同，不要混淆．) $P_{\nu,n}(x)$ 满足选点正交条件

$$\sum_{m=0}^{n} P_{\nu,n}(m)P_{\mu,n}(m) = \delta_{\mu\nu} \frac{(\nu+n+1)!(n-\nu)!}{(2\nu+1)(n!)^2}.$$

另外，在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上令 $n \to \infty$，则 $P_{\nu,n}(x) \to P_\nu(1-2x)$ (P_ν 是 Legendre 多项式†) (→ 公式 20 VII)．

另外，对不等间隔的情形，和对极小极大逼近，即使 $\max|y_m - f(x_m)|$ 取极小的情形都有些计算逼近多项式的类似的研究工作．

【参】 [1] 增山元三郎，実験公式の求め方，竹内書店，1962; [2] Th. Running, Empirical formulas, John Wiley, 1918; [3] P. G. Guest, Numerical methods of curve fitting, Cambridge Univ. Press, 1961．关于选点正交多项式有下列文献，[ ] 内 n，ν 的变化范围是表示文献中 $q_\nu^*(n, x)$ 的变量在数值表中的变化范围：[4] R. A. Fisher-F. Yates, Statistical tables for biological, agricultural, and medical research, Oliver-Boyd, Edinburgh, 1938, [$n \leqslant 75$, $\nu \leqslant 5$]; [5] R. L. Anderson-E.E. Houseman, Tables of orthogonal polynomial values extended to $n = 104$, Agricul. Exp. Station, Iowa State College Stat. Sec. Res. Bul., **297** (1942), 595—672, [$n \leqslant 104$, $\nu \leqslant 5$]; [6] 山内二郎，チェビシェフ q 函数に就いて，その1，最簡チェビシェフ q 函数および表，電気試験所報告，**454** (1942), [$n \leqslant 15$, $\nu \leqslant n-1$; $16 \leqslant n \leqslant 21$, $\nu \leqslant 9$; $22 \leqslant n \leqslant 31$, $\nu \leqslant 7$; $32 \leqslant n \leqslant 51$, $\nu \leqslant 5$].

计算机 [英 calculator, computer　法 machine à calculer　德 Rechenmaschine　俄 вычислительная машина　日 計算機] 【历史】 很早以前，人们就希望在计算过程中使用机器．我们也可以说**算盘** (abacus) 是最原始的计算机．但真正计算机的鼻祖还是带有自动进位装置的 B. Pascal 加减计算机 (1642)．对这种机器经过改进以后研制出以反复地加减运算来实现乘除运算的 G. W. Leibniz 计算机 (1671)． 对这种机器的结构再予以改进，才成为现在广泛使用的 Odhner 式计算机，并陆续地研制出以电为动力，具有各种自动装置的各式各样电动计算机．可是，这种机器与现代数学关系不大，所以我们就略去不谈．

与一次只能进行加、减、乘、除一种运算的所谓**台式计算机** (desk calculator) 不同，近年来，十分迅速地发展了一种要予先编好程序并存入机器内，一启动就能按程序自动地进行以四则运算组合成的复杂计算的机器，我们称之为**自动计算机** (英 automatic computer, 德 Rechenautomat)． 这种思想，是十九世纪英国数学家 C. Babbage 提出来的． 但是由于当时机械技术存在各种困难， 所以未能实现． 直到二十世纪四十年代，他的理想才由哈佛大学的所谓继电器计算机 Mark I 予以实现． 不久又有了显著的进展．1947 年，出现了以电子管取代机械元件而进行运算与实现其他功能的**电子计算机**

(electronic computer) ENIAC. 1950 年左右，各处出现了采用 J. von Neumann 提出的**内存程序** (stored program) 方式的电子计算机. 从此以后，电子计算机以惊人的速度发展起来，迎来了今天电子计算机的全盛时代.

在功能上，今日的电子计算机完全是自动计算机，而且也可看作是一个 Turing 机†的具体化. 一般说，自动计算机由运算器、存储器、控制器、输入、输出五部分组成.这五个部分之间以电线相互连结，并根据它们之间的信息传输进行运算.在最初的自动计算机 Mark I 中，运算、存储等均是用电控制的齿轮装置和继电器等的组合来进行的. 那时，也制造了一些全部以继电器为元件进行运算、存储、控制的继电器式自动计算机. 但不久，人们用电子管(最近已经用晶体管和其他微型电路)代替了继电器. 因此，计算速度飞跃地提高，再加上大容量存储器的发展，给自动计算机的功能带来了质的变化. 以前，人们认为不可能进行的大规模的科学技术上的计算，例如求三维偏微分方程的数值解，现在也成为可能. 不仅如此，而且以前不认为是"计算"的诸功能，也能执行了. 有时称这种利用为**非算术应用** (non-arithmetic uses). 例如分类、翻译、信息检索、数学定理的证明等现在均能用机器实现. 电子计算机能做这些类似于人类高级思维活动的工作，故也称为万能的**信息处理** (information processing) 机.

【数字计算机的结构】 电子计算机的动作是由它的各部件之间的电信号产生的信息交换而进行的(图 1). **数字电子计算机** (digital

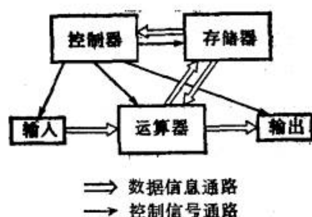


图 1 电子计算机的结构

electronic computer) 的信息是以取值 0，1 的变量 (Boole 变量) 写成二进制的序列. 这种变量是不连续的，信息的最小量是二进制数字，它是二进制数的一位，称为**比特** (bit). 在本条中将只讨论这种机器，并简称为电子计算机. 另外一种计算机，它的信息变量取连续值，将在模拟计算机†那条中介绍. 在电子计算机内部，信息 0，1 是以不同的电位，脉冲电压的有无，交流电压的两种相位等形式表示的. 在电路方面，计算机具有周期脉冲发生器，即所谓时钟 (clock). 所有信息的传送、运算以及其他操作都与时钟同步，这种电路称为**同步式** (synchronous) 电路. 另一种电路是在各部件中，独立地进行信息的处理和传送，当一个操作结束后才转向下一个操作，这种电路称为**非同步式** (asynchronous) 电路. 目前大部分计算机是同步式的.

计算机的各个部件都是自动装置，它们的输出是根据输入的逻辑信号和各部件的内部状态来决定. 因此，计算机由下列元件所构成：例如有逻辑积† ∧ (and)、逻辑和† ∨ (or)、否定† ¬ (not) 等基本逻辑运算元件，还有存储元件，以及提供能量并驱动其它元件的信号放大元件. 实际上，在很多计算机中逻辑积、逻辑和两逻辑运算均用二极管(整流元件)，而否定使用晶体管放大器，这种放大器又可作为放大元件(图 2). 除主存储器以外的存储均可使用触发器电路(图 3). 也有象参变元件 (parametron) 那样同时具备运算、存储、放大三种功能的元件. 参变元件是利用磁性体非线性特性而产生的参量振荡现象所作的元件.

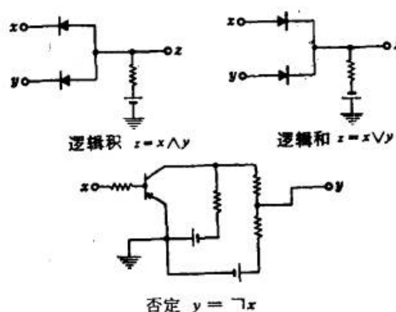


图 2 逻辑积、逻辑和、否定元件之例

运算器、控制器就是由数百乃至数千的上述元件所构成的.

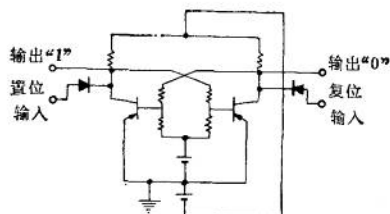


图 3　触发器电路之例

运算器 (arithmetic unit) 是以存储 n 位 ($16 \leqslant n \leqslant 64$) 二进制数的存储元件 (寄存器) 以及与之相联的运算电路为主体构成的. 图 4 是一位二进制数加法器的运算单元电路. 并行联结 n 个这样的电路, 就可以进行 n 位的加减运算, 把它称为 n 位并行加法器; 返复使用同一位加法器, 由低位到高位顺次对两个数相加的运算电路, 称为串行加法器. 减法运算一般采用补码 (complement) 的加法来实现.

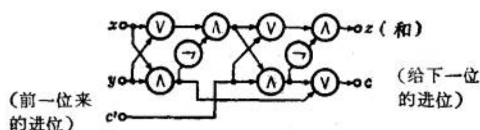


图 4　构成二进制加法器 (一位) 之例

乘法运算, 视乘数各位为"1"或"0"来决定往部分和 (中间和) 加上或不加上被乘数, 同时被乘数向高位移位. 除法运算与此相反, 视被除数每左移一位, 来判别所得数是否大于除数, 大于除数就由被除数减去除数, 并上商"1", 否则只移位, 上商"0". 依次排列每次商的信息便得到真正的商. 控制这些运算, 也可以用逻辑元件、存储元件的组合来实现.

控制器 (control unit) 重复执行下列操作: 1) 根据指令计数器所寄存的内存地址从存储器读出指令. 2) 根据指令的地址部分从存储器中读出运算数. 3) 译出指令操作码, 并向各部分发出相应的控制信号. 4) 指令计数器内容加 1, 接受运算结束信号后, 再从 1) 开始重复执行. 因此, 控制器由计数电路、指令译码电路 (decoder), 产生执行指令所需信号的信号源电路 (encoder)、寄存指令的电路 (寄存器) 等所构成.

存储器 (memory, storage) 存储指令以及运算所需要的数据 (予先给出的初始数据以及运算过程中所得到的中间结果). 从原理上, 可以使用逻辑元件和触发器构成. 但由于需求存储容量大 (10^5—10^7 位), 所以使用了特殊的存储元件. 现在, 一般都采用以记忆**磁芯** (magnetic core) 组成纵横排列并穿以导线的磁芯矩阵. 磁芯是环状铁氧体, 用脉冲电流沿着磁滞回线进行磁化后, 选择其两个磁化方向之一来记录一位信息. 在穿过磁芯的导线上加读写脉冲电流, 进行信息的读、写. 此外, 大容量的辅助存储器可使用磁鼓、磁带、磁盘等. 而且正在研究用极低温元件、化学元件、光学元件等作为存储元件.

以上三个部分 (输入, 输出部分除外) 构成计算机的**主机**或**中央处理器** (central processing unit).

【指令和程序设计】 采用内存程序方式的电子计算机, 是通过执行所给**指令** (instruction) 来完成一系列计算的. 计算机的指令有各种各样的形式, 但是现今广泛使用的是**单地址** (single address) 指令, 它只有一个指示操作数的地址. 一般地, 指令根据功能的不同可分为算术、存储、转移、输入、输出等类型. 算术指令是执行算术运算的, 通常是"将起计算核心作用的所谓**累加器** (accumulator) 的内容与存储器 m 单元 (由指令的地址部分指出) 的内容进行加、减、乘、除运算, 并把结果保存于累加器中". 存储指令是"将累加器的内容写入存储器的 m 单元中去". 转移指令是"将下一条要执行的指令由内存储器的 m 单元中读出来送到指令寄存器". 除转移指令外, 其他指令均按地址顺序从存储器中取出来执行. 另外, 还有所谓条件转移指令, 它是根据某种条件来决定指令执行的顺序的, 例如"累加器的内容为负则转移, 否则按地址顺序执行下去"就是这种指令. 因此, 计算机具有判断的功能, 也说明计算机有 Turing 机的万能性. 输入输出指令是用来完成传输信息的功能的.

为了完成预定的计算，需要把与它有关的有限条指令合理地编排起来，这样排列的一组指令，称为**程序**（program）．将所要计算的题目表现为有限条指令的合理编排工作，称为**程序设计**（programming）．

各条指令都是由控制器的结构所决定的一定格式的数来表示的，并在计算前存入计算机的存储器中．从这种意义上来讲，所谓程序就是一个数列，这种数列称为**机器语言程序**（machine-language program）．

一个程序，通常可以分为几个程序块，各个块称为**子程序**（subprogram，subroutine）（根据相应的作用，也有时将特定的部分称为**主程序**（main routine），但这种区别多半是人为的）．由于计算初等函数的子程序以及驱动输入输出设备的子程序等利用率高，所以用便于公共使用的形式编制．这些现成的程序系统，相对于计算机的**硬件**（hardware）而言，我们称之为**软件**（software）．可以说，使用计算机的方便程度由软件决定．

初期的程序，连机器语言的数据化阶段也均由人编写的，但现在所使用的是容易掌握的，接近于通常书写格式的所谓**外部语言**（external language），或者用接近于数学式子的面向问题语言来书写程序．这样书写的程序要用预先输入的程序输入子程序才能翻译成机器语言．用面向问题语言写成的程序的这种翻译工作称为**自动程序设计**（automatic programming）．进行这种工作的**汇编程序**（assembler），**编译程序**（compiler）等是很重要的软件．

详细的说，汇编程序能够把容易理解、记忆的字符（例如用 ADD 表示加法），依据预先制成的表格翻译成数码．而且，它对于用字符书写的地址部分也能翻译．汇编程序又能把通常用十进制书写的数值翻译成计算机内部的二进制形式．另外，汇编程序还能根据一条简单的指示插入一组指令．这种用一条指令形式表示的简单的指示，称之为**宏指令**（macro instruction）．

编译程序除开具有若干宏指令以外，还有以下功能：1）自动地将数学表达式翻译成机器语言，2）根据简单的指示调用各种子程序，3）在存贮器中将程序、子程序、数据等进行适当地自动分配．因此可使用如下的外部语言：

if $x \geqslant 0$ **then** printreal（SQRT（x））

else printstring（'negative'）；

最初的编译程序是美国 IBM 公司的 **FORTRAN**，它是公式翻译（FORmula TRANslator）的简写（1956）．以后，面向不同问题的各种外部语言逐渐问世了，而且也设计出了与各种机器相适应的软件．这些外部语言除了上述的 FORTRAN（面向科学计算用的）之外，还有 **ALGOL**（ALGOrithmic Language，面向科学计算），**COBOL**（COmmon Business Oriented Language，面向商业数据处理），**LISP**（LISt Processor 面向非数值的信息处理）等．对 LISP 利用着解释软件．在数值分析领域中所出现的新方法多是用 ALGOL 语言作为公共语言发表的．

近年来，随着大型高速计算机的出现，软件也日益复杂．目前出现了以连接多个用户的程序而提高计算机效率的软件（所谓监督程序），以及统一多个汇编程序和编译程序并将各种外部语言混写在一起的软件等．

【外部设备】 相对于计算机的主体，我们称**输入**（input）、**输出**（output）外存储等装置为**外部设备**（marginal devices，peripheral devices）．

电子计算机开始工作以前，要把必需的信息（程序、数据）输入到存储器中．程序用键盘穿孔机在纸带或卡片上穿孔，通过输入机将已穿孔的卡片或纸带上的信息转换成电信号再送入计算机．输入机及其附属电路都是输入设备．

输出设备能把计算结果打印出来，一般由电传打字机或行式打印机（line printer）等打字输出．有时由于还要利用计算结果，所以也可以通过纸带穿孔机或卡片穿孔机在纸带或卡片上穿孔输出．因为磁带机既能记录结果，也能把数据再次输入，所以计算过程中它也可以当作辅助的输入输出设备使用．由于其他一些特

殊的需要，有时也使用扬声器和绘图仪等的模拟装置.

这些设备都是根据输入输出指令在主机控制下运行的. 但是,这些设备的机械部分较多,和主机相比,工作速度很慢. 因此在大型计算机中设置了管理输入输出的专用卫星计算机,而且还利用了下述的中断来提高效率.

【中断】 按下计算机的启动钮，计算的全部过程就自动地按照预定的程序进行. 一般地,外界干予只有使用停机按钮才能停机. 但这对工作是不利的. 近来,许多计算机都具有所谓**中断** (break in, interruption) 的功能. 当计算机内部有异常动作、或外界有手动按钮干予、或输入输出设备有状态变化时，就有中断信号发生,这时机器能中断现行程序,并转而执行中断处理程序. 为了保证被中断的程序还能返回，就必需保留被中断时的状态(如返回地址等). 恰当地利用中断、再配合一些适当的软件,使主机与许多外部设备连接起来,就可以实现将各处来的输入依次处理后,再输出出去,这称为联机实时处理. 这可用于工程控制与座位预约等，还能使多个用户为多种目的同时使用同一个计算机.

【数理语言学】 随着软件的研制，各种程序设计技巧逐步积累，研究用机器语言翻译算术公式的方法可以说是相当成功了. 但是,有关程序设计的理论体系还未成熟. 目前的问题是需要设计一种"元语言"来描述面向问题外部语言和编译程序的内容. 它应能清楚地表达各种面向问题的语言中出现的语法和语义. 与此相关地，还要注意根据语言的描述能力将语言乃至文法进行分类，这种研究是**数理语言学** (mathematical linguistics) 的一个重要分支. N. Chomsky 从自然语言(用计算机进行自动处理)的研究出发,提出了文法的形式定义,并将文法分为四种类型(1959). 以后许多研究工作者又进行了各类间的比较,并联系自动机[†]理论得到不少进展.

【参】 [1] 城憲三-牧之内三郎, 計算機械, 共立出版, 1953; [2] 山下英男監修,電子計算機,ディジタル計算機編,オーム社, 1960; [3] M. Phister, Logical design of digital computers. John Wiley, 1958; [4] 赤摂也-藤川洋一郎,電子計算機入門,培風館, 1966 关于程序设计方面: [5] 709/7090 FORTRAN programming system, IBM form C 28-6054-2; [6] P. Naur 编, Revised report on the algorithmic language ALGOL 60, Communications of the ACM, **6** (1963), 1—17; [7] Y. Bar-Hillel, Language and information, Addison-Wesley, 1964; [8] N. Chomsky, Formal properties of grammers, Handbook of mathematical psychology II, John Wiley, 1963, p. 323—418; [9] J. E. Sammet, Programming languages: history and fundamentals, Prentice-Hall, 1969.

模拟计算机 [英 analog computer 法 calculateur analogique 德 Analogrechenmaschine 俄 аналоговая вычислительная машина 日 アナログ計算機] 为了进行计算，按照要计算的数学式子的关系建立一个物理系统,通过对这个物理系统作实际观测,求出计算结果,这就是**模拟计算机** (analog computer) 的原理. 由于利用的是求解的问题与某物理系统之间的模拟 (analogy), 故得此名. **计算尺** (slide rule) 就是利用了两根刻度尺结合时其长度相加的物理法则,可以说它是一种最原始的模拟计算机. 求曲线所围面积的**平面求积仪**(planimeter)、求周期函数 Fourier 展开的**调和分析仪** (harmonic analyzer)等也是模拟计算机. 广义地说,制图用的仿画仪和算图[†]也可包括在模拟计算机内. 但从 1940 年左右,现代的模拟计算机才引起人们的注意.在射击指挥方面(主要是对空),研制出了一旦输入数据立即可得计算结果的模拟计算机. 另外,V. Bush 研制出了求复杂的微分方程数值解的**微分分析仪** (differential analyzer). 当初,模拟计算机多半为机械结构,后来,发明了以电压、电流表示数值,用电阻、电容、变压器等的电路元件和电子管、晶体管等放大元件组成运算电路的电子模拟计算机. 在今天,几乎都是用这种方式制作模拟计算机.

现在使用的电子模拟计算机主要是为解微分方程的. 它是由积分器、加法器、乘法器等线性运算器和乘除法运算器以及函数发生器等非线性运算器构成的. 这些运算器用接插线自由地连接起来，经调整可解决每个特定的问题. 电子模拟计算机可以用阴极射线管、笔绘录波

器，XY 记录仪等观测、记录其计算结果．例如，解微分方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx^2=f(t)$$

的电路可用如图 1 所示的配线．

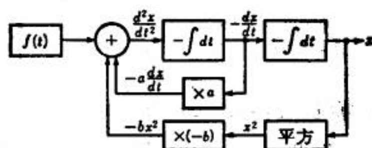


图 1　解微分方程的电路

线性运算器一般是在运算放大器中加上线性电路元件而构成的负反馈（feed back）电路．所谓运算放大器是放大倍数很高的放大器．使用运算放大器的负反馈电路的特性可以认为只是由反馈部分及其它电路元件的特性所决定的．如果对反馈部分使用电容求微分，则形成积分器；如果用电阻反馈，则成为乘法器（图 2）．若在输入处接上几个电阻，并分别接上信

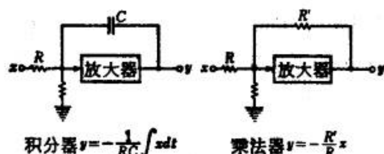


图 2　模拟计算机基本元件示例

号源，则成为加法器．高速型电子模拟计算机在一秒钟以内可得到解，并反复地在阴极射线管上显示；而低速型电子模拟计算机求解慢，且在纸上描绘曲线．另外还有直接相似型电子模拟计算机，它能形成与求解问题的物理系统直接对应的物理系统；还有函数相似型模拟计算机，它解在某种程度上简化了的问题的方程．

【模拟计算机与数字计算机】　若将模拟计算机与数字计算机相比较，则因为前者专用于计算简单的特定问题，所以优点是结构简单、价格便宜，一旦输入数据，则立即得出结果；缺点是精度差，要得到具有 10^{-3} 以上的相对精度的结果，则需要付出非常大的代价；另外，由于功能的单一性，所以能解决的问题类型是有限的．为了克服这些缺点，与数字计算机相互取长补短，人们试制了下述类型的机器：

1）**混合型计算机**（hybrid computer）．它是将数字计算机与模拟计算机组合为一个整体的机器．例如主机是模拟计算机，而使用数字计算机承担各项服务性工作，如线路转接、初始值和输入信号的产生、辅助计算、输出表格等．从而利用了数字计算机的多功能性．还有一种是主体部分采用数字计算机，而模拟计算机起辅助作用．在特殊问题中出现麻烦的地方，如用模拟计算机则可迅速算出，例如隐函数的计算等就用模拟计算机进行．这就充分发挥了模拟计算机的优点高速性能．

2）**数字微分分析仪**（digital differential analyzer 简记为 DDA）．原理上是数字型，但是它具有和机械微分分析仪相同的功能，是单功能的计算机．它有类似于模拟计算机的高速性，而且也容易得到作为数字计算机特征的高精度．从而除特别要求高速外，还完全具备模拟计算机的全部优点．另外，也适合于和数字计算机（通用型）相结合．

计算机的应用之一，是在机器的自动控制中，作为其一部分即所谓**实时计算机**（real time computer）．在这种机器中由于要求单功能、稳定性（即便产生一点误差，也不会产生故障而引起完全错误的操作），有时还要求高速度，所以多半采用模拟计算机．

另外，在一般情况下，输入数据、接收结果和利用，在这些方面，由于数字计算机速度的提高，各种模拟语言和编译程序的发展，程序设计也方便起来，所以模拟计算机的作用目前正在下降．

【参】［1］山下英男監修，電子計算機，アナログ計算機編，オーム社，1959；［2］奥野治雄-後藤以紀-竹内正治-和田弘監修，情報処理ハンドブック，光琳書院，1965；［3］G. A. Korn-T. M. Korn, Electronic analog computer, McGraw-Hill, 1956, 第二版 1961；［4］G. W. Smith-R. C. Wood, Principles of analog computation, McGraw-Hill, 1959.

十六、概　率　论

概率论 [英 theory of probability 法 calcul des probabilités 德 Wahrscheinlichkeitsrechnung 俄 теория вероятностей 日 確率論] 【历史】 **概率论**的产生，始于十七世纪 B. Pascal 与 P. de Fermat 的来往信件中讨论的有关掷骰子游戏的数学问题. 主要是排列、组合问题,同时创立了关于排列、组合、二项系数等理论.此后,概率论由于 Jakob Bernoulli, A. de Moivre, T. Bayes, G. Buffon, Daniel Bernoulli, A. M. Legendre, J. L. Lagrange 等人的工作，其内容逐渐增多,到 P. S. Laplace 时所谓古典概率论的结构已完成,“Théorie analytique des probabilités (1812)”就是他的集大成之著作. 该书中收纳了到那时为止的主要结果，而且使用了差分方程及母函数的方法. 在十九世纪之后，概率论日益广泛地被应用于自然科学甚至社会科学.

Laplace 所给出的先验概率的定义,在应用时引起了种种争论.例如, R. von Mises 基于观测大量现象的集体理论而提倡经验概率论. 然而由 A. H. Колмогоров 所开创的测度论的概率论([5]),现已被广泛采用. 这个方法不仅对论述无限随机试验序列或一般的随机过程给出了足够的逻辑基础，而且应用于统计学也很方便. 本辞典均按测度论的概率论来解说.

【概率空间】 在抽象空间†Ω 的一些子集所成的完全加法族 $\mathfrak{B}$ 上定义的集函数 P, 若满足条件: P1) $P(E)\geqslant 0$;

P2) 当 $E_n(n=1, 2,\cdots)$ 互不相交时,

$$P\left(\bigcup_n E_n\right)=\sum_n P(E_n);$$

P3) $P(\Omega)=1$,

则称 P 为 $\Omega(\mathfrak{B})$ 上的**概率测度** (probability measure) 或**概率分布** (probability distribution). 还称 Ω 为**基础空间** (basic space, space of elementary events) 或**样本空间** (sample space), $\Omega, \mathfrak{B}, P$ 构成的三元组 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 称为**概率空间**(probability space). Ω 的元素 ω 称为**样本点** (sample point) 或**基本事件** (elementary event). 有关样本点的条件 $\varepsilon(\omega)$ 称做**事件** (event), 特别是‘满足 $\varepsilon(\omega)$ 的样本点 ω 的全体’E 是 $\mathfrak{B}$ 的元素时, ε 称为**可测事件** (measurable event) 或**概率事件** (probability event). 由于成为概率论对象的事件，都是可测事件，故通常可测事件只称事件,而不一一声明是可测的. 对于事件 ε, 使其与“满足 ε 的样本点的全体” E 相对应,则除去表现的不同，可测事件与 $\mathfrak{B}$ 的元素一一对应(即事件 ε 与所有满足 ε 的样本点 ω 所成之集 E 对应), 从而也把 $\mathfrak{B}$ 的元素本身称做事件. ε 与 E 对应时, **事件 ε 发生的概率**即**事件 E 的概率** (probability of event E) 用 $\boldsymbol{P}(E)$ 或 $\mathbf{Pr}(\varepsilon)$ 表示. E 的余集 E^c 称为 E 的**余事件** (complementary event), 空集 $\varnothing$ 称为**空事件** (empty event), Ω 称为**全事件** (whole event). 对于事件的有限或无限族 $\{E_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$, 称 $\bigcup_\lambda E_\lambda$ 为 E_λ 的**和事件** (sum event), 称 $\bigcap_\lambda E_\lambda$ 为 E_λ 的**交事件** (intersection) 或**积事件** (product event). 当 $E\cap F=\varnothing$ 时, 称 E 与 F“互斥”或是**互斥事件** (exclusive events).

由 P 的定义可知,对于任一事件 E, 有

$$0\leqslant P(E)\leqslant 1,$$

且
$$P(\varnothing)=0,\ P(\Omega)=1.$$

进而,若 $\{E_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是互斥事件序

列，E 是其和事件，则下式成立：

$$P(E)=\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n).$$

称之为**概率的可加性** (additivity of probability). 当 $P(E)=1$ 时，事件 E 称为**几乎必然** (almost certain) 发生的事件或在几乎所有的 ω 上发生，或者以概率 1 发生的事件.

在有限事件序列

$$\{E_n\}(n=1,\ 2,\cdots,N)$$

中，对于任一 k 与任意的

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant N,$$

若

$$P(E_{i_1}\cap E_{i_2}\cap\cdots\cap E_{i_k})=\prod_{j=1}^{k}P(E_{i_j})$$

成立时，则称 $E_n(n=1,2,\cdots N)$ 是**互相独立的** (independent)，或称

$$\{E_n\}(n=1,\ 2,\cdots,\ N)$$

为**独立事件序列** (sequence of independent events). 对于事件的无限族 $\{E_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$，若其任意的有限子族均是独立的，则称 $E_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 相互独立，或称$\{E_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$是**独立事件族**. 将事件族的独立性一般化，$\mathfrak{B}$ 的子完全加法族的一族 $\{\mathfrak{B}_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 的独立性可按下述方法定义：由各 $\mathfrak{B}_\lambda$ 中任意取出的 E_λ 所构成的族 $\{E_\lambda\}$ $(\lambda\in\Lambda)$ 在上述意义下独立时，则称 $\{\mathfrak{B}_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 是独立的.

对于事件序列 $\{E_n\}$ $(n=1,\ 2,\cdots)$，分别称 $\limsup_n E_n$、$\liminf_n E_n$ 为**上限事件** (superior limit event)、**下限事件** (inferior limit event). 样本点 ω 属于上限事件，意味着在 ω 就有无限多个事件 E_n 发生；ω 属于下限事件，意味着在 ω 就有某 n_0 (通常与 ω 有关)，对于其后的所有 n，事件 E_n 发生. 从而 $P(\limsup_n E_n)$ 是无限多个事件 E_n 发生的概率，而 $P(\liminf_n E_n)$ 是对于某序号(通常与 ω 有关) 以后的所有的 n，事件 E_n 发生的概率. 关于它们，有下列的 **Borel-Cantelli 定理** ([1],[2],[3]): 对于事件序列 $\{E_n\}$ $(n=1,\ 2,\cdots)$，i) 不论

$$E_n(n=1,\ 2,\cdots)$$

是否相互独立，如果

$$\sum_n P(E_n)<\infty,$$

则 $P(\limsup_n E_n)=0$; ii) 如果

$$E_n(n=1,\ 2,\cdots)$$

相互独立且

$$\sum_n P(E_n)=\infty,$$

则 $P(\limsup_n E_n)=1$. 这个定理的 ii) 仅在

$$E_n(n=1,\ 2,\cdots)$$

相互独立时有效，应用上有不方便之处. 为改进这一点，且比较有效的有 Chung (钟开莱)-Erdös 定理([8]).

【随机变量】 设 $(\Omega,\ \mathfrak{B},\ P)$ 是概率空间. 在 Ω 上定义的实值函数 X 为 $\mathfrak{B}$ 可测时，即对于任一实数 a，$\{\omega|X(\omega)<a\}$ 属于 $\mathfrak{B}$ 时，则称 X 为**随机变量** (random variable). 由 n 个随机变量 $X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n$ 组成的由 Ω 到 $\boldsymbol{R}^n$ 的映射 $X=(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$ 称为 **n 维随机变量** (n-dimensional random variable) 或 **$\boldsymbol{R}^n$ 值随机变量** ($\boldsymbol{R}^n$ valued random variable). 一般来说，对于可测空间†$(S,\ \mathfrak{C})$，由 $(\Omega,\ \mathfrak{B})$ 到 $(S,\mathfrak{C})$ 的映射 X 为可测时，即对于 $\mathfrak{C}$ 的任一元素 A，

$$\{\omega|X(\omega)\in A\}$$

属于 $\mathfrak{B}$ 时，称 X 为 **$(S,\mathfrak{C})$ 值随机变量.**

当 $\mathfrak{B}^1$ 是实数空间 $\boldsymbol{R}$ 的 Borel 集†的全体，X 是随机变量时，对于 $\mathfrak{B}^1$ 的任一元素 A，令

$$\Phi(A)=P(\{\omega|X(\omega)\in A\}),$$

则 Φ 是 $(\boldsymbol{R},\mathfrak{B}^1)$ 上的概率分布，称 Φ 为**随机变量 X 的一维概率分布**或只称为 X 的 **(一维) 分布** (distribution). 对于任一实数 a，令

$$F(a)=P(\{\omega|X(\omega)\leqslant a\}),$$

则 F 是单调非减、右连续的函数，且有

$$\lim_{a\to\infty}F(a)=1,\quad \lim_{a\to-\infty}F(a)=0.$$

F 称为随机变量 X 的**累积分布函数** (cumulative distribution function) 或只称为**分布函数** (distribution function). 当 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是 n 维随机变量时，可同样地定义 X 的 **n 维概率分布**

（亦称为 **n 维分布**）及 **n 维分布函数**

$$F(a_1,\cdots,a_n)=P(\{\omega|X_1(\omega)\leqslant a_1,\cdots;X_n(\omega)\leqslant a_n\}).$$

当 $X_n(n=1,\ 2,\cdots,N)$ 分别是

$$k_n(n=1,\ 2,\cdots,\ N)$$

维随机变量时，

$$X=(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_N)$$

是

$$l=\sum_{n=1}^{N}k_n$$

维随机变量，称它是 $X_n(n=1,2,\cdots N)$ 的**联合随机变量** (joint random variable). 称 X 的 l 维分布 Φ 为 $X_n(n=1,2,\cdots,N)$ 的**联合分布** (joint distribution) 也称为**同时分布** (simultaneous distribution). 反之，称 X_n 的 k_n 维分布 Φ_n 为 l 维分布 Φ 的**边缘分布** (marginal distribution).

设 $\{X_n\}(n=1,2,\cdots,N)$ 是随机变量的有限序列. 对于任意的一维 Borel 集

$$A_n(n=1,\ 2,\cdots,N),$$

如果

(1) $P(\{\omega|X_n(\omega)\in A_n(n=1,\ 2,\cdots,\ N)\})$

$$=\prod_{n=1}^{N}P(\{\omega|X_n(\omega)\in A_n\})$$

成立，则称 $X_n(n=1,\ 2,\cdots,N)$ 是相互**独立**的，$\{X_n\}(n=1,\ 2,\cdots,N)$ 称为**独立随机变量序列**. 对于无限个随机变量的族 $\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$，若其任一有限子族是独立的，则称 $\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 是相互独立的，并称 $\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 为**独立随机变量族**. 这个关于随机变量独立性的定义与前面 $\mathfrak{B}$ 中 Borel 子集的独立性定义是相容的：即若 $\mathfrak{B}[X_\lambda]$ 表示由集合 $\{\omega|X_\lambda(\omega)\in A_\lambda\}$ 所生成的完全加法族，其中 A_λ 为任意的一维 Borel 集，则族 $\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 在后一个意义下的独立性等价于族 $\{\mathfrak{B}[X_\lambda]\}(\lambda\in\Lambda)$ 在前一个意义下的独立性. 若

$$X_n(n=1,2,\cdots,N)$$

$(X_\lambda(\lambda\in\Lambda))$ 为 $k_n(k_\lambda)$ 维随机变量，则族

$$\{X_n\}(n=1,2,\cdots,N)$$

$(\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda))$ 的独立性也类似地定义；只需取 $k_n(k_\lambda)$ 维 Borel 集 $A_n(A_\lambda)$ 代替等式 (1) 中的一维 Borel 集即可.

设 $\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 是随机变量族，使所有 X_λ 成为可测的最小完全加法族，称为由 $\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 生成的完全加法族，并记作 $\mathfrak{B}[X_\lambda|\lambda\in\Lambda]$. 这个加法族的元素称为**关于随机变量族 $\{X_\lambda\}(\lambda\in\Lambda)$ 是可测的**. 关于它有如下的定理([1], [7]). **Колмогоров 0-1 律** (Kolmogorov's zero-one law): 设 $X_n(n=1,\ 2,\cdots)$ 是相互独立的随机变量，对于任一 k 若事件 A 关于

$$X_n(n=k,\ k+1,\ \cdots)$$

是可测的，则 $P(A)$ 为 0 或者 1.

由于随机变量 X 是 $\mathfrak{B}$ 可测函数，故可考虑按 $\mathfrak{B}$ 上测度 P 的 Lebesgue 积分†. X 关于 P 可积时，

$$\boldsymbol{E}(X)=\int_\Omega X(\omega)dP$$

称为 X 的**平均、平均值** (mean) 或**期望值** (expectation)，写做 $M(X)$ 或 m_X. 如果 $(X-E(X))^2$ 是可积的，则

$$\boldsymbol{V}(X)=E((X-E(X))^2)$$

称为 X 的**方差** (variance), 也记做 $\sigma^2(X)$, 它的非负的平方根 σ, 称为 X 的**标准差** (standard deviation). 对于两个随机变量 $X,\ Y$, 如果 $E((X-E(X))(Y-E(Y)))$ 存在时，则称它为 X 与 Y 的**协方差** (covariance). 又如 X 与 Y 的方差存在时，

$$\rho(X,Y)=\frac{E((X-E(X))(Y-E(Y)))}{\{E((X-E(X))^2)E((Y-E(Y))^2)\}^{1/2}}$$

称为 X 与 Y 的**相关系数** (correlation coefficient). 对于任意的实数 $a,\ b$,

$$E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y),$$
$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

成立，特别当 X 与 Y 相互独立时，

$$E(XY)=E(X)E(Y),$$
$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

成立. 一般地有 $-1\leqslant\rho(X,Y)\leqslant 1$. 若 X 与 Y 相互独立时，则有 $\rho(X,Y)=0$, 其逆通常并不成立. 揭示方差的意义的有如下著名的定理.

Чебышев 不等式：如果随机变量 X 的方差 σ^2 存在，则对于任一正实数 c，有

$$P(|X-E(X)|\geqslant c)\leqslant \sigma^2/c^2.$$

【随机变量的收敛】 $P(\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty)=1$ 时，称 X_n **几乎必然收敛** (almost certainly convergent) 于 X_∞，或**几乎处处收敛** (almost everywhere convergent) 于 X_∞. 若对于任一正数 ε，$\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X_\infty|>\varepsilon)=0$ 成立时，则称 X_n **依概率收敛** (convergence in probability) 于 X_∞. 若对于正数 p，$\lim_{n\to\infty}E(|X_n-X_\infty|^p)=0$ 成立，则称 X_n **p 阶平均收敛** (convergence in the mean of order p) 于 X_∞. 又若

$$X_n(n=1,2,\cdots,\infty)$$

的分布分别是 Φ_n，且对于具有紧支集的任一连续函数 f，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)d\Phi_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)d\Phi_\infty(x)$$

成立时，则称 X_n **依法则收敛** (convergence in law) 于 X_∞. 它是分布的收敛，而不是随机变量的收敛(→概率分布). 几乎处处收敛与平均收敛两方，一般说来不能由其一推出另一方. 如果是几乎处处收敛或者平均收敛，则必依概率收敛，依概率收敛时则依法则收敛. 特别当

$$X_n(n=1,2,\cdots)$$

相互独立时，

$$Y_k=\sum_{n=1}^{k}X_n\ (k=1,2,\cdots)$$

的几乎处处收敛、依概率收敛、依法则收敛是等价的. 多维随机变量的收敛也可同样定义.

【条件概率】 设 $(\Omega,\mathfrak{B},P)$ 是概率空间，$\mathfrak{F}$ 是 $\mathfrak{B}$ 的子完全加法族. 如果 X 是具有有限平均值的随机变量，对于 $\mathfrak{F}$ 的任一元素 E，令

$$\mu(E)=\int_E X(\omega)dP,$$

则 μ 是关于 P 绝对连续†的 $(\Omega,\mathfrak{F})$ 上的完全可加函数，根据 Radon-Nikodym 定理†，使用适当的 $\mathfrak{F}$ 可测函数 f，可将其表示为

$$\mu(E)=\int_E f(\omega)dP.$$

除去 P 测度为 0 的集合外，f 被唯一确定. 其一写成 $\boldsymbol{E}(X|\mathfrak{F})$，称为 X 关于 $\mathfrak{F}$ 的**条件平均值**或者**条件期望值** (conditional expectation). 当 $\mathfrak{F}=\mathfrak{B}[Y]$ 时，$E(X|\mathfrak{F})$ 也记作 $E(X|Y)$，并称为 X 关于 Y 的条件平均值. 由于 $E(X|Y)$ 可用适当的 Baire 函数† f 写成

$$E(X|Y)=f(Y(\omega)),$$

故把 $f(y)$ 写成 $E(X|Y=y)$. Y 是多维随机变量时也是相同的. 由条件平均值的定义可见，除去 P 测度 0 的集合，它有如下性质：i) 若 $X\geqslant 0$，则 $E(X|\mathfrak{F})\geqslant 0$;

ii) $E(aX+bY|\mathfrak{F})$
$=aE(X|\mathfrak{F})+bE(Y|\mathfrak{F})$;

iii) $E(E(X|\mathfrak{F}))=E(X)$;

iv) X 与 $\mathfrak{F}$ 独立时，即 $\mathfrak{B}[X]$ 与 $\mathfrak{F}$ 独立时，则 $E(X|\mathfrak{F})=E(X)$; v) 若 X 是 $\mathfrak{F}$ 可测的，则

$$E(X|\mathfrak{F})=X$$

且
$$E(XY|\mathfrak{F})=XE(Y|\mathfrak{F});$$

vi) 若 $\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$ 及 $|X_n|\leqslant Y$ 且 Y 可积，则 $\lim_{n\to\infty}E(X_n|\mathfrak{F})=E(X_\infty|\mathfrak{F})$; vii) 若 $\mathfrak{G}$ 是 $\mathfrak{F}$ 的子加法族，则

$$E(E(X|\mathfrak{F})|\mathfrak{G})=E(X|\mathfrak{G});$$

viii) 若 X^2 是可积的，则对于任一 $\mathfrak{F}$ 可测函数 Y，有

$$E((X-E(X|\mathfrak{F}))^2)\leqslant E((X-Y)^2).$$

当 X 是 $\mathfrak{B}$ 的元素 E 的定义函数† χ_E 时，称 $E(\chi_E|\mathfrak{F})$ 为 E 关于 $\mathfrak{F}$ 的**条件概率** (conditional probability)，并记作 $\boldsymbol{P}(E|\mathfrak{F})$. 特别当

$$\mathfrak{F}=\{F,F^c,\varnothing,\Omega\}$$

且 $1>P(F)>0$ 时，$P(E|\mathfrak{F})$ 在 F 上是常数 $P(E\cap F)/P(F)$，在 F^c 上是常数 $P(E\cap F^c)/P(F^c)$，这些值分别记作 $P(E|F)$，$P(E|F^c)$. $P(E|Y)$，$P(E|Y=y)$ 亦可像条件平均值时那样去定义.

设 $\mathfrak{C}$ 是使 X 为可测的最小完全加法族，若 $\mathfrak{C}$ 的元素 E 与样本点 ω 的函数 $\varphi(E,\omega)$ 满足下列三条件时，称 φ 为 X 关于 $\mathfrak{F}$ 的**条件概率分布** (conditional probability distribution). 这三个条件是：i) 当 E 固定时，作为 ω 的函数，φ 与

某 $\mathfrak{F}$ 可测函数对几乎所有的 ω 是一致的；ii) 当 ω 固定时，φ 是 $\mathfrak{E}$ 上的概率分布；iii) 对于任一 E，几乎对所有的 ω 有

$$\varphi(E,\omega) = P(E|\mathfrak{F}).$$

如果 X 关于 $\mathfrak{F}$ 的条件概率分布 $\varphi(E,\omega)$ 存在时，则对几乎所有的 ω 有下式成立：

$$E(X|\mathfrak{F}) = \int_\Omega X(\omega')d\varphi(\omega',\omega),$$

其中 ω' 是积分变量．当 X 的值域是局部紧的且满足第二可数公理†的拓扑空间†时，则存在 X 的条件概率分布（[1]，[6]，[7]）．

【Bayes 定理】 设有 n 个两两互斥的事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n$，且其中之一是必然要发生的．若 E 是另外的随机事件，则有

$$P(E_i|E) = \frac{P(E_i)P(E|E_i)}{P(E_1)P(E|E_1)+\cdots+P(E_n)P(E|E_n)}.$$

其中 $P(E_i)$ 是 E_i 发生的概率，$P(E|E_i)$ 是在 E_i 发生的条件下 E 发生的条件概率．称它为 **Bayes 定理**．在实际应用中，$E_1, E_2, \cdots, E_n$ 常常是 n 个未知的假设．而用这个公式，当实际上某事件 E 已发生时，它是由于 E_i 的假设而发生的概率，可由公式右端来求．在这个意义下，称 $P(E_i)$ 为**先验概率**（a priori probability），称 $P(E_i|E)$ 为**后验概率**（a posteriori probability）．由于先验概率的值通常不能被确定，故往往没有根据地令

$$P(E_i) = \frac{1}{n},$$

为此受到种种批评．

对于具有连续的概率密度 $f(x)$ 的随机变量 X，可以证明有对应于上式的

$$f(x_0|E) = \frac{f(x_0)P(E|X=x_0)}{\int_{-\infty}^{\infty}P(E|X=x)f(x)dx}$$

成立．其中 $f(x|E)$ 是 E 已发生的情况下的 X 的概率密度，$P(E|X=x_0)$ 是条件概率．当某事件 E 的概率 p 为未知时，设独立地重复做 n 次试验而此事件发生 r 次．且设对于概率 p（视 p 为随机变量）的先验概率密度为 $f(x)$，得知 n 次中发生 r 次之后的后验概率为 $f_0(x)$ 时，则有

$$f_0(x_0) = f(x_0)x_0^r(1-x_0)^{n-r}\Big/\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}f(x)dx.$$

若假定 $f(x)=1$，则有

$$f_0(x_0) = x_0^r(1-x_0)^{n-r}\Big/\int_0^1 x^r(1-x)^{n-r}dx$$
$$= (n+1)!\,x_0^r(1-x_0)^{n-r}/r!(n-r)!.$$

若使 $\tau = r/n$ 为常数且使 n 充分大时，可以证明事件的概率 p 介于 $\tau - \lambda\sqrt{\tau(1-\tau)/n}$ 与

$$\tau + \lambda\sqrt{\tau(1-\tau)/n}$$

之间的后验概率是

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2/2}dt/\sqrt{2\pi} + O(1/\sqrt{n}).$$

这是大数定律的一个表现，由此可见无论取如何小的正数 ε，p 介于 $r/n-\varepsilon$ 与 $r/n+\varepsilon$ 之间的后验概率，当 n 充分大时可以任意逼近 1．

【参】 [1] 伊藤清，確率論，岩波，1953；[2] 丸山儀四郎，確率論，現代数学講座，共立出版，1957；[3] 河田敬義，確率論，共立出版，1948；[4] 国沢清典，近代確率論，岩波全書 1951；[5] A. N. Kolmogorov (A. H. Колмогоров), Grundbegriffe der Wahrscheinlich keitsrechnung, Springer, 1933 (中译本：A. H. 柯尔莫哥洛夫，概率论基本概念，商务印书馆，1952)；[6] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953；[7] M. Loève, Probability theory, van Nostrand, 1960 第三版 1963；[8] K. L. Chung (钟开莱)- P. Erdös, On the application of the Borel-Cantelli's lemma. Trans. Amer. Math. Soc., **72** (1952), 179—186；[9] H. Poincaré, Calcul des probabilités, Gauthier-Villars, 1912；[10] R. von Mises, Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik I. Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, Franz Deuticke, 1931；[11] H. Cramér, Random variables and probability distributions, Cambridge Univ. Press, 1937；[12] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937；[13] M. Fréchet, Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités, Gauthier-Villars, I, 1937；II, 1938；[14] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, Гостехиздат, 1954 (中译本：Б. В. 格涅坚科，概率论教程，高等教育出版社，1955)；[15] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, John Wiley, I, 第二版 1957 (中译本：W. 费勒，概率论及其应用，上册，科学出版社，1964) II, 1966；[16] J. Neveu, Mathematical foundations of the calculus of probability, Holden-Day, 1965 (英译自法文)；[17] P.-A. Meyer, Probability and potentials, Blaisdell, 1966；[18] Ю. В. Прохоров-Ю. А. Розанов, Теория вероятностей,

Наука, 1967 (英译本: Ju. V. Prohorov and Ju. A. Rozanov, Probability theory, Springer, 1969); [19] I. Todhunter, A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace, Macmillan, 1865 (Chelsea, 1949).

概率分布 [英 probability distribution 法 répartition de probabilité 德 Wahrscheinlichkeitsverteilung 俄 распределение вероятности 日 確率分布] 【概率分布的特征量】 对于概率空间 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ 上的 n 维随机变量

$$X=(X_1, \cdots, X_n),$$

在 n 维 Borel 集的全体 $\mathfrak{B}^n$ 上确定一 n 维**概率分布**

$$\Phi(E)=P(X\in E)\ , E\in\mathfrak{B}^n$$

(→概率论). 作为描述概率分布特征的量, 对于一维概率分布 Φ, 考虑 Φ 的**(平)均值**(mean)或**数学期望值**

$$m=\int_{-\infty}^{\infty} x d\Phi(x),$$

方差 (variance)

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}|x-m|^2 d\Phi(x),$$

标准差 (standard deviation) σ, **k 阶矩** (k-th moment)

$$\alpha_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k d\Phi(x),$$

k 阶绝对矩 (k-th absolute moment)

$$\beta_k=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^k d\Phi(x),$$

k 阶中心矩

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k d\Phi(x)$$

等特征量. 当 Φ 为 X 的分布时,上述的 m, σ^2 等记以 $m=E(X)$, $\sigma^2=E((X-m)^2)$. 矩和中心矩的关系,由

$$\mu_r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\alpha_{r-k}(-m)^k$$

$$(r=1, 2, \cdots)$$

所给出. 一般对于 n 维分布 Φ, 使用**平均(值)向量** (mean vector) (i 分量为

$$m_i=\int x_i d\Phi(x)$$

的 n 维向量), **协方差矩阵** (covariance matrix) ((i, j) 元素由

$$\sigma_{ij}=\int(x_i-m_i)(x_j-m_j)\,d\Phi(x)$$

给出的 n 阶方阵), **矩量矩阵** (moment matrix) ((i, j) 元素由

$$m_{ij}=\int x_i x_j d\Phi(x)$$

给出的 n 阶方阵)等等. (协方差矩阵也称为**方差矩阵** (variance matrix) 或**方差协方差矩阵** (variance-covariance matrix).)协方差矩阵, 矩量矩阵都是正定对称矩阵. 这些量不一定对一切分布都是存在的.

对于 n 维分布 Φ,定义特征函数†

$$\varphi(z)=\int_{R^n}\exp(i(z, x))d\Phi(x)\ (z\in\boldsymbol{R}^n)$$

((z, x) 表示内积). 反之,由特征函数可唯一确定概率分布 Φ (→特征函数). **矩量母函数** (moment generating function)

$$f(z)=\int_{R^n}\exp(-(z, x))d\Phi(x)\ (z\in\boldsymbol{R}^n)$$

虽非对所有 n 维分布都存在, 但对实际中有用的许多概率分布是存在的, Φ 由 $f(z)$ 唯一确定. 对于一维分布 Φ, 当

$$\beta_k<\infty(k=1, 2, \cdots)$$

时, $\log\varphi(z)$ 的 Maclaurin 展式中 $(iz)^k/k!$ 的系数记以 γ_k, 称为 Φ 的**半不变量** (semi-invariant). k 阶矩 α_k 与 γ_k 的关系由 $\gamma_1=\alpha_1$,

$$\gamma_2=\alpha_2-\alpha_1^2=\sigma^2,$$

$$\gamma_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3,$$

$$\gamma_4=\alpha_4-3\alpha_2^2-4\alpha_1\alpha_3+12\alpha_1^2\alpha_2-6\alpha_1^4, \cdots$$

给出.

对于一维分布 Φ, 由

$$F(x)=\Phi((-\infty, x])\ (-\infty<x<\infty)$$

定义的**(累积)分布函数** (cumulative distribution function) 与之一一对应. 分布函数 $F(x)$ 具有 1) 单调递增, 2)右连续, 3)

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0, \lim_{x\to\infty}F(x)=1$$

等性质. 多维情形也有同样性质.

【分布的例子】 设 Φ 为 n 维分布. 在一点 a 上具有正的 Φ 测度时,即 $\Phi(\{a\})>0$ 时, a

称为 Φ 的不连续点．不连续点的集 D 最多是可数的．当 $\Phi(D)=1$ 时，Φ 称为**离散分布**（discrete distribution）．特别当 D 为格子时，称为**格子点分布**（lattice distribution）．当 Φ 的分布函数 $F(x)$ 为连续函数时，Φ 称为**连续分布**（continuous distribution）．一般的分布，根据 Lebesgue 分解定理可将其表示为

$$\Phi = a_1\Phi_1 + a_2\Phi_2 + a_3\Phi_3,$$
$$a_1, a_2, a_3 \geqslant 0,\ a_1 + a_2 + a_3 = 1.$$

这里，Φ_1 为离散分布，Φ_2 为关于 Lebesgue 测度的**绝对连续分布**（absolutely continuous distribution），Φ_3 为奇异†的连续分布．对于绝对连续分布 Φ 可（几乎处处）决定可测函数

$$f(t) \geqslant 0(-\infty < t < \infty),$$

使得

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

成立．$f(t)$ 称为 Φ 的**概率密度**（probability density）．

作为一维格子点分布的例子，有**单位分布**（unit distribution）（$\Phi(\{0\})=1$ 的分布）；以 n，p 为参数的**二项分布**†（binomial distribution）$Bin(n,p)$：以 λ 为参数的 **Poisson 分布**†（Poisson distribution）$P(\lambda)$：以 p 为参数的**几何分布**†（geometric distribution）$G(p)$：以 N，n，p 为参数的**超几何分布**†（hypergeometric distribution）$H(N,n,p)$；以 m，q 为参数的**负二项分布**†（negative binomial distribution）$NB(m,q)$等．作为 k 维格子点分布的例子，有以 n，p 为参数的**多项分布**†（multinomial distribution）$M(n,p)$：**多维超几何分布**†（multiple hypergeometric distribution）；**负多项分布**†（negative multinomial distribution）等．

作为一维绝对连续分布，有以 μ，σ^2 为参数的**正态分布**†（normal distribution）（也称为 **Gauss 分布**（Gaussian distribution））$N(\mu,\sigma^2)$（μ 为平均值，σ^2 为方差），而 $N(0,1)$称为**标准正态分布**（standard normal distribution）；以 μ，σ 为参数的 **Cauchy 分布**（Cauchy distribution）$C(\mu,\sigma)$（μ 为中位数†）；区间 $[\alpha,\beta]$ 上的**均匀分布**（uniform distribution）$U(\alpha,\beta)$；以 σ 为参数的**指数分布**（exponential distribution）$e(\sigma)$；其它有 **Γ 分布**†（gamma distribution）$\Gamma(P,\sigma)$；χ^2 分布† $\chi^2(n)$；**β 分布**†（beta distribution）$\beta(p,q)$；F 分布† $F(m,n)$；z 分布† $z(m,n)$；t 分布† $t(n)$ 等．最后作为 k 维绝对连续分布有 **k 维正态分布**†（k-dimentional normal distribution）$N(\mu,\Sigma)$（$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_k)$ 为平均向量，$\Sigma=(\sigma_{ij})$ 为协方差矩阵）；**Dirichlet 分布**†（Dirichlet distribution）等．关于他们的分布函数，概率密度，特征函数等，→公式 22．

【卷积】 对于 n 维分布 Φ_1，Φ_2，由

$$\Phi(E) = \int_{R^n} \chi_E(x+y)\,d\Phi_1(x)\,d\Phi_2(y)$$

定义的 n 维分布 Φ 称为 Φ_1 与 Φ_2 的**卷积**（convolution）并以 $\Phi_1 * \Phi_2$ 表示．其中 χ_E 为 E 的定义函数†．当相互独立的 n 维随机变量 X_1，X_2 的分布分别为 Φ_1，Φ_2 时，X_1+X_2 的分布为 $\Phi_1 * \Phi_2$．Φ_1，Φ_2 的分布函数为 F_1，F_2 时，$\Phi_1 * \Phi_2$ 的分布函数 $F_1 * F_2$ 由

$$F_1 * F_2(x) = \int_{R^n} F_1(x-y)dF_2(y)$$

给出．Φ_1，Φ_2 中之一，例如 Φ_1，是具有密度 $f_1(x)$ 的分布时，$\Phi_1 * \Phi_2$ 也具有密度 $f(x)$，并由

$$f(x) = \int_{R^n} f_1(x-y)\,dF_2(y)$$

给出．二分布之卷积的特征函数 $\varphi(z)$，是分布 Φ_i 的特征函数 $\varphi_i(z)$（$i=1,2$）之积：

$$\varphi(z) = \varphi_1(z)\varphi_2(z).$$

从而卷积的半不变量按阶分别是各个半不变量之和．对于具有参数 α，β，$\cdots$ 的分布 $\Phi(\alpha,\beta,\cdots)$，如果 $\Phi(\alpha_1,\beta_1,\cdots)*\Phi(\alpha_2,\beta_2,\cdots)=\Phi(\alpha_3,\beta_3,\cdots)$，则称此分布具有**再生性**（reproducing property）．对于上述诸分布，有如下的再生性成立：在格子点分布情形有

$$P(\lambda_1)*P(\lambda_2) = P(\lambda_1+\lambda_2),$$
$$Bin(n_1,P)*Bin(n_2,P) = Bin(n_1+n_2,P),$$
$$NB(m_1,q)*NB(m_2,q) = NB(m_1+m_2,q),$$

在绝对连续分布情形有

$$N(\mu_1,\sigma_1^2)*N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

$$= N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2),$$

$$\Gamma(p_1, \sigma) * \Gamma(p_2, \sigma) = \Gamma(p_1 + p_2, \sigma),$$

$$C(\mu_1, \sigma_1) * C(\mu_2, \sigma_2) = C(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$$

等.

对于一维分布函数 $F(x)$,

$$Q_F(l) = \max_{-\infty < x < \infty} (F(x + l) - F(x - l)), \quad l > 0$$

称为**最大集中函数**(maximal concentration function) (P. Lévy[14]). 因其满足

$$Q_{F_1 * F_2}(l) \leqslant Q_{F_j}(l),$$

故对独立随机变量和的研究是有用的. 出于同样的目的, 也使用**平均集中函数** (mean concentration function)

$$C_F(l) = \frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{\infty}(F(x + l) - F(x - l))^2 dx$$

(河田竜夫[10]).

平均值为 m, 方差为 v 的一维正态分布用 $N(m, v)$ 表示, 平均值为 λ 的 Poisson 分布作 a 的平行移动用 $P(\lambda, a)$ 表示. 如存在一维分布 $\Phi_k, \Psi_k (k = 1, 2)$, 使

$$N(m, v) = \Phi_1 * \Phi_2, \ P(\lambda, a) = \Psi_1 * \Psi_2$$

成立, 则有 $m_k, v_k, \lambda_k, a_k (k = 1, 2)$ 存在, 使得 $\Phi_k = N(m_k, v_k)$,

$$\Psi_k = P(\lambda_k, a_k) \ (k = 1, 2).$$

这些分别称为 H. Cramér 定理和 Д. A. Райков 定理. 还有更一般的 Ю. В. Линник 的结果. 这就是当一般分布族 $\mathfrak{L} = \{\Phi\}$ 对卷积$*$封闭时, 在什么情形下, 上述定理才能成立的问题 (分解问题). 在这一问题的研究中, 将特征函数作为解析函数来考察特别重要 (Линник [15]).

【无穷可分分布】 设 Φ 为 n 维概率分布, 对任意正整数 k 存在概率分布 Φ_k, 使得

$$\Phi = \Phi_k * \Phi_k * \cdots * \Phi_k (= \Phi_k^{*k})$$

时, 称 Φ 为**无穷可分分布** (infinitely divisible distribution). 正态分布, Poisson 分布都是无穷可分分布. 对于 n 维随机变量 X 的分布, 上述定义等价于对任意给定的正整数 k 总存在相互独立且同分布的 k 个随机变量 $X_{k1}, X_{k2}, \cdots, X_{kk}$ 使能表示成

$$X = X_{k1} + X_{k2} + \cdots + X_{kk}$$

(如果必要, 可扩充基本概率空间). 对于 n 维分布 Φ, 当

$$\int_{|x| > \varepsilon} \Phi(dx) < \varepsilon$$

时, 记以 $\Phi \in v(\varepsilon)$, 则 Φ 为无穷可分分布还等价于对任意的 $\varepsilon > 0$ 有

$$\Phi = \Phi_1 * \Phi_2 * \cdots * \Phi_k \quad (\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k \in v(\varepsilon)).$$

无穷可分分布由其特征函数的**标准型** (canonical form) 所表征. 一维无穷可分分布的特征函数具有标准型:

(1) $\varphi(z) =$

$$\exp\left(i\gamma z + \int_{-\infty}^{\infty} A(u, z) \frac{1 + u^2}{u^2} dG(u)\right).$$

这里 γ 为常数, $G(u)$ 为有界的非减函数且 $G(-\infty) = 0$, 又

$$A(u, z) = \exp(iuz) - 1 - izu/(1 + u^2)$$

且在 $u = 0$ 处 $A(u, z)(1 + u^2)/u^2$ 的值为 $-z^2/2$. (1) 称为 **Lévy-Хинчин 的标准型**. 对于 n 维无穷可分分布, 特征函数的标准型为

(2) $$\varphi(z) = \exp\Big(i(m, z) + \sum_{p,q=1}^{n} c_{pq} z_p z_q + \int_{\boldsymbol{R}^n}\Big(e^{i(z,x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1 + |x|^2}\Big) n(dx)\Big),$$

$$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \boldsymbol{R}^n.$$

这里, $m \in \boldsymbol{R}^n$, (c_{pq}) 为半正定矩阵, $n(dx)$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 上的测度且满足 $n(\{0\}) = 0$, 以及

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \frac{|x|^2}{1 + |x|^2} n(dx) < \infty.$$

(2)称为 **Lévy 的标准型**. 一维无穷可分分布 P, 特别当满足

$$\int_{\boldsymbol{R}^1} x^2 dP(x) < \infty$$

时, 其特征函数可表示为

(3) $$\varphi(z) = \exp\Big(imz + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu} - 1 - izu)\frac{1}{u^2} dK(u)\Big).$$

这里m为实常数，$K(u)$ 为使 $K(-\infty)=0$ 的有界非减函数. 这称为 **Колмогоров 的标准型**. 与此相关，最近还确定了在齐性空间上关于某个群不变的分布的特征函数的一般形式([3]) (→可加过程).

对二n维分布 Φ, Ψ, 如有某一正数 λ 使得

1) $$\Psi(E)=\Phi(\lambda E)$$
$$(\lambda E=\{\lambda\xi \mid \xi\in E\})$$

对每个集E成立，则称Φ与Ψ等价. Φ 与Ψ的分布函数，特征函数分别以 F, G和 φ, ψ 表示时，1) 与 1′) $G(x)=F(\lambda x)$;

1″) $\psi(\lambda z)=\varphi(z)$

中每个都是等价的. 与分布Φ等价的任意两个分布 Φ_1, Φ_2 的卷积 $\Phi_1*\Phi_2$ 仍与Φ等价时, Φ 称为**稳定分布** (stable distribution). 如Φ是稳定的,则与Φ等价的分布也是稳定的. 如使用特征函数 $\varphi(z)$, 则可如下表征. 这就是,对任意的 λ_1, $\lambda_2>0$, 有适当的

$$\lambda=\lambda(\lambda_1,\lambda_2)>0,$$

使得 2) $\varphi(\lambda z)=\varphi(\lambda_1 z)\varphi(\lambda_2 z)$ 成立. 这个定义也可如下叙述: 所谓稳定分布 Φ,即对于服从Φ的独立随机变量 X_1, X_2 和任意的正数 λ_1, λ_2, 总存在适当的正数 λ, 使得

$$(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2)/\lambda$$

的分布与Φ相同. 由 2), 稳定分布也是无穷可分分布. 令 $\varphi(z)=\exp\psi(z)$, 条件 2) 可改写为 $\psi(\lambda z)=\psi(\lambda_1 z)+\psi(\lambda_2 z)$, 并且这隐含着

$$\psi(z)=(-c_0+i(z/|z|)c_1)|z|^\alpha$$
$$(c_0\geqslant 0,\ -\infty<c_1<\infty,\ 0<\alpha\leqslant 2).$$

α 称为稳定分布的**指数** (exponent, index). 当 $\alpha=2$ 时 Φ 为正态分布, 当 $\alpha=1$ 时 Φ 为 Cauchy 分布. 在对称的稳定分布时,

$$\psi(z)=-c_0|z|^\alpha.$$

关于指数为 1/2 的稳定分布,→公式 22.

稳定分布的一种推广是**拟稳定分布** (quasi-stable distribution). Б. В. Гнеденко-А. Н. Колмогоров ([5]) 简单地称其为稳定分布. 设Φ的分布函数为 F, 如对任意的正数 λ_1, λ_2 和任意的实数 b_1, b_2, 有某正数 λ 和某实数 b 与之对应,使得

$$F((x-\lambda_1)/b_1)*F((x-\lambda_2)/b_2)$$
$$=F((x-\lambda)/b)$$

成立,则称F为拟稳定的. 设 $\{X_i\}$ 为服从同一分布Φ的独立随机变量序列, 如能找到适当的实数 A_n, B_n 使

$$\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\Big/B_n-A_n$$

依法则收敛时,则分布Φ为拟稳定分布(Lévy). 拟稳定分布的充分必要条件,用特征函数 $\varphi(z)$ 可写成

$$\varphi(b_1z)\varphi(b_2z)=\varphi(bz)e^{i\gamma z}$$
$$(\gamma=\lambda-\lambda_1-\lambda_2).$$

它的特征函数的一般形式由

$$\varphi(z)=\exp\psi(z),$$
$$\psi(z)=imz-c|z|^\alpha(1+i\beta(z/|z|)\omega(z,\alpha))$$

所给出. 其中m为实数, $c\geqslant 0$, $0<\alpha\leqslant 2$, $|\beta|\leqslant 1$, 而当 $\alpha\neq 1$ 时 $\omega(z,\alpha)=\tan(\pi\alpha/2)$, 当 $\alpha=1$ 时 $\omega(z,\alpha)=(2/\pi)\log|z|$. 拟稳定分布, 在 $\alpha\neq 1$ 时只不过是稳定分布的平行移动,但在 $\alpha=1$ 时不是.

稳定分布的另一种推广是**半稳定分布** (semistable distribution). 这就是对于特征函数

$$\varphi(z)=\exp\psi(z),$$

$\psi(z)$ 至少关于某正数 $q(\neq 0,\ 1)$ 满足

$$\psi(qz)=q^\alpha\psi(z)$$

的分布,这种情形的一般形式也是知道的(Lévy [14]).

【分布的形状】 对于一维分布函数 $F(x)$, 使 $F(\zeta_p)=p$ $(0<p<1)$ 的点ζ_p称为F的 **p 分位数** (quantile of order p). 对应 $p=1/2$, $\zeta_{1/2}$ 称为**中值** (mid-value) 或**中位数** (median). 满足

$$1-F(m+x)=F(m-x)$$

(m 为平均值) 的分布函数 $F(x)$ 称为**一维对称分布函数** (symmetric distribution function). 对于一维对称分布函数, 所有奇数阶中心矩如存在即为 0. $\gamma_1=\mu_3/\sigma^3$ 用来度量分布的非对称性, 并称为**偏斜系数** (coefficient of skew-

ness). 进一步，称 $\gamma_2=\mu_4/\sigma^4-3$ 为**超出系数**(coefficient of excess)，它表示分布函数在平均值附近的尖锐程度. 对于正态分布有

$$\gamma_1=\gamma_2=0,$$

故当 $\gamma_2\neq 0$ 时表示分布函数与正态分布间的差异.

对于一维分布 Φ，设其分布函数为 $F(x)$，如存在某一常数 a，使当 $x<a$ 时 $F(x)$ 为下凸，当 $x>a$ 时为上凸时，则称 $F(x)$ 为**单峰的** (unimodal). 所有一维稳定分布都是单峰的.

【分布的收敛】 在概率论的极限定理及其它部分中，分布的收敛概念是重要的. 关于拓扑空间 Ω 上的概率分布的**收敛** (convergence)，是考虑按 Ω 上概率测度空间的弱拓扑(→Banach 空间) 的收敛. 这一收敛在概率论中称为**依法则收敛** (convergence in law). 例如 n 维分布 $\Phi_k(k=1,2,\cdots)$ 向 Φ 的弱收敛，等价于以下各个条件. 1) 对每个有紧支集的连续函数 f,

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)\,d\Phi_k(x)=\int_{\boldsymbol{R}^n}f(x)d\Phi(x)$$

成立; 2) 在 Φ 的分布函数 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 的任意连续点，

$$\lim_{k\to\infty}F_k(x_1,\cdots,x_n)=F(x_1,\cdots,x_n)$$

(F_k 为 Φ_k 的分布函数); 3) 对 Φ 的任意连续集 E (即 $\Phi(\bar{E}-E^0)=0$),

$$\lim_{k\to\infty}\Phi_k(E)=\Phi(E);$$

4) 对任意开集 $G\subset\boldsymbol{R}^n$,

$$\liminf_{k\to\infty}\Phi_k(G)\geqslant\Phi(G);$$

5) 对一切闭集 $F\subset\boldsymbol{R}^n$,

$$\limsup_{k\to\infty}\Phi_k(F)\leqslant\Phi(F);$$

6) $$\lim_{k\to\infty}\rho(\Phi_k,\Phi)=0,$$

这里 ρ 为如下给定的距离: 设 Φ_1, Φ_2 为任意的 n 维分布，取

$$\varepsilon_{i,j}=\inf_{F\subset\boldsymbol{R}^n}\{\varepsilon\,|\,\Phi_j(F)<\Phi_i(F^\varepsilon),\ F \text{ 为闭集}\}$$

$(i\neq j;\ i,j=1,2)$ (F^ε 为 F 的 ε 邻域)，定义 $\rho(\Phi_1,\Phi_2)=\min(\varepsilon_{1,2},\ \varepsilon_{2,1})$. ρ 称为 **Lévy 距离** (Lévy's distance) ([19])，一维情形由 Lévy 所引进 [14]，度量空间情形由 Ю. В. Прохоров 所引进 [18]. 这些条件，除 2) 以外，关于任意完备可分度量空间上的概率分布也都与弱收敛等价.

概率分布的收敛，可用特征量来判定. 分布 Φ_k, Φ 的特征函数用 $\varphi_k(z)$, $\varphi(z)$ 表示时，为使 Φ_k 向 Φ 弱收敛的充分必要条件为在每个点 z 有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(z)=\varphi(z).$$

当一维分布 Φ_k, Φ 的矩存在，

$$\beta_j=\int_{-\infty}^{\infty}|x|^j d\Phi(x)<\infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\beta_j^{-1/j}=\infty$$

时，如果

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^j d\Phi_k(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^j d\Phi(x)$$
$$(j=0,1,2,\cdots),$$

则 Φ_k 弱收敛于 Φ. 这是充分条件，但非必要条件.

n 维分布族 $\Phi_\alpha(\alpha\in A)$ 称为**紧密的** (tight)，如果对任意的 $\varepsilon>0$ 存在紧集 $K=K(\varepsilon)$，使对一切 $\alpha\in A$ 有 $\Phi_\alpha(K^c)<\varepsilon$. 此条件与 $\{\Phi_\alpha\}$ $(\alpha\in A)$ 关于 Lévy 距离全有界是等价的.

【扩张定理】 给定从概率空间 $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 到可测空间 $(X,\mathfrak{B})$ 的可测映射族 (随机变量族) $\xi_t(\omega)$ $(t\in T)$ (T 为任意的参数集). 对于任意的 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，令

$$P(\xi_{t_1}(\omega)\in E_1,\cdots,$$
$$\xi_{t_n}(\omega)\in E_n)=\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E_1,E_2,\cdots,E_n)$$
$$(E_i\in\mathfrak{B})(i=1,2,\cdots,n),$$

则函数族 $\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E_1,E_2\cdots,E_n)$ 满足以下诸条件. 1) 由

$$\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E_1\times E_2\times\cdots\times E_n)$$
$$=\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E_1,E_2,\cdots,E_n)$$

可导出乘积可测空间 $(X\times X\times\cdots\times X,\mathfrak{B}^n)$ 上的概率测度 $\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(\cdot)$; 2)对于$(1,2,\cdots,n)$ 的任意的排列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$，有

$$\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E_1, E_2, \cdots, E_n) = \Phi_{t_{i_1},t_{i_2},\cdots,t_{i_n}}(E_{i_1},E_{i_2},\cdots,E_{i_n});$$

3) $\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_{n-1},t_n}(E_1, E_2, \cdots, E_{n-1}, X) = \Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}}(E_1, E_2, \cdots, E_{n-1})(n > 1)$.

2), 3) 称为**相容条件** (consistency condition).

反之，便产生下列问题：当给定满足 1), 2), 3) 的函数族 $\{\Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E_1, E_2, \cdots E_n)\}$ $(t_1, t_2, \cdots, t_n \in T, E_i \in \mathfrak{B}(i = 1, 2, \cdots, n))$ 时，在乘积可测空间

$(X^T, \mathfrak{B}^T)$ $(X^T = \{x | x_t \in X, t \in T\}$, $\mathfrak{B}^T$ 为由 $\{x_t \in E | E \in \mathfrak{B}, t \in T\}$ 产生的完全加法族)上，能否定义**概率测度** P, 使得

$$P(x(t_1) \in E_1, x(t_2) \in E_2, \cdots, x(t_n) \in E_n) = \Phi_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(E_1, E_2, \cdots, E_n)?$$

这称为 Колмогоров 问题([12]). 在 $X = \boldsymbol{R}^1$ 时 Колмогоров 证明了这是可能的. 一般地，当 X 为局部紧 Hausdorff 空间并且为可数个紧集之和时上述命题是正确的. 这个 **Колмогоров 的扩张定理** (Kolmogorov's extention theorem) 有种种的变形 (S.Bochner ([1]), E. Nelson ([17])), 它们被用于随机过程的构成(→随机过程).

【参】 [1] S. Bochner, Harmonic analysis and the theory of probability, Univ. of California Press, 1955; [2] H. Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本：哈雷德·克拉美，统计学数学方法，高等教育出版社，1960); [3] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [4] И. М. Гельфанд-Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа, оснащеанные Гильбертовы пространства, Физматгиз; [5] Б. В. Гнеденко- А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949 (中译本：Б. В. 哥涅坚科，А. Н. 廓洛莫格若夫，相互独立随机变数之和的极限分布，科学出版社，1955); [6] 伊藤清，確率論の基礎，岩波，1944; [7] 伊藤清，確率論，岩波，1953; [8] 伊藤清，確率過程，岩波講座現代応用数学，1957 (中译本：伊藤清，随机过程，上海科学技术出版社，1961); [9] M. Kac, Probability and related topics in physical sciences, Interscience, 1959; [10] 河田竜夫，フーリエ解析と確率論，中文館，，1947; [11] 河田敬義，確率論，共立出版，1953; [12] A. N. Kolmogorov (А. Н. Колмогоров), Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, 1933 (中译本：А. Н. 柯尔莫哥洛夫，概率论基本概念，商务印书馆，1952); [13] 国沢清典，確率論における極限定理，中文館，1950; [14] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937; [15] Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Ленинград, 1960; [16] M. Loève, Probability theory, van Nostrand, 第二版 1960; [17] E. Nelson, Regular Probability measures on function space, Ann. of Math., 69 (1959), 630—643; [18] Ju. V. Prohorov (Ю. В. Прохоров), The method of characteristic functionals, Proc. of 4th Berkeley Symp. on Math.Stat. and Prob., II, 1961, 403—419; [19] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее применение, 1 (1956), 177—238.

特征函数 [英 characteristic function 法 fonction caractéristique 德 charakteristische Funktion 俄 характеристическая функция 日 特性関数] 将 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 Borel 集的全体所构成的完全加法族记以 $\mathfrak{B}^n$, 并考虑可测空间†$(\boldsymbol{R}^n, \mathfrak{B}^n)$上的概率测度† P. 称测度 P 的 Fourier 变换 $\varphi(z)$ 即

$$(1) \qquad \varphi(z) = \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{i(z,x)} dP(x), \quad z \in \boldsymbol{R}^n,$$

为概率分布 P 的**特征函数**. 这里 $(z, x)(z, x \in \boldsymbol{R}^n)$ 表示 $\boldsymbol{R}^n$ 中的内积. 又将定义于某概率空间† $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ 上取值于 $\boldsymbol{R}^n$ 的随机变量 X 的分布的特征函数，简单地称为随机变量 X 的**特征函数**(→概率论，概率分布).

关于概率分布与特征函数间的关系，有以下基本性质. i) n 维概率分布 P 与其特征函数按照 (1) 的对应是一对一的. ii) 对于任意的 $a_p, b_p \in \boldsymbol{R}$, $a_p < b_p$ $(p = 1, 2, \cdots, n)$,

$$(2) \qquad \int_{\boldsymbol{R}^n} \prod_{p=1}^{n} f(x_p; a_p, b_p) dP(x)$$

$$= \lim_{c\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-c}^{c} \cdots \int_{-c}^{c} \prod_{p=1}^{n} \frac{e^{-ib_p z_p} - e^{-ia_p z_p}}{-iz_p} \times \varphi(z_1, \cdots, z_p) dz_1 \cdots dz_n,$$

这里 $f(x; a, b)$ 为闭区间 $[a, b]$ 的示性函数，但在 $x = a, b$ 处修正其值为1/2. 再将 $x \in \boldsymbol{R}^n$ 的坐标记以 $(x_1, \cdots, x_n)$. 如果 $\boldsymbol{R}^n$ 的区间 $I = [a_1, \cdots, a_n; b_1, \cdots, b_n]$ 关于概率分布 P 连续，即 I 的边界的 P 测度为 0, 则 (2) 的左端与 $P(I)$ 一致. 一般称关系式 (2) 为关于特征函数的**反演公式** (inversion formula).

不仅 $\boldsymbol{R}^n$, 在一般 $\boldsymbol{R}^T$ (T 为任意的集)的情形，也可按下述方式来考虑. 设 $\boldsymbol{R}_0^T$ 为支集是 T 的有限子集的元 $x \in \boldsymbol{R}^T$ 的全体. 这时，如 P 为 $\boldsymbol{R}^T$ 上的概率分布，则可定义

$$\varphi(z)=\int_{R^T}e^{i(z,x)}dP(x),\ z\in R_0^T,$$

称为 R^T 上测度 P 的**特征（泛）函数**（characteristic functional）. 再考虑可数 Hilbert 核型空间† Φ 的共轭空间 Φ'，关于由其中柱集†产生的完全加法族 $\mathfrak{B}(\Phi')$ 上的测度 P，称

(3) $$\varphi(\xi)=\int_{\Phi'}e^{i(X,\xi)}dP(X),\ \xi\in\Phi$$

为 P 的**特征泛函**（characteristic functional）(→[2], [10]).

n 维概率分布 P 的特征函数 φ 具有以下性质. i) 对于任意的 $z^{(1)},\cdots,z^{(p)}\in R^n$ 和任意的复数 $a_1,\cdots,a_p$，有

$$\sum_{j,k=1}^{p}\varphi(z^{(j)}-z^{(k)})a_j\bar{a}_k\geqslant 0;$$

ii) $z^{(k)}\to 0$ 时 $\varphi(z^{(k)})\to\varphi(0)$; iii) $\varphi(0)=1$. 反之对于满足上述 i), ii), iii) 的 R^n 上的函数，即满足 iii) 的正定函数† $\varphi(z)$，存在 n 维概率分布 P，能将 φ 表示为 (1) 的形式 (Bochner 定理†) (→调和分析). 同样的事实，对正定序列†的情形也是成立的 (Herglotz 定理†). 又如令 Φ 为可数 Hilbert 核型空间，则有以下事实. 当 φ 满足 i′) 对于任意的 $\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(p)}\in\Phi$ 和任意的复数 $a_1,\cdots,a_p$，

$$\sum_{j,k=1}^{p}\varphi(\xi^{(j)}-\xi^{(k)})a_j\bar{a}_k\geqslant 0;$$

ii′) 如在 Φ 中 $\xi^{(j)}\to 0$，则 $\varphi(\xi^{(j)})\to\varphi(0)$; iii′) 当 $\varphi(0)=1$ 时，存在 $\mathfrak{B}(\Phi')$ 上的概率分布 P，能将 φ 表示为 (3) 的形式 ([2]). 此外，还知道一些判断函数成为特征函数的条件 ([9]).

在具体指定分布时，给出其特征函数的形状常常是方便的. 关于一些典型的分布，→公式 22.

【分布的收敛】 因概率分布收敛的条件可用特征函数表达，故特征函数在极限定理中起重要作用. 如果 n 维概率分布序列 $\{P_k\}$ 收敛于某个 n 维概率分布 P，则 P_k 的特征函数 φ_k 在每个有限 n 维区间上一致收敛于 P 的特征函数 φ. 反之若 n 维概率分布 P_k 的特征函数 φ_k 收敛于 n 维概率分布 P 的特征函数 φ，则 P_k 收敛于 P. 又若 n 维概率分布 P_k 的特征函数 φ_k 在各点上收敛，并且这一收敛在 $z=0$ 的某邻域内是一致的，则极限函数 φ 是某 n 维概率分布 P 的特征函数，且 P_k 收敛于 P([4], [8]). 这称为 **Lévy 的连续性定理**（Lévy's continuity theorem）. 进一步在可数 Hilbert 核型空间等无穷维空间的情形下，研究了概率分布集 $\{P_\alpha|\alpha\in A\}$ 的紧密†性的问题，对与此有关的事实作为特征泛函的性质来叙述，详见 [5], [10], [12] 等(→概率分布).

在特征函数中考虑的是 Fourier 变换，对于集中在正半直线上的分布，考虑用 Laplace 变换是比较方便的. 另外，对于集中在 0 和正整数上的分布，也有使用母函数†（**概率母函数**（probability generating function））的([1]). 此外还可使用矩量母函数†. 关于这些函数与概率分布的关系，以及收敛性间的关连，已有许多的研究 ([1], [11], [13]).

【参】 [1] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications I, John Wiley, 第二版, 1957, II, 1971; [2] И.М. Гельфанд- Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа, оснащенные гильбертовы пространства, Физматгиз, 1961; [3] Б. В. Гнеденко- А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949 (中译本: Б. В. 哥涅坚科, А. Н. 郭洛莫格若夫, 相互独立随机变数之和的极限分布, 科学出版社, 1955); [4] 伊藤清, 確率論, 岩波, 1953; [5] L. LeCam, Convergence in distribution of stochastic processes, Univ. Calif. Publ. Statist., **2** (1957), 207—236; [6] M. Loève, Probability theory, van Nostrand, 1962, 第三版, 1963; [7] L. H. Loomis, An introduction to abstract harmonic analysis, van Nostrand, 1953; [8] P. Lévy, Calcul des probabilitiés, Gauthier-Villars, 1925; [9] E. Lukacs, Characteristic functions, Hafner, 1960; [10] Ju. V. Prohorov (Ю. В. Прохоров), The method of characteristic functionals, Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. andProb., Univ. of California, II (1961), 403—419; [11] J. A. Shohat-J. D. Tamarkin, The problem of moments, Amer. Math. Soc. Math. Surveys. 1943; [12] V. S. Vara-darajan, Weak convergence of measures on separable metric space, Sankhyā, **19** (1958), 15—22; [13] D. V. Widder, Laplace transform, Princeton Univ. Press, 1946; [14] B. Ramachadran, Advanced theory of chara-cteristic functions, Statistical Publishing Society, Calcutta, 1967.

极限定理 [英 limit theorem 法 théorème de limite 德 Limessatz 俄 предельные теоремы 日 極限定理] 关于随机变量列依法则收敛†，依概率收敛†以及几乎必然收敛†的定理，总称为概率论中的**极限定理**。对于随机变量列，当其分布序列收敛于分布F(→概率分布)时，称F为此随机变量序列的**极限分布**(limit distribution)。

【独立随机变量和的分布收敛】 所谓随机变量序列$\{X_{nk}\}(1 \leqslant k \leqslant k_n, n \geqslant 1)(k_n \to \infty)$是**无穷小** (infinitesimal)，是指对一切$\varepsilon > 0$有

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant k_n} P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \to 0 \ (n \to \infty).$$

$X_{n1}, \cdots, X_{nk_n}$ 对于每个n相互独立†，并且

$$\{X_{nk}\} \ (1 \leqslant k \leqslant k_n, \ n \geqslant 1)$$

为无穷小时，和 $S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nk_n} - A_n$ (A_n为适当的常数) 的极限分布的全体与无穷可分分布†(→概率分布)类(class)一致。如果取无穷可分分布F的特征函数f的 Lévy 标准型†

$$\log f(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^{0-}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)dM(x) + \int_{0+}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)dN(x),$$

并设 X_{nk} 的分布函数为 $F_{nk}(x)$，则上述和 S_n 的分布收敛于F的充分必要条件是 i)在$M(x)$，$N(x)$ 的连续点x，当 $n \to \infty$ 时，

$$\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \to M(x)(x < 0),$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} (F_{nk}(x) - 1) \to N(x)(x > 0);$$

ii)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k_n}\left(\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{k_n}\left(\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x)\right)^2\right) = \sigma^2$$

成立。

根据极限分布F的特殊选取，可以得到种种极限定理。

1) **中心极限定理** (central limit theorem)。这是极限分布为正态分布†的情形。 为使独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 的和

$S_n = B_n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n) - A_n (B_n \to \infty)$

的分布收敛于标准正态分布† $N(0, 1)$，并且$\{B_n^{-1}X_k\}$ $(1 \leqslant k \leqslant n, \ n \geqslant 1)$ 为无穷小的充分必要条件，是对一切的 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon B_n} dF_k(x) = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{|x|<\varepsilon B_n} x^2 dF_k(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon B_n} x dF_k(x)\right)^2\right) = 1$$

($F_k(x)$ 为 X_k 的分布函数)。 当各 X_n 的方差†有限时，如取

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} V(X_k),$$

$$A_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$$

($V(X)$，$E(X)$ 分别表示X的方差，平均值)，则上述条件变成为 **Lindeberg 条件** (Lindeberg's condition)：对一切 $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} B_n^{-2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x + E(X_k)) = 0.$$

特别当 X_n 服从方差有限的同一分布时，这一条件自动满足，从而中心极限定理成立。对于 Bernoulli 试验序列的情形，这便成为 C. F. Gauss, P. S. Laplace 所得到的古典结果。其次，当 X_n 具有有限的 $2+\delta$ 阶绝对矩†

$$m_{2+\delta}^{(n)} = E(|X_n|^{2+\delta})$$

并且 $E(X_n) = 0$ 时，如果 **Ляпунов 条件** (Ljapunov's condition)：

$$B_n^{-(2+\delta)} \sum_{k=1}^{n} m_{2+\delta}^{(k)} \to 0 (n \to \infty)$$

成立，则满足 Lindeberg 条件.

2) **小数定律** (law of small numbers). 为使无穷小的独立随机变量的和

$$S_n = X_{n1} + \cdots + X_{nk_n}$$

的分布收敛于平均值为 λ 的 Poisson 分布† 的充分必要条件，是对一切的 $0<\varepsilon<1$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_\varepsilon} dF_{nk}(x) = 0,$$

$$R_\varepsilon = \{x \mid |x-1| \geqslant \varepsilon,\ |x| \geqslant \varepsilon\};$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{nk}(x) = \lambda;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x) = 0;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x)\right)^2\right) = 0.$$

作为特殊情形，它包含以下古典的小数定律. 在 n 次独立试验中，如果各次的成功概率为 p_n 且 $nP_n = \lambda$ (固定)，则成功次数 S_n 的分布在 $n\to\infty$时收敛于平均值为 λ 的 Poisson 分布.

3) **大数定律** (law of large numbers). 如极限分布取为单位分布†，则得到大数定律. 对于独立随机变量序列 $\{X_n\}$，如

$$E(X_n) = a_n$$

(有限)，分布函数为 $F_n(x)$，则为使

$$n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - a_k)$$

依概率收敛到 0 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>n} dF_k(x+a_k) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<n} x\,dF_k(x+a_k) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{|x|<n} x^2 dF_k(x+a_k) - \left(\int_{|x|<n} x\,dF_k(x+a_k)\right)^2\right) = 0.$$

特别，这包括 i) 各个 X_n 具有有限方差 $V(X_n)$ 且

$$n^{-2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) \to 0$$

的情形; ii) 所有 X_n 服从同分布且具有有限平均值的情形.

4) 向拟稳定分布†的收敛. 具有同分布的独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 的和

$$S_n = B_n^{-1}(X_1 + \cdots + X_n) - A_n$$

(A_n, B_n 为适当的常数)

的极限分布之全体，构成拟稳定分布(→概率分布)族. 如设 X_1 的分布函数为 $G(x)$，则为使极限分布为正态分布的充分必要条件是

$$\lim_{K\to\infty} K^2 \int_{|x|>K} dG(x) \Big/ \int_{|x|<K} x^2 dG(x) = 0.$$

为使极限分布是指数为 $\alpha(0<\alpha<2)$ 的拟稳定分布的充分必要条件是

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(-x)}{1-G(x)} = \frac{c_1}{c_2},$$

$$c_1 + c_2 > 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-G(x)+G(-x)}{1-G(ax)+G(-ax)} = a^\alpha,$$

对于一切 $a>0$.

这时极限分布的特征函数的 Lévy 标准型由

$$M(x) = c_1|x|^{-\alpha},$$

$$N(x) = -c_2|x|^{-\alpha}\ (\sigma = 0)$$

给出.

5) 中心极限定理的精确化. 设 $\{X_n\}$ 为服从同分布的独立随机变量序列，并且

$$E(X_1) = 0,\ \sigma^2 = V(X_1),$$

$$E(|X_1|^3) < \infty.$$

则对于和

$$S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/\sigma\sqrt{n}$$

的分布函数 $\Phi_n(x)$ 与标准正态分布函数 $\Phi(x)$，下式

$$\Phi_n(x) - \Phi(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi n}}(Q(x) + R(x)) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

关于 x 一致成立. 这里

$$Q(x)=(1-x^2)E(X_1^3)/6\sigma^3,$$

当 X_1 的分布为非格子点分布[†]时 $R(x)$ 为 0, 当 X_1 的分布为格子点分布

$$P(X_1=a+kd(k=0,\ \pm1,\ \cdots))=1$$

(d 为最大周期)时

$$R(x)=d\sigma^{-1}R_1((x+a_n)\sigma\sqrt{n}\,d^{-1})$$

$$(R_1(x)=[x]-x+1/2,$$

$$a_n=-\sqrt{n}\,a\sigma^{-1}).$$

进一步当 X_1 的高阶矩存在时,可以得到 Φ_n 的更精确的渐近展开([1]). 又在 $\{X_n\}$ 不服从同分布时 ([2]), 或极限分布为稳定分布时 ([3]), 也可以得到相应的结果.

6) **局部极限定理** (local limit theorem). 关于概率密度的极限定理称为局部的. 取 $\{X_n\}$ (与上面 5) 一样) 为服从同一格子点分布且具有有限方差 σ^2 的独立随机变量序列,如令

$$S_n=(\sigma\sqrt{n})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-E(X_k)),$$

$$s_{nj}=(\sigma\sqrt{n})^{-1}d(j-nE(X_1)),$$

则

$$\sigma\sqrt{n}\,P(S_n=s_{nj})-(2\pi)^{-1/2}\cdot\exp(-s_{nj}^2/2)\to0\ (n\to\infty)$$

关于 j 一致成立. 它的特殊情形是对于 Bernoulli 试验序列的 **de Moivre-Laplace 定理**. 在 X_1 的分布函数有密度函数时也有相应的定理. 进一步,还有 i) 高阶矩存在时的概率密度的渐近展开, ii) 极限分布为稳定分布的情形, iii) 不服从同分布的情形的研究(→[2], [3]).

7) 其他,对于独立随机变量的和

$$S_n=B_n^{-1}(X_1+\cdots+X_n)-A_n,$$

当 a_n 随 n 一起增大时,概率 $P(S_n>a_n)$ 的极限状态称之为大偏差 (large deviation) 问题,关于它已有不少研究(→[4]).

【强大数定律及其精确化】 所谓随机变量列 $\{X_n\}$ 服从**强大数定律** (strong law of large numbers), 即对于适当的数列 $\{a_n\}$,

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-a_k)$$

几乎必然收敛于 0. 为使独立随机变量列 $\{X_n\}$ 服从强大数定律的一个有用的充分条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E((X_n-E(X_n))^2)<\infty.$$

根据 Birkhoff 的个体遍历定理[†],为使具有同分布的独立随机变量列服从强大数定律, 平均值有限是充分必要的.

设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量列,

$$E(X_n)=0,\ \sigma_n^2=V(X_n)<\infty,$$

$$b_n^2=\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2\to\infty,$$

并有单调递减收敛于 0 的数列 $\{\lambda_n\}$ 使

$$P(|X_n|<\lambda_nb_n(n\geqslant1))=1.$$

这时对于使 $\lambda_n=O(1/\varphi^3(b_n^2))$ 的单调递增连续函数 φ, 根据积分

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{t}\varphi(t)e^{-\varphi^2(t)/2}\,dt$$

的收敛或发散, 使 $X_1+\cdots+X_n>b_n\varphi(b_n^2)$ 对无穷个 n 成立的概率是 0 或 1 ([5]). 特别对于

$$\varphi(t)=(2\log_{(2)}t+3\log_{(3)}t+2\log_{(4)}t+\cdots+2\log_{(k-1)}t+(2+\varepsilon)\log_{(k)}t)^{1/2},$$

上述概率根据 ε 的正或负而为 0 或 1. 此处

$$\log_{(2)}t=\log\log t$$

等等. 作为特殊情形,如取

$$\varphi(t)=2\log_{(2)}t,$$

即得到 Хинчин 的**迭对数定律** (law of iterated logarithm): 如果

$|X_n|=o(b_n/\sqrt{\log_{(2)}b_n^2})$, 则

$$P(\limsup_{n\to\infty}(X_1+\cdots+X_n)/\sqrt{2b_n^2\log_{(2)}b_n^2}=1)=1.$$

【独立随机变量之和的函数】 1) 一随机事件反复发生, 设最初发生的时刻为 τ_1, 第二次发生的时刻为 $\tau_1+\tau_2,\cdots$, 如果 $\{\tau_n\}$ 为服从同分布的独立随机变量序列, 则称此随机事件为**递归事件** (recurrent event). 令 N_n 为到时刻 n 为止事件发生的次数. 如果

$$m = E(\tau_1),\ \sigma^2 = V(\tau_1) < \infty,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(N_n \geqslant \frac{n}{m} - \frac{\sigma\sqrt{n}}{m^{3/2}}\, x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du$$

成立. 在 $\sigma^2 = V(\tau_1) = \infty$, $P(\tau_1 < \infty) = 1$ 时,为使 N_n 经适当规格化而依法则收敛的充分必要条件,是对于一切的 $a > 0$ 有

$$(1 - F(x))/(1 - F(ax)) \to a^{\alpha}(x \to \infty).$$

这里 F 为 τ_1 的分布函数, $0 \leqslant \alpha < 2$. 如果 $0 \leqslant \alpha < 1$, 则

$$P(N_n(1 - F(n)) < x) \to \Psi_\alpha(x);$$

如果 $1 < \alpha < 2$, 则对使 $1 - F(b_n) \sim n^{-1}$ 的 b_n, $P((N_n - nm^{-1})m^{1+1/\alpha}b_n^{-1} < x) \to \Psi_\alpha(x)$ 成立. 这里, $\Psi_0(x) = 1 - e^{-x}(x > 0)$, 当

$$0 < \alpha < 1$$

时 $\Psi_\alpha(x) = 1 - \Phi_\alpha(x^{-1/\alpha})(x > 0)$, 当

$$1 < \alpha < 2$$

时 $\Psi_\alpha(x) = 1 - \Phi_\alpha(-x)$, 而 Φ_α 是特征函数为

$$\exp(-|t|^{\alpha}(\cos 2^{-1}\pi\alpha - i\,\mathrm{sgn}\, t \sin 2^{-1}\pi\alpha)\Gamma(1 - \alpha))$$

的拟稳定分布函数. 特别是

$$\Psi_{1/2}(\sqrt{2/\pi}\, x) = \sqrt{2/\pi}\int_0^x \exp(-u^2/2)du.$$

进一步还可得到关于 N_n 的强大数定律和迭对数定律(→[7]).

2) 设 $\{X_n\}$ 为服从同分布的仅取整数值的独立随机变量序列,

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

如果 $0 < E(X_1) \leqslant +\infty$ 且 X_1 的最大周期为 d, 则

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{nd}(S_k)\right) \to d/E(X_1)(n \to +\infty);$$
$$\to 0\ (n \to -\infty),$$

以及

$$t^{-1}E\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{(0,t)}(S_k)\right) \to 1/E(X_1)(t \to \infty)$$

成立. 其中 χ_{nd}, $\chi_{(0,t)}$ 分别为点 nd, 区间 $(0, t)$ 的定义函数,又当 $E(X_1) = \infty$ 时取

$$1/E(X_1) = 0.$$

如果 $\{X_n\}$ 的规格化和的极限分布是指数为

$$\beta(1 \leqslant \beta \leqslant 2)$$

的稳定分布,当 $\beta = 1$ 时 X_1 为对称, 当 $\beta > 1$ 时 $E(X_1) = 0$, 则 S_n 取值 0 的事件是递归事件, S_n 向 0 的返回时间 τ_1 的分布函数对于

$$\alpha = 1 - \beta^{-1}$$

满足 1) 的条件,从而可得到

$$N_n = \chi_0(S_1) + \cdots + \chi_0(S_n)$$

的极限分布. χ_0 可在某种程度上一般化, 代替 N_n 可以得到

$$S_k \geqslant 0,\ S_{k+1} \leqslant 0\ (1 \leqslant k \leqslant n)$$

的个数 M_n 的极限分布. 在 X_1 的分布非格子点分布的情形, 也可得到与此类似的结果(→[8], [9], [10]).

3) 对于具有同分布的独立随机变量序列 $\{X_n\}$, 令 $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$L_n = \chi_{(0,\infty)}(S_1) + \cdots + \chi_{(0,\infty)}(S_n).$$

如果有 $n^{-1}E(L_n) \to \alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, 则

$$P(L_n < nx) \to G_\alpha(x)$$

成立. 这里 G_α 为 $[0, 1]$ 上的分布函数, 使

$$G_0(0_+) - G_0(0_-) = 1,$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时

$$G_\alpha(x) = \pi^{-1}\sin\pi\alpha\int_0^x u^{\alpha-1}(1 - u)^{-\alpha}du,$$

且 $G_1(1 + 0) - G_1(1 - 0) = 1$. 特别当

$$\alpha = 1/2$$

时 $G_{1/2}(x) = 2\pi^{-1}\arcsin\sqrt{x}$, 对应的结果称为**反正弦定律** (arcsine law). 如将 $\{S_n\}$ 考虑作 Марков 过程†,那末 L_n 和 2) 中的 N_n, M_n 都是它的加性泛函†. 特别如有

$$E(X_1) = 0, E(X_1^2) = 1,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k < x\sqrt{n}\right) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^x \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du, & x > 0, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| < x\sqrt{n}\right)$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\exp\left(-\frac{(2m+1)^2\pi^2}{8x^2}\right),$$
$$x \geqslant 0$$

成立．进一步还可求出 $n^{-1}(S_1^2+\cdots+S_n^2)$, $n^{-3/2}(|S_1|+\cdots+|S_n|)$ 的极限分布([12])．另外,当 $P(X_1\geqslant 0)=1$ 时取 ν_x 为不超过 x 的 S_n 的个数,还有对

$$Y_x = S_{\nu_x+1} - x,\ Y'_x = x - S_{\nu_x}$$

在 $x\to\infty$ 时的极限分布的研究([13])．

【相依随机变量之和的依法则收敛】 关于相依随机变量，相当于关于独立随机变量之和的中心极限定理的结果，从 С. Н. Бернштейн 和 P. Lévy 开始,由许多人所得到．其思想的要点是将独立性换为渐近独立性．例如，设在随机变量序列 $\{X_n\}$ 中,

$$E(X_n)=0,\ S_n = X_1+\cdots+X_n$$

的方差 B_n 有限,由 $X_1, \cdots, X_n$ 确定的完全加法族记作 $\mathfrak{B}_n$，如果存在实数列 $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\zeta_n\}$ 使得 $|E(X_n|\mathfrak{B}_{n-1})|\leqslant\xi_n$,

$$|E(X_n^2|\mathfrak{B}_{n-1})-E(X_n^2)|\leqslant\eta_n,$$
$$|E(|X_n|^3|\mathfrak{B}_{n-1})|\leqslant\zeta_n$$

成立,并且当 $n\to\infty$ 时

$$(\xi_1+\cdots+\xi_n)/\sqrt{B_n}\to 0,$$
$$(\eta_1+\cdots+\eta_n)/B_n\to 0,$$
$$(\zeta_1+\cdots+\zeta_n)/\sqrt{B_n^3}\to 0,$$

则 $S_n/\sqrt{B_n}$ 的分布收敛于标准正态分布．后来，这一结果被许多人用同样方法加以一般化([18])．

对于 Марков 链†有许多工作, Р. Л. Добрушин 的下述结果是有代表性的([18])．设对于每个 n, $X_1^{(n)}, \cdots, X_n^{(n)}$ 形成为取实数值的 Марков 链，$\Omega_j^{(n)}$ 为 $X_j^{(n)}$ 的状态空间，$\mathfrak{B}(\Omega_j^{(n)})$ 为 $\Omega_j^{(n)}$ 的子集的完全加法族，$P_j^{(n)}(x, A)$ $(x\in\Omega_j^{(n)},\ A\in\mathfrak{B}(\Omega_{j+1}^{(n)}))$ 为转移概率†,

$$S_n = X_1^{(n)}+\cdots+X_n^{(n)}.$$

如果对于一切的 n 和 j, 有

$$|X_j^{(n)}|\leqslant c<\infty,\ V(X_j^{(n)})\geqslant d>0,$$

当 $n\to\infty$ 时 $\alpha^{(n)}n^{1/3}\to\infty$, 则

$$(S_n - E(S_n))/\sqrt{V(S_n)}$$

的分布收敛于标准正态分布．其中

$$\alpha^{(n)} = \min_{1\leqslant j\leqslant n-1}\alpha_j^{(n)},$$
$$\alpha_j^{(n)} = 1-\sup|P_j^{(n)}(x, A)-P_j^{(n)}(y, A)|,$$

这里上确界是关于 $x, y\in\Omega_j^{(n)}$, $A\in\mathfrak{B}(\Omega_{j+1}^{(n)})$ 所取的．关于极限分布的类型，由 Добрушин 得到以下的结果([18])．如果对于一切的 n 和 j, $0<c\leqslant V(X_j^{(n)})\leqslant C<\infty$, 当 $n\to\infty$时 $\alpha^{(n)}\cdot n^{1/3}\to\infty$, 并且

$$(S_n - E(S_n))/\sqrt{V(S_n)}$$

的分布收敛,则其极限分布为无穷可分分布．又根据 С. В. Нагаев 的结果，当 $\{X_n\}$ 为平稳 Марков 链,其 k 步转移概率为 $P^{(k)}(x, A)$ 时,如对某个 $k>0$ 有

$$\sup_{x,y,A}|P^{(k)}(x, A)-P^{(k)}(y, A)|<1,$$

并且对状态空间上任意的实可测函数 f 和数列 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ $(B_n>0)$

$$S_n = B_n^{-1}(f(X_1)+\cdots+f(X_n))-A_n$$

依法则收敛,则极限分布为拟稳定分布([19])．

Добрушин 完全解决了寻求取两个状态的 Марков 链的和的极限分布的问题,其中也包括局部型的([20])．根据他的结果,非无穷可分的分布也可作为极限分布出现．

【随机过程的依法则收敛】 1) 一般理论．设 T 为 $(-\infty, \infty)$ 中的开或闭区间,$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 为概率空间．考虑以拓扑空间 S 为状态空间的随机过程† $X(t, \omega)$ $(\omega\in\Omega, t\in T)$．由乘积空间 S^T 中的柱集产生的完全加法族记以 $\mathfrak{B}(S^T)$, 在 $\mathfrak{B}(S^T)$ 上由 $\{X(t)\}$ $(t\in T)$ 诱导出的概率测度记以 P_X, 由

$$\{X(t_1), \cdots, X(t_k)\}$$

诱导出的记以 $P_X^{t_1\cdots t_k}$．设对于随机过程序列 $\{X_n(t)\}$ 有 S^T 的某子集 E, 使

$$X_n(t, \omega)(t\in T,\ \omega\in\Omega,\ n\geqslant 1)$$

的一切轨道都含于 E．考虑空间 E 的某一拓扑 τ, 设这一拓扑 Borel 集的全体 $\mathfrak{B}_E^\tau$ 与 $\mathfrak{B}(S^T)\cap E$ 一致．如有 $(E, \mathfrak{B}_E^\tau)$ 上的概率测度 P_0, 对于 E 上一切实值有界连续函数 f, 使

得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(y)\,dP_{X_n}=\int_E f(y)dP_0$$

成立时，则称 X_n 的概率分布在E上收敛于极限分布 P_0.

设 $(E,\ \rho)$ 为完备可分的度量空间，$\Omega'=[0,1]$ 上的 Lebesgue 测度以P'表示. 如果E值随机变量序列 $\{X_n(\omega)\}$ 的分布收敛于E的拓扑 Borel 集的全体上的分布 P_0，则存在如下的E值随机变量序列 $\{\xi_n(\omega')\}$ $(\omega'\in\Omega')$: $\xi_n(\omega')$ 的分布与 $X_n(\omega)$ $(n\geqslant 1)$ 的分布一致，$\xi_0(\omega')$ 的分布等于 P_0，并且

$$P'(\xi_n(\omega')\to\xi_0(\omega'))=1.$$

对于实值随机过程序列 $\{X_n(t,\omega)\}$，如果 i) 有 $\mathfrak{B}(R^T)$ 上的概率测度 P_0，使一切的有限维分布 $P^{t_1\cdots t_k}_{X_n}$ 收敛于 $P^{t_1\cdots t_k}_0$; ii) 对一切的 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{h\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{|s-t|\leqslant h}P(|X_n(s)-X_n(t)|>\varepsilon)=0,$$

则存在如下的实值随机过程序列 $\{\xi_n(t,\ \omega')\}$ $(\omega'\in\Omega')$: 对于任意的 $t\in T$，$\xi_n(t)$ 依概率收敛于 $\xi_0(t)$，ξ_n 与 $X_n(n\geqslant 1)$ 在 $\mathfrak{B}(R^T)$ 上的分布一致，并且 $\xi_0(t)$ 随机连续，其分布等于 P_0.

2) 最多具有第一种不连续性的随机过程的依法则收敛. 关于状态空间为完备可分度量空间(S,ρ)的，样本函数†最多有第一种不连续性的随机过程的依法则收敛，其统一的理论由 Ю. В. Прохоров, А. В. Скороход 所给出. 在 $t\in T=[0,1]\to x(t)\in S$ 的函数当中，最多有第一种不连续性的，在 $0\leqslant t<1$ 中右连续并满足 $x(1-0)=x(1)$ 的全体用D表示，并且引进距离

$$\rho_D(x,y)=\inf_{\lambda}\{\sup_{t\in T}|t-\lambda(t)|+\sup_{t\in T}\rho(x(t),y(\lambda(t)))\}.$$

这里下确界是对将T一一映射到T自身的连续函数λ的全体而取的. 这时，i) 按 1) 的记号有 $\mathfrak{B}^{\rho_D}_D=\mathfrak{B}(S^T)\cap D$, ii)$(D,\ \rho_D)$ 虽可分但不完备. 当 $X(t,\omega)$ $(t\in T)$ 的几乎所有的样本函数为D的元时，记以 $X(t)\in D$.

对于 $X_n(t)\in D$ $(n\geqslant 0)$，为使 P_{X_n} 在D上收敛于 P_{X_0} 的充分必要条件是 i) 对于包含 0, 1 在内的 $[0,1]$ 的稠密子集 N，当 $t_1,\cdots,t_k\in N$ 时，$P^{t_1\cdots t_k}_{X_n}$ 收敛于 $P^{t_1\cdots t_k}_{X_0}$; ii) 对一切的 $\delta>0$，

$$\lim_{h\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P(\Delta_D(h,\ X_n)>\delta)=0,$$

这里 $\Delta_D(h,\ x)=\sup\{\min(\rho(x(t_1),\ x(t)),\ \rho(x(t_2),\ x(t)))\,|\,t-h<t_1<t<t_2<t+h\}$.

在D中的由连续函数全体所形成D的子空间C上，距离 ρ_D 与

$$\rho_C(x,\ y)=\max\{\rho(x(t),\ y(t))\,|\,0\leqslant t\leqslant 1\}$$

相同，Δ_D 对应于

$$\Delta_C(h,x)=\max\{\rho(x(s),x(t))\,|\,|s-t|\leqslant h\},$$

相当上述D的情形的结果有以下事实成立：当 $X_n(t)\in C$ $(n\geqslant 0)$ 时，为使在C上 P_{X_n} 收敛于 P_{X_0} 的充分必要条件是 i) 对一切的 $t_1,\cdots,t_k\in N$(N与D的情形相同)，$P^{t_1\cdots t_k}_{X_n}$ 收敛于 $P^{t_1\cdots t_k}_{X_0}$; ii) 对一切的 $\delta>0$，

$$\lim_{h\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P(\Delta_C(h,X_n)>\delta)=0.$$

又在上述条件下，存在如下的 $\{\xi_n(t,\ \omega')\}$ $(t\in T,\ \omega'\in\Omega')\in D$ (或$\in C$) $(n\geqslant 0)$ $(\Omega'=[0,\ 1]$，P' 为 Lebesgue 测度):

$$P_{\xi_n}=P_{X_n}(n\geqslant 0),$$

并且 $P'(\rho_D(\xi_n,\xi_0)\to 0)=1$

$$(\text{或 } P'(\rho_C(\xi_n,\xi_0)\to 0)=1)$$

成立.

下述 Прохоров 定理在应用上比较方便：如果对于实随机过程族 $\{X_\alpha(t)\}$ $(0\leqslant t\leqslant 1,\ \alpha\in A)$，有

$$E(|X_\alpha(t)-X_\alpha(s)|^a)\leqslant c|t-s|^{1+b},\quad \alpha\in A$$

(这里 $a,\ b,\ c$ 为与α无关的正常数)成立，并且 $X_\alpha(0)$ 的分布 $\{P^0_{X_\alpha}\}$ 作为实数轴上的分布族是全有界的，则 $X_\alpha(t)\in C(\alpha\in A)$ 并且$\{P_{X_\alpha}\}$作为C上的分布族是全有界的.

3) 对于 Марков 过程†的依法则收敛定

理. 设以可分完备度量空间 (S, ρ) 为状态空间的 Марков 过程 $\{X(t)\}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 的转移概率 $P(s,x;t,A)$, 当 $0\leqslant s<t\leqslant 1$, $A\in B_\rho$ 固定时关于 $x\in S$ 是可测的. 令

$$V^\varepsilon(x)=\{y\,|\,\rho(x,y)\geqslant\varepsilon\},$$

考虑两种条件: D) 对于一切的 $\varepsilon>0$ 和

$$0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{x\in S,t_1,t_2}P(t_1,x;t_2,V^\varepsilon(x))=0,$$

其中 t_1, t_2 不论取于

$$t\leqslant t_1<t_2\leqslant t+h,$$

$$t-h\leqslant t_1<t_2\leqslant t,$$

$$1-h\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$$

哪一个范围上式都成立; C) 对一切 $\varepsilon>0$

$$\sup_{x\in S,t-s\leqslant h}P(s,x;t,V^\varepsilon(x))\leqslant h\psi_\varepsilon(h),$$

这里 $\psi_\varepsilon(h)$ 是对于固定值 $\varepsilon>0$ 满足 $\psi_\varepsilon(h)\downarrow 0(h\downarrow 0)$ 的函数. 如果 $\{X(t)\}(0\leqslant t\leqslant 1)$ 满足 D) 或 C), 则分别存在与 $X(t)$ 等价(→随机过程)的 $X'(t)\in D$ 或 $\in C$. 以此事实为基础, 可对 Марков 过程序列的极限规律进行讨论.

对于 Марков 过程序列 $\{X_n(t)\}$

$$(0\leqslant t\leqslant 1,\ n\geqslant 0),$$

如果 i) D) 中的收敛关于 n 一致成立 (或 C) 对于与 n 无关的 $\psi_\varepsilon(h)$ 成立), ii) 取 N 与 2) 相同, 对一切的 $t_1,\cdots,t_k\in N$, $P_{X_n}^{t_1\cdots t_k}$ 收敛于 $P_{X_0}^{t_1\cdots t_k}$, 则 P_{X_n} 在 D 上(或 C 上)收敛于 P_{X_0}.

4) Марков 过程的生成算子⁺的收敛与依法则收敛. 考虑以 $\boldsymbol{R}^m$ 为状态空间的、时齐的 Марков 过程 $\{X(t)\}$ $(0\leqslant t<\infty)$. 将 $\boldsymbol{R}^m$ 上有界连续函数的全体记为 C, 二次连续可微并且直到二次的偏导数为有界的一致连续函数的全体记为 $D^{(2)}$. $X(t)$ 的推移算子

$$T_t(0\leqslant t<\infty)$$

将 C 映射于 C 中并且 T_t 在 C 上弱连续. 进一步设有以下的条件 i), ii). i) T_t 的 α 次 Green 算子 G_α 使 $G_\alpha D^{(2)}\subset D^{(2)}$. ii) T_t 的弱生成算子 $\tilde{I}$ 的定义域 $\mathscr{D}(\tilde{I})\supset D^{(2)}$, 而对于 $\varphi\in D^{(2)}$ 有

$$\tilde{I}_\varphi(x)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^m b_{ij}(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^i\partial x^j}+\sum_{i=1}^m a_i(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}$$

$$+\int_{\boldsymbol{R}^m}\Big(\varphi(y)-\varphi(x)$$

$$-\sum_{i=1}^m\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x^i}\frac{y^i-x^i}{1+|y-x|^2}\Big)\Pi(x,dy),$$

这里 $x=(x^1,\cdots,x^m)\in\boldsymbol{R}^m$, $a_i(x)$ 有界, 矩阵 $(b_{ij}(x))$ 满足条件: '存在与 x 无关的

$$0<c_1<c_2<\infty,$$

使对任意的 $\xi_i(1\leqslant i\leqslant m)$ 有

$$c_1\sum_i\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j}b_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leqslant c_2\sum_i\xi_i^2.$$

又 $\Pi(x,dy)$ $(x\in\boldsymbol{R}^m)$ 为 $\boldsymbol{R}^m$ 上的测度, 并且满足条件: 对任意的 $r>0$,

$$\sup_x\Pi(x,V^r(x))<\infty$$

且

$$\sup_x\Pi(x,V^r(x))\to 0(r\to\infty);$$

$$\sup_x\int_{|y-x|\leqslant 1}|x-y|^2\Pi(x,dy)<\infty;$$

对于在 x_0 邻域中为 0 的 C 中的元 $\varphi\geqslant 0$,

$$\int_{\boldsymbol{R}^m}\varphi(y)\Pi(x_n,dy)\to\int_{\boldsymbol{R}^m}\varphi(y)\Pi(x_0,dy)$$

$$(x_n\to x_0).$$

对于满足以上条件的 Марков 过程序列

$$\{X_n(t)\}\ (n\geqslant 0),$$

作如下假定. a) 关于 x 一致地

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^m}\phi(y-x)\Pi^{(n)}(x,dy)$$

$$=\int_{\boldsymbol{R}^m}\phi(y-x)\Pi^{(0)}(x,dy),$$

这里 $\phi\in C$ 在 $x=0$ 的邻域内为 0; b) 对于 $\varphi\in D^{(2)}$,

$$\sum_{i,j=1}^m b_{ij}^{(n)}(x)\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^i\partial x^j}$$

$$+\int_{\boldsymbol{R}^m}\sum_{i,j=1}^m\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x^i\partial x^j}(y^i-x^i)$$

$$\times(y^j-x^j)\alpha_\varepsilon(y-x)\Pi^{(n)}(x,dy)$$

关于 x 一致收敛于此式对应于 $n=0$ 的量,这里 $\alpha_\varepsilon \in D^{(2)}$, $0 \leqslant \alpha_\varepsilon \leqslant 1$,

$$\alpha_\varepsilon(x) = 1 \ (|x| \leqslant \varepsilon);$$

$$= 0 \ (|x| \geqslant 2\varepsilon);$$ $c)$ 对于 $\varphi \in D^{(2)}$,关于 x 一致地

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} a_i^{(n)}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(0)}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x^i}.$$

对于上面这样的 Марков 过程序列

$$\{X_n(t)\} \ (n \geqslant 0),$$

如果 $X_n(0)$ 的分布收敛于 $X_0(0)$ 的分布, $n\to\infty$,则 P_{X_n} 收敛于 P_{X_0}.

设 $X^{(n)} = \{X_{n0}, X_{n1}, \cdots, X_{nn}\} \ (n \geqslant 1)$ 为 Марков 链的序列,如果对于

$$k(n+1)^{-1} \leqslant t < (k+1)(n+1)^{-1}$$

令 $X_n(t) = X_{nk}$, $X_n(1) = X_{nn}$,则确定一 Марков 过程序列 $\{X_n(t)\} (0 \leqslant t \leqslant 1)$,关于它的依法则收敛有与上面类似的定理成立. 另外,对于非时齐的 Марков 过程,可归结为时齐的情形([26]).

【经验分布的收敛】 设 $X_k(\omega)$

$$(1 \leqslant k \leqslant n), \ Y_j(\omega) (1 \leqslant j \leqslant m)$$

为具有同一分布函数 F 的独立随机变量. 如果令 $N_n(x,\omega)$ 为满足 $X_k \leqslant x$ 的 k 的个数,则 $F_n(x,\omega) = n^{-1}N_n(x,\omega)$ 为一以 ω 为参数的分布函数并称为对应 F 的**经验分布函数** (empirical distribution function). 以概率 1

$$H_n^+ = \sup_x |F_n(x,\omega) - F(x)| \to 0 \ (n\to\infty)$$

成立. 令 $G_m(x,\omega)$ 为 $\{Y_j\}$ 的经验分布函数,

$$H_n = \sup_x (F_n(x,\omega) - F(x)),$$

$$H^+(n,m) = \sup_x |F_n(x,\omega) - G_m(x,\omega)|,$$

$$H(n,m) = \sup_x (F_n(x,\omega) - G_m(x,\omega)).$$

当 F 为连续函数时以下定理成立. **Колмогоров 定理**: 当 $n\to\infty$ 时,

$$P(\sqrt{n} H_n^+ < x) \to K(x)$$

$$\Big(K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp(-2k^2x^2) (x > 0);$$

$$= 0 (x \leqslant 0)\Big).$$

Смирнов 定理:

i) $P(\sqrt{n} H_n < x) = 0 \ (x \leqslant 0)$; $= 1 - (1 - n^{-1/2}x)^n - x\sqrt{n} \sum_{k=r+1}^{n-1} n^{-n} \binom{n}{k} (k - x\sqrt{n})^k (n - k + x\sqrt{n})^{n-k-1}$

$(0 < x \leqslant \sqrt{n}, \ r = [x\sqrt{n}])$; $= 1 (x > \sqrt{n})$.

当 $n\to\infty$ 时

$$P(\sqrt{n} H_n < x) \to L(x) \ (L(x) = 1 - \exp(-2x^2) (x > 0); = 0 (x \leqslant 0)).$$

ii) 当 $n\to\infty$, $mn^{-1} \to r$ (常数)时,

$$P((nm)^{1/2}(n+m)^{-1/2}H^+(n,m) < x) \to K(x),$$

$$P((nm)^{1/2}(n+m)^{-1/2}H(n,m) < x) \to L(x).$$

这些定理作为随机过程的依法则收敛可以叙述如下. 设 $F(X_k)$ 为 $[0,1]$ 上均匀分布的随机变量. 如令 $\nu_n(t)$ 为使 $F(X_k) \leqslant t$ 的 k 的个数, $k = 1, 2, \cdots, n$,

$$X_n(t) = \sqrt{n}(n^{-1}\nu_n(t) - t) \ (0 < t \leqslant 1),$$
$$X_n(0) = 0,$$

则 $E(X_n(t)) = 0$,

$$E(X_n(t)X_n(s)) = \min(s,t) - st,$$

$$H_n^+ = \sup_t |X_n(t)|,$$

$$H_n = \sup_t X_n(t).$$

如取 $\{X(t)\} \ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 为使

$$E(X(t)) = 0,$$

$$E(X(t)X(s)) = \min(s,t) - st$$

的正态随机过程†,并令

$$H^+ = \sup_t |X(t)|, \ H = \sup_t X(t),$$

则 P_{X_n} 收敛于 P_X（在D上，参看前节），从而得到

$$P(\sqrt{n}H_n^+ \geqslant x) \to P(H^+ \geqslant x),$$

$$P(\sqrt{n}H_n \geqslant x) \to P(H \geqslant x).$$

同样地，如令 $\mu_m(t)$ 为使 $G(Y_i) \leqslant t$ 的 i 的个数，则

$$H^+(n, m) = \sup_t |n^{-1}\nu_n(t) - m^{-1}\mu_m(t)|,$$

并且当 $n \to \infty$，$mn^{-1} \to r$ 时，

$$P((nm)^{1/2}(n+m)^{-1/2}H^+(n, m) \geqslant x)$$

$$\to P((1+r)^{-1/2}\sup_t |X(t) - \sqrt{r}\, Y(t)| \geqslant x)$$

成立. $Y(t)$ 是与 $X(t)$ 独立并且与 $X(t)$ 服从同一分布的随机过程. 还可以求出 H_n^+，$H^+(n,m)$ 等的分布的具体形式和渐近展开([32]，[33]).

【参】 [1] Б. В. Гнеденко-А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, 1949 (中译本：Б. В. 哥程坚科，А. Н. 廓洛莫格若夫，相互独立随机变数之和的极限分布，科学出版社，1955)；[2] В. В. Петров, Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин, Теория вероятностей и ее применение, **4** (1959), 220—224; [3] H. Cramér, On asymptotic expansions for sums of independent random variables with a limiting stable distribution, Sankhyā, (A) **25**(1963), 13—24; [4] Ju. V. Linnik (Ю. В. Линник), On the probability of large deviations for the sums of independent variables, Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., II, Univ. of California Press, 1961, 289—306; [5] W. Feller, The general form of the so-called law of the iterated logarithm, Trans. Amer. Math. Soc., **54** (1943), 373—402; [6] K. L. Chung (钟开莱), The strong law of large numbers, Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Univ. of California Press, 1951, 341—352; [7] W. Feller, Fluctuation theory of recurrent events, Trans. Amer. Math. Soc., **67** (1949), 98—119; [8] G. Maruyama (丸山儀四郎), Fourier analytic treatment of some problems on the sums of random variables, Natural Sci. Report, Ochanomizu Univ., **6** (1955), 7—24; [9] N. Ikeda (池田信行), Fluctuation of sums of independent random variables, Mem. Fac. Sci. Kyūsyū Univ., **10** (1955), 15—28; [10] G. Kallianpur-H. Robbins, The sequence of sums of independent random variables, Duke Math. J., **21** (1954), 285—307; [11] F. Spitzer, A combinatorial lemma and its application to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), 323—339; [12] P. Erdös-M. Kac, On certain limit theorems of the theory of probability, Bull. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 292—302; [13] Е. Б. Дынкин, Некоторые предельные теоремы для сумм независимых случайных величин с бесконечными математическими ожиданиями, Изв. Акад. Наук СССР, **19** (1955), 247—266; [14] S.N. Bernstein, Sur le théorème limite du calcul des probabilités, Math. Ann., **85** (1922), 237—241; [15] S. N. Bernstein, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Math. Ann., **97** (1926), 1—59; [16] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937; [17] M. Loève, On almost sure convergence, Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Univ. of California Press, 1951, 279—303; [18] Р. Л. Добрушин, Центральная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова I. II, Теория вероятностей и ее применение, **1** (1956), 72—89, 365—425; [19] С. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Теория вероятностей и ее применение, **2** (1957), 389—416; [20] Р. Л. Добрушин, Предельные теоремы для цепи Маркова из двух состояний, Изв. Акад. Наук СССР, **17** (1953), 291—330; [21] А. Н. Колмогоров, Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова, Изв. Акад. Наук СССР, **13** (1949), 281—300; [22] С. Х. Сираждинов, Предельные теоремы для однородных цепей Маркова, Изд. АН УССР, Ташкент, 1955; [23] M. D. Donsker, An invariance principle for certain probability limit theorems, Mem. Amer. Math. Soc., **6** (1951), 1—12; [24] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория Вероятностей и ее Применение, **1** (1956), 177—238; [25] А. В. Скороход, Предельные теоремы для случайных процессов, Теория вероятностей и ее Применение, **1** (1956), 289—319; [26] А. В. Скороход, Предельные теоремы для процессов Маркова, Теория Вероятностей и ее Применение, **3**(1958), 217—264; [27] А. В. Скороход, Исследования по теории случайных процессов, Изд. Киев. Универ., 1961; [28] A. N. Kolmogorov (А. Н. Колмогоров), Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, Giorn. Inst. d. Attuari, **4** (1933), 83—91; [29] Н. В. Смирнов, Приближение случайных величин по эмпирическим данным, Успехи Мат. Наук, **10** (1944), 179—206; [30] W. Feller, On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical distributions, Ann. Math. Statist., **19** (1948), 177—189; [31] J. L. Doob, Heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems, Ann. Math. Statist., **20** (1949), 393—403; [32] В. С. Королюк, О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок, Изв. Акад. Наук СССР, **19** (1955), 81—96; [33] В. С. Королюк, Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова, Изв. Акад. Наук СССР, **19** (1955), 103—124; [34] P. Billingsley, Convergence of probability measures, John Wiley, 1968.

随机过程 [英 stochastic process 法 processus stochastique 德 stochastischer Prozess 俄 веро-

ятностный процесс 日 確率過程】【各种定义】 随机过程是作为随时间变化的偶然量的数学模型而产生的．给定基本概率空间† $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 和实数集 T，对每个 $t \in T$ 有在 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上的实值随机变量† $X_t(\omega)$ 与之对应时，称随机变量族 $\{X_t\}_{t \in T}$ 为 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上的**随机过程**或简称为**过程**．通常称 t 为**时间参数** (time parameter)．属于随机过程 $\{X_t\}_{t \in T}$ 的有限个随机变量 $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ 的联合分布†称为此随机过程的**有限维分布** (finite dimensional distribution)．随机过程按其有限维分布的特性可分成许多种类，作为主要的有可加过程†(或独立增量过程)、Марков 过程†、平稳过程†、鞅†、分枝过程†．这样依据有限维分布来描述特征之所以可能，是由于根据 Колмогоров 的扩张定理†（→概率分布)有以下事实成立：如果给定一满足相容条件†的有限维分布族，则在 T 上实值函数的空间 $W = \boldsymbol{R}^T$ 上适当构造概率测度，可使取 $w \in W$ 在 t 的值为 $X_t(w)$ 所得的随机过程 $\{X_t\}_{t \in T}$ 具有已给的有限维分布．其次，给定二随机过程

$$\mathscr{X} = \{X_t\}_{t \in T}, \quad \mathscr{Y} = \{Y_t\}_{t \in T},$$

当它们定义于共同的概率空间 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上且满足

$$P(X_t = Y_t) = 1 \quad (t \in T)$$

时，称此二随机过程为**等价的** (equivalent)，并且称其中每一个为另一个的**修正** (modification)．$\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{Y}$ 不必定义在同一概率空间上，只要它们的有限维分布相同，就称其中每一个为另一个的**表现** (version)．根据 Колмогоров 的扩张定理，对于任意的随机过程，都能在 W 上构造出它的表现．

在随机过程 $\{X_t\}_{t \in T}$ 中固定 ω 时所得的 t 的函数 $X(\omega)$，称为对应 ω 的**样本函数** (sample function)，**样本过程** (sample process) 或**轨道** (path)．对随机过程施行各种运算以及研究样本的连续性及其它详细性质时，需要考虑的重要概念有可测性和可分性．以下取 T 为实数的区间，概率测度 P 在必要时考虑为完备化†的．设 $\mathfrak{I}$ 为 T 的 Borel 子集†的全体，如果 (t, ω) 的函数 $X_t(\omega)$ 是 $\mathfrak{I} \times \mathfrak{B}$ 可测的，则称此随机过程为**可测的** (measurable)．为使随机过程具有可测修正，例如只要有下面即将叙述的依概率连续性即可．又如存在 T 的可数子集 S，使得

$$P\{\omega \mid \text{对任意的 } t \in T,$$
$$\lim_{s \to t} \inf_{s \in S} X_s(\omega) \leqslant X_t(\omega) \leqslant \lim_{s \to t} \sup_{s \in S} X_s(\omega)\} = 1$$

成立，则称 $\{X_t\}_{t \in T}$ 为**可分的** (seperable)．根据 J. L. Doob 的结果，任意的随机过程都具有可分修正([4])．

对于随机过程考虑过种种连续性．对于任意的正数 ε，当

$$P(|X_t - X_s| > \varepsilon) \to 0 \quad (t \to s,\ t, s \in T)$$

成立时，称 $\{X_t\}_{t \in T}$ 在 $s \in T$ **依概率连续** (continuous in probability)．又当平均值存在且

$$E(|X_t - X_s|) \to 0 \quad (t \to s,\ t, s \in T)$$

成立时，称过程在 $s \in T$ 为（一次）**平均连续** (continuous in the mean)．类似地还可定义 $p(\geqslant 1)$ 次平均连续．如果平均连续，则必依概率连续．其次，如 $\{X_t\}_{t \in T}$ 可分，则

$$D_s = \{\omega \mid X_s(\omega) = \lim_{t \to s, t \in T} X_t(\omega)\}^c \text{和} \bigcup_{s \in T} D_s$$

都是可测事件．当 $P(D_s) > 0$ 时，$s \in T$ 称为 $\{X_t\}_{t \in T}$ 的**固定不连续点** (fixed point of discontinuity)．

$$P\Big(\bigcup_{s \in T} D_s\Big) = 0$$

意味着样本函数以概率 1 连续．以下的 Колмогоров 的定理给出了它的一个充分条件：如果有某正常数 γ, ε, c 使

$$E(|X_t - X_s|^\gamma) \leqslant c|t - s|^{1+\varepsilon}$$

成立，则存在 $\{X_t\}_{t \in T}$ 的修正 $\{\tilde{X}_t\}_{t \in T}$，其样本函数以概率 1 连续，且对任意的

$$\delta(0 < \delta < \varepsilon/\gamma), \ N < \infty,$$

满足

$$P(\lim_{h \downarrow 0} h^{-\delta} \sup_{|t-s| \leqslant h, |t|, |s| \leqslant N, t, s \in T} |\tilde{X}_t - \tilde{X}_s|$$
$$= 0) = 1.$$

关于样本函数的右连续性和连续性的问题，开始于由 P. Lévy 完成了理论主要部分的可加过

程的情形，此外有 E. B. Дынкин, D. B. Ray, Л. В. Серегин (→Марков 过程), G. A. Hunt, Ю. К. Беляев (→平稳过程) 等人的许多研究.

在随机过程(特别是 Марков 过程和鞅)的研究中，常常给出满足以下 i), ii), iii) 的完全加法族†的递增族 $\{\mathfrak{B}_t\}_{t\in T}$，它将起着重要的作用. 设 $\{X_t\}_{t\in T}$ 为$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$上的随机过程，$T=[0,+\infty)$. i) $\mathfrak{B}_t\subset\mathfrak{B}(\forall t\in T)$; ii) $\bigcap_{s>t}\mathfrak{B}_s=\mathfrak{B}_t(\forall t\in T)$; iii) $\{X_t\}_{t\in T}$ 适应 (adapted)于 $\{\mathfrak{B}_t\}$，即对每个 $t\in T$，X_t 为 $\mathfrak{B}_t$ 可测. 这种情形下，满足 $\{\omega|\tau(\omega)<t\}\in\mathfrak{B}_t\ (\forall t\in T)$ 在 $[0,+\infty)$中取值的Ω上的随机变数 τ 称为**停止时间** (stopping time)或 **Марков 时间** (Markov time). 常数 ($\geqslant 0$) 当然是停止时间. 又停止时间列的极限仍为停止时间. 如 σ, τ 为停止时间，则 $\min(\sigma,\tau)$, $\max(\sigma,\tau)$ 也是. 令 $\mathfrak{B}_\tau$ 为满足 $A\cap\{\tau<t\}\in\mathfrak{B}_t(\forall t\in T)$ 的集 $A\in\mathfrak{B}$ 的全体，它是个完全加法族.

$$\sigma_B(\omega)=\inf\{t|X_t(\omega)\in B\}$$

称为 B 的**到达时间** (hitting time). 有关 σ_B 的可测性问题，Hunt, R. M. Blumenthal 证明了：对很广一类的 Марков 过程来说，解析集†的到达时间是停止时间. 对此利用 G. Choquet 关于可容性的结果，在一般随机过程的情形还根据 P. A. Meyer 的结果，在下面的条件 MA) 之下，解析集的到达时间是停止时间，进一步对于任意的停止时间 τ, X_τ 为 $\mathfrak{B}_\tau$ 可测 ([16]). MA) 对每个 $s\geqslant 0$，从 $[0,s]\times\Omega$ 到实数的映射 $X_t(\omega)$ 为 $\mathfrak{F}_s\times\mathfrak{B}_s$ 可测；其中 $\mathfrak{F}_s$ 为$[0,s]$ 的 Borel 子集的全体，并设Ω上所有的完全加法族 $\mathfrak{B}_s$ 都是完备化的. 特别当样本函数以概率 1 右连续时，MA) 是满足的. 这些概念在 Марков 过程和鞅中是基本的.

在上面，$X_t(\omega)$ 取值的集即**状态空间** (state space) 取的是实数集，一般地还可考虑以拓扑空间进而可测空间为状态空间的随机过程. 上述的一般定义和结果，都可以推广到状态空间为具有第二可数性的局部紧空间的情形. 此外还有对时间参数在多维 Euclid 空间，Hilbert 空间等上变动的随机过程的研究 (Lévy ([14]), H. P. McKean, Jr. ([15])).

【正态随机过程】 设 T 为实数集. 在复随机过程 $\{X_t\}_{t\in T}$ 中，当实随机过程$\{(\xi_t,\eta_t)\}_{t\in T}$ $(\xi_t=\mathrm{Re}X_t,\ \eta_t=\mathrm{Im}X_t)$ 的任意的有限维分布为正态分布†(包含退化的)时，称 $\{X_t\}_{t\in T}$ 为**复正态随机过程** (complex normal stochastic process)，如 X_t 取实值时，则简单称为**正态随机过程** (normal stochastic process). 对于一般的复随机过程 $\{X_t\}_{t\in T}$，当

$$(1)\qquad \mu(t)=E(X_t),$$

$$v(s,t)=E((X_s-\mu(s))\overline{(X_t-\mu(t))}),$$

$$\rho(s,t)=v(s,t)/\sqrt{v(s,s)v(t,t)}$$

存在时，称 $\mu(t)$ 为**平均值函数** (mean function)，$v(s,t)$ 为**协方差函数** (covariance function)，$\rho(s,t)$ 为**自相关函数** (autocorrelation function) 或简称**自相关**. 这时 $v(s,t)$ 是正定、Hermite 对称的. 对于(复)正态随机过程，$\mu(t)$, $v(s,t)$, $\rho(s,t)$ 是存在的. 反之，如给定 $\mu(t)$ 和正定，Hermite 对称的 $v(s,t)$，则可确定一个且仅仅一个 (在对应的有限维分布唯一的意义上) 满足 (1) 的复正态随机过程 X_t. 在 $\mu(t)$, $v(s,t)$ 为实的情形，确定一个且仅仅一个满足 (1) 的(实)正态随机过程. 对于正态随机过程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$，如满足

$$|v(s_1,t)-v(s_2,t)|\leqslant c|s_1-s_2|^\alpha$$

$$(0<\alpha\leqslant 1, v(0,s)=0, s_1,s_2,t\in[0,1]),$$

则

$$P\Big(\lim_{\delta\downarrow 0,|t_1-t_2|\leqslant\delta}\sup\ |X(t_1)-X(t_2)|/|t_1-t_2|^{\alpha/2}|\log|t_1-t_2||^{1/2}<c_1c^{1/2}/\alpha^2\Big)=1$$

(c_1 为常数) 成立. 这一事实由 Z. Ciesielski 所证明([1]).

【随机积分】 取 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^N$ $(N\geqslant 1)$ 上的完全加法族 $\mathfrak{A}$，设 $(\boldsymbol{R}^N,\mathfrak{A},\mu)$ 为 σ 有限的测度空间. 对于每个满足 $\mu(A)<\infty$ 的 $A\in$

$\mathfrak{A}$, 有依赖于 $\mu(A)$ 的 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上的复随机变量 $\Xi(A)$ ($\mu(A)$ 为其分布的特征量) 与之对应,使得 a) 对于

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A(A_i \in \mathfrak{A},\ A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i \neq j),\ \mu(A) < \infty)$$

(可数)可加性

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Xi(A_i) = \Xi(A)$$

(通常关于平均收敛或几乎处处收敛)成立时,称复随机变量族 $\{\Xi(A)\}_{A \in \mathfrak{A}}$ 为**随机测度**(random measure). 随机测度对随机变量的积分表示是有用的. 今取 $\mathfrak{A}_0$ 为 $\boldsymbol{R}^N$ 上形如

$$(a_i < x_i \leqslant b_i)\ (1 \leqslant i \leqslant N)$$

的 μ 测度有限的半开区间的有限并所成的集类.设给定随机变量族 $\{\Xi(A)\}_{A \in \mathfrak{A}_0}$, 代替 a), 使对于 $\mathfrak{A}_0$ 中任意互不相交的有限个集

$$A_1, \cdots, A_n,\quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

有限可加性

$$\sum_{i=1}^{n} \Xi(A_i) = \Xi(A)$$

成立. 这时,将 $\Xi(A)$ 扩张, 确定复随机变量族 $\{\Xi(A)\}_{A \in \mathfrak{A}}$, 是否有可数可加性每每成为问题. 作为能够这样扩张的典型,可举出 $\Xi(A)$ 为平方可积且满足

$$(2)\qquad E(\Xi(A)\overline{\Xi(B)}) = \mu(A \cap B),\quad A, B \in \mathfrak{A}_0$$

的情形. 这时对于 $f \in L_2(\boldsymbol{R}^N, \mu)$ 可定义**随机积分** (stochastic integral)

$$I(f) = \int_{\boldsymbol{R}^N} f(\lambda)\Xi(d\lambda),$$

并使 $L_2(\Omega)$ 中的内积

$$(I(f) \cdot I(g))_{\Omega} = (f, g)_{\mu}$$

($L_2(\boldsymbol{R}^N, \mu)$ 中的内积) 成立. N. Wiener 用 Brown 运动†所定义的随机测度,就相当于这种情形. 伊藤清一般地定义了从可加过程所导出的多重随机测度以及多重随机积分, 并将其应用于种种的问题 ([9]). 设 E 为任意的参数空间, $L_2(\boldsymbol{R}^N, \mu) \supset (f_a(\lambda))(a \in E)$, 如果对每个 f_a 对应有 $l(f_a) \in L_2(\Omega)$ 使得

$$(l(f_a), l(f_b))_{\Omega} = (f_a, f_b)_{\mu}$$

成立, 则存在满足 (2) 的随机测度 Ξ, 并能写成

$$l(f_a) = \int_{\boldsymbol{R}^N} f_a(\lambda)\Xi(d\lambda)$$

(K. Karhunen [11]).

由 Wiener 随机测度所得的随机积分,根据伊藤 ([7]), Doob ([4]), 可按下述的方式扩张到由鞅†所得的随机积分. 设 $\{\mathfrak{B}_t\}_{t \in T}$

$$(T = [0, +\infty))$$

为满足上述 i), ii) 的一族递增的完全加法族, $\{\Xi(t), \mathfrak{B}_t\}_{t \in T}$ 为满足以下条件的鞅: 存在单调非减函数 $F(t)$, 使对 $s < t$ 有

$$E(|\Xi(t) - \Xi(s)|^2 | \mathfrak{B}_s) = F(t) - F(s).$$

设 $\Phi(t, \omega)$ 关于 t, ω 为 $\mathfrak{F} \times \mathfrak{B}$ 可测, 固定 t 时关于 ω 为 $\mathfrak{B}_t$ 可测的函数. 这时如果

$$P\left(\int_0^{\infty} |\Phi(t, \omega)|^2 dF(t) < \infty\right) = 1,$$

则可定义随机积分

$$I(\Phi) = \int_0^{\infty} \Phi(t, \omega)\Xi(dt, \omega).$$

进一步如果

$$\int_0^{\infty} E(|\Phi(t, \omega)|^2) dF(t) < \infty,$$

则 $E(I(\Phi)) = 0$,

$$E(|I(\Phi)|^2) = E\left(\int_0^{\infty} |\Phi(t, \omega)|^2 dF(t)\right)$$

成立. Doob 还考察了 $F(t)$ 依赖于 ω (从而为 $\mathfrak{B}_t$ 可测)的特殊情形,而足够一般的情形被 P. Courrège ([2]), H. Kunita and S. Watanabe ([38]) 和 P. A. Meyer ([39]) 所研究.

【广义随机过程】 广义随机过程的研究始于 И. М. Гельфанд ([5]), 伊藤 ([8]). 令 $\mathscr{D}$ 为支集†为紧的 $t(-\infty < t < \infty)$ 的 C^{∞} 类函数†的全体, $\mathscr{D}'$ 为广义函数†的全体. $\omega \in \Omega$ 和 $\varphi \in \mathscr{D}$ 的函数 $x(\varphi, \omega)$, $x(\varphi, \omega)$ 对几乎所有的 ω 作为 φ 的函数是个广义函数, 如果固定 φ 作为 ω 的函数是可测的, 这时称 $x(\varphi, \omega)$ 为**广义随机过程** (random distribution,

generalized stochastic process). 令 $\mathfrak{B}(\mathscr{D}')$ 为包含形如 $\{y\in\mathscr{D}'|y(\varphi)\in E\}$ ($\varphi\in\mathscr{D}'$, E 为 Borel 集)的集的最小完全加法族,则由

$\Phi_x(B)=P\{\omega|x(\cdot,\omega)\in B\}$ $(B\in\mathfrak{B}(\mathscr{D}'))$ 可导出 $\mathfrak{B}(\mathscr{D}')$ 上的概率测度 Φ_x. 称

$$c(\varphi)=E(e^{ix(\varphi,\omega)})=\int e^{iy(\varphi)}\Phi_x(dy),$$

$\varphi\in\mathscr{D}$ 为 $x(\varphi,\omega)$ 或 Φ_x 的**特征泛函** (characteristic functional). $c(\varphi)$ 连续,正定且满足 $c(0)=1$. 反之在给定具有这样性质的 $c(\varphi)$ 时,根据 Bochner-Minlos 定理,唯一确定以 $c(\varphi)$ 为特征泛函的 $\mathfrak{B}(\mathscr{D}')$ 上的概率测度 Φ. 即能在 $(\mathscr{D}',\mathfrak{B}(\mathscr{D}'),\Phi)$ 上构造以 $c(\varphi)$ 为特征泛函的广义随机过程.

至今为止被研究的广义随机过程的典型种类,有平稳的和各点具有独立值的广义随机过程. 关于平稳广义过程,⇀平稳过程[弱平稳广义过程][强平稳广义过程]. 其次,对于广义随机过程 $X(\varphi,\omega)$, 如果 $\varphi_1(t)\varphi_2(t)=0$, 则 $X(\varphi_1,\omega)$ 与 $X(\varphi_2,\omega)$ 便相互独立,即

$$c(\varphi_1+\varphi_2)=c(\varphi_1)c(\varphi_2)$$

成立,这时称 $X(\varphi,\omega)$ 为**各点独立(值)的广义随机过程** (random distribution with independent values at every point) ([5]).

$$c(\varphi)=\exp\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(\varphi(t),\varphi'(t),\cdots,\varphi^{(k)}(t))dt\right)$$

(但 f 连续且 $f(0,\cdots,0)=0$) 成为各点上独立的平稳广义随机过程的特征泛函的一个充分条件(当 $k=0$ 时也是必要条件) 是: 对每个 $s>0$, $\exp(sf(x_0,x_1,\cdots,x_k))$ 为 $(x_0,x_1,\cdots,x_k)\in\boldsymbol{R}^k$ 的正定函数. 这时还可以得到 f 的具体表达式. 特别当 $k=0$ 时,上述结论成立的充分必要条件是 $\exp f(x)$ 为无穷可分分布⁺的特征函数([5]).作为这样的例子,如对 Brown 运动取微分(广义函数意义下)所得到的广义随机过程(所谓的 **Gauss 白噪声** (Gaussian white noise)). 它的特征泛函是

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int|\varphi(t)|^2dt\right).$$

关于多变数的情形,有伊藤 ([10]),A. M. Яглом ([20]), Гельфанд-Н. Я. Виленкин([6]) 等人的许多研究. 此外, K. Urbanik (K. Урбаник) 将上面那样以 L. Schwartz 的理论为基础换成以 J. G.Mikusiński 的理论为基础,展开了广义随机过程的理论([17], [18]).

关于过程一般理论新近的发展,⇀[40].由 Р. Л. Добрушин ([41]) 所给出的平衡状态的一个概率模型开始了统计力学近代概率方法的研究.

【参】 [1] Z. Ciesielski, Hölder conditions for realizations of Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc., **99** (1961), 403—413; [2] P. Courrège, Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable, Sém. Théorie du Potentiel, dirigé par M. Brelot, G. Choquet, et J. Deny, 1962—1963; [3] J. L. Doob, Stochastic processes depending on a continuous parameter, Trans. Amer. Math. Soc., **42** (1937), 107—140; [4] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [4A] K. L. Chung (钟开莱)- J. L. Doob, Fields, optionality and measurability, Amer. J. Math., **87**(1965), 397—424; [5] И. М. Гельфанд, Обобщенные случайные процессы, ДАН СССР, **100** (1955), 853—856; [6] И. М. Гельфанд-Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа, оснащенные Гильбертовы пространства, Физматгиз, 1961; [7] K. Itô (伊藤清), Stochastic integral, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 519—524; [8] K. Itô(伊藤清),Stationary random distributions, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, **28** (1953), 209—223; [9] K. Itô (伊藤清), Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments, Trans. Amer. Math. Soc., **81** (1956), 253—263; [10] K. Itô(伊藤清),Isotropic random current, Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., **2** (1956), 125—132; [11] K. Karhunen, Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fenn., (A) **37** (1947), 1—79; [12] A. N. Kolmogorov (A. H. Колмогоров), Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. Math., 2, no. 3, 1933 (A. H. 柯尔莫哥洛夫,概率论基本概念,商务印书馆, 1952); [13] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948; [14] P. Lévy, Le mouvement brownien function d'un ou de plusieurs paramètres, Rend. Sem. Math. Univ. Padova, **22** (1963), 24—101; [15] H. P. McKean, Jr., Brownian motion with a several-dimensional time, Theory of Prob. Appl., **7** (1963), 335—354; [16] P. A. Meyer, Une présentation de la théorie des ensembles sousliniens application aux processus stochastiques, Sém. Théorie du Potentiel, dirigé par M. Brelot, G. Choquet, et J. Deny, 1962—1963; [17] К. Урбаник, Случайные процессы реализации которых являются обобщенными функциями. Теория вероятностей и ее применение, **1** (1956),146—149; [18] K. Urbanik (K. Урбник), Generalized stochastic processes, Studia Math., **16** (1957), 265—334; [19] N.

Wiener, Differential space, J. Math. and Phys., **2** (1923), 131—174; [20] A. M. Яглом, Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам, Теория вероятностей и ее применение, **2** (1957), 292—338; [21] J. R. Kinney, Continuity properties of sample functions of Markov processes, Trans. Amer. Math. Soc., **74** (1953), 280—302; [22] T. W. Anderson, Statistical analysis of time series, John Wiley, 1971; [23] M. S. Bartlet, An introduction to stochastic processes, Cambridge Univ. Press, 1955; [24] P. Billingsley, Statistical inference for Markov processes, Univ. Chicago Press, 1961; [25] R. B. Blackman-J. W. Tukey, The measurement of power spectra, Dover, 1959; [26] G. E. P. Box-G. M. Jenkins, Time series analysis; forecasting and control, Holden-Day, 1970; [27] D. R. Cox-H. D. Miller, The theory of stochastic processes, Methuen, 1965; [28] U. Grenander-M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series, John Wiley, 1957; [29] E. J. Hannan, Multiple time series, John Wiley, 1970; [30] E. J. Hannan, Time series analysis, Methuen, 1960; [31] G. J. Jenkins-D. G. Watts, Spectral analysis and its applications, Holden-Day, 1968; [32] M. Rosenblatt, Random processes, Oxford Univ. Press, 1962; [33] L. Takács, Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, John Wiley, 1967; [34] P. Whittle, Hypothesis testing in time series analysis, Thesis, Univ. Uppsala, 1951; [35] P. Whittle, Prediction and regulation by linear least-square methods, van Nostrand, 1963; [36] N. Wiener, Extrapolation, interpolation, and smothing of stationary time series, John Wiley, 1949; [37] H. O. A. Wold, A study in the analysis of stationary time series, Almqvist and Wicksell, 第二版 1954; [38] H. Kunita-S. Watanabe, On square integrable matingales, Nagoya Math. J., **30** (1967), 209—245; [39] P. A. Meyer, Intégrales stochastiques I—IV, Séminaires de Prob. 1, Univ. Strasbourg, 1967, Lecture notes in math. **39**, Springer, 72—162; [40] C. Dellacherie, Capacités et processus stochastiques, Springer, 1972; [41] Р. Л. Добрушин, Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности, Теория вероятностей и ее применение, **XIII. 4** (1968), 201—229.

Марков 过程 [英 Markov process 法 processus markovien 德 Markoffscher Prozess 俄 марковский процесс 日 マルコフ過程]设$\{X_t\}_{t\in T}$是概率空间$(\Omega,\mathfrak{B},P)$上定义的随机过程†,且随机变量X_t的状态空间† S为实数集$\boldsymbol{R}$,N维Euclid空间$\boldsymbol{R}^N$,或者一般地是满足第二可数公理的局部紧Hausdorff空间,而T为区间$[0,\infty)$或$\{0, 1, 2\cdots\}$(T为实轴上的区间或$\{\cdots, -1,0, 1, 2\cdots\}$等亦可).当任意地选取$T$内的点$s_1<s_2<\cdots<s_n<t$,给定$X_{s_1}$, $X_{s_2},\cdots, X_{s_n}$时的X_t的条件概率†分布,等于仅给定X_{s_n}时的X_t的条件概率分布,此时称$\{X_t\}_{t\in T}$为 **Марков 过程**. 此即下式以概率1成立.

$$(1)\ P(X_t\in A\,|\,X_{s_1}=x_{s_1},\cdots, X_{s_n}=x_{s_n}) = P(X_t\in A\,|\,X_{s_n}=x_{s_n}),\quad A\in\mathfrak{B}(S)$$

$\mathfrak{B}(S)$是包含S的开集合全体的最小的完全加法族†.

对于Марков过程$\{X_t\}_{t\in T}$,存在满足下列性质的函数$P(s, x, t, A)$, $s, t\in T$, $x\in S$, $A\in\mathfrak{B}(S)$,被称为$\{X_t\}_{t\in T}$的**转移概率**(transition probability). 其中$s\leqslant t$.

(2) $P(s, x, t, A)$当s, t固定时,关于A是概率测度,就x而言$\mathfrak{B}(S)$可测.

$$(2')\qquad P(s, x, s, A)=1,\ x\in A,\quad =0,\ x\notin A.$$

$$(3)\quad P(X_t\in A\,|\,X_s=x_s)=P(s, x_s, t, A)$$

(以概率1成立)

Chapman-Колмогоров 等式:

$$(4)\ P(s, x, u, A) = \int_S P(s, x, t, dy)\,P(t, y, u, A)\qquad (s<t<u)$$

关于X_s的分布除去在一个测度0的集合以外成立.

反之,对于给定的满足(2),(2′),(4)的函数$P(s, x, t, A)$,且对$\mathfrak{B}(S)$上给定的概率分布μ,存在以$P(s, x, t, A)$为转移概率而X_0的分布与μ一致的Марков过程$\{X_t\}_{t\in T}$. 在随机过程的等价性意义之下(→随机过程)它是唯一确定的. X_0的分布称为Марков过程$\{X_t\}_{t\in T}$的**初始分布**(initial distribution).

如果转移概率仅依赖t与s的差,即如果存在t, x, A的函数$P(t, x, A)$使得下式成立

$$P(s, x, t, A)=P(t-s, x, A)$$

则称此Марков过程为**时齐的**(temporally homogeneous). 又当S是加法群时,若存在s, t, A的函数$P(s, t, A)$使转移概率表示成

$$P(s, x, t, A)=P(s, t, A-x),$$

其中 $A-x=\{y-x\mid y\in A\}$

则称为是**空齐的** (spatially homogeneous). 当 $S=\boldsymbol{R}^N$ 时，空齐的 Марков 过程是可加过程†. 状态空间 S 为可数集的 Марков 过程称为 Марков 链†. 此外，轨道†以概率 1 连续(→随机过程)的 Марков 过程称为扩散过程†(→Марков 链，扩散过程).

Марков 过程的有限维分布†，当给定了初始分布时，由转移概率唯一地确定. 在这个意义下转移概率是 Марков 过程的特征量. A. H. Колмогоров 证明了当

$$T=[0,\infty),\ S=\boldsymbol{R}^N$$

时，若转移概率具有关于 Lebesgue 测度充分光滑的密度函数 $p(s,x,t,y)$，并满足保证轨道的连续性等的某些解析条件时，则 $p(s,x,t,y)$ 满足 Fokker-Planck 偏微分方程†. 反之，对于给定的 Fokker-Planck 偏微分方程，求满足它的转移概率唯一存在的条件的问题被提出来了(→[21]，扩散过程). W. Feller 将该方程扩张到某种类型的积分微分方程，用古典分析的方法，对这个问题做到了部分的解决([11]). 此外，C. H. Бернштейн, P. Lévy 等用随机微分方程尝试了概率论方式的研究，伊藤清对此进行了严密化([1]，[24]，[17]).

这个问题还与半群理论有关. 设 $B(S)$, $C(S)$ 分别是 S 上有界可测及有界连续的实函数的全体. 当 S 为非紧时，设 $C(S)$ 的函数之中，在 S 的 1 点紧化†的无穷远点收敛于 0 的全体函数的集合记为 $C_\infty(S)$. 若对于 $f\in B(S)$，用时齐的 Марков 过程的转移概率 $P(t,x,A)$，定义 $B(S)$ 上的算子 T_t 为

$$T_tf(x)=\int_s P(t,x,dy)f(y) \tag{5}$$

则算子族 $\{T_t\}$ 满足下列条件

(6) $T_sT_t=T_{s+t}$，T_t 是线性正算子†，且 $\|T_t\|\leqslant 1$.

$\{T_t\}$ 每每使 $B(S)$ 的子空间 $C(S), C_\infty(S)$ 不变，故可视为其上的算子族. 反之，假如 S 是紧的，给定 $C(S)$ 上的算子族$\{T_t\}$且满足(6)时，若用 F. Riesz 定理，则由关系(5)转移概率可唯一确定. 当 S 为非紧时，上面的论述对 $C_\infty(S)$ 成立. 由此可见，前述 Fokker-Planck 方程与 Марков 过程之转移概率的关系，在吉田-Hille 的半群理论范围内来考虑，情况就更为明显.

Feller 就一维扩散过程之情形，从半群的立场，确定了一切可能的边界条件，得到了二阶微分算子的本质上的表示(→扩散过程)，完全确定了一维扩散过程的解析构造([12]，[13]). 继之 E. Б. Дынкин ([7])，伊藤-H. P. McKean ([18])，D. B. Ray ([30]) 对此进行了研究，一维扩散过程的研究不论概率论方式的还是解析方式的，在某种意义下均告结束. 接着 G. A. Hunt ([16]) 研究了 Марков 过程与位势之间关系的一般理论，Feller ([14]，[15]) 进行了关于 Марков 过程的边值问题的研究. 结果关于 Марков 过程的概率性质与位势论、边值问题、算子论中的解析量之间的关系有了新的展望，同时，诸如轨道的连续性、强 Марков 性等，严密处理轨道的性质的方法已经建立，Марков 过程论不论内容还是形式都为之面目一新. 在这之前 Lévy 对于 Brown 运动及可加过程都进行了深刻的研究([23]，[24]). J. L. Doob 关于轨道的严密处理进行了系统的研究([4]).

现在将时齐的且具有连续的时间参数 t 的 Марков 过程，进行现代体系化，并在它的基础上叙述 Марков 过程的主要性质([8]).

【定义与基本性质】 设在 S 上添加作为孤立点的一点 ∂ 并记做 $\bar{S}$，且其 Borel 集全体的完全加法族为 $\mathfrak{B}(\bar{S})$. 在 $[0,+\infty)$ 上定义且于 $\bar{S}$ 上取值的右连续并至多是第一类不连续函数 w 之中，若 $w(t)=\partial$，则对所有的 $s\geqslant t$ 有 $w(s)=\partial$ 的函数全体记做 $\widetilde{W}$. 按惯例规定 $w(+\infty)=\partial$. 使 $w(t)=\partial$ 成立的最小的 t 记做 $\zeta(w)$. 其次，对于 $w\in\widetilde{W}$ 与 $t\in[0,+\infty)$，

$$w_t^-, w_t^+\in\widetilde{W}\ \text{由}\ w_t^-(s)=w(\min(t,s)),$$
$$w_t^+(s)=w(s+t)$$

来定义. 设 W 是 $\widetilde{W}$ 的子集，且关于映射 $w\to w_t^+$，w_t^- 是闭的，又设 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}(W)$ 是由

$$\{w \in W \mid w(t) \in A\} \ (A \in \mathfrak{B}(\bar{S}))$$

所表示的集合生成的完全加法族．往后常常把 $w(t)$ 写成 $X_t(w)$．此外设 $\mathfrak{B}_t$ 是由表示成 $\{w \in W \mid w_t^- \in B\}(B \in \mathfrak{B})$ 的集合之全体构成的 $\mathfrak{B}$ 的子完全加法族．若有 $(W, \mathfrak{B})$ 上的概率测度族 $\{P_x\}(x \in \bar{S})$，满足下列诸条件：

(7) 对于 $B \in \mathfrak{B}$，$P_x(B)$ 就 x 而言 $\mathfrak{B}(\bar{S})$ 可测，

(8)　　$P_x(X_0(w) = x) = 1$，$x \in \bar{S}$，

Марков 性 (Markov property)：以 P_x 测度 1 满足

(9)　$P_x(w_t^+ \in B \mid \mathfrak{B}_t) = P_{X_t(w)}(B)$，$B \in \mathfrak{B}$

则称 $\mathfrak{M} = (X_t, W, P_x \mid x \in \bar{S})$ 为 **Марков 过程**．这是在空间 S 中移动的粒子的随机运动，其概率分布与过去的履历无关者的数学模型 (→Markov 链)．S 称为 Марков 过程 $\mathfrak{M}$ 的**状态空间** (state space)，W 称为**轨道空间** (path space)，W 的元素 w 称为**轨道** (path)．P_x 表示支配从 x 出发的粒子的概率分布．鉴于认为轨道到达 ∂ 则粒子消灭了的解释，$\zeta(w)$ 称为**生存时间** (life time, terminal time)，∂ 称为**死点** (terminal point)．

那末若任取 $s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ 与 t，则对于各 x，以 P_x 测度 1 有

$$\begin{aligned} &P_x(X_{s_n+t} \in A \mid X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \\ &= P_x(X_{s_n+t} \in A \mid X_{s_n}) \\ &= P_{w(s_n)}(X_t \in A) \end{aligned}$$

成立．这就表示 $\{X_t\}$ $(t \geqslant 0)$ 对于各 x，以 x 处的单位分布 δ_x 为初始分布；为 $\bar{S}$ 上的前述意义下的 Марков 过程．这个过程的转移概率由下式定义

$$P(t, x, A) = P_x(X_t \in A),$$

无例外点地满足

$$(4')\ P(s+t, x, A) = \int_S P(s, x, dy) P(t, y, A).$$

$\bar{S}$ 上的实函数且在 ∂ 的值为 0 者，常常与 S 上的实函数同样看待，它们之中具有有界可测，有界连续等性质者的全体用 $B(S)$，$C(S)$ 或 $C_\infty(S)$ 表示．若令 T_t 为

$$T_t f(x) = E_x(f(X_t))$$

$$= \int_S P(t, x, dy) f(y),\ f \in B(S)$$

则 $\{T_t\}$ $(t \geqslant 0)$ 是 $B(S)$ 上的算子族且满足 (6)．此处 $E_x()$ 是表示关于 P_x 的积分．再令 $\{T_t\}$ 的 Laplace 变换为

$$\begin{aligned} G_\alpha f(x) &= E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\, dt\right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\alpha t} T_t f(x)\, dt,\ \alpha > 0 \end{aligned}$$

则 G_α 是 $B(S)$ 上的线性正算子†(即把非负函数 $f(x)$ 映射到非负函数)，$\|G_\alpha\| \leqslant 1/\alpha$ 且满足**预解方程** (resolvent equation)：

(10)　$G_\alpha - G_\beta + (\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta = 0$

$\{T_t\}$ 及 G_α 分别称为 $\mathfrak{M}$ 的**半群** (semi-group) 及 **Green 算子** (Green's operator) 或**预解算子** (resolvent operator)．如果 $C(S)$ 在 $G_\alpha(\alpha > 0)$ 下是不变的，则 $\mathfrak{R} = G_\alpha\{C(S)\}$ 与 α 无关，而且 $G_\alpha^{-1}\{0\} = \{0\}$．因此 $\mathfrak{G} = \alpha I - G_\alpha^{-1}$ 可以在 $\mathfrak{R}$ 上定义，而且它与 α 无关．称 $\mathfrak{G}$ 为 $\mathfrak{M}$ 的**生成算子** (generator)．特别是 $\{T_t\}$ 亦可视为 $C(S)$ 上的半群，且若它还于 $t = 0$ 处为强连续，则 $\mathfrak{G}$ 与吉田-Hille 意义下的生成算子一致 (→算子半群和发展方程)．($C(S)$ 譬如被 $C_\infty(S)$ 替代时亦同样，从而有必要指出 G_α 是哪一个子空间的算子．) 有时，Марков 过程的半群 $\{T_t\}$ 如在 $C_\infty(S)$ (但 S 是紧的时为 $C(S)$) 上强连续则称此过程为 **Feller 过程** (Feller process)．

关于 Марков 过程的存在与唯一性等有如下事实：1) Марков 过程当转移概率与 W 确定时，则它唯一确定．但对于给定的转移概率，W 的选择具有任意性．2) 当 S 是紧的时，若 $P(t, x, A)$ $(x \in \bar{S}, A \in \mathfrak{B}(\bar{S}))$ 满足 (2)，(2′)，(4′) 及下面的条件 (11)，则存在以 $P(t, x, A)$ 为转移概率的 Марков 过程．再者此时可以选取 $W = \widetilde{W}$．

$$(11)\ \lim_{h \downarrow 0} \sup_{t \leqslant h, x \in S} P(t, x, U^\varepsilon(x)^c) = 0,$$

$$\varepsilon > 0,$$

其中 $U^\varepsilon(x)$ 是 x 的 ε 邻域．又当 $P(t, x, A)$ 满足 (2)，(2′)，(4′) 及下列的条件 (11′)时，

有轨道为连续的 Марков 过程即扩散过程†与之对应.

(11′) $\sup_{t\leqslant h, x\in S} P(t, x, U^{\varepsilon}(x)^c) \leqslant h\phi_{\varepsilon}(h)$,

此处之 $\phi_{\varepsilon}(h)$ 是 $h\downarrow 0$ 时收敛于 0 的单调函数. S 非紧的时, 在关于无穷远点处行为的某种限制下, 若类似于 (11), (11′) 的条件成立时, 可分别得到同样的结论 ([10]). 3) S 为紧的(非紧的) 时, 若存在 $C(S)$ ($C_{\infty}(S)$) 上的半群 $\{T_t\}$, 满足 (6) 且于 $t=0$ 处强连续, 则满足 (11) 的转移概率存在且 (5) 成立. 从而存在具有以 $\{T_t\}$ 的向 $B(S)$ 上的扩张为半群的 Марков 过程. 此外, 关于轨道的连续性, 有对于一般的随机过程亦通用的 Л. В. Серегин 之精密的结果 ([31]), ([6], [29], [30]).

Марков 过程 $\mathfrak{M}$, 当 $P(t,x,S)=1$ 对于各 x, t 成立时, 称为**守恒的** (conservative). S 中的一点 x, 若对于 x 的任一邻域及任一 $t>0$, 从 x 出发的轨道在时刻 t 后以概率1折回 U 时, 称 x 为**再归点** (recurrent point). 在某些条件下, 它等价于对于 x 的任一邻域 U,

$$\int_0^{\infty} P(t, x, U)dt = \infty$$

成立. S 的点全为再归点时, 称 $\mathfrak{M}$ 是**再归的** (recurrent), 否则称为**非再归的** (transient). 若 $\mathfrak{M}$ 为再归的, 则自然是守恒的. 又若从 S 的任意点到其它点的任一邻域, 以有限时间到达的概率为1时, 有的称 $\{X_t\}$ 为再归的, 这种场合在适当的正则条件下可以证明具有混合性, 从而具有遍历性† (→遍历理论). 如果 $\{X_t\}$ 的转移概率具有全测度 1 的不变测度†时, 若初始分布为其不变测度, 则 Birkhoff 的个体遍历定理†成立([4]).

设 σ 是于W上定义在 $[0,+\infty]$ 上取值的 $\mathfrak{B}$ 可测函数, w_{σ}^-, w_{σ}^+ 分别由

$$w_{\sigma}^-(t) = w(\min(t,\sigma(w))),$$
$$w_{\sigma}^+(t) = w(t+\sigma(w))$$

所定义, 令 $\mathfrak{B}_{\sigma}$ 为 $\{w\in W \mid w_{\sigma}^- \in B\}(B\in\mathfrak{B})$ 所示的集合之全体, 且

$$\mathfrak{B}_{\sigma+} = \bigcap_n \mathfrak{B}_{\sigma+(1/n)}.$$

对于各 t, $\{w \mid \sigma(w) < t\} \in \mathfrak{B}_t$ 被满足时, 称 σ 为 **Марков 时间** (Markov time). 如果对于任意的 Марков 时间 σ, 于 S 的各点 x,

(9′) $P_x(w_{\sigma}^+ \in B \mid \mathfrak{B}_{\sigma+}) = P_{w(\sigma)}(B)$, $B\in\mathfrak{B}$

以 P_x 测度 1 成立, 则称 $\mathfrak{M}$ 具有**强 Марков 性** (strong Markov property), 称这样的 $\mathfrak{M}$ 是**强 Марков 过程** (strong Markov process). 由于常数 t 是 Марков 时间, 所以强 Марков 性是 Марков 性的精密化. Марков 过程 $\mathfrak{M}$ 具有强 Марков 性的一个充分条件是: 在 $\mathfrak{M}$ 的 Green 算子之下 $C(S)$ 是不变的. 对于 $\bar{S}$ 的子集 A, 若对 w 存在 $t>0$ 使 $w(t)\in A$, 则令 $\sigma_A(w)$ 为这样 t 的下确界, 否则令其为∞, 称为 A 的**到达时间** (hitting time) (有时以 $t\geqslant 0$ 代替上面的 $t>0$). 若 A 是开集时, 则 σ_A 是 Марков 时间. 特别当W仅由在 $[0,\zeta(w))$ 上连续的 w 构成时, 则对任何闭集 A, σ_A 也是 Марков 时间. $P_x(X_{\sigma_A}\in E)$ 在 x 固定时, 在某些条件下看做 E 的函数, 构成具有支集为 $\bar{A}$ 的 $(S, \mathfrak{B}(S))$ 上的测度. 称它为由 x 到 A 的**到达测度** (hitting measure), 并记做 $H_A(x,\cdot)$. 另一方面, 对于 A, σ_{A^c} 称为在 A 处的**逗留时间** (staying time), 并记做 τ_A. 当 $\mathfrak{M}$ 为强 Марков 过程时, 在一点 a 处的逗留时间 τ_a 服从指数分布†: $P_x(\tau_a > t) = e^{-\lambda(a)t}$, 其中

$$0\leqslant \lambda(a) \leqslant +\infty.$$

特别当 $\lambda(a)=\infty$ 时称 a 为**瞬时状态** (instantaneous state), $\lambda(a)=0$ 时称 a 为**套点** (trap).

σ 为 Марков 时间且 $E_x(\sigma)<\infty$ 时, 对于具有生成算子 $\mathfrak{G}$ 的强 Марков 过程 $\mathfrak{M}$, 有下式成立. **Дынкин 公式**: 对于属于 $\mathfrak{G}$ 的定义域之 f

$$f(x) = -E_x\left(\int_0^{\sigma} \mathfrak{G}f(X_t)dt\right) + E_x(f(X_{\sigma})),$$

以及生成算子的 Дынкин 表示: 当点 x 为非套点时,

$$\mathfrak{G}f(x) = \lim_{U\downarrow(x)} \frac{E_x(f(X_{\tau_U})) - f(X)}{E_x(\tau_U)}, \quad f\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G}),$$

当点 x 为套点时,

$$\mathfrak{G}f(x)=0.$$

其中U是x的开邻域. 特别当S是紧的，而且$C(S)$在G_α之下是不变的，则$\mathfrak{G}$被这个公式确定.

$\mathfrak{M}$为强 Марков 过程时，对于$B\in\mathfrak{B}_{0+}$，有$P_x(B)=0$或1. 这称为**Blumenthal 0-1律**(Blumenthal's zero-one law)([10],[18]).

【对应于 Марков 过程的位势论】 Newton 位势†与$\boldsymbol{R}^N(N\geqslant 3)$上的 Brown 运动之间有着自然的对应(→Brown 运动). 设 Brown 运动的转移概率关于 Lebesgue 测度的密度函数为$P(t,x,y)$，则 Newton 核$2^{-1}\pi^{-N/2}\Gamma(N/2-1)|x-y|^{2-N}$为

$$\int_0^\infty P(t,\ x,\ y)dt.$$

到解析集†A的到达时间σ_A是 Марков 时间，且A的容量†是否为正,取决于由任意一点x出发的轨道到达A的概率是否为正，x是否为A的正则点†取决于$P_x(\sigma_A=0)=1$或0. 此外,A的容量本身亦能用概率论的方式定义之. 对于$\boldsymbol{R}^N$的区域D,若f是边界∂D上的连续函数,则以f为边值的 Dirichlet 问题†的 Perron-Brelot 解,由

$$E_x(f(X_{\partial D}))=\int_{\partial D}f(y)H_{\partial D}(x,\ dy)$$

给出,因此到达测度与调和测度†相一致. 又此解当∂D之各点为D^c的正则点时，且仅当此时为通常意义下的解.其次,当f为$\boldsymbol{R}^N$上的上调和函数时,则$f(x_t(w))$以概率1关于t连续([5]). 以这样的事实为背景,能够构成对应于一般 Марков 过程的位势论. 例如 Riesz 位势†是对应于对称稳定过程†的位势(→可加过程).

说明这个理论之际，首先引进记号. 设μ为$(\bar{S},\mathfrak{B}(\bar{S}))$上的概率测度，$\mathfrak{B}(\bar{S})$由$\mu$的完备化记为$\mathfrak{B}(\bar{S})_\mu$. 关于全部$\mu$的共通部分

$$\bigcap_\mu \mathfrak{B}(\bar{S})_\mu$$

记以$\overline{\mathfrak{B}(\bar{S})}$. 又设$P_\mu$是由

$$P_\mu(\Lambda)=\int_S\mu(dx)P_x(\Lambda)$$

所定义的$(W,\mathfrak{B})$上的测度,若$\mathfrak{B}_t,\mathfrak{B}_\sigma,\mathfrak{B}$的由全部$P_\mu$的完备化的共通部分分别是$\bar{\mathfrak{B}}_t,\bar{\mathfrak{B}}_\sigma,\bar{\mathfrak{B}}$时,则它们都是完全加法族.将 Марков 过程$\mathfrak{M}$的 Марков 时间与强 Марков 性的定义用$\bar{\mathfrak{B}}_t,\bar{\mathfrak{B}}_\sigma,\bar{\mathfrak{B}}$代替前面的$\mathfrak{B}_t,\mathfrak{B}_\sigma,\mathfrak{B}$而加以修改. Марков 过程$\mathfrak{M}$若具有这种意义下的强 Марков 性，且具有下面的**拟左连续性**(quasi-left-continuity)时，则称$\mathfrak{M}$为**Hunt 过程**(Hunt process). Марков 时间的递增序列$\{\sigma_n\}$在$\rho_n\uparrow\sigma$时,对于$\sigma(w)<\infty$的w，$X_{\sigma_n}\to X_\sigma$除去P_μ测度0的集合均成立，称为拟左连续性. 若$B(S)$上的半群$\{T_t\}$作为$C_\infty(S)$(S是紧的时为$C(S)$)上的半群是吉田-Hille 意义下的半群时,则存在对应于它的 Hunt 过程.

设$\mathfrak{M}$是 Hunt 过程,对于$\mathfrak{B}(S)$可测的扩张的实函数f(允许$\pm\infty$),

$$Uf(x)=E_x\left(\int_0^\infty f(X_t)dt=\int_0^\infty T_tf(x)dt\right)$$

确定时，称$Uf(x)$为f的**位势**(potential)，称U为**位势算子**.若对于$f,g\geqslant 0$，Uf，Ug是确定的，且在f的支集上$Uf\leqslant Ug$成立，则在S上处处有$Uf\leqslant Ug$. 即U满足**最大值原理**(maximum principle). 反之,有如下之事实. 设$C(S)$中具有紧的支集的函数的集合为$C_0(S)$，而且U是$C_0(S)$上的正线性算子，它的象是$C_\infty(S)$中的稠密集合. 如果U满足最大值原理并且存在$C_0(S)$中的函数序列$\{f_n\}$使得$Uf_n\uparrow 1$，则存在以U为位势算子的 Hunt 过程.

其次,对于 Марков 过程$\mathfrak{M}$，若$\overline{\mathfrak{B}(\bar{S})}$可测的函数$f$为非负的,且对各$t\geqslant 0$有

$$e^{-\alpha t}T_tf\leqslant f$$

成立,当$t\to 0$时$e^{-\alpha t}T_tf(x)\to f(x)$，则称$f$关于$\mathfrak{M}$是**$\alpha$超过的**($\alpha$-excessive)($\alpha\geqslant 0$)，特别当$\alpha=0$时称为**是超过的**(excessive). 此处T_t向非负$\overline{\mathfrak{B}(S)}$可测函数有自然的扩张. 此外对于$f\geqslant 0$若$Uf$是确定的,则$Uf$是超过的. $\mathfrak{M}$为 Hunt 过程时,则任意的超过的函数f能唯一地分解为如下两个超过的函数之和

$$f=h+g,$$

其中h对于任意相对紧的开集G满足

$$h(x) = E_x(h(X_{\sigma_{G^c}})),$$

而 g 对于 $\lim_{t \uparrow \zeta} X_t(w)$ 为（S 之一点紧化中的）无穷远点的 w，满足 $\lim_{t \uparrow \zeta} g(X_t(w)) = 0$. 上述的分解称为 f 的 **Riesz 分解**（Riesz decomposition）. 特别当 $\mathfrak{M}$ 为 Brown 运动时，超过函数即为上调和函数，上述之分解与调和函数论中的 Riesz 分解是一致的，h 是不超过 f 的最大的调和函数. 在 Hunt 过程中若 f 是超过函数时，则 $f(X_t(w))$ 为 t 的右连续且充其量是第一种不连续函数. 又解析集的正则点的定义，亦可大体上如同 Brown 运动那样来给出，基于这一点，对状态空间 S 引进所谓自然拓扑（natural topology）或细拓扑（fine topology）. 按这个拓扑，所有超过函数是连续的. 若位势 U 还满足若干假定时，容量等的定义亦能与 Brown 运动时平行地给出. 这些位势的核，不一定像 Newton 核那样是对称的. 关于 Dirichlet 问题及调和函数的 Martin 表现等也有从概率论立场出发的研究工作，这种情况亦与古典的结果有广泛的类似性（→Марков 链）.

以上主要是针对非再归 Марков 过程的位势论，但对于再归 Марков 过程的位势论亦可建立. 对二维 Brown 运动的对数位势就是它的典型，可是主要的结果还限于 Марков 链的情形（[20]）（还有→[10]，[16]，[18]）.

【加性泛函与乘性泛函】 加性泛函起初与 Brown 运动的局部时间⁺与 Марков 过程的时间变换相关联而被引进，其后与位势论、鞅论等相关联而被精密地研究，在 Марков 过程的研究上起了重要的作用.

对于 Марков 过程 $\mathfrak{M}$，t 与 w 之函数

$$\varphi = \varphi_t(w)$$

若满足以下条件时，则称 φ 为 $\mathfrak{M}$ 的（右连续，一致的）**加性泛函**（additive functional）.

1）$-\infty < \varphi_t(w) \leqslant \infty$；2）关于 $t(<\zeta)$ 右连续，且 $\varphi_{\zeta-}(w)$ 存在，$t \geqslant \zeta$ 时 $\varphi_t(w) = \varphi_{\zeta-}(w)$；3）$t$ 固定时就 w 而言 $\mathfrak{B}_t$ 可测；4）对于任一 t，s

(12) $\quad \varphi_{s+t}(w) = \varphi_s(w) + \varphi_t(w_s^+).$

此外，若 φ 除满足 1)，2)，3) 外，取代 4) 的是 (12) 对各 t，μ 除 P_μ 测度 0 外均成立时，称 φ 为 $\mathfrak{M}$ 的**殆加性泛函**（almost additive functional）. 两个（殆）加性泛函 φ，ϕ，对各 t，μ 除 P_μ 测度 0 外相等时称为等价. 对于 φ，若存在与 φ 等价且仅取非负值的（殆）加性泛函时，称 φ 为非负的. 对连续的殆加性泛函亦按同样的意义去理解.

若 $\alpha = \alpha_t(w)$ 为满足下述条件的 t，w 之函数时，称 α 为 $\mathfrak{M}$ 的（右连续，一致的）**乘性泛函**（multiplicative functional）.

1′) $\quad 0 \leqslant \alpha_t(w) < \infty$；

2′) $\alpha_t(w)$ 关于 t 右连续（$t < \zeta$）且左 $\alpha_{\zeta-}$ 存在，对于 $t \geqslant \zeta$ 有 $\alpha_t = \alpha_{\zeta-}$；3′) 固定 t 时就 w 而言 $\mathfrak{B}_t$ 可测；4′) 对于任一 t 与 s 有

(12′) $\quad \alpha_{t+s}(w) = \alpha_s(w)\alpha_t(w_s^+).$

加性泛函的全体与乘性泛函的全体，按下列关系构成一一对应：

(13) $\quad \alpha_t(w) = \exp(-\varphi_t(w)),$

$$\varphi_t(w) = -\log \alpha_t(w).$$

可以像加性泛函一样，定义乘性泛函的等价性及殆乘性泛函及其连续性、非增加性等. 此外，由 (13) 当对应的加性泛函为连续或非负时，则称 α 是连续或非增加的.

非负的加性泛函 φ 可以唯一地分解成三个非负的泛函之和

$$\varphi_t(w) = \varphi_t^{(1)}(w) + \varphi_t^{(2)}(w) + \varphi_t^{(3)}(w).$$

其中 $\varphi^{(1)}$ 是连续的，$\varphi^{(2)}$，$\varphi^{(3)}$ 仅由跳跃而单调地增加，$\varphi^{(2)}$ 与 $\mathfrak{M}$ 的轨道没有公共的不连续点，$\varphi^{(3)}$ 仅在 $\mathfrak{M}$ 的轨道之不连续点处增加. $\mathfrak{M}$ 的轨道的连续性与 $\varphi^{(3)} \equiv 0$ 是等价的，即使轨道是连续的，不一定有 $\varphi^{(2)} \equiv 0$，而在 Brown 运动之场合，对任意非负的 φ 有

$$\varphi^{(2)} \equiv \varphi^{(3)} \equiv 0,$$

于是可知 φ 是连续的.

若 φ 是非负的加性泛函，当

(14) $\quad u_\alpha(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} d\varphi_t(w)\right)$

为有限时，则 $u_\alpha(x)$ 是 α 超过函数. 反之，α 超过函数在下述场合，可用非负的加性泛函表

示成(14)的形式. 设 $\mathfrak{M}$ 是 Hunt 过程且

$$W = \widetilde{W}.$$

设 $(S, \mathfrak{B}(S))$ 上有如下的 $\mathfrak{M}$ 的**参考测度** (reference measure) μ_0: 对于任一 α, α 超过函数除开一个 μ_0 测度 0 的集合外为 0 时, 则处处为 0. 此时, 有限的 α 超过函数 u_α 可用非负的加性泛函 φ 表示成 (14) 形式的充分必要条件是, 对于 Марков 时间的增加序列 $\{\tau_n\}$ 且 $\sigma_n \uparrow \zeta$ 者, 有 $E_x(e^{-\alpha\sigma_n}u_\alpha(x_{\sigma_n})) \to 0$ 成立. 此时还可以挑选 $\varphi^{(3)} = 0$ 者作 φ. 从而 $\varphi^{(3)} = 0$ 之 φ 与满足上面条件之 u_α 的对应是一一的. 自然也有挑选 $\varphi^{(3)} \neq 0$ 之 φ 的情形, 如果包括这样的 φ 时, 对应就不是一一的. 又, 为选取与 u_α 对应的 φ 为连续的, 其充分必要条件是, 对于任意的 Марков 时间的增加序列, 令 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \sigma$ 时, $E_x(e^{-\alpha\sigma_n}u_\alpha(x_{\sigma_n})) \to E_x(e^{-\alpha\sigma}u_\alpha(x_\sigma))$ 成立. 对于 u_α, 为有连续的 φ 与之对应, 还有如下的简单的充分条件. 1) 对于有界的 u_α,

$$e^{-\alpha t}T_t u_\alpha(x) \to 0 (t \to \infty);$$

2) 关于 x 一致地

$$e^{-\alpha t}T_t u_\alpha(x) \to u_\alpha(x) (t \to 0).$$

以上的叙述主要是关于非负的 φ 的, 此外, 对于 φ_t 关于 $\mathfrak{B}_t$ 构成上鞅[†]的 φ, 也有些研究工作. 特别, 平均值为 $0(E_x(\varphi_t) = 0)$ 的 φ 在 Марков 过程的变换上的应用也是重要的. 加性泛函除此之外在 Dirichlet 积分[†] 的概率论方式的推广及 Lévy 测度[†]之推广均被应用.

此外, 以结合律

$$\varphi_s^t(w) + \varphi_u^t(w) = \varphi_u^s(w),$$

或

$$\alpha_s^t(w)\alpha_u^t(w) = \alpha_u^s(w),\ s \leqslant t \leqslant u,$$

代替 (12) 及 (12') 的非时齐的加性或乘性泛函也曾被研究 ([10], [18], [26], [32], [33]).

【Марков 过程的变换】 由 Марков 过程经一定的运算而构成另外的 Марков 过程总称之为 Марков 过程的变换, 今举出其重要的例子. 此外基于随机积分[†]的变换→Brown 运动, 可加过程, 鞅.

i) 基于乘性泛函的变换. 设 α 为 Марков 过程 $\mathfrak{M}$ 的乘性泛函, 且对各 x 满足

$$E_x(\alpha_t) \leqslant 1$$

并 $P_x(\alpha_\sigma = 1) = 1$. 令

$$P^\alpha(t, x, \Gamma) = E_x(\alpha_t \chi\Gamma(x_t))(\Gamma \in \mathfrak{B}(S)),$$

$$P^\alpha(t, x, \{\partial\}) = 1 - P^\alpha(t, x, S),$$

则 $P^\alpha(t,x,E)$ 是 $\bar{S}$ 上的转移概率, 对于它 Марков 过程 $\mathfrak{M}^\alpha = \{S, W^\alpha, P_x, x \in \bar{S}\}$ 与之对应. 称 $\mathfrak{M}^\alpha$ 为 $\mathfrak{M}$ 的基于乘性泛函 α 的变换. W^α 可以取为 $\widetilde{W}$, 而特别当 α 具有下述的性质时, 则 $\mathfrak{M}$ 为强 Марков 过程时, $\mathfrak{M}^\alpha$ 亦为强 Марков 过程. 对于殆乘性泛函 α, 若下述之条件成立, 也有同样的事实. 条件是, 对于任一 Марков 时间 σ 及满足 $\tau \geqslant \sigma$ 的 $\mathfrak{B}$ 可测的 τ, 以及任一 S 上的有界测度 ν, 除去 P_ν 测度 0 的一个集合外有

$$\alpha_\tau(w) = \alpha_\sigma(w)\alpha_{\tau-\sigma}(w_\sigma^+).$$

反之, 设给定同一状态空间上的两个 Марков 过程 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$, 其轨道空间皆是 $\widetilde{W}$. 此时若 $\mathfrak{M}'$ 的概率分布 P'_x 关于 $\mathfrak{M}$ 之 P_x 为绝对连续时, 则 $\mathfrak{M}'$ 是 $\mathfrak{M}$ 的基于某殆乘性泛函 α 的变换. 下面列举这样的变换的具体例子.

1) 消灭. α 满足 $0 \leqslant \alpha_t \leqslant 1$ 时, 基于 α 的变换称为**消灭** (killing). 实际上 $\mathfrak{M}^\alpha$ 是将沿着 $\mathfrak{M}$ 的轨道 W 前进的粒子, 以到 t 的生存概率为 α_t 那样被消灭 (飞跃到 ∂) 而得到的 Марков 过程. 特别当 $c(x)$ 是 S 上的非负有界连续函数时, 令

$$\alpha_t(w) = \exp\left(-\int_0^t c(X_s(w)ds)\right),$$

则 α 满足上面的条件, 又当 $\{T_t\}$ 为 $C(S)$ 上的半群且具有生成算子 $\mathfrak{G}$ 时, $\mathfrak{M}^\alpha$ 的半群 $\{T_t^\alpha\}$ 亦为 $C(S)$ 上的半群, 且其生成算子 $\mathfrak{G}^\alpha$ 与 $\mathfrak{G}$ 有同一定义域且有 $\mathfrak{G}^\alpha = \mathfrak{G} - c$ ([19]).

2) 漂移变换. 设 φ_t 为满足

$$E_x(\varphi_t) = 0,\ E_x(\varphi_t^2) < \infty$$

的连续加性泛函, 且 ψ_t 是根据

$$E_x(\varphi_t^2) = E_x(\psi_t) < \infty$$

而由 φ_t 所确定的连续非负加性泛函时, 则

$$\alpha_t(w) = \exp(\varphi_t - \psi_t/2)$$

是乘性泛函，且由它所确定的变换称为**漂移**(drift)**变换**. 特别当 $\mathfrak{M}$ 为N维 Brown 运动，且 $b_1,\cdots,b_N$ 为有界可测时，取

$$\varphi_t=\int_0^t\sum_{i=1}^N b_i(X_s)dX_i(s)$$

(随机积分),

$$\psi_t=\frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i=1}^N b_i^2(X_s)\,ds,$$

则 α_t 给出漂移变换. 若 $b_1,\cdots,b_N\in C_\infty(S)$, 则 $\mathfrak{M}^\alpha$ 的半群把 $C_\infty(S)$ 映入到 $C_\infty(S)$ 中，若 f 在 S 上直到二阶导数为有界连续时，则 f 在 $\mathfrak{G}^\alpha$ 的定义域中且有

$$\mathfrak{G}^\alpha f=\frac{1}{2}\Delta f+\sum_{i=1}^N b_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

([9],[27]).

3) 上调和变换. 设 u 是 $\mathfrak{M}$ 的超过函数，令 $A=\{x|0<u(x)<\infty\}$, 若 $X_0(w)\in A$ 时令

$$\alpha_t(w)=u(X_t(w))/u(X_0(w)),X_0(w)\notin A$$

时令 $\alpha_t(w)=0$, 则 α_t 是乘性泛函. $\mathfrak{M}$ 的基于 α 的变换(**上调和变换** (superharmonic transformation)) 是由 Doob 引进的. 其转移概率 $P^\alpha(t,x,\Gamma)$, 当 $x\in A$ 时为

$$u(x)^{-1}\int_\Gamma P(t,x,dy)u(y);\ x\notin A$$

且 $t>0$ 时为 0; $x\notin A$ 且 $t=0$ 时为 $\delta_x(\Gamma)$. 特别当 $\mathfrak{M}$ 是 Hunt 过程且 $C(S)$ 在 $\mathfrak{M}$ 的 Green 算子下是不变的，又 u 是连续的且满足

$$0<c\leqslant u\leqslant k<\infty$$

时，则 $\mathfrak{M}^\alpha$ 的 Green 算子亦具有同样的性质，可由 $\mathfrak{G}^\alpha f=u^{-1}\mathfrak{G}(uf)$ 给出. 其中

$$\mathfrak{D}(\mathfrak{G}^\alpha)=\{f|fu\in\mathfrak{D}(\mathfrak{G})\}$$

([9]).

ii) 时间变换. 此处以稍广的意义解释**时间变换** (time change), 考虑以下的例子.

4) 基于加性泛函的时间变换. 设 $\mathfrak{M}$ 为 Hunt 过程，且 φ 为连续，非负并满足

$$P_x(\varphi_0=0)=1$$

的加性泛函. 又设 S^* 为满足

$$P_x(\varphi_t(w)>0|\ 各\ t>0)=1$$

的 x 的全体，并假定 S^* 为局部紧的. 又 $\widetilde{W}^*$ 为 S^* 上的轨道的集合，它相当于 S 时的 $\widetilde{W}$, 而 $\mathfrak{B}^*$ 为对应的完全加法族，若定义 P_x^* 为

$$P_x^*(B)=P_x(x^{\varphi_t^{-1}(w)}(w)\in B)\ (B\in\mathfrak{B}^*),$$

则 $\mathfrak{M}^*=(S^*,\widetilde{W}^*,P_x^*,x\in\bar{S}^*)$ 是 S^* 上的 Hunt 过程，并称为由$\mathfrak{M}$依 φ 基于时间变换得到的 Марков 过程. 其中 φ_t^{-1} 是 φ_t 的右连续反函数. 实际上 $\mathfrak{M}^*$ 大致说来可视为以

$$X_t^*(w)=X_{\varphi_t^{-1}(w)}(w)$$

为轨道的 Марков 过程，其 Green 算子由

$$E_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\varphi_t}f(X_t)\,d\varphi_t\right)$$

给出. 假设 $\mathfrak{M}$ 的 Green 算子把 $C(S)$ 映入 $C(S)$ 且 $a(x)$ 是 S 上的连续函数使得

$$0<c\leqslant a(x)\leqslant k<\infty,$$

又设

$$\varphi_t(w)=\int_0^t a(X_s(w))ds,$$

则 $S^*=S$, $\widetilde{W}^*=\widetilde{W}$, $\mathfrak{B}^*=\mathfrak{B}$, 并且 $\mathfrak{M}^*$ 的 Green 算子也把 $C(S)$ 映入 $C(S)$. $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^*$ 的生成算子 $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$ 的定义域是一致的，并有

$$\mathfrak{G}^*f=a^{-1}\mathfrak{G}f.$$

又若两个 Hunt 过程 $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ 具有同样的状态空间，其轨道空间W与 $\widetilde{W}$ 一致，且到达测度之族 $\{H_k(x,\cdot)\}$ 一致时，则可依单调递增的加性泛函基于时间变换从其一方变到另一方. 其逆亦真 ([2]).

5) 从属运算. 起初由 S. Bochner 所引进，其后被推广如下. 设 $e^{-\psi(\lambda)}$ 是支集为 $[0,\infty)$ 的无穷可分分布†的 Laplace 变换†, 且 $F_t(\cdot)$ 是以 $e^{-t\psi(t)}$ 为 Laplace 变换的分布. 若 $\{T_t\}$ 为某 Banach 空间上的吉田-Hille 半群，令

$$T_t^\psi=\int_0^\infty T_sF_t(ds)$$

(Bochner 积分), 则 $\{T_t^\psi\}$ 亦为半群，并称为 $\{T_t\}$ 的基于 ψ 的**从属运算** (subordination). 设 $\{T_t\}$ 的生成算子为 $\mathfrak{G}$, 则 $-\psi(-\mathfrak{G})$ 为$\{T_t^\psi\}$ 的生成算子.

今设 $\{T_t\}$ 是 $C(S)$ $(C_\infty(S))$ 上的半群，非负且 $T_t1=1$. 又假定 $\{X_t\}$ 为对应于半群

$\{T_t\}$ 的 Марков 过程，且 $\{\Psi(t)\}$ 为与它独立的加性过程并满足

$$E(e^{-\lambda\psi(t)}) = e^{-t\psi(\lambda)}.$$

$\{Y_t\}$ 由下式定义时

$$Y_t(w) = X_{\psi(t,w)}(w)$$

则 $\{Y_t\}$ 是对应于半群 $\{T_t^\psi\}$ 的 Марков 过程. 这样从 $\{X_t\}$ 基于可加过程 $\{\Psi(t)\}$ 而得到 $\{Y_t\}$, 也称为从属运算. 特别当 $\{\Psi(t)\}$ 为 α 阶单侧稳定过程(→可加过程)时, 称为 α 阶从属运算. $\{X_t\}$ 为可加过程时, 则由 $\{X_t\}$ 经过从属运算而得到的 Марков 过程亦是可加过程. 特别是由 Brown 运动的 α 阶从属运算可得到 2α 阶的对称稳定过程. 又若在 $\{X_t\}$ 上施行基于 $\{\Psi_1(t)\}$ 的从属运算,再施行基于与它独立的 $\{\Psi_2(t)\}$ 的从属运算时,则与施行 $\Psi(t,w) = \Psi_1(\Psi_2(t,w),w)$ 相同([3][28]).

6) 倒换过程. $\{X_t\}_{t\in T}$ 为 $(\Omega,\mathfrak{B},P)$ 上的 Марков 过程时,若令 $X_t^*(w) = X_{-t}(w)$,

$$t\in T^* = \{t \mid -t\in T\},$$

则 $\{X_t^*\}_{t\in T^*}$ 是 Макров 过程,并被称为 $\{X_t\}$ 的**倒换过程**(reversed process). 特别当 S 是由可数个点构成时, 假定 $\{X_t\}\cdot\{X_t^*\}$ 的转移概率分别是 $P(s,x,t,y)$, $P^*(s,x,t,y)$, 且

$$Q(t,x) = P_tX((w) = x) \neq 0$$

时,则有下列关系:

$$P^*(s,x,t,y) = Q(-t,y)P(-t,y,-s,x) \times Q(-s,x)^{-1}.$$

设对应于在 S 上取值的时齐 Марков 过程 $\{X_t\}$ 的 $B(S)$ 上的半群为 $\{T_t\}$. 若 $(S,\mathfrak{B}(S))$ 上的 σ 有限测度' m, 对于支集为紧的 f 使

$$\int_S T_tf(x)m(dx) \leqslant \int_S f(x)m(dx), \quad f\geqslant 0$$

成立, 则称 m 为 $\{X_t\}$ 的**次不变测度** (subinvariant measure 或 excessive measure), 等号成立时称为**不变测度** (invariant measure). 在 S 上取值的另外的 Марков 过程 $\{X_t^*\}$, 其半群 $\{T_t^*\}$ 对于任意的 $f,g\in C_0(S)$ 及 $\{X_0\}$ 的某次不变测度 m, 有

$$\int_S T_tf(x)g(x)m(dx) = \int_S f(x)T_t^*g(x)m(dx)$$

成立时,称 $\{X_t^*\}$ 为 $\{X_t\}$ 的**伴随过程** (adjoint process). 实际上在这个条件下 m 也是 $\{X_t^*\}$ 的次不变测度, 故反之 $\{X_t\}$ 是 $\{X_t^*\}$ 的伴随过程.

倒换过程与伴随过程之间有一定的关系. 例如 $\{X_t\}$ 具有不变概率测度 m 时,若 X_0 的分布为 m, 则于所有时刻 t, X_t 的分布亦为 m, $\{X_t\}$ 的倒换过程与 $\{X_t\}$ 的伴随过程一致([22]).

【参】 [1] S. Bernstein Équations différentielles stochastiques, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1938, p. 5—32; [2] R. M. Blumenthal-R. K. Getoor-H. P. McKean Jr., Markov processes with identical hitting distributions, Illinois J. Math., **6** (1962), 402—421; [3] S. Bochner, Harmonic analysis and the theory of probability, Univ. of California Press, 1955; [4] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [5] J. L. Doob, Semi-martingales and Subharmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **77** (1954), 86—121; [6] Е. Б. Дынкин (E. B. Dynkin), Критерии непрерывности и отсутствия разрывов второго рода для траекторий марковского случайного процесса, Изв, АН СССР, сер. матем., **116** (1952), 563—572; [7] Е. Б. Дынкин, Марковские процессы и полугруппы операторов, Теория Вероятностей и ее Применение, **1**, (1956), 38—60; [8] Е. Б. Дынкин. Основания теории марковских процессов, физматгиз, 1959 (中译本: 马尔科夫过程论基础,科学出版社, 1962); [9] E. B. Dynkin, (Е. Б. Дынкин) Transformations of Markov processes connected with additive functionals, Proc. Fourth Berkelery Symp. on Math. Stat. and Prob., vol. 2, Univ. of California Press (1961), p. 117—142; [10] Е. Б. Дынкин (E. B. Dynkin), Марковские процессы, Физматгиз, 1963; [11] W. Feller, Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Math. Ann., **113** (1936), 113—160; [12] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Ann. of Math., **55** (1952), 468—519; [13] W. Feller, On second order differential operators, Ann. of Math., **61** (1955), 90—105; [14] W. Feller, Boundaries induced by non-negative matrices, Trans, Amer. Math. Soc., **83** (1956), 19—54; [15] W. Feller, On boundaries and lateral conditions for the Kolmogorov differential equations, Ann. of Math., **65** (1957), 527—570; [16] G. Hunt, Markov processes and potentials, Illinois J. Math., **1** (1957), 44—93, 316—369, **2** (1958), 151—213; [17] K. Itô (伊藤清), On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc., **4** (1951); [18] K. Itô (伊藤清), H. P. McKean Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965; [19] M. Kac, On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Univ. of California Press, 1951, p. 189—219; [20] J. G. Kemeny-J. L. Snell,

Potentials for denumerable Markov chains, J. Math. Anal. Appl., **3** (1961), 196—260; [21] A. N. Kolmogorov, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann., **104** (1931), 415—458 (中译本:概率论的解析方法,见«随机过程»(伊藤清著,刘璋温译,上海科学技术出版社出版)的附录); [22] A. N. Kol-mogorov, (A. H. Колмогоров) Zur Theorie der Markoffschen Ketten, Math. Ann., **112** (1935), 155—160; [23] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937; [24] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948; [25] G. Maruyama (丸山儀四郎)-H. Tanaka (田中洋), Ergodic property of N-dimentional recurrent Markov processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., **9** (1959), 117—141; [26] P. A. Meyer, Fonctionelles multiplicatives et additives de Markov. Ann. Inst. Fourier, **12** (1962). 125—230. [27] M. Motoo (本尾実), Diffusion process corresponding to $(1/2)\ \Sigma\partial^2/\partial x_i^2 + \Sigma b^i(x)\partial/\partial x^i$, Ann. Inst. Stat. Math., **12** (1960), 37—61; [28] E. Nelson, A functional calculus using singular Laplace integrals, Trans. Amer. Math. Soc., **88** (1958), 400—413; [29] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теория вероятностей и ее применение, **1** (1956), 177—238; [30] D. Ray, Stationary Markov processes with continuous paths, Trans. Amer. Math. Soc., **82** (1956), 452—493; [31] Л. В. Серегин (L. V. Seregin), Условия непрерывности вероятностных процессов, Теория вероятностей и ее применение, **6** (1961), 3—30; [32] H. Tanaka (田中洋), Note on continuous additive functionals of the 1-dimensional Brownian path. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie, **1** (1963), 251—257; [33] B. A. Волконский (V. A. Volkonskii), Аддитивные функционалы от марковских процессов, Труды Моск. Мат. Общ., **9** (1960), 143—189. [34] R. M. Blumenthal-R. K. Getoor. Markov processes and potential theory. Academic Press. 1968.

Марков 链 [英 Markov chain 法 Chaîne de Markov 德 Markoffsche Kette 俄 марковская цепь 日 マルコフ連鎖] 点 P 在某集合 S 中随机地移动,并考虑其随机运动 $X_t(t \geqslant 0)$ 的状态被概率分布所确定者. 其中特别重要的是在 $X_{s_1}=a_1,\cdots,$

$$X_{s_n}=a_n(s_1<s_2<\cdots<s_n<t)$$

的条件下 X_t 的概率分布与在条件 $X_{s_n}=a_n$ 时 X_t 的概率分布一致的情形.称此为 Марков 性,具有这个性质的运动称为 Марков 过程†. 特别当运动是在可数个点构成的集合 S 中移动时,称为 Марков 链.

今后仅考虑时齐†的情形. 作为随机过程†可将它叙述成如下的形式. 设运动的状态空间† S 是由可数个元素组成的集合,且时间参数 t 的空间 T 是 $\{0, 1, 2, \cdots\}$ 或 $[0, \infty)$ 中的一个. 对于 S 中的各元素 x,有由 x 出发的运动 X_t 的概率分布 P_x 与之对应,若对于满足 $t_1<t_2<\cdots<t_n$, $s_1<s_2<\cdots<s_m$ 的任意的

$$t_j,\ s_k\in T\ (j=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,m),$$

有

$$(1)\quad P_x(X_{s_1+t_n}=y_1,\cdots,X_{s_m+t_n}=y_m\,|\,X_{t_1}=x_1,\cdots,X_{t_n}=x_n)=P_{x_n}(X_{s_1}=y_1,\cdots,X_{s_m}=y_m)$$

成立时,则称二元组 $(X_t,P_x)_{t\in T,x\in S}$ 为 **Марков 链**. 此时若令

$$P_t(x,\ y)=P_x(X_t=y),\ t\in T,\ x,\ y\in S$$

则由 (1) 与概率之性质,有下列诸式成立:

$$(2)\qquad 0\leqslant P_t(x,y)\leqslant 1,$$

$$(3)\qquad \sum_{y\in S}P_t(x,y)=1,$$

$$(4)\qquad P_{t+s}(x,y)=\sum_{z\in S}P_t(x,z)P_s(z,y).$$

称 $P_t(x,y)$ $(t\in T,\ x,\ y\in S)$ 为 Марков 链的**转移概率** (transition probability, transition function), 称关系式(4)为 **Chapman-Колмогоров 方程** (Chapman-Kolmogorov equation). 还把矩阵 $P_t=(P_t(x,\ y))$ 称为**转移矩阵** (transition matrix).

反之,若有满足上述 (2), (3) 以及 (4) 的 $P_t(x,\ y)$ $(t\in T,\ x,\ y\in S)$, 则以

$$P_x(X_{t_1}=x_1,\cdots,X_{t_n}=x_n)=P_{t_1}(x,x_1)P_{t_2-t_1}(x_1,\ x_2)\cdots P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},x_n)$$

为基础,由 Колмогоров 扩张定理,可以构造出以 $P_t(x,y)$ 为转移概率的 Марков 链. 这样的 Марков 链本质上是一个. 对于矩阵

$$P=(p_{x,y}),$$

若 $p_{x,y}$ 满足 $0\leqslant p_{x,y}\leqslant 1$,

$$\sum_{y\in S}p_{x,y}=1,$$

则称它为概率矩阵. 对于概率矩阵 P, 若令

$$P^n=(p_n(x,\ y))\ (n=1,\ 2,\cdots),$$

则由于 $p_n(x,y)$ 满足条件(2)，(3)，(4)，故存在以它为转移概率的离散时间参数的 Марков 链.

对于 Марков 链，若 $t=0$ 时 S 上的初始分布为 $\mu_x=P(X_0=x)$，则时间 t 的分布

$$\mu_y^{(t)}=P(X_t=y)$$

为

$$\mu_y^{(t)}=\sum_{x\in S}\mu_x P_t(x,y).$$

特别当它与 t 无关时，即

$$(5)\qquad \mu_y=\sum_{x\in S}\mu_x P_t(x,y)$$

时，称 μ 为 Марков 链的**不变分布**(invariant distribution)。还常把(5)的任一非负实数解 μ_x 叫做**不变测度**(invariant measure)。

当 S 是 n 维格子点集且 $p_{x,y}=\pi_{x-y}$ 时，由它确定的 Марков 链称为**随机走动**(random walk)。特别简单的是下述情形：

$$\pi_x=(2n)^{-1}$$

(格子点 x 与原点相邻时)；$=0$ (其它情形)。也有只把这种情形称为随机走动的.

若把(3)中的等号用不等号 $<$ 替代时，考虑对 S 添加另外一点(死点) ∂ 的空间 S^*，若令

$$P_t^*(x,y)=P_t(x,y),\ x,y\in S;$$

$$P_t^*(x,\partial)=1-\sum_{y\in S}P_t(x,y),\ x\in S;$$

$$P_t^*(\partial,\partial)=1;\ P_t^*(\partial,x)=0,$$

则 (X_t,P_x^*) 是 S^* 上的 Марков 链. X_t 变到 ∂ 这件事可想像为运动的粒子消灭了，而变到 ∂ 的最初时刻 ζ 称为**生存时间**(life time, terminal time)。此时若只对较 ζ 小的 t 考虑 X_t，也可以认为是 S 上的 Марков 链. 又

$$\sum_{y\in S}P_t(x,y)=1$$

与

$$P(\zeta=\infty)=1$$

是等价的，而它们对所有的 x 均成立时，则称链是**守恒的**(conservative).

有时也把具有一般状态空间的离散时间参数的 Марков 过程称为 Марков 链.

上面所讲的都是时齐的情形，可是也有非时齐的情形. 此时前述的 P_x 一般说来依赖于时间 t，若用 $P_{x,t}$ 表示它时，(1)式变成

$$P_{x,t}(X_{s_1}=y_1,\cdots,X_{s_m}=y_m\,|\,X_{t_1}=x_1,\cdots,X_{t_n}=x_n)$$
$$=P_{x_n,t_n}(X_{s_1}=y_1,\cdots,X_{s_m}=y_m),$$

其中

$$t<t_1<t_2<\cdots<t_n<s_1<\cdots<s_m.$$

下面将仅考察时齐的情形.

【离散时间参数的 Markov 链】 设

$$\mathfrak{X}=(X_n,P_x)$$

是守恒的离散时间参数的 Markov 链. 对于状态空间 S 的子集 A，称

$$\sigma_A=\min\{n\geq 1\,|\,X_n\in A\}\ (\min\varnothing=+\infty)$$

为到集合 A 的**到达时间**(hitting time).

$$P_x(\sigma_y<\infty)>0\ (=0)$$

时，记做 $x\to y$ $(x\not\to y)$. $x\to y$ 等价于存在使得 $P_n(x,y)>0$ 的 $n\geq 1$. $x\to y$ 且 $y\to x$ 时记做 $x\longleftrightarrow y$. 使得 $x\to y$ 且 $y\not\to x$ 的

$$y(y\neq x)$$

存在的 x 的全体 F 称为 S 的**耗散部分**(dissipative part). 对于 $S-F$ 的元素，关系 $\longleftrightarrow$ 满足等价关系. $S-F$ 的等价类分解记作 $\cup E_\alpha$，各 E_α 称为**遍历性类**(ergodic class). 当 $F=\varnothing$ 且只有一个类时，称链 $\mathfrak{X}$ 是**遍历的**(ergodic)或**不可约的**(irreducible). 对一个遍历性类 E，在其中考虑 $\{n\geq 1\,|\,P_n(x,x)>0\}$ 的最大公约数 d，则它与 $x\in E$ 无关. 称 d 为 E 的**周期**(period). 将 $x\in E$ 固定之，若令

$$G_n=\{y\,|\,P_n(x,y)>0\}$$
$$(n=1,2,\cdots,d),$$

则它满足下列关系：$E=\cup G_n$，

$$G_n\cap G_m=\varnothing(n\neq m),$$

$|G_n|=d^{-1}|E|$ ($|\ |$ 表示集合中点的个数)，

$$\sum_{z\in G_{m+1}}P(y,z)=1\quad(y\in G_m).$$

称 $E=\cup G_n$ 为 E 的**循环部分**(cyclic part)分解. 此分解除了顺序以外与 x 无关.

$P_x(\sigma_x<\infty)=1$ 时，称点 x 是**再归的**(recurrent)，<1 时称点 x 为**非再归的**(non-re-

current, transient). 点 x 是再归的充分必要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, x) = \infty.$$

又按 x 是再归的或非再归的，$P_x(X_n = x$ 无限次出现)分别是 1 或 0． 特别当所有的点均是再归的则称为**再归链** (recurrent chain)，所有的点均是非再归的则称为**非再归链** (non-recurrent chain)． 当点 x 是再归的，则按平均再归时间 $m_x = E_x(\sigma_x)$ 有限与否，而分别称点 x 为**正再归的** (positive recurrent) 以及**零再归的** (null-recurrent)．

一个遍历性类的元素或都是正再归的，或都是零再归的，或都是非再归的．与之相对应，称该类为正再归类或零再归类或非再归类．再者，有限状态空间的 Марков 链至少具有一个遍历性类，它们都是正再归的．

【Марков 链的极限定理】 再归链

$$\mathfrak{X} = (X_n, P_x)$$

分解成遍历的再归类，再归链的各种性质可以归结为遍历的再归链的性质．下面假设

$$\mathfrak{X} = (X_n, P_x)$$

是遍历的再归链．关于转移概率有如下的极限定理成立．设 $\mathfrak{X}$ 的周期为 d，

$$S = \bigcup_{n=1}^{d} G_n$$

是向循环部分的分解，且 $x \in G_d$，则

$$\lim_{n\to\infty} P_{nd+r}(x, y) = dm_y^{-1}(y \in G_r); = 0$$

$(y \notin G_r)$． 对于所有的 $x, y \in S$，有

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{n=1}^{N} P_n(x, y) = m_y^{-1}.$$

而且

$$r_{x,y} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} P_n(y, y) \Big/ \sum_{n=1}^{N} P_n(x, x) \right)$$

存在且是有限的． 若将 $r_{x,y}$ 当作 y 的函数则是不变测度，而任一非负的不变测度限于 $r_{x,y}$ 的常数倍．链是正再归的等价于

$$\sum_{y\in S} r_{x,y} < \infty,$$

此时 $r_{x,y} = m_x m_y^{-1}$． 从而满足

$$\sum_{x\in S} |\mu_x| < \infty$$

的不恒等于 0 的不变测度存在的充分必要条件是链为正再归的．此时 μ_x 是 m_x^{-1} 的常数倍．

设 μ 是非负的不变测度，令

$$I(f) = \sum_{x\in S} \mu_x f(x).$$

对于满足 $I(|f|) < \infty$,

$$0 < I(|g|) < \infty,$$

$I(g) \neq 0$ 的 f, g，有下式成立：

$$P_x\left(\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} f(X_n) \Big/ \sum_{n=1}^{N} g(X_n)\right) = I(f) \Big/ I(g)\right) = 1.$$

另外，对于

$$\sum_{n=1}^{N} f(X_n),$$

大数定律†、中心极限定理†、迭对数定理† 当 $N \to \infty$ 时成立．

【Марков 链的位势论】 对于给定的 Марков 链，若允许无穷大值，则可定义

$$G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y).$$

若此 $G(x, y)$ 不恒等于∞时，以它为核，则有广义位势论对应于该 Марков 链 (→ Марков 过程、Brown 运动、位势论)．例如对于 S 上的实函数 φ，

$$G_\varphi(x) = \sum_{y\in S} G(x, y)\varphi(y)$$

称为电荷 φ 的位势．又 S 上的实函数

$$f(-\infty < f \leqslant +\infty)$$

称为是**上调和的** (superharmonic, superregular)，假若 $Pf \leqslant f$． 其中 P 是以 $P_1(x, y)$ 为核的算子，即

$$Pf(x) = \sum_{y\in S} P_1(x, y) f(y).$$

又若 $f \geqslant 0$ 且 $f \geqslant Pf$ 时，称 f 是**超过的** (excessive)． 若 $-\infty < f < \infty$ 且 $f = Pf$ 时，称 f

是调和的 (harmonic; regular). 又若上面的关系对某点 x 成立时，称为在点 x 是上调和的等等. 对于遍历的再归链，非负的上调和函数仅是常数.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}P_k\varphi(x)$$

存在时，通常称它为电荷 φ 的位势，当 $\varphi\geqslant 0$ 时，它是超过的.

1) 于非再归链，对于任一以有限集合为支集的 φ，其位势 $f=G_\varphi$ 存在. G 满足

$$(P-I)G=-I$$

及 $\lim_{n\to\infty}P_nG=0$. 其中 I 是单位矩阵. 从而 $P-I$ 对应于 Newton 位势论中的 Laplace 算子 Δ，上面所述调和的定义 $(P-I)f=0$ 相当于 Laplace 方程 $\Delta f=0$. 对于 S 上的函数 f，若 $w=\lim_{n\to\infty}P_nf$ 存在时，则 f 能唯一地分解成位势 $G_\varphi(\varphi=f-Pf)$ 与调和函数 w 的和，称这个分解为 f 的 Riesz 分解. 设 E 是 S 的有限子集，且 $\sigma_{E^*}=\min\{n\geqslant 0\,|\,X_n\in E\}$，则

$$f(x)=P_x(\sigma_{E^*}<\infty)$$

是(唯一)在 $x\in E^c$ 上调和，在 E 上取常数 1 的位势，称它为集合 E 的平衡位势，它的全电荷

$$C(E)=\sum_{x\in S}f(x)-Pf(x)$$

称为 E **的容量** (capacity). 关于核 G 还有最大值原理[†]、扫除原理[†](→位势论)等成立.

2) 对于再归链，由于 $G(x,x)=\infty$，位势核不能像 1) 中那样去定义. 所以，定义与对数位势[†]核类似的核. 以下设链是遍历的. 对于非负的不变测度 μ，若

$$A(x,y)=\lim_{n\to\infty}(G_n(x,x)\mu_y\mu_x^{-1}-G_n(x,y)),$$

$$G_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}P_k(x,y)$$

存在时，称为 (右) **正规链** (normal chain). 链是正规的必要充分条件是

$$\lambda_E(\cdot)=\lim_{n\to\infty}\sum_{z\in S}P_n(x,z)P_z(\sigma_E\in\cdot)$$

(若存在时与 x 无关)存在. 正再归链是正规的.

设 φ 是以有限集为支集的函数. φ 的位势 f 存在的充分必要条件是

$$\sum_{x\in S}\mu_x\varphi(x)=0,$$

此时有 $f=-A\varphi$ 成立. 位势 $A\varphi$ 满足

$$(P-I)A\varphi=\varphi$$

及

$$\lim_{n\to\infty}P_nA\varphi=0.$$

位势 f 是以有限集合为支集的函数的有界位势的必要充分条件是"f 是有界的，于 E^c 调和且 $\sum\lambda_E(x)f(x)=0$".

【随机走动】 设 S 是 d 维 Euclid 空间的格子点的全体时，考虑在其上的随机走动. 令

$$S^+=\{x\,|\,0\to x\}$$

及 $\bar{S}=\{z\,|\,z=x-y,\ x,\ y\in S^+\}$，以下关于满足 $S=\bar{S}$ 的随机走动，主要是叙述 F. Spitzer 的结果. 满足下列条件时，随机走动是再归的: i) $d=1$，$\sum|x|P(0,x)<\infty$ ($|x|$ 是 0 与 x 的距离)，$m=\sum xP(0,x)=0$; ii) $d=2$，$m=0$，$\sigma=\sum|x|^2P(0,x)<\infty$. 而当 $d\geqslant 3$ 时，总是非再归的. 不论再归还是非再归的，$\mu_x=1$ 是不变测度.

再归随机走动是右正规的，且位势核 A 满足 $(P-I)A=I$. 关于满足

$$(P-I)A=I$$

的 A 的唯一性有饶有兴趣的结果 [8].

$m=0$ 时，称为对称随机走动. 关于对称随机走动，已知有类似于 Brown 运动[†]的结果: i) $d=1$，$0<\sigma<\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}P_0(\max_{k<n}|x_k|\leqslant\sigma\sqrt{n}\,x)=1-F(x^{-t})\quad(x>0),$$

其中

$$F(x)=1-4\pi^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^{-1}\times\exp(-\pi^2 8^{-1}(2k+1)^2x).$$

ii) **反正弦律** (arcsine law): 设 T_n 是 $x_k(k\leqslant n)$ 访问 0 的次数. $d=1$，$0<\sigma<\infty$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} P_0(T_n \leqslant nx) = 2\pi^{-1}\arcsin\sqrt{x}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant 1).$$

iii) **Wiener 检验法** (Wiener test): 若对于所有的 x, $P_x(\sigma_E < \infty) = 1$ 时, E 称为再归集. $d = 3$, $\sigma < \infty$ 时, E 是再归集的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} C(E_n)2^{-n} = \infty,$$

其中 $E_n = E \cap \{x \mid 2^n < |x| < 2^{n+1}\}$.

【连续时间参数的 Марков 链】 设转移概率 $P_t(x,y)$ 是 t 可测的. 则此时 $P_t(x, y)$ 在 $t = 0$ 的任一邻域之外是一致连续的,存在

$$m_{x,y} = \lim_{t\uparrow\infty} P_t(x, y)$$

且满足

$$m_{x,y} = \sum_{z\in S} m_{x,z}P_t(z, y)$$

$$= \sum_{z\in S} P_t(x, z)m_{z,y}.$$

对于所有的 $x \in S$ 及 $t > 0$ 有

$$P_t(x, y) = 0$$

时,称 y 为**虚构状态** (fictitious state). 设 F 是 S 的虚构状态的全体,则 $P_t(x, y)$ 在 $S - F$ 上的限制是转移概率. 当 $F = \varnothing$ 且函数族

$$\boldsymbol{P} = \{P_t(\cdot,y) \mid t > 0, y \in S\}$$

将 S 的二点分离时,称转移概率 $P_t(x, y)$ 是**标准的** (standard). $P_t(x, y)$ 是标准的充分必要条件是

$$\lim_{t\downarrow 0} P_t(x, y) = \delta_{x,y}.$$

$F = \varnothing$ 且 $\boldsymbol{P}$ 不一定将 S 的二点分离时, 适当地将状态视为同一,可归到标准的情形,故下面假设 $P_t(x,y)$ 是标准的. 于是

$$\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(P_t(x, y) - \delta_{x,y}) = q_{x,y}$$

存在,且 $x \neq y$ 时,有 $0 \leqslant q_{x,y} < \infty$. 令

$$q_x = -q_{x,x}(\geqslant 0),$$

当 $q_x < \infty$ 时称 x 为**稳定状态** (stable state), 当 $q_x = \infty$ 时称 x 为**瞬时状态** (instantaneous state). 若 $q_x < \infty$, 则 $P_t'(x, y)$ (关于 t 微分)存在, 且在 $t > 0$ 连续. S 的各点为稳定状态时,

$$\pi(x, y) = q_{x,y}q_x^{-1}(x \neq y);\ = 0(x = y)$$

满足

$$(6)\qquad 0 \leqslant \pi(x,y) \leqslant 1,\ \pi(x,x) = 0,$$

$$\sum_{y\in S} \pi(x, y) \leqslant 1.$$

虽然可以形式地从 Chapman-Колмогоров 方程导出 **Колмогоров 后向方程** (Kolmogorov's backward equation):

$$(7)\quad P_t'(x, y) = -q_xP_t(x, y) + q_x \sum_{z\in S} \pi(x,z)\ P_t(z,y),$$

及其对偶的**前向方程** (forward equation):

$$(8)\quad P_t'(x, y) = -q_yP_t(x, y) + q_y \sum_{z\in S} P_t(x, z)\pi(z, y),$$

严格地说来, 是仅在适当的条件下才成立的等式. 例如守恒的转移概率 $P_t(x, y)$ 满足(7)的充分必要条件是

$$\sum_{y\in S} \pi(x, y) = 1.$$

若存在满足 $\xi_x > 0$ $(x \in S)$,

$$\sum_{x\in S} \xi_xP_t(x, y) \leqslant \xi_y(\forall t > 0)$$

的函数时,则 $P_t(x, y)$ 满足(8)的充分必要条件是

$$\sum_{y\in S} \xi_yq_y\pi(y, x) = \xi_x.$$

反之,若给定 $0 \leqslant q_x < \infty$ 以及满足(6)的 π 时,满足初始条件

$$\lim_{t\downarrow 0} P_t(x, y) = \delta_{x,y}$$

的(7)或(8)的解通常有许多,其中有最小者 $P_t^0(x, y)$ 存在. 以 $P_t^0(x, y)$ 为转移概率的链, 称为依从 $\{q, \pi\}$ 的**最小链** (minimal chain).

具有标准转移概率的 Марков 链的轨道†, 虽然存在可分且可测的修正† X_t, 但不一定存在右连续的修正,强 Марков 性†亦不能对所有的 Марков 时间†成立(关于轨道的详细的性质→[7], [1]). 令 $\tau_0 = 0$,

$$\tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1} \mid X_t \neq X_{\tau_{n-1}}\}\ (n \geqslant 1),$$

$$\tau_\infty = \lim_{n\to\infty} \tau_n,$$

若 S 的各点 x 是稳定的，τ_1 服从指数分布

$$P_x(\tau_1 > t) = e^{-q_x t},$$

结果 τ_1 与 X_{τ_1} 关于 P_x 测度独立且满足

$$E_x(\tau_1) = q_x^{-1},\ P_x(X_{\tau_1} = y) = \pi(x, y).$$

又

$$P_t^0(x,y) = P(X_t = y, \tau_\infty > t)$$

是最小解．对最小链而言，存在右连续且具有左极限的轨道的修正，满足强 Марков 性．

具有标准转移概率的有限 Марков 链，其所有状态均是稳定的，满足(7)及(8)．再者满足(7)及(8)的转移概率解是唯一的一个最小解．

【增消过程】 于 $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$，满足 $q_0 = 0$，$n \geqslant 1$ 时 $0 < q_n < \infty$，

$$\pi(n, m) = 0\ (m \neq n+1, n-1)$$

的链称为**增消链**（birth and death chain），称

$$\sigma_0 = \inf\{t > 0 | X_t = 0\}$$

为**消灭时间**（extinction time），称 τ_∞ 为**爆发时间**（explosion time）．特别当

$$\pi(n, n+1) = 0\ (\forall n \geqslant 1)$$

时，称 Марков 链 $\mathfrak{X}$ 为**增殖过程**（birth process），当 $\pi(n, n-1) = 0$ $(\forall n \geqslant 1)$ 时称 $\mathfrak{X}$ 为**死亡过程**（death process）．满足

$$\pi(n, n+1) > 0,\ \pi(n, n-1) > 0$$

的增消链与一维扩散过程[†]有许多类似的性质．

$n \geqslant 1$ 时令 $q_n = \lambda_n + \mu_n$，

$$\pi(n, n+1) = \lambda_n(\lambda_n + \mu_n)^{-1},$$
$$\pi(n, n-1) = \mu_n(\lambda_n + \mu_n)^{-1}.$$

如下确定的 x_n 称为**自然尺度**（natural scale）：

$$x_1 = \mu_1^{-1},\ x_2 = \mu_1^{-1} + \lambda_1^{-1},$$
$$x_n = \mu_1^{-1} + \lambda_1^{-1} + \cdots + (\mu_2\cdots\mu_{n-1})(\lambda_1\cdots\lambda_{n-1})^{-1}$$
$$(n \geqslant 3),\ x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

于各 x_n 具有质量

$$m_n = \lambda_1\cdots\lambda_{n-1}(\mu_2\cdots\mu_n)^{-1}$$
$$(n \geqslant 2);\ = 1\ (n = 1)$$

的测度 m 称为**标准测度**（canonical measure）．

$$P_t(x_i, x_k) = P_t(i, k) m_k^{-1}$$

成为 $E = \{x_1, x_2, \cdots\}$ 上的转移概率，

$$f(x_i, t) = P_t(x_i, x_k)$$

满足与(7)等价的差分方程

$$(9)\qquad \partial f / \partial t = D_m f^{\dagger},$$

其中

$$f^{\dagger}(x_n) = (f(x_{n+1}) - f(x_n))(x_{n+1} - x_n)^{-1},$$
$$D_m g(x_n) = (g(x_n) - g(x_{n-1})) m_n^{-1}.$$

这是与一维扩散过程生成算子相类似的表示．

这种随机过程均可由 Brown 运动的时间变换[†]得到．又 x_∞ 可看做是边界点，被分类成自然、出口、入口、正则边界．所有的增消过程由(9)与 x_∞ 上的边界条件所确定（→扩散过程）．

【Марков 链的边界问题】 对于 Марков 链，有时有必要考虑给状态空间 S 以适当的边界．为此考虑了种种边界，其中众所周知的是类似于调和函数论中 Martin 边界者．下面所述事实，有许多对于离散时间参数的链也成立．

设 $\mathscr{X} = (X_t, P_x)$ 是依从 $\{q, \pi\}$ 的非再归最小链，τ_∞ 等于生存时间，并与离散时间参数的链同样地（将 P 换成 π）定义调和函数等．又设 $\gamma = \gamma(x)$ 是满足

$$0 < \gamma G(y) \equiv \sum_x \gamma(x) G(x, y) < \infty$$

的测度，其中

$$G(x, y) = \int_0^\infty P_t(x, y) dt.$$

就离散拓扑来考虑 S，若导致其一点紧化的 S 中的距离为 ρ_1，再令

$$K(x, y) = G(x, y) / \gamma G(y),$$

并设

$$\rho_2(y, y') = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|K(x_n, y) - K(x_n, y')|}{1 + |K(x_n, y) - K(x_n, y')|},$$
$$\{x_n\} = S,$$

依 $\rho = \rho_1 + \rho_2$ 使 S 完备化而添加的点集 ∂S 称为 **Martin 边界**（Martin boundary）．

$$M = S \cup \partial S$$

是紧的可分空间. 由 ρ 的定义可知

$$K(x,\xi)=\lim_{y\to\xi}K(x,y)$$

存在,它关于 ξ 是 M 上的连续函数,关于 x 是上调和的. 非负之调和函数 u 若满足'$u\geqslant v\geqslant 0$ 且 v 调和时, v 是 u 与常数之积'则称 u 是极小的. $\partial S_1=\{\xi\,|\,K(\cdot,\xi)$ 极小调和$\}$称为 ∂S 的本质部分. 它是 F_σ 集合. 此时 γ 可积的非负的上调和函数 u 可用 $M_1=S\cup\partial S_1$ 上唯一的测度 μ 表示成

$$u(x)=\int K(x,\xi)\mu(d\xi).$$

称 μ 为 u 的标准测度. 特别当 u 为调和时, μ 集中于 ∂S_1 上. 分析学中的各种表示问题,例如 Hausdorff 的矩量问题,可以看作是关于适当的 Марков 链的表示问题. 设 u 是 γ 可积的非负的上调和函数,且 (X_t,P_x^u) 是具有转移概率

$$P_t^u(x,y)=u(x)^{-1}u(y)P_t(x,y)\ (0|0=0)$$

的 Марков 链,则

$$X_{\zeta-}=\lim_{t\uparrow\zeta}X_t$$

在,并有下式成立:

$$P_x^u(X_{\zeta-}\in B)=u(x)^{-1}\int_B K(x,\xi)\mu(d\xi),$$

其中 μ 是 u 的标准测度.

S 上的测度 ν 若满足

$$\nu q(\pi-I)\leqslant 0\ (=0)$$

时, ν 称为上调和测度(调和测度). 将满足

$$0<Gg<\infty$$

的 $g\geqslant 0$ 固定之,并令

$$K^*(x,y)=G(x,y)Gg(x)^{-1}.$$

可用函数族 $\{K^*(\cdot,y)\}$ $(y\in S)$ 与 ρ_2 同样地定义 ρ_2^*, 依 $\rho^*=\rho_1+\rho_2^*$ 完备化而附加到 S 的点集 ∂S^* 称为 **Martin 对偶边界** (Martin dual-boundary). K^* 可被扩张到 $S\cup\partial S^*$ 上, $K^*(\eta,\cdot)$ $(\eta\in\partial S^*)$ 是上调和函数. 设使 $K^*(\eta,\cdot)$ 成为极小调和测度的 $\eta\in\partial S^*$ 的全体为 ∂S_1^*, 则满足

$$\int\nu(dx)g(x)<\infty$$

的上调和测度 ν, 可用 $S\cup\partial S_1$ 上的测度 μ 唯一地表示成

$$\nu=\int\mu(d\eta)K^*(\eta,\cdot).$$

设 $\xi\in M_1$, 且将 $K(\cdot,\xi)$ 链记作 (X_t,P_x^ξ), 则 $P_x^\xi(\zeta<\infty)=0$ 或$=1$. 前者时称 ξ 为**被动边界点** (passive boundary point), 后者时称 ξ 为**出口边界点** (exit boundary point). 把以 $P_t^{*,\eta}(x,y)=K^*(\eta,x)^{-1}K^*(\eta,y)P_t(y,x)$ 为转移概率的链记做 $(X_t,P_x^{*,\eta})$, 则有

$$P_x^{*,\eta}(\zeta<\infty)=0\ \text{或}\ =1.$$

前者时称 η 为**对偶被动边界点** (dual passive boundary point), 后者时称 η 为**入口边界点** (entrance boundary point).

Green 算子[†]的 Feller 表示. 将 $\{q,\pi\}$ 固定之,设 $\mathscr{X}=(X_t,P_x)$ 是依从 $\{q,\pi\}$ 的最小链, 且 $(\partial S)_{ex}$, $(\partial S^*)_{en}$ 分别是 $\mathfrak{X}$ 的出口及入口边界点之集合. $P_x(X_{\zeta-}\in(\partial S)_{ex})=0$ 时, 满足(7)的解仅有最小解,

$$P_x(X_{\zeta-}\in(\partial S)_{ex})>0$$

(某 $x\in S$) 时,具有无数个解.又满足(7)及(8)的解一般说来也有无数个. 设

$$K_\alpha(x,\xi)=K(x,\xi)E_x^\xi(e^{-\alpha\zeta}),$$

$$K_\alpha^*(\eta,x)=K^*(\eta,x)E_x^{*,\eta}(e^{-\alpha\zeta}),$$

$P_t^0(x,y)$ 为 $\mathscr{X}$ 的转移概率. 假定 $P_t(x,y)$ 是满足(7)及(8)的转移概率且满足

$$\int_0^\infty P_t(x,x)dt<\infty.$$

于是存在 $(\partial S^*)_{en}$ 上的唯一的测度族 $M_\alpha(\xi,\cdot)$ $(\xi\in(\partial S)_{en})$, 对于它有

$$G_\alpha(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_t(x,y)dt$$

的 Feller 表示

$$(10)\qquad G_\alpha(x,y)=G_\alpha^0(x,y)+\iint K_\alpha(x,\xi)M_\alpha(\xi,d\eta)K_\alpha^*(\eta,y)\mu(d\xi).$$

其中

$$G_\alpha^0(x,y)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}P_t^0(x,y)dt,$$

μ 是恒等于 1 的函数的标准测度. 求所有满足(7)及 (8) 的转移概率之问题等价于求所有的 $M_\alpha(\xi,d\eta)$, 它的 Green 算子恰好是 (10)式右端的一部分. 由于 M_α 是边界上的函数, 求

所有的 M_α 的问题对应于给定边值条件来解 (7), (8). 在这方面尚有很多未解决的问题 ([4], [5]).

【参】 [1] K. L. Chung (钟开莱), Markov chains with stationary transition probabilities. Springer, 1960; [2] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [3] W. Feller, An introduction to probability theory and its applications, John Wiley, 1950; [4] W. Feller, On boundaries and lateral conditions for Kolmogorov differential equations, Ann. of Math. **65** (1957), 527—570; [5] W. Feller, The birth and death processes as diffusion processes, J. Math. Pures Appl., **38** (1959), 301—345; [6] J. G. Kemeny-J. L. Snell. Potentials for denumerable Markov chains, J. Math. Anal. Appl., **3** (1961), 196—260; [7] P. Lévy, Systèmes markoviens et stationaires, Cas dénombrable, Ann. Sci École Norm. Sup., (3), **68** (1951), 327—381; [8] F. Spitzer, Principles of random walk, Princeton, 1964; [9] 丸山儀四郎，確率論，現代数学講座，共立出版，1957; [10] T. Watanabe (渡辺毅), On the theory of Martin boundaries induced by countable Markov processes, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto, **33**(1960), 39—108; [11] G. A. Hunt, Markov chains and Martin boundaries, Illinois J. Math., **4** (1960), 313—340.

Brown 运动 [英 Brownian motion 法 mouvement brownien 德 Brownsche Bewegung 俄 броуновское движение 日 ブラウン運動] 植物学者 R. Brown 观察漂在水上的花粉时，发现该微粒子不断地进行不规则的运动. 像这样在液体或气体中浮游的微粒子，受到流体分子的冲击而进行极不规则的运动，它在时刻 t 时的位置坐标 $X(t)$ 可视为随机变量†, $X(t)-X(s)$ 服从正态分布† $N(0,D|t-s|)$. 布朗运动是由 L. Bachelier, A. Einstein, N. Wiener, P. Lévy 等当作随机过程处理的,并进行了研究.

【Wiener 过程】 设 T 是实数空间 $\boldsymbol{R}^1$ 本身或其子区间. 在概率空间 Ω 上定义的随机过程 $\{X(t)\}_{t\in T}$, 若满足下述的三个条件时,称为 $\boldsymbol{R}^d$ 上的 **Wiener 过程** (Wiener process). 通常将 Wiener 过程叫做 **Brown 运动**. 以后把随机变量看作是 Ω 上的函数,并写成

$$X(t)=X(t,\ \omega)\ (\omega\in\Omega).$$

三个条件是: i) $X(t,\ \omega)\in\boldsymbol{R}^d$; ii) 对于满足 $t_1<t_2<\cdots<t_n$ 的任意的

$$t_j\in T\ (j=1,\ 2,\ \cdots n),$$
$$X(t_2)-X(t_1),$$
$$X(t_3)-X(t_2),\cdots,X(t_n)-X(t_{n-1})$$

是互相独立的随机变量; iii) 设 $X(t)$ 的第 i 个分量为 $X_i(t)$, $\{X_i(t)\}_{t\in T}(1\leqslant i\leqslant d)$ 作为随机过程是相互独立的,且对于任意的 $t,s\in T$, $X_i(t)-X_i(s)$ 服从正态分布 $N(0,|t-s|)$. Wiener 过程是时齐的可加过程†. 可分†的 Wiener 过程的轨道 $\{X(t,\omega)\}_{t\in T}(\omega\in\Omega)$ 是以概率 1 为连续的. 反之, $\boldsymbol{R}^1$ 上时齐的可加过程若轨道是以概率 1 为连续的,且 $X(t)-X(s)$ 的平均是 0, 方差为 $|t-s|$ 时, 则它是 Wiener 过程(→随机过程).

对于定义在概率空间 $\Omega(\mathfrak{B},P)$ 上,服从正态分布 $N(0,\ 1)$ 且相互独立的随机变量序列 $\{X_k(\omega)\}$ $(k=1,2,\cdots)$, 无穷级数

$$\frac{t}{\sqrt{\pi}}X_0(\omega)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin kt}{k}X_k(\omega),$$
$$t\in[0,\ 1]=T$$

以概率 1 关于 $t\in T$ 一致收敛. 设其和为 $X(t,\omega)$,则它是 Wiener 过程 $\{X(t,\omega)\}_{t\in T}$.

【与扩散过程的关系】 Brown 运动按下述意义,可视为扩散过程的特殊情形. 设

$$X=\{X_t(\omega),\ \boldsymbol{R}^d,\ P_x\}$$

是 $\boldsymbol{R}^d$ 上连续的 Марков 过程 (→Марков 过程). 它的转移概率†是

$$P(t,x,B)=\int_B(2\pi t)^{-d/2}\exp\left(-\frac{1}{2t}|x-y|^2\right)dy$$

$$t>0,\ x,y\in\boldsymbol{R}^d,\ B\in\mathfrak{B}(\boldsymbol{R}^d),$$

其中 $\mathfrak{B}(\boldsymbol{R}^d)$ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 上的 Borel 集全体组成的完全加法族, $|x|(x\in\boldsymbol{R}^d)$ 表示 x 的模. 对于每个 $x\in\boldsymbol{R}^d$, 过程 $\{X_t(\omega),\ P_x\}$ 是前述意义下的 Wiener 过程. 开始于 x 的 Wiener 过程 $\{X_t,P_x\}$ 的集合，构成 Марков 过程 X, 称之为 ***d* 维 Brown 运动** (*d*-dimensional Brownian motion). 也有将 Brown 运动与 Wiener 过程两种说法混同使用者. d 维 Brown 运动是扩散过程(→扩散过程)而具有强 Марков 性†.设 Марков 过程 X 的半群†为 T_t, 其生成算子†为 $\mathfrak{G}$ 时,若 f 有界且一致连续,到二阶为止的偏导

数有界且一致连续，则 f 包含在 $\mathfrak{G}$ 的定义域内，且有 $\mathfrak{G}f(x)=(1/2)\Delta f(x)(x\in S)$. 其中 Δ 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的 Laplace 微分算子.

【与位势的关系】 通常称

$$G_\alpha(x)=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\alpha t}(2\pi t)^{-d/2}\exp\left(-\frac{1}{2t}|x|^2\right)dt,\ \alpha>0$$

为 α 阶 Green 函数. $d\geqslant 3$ 时，Brown 运动乃非再归的†，极限 $G_{0+}(x)=\lim_{\alpha\downarrow 0}G_\alpha(x)$ 即 0 阶 Green 函数

$$K_0(x)=(\Gamma(d/2-1)/4\pi^{d/2})|x|^{-d+2}$$

存在. $d=1$, 2 时，Brown 运动是再归的†，并且 $G_{0+}(x)=+\infty$. 然而作为

$$G_\alpha(x)(\alpha>0)$$

的有限部分，定义

$$K_0(x)=\lim_{\alpha\downarrow 0}(G_\alpha(x)-G_\alpha(x_0))$$

$$=(1/2\pi)\log(1/|x|)(|x_0|=1,\ d=2\text{ 时});$$

$$=-(1/2)|x|(x_0=0,\ d=1\text{ 时})$$

$K_0(x)$ 于 $d\geqslant 3$ 时是 Newton 位势†的核，$d=2$ 时是对数位势†的核. 基于这个事实，可将 Newton 位势论及对数位势论的结果作为 Brown 运动的性质来叙述. 又设 Green 区域 D 上关于 $\Delta/2$ 的 Green 函数为 $G^D(x,y)$，令

$$2g^D(t,x,y)dy=P_x(X(t,\omega)\in dy,\sigma_{\partial D}>t)$$

时，有

$$G^D(x,y)=\int_0^\infty g^D(t,x,y)dt.$$

其中 $\sigma_{\partial D}$ 是 X 到 D 之边界 ∂D 的到达时间†（⇀Марков 过程）. 这种情形的位势论，对应于以 ∂D 为吸收壁†的 Brown 运动.

如果 B 是 Green 定义域 D 的紧子集或开子集而有紧闭包 $\bar{B}\subset D$，则到达概率

$$P(x)=P_x(\sigma_B<\sigma_{\partial D})$$

是 B 的相对于 D 的平衡位势. $\boldsymbol{R}^2$ 中紧子集 B 的对数容量为正之充分必要条件是对于每一 $x\in\boldsymbol{R}^2$ 有 $P_x(\sigma_B<\infty)=1$.

对于解析集† A，设

$$\tilde{\sigma}_A(\omega)=\inf\{t\,|\,t>0,X(t,\omega)\in A\}.$$

但右边为空集时，设其为 ∞. 根据 Blumenthal 0-1 律†有 $P_x(\tilde{\sigma}_A=0)=1$ 或 0，相应地称点 x 关于 A **是正则的** (regular) 或**非正则的** (irregular). 对于 $\boldsymbol{R}^d(d\geqslant 2)$ 的紧集 B，

$$P_x(\tilde{\sigma}_B=0)=0$$

或 1 等价于 $d=2$ 时

$$\sum_{k=1}^\infty kC(B_k)\text{ 及 }d\geqslant 3$$

时

$$\sum_{k=1}^\infty 2^{k(d-2)}C(B_k)$$

的收敛与发散. 其中

$$B_k=\{y\,|\,2^{-(k+1)}\leqslant|x-y|<2^{-k}\}\cap B,$$

$C(B_k)$ 表示 B_k 的容量（$d=2$ 时是关于适当的有界区域的对数容量）. 它被称为 Wiener 检验法†（⇀Dirichlet 问题）. 此外，$\boldsymbol{R}^d$ 的有界区域 D 的边界点 x 关于 $\boldsymbol{R}^d-D$ 是正则的抑还是非正则的，与 D 中 Dirichlet 问题意义下的正则、非正则一致. 以 f 为边界函数的 Dirichlet 问题之解由 $u(x)=E_x(f(x_{\tilde{\sigma}_{\partial D}}(\omega)))$ 给出. 此外，

$$h(x,B)=P_x(x_{\tilde{\sigma}_{\partial D}}(\omega)\in B)\ (B\subset\partial D)$$

从 $x\in D$ 来看是 ∂D 的调和测度.

【一维 Brown 运动】 一维 Brown 运动的基本性质曾被 Lévy 详细地研究过. 设到集合 $\{a\}$ 的到达时间为 σ_a，且令

$$m(t,\omega)=\min_{\sigma_0\leqslant s\leqslant t}X(s,\omega),$$

$$M(t,\omega)=\max_{\sigma_0\leqslant s\leqslant t}X(s,\omega),$$

$$Y_0(t,\omega)=|X(t,\omega)|,$$

$$Y_1(t,\omega)=X(t,\omega),\ t<\sigma_0(\omega)$$

$$=M(t,\omega)-X(t,\omega),\ t\geqslant\sigma_0(\omega),$$

$$Y_2(t,\omega)=X(t,\omega),\ t<\sigma_0(\omega),$$

$$=X(t,\omega)-m(t,\omega),\ t\geqslant\sigma_0(\omega)$$

则有下列各事实成立.

1) $$P_0(M(t)>a)=2P_0(M(t)>a,X(t)>a)$$
$$=2P_0(M(t)>a,X(t)<a)$$
$$=P_0(|X(t)|>a).$$

这称为**反射原理** (reflection principle).

2) $$\{\sigma_a,\ 0\leqslant a<\infty,\ P_0\}$$

是时齐的可加过程（实际是具有指数 1/2 的单侧稳定过程†)有

$$P_0(\sigma_b-\sigma_a\leqslant t)=P_0(\sigma_{b-a}\leqslant t)$$
$$=\int_0^t\frac{b-a}{\sqrt{2\pi s^3}}e^{-(b-a)^2/2s}ds,\ 0\leqslant a<b,$$

3) 设

$$\varphi(t,\omega)=\int_0^t\chi_{[0,\infty)}$$

$(X(s,\omega))ds$ 的右连续的反函数为 $\varphi^{-1}(t,\omega)$，其中 $\chi_{[0,\infty)}(\cdot)$是区间$[0,\infty)$的定义函数†，令

$$Y_3(t,\omega)=X(\varphi^{-1}(t,\omega),\omega).$$

此时四个随机过程 $\{Y_i(t,\omega),\ 0\leqslant t<\infty,P_x\}$ $(x\in[0,\infty),\ 0\leqslant i\leqslant 3)$ 皆是同一个扩散过程,其转移概率为

$$P(t,x,B)=$$
$$\int_B\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(e^{-|x-y|^2/2t}+e^{-|x+y|^2/2t})dy,$$
$$t>0,\ x\in[0,\infty)$$

是以 0 为反射壁†的 $[0,\infty)$上的 Brown 运动.

4) 由上可见,将 t 固定时,

$$M(t),-m(t),\ Y_i(t)\ (0\leqslant i\leqslant 3)$$

关于 P_0 服从同样的分布,例如:

$$P_0(M(t)\geqslant a)=P_0(\sigma_a\leqslant t)$$
$$=2P_0(X(t)>a)$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\int_a^\infty e^{-x^2/2t}dx,\ a>0,$$

$$P_0(X(t)\in da,\ M(t)\in db)$$
$$=\sqrt{2/\pi t^3}(2b-a)e^{-(2b-a)^2/2t}dadb,$$
$$0\leqslant a<b.$$

5) 于一维 Brown 运动，以 $\sigma_{\{0\}}$ 为消灭时间†而得到的扩散过程 $\{X(t,\omega),\ \sigma_{\{0\}},P_x\}(x\in(0,\infty))$称为以 0 为吸收壁†的$(0,\infty)$上的 Brown 运动. 其转移概率是

$$P(t,x,B)=\int_B\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}(e^{-|x-y|^2/2t}$$
$$-e^{-|x+y|^2/2t})dy,$$
$$t>0,\ x\in[0,\infty).$$

就一维 Brown 运动而言,被称为**反正弦律** (arcsine law) 型的许多事实成立. 例如

$$P_0\left(\int_0^t\chi_{[0,\infty)}(X(s,\omega))ds\leqslant\theta\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{\theta}{t}},\ \theta\leqslant t,$$
$$P_0(\tau_t(\omega)\leqslant s)=(2/\pi)\arcsin\sqrt{s/t},$$
$$0<s\leqslant t,$$

其中 $\tau_t(\omega)=\sup\{s\,|\,X(s,\omega)=0,0\leqslant s\leqslant t\}$.

轨道的零点 $\mathfrak{Z}(\omega)=\{t|X(t,\omega)=0\}$ 是完全不连通†的集合,它的 Lebesgue 测度为 0, Hausdorff-Besikovič 维数是 1/2.

其次，将一维 Wiener 过程做线性插值而得到的随机过程的联合分布，在时间参数的射影变换下不变. 这个性质叫做 Wiener 过程的**射影不变性** (projective invariance), 作为特殊的情形,设 $\{X(t,\omega)\}_{0\leqslant t<\infty}$ 是 $X(0,\omega)=0$ 的 Wiener 过程,可知 $\{X(t,\omega)/\sqrt{t}\}_{0<t<\infty}$ 与

$$\{X(1/t,\omega)\sqrt{t}\}_{0<t<\infty}$$

有同样的联合分布，Wiener 过程在 $t=0$ 的邻域中之性质与在 $t=\infty$ 的邻域中之性质可相互从对方导出.

【d 维 Brown 运动】 d 维 Brown 运动的轨道虽然以概率 1 连续，但在有界区间亦非有界变差的,因此是非可求长的. 关于轨道的连续性的程度，有下述事实成立. 设 $\varphi(t)$ 是定义于 $t\geqslant t_0>0$ 上的正的连续单调递增函数，令

$$E_\varphi(\omega)=\{t\,|\,|X(t,\omega)|>\sqrt{t}\,\varphi(1/t)\}.$$

此时对应于

$$P_0(\inf_{t\in E_\varphi(\omega)}t>0)=1$$

或 0 ,称 φ 属于局部连续性的上类或下类. 其各自的充分必要条件是

$$\int_{t_0}^\infty t^{-1}(\varphi(t))^de^{-\varphi^2(t)/2}dt<\infty(\text{或}=\infty).$$

称它为关于原点的 **Колмогоров 检验法** (Kolmogorov's test). 考虑**空时 Brown 运动** (space-time Brownian motion) $\{(-t,X(t,\omega)),P_0\}$. 这里 $X(t,\omega)$ 是一维 Brown 运动. 令

$$D_\varphi=\{(s,x)|-1/t_0\leqslant s\leqslant 0,$$
$$\sqrt{-s}\,\varphi(-1/s)\leqslant x<\infty\},$$

则 $0=(0,0)$ 对于 D_φ 是正则的或非正则的，依据 φ 属于局部连续性的下类或上类． 因而 Колмогоров 检验法是对空时 Brown 运动的 Wiener 检验法．特别是

$$\varphi(t)=(2\log_{(2)}t+(d+2)\log_{(3)}t+2\log_{(4)}t+\cdots+2\log_{(n-1)}t+(2+\delta)\log_{(n)}t)^{1/2}.$$

若 $\delta>0$ 时它属于上类，$\delta\leqslant 0$ 时属于下类．其中之 $\log_{(n)}t=\log\log_{(n-1)}t$,

$$\log_{(1)}t=\log t,$$

作为特殊情形，可导出一维 Brown 运动的**迭对数律** (law of iterated logarithm)

$$P_0\left(\limsup_{t\to s}\frac{|X(t,\omega)-X(s,\omega)|}{\sqrt{2|t-s|\log\log|1/|t-s|}}=1\right)=1.$$

其次，设 $\phi(t)$ 是定义于 $t\geqslant t_0>0$ 上的正的连续单调递减函数，令

$$F_{\phi(\omega)}=\{t\,|\,|X(t,\omega)|\leqslant\sqrt{t}\,\phi(1/t)\}.$$

则对应于

$$P_0\ (\inf_{t\in F_\phi(\omega)}t>0)=0 \text{ 或 } 1,$$

称 ϕ 属于上类或下类．其充分必要条件是，$d\geqslant 3$ 时，

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{t}(\phi(t))^{d-2}dt=\infty\ (\text{或}<\infty),$$

$d=2$ 时，

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{t|\log\phi(t)|}dt=\infty\ (\text{或}<\infty),$$

当 $d\geqslant 3$ 时，$\phi(t)=(\log t)^{-(1+\delta)/(d-2)}$ 对应于 $\delta\leqslant 0$ 或 $\delta>0$ 属于上类或下类． $d=2$ 且 $\delta>0$ 时，$\phi(t)=t^{-\delta}$ 属于上类，

$$\phi(t)=(t\log t)^{-\delta}$$

属于下类．由射影不变性，可把它们搬到 $t=\infty$ 的邻域的性质上去．

关于轨道于 $[0,1]$ 上的一致连续性，有下述事实可言．设 $\phi(t)$ 是定义在 $t\geqslant t_0>0$ 上的正的连续单调递增函数，令

$$\varphi(t)=\sqrt{t}\,\phi(1/t).$$

如果几乎一切轨道 $X(t,\omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 满足相对于 φ 的 Lipschitz 条件，即对几乎一切 ω 存在 $\varepsilon(\omega)>0$ 使得 $0<|t-s|<\varepsilon(\omega)$ 蕴含 $|X(t,\omega)-X(s,\omega)|<\varphi(|t-s|)$，则称 ϕ 属于一致连续性的上类．若几乎一切轨道 $X(t,\omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ 不满足相对于 φ 的 Lipschitz 条件，则称 ϕ 属于一致连续性的下类． ϕ 属于一致连续性的上类或下类的充分必要条件是

$$\int_{t_0}^{\infty}\phi(t)^{d+2}e^{-\phi(t)^2/2}dt<\infty\ (\text{或}=\infty),$$

特别是

$$\phi(t)=(2\log t+(d+4)\log_{(2)}t+2\log_{(3)}t+\cdots+2\log_{(n-1)}t+(2+\delta)\log_{(n)}t)^{1/2}$$

在 $\delta>0$ 时属于上类，在 $\delta\leqslant 0$ 时属于下类．由此可以导出关于一维 Brown 运动一致连续性的条件

$$P_0\left(\limsup_{|t-s|\to 0,0\leqslant t,s\leqslant 1}\frac{|X(t,\omega)-X(s,\omega)|}{\sqrt{2|t-s|\log 1/|t-s|}}=1\right)=1.$$

关于轨道还有下列事实可言．与上上节所述事实相关联，当 $d\geqslant 2$ 时，若 $A\subset \boldsymbol{R}^d$ 的外容量为 0，则 P_x(于某 $t>0$ 时

$$X(t,\omega)\in A)=0.$$

当 $d=2$ 时若内容量为正，则 P_x (对于任一 $t>0$ 使得 $X(s,\omega)\in A$ 的 $s>t$ 有无限个)$=1$．轨道作为 $\boldsymbol{R}^d(d\geqslant 2)$ 的集合的测度为 0，若 $d\geqslant 3$ 时，这个集合不是稠集，$d=2$ 时处处稠密，这些事实以概率 1 成立． 又以概率 1 有下列事实： $d=2$ 时对于任一正整数 k，轨道有 k 重点，$d=3$ 时具有二重点，但不具有三重点，进而当 $d\geqslant 4$ 时二重点也没有．$d\geqslant 3$ 时，关于由 $t^2\log\log 1/t$ 规定的 Hausdorff 测度，集合 $\{X(s,\omega)|0\leqslant s\leqslant t\}$ 的测度以概率 1 为 $\zeta_d t$．其中 $0<t\leqslant 1$ 且 ζ_d 是正的常数．

【加性泛函】 设 $\varphi(t,\omega)$ 是 Brown 运动的正的连续的时齐的加性泛函†，则下述的非负的测度 e 唯一存在． 设 D 是 $\boldsymbol{R}^d$ 的有界区域，且 $G^D(x,y)$ 是它的 Green 函数，则

$$\alpha\int_D G^D(x,y)P_\alpha(y)de(y)=1-P_\alpha(x),$$

其中 $G^D(x,y)$ 为有界 Green 区域 $D\subset\boldsymbol{R}^d$ 的 Green 函数，

$$P_\alpha(\boldsymbol{x})=E_x(\exp(-\alpha\varphi(\sigma_{\partial D}))).$$

反之，对满足适当条件的非负的测度 e，有某个正的连续的时齐的加性泛函 φ 与之对应(→Марков 过程). 特别是对于一维 Brown 运动，作为集中在点 a 的 δ 测度所对应的加性泛函 $\varphi(t, a,\omega)$，可定义在点 a 的**局部时间** (local time). 这个性质曾被 Lévy 详细研究. 现在考虑上上节的 $Y_0(t,\omega)$, $Y_1(t,\omega)$，令

$$\mathfrak{X}^+ = \{t \mid Y_0(t, \omega) = 0\},$$
$$\mathfrak{X}^- = \{t \mid Y_1(t,\omega) = 0\}.$$

首先有

$P_0(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sqrt{\pi\varepsilon/2} \times [M(s, \omega)(0 \leqslant s \leqslant t)$ 的非递增之区间且其长度较 ε 大者之数目$] = M(t, \omega)\ (t \geqslant 0)) = 1.$

由于扩散过程

$$X^+ = \{Y_0(t, \omega), 0 \leqslant t < \infty, P_x\}$$

与

$$X^- = \{Y_1(t,\omega), 0 \leqslant t < \infty, P_x\}$$

是等价的扩散过程，故存在与关于 X^- 的 $M(t, \omega)$ 相对应的 X^+ 之泛函 $\varphi^+(t, \omega)$. 此时 $[0, \infty) - \mathfrak{X}^+$ 可表示成可数个开区间 $\mathfrak{X}_n$ 之和，故有

$P_0(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sqrt{\pi\varepsilon/2} \times [$具有较 ε 大的长度之 $\mathfrak{X}_n$ 且含于 $[0,t)$ 中者之数目$] = \varphi^+(t,\omega)(t \geqslant 0)) = 1.$

此外还有下列各式成立:

$P_0(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sqrt{\pi/2\varepsilon} \times [$具有较 ε 小的长度之 $\mathfrak{X}_n$ 且含于 $[0, t)$ 者之长度的总和$] = \varphi^+(t, \omega)\ (t \geqslant 0)) = 1,$

$$P_0\left(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(2\varepsilon)^{-1}\int_0^t \chi_{0[0,\varepsilon)}(Y_0(s, \omega))ds = \varphi^+(t,\omega)(t \geqslant 0)\right) = 1.$$

设 $d_\varepsilon(t,\omega)$ 是 $Y_0(s,\omega)$ 到时刻 t 时，由 $\varepsilon > 0$ 到 0 的到达次数，则有

$$P_0(\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\varepsilon d_\varepsilon(t,\omega) = \varphi^+(t,\omega)(t \geqslant 0)) = 1.$$

就一维 Brown 运动而言，由于

$$\lim_{[y,x]\downarrow a}\frac{1}{2(y-x)}\int_0^t \chi_{[x,y]}(X(s, \omega))ds$$

以概率 1 存在，设其为 $\varphi(t, a,\omega)$，则有

$$P_0\left(\limsup_{b-a=\delta\downarrow 0, a<b}\frac{|\varphi(t,b,\omega) - \varphi(t,a,\omega)|}{\sqrt{\delta\log 1/\delta}} \leqslant 2\sqrt{\max_{a\in R^1}\varphi(t,a,\omega)}\right) = 1,$$

$$P_0\left(\limsup_{\delta\downarrow 0}\frac{|\varphi(t,\delta,\omega) - \varphi(t,0,\omega)|}{\sqrt{\delta\log\log 1/\delta}} \leqslant 2\sqrt{\varphi(t, 0, \omega)}\right) = 1.$$

其次考虑 d 维 Brown 运动的不必为正的，连续的时齐的加性泛函 $\varphi(t, \omega)$. 今设 φ 满足条件: 对于所有的 $c > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ 存在 $T > 0$，使对于 $t \leqslant T$, $|x| \leqslant c$ 有

$$P_x(|\varphi(t, \omega)| > \varepsilon) < \delta,$$

则存在实函数 V 及取 $\boldsymbol{R}^d$ 之值的函数 U，均是可测的且对任一 $c > 0$ 满足

$$\int_{|x|<c}|U(x)|^2dx < \infty,$$

可以表示成

$$\varphi(t,\omega) = V(X(t,\omega)) - V(X(0, \omega)) + \int_0^t (U(X(s, \omega)), dX(s, \omega)).$$

上式右端的末一项表示 d 维随机积分†(→扩散过程). 特别是对任一 C^2 类函数 f，有下面的所谓随机积分的变换公式成立:

$$f(X(t, \omega)) - f(X(s, \omega)) = \int_0^t (\mathrm{grad} f(X(s, \omega)), dX(s, \omega)) + \frac{1}{2}\int_0^t (\Delta f)(X(s, \omega))ds.$$

由一维 Wiener 过程 $\{X(t,\omega)\}_{-\infty<t<+\infty}$ 导出的流是 Колмогоров 流，具有任意阶的混合性†，是遍历的†(→平稳过程). 其次，以急减函数空间 $\mathscr{S}$ 之函数

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(t)dt\right)$$

为特征泛函†的各点独立的平稳过程†，和从 Wiener 过程在广义函数意义下微分导出的平稳过程，有相同的概率法则.

【Brown 运动的推广，变形】 除了迄今讲述的以外，还有下述被称为一般 Brown 运动的.

在某概率空间上定义的以 $\boldsymbol{R}^N$ 的点 a 为参数的正态随机变量族 $\{X(a)\}_{a\in\boldsymbol{R}^N}$，满足下列条件者称为 **$N$ 维时间参数的 Brown 运动**(Brownian motion with an N-dimensional time parameter)：

i) $E(X(a))=0$,

ii) $E(X(a)X(b))=(1/2)(|a|+|b|-|b-a|)$,

iii) $P(X(0)=0)=1$.

对应于前述之射影不变性，设 $a\in\boldsymbol{R}^n$ 关于单位球面之反演为 a^*，若

$$X^*(a)=|a|X(a^*)(a\neq 0),$$
$$X^*(0)=0,$$

则 $\{X^*(a)\}_{a\in\boldsymbol{R}^N}$ 也成为 Brown 运动. 多维时间参数的 Brown 运动 $\{X(a)\}_{a\in\boldsymbol{R}^N}$ 的轨道以概率 1 为连续，不仅如此，还有下列事实成立：设 $\varphi(t)$ 是定义于 $t\geqslant t_0>0$ 上的正的连续递增函数，令

$$E_\varphi(\omega)=\{a\,|\,|X(a,\omega)|>\sqrt{|a|}\,\varphi(1/|a|)\}.$$

$P(E_\varphi(\omega)$ 之闭包包含 $0)=0$ 或 1 时，分别称 φ 属于局部连续性的上类或下类. 其充分必要条件分别是

$$\int_{t_0}^{\infty}\frac{1}{t}(\varphi(t))^{2N-1}e^{-(\varphi(t))^2/2}dt<\infty\ (\text{或}=\infty),$$

特别

$$\varphi(t)=(2\log_{(2)}t+(2N+1)\log_{(3)}t+2\log_{(4)}t+\cdots+2\log_{(n-1)}t+(2+\delta)\log_{(n)}t)^{1/2}$$

在 $\delta>0$ 时为上类，$\delta\leqslant 0$ 时为下类. 由此可导出

$$P_0\left(\limsup_{a\to 0}\frac{|X(a,\omega)|}{\sqrt{2|a|\log\log 1/|a|}}=1\right)=1.$$

其次，函数 $X(a,\omega)$ $(|a|\leqslant 1)$ 满足关于

$$\varphi(1/t)\sqrt{t}$$

的 Lipschitz 条件的概率为 1 或 0 时，分别称 φ 属于一致连续性的上类或下类. 其充分必要条件是

$$\int_{t_0}^{\infty}t^{N-1}(\varphi(t))^{4N-1}e^{-(\varphi(t))^2/2}dt<\infty\ (\text{或}=\infty),$$

特别是

$$\varphi(t)=(2N\log t+(4N+1)\log_{(2)}t+2\log_{(3)}t+\cdots+2\log_{(n-1)}t+(2+\delta)\log_{(n)}t)^{1/2}$$

在 $\delta>0$ 时为上类，在 $\delta\leqslant 0$ 时为下类，特别有

$$P\left(\limsup_{|a-b|\to 0,|a|,|b|\leqslant 1}\frac{|X(a,\omega)-X(b,\omega)|}{\sqrt{2N|a-b|\log 1/|a-b|}}=1\right)=1.$$

关于多维时间参数的 Brown 运动的详细的研究，譬如有 Lévy [10], H. P. McKean [11] 等.

Langevin 方程 (Langevin's equation)

$$dU(t)=-\alpha U(t)dt+\beta dX(t)$$

可认为是一个随机微分方程†(→扩散过程). 此方程的右端可认为是粒子速度的增量，$-\alpha U(t)dt$ 是摩擦力，$\beta dX(t)$ 是随机的外力，而其中之 $X(t)$ 假定是 Wiener 过程. 由这个方程的解

$$U(t)=\int_{-\infty}^{t}\beta e^{-\alpha(t-u)}dX(u)$$

产生的随机过程 $\{U(t)\}_{-\infty<t<\infty}$ 是 Марков 过程，且是正态平稳随机过程，其自相关函数是

$$\gamma(t)=(\beta^2/2\alpha)e^{-\alpha|t|}.$$

它被称为 **Ornstein-Uhlenbeck 的 Brown 运动** (Ornstein-Uhlenbeck Brownian motion).

在扩散过程的状态空间为 Riemann 空间，Lie 群等情形，也可以定义并研究与该空间相对应的 Brown 运动(→可加过程).

【参】 [1] K. L. Chung (钟开莱)-P. Erdös-T. Sirao, On the Lipschitz's condition for Brownian motion, J. Math. Soc. Japan, **11**(1959), 263—274; [2] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [3] J. L. Doob, Semi-martingales and subharmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **77** (1954), 86—121; [4] E. Б. Дынкин (E. B. Dynkin), Марковские процессы, Физматгиз, 1963; [5] G. A. Hunt, Some theorem concerning Brownian motion, Trans. Amer. Math. Soc., **81** (1956), 294—319; [6] K. Itô (伊藤清)-H. P. McKean, Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965; [7] S. Kakutani (角谷静夫), Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **20** (1944), 706—714; [8] A. Ja. Khintchin, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erg. d.

Math., 4, Springer, 1933; [9] P. Lévy, Le mouvement brownien plan, Amer. J. Math., **62** (1940), 487—550; [10] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948; [11] H. P. McKean, Brownian motion with a several-dimensional time, Теория вероятностей и ее применение, **8** (1963), 357—378; [12] R. E. A. C. Paley-N. Wiener, Fourier transforms in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19** (1934); [13] T. Sirao (白尾恒吉), On the continuity of Brownian motion with a multi-dimensional parameter, Nagoya Math. J., **17** (1960), 135—156; [14] N. Wiener, Differential space, J. Math. and Phys., **2** (1923), 131—174.

扩散过程 [英 diffusion process 法 processus de diffusion 德 Diffusionsprozess 俄 диффузионный процесс 日 拡散過程]设 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 为概率空间. 对于在拓扑空间 S 上取值，具有连续参数 t 的 Марков 过程† $\{X_t\}_{0<t<\infty}$，若样本函数† $X_t(\omega)$ 以概率 1 (即对几乎所有的 $\omega \in \Omega$) 为 t 的连续函数时，称为**扩散过程**. 在 $X_t(\omega)$ 于某时刻 $\zeta(\omega)$ 消没(去到在 S 上添加的点(死点) ∂) 的情形下，如果 $X_t(\omega)$ 在

$$0 \leqslant t < \zeta(\omega)$$

上连续，也称为扩散过程. S 为一维区间时，称为一维扩散过程，S 为二维或二维以上的流形(有边界亦可)时，称为多维扩散过程. Brown 运动是最典型的扩散过程 (→Brown 运动).

扩散过程与某种偏微分方程有如下的密切关系. 设 S 是直线，假定对于任一 $\varepsilon > 0$，Марков 过程 $\{X_t\}_{0<t<\infty}$ 的转移概率†

$$P(s, x, t, E) \ (s < t)$$

满足

$$(1) \quad 1 - P(s,x,s+h,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)) = 0(h) \ (h\downarrow 0),$$

又设

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (y-x)^2 P(s,x,s+h,dy) = 2a(s,x) > 0,$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (y-x) P(s,x,s+h,dy) = b(s,x),$$

$$\lim_{h\to+0} \frac{1}{h}(P(s,x,s+h,S)-1) = c(s,x) \leqslant 0$$

存在，再设关于 Lebesgue 测度绝对连续:

$$P(s,x,t,(y,y+dy)) = p(s,x,t,y)dy$$

时，则 $p(s,x,t,y)$ 在适当的附加条件下，满足偏微分方程

$$(2) \quad \frac{\partial p}{\partial s} = -a(s,x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - b(s,x)\frac{\partial p}{\partial x} - c(s,x)p,$$

$$p(t-0,x,t,y) = \delta(x-y).$$

及

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(a(t,y)p) - \frac{\partial}{\partial y}(b(t,y)p) + c(t,y)p,$$

$$p(s,x,s+0,y) = \delta(y-x).$$

其中 δ 是 Dirac δ 函数. 当 $\{X_t\}$ 守恒†时，则 $c=0$. (2) 称为 **Колмогоров 后向方程**(Kolmogorov's backward equation)，(3) 称为**前向方程** (forward equation). 还称它们为 **Fokker-Planck 偏微分方程** (Fokker-Planck partial differential equation). $P(s,x,t,y)$ 是非负的，关于 y 的积分不超过 1，还满足 Chapman-Колмогоров 方程†:

$$\int p(s,x,t,y)p(t,y,u,z)dy = p(s,x,u,z)$$

A. H. Колмогоров ([7], 1931) 导出了上面的方程，还进一步提出满足上面条件的 (2) 或 (3) 的解 $p(s,x,t,y)$ 的存在及唯一性问题. 他本人及 W. Feller 继续对这个问题进行了研究，然而在转移概率满足条件 (1) 时，严密地证明其对应的 Марков 过程是扩散过程，已是 1950 年以后的事了.

对于时齐†的情形，由于 $p(s,x,s+h,y)$ 不依赖 s，故把它写成 $p(h,x,y)$. $a(s,x)$，$b(s,x)$，$c(s,x)$ 也变得不依赖 s，特别是 (2) 变成

$$(4) \quad \frac{\partial p}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial p}{\partial x} + c(x)p,$$

$$p(0+,x,y) = \delta(x-y).$$

Feller 详细地研究了这种情形．当时间参数 t 的范围是 $[0, +\infty)$，S 是区间 $[r_1, r_2]$，且满足前面附加条件的(4)的解不唯一时，究竟于 r_1 及 r_2 应附带加上什么样的边值条件方能保证解的唯一性，他用了吉田耕作-E. Hille 算子半群†理论使问题得到解决（[3]）．Feller 还引进一般微分算子，将(4)的右边的微分算子以最为一般的形式表示出来([4])．Feller 的研究的概率论内容由 E. Б. Дынкин, H. P. McKean, Jr.，伊藤清，D. B. Ray，B. A. Волконский 等解释明白，具有强 Марков 性†的一维扩散过程可以说彻底明瞭了．然而多元扩散过程事情就复杂得很，从而还有许多未解决的问题．

关于 Марков 过程成为扩散过程之条件，有如下结果．设 S 为完备度量空间（其距离以 ρ 表示），$\{X_t\}$ 为在 S 上取值的 Марков 过程，时间参数 t 的范围为 $[t_1,t_2]$（t_1,t_2 是有限的），并设对于任一正数 ε 有

(5) $\sup P(s,x,t, S-U_\varepsilon(x)) = O(h)$ $(h\downarrow 0)$

成立．其中 $U_\varepsilon(x)$ 是 x 的 ε 邻域，且 sup 是对满足 $x\in S$，$s,t\in[t_1,t_2]$，$0<t-s<h$ 的 x,s,t 取的．此时 $\{X_t\}$ 是扩散过程的充分必要条件是，对于任一正数 ε 有

$$\int_{t_1}^{t_2} P(\rho(X_t, X_{t+h})>\varepsilon)dt = o(h)\ (h\downarrow 0)$$

成立([9])．作为这个结果的特殊情形，可得到 Дынкин (1952) 与 J. R. Kinney (1953) 的结果，即(5)的左边为 $o(h)$ 乃 $\{X_t\}$ 是扩散过程的充分条件．特别对于一维强 Марков 过程，它也是 $\{X_t\}$ 为扩散过程的必要条件．

由于对非时齐的扩散过程尚未进行深入的研究，以下限于考虑时齐的扩散过程．假定

$$\mathfrak{M} = (X_t, W, P_x | x\in S)$$

是 Марков 过程，S 是状态空间†，W 是轨道空间†，它是由轨道 $\omega: [0, +\infty] \to S\cup\{\partial\}$ 中所有在 $0\leqslant t<\zeta(\omega)$ 上关于 t 连续者所组成

$$(t\geqslant\zeta(\omega) \text{ 时 } \omega(t)=\partial,$$
$$0\leqslant t<\zeta(\omega) \text{ 有 } \omega(t)\in S).$$

P_x 表示在 $t=0$ 时过程由 x 出发的情况下，在 W 上的概率测度（→Марков 过程）．实际上可以认为 $\Omega=W$，并设 $X_t(\omega)=\omega(t)$．假定 $\mathfrak{M}$ 具有强 Марков 性．由于轨道的连续性，由 $x\in E$ 出发的到集合 E 的到达测度† $H_E(x,\cdot)$集中于 E 的边界上．反之，给定了集中于边界上的到达测度族时，在某种附加条件下，存在(许多)与其对应的时齐的扩散过程．由生成算子的 Дынкин 公式†（→Марков 过程），可知，对扩散过程，其生成算子 $\mathfrak{G}$ 具有局部性．所谓局部性是指若 u、v 均属于 $\mathfrak{G}$ 的定义域，在点 x_0 的邻域一致，则有 $\mathfrak{G}_u(x_0)=\mathfrak{G}_v(x_0)$．

【一维扩散过程】 设 S 为直线，对于 $x\in S$，若 P_x（对于所有的 $t\in[0,\zeta)$ 有 $\omega(t)\geqslant x$ 的 ω 之集合）$=1$，则称 x 为**右奇异点** (right singular point)，把不等号倒过来就可以定义**左奇异点** (left singular point)．当点 x 既是右奇异点又是左奇异点时，称为**套点** (trap)．当点 x 是右奇异点而非套点时，称为**右通过点** (right shunt)．亦可同样地定义**左通过点** (left shunt)．当点 x 既非右奇异点也非左奇异点时，称为**正则点** (regular point)．

S 的正则点的全体可以表示成互不相交的开区间之和．设其中之一开区间为 (r_1, r_2)．对于它最为重要的结果是，存在定义于开区间 (r_1, r_2) 上的递增的连续函数 $s(x)$ 以及 (r_1, r_2) 上的两个测度 m，k，使 $\mathfrak{M}$ 的生成算子 $\mathfrak{G}$ 能表达成

(6) $\mathfrak{G}u(x) = (u^+(dx) - u(x)k(dx))/m(dx)$，

其中 $u^+(dx)$ 表示由 $u(x)$ 关于 $s(x)$ 的右导数 $u^+(x)$ 所确定的测度 $du^+(x)$．(6) 是二阶微分算子 $au''+bu'+cu(a>0, c\leqslant 0)$ 的推广．m 对于非空的开集必为正的，又 m，k 均对紧集为有限的．更且 s，m，k 在下述意义下是唯一的：若有两种 s_i，m_i，$k_i (i=1, 2)$存在，则有常数 $c>0$ 存在，使得

$$s_2(x) = cs_1(x) + \text{常数},$$
$$m_2(dx) = c^{-1}m_1(dx),$$
$$k_2(dx) = c^{-1}k_1(dx).$$

称 s 为 $\mathfrak{M}$ 的**标准尺度** (canonical scale)，称 m 为 $\mathfrak{M}$ 的**标准测度** (canonical measure, speed measure)，称 k 为 $\mathfrak{M}$ 的**消灭测度** (killing mea-

sure)，这三个量决定了在 (r_1, r_2) 上 $\mathfrak{M}$ 的行为. 反之，任意的 s, m, k 能成为某个 $\mathfrak{M}$ 的标准尺度、标准测度、消灭测度. 若任一轨道 w 在 (r_1, r_2) 的内部不消没，则消灭测度 k 恒等于 0，此时标准尺度 s 具有下述意义：对于 $x_1 < x < x_2$

$$P_x(\sigma_{x_2} < \sigma_{x_1}) = (s(x) - s(x_1))/(s(x_2) - s(x_1)),$$

其中 σ_y 是 $w(t)$ 到点 y 的到达时间[†].

$w(t)$ 走出 (r_1, r_2) 以前的扩散过程 $\mathfrak{M}$，可由 Brown 运动，靠状态空间(区间)基于 S 的拓扑变换及基于 m 的时间变换[†]，基于 k 的消灭法[†]来构成. 首先若由变换 $x \to s(x)$ 将 $\mathfrak{M}$ 映射到区间 $(s(r_1+0), s(r_2-0))$ 中时，可得到标准尺度即为 x 的扩散过程，其标准测度、消灭测度是原来的 m, k 由这个变换映射而成者，故一开始即可设 $\mathfrak{M}$ 的标准尺度为 $s(x) = x$. 更为了叙述简单，设 $(r_1, r_2) = (-\infty, +\infty)$. 此时，对于直线上的 Brown 运动由其加性泛函[†]

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{t}(t, x) m(dx)$$

施行时间变换，接着以其乘性泛函[†]

$$\alpha(t) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{t}(\varphi^{-1}(t), x) k(dx)\right)$$

施行消灭法时，即可得到 $\mathfrak{M}$. 其中 $\mathrm{t}(t, x)$ 是 Brown 运动的局部时间[†]. 特别当

$$m(dx) = a(x)^{-1} dx,$$
$$k(dx) = |c(x)| dx$$

时，则有

$$\varphi(t) = \int_0^t a(w(\tau))^{-1} d\tau,$$

$$\alpha(t) = \exp\left(-\int_0^t |c(w(\varphi^{-1}(\tau)))| d\tau\right),$$

而且 $\mathfrak{G}u = au'' + cu$.

于右通过点的生成算子 $\mathfrak{G}$ 之形式是一阶微分算子 $bu' + cu (b > 0, c \leqslant 0)$ 的推广，于左通过点则是 $bu' + cu (b < 0, c \leqslant 0)$ 的推广. 于套点 x 有 $\mathfrak{G}u(x) = -u(x)/E_x(\zeta)$.

当 S 是以 r_1, r_2 为端点的区间，且其内点均为 $\mathfrak{M}$ 的正则点时，则按左端接近 r_1 处 $\mathfrak{M}$ 的状态，可将 r_1 分成下列 4 个类型. 令 $n(dx) = m(dx) + k(dx)$，r 是 r_1 与 r_2 间任取的一点，设

$$\alpha = \int_{(r_1, r)} (s(r) - s(x)) n(dx),$$
$$\beta = \int_{(r_1, r)} n((x, r)) s(dx).$$

可将 r_1 分类如下：

$\alpha < \infty, \beta < \infty$：

　　正则边界 (regular boundary),

$\alpha < \infty, \beta = \infty$：

　　入口边界 (entrance boundary),

$\alpha = \infty, \beta < \infty$：

　　出口边界 (exit boundary),

$\alpha = \infty, \beta = \infty$：

　　自然边界 (natural boundary).

这个分类以及下面的讨论，对于右端 r_2 亦同. β 为有限或无穷大分别意味着 $w(t)$ 由 S 的内部在有限时间内接近 r_1 的概率为正或零. 又 α 为无穷大时，即使 r_1 属于 S，$w(t)$ 由 r_1 出发也不能进入 S 的内部. α 为有限时，不改变在 S 内部的运动，可以构造使 $w(t)$ 由 r_1 ($r_1 \notin S$ 时将它添加到 S 上) 出发进入 S 内部的扩散过程 $\mathfrak{M}$.

r_1 是 $\mathfrak{M}$ 的正则边界且 $r_1 \in S$ 时，$\mathfrak{M}$ 于 r_1 的行为有种种情形. 这可由属于生成算子 $\mathfrak{G}$ 的定义域的函数 u 所满足的边界条件表示，其最为一般的形式是

$$\gamma u(r_1) + \delta \mathfrak{G} u(r_1) + \mu u^+(r_1) = 0$$

$(\gamma, \delta, \mu$ 是常数且 $\gamma, \delta \leqslant 0, \mu \geqslant 0, |\delta| + \mu > 0)$.

特别当 $\gamma = \delta = 0$ 时，称 r_1 为 $\mathfrak{M}$ 的**反射壁** (reflecting barrier). 当 r_1 是 $\mathfrak{M}$ 的正则边界且 $r_1 \notin S$ 时，则 $w(t)$ 在到达 r_1 的瞬间就消没，而称 r_1 为 $\mathfrak{M}$ 的**吸收壁** (absorbing barrier)，这种情况对应于边值条件 $u(r_1) = 0$. 不论何种边值条件，若给定了具有反射壁的 Brown 运动，则由状态空间的拓扑变换与时间变换，消灭法，可以构成 $\mathfrak{M}$. 那时 $\gamma \neq 0$ 意味着于 r_1 消灭，$\delta \neq 0$ 意味着轨道访问 r_1 的时点的集合之 Lebesgue 测度为正. $\mu = 0$ 意味着到达 r_1

的运动再也不返回内部.

将轨道连续性的假定减弱，准许由边界 r_1 通过跳跃而返回到内部时，则边界条件成为

$$\gamma u(r_1) + \delta \mathfrak{G} u(r_1) + \mu u^+(r_1) + \int_{(r_1, r_2]} (u(x) - u(r_1))\nu(dx) = 0,$$

其中 ν 是使得 $\min(1, s(x) - s(r_1 + 0))$ 可积的测度.

当 $s = (r_1, r_2)$ 时，转移概率关于标准测度是绝对连续的，其密度 $p(t, x, y)$ 可以用本征函数展开的形式表示

$$p(t,x,y) = \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t} e(d\lambda; x, y).$$

$p(t, x, y)$ 关于 t, x, y 三变数连续，关于 x, y 对称，而且 $p(t, x, y) > 0$. 当 S 是半开的或闭的，亦可得到类似的结果[6].

若 $\mathfrak{M}$ 是再归的，即对于所有的 x, y 有 $P_x(\sigma_y < +\infty) = P_y(\sigma_x < +\infty) = 1$ 时，则存在 $\mathfrak{M}$ 的对 S 内部的闭区间取有限值的不变测度†，而且除了常数倍而外唯一存在. 当 $\mathfrak{M}$ 是守恒的且 S 的内部全是正则点时，若端点是人口边界、自然边界、或作为反射壁的正则边界三者之一时，则标准测度是不变测度. 又 S 的内部为正则时，可以定义与 Brown 运动的标准局部时间类似的局部时间.

【多维扩散过程】 设状态空间 S 是 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 内的区域或其闭包，又设时间参数 t 的范围为 $[0, +\infty)$. 考虑时齐的扩散过程 $\{X_t\}$. 但是从边界允许跳跃. 若具有适当的正则性，其生成算子 $\mathfrak{G}$ 对于 $\mathfrak{G}$ 的定义域内充分光滑的函数 u，与以下的椭圆型†偏微分算子 A 一致.

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + c(x), \quad c \leqslant 0. \tag{7}$$

当 S 有边界时，u 满足如下的边界条件

$$Bu(x) + \delta(x) Au(x) + \mu(x) \frac{\partial u(x)}{\partial n} + \int_{y^n > 0} \Big(u(y) - u(x) - \chi_U(y) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial u(x)}{\partial x^i}(y^i - x^i)\Big)\nu_x(dy) = 0, \tag{8}$$

其中

$$Bu(x) = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha^{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta^i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} + \gamma(x) u(x),$$

这里为了简单起见，假定 S 是闭的半空间 $x^n \geqslant 0$, α^{ij} 是关于 i, j 对称的非负定矩阵，$\gamma \leqslant 0$, $\delta \leqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\partial/\partial n$ 是由 a^{ij} 所确定的内向法线微分，χ_U 是 x 的有界邻域 U 的示性函数，U_x 是在 U 外为有限而在 U 内使

$$\sum_{i=1}^{n-1} (y^i - x^i)^2 + y^n$$

为可积之测度. 上面的条件是 А. Д. Вентцель ([11])所得到的. 反之，当 (7) 的右端被给定，又当 S 具有边界且已给定 (8) 形的边界条件时，与之对应的扩散过程的存在及唯一性问题，还只是知道特殊情形的结果，譬如 $S = \boldsymbol{R}^n$ 且 (7) 的系数是连续的，则至少有一个对应的扩散过程存在.

当 S 是有界区域的闭包且具有充分光滑的边界时，假定给出了具有充分光滑的系数的 A. (8) 中 $\mu \neq 0$ 且除 μ 与 γ 以外全为 0 时，仅有一个扩散过程与之对应. γ 亦为 0 时，称它为**具有反射壁的扩散过程** (diffusion process with reflecting barrier). 今设给定了形如 (8) 的一般的边界条件，并令左端为 Lu. 又令作为 $Au = 0$ 的解且在 S 的边界上取值为 $f(x)$ 的函数 u 为 Hf. 上野正指出在某些自然的附加条件下，若 LH 为边界上的 Марков 过程的生成算子时，则以(8)为边界条件的扩散过程 (从边界允许跳跃)存在([10]). 如果 $\{X_t\}$ 有反射壁，基于仅在 X_t 在边界上时增加其值的非负连续加性泛函而对 $\{X_t\}$ 进行时间变换，可以反过来得到上述边界上的 Марков 过程.

生成算子为 A 之形式的扩散过程在 S 上被

定义时，多种偏微分方程之解可以用它来表示．设 σ 是到 S 的边界的到达时间．此时 $Hf(x)$ 可表示成 $E_x(f(X_{\sigma-0}))$；在边界上为 0 的

$$Au = -f$$

的解可表示成

$$u(x) = E_x\left(\int_0^\sigma f(X_t)\,dt\right);$$

在边界上为 0 且 $t=0$ 时为 $f(x)$ 的

$$\partial u/\partial t = Au$$

之解可表示成

$$u(t,x) = E_x(f(X_t); t < \sigma).$$

第一个解是所谓的 Dirichlet 问题之解，且边界点关于 Dirichlet 问题†是正则†的条件也能够以概率论的性质表示．此外，上面的表示中若 $f(X_t)$ 被

$$f(X_t)\exp\left(\int_0^t k(X_s)ds\right)$$

替换时，则在方程方面是将 A 换成 $A+k$ 的结果（M. Kac, 1951）．$k \leqslant 0$ 时，它相当于施行了消灭法．

能向所有方向扩展的多维扩散过程，虽是所有的点均为正则的一维扩散过程的推广，但不一定能由多维 Brown 运动基于状态空间的变换、时间变换，消灭法所得到．这是多维情形与一维情形大不相同的地方，即使加上下述的漂移变换也不一定能从 Brown 运动得到．

设 $\mathfrak{M} = (X_t, W, P_x | x \in \boldsymbol{R}^n)$ 是 n 维 Brown 运动，重新定义测度 $\tilde{P}_x$，对于 $B \in \boldsymbol{B}_t$ 即对于时刻 t 以前所确定的事件 B

$$\tilde{P}_x(B) = E_x\left(\exp\left(\sum_{i=1}^n \int_0^t b^i(X_s)dX_s^i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_0^t b^i(X_s)^2 ds\right);\ B\right)$$

（X_t^i 是 X_t 的第 i 个坐标，依 dX_t 的积分表示随机积分†）．这样一来，

$$\tilde{\mathfrak{M}} = (X_t, W, \tilde{P}_x | x \in \boldsymbol{R}^n)$$

是以

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} + \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

为生成算子的扩散过程．这个由 $\mathfrak{M}$ 到 $\tilde{\mathfrak{M}}$ 的变换称为**漂移**（drift）**变换**．对于更一般的扩散过程，定义改变生成算子的一阶微分项的运算为漂移变换（丸山儀四郎研究了一维过程，И. В. Гирсанов, Дынкин, 本尾实研究了多维情形）．

$\sqrt{a}$，b 满足 Lipschitz 条件†时，由一维 Brown 运动 $\{X_t\}$，依靠解**随机微分方程**（stochastic differential equation）

$$d\tilde{X}_t = \sqrt{2a(\tilde{X}_t)}\,dX_t + q(\tilde{X}_t)\,dt$$

可以构成以 $a(x)d^2/dx^2 + b(x)d/dx$ 为生成算子的扩散过程 $\tilde{X}_t$（С. Н. Бернштейн, P. Lévy, 伊藤（[5]））．这个方程指明了系数 a，b 的意义．也可以把它推广到多维扩散过程，当 $\{X_t\}$ 为 n 维 Brown 运动时，方程的形式变成

$$d\tilde{X}_t^i = \sum_{j=1}^n \alpha_j^i(\tilde{X}_t)dX_t^j + b^i(\tilde{X}_t)dt,$$

其中设

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k^i \alpha_k^j = 2a^{ij}.$$

又（8）中除 β^i，μ 以外为 0 时的扩散过程的构成，以及二维时具有（8）之形式的边界条件者的构成，亦可使用随机微分方程．

对于没有边界的紧可微流形上的守恒扩散过程 $\{X_t\}$，与（7）相当的是

$$A = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 a^{ij} 是二阶反变张量，b^i 是反变向量，a 是 (a^{ij}) 的逆矩阵的行列式，并假设它们是充分光滑的（此处的 b^i 与（7）中的 b^i 不同）．已经知道 $\{X_t\}$ 可由这些系数确定．又对于 $\{X_t\}$ 存在不变测度 m，而且除了相差常数倍是唯一确定的．它可以用函数 ρ 表示成

$$\rho(x)\sqrt{a(x)}\,dx^1\cdots dx^n.$$

假定 m 的全测度是有限的，则我们可以假定全测度是 1．扩散过程 $\{X_t^*\}$ 被称为共轭†于 $\{X_t\}$．假定 X_t^* 的生成算子的形式是

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(a^{ij}\sqrt{a}\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right) - \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$+ 2\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial \log \rho}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

$\{X_t^*\}$ 与原来的 $\{X_t\}$ 一致的充分必要条件是，b^i 具有位势，即可用某个 f 写成

$$b^i = \sum_{j=1}^{n} a^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

此外，当状态空间有边界时，$\{X_t\}$ 是有反射壁的扩散过程的充分必要条件是，$\{X_t^*\}$ 是有反射壁的扩散过程.

一般说来，在非紧的 S 上给定扩散过程 $\{X_t\}$，而 $t\uparrow\zeta$ 时 X_t 的极限点不存在于 S 内时，将由 $\{X_t\}$ 引导某种自然的紧化. 由于这个缘故引进了 Марков 过程的 Martin 边界†这一概念.

【参】 [1] Е. Б. Дынкин (E. B. Dynkin), Одномерные непрерывные строго марковские процессы, Теория вероятностей и ее применение, **4** (1959), 3—54; [2] Е. Б Дынкин (E. B. Dynkin), Марковские процессы, Физматгиз, 1963; [3] W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, Ann. of Math., (2), **55** (1952), 468—519; [4] W. Feller, On second order differential operators, Ann. of Math., (2), **61** (1955), 90—105. [5] K. Itô (伊藤清), On stochastic differential equations, Mem. Amer. Math. Soc., 1951; [6] K. Itô (伊藤清) H. P. McKean. Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965; [6A] H. P. McKean, Jr., Stochastic integrals, Academic Press, 1969. [7] A. N. Kolmogorov, Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann., **104** (1931), 415—458 (中译本：概率论的解析方法，见上海科学技术出版社出版的《随机过程》(伊藤清著，刘璋温译) 的附录); [8] M. Motoo (本尾实), Application of additive functionals to the boundary problem of Markov processes, Proc. 5th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. II. 1965; [9] Л. В. Серегин (L. V. Seregin,) Условия непрерывности вероятностных процессов, Теория вероятностей и ее применение, **6** (1961), 3—30; [10] T. Ueno (上野正), The diffusion satisfying Wentzells boundary condition and the Markov process on the boundary, Proc. Japan Acad., **36** (1960), 1533—538, II625—629; [11] А. Д. Вентцель (A. D. Ventcel'), О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов, Теория вероятностей и ее применение, **4** (1959), 172—185; [12] A. Friedman, Stochastic differential equations and applications I. Academic Press, 1975; [13] A, V. Skorokhod, Studies in the theory of random processes. Addison-Wesley, 1965.

可加过程 [英 additive process 法 processus additif 德 additiver Prozess 俄 аддитивный процесс 日 加法過程] 独立随机变量之和的极限分布的研究是近代概率论的中心问题之一(→极限定理). 将独立随机变量之和一般化而考虑具有连续参数的随机过程时，就能得到可加过程的概念.

【定义和基本性质】 在实值随机过程† $\{X_t\}_{0\le t<+\infty}$ (以后记以 $X(t)$ $(0\leqslant t<+\infty)$. 又为简单起见以后常假定 $X(0)=0$) 中，对任意的 $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，

$$X(t_i)-X(t_{i-1})\ (i=1,2,\cdots,n)$$

为相互独立时，称 $X(t)$ 为**可加过程或独立增量过程** (process with independent increments). 可加过程与对空间齐次的 Марков 过程 (即在平移之下不变的，$\boldsymbol{R}^1$ 上的 Марков 过程)在本质上是相同的 (→ Марков 过程). 在可加过程 $X(t)$ 中，对任意的 $h>0$，$t>s$，

$$X(t+h)-X(s+h)$$

与 $X(t)-X(s)$ 的分布相同，即 $X(t)-X(s)$ 的分布仅与 $t-s$ 有关时，称 $X(t)$ 为**时齐的** (temporally homogeneous). 这与对时间和空间都为齐次的 Марков 过程在本质上是相同的.

今设 $X(t)$ 为已给的可加过程. 如 $f(t)$ 是仅为时间 t 的实函数，则

$$Y(t)=X(t)-f(t)$$

也是可加过程，而适当选择 $f(t)$，可使 $Y(t)$ 具有以下的性质. 对于每个 $t>0$，当 $s_n\uparrow t$ $(s_n\downarrow t)$ 时 $Y(s_n)$ 几乎必然收敛†. 这时极限值与 s_n 的取法无关而确定. 把它表示为 $Y(t-)$ $(Y(t+))$. 把 $X(t)$ 变换为具有这样性质的 $Y(t)$ 称为**中心化** (centering)，$Y(t)$ 称为**中心化过程** (centered process). 这种情形，例如选取使 E $(\arctan\ (X(t)-f(t)))=0$ 的 $f(t)$ 就可以.

今如设 $Y(t)$ 为一中心化可加过程，则除去属于最多为可数的时点集 S 的 t 以外，

$$Y(t-)=Y(t)=Y(t+)$$

以概率1成立. $t \in S$ 称为 $Y(t)$ 的**固定不连续点** (fixed point of discontinuity). 这时

$$Y_1(t) = \lim_{n\to\infty} U_n(t)$$

以概率1存在. 但这里,

$$U_n(t) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n, s_i<t} (Y(s_i+) - Y(s_i-)) + Y(t) - Y(t-) - c_t^n,$$

c_t^n 为由 $E(\arctan U_n(t)) = 0$ 确定的常数,

$$S = \{s_j\} \ (j = 1, 2, \cdots).$$

$Y_1(t)$ 定义了一个中心化可加过程,

$$Y_2(t) = Y(t) - Y_1(t)$$

成为一个没有固定不连续点的中心化可加过程,并且 $Y_1(t)$ 与 $Y_2(t)$ 独立. $Y_1(t)$ 的更详细的分析没有什么意义,有意义的是 $Y_2(t)$ 的部分,即中心化可加过程没有固定不连续点的部分,但这又与依概率连续†的可加过程是等价的. 所以现在设 $Y_2(t)$ 为依概率连续的可加过程. $Y_2(t)$ 的可分†修正 $\widetilde{Y}_2(t)$ 的样本函数†以概率1为最多第一种不连续的函数. 如令

$$Y_2^*(t) = \widetilde{Y}_2(t+),$$

则 $Y_2^*(t)$ 的样本函数以概率1最多为第一种不连续的右连续函数,又显然 $Y_2^*(t)$ 是 $Y_2(t)$ 的一个修正†. 在 $Y_2(t)$ 的研究中,取这一修正较为方便. 一般的依概率连续的可加过程,如其样本函数以概率1最多为第一种不连续并且右连续,则称为 **Lévy 过程** (Lévy process) ([3], [7]).

又可加过程以及 Lévy 过程的概念,都能照样地扩张为 $X(t)$ 取值于 N 维空间 $\boldsymbol{R}^N$ 的情形.

【与无穷可分分布的关系】 设 $X(t)$ 为 Lévy 过程, $X(t) - X(s)$ 的分布为

$$\Phi_{st}(s < t).$$

这时 Φ_{st} 成为无穷可分分布(→概率分布). 反之,能确定与给定的无穷可分分布 Φ 对应的 Lévy 过程 $X(t)$,使 $X(1)$ 的分布恰为 Φ. 特别对于时齐的 Lévy 过程,因 Φ_{st} 的特征函数 $\varphi_{st}(z) = E(e^{iz(X(t)-X(s))})$ 成为

$$\varphi_{st}(z) = \exp((t-s)\psi(z)),$$

故此过程的分布由 $\psi(z)$ 完全确定. 由 Lévy-Хинчин 标准型†,这个 $\psi(z)$ 由

$$(1)\quad \psi(z) = imz - \frac{v}{2}z^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{izu} - 1 - \frac{izu}{1+u^2}\right)n(du)$$

所给出. 这里 $m, v \in \boldsymbol{R}^1$, $v \geqslant 0$, 并且 $n(du)$ 是使 $n(\{0\}) = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{1+u^2}n(du) < \infty$$

的$(-\infty,\infty)$上的测度. $m, v, n(du)$ 由 $\psi(z)$ 唯一确定(→概率分布).

【基本的可加过程】 i) Wiener 过程. 当 Lévy 过程 $X(t)$ 的样本函数以概率1为连续时, $X(t) - X(s)$ 的分布便成为正态分布†.特别当其为时齐时,(1) 中的 $\psi(z)$ 由

$$\psi(z) = imz - \frac{v}{2}z^2$$

所给出,如其中 $m = 0$, $v = 1$, 则称其为一维的 **Wiener 过程** (Wiener process)或 **Brown 运动** (Brownian motion). 它是作为植物学家 R. Brown 所发现的胶质粒子运动的数学模型而由 N. Wiener (1923) 所引进的,在今日概率论中是一种最基本的随机过程 (→Brown 运动).

ii) Poisson 过程. 当 Lévy 过程的样本函数以概率1为仅有高度为1的跳跃增加的阶梯函数时, $X(t) - X(s)$ 的分布便成为 Poisson 分布†.特别当其为时齐时,(1)中的 $\psi(z)$ 成为 $\psi(z) = \lambda(e^{iz} - 1)$ $(\lambda > 0)$, 这时 $X(t)$ 称为 **Poisson 过程** (Poisson process). 今设 $X(t)$ 为 Poisson 过程,其样本函数增加的时点为 T_0, $T_0 + T_1$, $T_0 + T_1 + T_2$, $\cdots$, 则 T_0, T_1, T_2, $\cdots$为服从同一指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ 的独立随机变量序列. 反之,对于这样的独立随机变量序列 $\{T_n\}$, 如令

$$X(t) = \inf\{n \mid T_0 + T_1 + \cdots + T_n > t\},$$

则 $X(t)$ 为 Poisson 过程. 由此可知,例如电话交换台接通电话的次数,如考虑其各个间隔相互独立并服从同一指数分布时,便是个 Poisson 过程.

【一般 Lévy 过程的构造】 为简单起见，这里仅考虑时齐的 Lévy 过程 $X(t)$. 如上所述，$X(t)$ 的分布由函数 $\psi(z)$ 所确定，而 $\psi(z)$ 的表达式 (1) 显示出它可由 Wiener 过程和 Poisson 过程的分布在某种意义上合成而得到. 这一事实，从揭示了 $X(t)$ 的样本函数本身可由 Wiener 过程和 Poisson 过程合成而得到的 Lévy-伊藤定理就更加明白了.事实上，Lévy-伊藤定理是比表达式(1)更加深刻的定理，不仅由于(1)是它的推论，而且(1)的概率意义也可由此定理彻底弄明白.

Lévy-伊藤定理的概要如下. 今设 U 为 $\boldsymbol{R}^1$ 的 Borel 集，离开原点有一个正的距离. 令 $N(t, U)$ 为使得 $X(s)-X(s-)\in U(s\leqslant t)$ 的时点 s 的个数. 这时 $N(t, U)$ 成为 Poisson 过程. 令其平均值为

$$E(N(t, U)) = tn(U),$$

则 $n(U)$ 定义了 $\boldsymbol{R}^1-\{0\}$ 上的一个测度，并使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2}{1+u^2}\,n(du)<\infty.$$

其次令

$$s_\varepsilon(t)=\int_{|u|>\varepsilon}uN(t, du)$$
$$=\sum_{s\leqslant t, |X(s)-X(s-)|>\varepsilon}(X(s)-X(s-)).$$

$s_\varepsilon(t)$ 在 $\varepsilon\downarrow 0$ 时一般是发散的，可是把它加减一个仅为 t 的函数后

$$\bar{S}_\varepsilon(t)=S_\varepsilon(t)-t\int_{|u|>\varepsilon}\frac{u}{1+u^2}\,n(du)$$

在 $\varepsilon\downarrow 0$ 时以概率 1 关于 t 广义一致收敛，并且

$$X(t)-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\bar{S}_\varepsilon(t)$$

成为具有连续轨道的 Lévy 过程. 另一方面，由于具有连续轨道的 Lévy 过程必可表示成

$mt+\sqrt{v}\,B(t)$ (m, $v(v\geqslant 0)$为常数，$B(t)$ 为 Wiener 过程)，

因此 $X(t)$ 可以分解成

$$X(t)=mt+\sqrt{v}\,B(t)+\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|u|>\varepsilon}\left(uN(t, du)-\frac{u}{1+u^2}tn(du)\right). \tag{2}$$

进一步如 $U_1, U_2, \cdots, U_n$ 互不相交，则 $B(t)$, $N(t, U_1), \cdots, N(t, U_n)$ 相互独立. 从而(2)的右端第三项的积分与其它项独立. 不待言，这一表达式中的 m, v, $n(du)$ 与(1)中的相对应. 称 $n(du)$ 为 **Lévy 测度** (Lévy measure)，它在一般的具有不连续轨道的 Марков 过程中是个基本的量.

【Lévy 过程的例】 i) 复合 Poisson 过程. 一时齐的 Lévy 过程，其样本函数只有跳跃的变化，其 Lévy 测度有限，称为**复合 Poisson 过程** (compound Poisson process). 即 (1) 中的 $\psi(z)$ 由

$$\psi(z)=\int_{-\infty}^{\infty}(e^{izu}-1)n(du),$$
$$\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}n(du)<\infty$$

所给出的情形. 今如令

$$\Phi(du)=(1/\lambda)n(du),$$

则 Φ 是 $\boldsymbol{R}^1$ 上的概率分布，它是 $X(t)$ 跳跃时跳跃大小的分布. 复合 Poisson 过程可以如下构成. 设 $T_0, T_1, T_2, \cdots$; $U_1, U_2, \cdots$ 为相互独立的随机变量序列，

$$P(T_n\in(t, t+dt))=\lambda e^{-\lambda t}dt\ (t>0),$$
$$P(U_n\in du)=\Phi(du),$$

并用

$$X(t)=U_1+U_2+\cdots+U_n,$$
$$n=\inf\{n\,|\,T_0+T_1+\cdots+T_n>t\}$$

来定义 $X(t)$. 它就成为一个复合 Poisson 过程. 此即跳跃次数是个 Poisson 过程，各个跳跃的大小服从 $\Phi(du)$.

ii) 稳定过程. 在时齐的 Lévy 过程 $X(t)$ 中，当对每个 $t>0$ 总存在常数 C_t 使得 $X(t)$ 的分布与 $C_tX(1)$ 的分布相同时，称 $X(t)$ 为**稳定过程** (stable process). 当 $X(t)$ 的分布为稳定分布†时，并且仅当这个时候，$X(t)$ 为稳定过程. 这一稳定分布的指数† $\alpha(0<\alpha\leqslant 2)$ 称为稳定过程的指数. 特别当 $\alpha=1$ 时称为

Cauchy 过程 (Cauchy process). $\alpha=2$ 时的稳定过程本质上是 Wiener 过程. (1)中的 $\psi(z)$ 是

$$\psi(z)=C_+\int_0^\infty(e^{izu}-1)\frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

$$+C_-\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}},$$

$$0<\alpha<1,$$

$$\psi(z)=C_+\int_0^\infty(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{u^{\alpha+1}}$$

$$+C_-\int_{-\infty}^0(e^{izu}-1-izu)\frac{du}{|u|^{\alpha+1}},$$

$$1<\alpha<2,$$

$$\psi(z)=iC_1z+\frac{C_0}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\Big(e^{izu}-1$$

$$-\frac{izu}{1+u^2}\Big)\frac{du}{u^2},\ \alpha=1.$$

其中 C_+, C_-, $C_0\geqslant 0$, C_1 为实数. 从而

$$\psi(z)=(-C_0+i(z/|z|)C_1)|z|^\alpha,$$

这里,在 $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$ 时

$$-C_0=(C_++C_-)\Gamma(-\alpha)\cos(\pi/2)\alpha,$$

$$C_1=(C_--C_+)\Gamma(-\alpha)\sin(\pi/2)\alpha.$$

当 $C_1=0$ 时, $X(t)$ 称为**对称稳定过程** (symmetric stable process). 特别对与

$$\psi(z)=-|z|$$

对应的对称 Cauchy 过程,

$$P(X(t)<x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^x\frac{t}{t^2+y^2}dy$$

成立. 其次在 $0<\alpha<1$, $C_-=0$ 时, $X(t)$ 的样本函数以概率 1 只有跳跃增加. 这时 $X(t)$ 称为**单侧稳定过程** (one-sided stable process) 或 α 位的**从属过程** (subordinator). 今设 $X(t)$ 是指数为 $\beta(0<\beta\leqslant 2)$ 的对称稳定过程, $Y(t)$是与 $X(t)$ 独立的 α 位的从属过程, 这时 $Z(t)=X(Y(t))$ 则是指数为 $\alpha\beta$ 的对称稳定过程. 这一变换称为**从属运算** (subordination), 它与半群的生成算子的分数幂的理论有密切的关系([2], →Марков 过程).

稳定过程在 $X(t)$ 取值于N维空间时也可同样地定义. 特别对于由

$$E(e^{i(Z,X(t))})=e^{-t|z|^\alpha}$$

$$(z\in\boldsymbol{R}^N,\ 0<\alpha\leqslant 2)$$

定义的N维对称稳定过程, 在 $N>\alpha$ 时对支集为紧的任意有界可测函数 f, 有

$$E\left(\int_0^\infty f(x+X(t))\,dt\right)$$

$$=\frac{\Gamma((N-\alpha)/2)}{2^\alpha\pi^{N/2}\Gamma(\alpha/2)}\int_{\boldsymbol{R}^N}|x-y|^{\alpha-N}f(y)dy$$

成立. 上式右端是 Frostman-Riesz 的 α 次位势† (→位势论). 这是 Brown 运动与 Newton 位势的关系 (→Brown 运动)的一般化,通过它可以进行稳定过程样本函数性质的研究以及各种平均量的计算([1]).

【可加过程的一般化】 时齐的 Lévy 过程, 与时齐、随机连续的 $\boldsymbol{R}^1$ 上的 Марков 过程, 特别与空齐的 Марков 过程, 在本质上是相同的. 由此事实, 在使空齐性具有意义的齐性空间†上可实行可加过程的一般化. 设M为变换群G作用的齐性空间. M 上的时齐 Марков 过程,当它的转移概率† $P(t,x,E)$ 满足

$$P(t,x,E)=P(t,gx,gE)\ (\forall g\in G)$$

时,称之为M上的**不变 Марков 过程** (invariant Markov process, homogeneous Markov process). 这样, 可加过程恰好是当 G 为平移变换群时, $\boldsymbol{R}^N$ 上的不变 Марков 过程. G. A. Hunt 在M为 Lie 群†时以及 Lie 群的商空间时, 把它上面的不变 Марков 过程完全确定下来([5]).

今设 G 为 Lie 群, $\Lambda(G)$ 为 G 的左不变 Lie 代数. 令 C 为G的一点紧化

$$G_c=G\cup\{\omega\}$$

上的连续函数的全体,对于 $Y\in\Lambda$ 当

$$Y(f)=\lim_{t\downarrow 0}(R_{\eta(t)}f-f)/t$$

$$(\eta(t)=\exp tY,\ R_\sigma f(\tau)=f(\tau\sigma))$$

关于 C 的一致模存在时,则以此定义 $Y(f)$. 令 $C_2=\{f\in C\,|\,Y(Xf)$ 对任意的 X, $Y\in\Lambda(G)$ 存在$\}$. 设 X_1, $X_2,\cdots$, X_d 为 $\Lambda(G)$ 的基, x_1, $x_2,\cdots,x_d$ 为 C_2 的函数并使

$$x_i(e)=0,\ X_ix_j(e)=\delta_{ij}$$

(e 为G的单位元). 进一步在 e 的邻域引进函数

$$\varphi(g)=\sum_{i=1}^{d}x_i^2(g),$$

并且将 φ 向 G_c 上按 $\varphi\in C_2$ 且在 e 的邻域外 $\varphi\geqslant k>0$（k 为常数）进行扩张．今 $g\in G$ 按 $\tau_g\sigma=g\sigma$，$\tau_g\omega=\omega$ 定义 G_c 的变换 τ_g．设 $X(t)$ 为依概率连续的 G_c 上的不变 Марков 过程．这时与 $X(t)$ 对应的半群 T_t 在其生成算子 A 的定义域中包含所有 C_2 的函数，对于 $f\in C_2$ 有

$$Af(\tau)=\sum_{i=1}^{d}a_i(X_if)(\tau)+\sum_{i,j=1}^{d}a_{ij}X_i(X_jf)(\tau)$$
$$+\int_{G_c-\{e\}}(f(\tau\sigma)-f(\tau)$$
$$-\sum X_if(\tau)x_i(\sigma))n(d\sigma).$$

这里 a_i 为实数，(a_{ij}) 为实对称非负定矩阵，$n(d\sigma)$ 为 $G_c-\{e\}$ 上使

$$\int\varphi(\sigma)n(d\sigma)<\infty$$

的测度．反之如给定这样的 a_i，a_{ij}，$n(d\sigma)$，则存在唯一的满足这一关系的 G_c 上的依概率连续的不变 Марков 过程．

在 Lie 群 G 由其紧子群 k 所得商空间 M 的情形，也有同样结果成立．在其它 M 为球面和 Лобачевский 空间等的具体空间时，还可以用它的球函数求得无穷可分分布和不变 Марков 过程的标准型（[4]，[5]，[11]）．关于可加过程的到达（hitting）概率，→[12]．

【参】 [1] R. M. Blumenthal-R. K. Getoor-D. B. Ray, On the distribution of the first hits for the symmetric stable processes, Trans. Amer. Math. Soc., **99**(1961), 540—554; [2] S. Bochner, Harmonic analysis and the theory of probability, Univ. of California Press, 1955; [3] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [4] U. Grenander, Probabilities on algebraic structures, John Wiley, 1963; [5] G. A. Hunt, Semi-groups of measures on Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc., **81** (1956), 264—293; [6] K. Itô（伊藤清）, On stochastic processes I, Jap. J. Math., **18** (1942), 261—301; [7] 伊藤清，確率過程 I，岩波講座現代応用数学，1957（中译本：伊藤清，随机过程，上海科学技术出版社，1961）; [8] K. Itô（伊藤清）, On stochastic processes, Lecture notes, Tata Inst., 1961; [9] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, Gauthier-Villars, 1937; [10] P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948; [11] R. Gangolli, Isotropic infinitely divisible measures on symmetric spaces, Acta Math., **111** (1964), 213—246; [12] H. Kesten, Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments, Mem. Amer. Math. Soc., **93** (1969).

分枝过程 ［英 branching process, multiplicative process　法 processus multiplicatif, processus à ramifications　德 multiplikativer prozess　俄 ветвящийся процесс　日 分枝過程］ **分枝过程**是当集团的个体互相独立地消灭、增殖（分裂）时，表现集团状态的一种随机过程†；是将诸如生物集团的消长，遗传因子的迁移，核连锁反应中中子数及宇宙线簇射中粒子数的增减等现象，用概率论的方法模型化而成的．

【Galton-Watson 分枝过程】 虽然关于连续参数 $t\in R$ 有类似的情况，我们在这里只考虑时间参数 t 是离散的情形（$t=0,1,2,\cdots$）．设构成集团的个体总是同种类的，且各个体与其它个体互相独立地并与过去的经历无关地按照同一概率分布而分裂成几个个体．又设时刻（世代）n 时的个体数为 Z_n 时，则 $\{Z_n\}$ 构成 Марков 链†．称此为 **Galton-Watson 分枝过程**（Galton-Watson branching process）．

设分裂成 k 个的概率为 p_k 且令

$$f(s)=\sum_{j=0}^{\infty}p_js^j,$$

则由于个体互相独立地进行分裂，Z_n 的转移概率 p_{ij} 可由 $f(s)^i$ 中的 s^j 的系数给出．下面将在 $Z_0=1$ 的条件下来考虑．

设 Z_n 的母函数

$$\sum_{k=0}^{\infty}P(Z_n=k)s^k\ (|s|\leqslant 1)$$

为 $f_n(s)$，则有 $f_0(s)=s$，

$$f_1(s)=f(s),\ f_{m+n}(s)=f_m(f_n(s))$$

（$m,n=0,1,2,\cdots$）成立，若设 Z_1 的平均值†为 $m=f'(1)=E(Z_1)$ 时，则可得 Z_n 的平均值 $E(Z_n)=m^n$．

对于某个 n，若 $Z_n=0$ 则有

$$Z_{n+1}=Z_{n+2}=\cdots=0.$$

而称其概率为**消灭概率**（extinction probability）．设此概率为 $q=P(\lim_n Z_n=0)$，则

(1) $m\leqslant 1$ 时 $q=1$，$m>1$ 时 $0\leqslant q<1$（但 $f_1(s)\equiv s$ 时除外，以下相同），q 是

$$f(s)=s$$

的非负的最小根，它唯一确定．此外，当 $m>1$ 时，$P(\lim_n Z_n=\infty)=1-q$ 成立，因而过程 $\{Z_n\}$ 具有瞬时性（transience）．

当 $m<\infty$ 时，令 $W_n=Z_n/m^n$，则 $\{W_n\}$ 是鞅†，其极限 $W=\lim_{n\to+\infty}W_n$ 以概率 1 存在．当 $m\leqslant 1$ 时，则 $P(W=0)=1$，而当 $m>1$ 时则 W 的矩量母函数 $\varphi(s)=E(e^{-sW})$ 满足下面的 Königs-Schröder 方程

(2) $\quad\varphi(ms)=f(\varphi(s))$，$\mathrm{Re}s\geqslant 0$．

当 $m\leqslant 1$，则有 P（对某个 n 有 $Z_n=0$）$=1$，而在 $Z_n\neq 0$ 的条件下，关于极限分布有如下的 Яглом 定理：若 $m<1$，$E(Z_1^2)<\infty$，则存在 $b_k=\lim_n P(Z_n=k|Z_n\neq 0)$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k=1\right),$$

$\{b_k\}$ 的母函数

$$g(s)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k s^k$$

满足

$$g(f(s))=mg(s)+1-m(|s|\leqslant 1).$$

此时

$$g'(1)=\lim_n m^n(1-f_n(0))^{-1}.$$

又若 $m=1$，$f'''(1)<\infty$ 时，则

$$\lim_n P(2Z_n/nf''(1)<u|Z_n\neq 0)$$
$$=1-e^{-u}(u\geqslant 0).$$

【高阶 Galton-Watson 分枝过程】 今考虑个体的种类为 $k\ (k\geqslant 2)$ 时的情形，设 k 个种类为 $T_1,\cdots,T_k$．又设 T_l 型个体分裂时出现 $r_m(m=1,2,\cdots,k)$ 个 T_m 型个体的概率为 $p^l(r_1,r_2,\cdots,r_k)$，且令

$$f^l(s_1,s_2,\cdots,s_k)=\sum_r p^l(r_1,r_2,\cdots,r_k)$$
$$\times s_1^{r_1}s_2^{r_2}\cdots s_k^{r_k},$$

则于时刻 n 的个体数

$$Z_n=(Z_n^1,\ Z_n^2,\cdots Z_n^k)$$

成为沿 k 维格子点移动的 Марков 链，其转移概率由 $p^l(r_1,r_2,\cdots,r_k)$，用前节的类似方法确定之([1])．

当 $m_{ij}=\partial f^i(1,\cdots,1)/\partial s_j<\infty$ 时，则对于矩阵 $M=(m_{ij})$，Z_{m+n} 的条件平均值†成为

$$E(Z_{m+n}|Z_m=e_m)=e_mM^n.$$

若 M 的每个元素为非负的且存在使 M^N 的每个元素为正的自然数 N 时，过程 $\{Z_n\}$ 称为**正型正则**（positively regular）的．此时 M 具有绝对值为最大的单的正特征值† λ，此 λ 起着前节中 m 的作用．正型正则过程在某些简单假设下，关于消灭概率 $q=(q^1,\cdots,q^k)$ $(q^i=P(\lim_n Z_n=0|Z_0=e_i))$ 有 (1) 式成立，此外过程的瞬时性也成立（其中 1 意味着 $(1,\cdots,1)$，$0\leqslant q<1$ 意味着 $0\leqslant q^i<1$

$$(i=1,\cdots,k),\ f(s)=s$$

意味着 $f^i(s)=s_i(i=1,\cdots,k)$）．若再假定 $E(Z_1^iZ_1^j|Z_0=e_r)<\infty$，则 $\lambda>1$ 时，

$$W_n=Z_n/\lambda^n$$

以概率 1 收敛，其极限值 W 以概率 1 与 M 的对应于 λ 的左特征向量† $v=(v_1,\cdots,v_k)$ 只差一常数因子，且 W 的矩量母函数满足与(2)同样的函数方程．$\lambda\leqslant 1$ 时，与 Яглом 定理类似的性质成立．

【Марков 分枝过程】 时间参数 t 为连续时，设在暂短时间 Δt 内出现分裂的概率是 $b(t)\Delta t$，且在分裂发生的条件下，分裂成 k 个个体的概率为 $P_k(t)(k=0,1,2,\cdots)$（其中 $b(t)$ 以及 $P_k(t)$ 关于 t 连续，

$$b(t)>0,\ P_k(t)\geqslant 0$$

且

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)=1).$$

这样的分枝过程称为 **Марков 分枝过程**（Markov branching process）．其个体数 $\{Z(t)\}$ 构成

Markov 过程，其转移概率† $P_{ik}(\tau, t)$ 由 Колмогоров 前向方程†

$$\frac{\partial P_{ik}(\tau,t)}{\partial t} = -kb(t)P_{ik}(\tau, t) + b(t)\sum_{j=1}^{k+1} P_{ij}(\tau, t) j P_{k-j+1}(t)$$

$$P_{ik}(\tau, \tau+0) = 1, \quad i = k; \quad = 0, \quad i \neq k$$

的唯一解给出．当

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(\tau, t) < 1$$

时，以正的概率使得个体数在有限时间里成为 ∞，而当

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP_k(t)$$

关于 t 广义一致收敛时，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(\tau, t) = 1.$$

如果 $b(t)$，$P_k(t)$ 为常数，则称 $\{Z(t)\}$ 为时齐的 Марков 分枝过程．关于它有如同 Galton-Watson 分枝过程同样的结果．特别是关于 $Z(t)$ 的极限分布有更为精确的结果．

最近对于非时齐的情形，得到了一些渐近的结果．此外对高阶的 Марков 分枝过程亦有所研究．

【年龄相关的分枝过程】 上述的分枝过程，由各个体到分裂成几个个体的时间，与其年龄独立，而与年龄相关（age-dependent）的情形亦有所研究．

设寿命 l 的分布为 $G(t) = P(l \leq t)$（但 $G(0_-) = 0$，$G(0_+) < 1$，$G(\infty) = 1$）的各个体，以概率

$$P_k\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1\right)$$

分裂成年龄为 0 的 k 个个体．设时刻 t 时的个体数为 $Z(t)$，一般说来 $Z(t)$ 已不具有 Марков 性†．令

$$F(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z(t) = k)s^k$$

$$(|s| \leq 1, \ t \geq 0),$$

则 $F(s,t)$ 是

$$(3) \quad F(s,t) = s(1 - G(t)) + \int_{0-}^{t+} h(F(s, t-u))dG(u),$$

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k s^k$$

的唯一解（其中 $|F(s,t)| \leq 1$）．然而若

$$G(t) = 1 - e^{-bt} (b > 0),$$

则 $Z(t)$ 是 Марков 过程，且 (3) 的解给出 Марков 分枝过程的母函数．

当 $h'(1) = m < \infty$，$G(0_+) = 0$ 且 $G(t)$ 并非格子点分布†时，令 $Z(t)$ 的平均值

$$M(t) = E(Z(t)),$$

则当 $m = 1$ 时 $M(t) = 1$，而 $m \neq 1$ 时

$$M(t) \sim n_1 e^{\alpha t} (t \to \infty).$$

其中

$$n_1 = (m-1)\left(\alpha m^2 \int_0^{\infty} t e^{-\alpha t} dG(t)\right)^{-1},$$

$$m\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} dG(t) = 1,$$

但 $m < 1$ 时，假定

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-\alpha t} dG(t) < \infty.$$

又当 $m > 1$，$h''(1) < \infty$ 且 $G(t)$ 并非格子点分布时，则 $W_t = (n_1 e^{\alpha t})^{-1} Z(t)$ 有

$$W = \text{l.i.m.}\ W_t$$

存在，$\varphi(s) = E(e^{-sW})$ 满足

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} h(\varphi(se^{-\alpha u}))dG(u), \quad \text{Re}\, s \geq 0.$$

再假定 $dG(t) = g(t)dt$，且

$$\int_0^{\infty} g(t)^p dt < \infty \quad (p > 1)$$

时，则 $W = \lim_{t\to\infty} W_t$ 以概率 1 存在．

除了上述的分枝过程外，更为一般的分枝过程也正被研究（[1]，[5]，[10]）．

【参】 [1] T. E. Harris, The theory of branching processes. Springer, 1963; [2] T. E. Harris, Some mathematical models for branching processes, Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. (1951), 305—

328; [3] Б. А. Севастьянов (B. A. Sevast'janov), Теория ветвящихся случайных процессов, Усп. матем. наук, **6** (1951), 6, 47—99; [4] А. М. Яглом (A. M. Jaglom), Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов, ДАН СССР **56** (1947) 795—798; [5] J. E. Moyal, The general theory of stochastic population processes, Acta Math., **108** (1962), 1—31; [6] В. М. Золотарев (V. M. Zolotarev), Краткие сообщения уточнение ряда теорем теории ветвящихся случайных процессов, Теория вероятностей и ее применение **2** (1957), 256—266; [7] В. П. Чистяков-Н. П. Маркова (V. P. Čistjakov-N. P. Markova), О некоторых теоремах для неоднородных ветвящихся процессов, ДАН СССР, **147** (1962), 317--320; [8] А. А. Савин, В. П. Чистяков (A. A. Savin- V. P. Čistjakov), Некоторые теоремы для ветвящихся процессов с несколькими типами частиц, Теория вероятностей и ее применение, **7** (1962), 95—104; [9] T. W. Mullikin, Limiting distributions for critical multitype branching processes with discrete time, Trans. Amer. Math. Soc., **106** (1963), 469—494; [10] K. B. Athreya P. E. Ney, Branching processes, Springer, 1972.

鞅 [英 martingale 法 martingale 德 Martingal 俄 мартингал 日 マルチンゲール] 设 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 为概率空间†, T 为时间参数 t 的变域. 设对于 $t\in T$ 对应有完全加法族† $\mathfrak{F}_t$, $\mathfrak{F}_s\subset\mathfrak{F}_t\subset\mathfrak{B}$ $(s<t)$. 因必要时可进行完备化, 故可设 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 为完备†概率空间, $\mathfrak{F}_t$ 包含所有 P 测度为 0 的可测集. $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上的实值随机过程† $\{X_t\}_{t\in T}$ (在这个题目中也记作 $(X_t, t\in T)$ 等)称为关于 $\mathfrak{F}_t$ 的**鞅**, 如果 i) X_t 为 $\mathfrak{F}_t$ 可测且 $E(|X_t|)<\infty$; ii) 如 $s<t$, 则

(1) $$E(X_t|\mathfrak{F}_s)=X_s \ (\text{a. s.})$$

((a.s.) 是'几乎必然'的意思, 以下在明确时可省略)成立. 在(1)中将等号换为 $\leqslant$ 或 $\geqslant$ 时, 分别称 $\{X_t\}_{t\in T}$ 为**上鞅** (supermartingale) 和**半鞅** (submartingale). 在鞅的情形下, X_t 也允许取复值. 以下简记鞅为 (M), 半鞅为 (SM). 因 (SM) 的定义关系于 $\mathfrak{F}_t$, 故在有必要明确表示时记以 $(X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T)$. 如果 $(X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T)$ 为 (SM), 令

$$\mathfrak{B}_t=\mathfrak{B}(X_u, u\in T\cap(-\infty, t]),$$

则 $(X_t, \mathfrak{B}_t, t\in T)$ 也是 (SM). 在未指定完全加法族的族时, 就假定是关于 $\mathfrak{B}_t$ 的 (M) 或 (SM). 鞅的名称出自于 J. Ville, P. Lévy 曾经多次使用这一概念. (SM) 的概念是 J. L. Doob 引进的并做了系统的研究. 这些概念在随机过程的研究中应用于许多方面.

由定义, (上、半)鞅具有与(上、次)调和†函数相类似的若干性质. 下面叙述 (SM) 的简单性质. i) 对于 (SM)X_t, $m(t)=E(X_t)$ 为 t 的增函数, 并且当且仅当 X_t 为 (M) 时有

$$m(t)=\text{常数}.$$

ii) 设 X_t, Y_t 为 (SM), 则

$$aX_t+bY_t \ (a, b\geqslant 0),$$

$\sup(X_t, Y_t)$ 也是 (SM). iii) 设 X_t 为(SM), $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调增加的凸函数†, $t_0\in T$ 时 $E(|f(X_{t_0})|)<\infty$, 则 $(f(X_t), t\in(-\infty, t_0]\cap T)$ 为 (SM). 当 X_t 为 (M) 时去掉 f 的单调性 $f(X_t)$ 也是 (SM). 特别对于 (SM)X_t, $X_t^+=\sup(X_t, 0)$ 是 (SM), 对于 (M) X_t, $|X_t|$ 是 (SM). iv) 如 a, $b\in T$, $a<b$, 则

$$E(|X_t|)\leqslant 2E(|X_b|)-E(X_a).$$

v) 特别如 $X_t\geqslant 0$ $(t\in T)$, 则对于 $t_1\in T$ $\{X_t, t\in(-\infty, t_1]\cap T\}$ 是一致可积的, vi) $t_n\in T$, $t_n\downarrow$ 时, $\{X_{t_n}\}$ 为一致可积的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} E(X_{t_n})>-\infty.$$

这里, 所谓随机变量族 $\{X_t\}_{t\in T}$ 为**一致可积的** (uni-formly integrable), 即是 1)

$$\int_\Omega |X_t(\omega)|dP<M(t\in T),$$

2) 如有 $P(\Lambda_n)=\delta_n$, $\lim\delta_n=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{t\in T}\int_{\Lambda_n}|X_t(\omega)|dP\right)=0$$

成立.

例 1) 对于随机变量序列 $Y_1, Y_2, \cdots$, 如

(2) $$E(Y_{n+1}|Y_1, \cdots, Y_n)\geqslant 0, n=1, 2, \cdots$$

成立, 则

$$X_n=\sum_{\nu=1}^n Y_\nu$$

是 (SM), 如 (2) 中等号成立则是 (M). 特别如 $\{Y_n\}$ 为独立变量序列且 $E(Y_n)=0$, 则

$$X_n=\sum_{\nu=1}^n Y_\nu$$

是 (M).

【收敛定理】 关于 (SM) 的样本序列的下列结果是重要的. 如$(X_j,\ 1\leqslant j\leqslant n)$为(SM),则

$$\lambda P(\max_{1\leqslant j\leqslant n}|X_j|>\lambda)\leqslant 2E(|X_n|)-E(X_1)\ (\lambda>0).$$

对于区间 $I=[a,b]$ 和数列

$$\{x_j\}\ (1\leqslant j\leqslant n),$$

定义 $N(I)$ 如下：当对一切 j 有 $x_j>a$ 或 $x_j<b$ 时令 $N(I)=0$，其它时候令 $N(I)$ 为 $\{x_j\}$ $(1\leqslant j\leqslant n)$ 从下向上穿过 I 的次数（即满足 $x_{j-1}<a$, $x_j>b$ 的 $j\ (j=2,\cdots,n)$ 的数目）. 这时,对于由 $(X_j,1\leqslant j\leqslant n)$ 确定的 $N(I)$, 有

$$E(N(I))\leqslant(E(|X_n|)+|a|)/(b-a)$$

成立 (Doob 公式).

用这个结果可以得到以下的**收敛定理**(convergence theorem). i) 当

$$(X_n,\ 1\leqslant n<\infty)$$

为 (SM) 时，1) 如

$$\sup_n E(|X_n|)<\infty,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X_\infty$ 以概率 1 存在且

$$E(|X_\infty|)<\infty.$$

2) 进一步当 $\{X_n,\ 1\leqslant n<\infty\}$ 一致可积时，将 X_∞ 添在最后，$\{X_n,1\leqslant n\leqslant\infty\}$ 也形成为 (SM). 3) 如 $E(|X_n|)$ 有界且

$$(X_n,\ 1\leqslant n\leqslant\infty)$$

是 (SM)，则

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n)\leqslant E(X_\infty);$$

这里的等号当且仅当 $\{X_n,\ 1\leqslant n<\infty\}$ 一致可积时成立. ii) 如 $(X_n,-\infty<n\leqslant-1)$ 是 (SM)，则 $\lim\limits_{n\to-\infty}X_n=X_{-\infty}$ 存在且

$$-\infty\leqslant X_{-\infty}<\infty,$$

进一步如有

$$\lim_{n\to-\infty}E(X_n)>-\infty,$$

则 $-\infty<X_{-\infty}<\infty$ 且

$$(X_n,\ -\infty\leqslant n\leqslant-1)$$

成为一致可积的 (SM). iii) 如设

$$(X_1,\ X_2,\cdots,\ Z)$$

为 (SM)，则 1)

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$$

存在且

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n)\leqslant E(X_\infty)\leqslant E(Z).$$

2) 为使

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n)=E(X_\infty)$$

成立的充分必要条件是 $\{X_n,\ 1\leqslant n<\infty\}$ 为一致可积,并且这时 $(X_1,\ X_2,\cdots,X_\infty,\ Z)$ 成为 (SM). iv) 设

$$\{\mathfrak{F}_n\}\ (-\infty<n<\infty;\ \mathfrak{F}_n\subset\mathfrak{F}_{n+1}\subset\mathfrak{B})$$

为 $(\Omega,\mathfrak{B},P)$ 上一列完全加法族.

$$\mathfrak{F}_{-\infty}=\bigcap_n\mathfrak{F}_n,\quad \mathfrak{F}_{+\infty}=\bigvee_n\mathfrak{F}_n$$

(包含所有 $\mathfrak{F}_n$ 的最小的完全加法族). 这时如 $E(|Z|)<\infty$, 则

$$\lim_{n\to\pm\infty}E(Z|\mathfrak{F}_n)=E(Z|\mathfrak{F}_{\pm\infty})\ (\text{a.s.}).$$

下面举一些常用的收敛定理的应用例. 例 2) 在概率空间 $(\Omega,\mathfrak{B},P)$ 上,考虑 Ω 的分划序列 π_n: $\Omega=M_1^{(n)}+M_2^{(n)}+\cdots(M_j^{(n)}\in\mathfrak{B})$, 这里假定 π_{n+1} 是比 π_n 更细密的分划. 令包含

$$\{M_j^{(n)}\}\ (j=1,\ 2,\cdots)$$

的最小的完全加法族为 $\mathfrak{F}_n$, $\mathfrak{F}_\infty=\bigvee\limits_n\mathfrak{F}_n$. 设 φ 为 $(\Omega,\mathfrak{F}_\infty)$ 上的完全可加的集函数†,如 $X_n(\omega)$ 按 $X_n(\omega)=\varphi(M_j^{(n)})/P(M_j^{(n)})$ $(\omega\in M_j^{(n)})$ 所定义,则 $(X_n,\mathfrak{F}_n,1\leqslant n<\infty)$ 成为 (M),

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$$

存在. 为使 φ 关于 $\hat{P}$ ($\hat{P}$ 是 P 在 $\mathfrak{F}_\infty$ 上的限制) 绝对连续†的充分必要条件是

$$\{X_n,\ 1\leqslant n<\infty\}$$

一致可积,在这时 $X_\infty=d\varphi/d\hat{P}$ 以 $\hat{P}$ 测度 1 成立. 又如 φ 关于 $\hat{P}$ 奇异†, 则以 $\hat{P}$ 测度 1 有 $X_\infty=0$. 例 3) 如设 $X_1,\ X_2,\cdots$ 为任意的随机变量序列，$Z(\omega)$ 为 $\mathfrak{B}(X_1,X_2,\cdots)$ 可测的随机变量,则

$$\lim_{n\to\infty}E(Z|X_1,X_2,\cdots,X_n)=Z(\text{a.s.}).$$

特别在 $X_1,\ X_2,\cdots$ 独立的情形,如 $Z(\omega)$关于任意 n 为 $\mathfrak{B}(X_n,\ X_{n+1},\cdots)$可测的随机变量，则以概率 1 有 $Z(\omega)=$ 常数. 这就是 Колмогоров 0-1 律†. 例 4) 当 $X_t(0\leqslant t<\infty)$

为 Brown 运动时，X_t 和 X_t^2-t 同时为(M). 反之轨道连续的具有此性质的随机过程必是 Brown 运动.

【样本函数】 在 (SM) $(X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T)$ 的时间参数的变域T为一般的情形，能够确定某区间 $I\supset T$、完全加法族 $\tilde{\mathfrak{F}}_t(t\in I)$ 以及$\tilde{\mathfrak{F}}_t$可测函数 $\tilde{X}_t(t\in I)$，使得 $(\tilde{X}_t, \tilde{\mathfrak{F}}_t, t\in I)$ 为 (SM)，并且在

$$t\in T \text{ 时 } P(X_t=\tilde{X}_t)=1,$$

故不失一般性地可取T为区间. 进一步，假定 $\{X_t\}$ 为关于可数个时点 $\{t_j\}$ 可分†的随机过程. 将离散时间参数情形关于变化的估计以及收敛定理推广到这种连续参数情形，可得样本函数†的以下性质. i) (SM) $\{X_t\}$ 的样本函数以概率 1 在任意有限区间 $[a,b]\subset T$ 上有界. ii) 令 T_0 为T的内点的集，则 $P(X_{t-0}, X_{t+0}$ 存在 $|t\in T_0)=1$; 又对任意的 $t\in T_0$,有

$$\lim_{s\uparrow t} E(X_s)\leqslant E(X_{t-0})\leqslant E(X_t)$$
$$\leqslant E(X_{t+0})\leqslant \lim_{s\downarrow t} E(X_s).$$

iii) 令D为 $\{X_t\}$ 的固定不连续点† ($P(X_{t-0}=X_t=X_{t+0})=1$ 不成立的点)的集，则D最多是可数集,并且

$$P(X_{t-0}\gtreqless X_t\gtreqless X_{t+0}|t\notin D)=1.$$

以下为简单起见取t的变域为

$$\boldsymbol{R}^+=[0,\infty),$$

且假定 $\{X_t\}$ 的样本函数以概率 1 右连续. 这时如 $(X_t, t\in \boldsymbol{R}^+)$ 关于 $\mathfrak{F}_t$ 是 (SM)，则关于

$$\mathfrak{F}_{t+}=\bigcap_{s>t}\mathfrak{F}_s$$

也是 (SM)，故不失一般性可假定 $\mathfrak{F}_t=\mathfrak{F}_{t+}$. 关于 $\mathfrak{F}_t$ 的停止时间† τ (随机变量 $\tau(\omega)$,

$$P(0\leqslant\tau\leqslant\infty)=1,$$

同时对一切的 $t>0$ 满足 $\{\tau<t\}\in\mathfrak{F}_t$) 的全体以 $\mathfrak{T}$ 表示. 当 $\tau\in\mathfrak{T}$ 时对任意的 $t>0$ 使得 $\Lambda\cap\{\tau<t\}\in\mathfrak{F}_t$ 成立的可测集Λ的全体构成一个完全加法族,用 $\mathfrak{F}_\tau$ 来表示. 如 $\sigma,\tau\in\mathfrak{T}$, $\sigma\leqslant\tau$，则 $\mathfrak{F}_\sigma\subset\mathfrak{F}_\tau$. 又如

$$P(\tau<\infty)=1,$$

则 X_τ 为 $\mathfrak{F}_\tau$ 可测的. 设对于区间A的元 α，对应有 $\tau_\alpha\in\mathfrak{T}$，并且如 $\alpha<\beta$ 则

$$\tau_\alpha\leqslant\tau_\beta<\infty \ (\text{a.s.}).$$

这时，$(X_\alpha^*, \mathfrak{F}_\alpha^*, \alpha\in A)$

$$(X_\alpha^*=X_{\tau_\alpha},\ \mathfrak{F}_\alpha^*=\mathfrak{F}_{\tau_\alpha})$$

称为从 (SM) $(X_t, \mathfrak{F}_t, t\in T)$ **任意抽样** (optional sampling) 所得的随机过程. 例如，1)

$$X_t\leqslant 0 \ (\text{a.s.});$$

2) $\{X_t, t\in\boldsymbol{R}^+\}$ 一致可积; 3) 对一切的 $\alpha\in A$, τ_α 以概率 1 有界;三者中任何一个成立时，则 $(X_\alpha^*, \mathfrak{F}_\alpha^*, \alpha\in A)$ 也是 (SM). 如果 2) 或 3) 成立,则有

$$E(X_\alpha^*)\leqslant \sup E(X_t).$$

【半鞅的分解】 (关于这一节→[3]，[4]) 如果 (SM)$(X_t, \mathfrak{F}_t, t\in\boldsymbol{R}^+)$ 一致可积,则

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X_\infty$$

存在,且当令

$$\mathfrak{F}_\infty=\bigvee_t\mathfrak{F}_t$$

时，$(X_t, \mathfrak{F}_t, t\in[0,\infty])$ 成为 (SM). 进一步，当 $\{X_\tau, \tau\in\mathfrak{T}\}$ 一致可积时，称 X_t 属于种类 (D). 如对任意的 a $(0<a<\infty)$

$$\{X_\tau,\ \tau\in\mathfrak{T} \text{ 同时 } \tau\leqslant a\}$$

一致可积，则称为局部地属于种类 (D). 如果 (SM)X_t一致可积,则能将 X_t 表示为

(3) $X_t=E(X_\infty|\mathfrak{F}_t)-(E(X_\infty|\mathfrak{F}_t)-X_t)$,

适当选取条件期望可使 $E(X_\infty|\mathfrak{F}_t)$ 为右连续的 (M). 这时

$$Z_t=E(X_\infty|\mathfrak{F}_t)-X_t$$

为非负右连续的上鞅且满足

$$\lim_{t\to\infty}Z_t=0.$$

由位势论的类推,称与 Z_t 有相同性质的上鞅为位势,称 (3) 为 X_t 的 Riesz 分解†.

$(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上的随机过程 $(A_t, t\in\boldsymbol{R}^+)$ 称为(右连续)**增过程** (increasing process)，如果满足 1) A_t 为 $\mathfrak{F}_t$ 可测; 2) 样本函数以概率 1 为右连续的增函数，$A_0=0$. 特别当

$$E(A_\infty)<\infty \ (A_\infty=\lim_{t\to\infty}A_t)$$

时称其为可积. 增过程与 (SM) 有以下的关系. i) 位势 X_t 可用某可积增过程 A_t 表示为

(4) $$X_t = E(A_\infty|\mathfrak{F}_t) - A_t$$

的充分必要条件,是 X_t 属于种类(D). ii) 为使 i) 中的 A_t 可取为连续的,对于任意的 $\tau_n \in \mathfrak{T}$, $\tau_n \uparrow \tau$ 有

$$\lim_{n\to\infty} E(X_{\tau_n}) = E(X_\tau)$$

成立是充分必要的. iii) 为使 (SM)X_t 能写成 $X_t = X'_t + A_t$(X'_t 为 (M), A_t 为增过程)的充分必要条件,是 X_t 局部地属于种类 (D). 这些分解如限制 A_t 为**自然增过程** (natural increasing process) 时则是唯一的. 所谓增过程 A_t 是自然的,即对有界右连续的任意的 (M)Y_t 和 a $(0 < a < \infty)$, 有

$$E\Big(\sum_{t\leqslant a}(A_t - A_{t-})(Y_t - Y_{t-})\Big) = 0$$

成立. 其中

$$\sum_{t\leqslant a}(A_t - A_{t-})(Y_t - Y_{t-})$$

是

$$S_n = \sum_{t\leqslant a,|Y_t - Y_{t-0}|\geqslant 1/n}(A_t - A_{t-0})(Y_t - Y_{t-0})$$

在 L_1 的意义上的极限. 这一分解被用在 Марков 过程的泛函†,随机积分†等的研究中.

【参】 [1] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [2] J. L. Doob, Semimartingales and subharmonic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **77** (1954), 86—121; [3] P.-A. Meyer, A decomposition theorem for supermartingales, Illinois J. Math., **6**(1962), 193—205; [4] P.-A. Meyer, Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem, Illinois J. Math., **7** (1963), 1—17; [5] 伊藤清, 確率過程, I, II, 岩波講座現代応用数学, 1957 (中译本: 伊藤清, 随机过程, 上海科学技术出版社, 1961); [6] P.-A. Meyer, Probability and potentials, Blaisdell, 1966; [7] D. L. Burkholder, Martingale transform, Ann. Math. Stat., **37** (1966), 1494—1504; [8] J. Neveu, Martingales à temps discret, Masson et Cie, 1972; [9] A. M. Garsia, Martingale inequalities, Benjamin, 1973.

平稳过程 [英 stationary process 法 processus stationaire 德 stationäre Prozesse 俄 стационарный процесс 日 定常過程] 【定义】 **平稳过程**是对于时间的推移具有某种平稳性的随机过程(→随机过程)的总称, 从大的方面可分为强平稳过程和弱平稳过程. 作为时间变数(时间参数)的变动范围 T, 有实数全体 $\boldsymbol{R}$ 的情形(连续时间参数) 和整数全体 $\boldsymbol{Z}$ 的情形(离散时间参数)两种.

设 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 为概率空间†,

$$\{X_t(\omega)\}\ (t \in T,\ \omega \in \Omega)$$

为取复值的随机过程†. 对任意的 n, 任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$ 和复 n 维空间 $\boldsymbol{C}^n$ 的 Borel 集 E_n, 如总有

(1) $$P((X_{t_1+t}, \cdots, X_{t_n+t}) \in E_n) = P((X_{t_1}, \cdots, X_{t_n}) \in E_n)$$

成立时, 称 $\{X_t\}$ 为**强平稳过程** (strongly stationary process). 与此对应, 如 $E(X_t^2)$ 总有限, 直到二阶矩平稳,即

(2) $$E(X_{t+h}) = E(X_t),\quad E(X_{t+h}\overline{X}_{s+h}) = E(X_t\overline{X}_s)$$

成立时,称 $\{X_t\}$ 为**弱平稳过程** (weakly stationary process). 这一条件与

(3) $$E(X_t) = m\ (\text{与 } t \text{ 无关的常数}),$$

$$E((X_t - m)\overline{(X_s - m)}) = \rho(t-s)\quad (t-s \text{ 的函数})$$

等价. m, $\rho(t)$ 分别称为这个弱平稳过程的**平均值** (mean), **协方差函数** (covariance function).

在连续时间参数时, 对强平稳过程假定 $\{X_t\}$ 的依概率连续性:

$$\lim_{h\to 0} P(|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon) = 0\ (\varepsilon > 0),$$

对弱平稳过程假定均方连续性:

$$\lim_{h\to 0} E(|X_{t+h} - X_t|^2) = 0.$$

后者与协方差函数 $\rho(t)$ 的连续性等价.

【弱平稳过程的谱分解】 协方差函数 $\rho(t)$ 显然是正定†的连续函数,根据 Bochner 定理†, 谱分解:

(4) $$\rho(t) = \int_{T'} e^{i2\pi\lambda t} F(d\lambda)$$

成立. 这里 T' 为 $\boldsymbol{R}$ ($T = \boldsymbol{R}$ 时) 或 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ ($T = \boldsymbol{Z}$ 时), F 为 T' 上的有界测度. 这一分解称为协方差函数的 **Хинчин 分解** (Hinčin's decomposition), $F(d\lambda)$ 称为它的**谱测度** (spectral measure).

为得到弱平稳过程 $\{X_t\}$ 本身的分解，先考虑 Hilbert 空间 $L_2(\Omega)$（这里 $\Omega(\mathfrak{B}, P)$ 为基本概率空间，而 X_t 是这上面的平方可积函数），在其中，若设由 $X_t(t \in T)$ 以及常数 1 张成的子空间为 $\boldsymbol{M}(X)$，则由弱平稳性可确定满足 $U_tX_s = X_{s+t}$，$U_t1 = 1$ 的单参数酉算子群 $U_t (t \in T)$. 根据 Stone 定理[†]设 U_t 的谱分解为

$$(5)\qquad U_t = \int_{T'} e^{i2\pi\lambda t}E(d\lambda),$$

并令 $M(\Lambda) = E(\Lambda)(X_0 - m)$，则得到 X_t 的谱分解：

$$(6)\quad X_t = U_tX_0 = m + \int_{T'} e^{i2\pi\lambda t}M(d\lambda).$$

$M(\Lambda)$ 满足

$$(7)\qquad (M(\Lambda), 1) = 0,$$
$$(M(\Lambda_1), M(\Lambda_2)) = F(\Lambda_1 \cap \Lambda_2).$$

这个分解成为弱平稳过程研究的出发点. 例如，由此立即可以推出以下的**弱大数定律**（weak law of large numbers）：

$$(8)\quad \underset{B-A\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{B-A}\int_A^B X_t dt = m + M(\{0\}).$$

这是连续时间参数时的形式，而在离散时间参数时积分变成和. 特别如 F 在原点连续，则

$$M(\{0\}) = 0,$$

(8) 的右端就只是常数 m 了（→[2]，[4]，[8]，[9]）.

【弱平稳广义过程】 按将函数一般化而考虑广义函数同样的想法，对于弱平稳过程（连续时间参数），可以考虑弱平稳广义过程. 设 $\mathscr{D}$ 为 T 上具有紧支集的无穷可微函数的全体. 在 $\mathscr{D}$ 中引入与广义函数理论时同样的拓扑. 对 $\varphi \in \mathscr{D}$ 定义 $X_\varphi \in L_2(\Omega)$，当映射 $\varphi \to X_\varphi$ 连续并且线性时，则称随机变量族 $\{X_\varphi\}$ 为**弱意义的广义随机过程**（random distribution in the wide sense）（→随机过程）. 进一步在它满足

$$(9)\qquad (X_{\tau_h\varphi}, 1) = (X_\varphi, 1),$$
$$(X_{\tau_h\varphi}, X_{\tau_h\psi}) = (X_\varphi, X_\psi),$$

这里(,)为 $L_2(\Omega)$ 中的内积，

$$\tau_h\varphi(t) = \varphi(t-h)$$

时，则称为**弱平稳广义过程**（weakly stationary random distribution）. 对于弱平稳过程 $\{X_t\}$，弱平稳广义过程：

$$(10)\qquad X_\varphi = \int_T X_t\varphi(t)dt$$

与之一一对应，与普通函数时一样地，可以把这个 $\{X_t\}$ 和 $\{X_\varphi\}$ 看作是等同的. 根据(9)，存在使

$$E(X_\varphi) = m\int \varphi(t)dt$$

的 m 和使

$$E((X_\varphi - E(X_\varphi))(\overline{X_\psi - E(X_\psi)}))$$
$$= \rho(\varphi * \check{\psi})$$

的广义函数 ρ. 这里 $*$ 表示卷积，$\check{\psi}(t)$ 是 $\overline{\psi(-t)}$ 的意思. m，ρ 分别称为 $\{X_\varphi\}$ 的**平均值**（mean value）和**协方差广义函数**（covariance distribution）. 根据 Bochner 定理的一般化，ρ 可表示为缓增测度 $F(d\lambda)$ 的 Fourier 变换. 这就是 Хинчин 分解的一般化. 同样地，关于与(5)相对应的 X_φ 的分解以及大数定律，与弱平稳过程情形平行的理论也都成立（伊藤清 [6]，[9]）.

【Gauss 型平稳过程】 取实值的随机过程，当其在任意 n 个时点的 n 维联合分布都是正态分布[†]（Gauss 型）时，称为 **Gauss 型随机过程**（Gaussian process）或**正态(型)随机过程**（normal process）. 由于多维正态分布由平均值向量和协方差矩阵所决定，在 Gauss 型随机过程中弱平稳与强平稳等价，所以就称为 **Gauss 型平稳过程**（Gaussian stationary process）. 前面叙述过弱平稳过程 $\{X_t\}$ 与平均值 m 和谱测度 $F(d\lambda)$ 相对应的事实. 特别在 X_t 取实值时，$F(d\lambda)$ 关于原点 0 是对称的. 反之对于这样的 m 和 $F(d\lambda)$，存在以之为平均值和谱测度的实弱平稳过程 $\{X_t\}$. 这样的 $\{X_t\}$，即使把分布律相同的看成是同一个，也存在有多个，然而其中 Gauss 型的只有一个. 在这种意义上，Gauss 型平稳过程可以看作弱平稳过程的代表.

以上事实经引进复 Gauss 型的概念可以扩张到取复值的弱平稳过程. 在这种情形下，可

以把上述关于 F 的对称性的限制去掉．进一步关于弱平稳广义过程也有同样的事实（[5]，[10]）．

【白噪声】 在离散时间参数时，称 $m=0$，$\rho(t)=1$ $(t=0)$；$=0$ $(t\neq 0)$ 的实弱平稳过程为**白噪声**(white noise)．它的谱测度 $F(d\lambda)$ 显然就是 Lebesgue 测度 $d\lambda$．在连续时间参数时，称 $m=0$，$\rho=\delta$ (Dirac δ 函数，即 $\rho(\varphi)=\varphi(0)$)，从而 $F(d\lambda)=d\lambda$ 的弱平稳广义过程为**白噪声**．不论哪种情形，Gauss 型白噪声是唯一确定的．Gauss 型白噪声 $\{X_t\}$ 或 $\{X_\varphi\}$ 在下述意义上是各点独立的．在离散型时，在相异时点 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 的值 X_{t_1}，$X_{t_2},\cdots,X_{t_n}$ 独立，在连续型时，当 φ_1，φ_2，$\cdots$，φ_n 的支集互不相交时，X_{φ_1}，X_{φ_2}，$\cdots$，X_{φ_n} 独立．连续时间参数时的白噪声可以表示为满足

$$E(Y(t)-Y(s))=0,$$
$$E((Y(t)-Y(s))^2)=t-s,\ s<t$$

的随机过程 $Y(t)$ 的（作为广义过程的）微分 DY．特别在 Gauss 型时 $Y(t)$ 即是 Wiener 的 Brown 运动†（→Brown 运动）．

离散时间参数的弱平稳随机过程，如以常系数线性差分算子（连续时间参数时换为微分算子）作用后成为白噪声，则称之为**自回归过程**(autoregressive process)．这种过程的谱测度绝对连续，密度等于 $e^{i2\pi\lambda}$（连续时间参数时换为 $i\lambda$）的有理函数的绝对值的平方．

【线性预报】 在给定弱平稳过程 $\{X_t\}$ 时，对 $X_s(s\leqslant 0)$ 的值施以线性运算用来求

$$X_t(t>0)$$

的近似值称为**线性预报**(linear prediction)．它的数学表示如下．这里假定 X_t 的平均值 m 是 0，$\{X_t\}$ 的谱测度 $F(d\lambda)$ 不恒等于 0，这并没有本质上的限制．由 $X_s(s\leqslant t)$ 所张成的 $L_2(\Omega)$ 的子空间记以 $\boldsymbol{M}_t(X)$．$\boldsymbol{M}_0(X)$ 的任意的元 Y 皆可作为 $X_t(t>0)$ 的**线性预报值**(linear predictor)，而其中使均方误差

$$E(|X_t-Y|^2)$$

即 $\|X_t-Y\|^2$ 最小的 $Y_{0,t}$ 称为**最优线性预报值**(optimum linear predictor)．$Y_{0,t}$ 不外是 X_t 在 $\boldsymbol{M}_0(X)$ 上的投影．

$\boldsymbol{M}_s(X)$ 与 s 同时增加，而当其与 s 无关时，称 X_t 为**决定性的**(deterministic)．这时因 $X_t\in\boldsymbol{M}_0(X)$ 故 $Y_{0,t}=X_t$，从而可以做到完全预报，在概率论上就没兴趣了．与此相对地，当

$$\bigcap_s \boldsymbol{M}_s(X)=\{0\}$$

时，称为**纯非决定性的**(purely non-deterministic)．因为一般的 $\{X_t\}$，可以表示为决定性的部分 $\{X_t^d\}$ 与纯非决定性的部分 $\{X_t^n\}$ 之和（**Wold 分解**)，并且

$$\boldsymbol{M}(X^d)=\bigcap_s \boldsymbol{M}_s(X),$$
$$\boldsymbol{M}(X_t)=\boldsymbol{M}(X^d)+\boldsymbol{M}(X^n)$$

（直和），所以可分别地研究 $\{X_t^d\}$ 和 $\{X_t^n\}$．

为使 $\{X_t\}$ 为纯非决定性的充分必要条件是其谱测度 $F(d\lambda)$ 绝对连续，并且其密度 $f(\lambda)$ 满足

$$\int\log f(\lambda)\,d\lambda>-\infty\ (\text{离散时间参数}),$$
$$\int\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda>-\infty\ (\text{连续时间参数}).$$

如 $\{X_t\}$ 为纯非决定性的，则 $\{X_t\}$ 可以表示为白噪声的**后向移动平均**(backward moving average)．即

$$X_t=\sum_{s=-\infty}^{t}a(t-s)B_s,\ B_t\text{ 为白噪声}$$

（离散时间参数）

$$X_t=\int_{-\infty}^{t}a(t-s)dB_s,\ DB_t\text{ 为白噪声}$$

（连续时间参数）．

反之有这样表示的 $\{X_t\}$ 是纯非决定性的．又上述移动平均表达式中的 $a(t)$ 是

$$\left|\sum_{t=0}^{\infty}a(t)e^{-i2\pi\lambda t}\right|^2=f(\lambda)$$

（离散时间参数），

$$\left|\int_0^{\infty}a(t)e^{-i2\pi\lambda t}dt\right|^2=f(\lambda)$$

（连续时间参数）

的解．这种解存在有多个，其中特别有标准的，当我们取它时，便有

$$\boldsymbol{M}_t(X)=\boldsymbol{M}_t(B)$$

或 $\boldsymbol{M}_t(DB)$．这时，已知 $X_s(s\leqslant 0)$ 时

$$X_t\ (t>0)$$

的最优线性预报值为

$$\sum_{s<0}a(t-s)B_s$$

或

$$\int_{-\infty}^{0}a(t-s)dB_s.$$

进一步在寻求一般的 $Y\in \boldsymbol{M}(X)$ 的最优线性预报值时，首先表示成

$$Y=\sum_{s=-\infty}^{\infty}f(s)B_s$$

或

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(s)dB_s,$$

再取最优线性预报值为

$$\sum_{s=-\infty}^{0}f(s)B_s$$

或

$$\int_{-\infty}^{0}f(s)dB_s$$

即可．

弱平稳广义过程的线性预报经简单的正则化即可归结为弱平稳过程的问题，从而可得到与上面同样的结果．线性预报的细节，→预报理论，[2]，[4]，[11]．

【强平稳过程与流】 设 $\{X_t(\omega)\}$ $(t\in T,\ \omega\in\Omega(\mathfrak{B},P))$ 为强平稳过程．在这一过程的研究中，取 Ω 为复向量空间 $\boldsymbol{C}^T$，取 $\mathfrak{B}$ 为 Borel 柱集[†]类生成的完全加法族，$X_t(\omega)$ 可考虑作 $\omega\in\boldsymbol{C}^T$ 的 t 座标．这时称 X_t 已被**坐标表示**(coordinate representation)．如由 Ω 到其自身的推移变换群 $S_t(t\in T)$ 以

$$(S_t\omega)(s)=\omega(s+t)$$

来定义，则由 $\{X_t\}$ 的强平稳性可知 S_t 为保测变换(→遍历理论)．也就是说 S_t $(t\in T)$ 给定了 $\Omega(\mathfrak{B},P)$ 上的一个(非压缩的)流．反之如 $S_t(t\in T)$ 为 $\Omega(\mathfrak{B},P)$ 上的流，则对任意的可测函数 $f(\omega)(\omega\in\Omega)$，由

$$X_t(\omega)=f(S_t\omega)$$

定义的随机过程 $\{X_t\}$ 为一强平稳过程．这样一来，强平稳过程的性质与流的性质有密切的关系．例如关于平稳过程的强大数定律，就归结为关于流的 Birkhoff 个体遍历定理．又强平稳过程的遍历性以及各种混合性、谱测度等等，都可以用对应的流的遍历性、混合性，谱性来定义（[4]，[6]）．

【流的理论】 设 $\{S_t\}(t\in T)$ 为 $\Omega(\mathfrak{B},P)$ 上的流．假定测度 P 是完备的．关于流的遍历性、弱混合性、强混合性→遍历理论．作为将强混合性精密化的条件，定义 **n 次混合性**(mixing property of degree n) 如下．对任意的 $B_i\in\mathfrak{B}$，如

$$(11)\quad \lim_{t_1,\cdots,t_n\to\infty}P(B_0\cap S_{t_1}B_1\cap\cdots\cap S_{t_1+t_2+\cdots+t_n}B_n)=P(B_0)P(B_1)\cdots P(B_n)$$

成立时，则称 S_t 具有 n 次混合性．进一步作为更强的条件，有 **Колмогоров 型的流** (Kolmogorov's flow)．在 $\mathfrak{B}$ 的子完全加法族的序列中，按包含关系引进半序，以此为基础定义 $\bigvee\mathfrak{B}_\alpha$，$\bigwedge\mathfrak{B}_\alpha$ 分别为包含一切 $\mathfrak{B}_\alpha$ 的最小完全加法族和含于一切 $\mathfrak{B}_\alpha$ 的最大完全加法族．令 $\mathfrak{N}$ 为 P 测度为 0 或 1 的集类．那末，当存在 $\mathfrak{B}$ 的子完全加法族 $\mathfrak{B}_0$ 使得

(12) $S_t\mathfrak{B}_0=\{S_tB\mid B\in\mathfrak{B}_0\}$ 随 t 同时增大，

$$(13)\qquad \bigwedge_t S_t\mathfrak{B}_0=\mathfrak{N},$$

$$(14)\qquad \bigvee_t S_t\mathfrak{B}_0=\mathfrak{B}$$

等三个条件成立时，则称 $\{S_t\}$ 为 Колмогоров 型的流．Колмогоров 型的流具有任意高次的混合性．

在 Hilbert 空间 $L_2(\Omega)$ 上用

$$U_tf(\omega)=f(S_t\omega)$$

诱导出酉算子群 $U_t(t\in T)$，设 U_t 的谱分解为

$$(15)\qquad U_t=\int_{T'}e^{i2\pi\lambda t}E(d\lambda).$$

由于 $U_t 1 = 1$, U_t 使 $\{1\}$ 及其正交补空间

$$H = \{1\}^{\perp}$$

不变．设在H上对于 $E(d\lambda)$ 出现在 Hellinger-Hahn 定理[+]中的测度为 $\mu_1, \mu_2, \cdots$． 特别当 $\mu_1, \mu_2, \cdots$ 都与 T' 上的 Lebesgue 测度(在相互绝对连续意义上)等价时，称流 $\{S_t\}$ 为**可数 Lebesgue 型** (σ-Lebesgue type) **的流**． Колмогоров 型的流是可数 Lebesgue 型的 ([2])．

两个流 $\{S_t\}$, $\{S'_t\}$，当可由保测变换从一方推移至他方时，称其为**测度同构** (measure isomorphic)，当对应的 U_t 是以 Hilbert 空间的同构对应推移时，则称为**谱同构** (spectral isomorphic) **或酉同构** (unitary isomorphic)． 如果测度同构，则当然是谱同构．反之则不一定．上述各种混合性都在测度同构下不变． 又 $\mu_1, \mu_2, \cdots$ 一致，对谱同构来说是充分必要的．

当流 $\{S_t\}$ 的谱 $E(\lambda)$ 只有跳跃增加时，称之为**点谱型** (point spectrum type) **的流**． 根据 J. von Neumann 的结果，点谱型的遍历流的本征值 ($E(\lambda)$ 的跳跃点)的全体构成 T' 的子群(不必为闭子群)，并且各本征值都是一重的([13])．反之对 T' 的任意的子群 Λ，必存在以之为本征值集的点谱型的遍历流，如果把测度同构的看成同一个，它还是唯一确定的．

作为测度同构变换下不变的概念，除上述测度列 $\{\mu_n\}$ 之外还有**熵** (entropy)． 这里就离散时间参数的流，对熵加以说明．在这时，如记 $S = S_1$，则有

$$S_n = S^n \ (n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots).$$

当 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathfrak{B}$ 互不相交并且

$$\Omega = \bigcup_i A_i$$

时，称 $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 为Ω的有限分割． 对于有限分割列 $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_p$，其共同的细分中的最粗者，即一切形如

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_p \ (A_i \in \mathfrak{A}_i (i = 1, 2, \cdots, p))$

的集构成的类以

$$\bigvee_{i=1}^{p} \mathfrak{A}_i$$

表示．对于分割 $\mathfrak{A} = \{A_i\}$，称

$$(16) \qquad H(\mathfrak{A}) = -\sum_i P(A_i) \log P(A_i)$$

($t = 0$ 时约定 $t \log t = 0$) 为 $\mathfrak{A}$ 的熵，称

$$(17) \qquad h(S) = \sup_{\mathfrak{A}} \lim_{n\to\infty} H\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} S^{-i}\mathfrak{A}\right) \Big/ n$$

为 S 的熵或流 $\{S_t\}$ 的熵．测度同构的 $\{S_t\}$ 和 $\{S'_t\}$ 的熵相等 (Я. Г. Синай [14])．

例 1) 在 $X_t (t \in Z)$ 独立且服从同分布时，它是个强平稳过程．与此对应的流是 Колмогоров 型的．例 2) Gauss 型白噪声的流也是 Колмогоров 型的．例 3) 设 $X_t (t \in Z)$ 独立且各服从 $\{1, 2, 3, \cdots, p\}$ 上的均匀分布．这个平稳过程的流称为 ***p* 型流** (p-flow)． 一切 p 型流都是 Колмогоров 型的，从而是可数 Lebesgue 型的．由此可知，对于 $p \neq q$, p 型流与 q 型流是谱同构的． 然而其熵分别为 $\log p$, $\log q$，因其相异，故此二流不是测度同构的 (Синай [14])．例 4) 对应于 Gauss 型平稳过程的流的混合性，由其协方差函数的谱测度 $F(d\lambda)$ 的光滑性所决定．F 连续，对使这个流为遍历的来说是充分必要的．这时，实际具有弱混合性．协方差函数即 $F(d\lambda)$ 的 Fourier 变换在无穷远点为 0，对使这个流具有强混合性来说，是充分必要的．进一步，$F(d\lambda)$ 绝对连续，对使这个流为 Колмогоров 型的来说，是充分必要的(角谷静夫 [10]，丸山儀四郎 [12])．例 5) 对于具有负的常曲率的 Riemann 空间上所有点处的所有单位切向量全体Ω引进自然测度 μ，这个向量沿测地线以单位速率移动，便得到Ω上的一个(μ 不变的)流，称为 Riemann 空间上的**测地流** (geodesic flow)，它是 Колмогоров 型的([13])．

【非线性预报】 设 $\{X_t(\omega)\}$ $(t \in T, \ \omega \in \Omega(\mathfrak{B}, P))$ 为强平稳过程．可以认为 $X_t(\omega)$ 已被座标表示． 设 $\{S_t\}$ 为此强平稳过程对应的流． 如令 $\mathfrak{B}_t$ 为使 $X_s(\omega)$ $(s \leqslant t)$ 可测的最小完全加法族，则显然有 $\mathfrak{B}_t = S_t \mathfrak{B}_0$． 再令 $\boldsymbol{L}_t$ 为与 1 正交且 $\mathfrak{B}_t$ 可测的 $L_2(\Omega)$ 中的元的全体． 按前面那样以 $U_t f(\omega) = f(S_t \omega)$ 定义酉算子群 U_t，则有 $U_t \boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{L}_t$．这样，对 $L_2(\Omega)$

的任意的元 Y，用 $\boldsymbol{L}_0$ 的元以最小均方误差来逼近,就称为**非线性预报** (non-linear prediction). 这时**预报值** (predictor) 是 Y 向 $\boldsymbol{L}_0 \oplus \{1\}$ 上的投影. 它还等于条件平均值 $E(Y|\mathfrak{B}_0)$.

与线性预报时一样,当

$$\bigcap_t \boldsymbol{L}_t = \{0\}$$

时，称 X_t 为**纯非决定性的** (purely non-deterministic)，与此相反，当 $\boldsymbol{L}_t$ 与 t 无关时，称为**决定性的** (deterministic). 前者与

$$\bigwedge_t \mathfrak{B}_t = \mathfrak{N}$$

等价,后者和 $\mathfrak{B}_t$ 与 t 无关相同.从而与纯非决定性的 X_t 对应的流是 Колмогоров 型的.

关于非线性预报，目前还没有形成统一的一般理论. 这里就其典型 Gauss 型平稳过程加以说明. 设 $\{X_t\}$ 为取实值的 Gauss 型平稳过程,因不失一般性,假定 $E(X_t)=0$. 因在离散时间参数时更简单，故对连续时间参数的情形加以说明.

与线性预报时同样地确定 $\boldsymbol{M}_t(X)$，因

$$\boldsymbol{M}_t(X) \subset \boldsymbol{L}_t,$$

如 X_t 是纯非决定性的,则有

$$\bigcap_t \boldsymbol{M}_t(X) \subset \bigcap_t \boldsymbol{L}_t = \{0\}.$$

从而 X_t 具有后向移动平均表示:

$$X_t = \int_{-\infty}^t f(t-s)\,dB_s,$$

并且由于 $\{X_t\}$ 为 Gauss 型平稳过程，$\{B_t\}$ 是 Brown 运动. 而且如取标准表示并令

$$\boldsymbol{M}_t(X) = \boldsymbol{M}_t(DB),$$

则 $\mathfrak{B}_t$ 与对一切 v，$u(\leqslant t)$ 使 $B(u)-B(v)$ 为可测的最小完全加法族一致. 由于

$$\mathfrak{B} = \bigvee_t \mathfrak{B}_t,$$

任意的 $Y \in L_2(\Omega)$ 可写成

$$(18)\qquad Y = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{s_3} \int_{-\infty}^{s_2} f_p(s_1, s_2, \cdots, s_p)\,dB_{s_1}dB_{s_2}\cdots dB_{s_p}.$$

这里的积分是随机积分†. 在已知 $X_s(s \leqslant 0)$ 时 Y 的预报值即 Y 向 $\boldsymbol{L}_0 + \{1\}$ (直和)的投影,由到 0 为止的积分式:

$$(19)\qquad Y = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \cdots \int_{-\infty}^{s_3} \int_{-\infty}^{s_2} f_p(s_1, s_2, \cdots, s_p)\,dB_{s_1}dB_{s_2}\cdots dB_{s_p}$$

所给出 (N. Wiener [18]).

【平稳过程样本函数的光滑性】 对连续时间参数 t 的弱平稳过程假定有平均连续性，对强平稳过程假定有依概率连续性，由此不论哪种情形总有依概率连续性. 从而令其可分且可测并不失一般性(→随机过程).

如果 $\{X_t\}$ 为弱平稳过程,其谱测度 $F(d\lambda)$ 的 $2n$ 阶矩有限,则 $\{X_t\}$ 几乎所有的样本函数† 为 $n-1$ 次连续可微,并且 $\{X_t^{(n-1)}\}$ 的几乎所有的样本函数还是绝对连续的.

对于 Gauss 型平稳过程样本函数的光滑性有更精密的结果. 根据 G. A. Hunt 的结果，在 Gauss 型平稳过程 $\{X_t\}$ 的谱测度 $F(d\lambda)$ 具有有限的 α 阶矩时，其几乎所有的样本函数满足如下的 α 次 Hölder 条件([5]): 对任意的有限区间 I 和任意的 C，存在充分小的

$$h_0 = h_0(I, C)$$

可使对 $t \in I, |h| < h_0$ 有

$$|X_{t+h} - X_t| < C|h|^{\alpha}(\log 1/|h|)^{\frac{1}{2}}.$$

又根据 Ю. К. Беляев 的结果，Gauss 型平稳过程的样本函数或者以概率 1 为连续，或者以概率 1 在任何有限区间上无界 ([1]).

对于 $E(X_0)=0$，$E(X_0^2)<\infty$ 的强平稳过程 $\{X_t\}$，因为**样本协方差函数** (sample covariance function):

$$R(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X_{t+s}(\omega)\,\overline{X_s(\omega)}\,ds$$

以概率 1 确定,所以可对样本函数使用 Wiener 的一般调和分析理论([16]) (关于样本函数性质的进一步结果,见[20]).

【强平稳广义过程】 令 $\mathscr{D}$ 为具有紧支集的 C^{∞} 级函数的全体，$\mathscr{D}'$ 为广义函数的空间. 设对于 $\omega \in \Omega(\mathfrak{B}, P)$ 和 $\varphi \in \mathscr{D}$ 确定有 $X_\varphi(\omega)$，并且几乎对所有的 ω 将 $X_\varphi(\omega)$ 看作 φ 的泛函时是属于 $\mathscr{D}'$ 的. 这时，称 $\{X_\varphi\}$为

广义过程 (random distribution). 在 $X_{\tau_h\varphi_1}$, $X_{\tau_h\varphi_2},\cdots$, $X_{\tau_h\varphi_n}(\tau_h\varphi(t)=\varphi(t-h))$ 的联合分布与 h 无关时，称 $\{X_\varphi(\omega)\}$ 为**强平稳广义过程** (strongly stationary random distribution). 如将概率分布相同者视为同一个过程，则 X_φ 为其特征泛函：

(20)
$$C(\varphi)=E(e^{iX_\varphi})$$

所确定，而且 $C(\tau_h\varphi)=C(\varphi)$ 是 X_φ 为强平稳的充分必要条件. 强平稳广义过程最简单的例子是前述的 Gauss 型白噪声 (И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин [3]).

【平稳过程的一般化】 平稳过程的概念可在种种方向上一般化.

1) 设 T 为比 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 更一般的集，并给定由 T 到其自身的变换群 G. 给定以 T 的元 t 为参数的随机变数族 $\{X_t\}$，当

$$X_{gt_1},\ X_{gt_2},\cdots,\ X_{gt_n}$$

的联合分布总与 $g\in G$ 无关时，称 $\{X_t\}(t\in T)$ 为**强 G 平稳**随机变量系. 同样地也可定义**弱 G 平稳**随机变量系([7], [19]).

2) 设 T 为 Riemann 空间，G 为由 T 到其自身的等长变换全体构成的群或其子群. 今设对于 $\omega\in\Omega(\mathfrak{B},P)$，在 T 的各点 t 定义了固定阶数的张量场 $\boldsymbol{X}_t(\omega)$. 称

$$\boldsymbol{X}(\omega)=\{\boldsymbol{X}_t(\omega)\,|\,t\in T\}$$

为 Riemann 空间 T 上的**随机张量场** (random tensor field). G 的任意元 g，可诱导出从在 t 的切向量空间到在 $g\cdot t$ 的切向量空间的等长变换，由此对 ω 的每个值，g 将张量场 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 变换为另一张量场 $g\boldsymbol{X}(\omega)$. 当 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 与 $g\boldsymbol{X}(\omega)$ 服从相同分布时，称 $\boldsymbol{X}(\omega)$ 是**强 G 平稳**的. 用类似方法还可定义**弱 G 平稳性** ([7], [9]).

3) 用与随机过程扩张为广义过程同样的方法，将随机张量场一般化，可定义**随机流动** (random current) 并讨论其平稳性([7]).

4) **n 阶平稳增量过程** (stochastic process with stationary increment of order n). 有的 X_t $(t\in\boldsymbol{R}^1)$ 本身非平稳，但取 n 阶差分时便成为平稳的. 这时，如考虑 X_t 在广义过程意义上的 n 阶导数 D^nX_t，则是个平稳广义过程，应用它的理论可以研究 X_t 本身. 例如 Brown 运动即是 1 阶平稳增量过程.

5) **K 次弱平稳过程** (weakly stationary process of degree K). 弱平稳过程是假定了到 2 阶矩为止的平稳性，如代替它而假定到 K 阶矩为止的平稳性，则可定义 K 次弱平稳过程，并且可以进行比普通的弱平稳过程更精密的研究([15]).

【参】 [1] Ju. K. Belijaev (Ю. К. Беляев), Continuity and Hölder's conditions for sample functions of stationary Gaussian processes, Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob. II (1961), 23—33; [2] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [3] И. М. Гельфанд-Н. Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа, оснащенные Гильбертовы пространства, Физматгиз, 1961; [4] U. Grenander-M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series, John Wiley, 1957 (中译本: U. 格列南特, M. 罗孙勃勒特, 平稳时间序列的统计分析, 上海科学技术出版社, 1962); [5] G. A. Hunt, Random Fourier transforms, Trans. Amer. Math. Soc., 71 (1951), 38—69; [6] K. Itô (伊藤清), Stationary random distributions, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto, (A) 28 (1954), 209—223; [7] K. Itô (伊藤清), Isotropic random current, Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., 2 (1956), 125—132; [8] 伊藤清, 確率論, 岩波, 1953; [9] 伊藤清, 確率過程 I, 岩波講座現代応用数学, 1957 (中译本: 伊藤清, 随机过程, 上海科学技术出版社, 1961); [10] S. Kakutani (角谷静夫), Spectral analysis of stationary Gaussian processes, Prob. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., 2 (1961), 239—249; [11] K. Karhunen, Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen, Ark. Mat., 1 (1950), 141—160; [12] G. Maruyama (丸山儀四郎), The harmonic analysis of stationary stochastic processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 4 (1949), 45—106; [13] J. von Neumann, Zur Operatorenmethode in der Klassische Mechanik, Ann. of Math., 33 (1932), 587—642; [14] Я. Г. Синай (Ja. G. Sinaĭ), Вероятностные идеи в эргодической теории, Proc. Internat. Congr. Math. Stockholm, 1962, 540—559; [15] А. Н. Ширяев, Некоторые вопросы спектральной теории старших моментов, 1, Теория Вероятностей и ее Применение, 5 (1960), 293—313; [16] N. Wiener, Generalized harmonic analysis, Acta Math., 55 (1930), 117—258, [17] N. Wiener, The harmonic chaos, Amer. J. Math., 60 (1938), 897—936; [18] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory, MIT Press, 1958; [19] A. M. Yaglom, Second-order homogeneous random fields, Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., 2 (1961), 593—622; [20] H. Cramér-M. R. Leadbetter, Stationary and related processes, John Wiley, 1967.

预报理论 [英 prediction theory 法 prévision

德 Extrapolation 俄 прогнозирование 日 予報理論] 设 $\{X(t)\}(t\in T)$ (T 为整数或实数全体的集)为平稳过程†. 当随机变量 $X(t)$ 直到时刻 t 为止的值 $X(s)(s\leqslant t)$ 已被观测时，要研究的问题是以这些观测值为基础，对 τ 时间以后的值 $X(t+\tau)$ 进行预测的问题. 作为**预报理论**是由 A. H. Колмогоров 和 N. Wiener 所开创，后来又被许多人所研究的. 这个理论是平稳过程论当中占有重要地位的一个分支，它从通讯、电工学开始被应用于各个方面.

关于平稳过程 $X(t)(t\in T)$，假定

$$E(|X(t)|^2)<\infty.$$

关于平均值无妨假设 $E(X(t))=0$. 随机过程 $X(t)$ $(t\in T)$ 在概率空间† $(\Omega,\mathfrak{B},P)$ 上表以 $X(t,\omega)(t\in T,\omega\in\Omega)$ 时，令 $\mathfrak{B}_t$ 为使

$$\{X(s)|s\leqslant t\}$$

可测的最小完全加法族，$H_t(X)$ 为 $\mathfrak{B}_t$ 可测且关于概率测度 P 平方可积的函数全体所构成的 Hilbert 空间，又 $M_t(X)$ 为由 $\{X(s)|s\leqslant t\}$所张成的 $H_t(X)$ 的子空间，且

$$\bigcup_t H_t(X)=H(X)$$

以及

$$\bigcup_t M_t(X)=M(X).$$

当 $X(s)(s\leqslant t)$ 已知时，由这些已知量的函数即 $H_t(X)$ 或 $M_t(X)$ 的元 $\hat{X}(t,\tau)$，对

$$X(t+\tau)(\tau>0)$$

进行预报，即是预报理论的问题. $\hat{X}(t,\tau)$ 称为 $X(t+\tau)$ 的**预报值** (predictor)，在预报值中使预报误差

$$\sigma^2(\tau)=E(|X(t+\tau)-\hat{X}(t,\tau)|^2)$$

最小的称为**最优预报值** (optimum (best) predictor). 这时由于平稳性，$\sigma^2(\tau)$ 与 t 无关. 特别当寻求 $\hat{X}(t,\tau)$ 的范围限于 $M_t(X)$ 时，称为**线性预报理论** (linear prediction theory)，对此已得到了详细的结果.

【线性预报】 在线性预报的情形，取 $X(t)$ $(t\in T)$ 为弱平稳过程†即可. 这时**最优线性预报值** (optimum linear predictor) 不是别的，正是 $X(t+\tau)$ 向 $M_t(X)$ 的射影†.

首先考虑 T 为整数集的情形，即离散时间参数的弱平稳过程的情形. $X(t)$ 可谱分解为

$$X(t)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda t}dZ(\lambda) \tag{1}$$

(→平稳过程)，这时必存在关于谱测度†

$$dF(\lambda)=E(|dZ(\lambda)|^2)$$

平方可积的函数 $\hat{\varphi}(\lambda,\tau)$，能将 $\hat{X}(t,\tau)$ 表示为

$$\hat{X}(t,\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda t}\hat{\varphi}(\lambda,\tau)dZ(\lambda). \tag{2}$$

如果 $X(t)$ 是决定性的†，则可求得 $\hat{\varphi}(\lambda,\tau)$ 使对一切的 t，τ 有

$$\hat{X}(t,\tau)=X(t+\tau).$$

又如 $X(t)$ 是纯非决定性的†，则其谱测度关于 Lebesgue 测度绝对连续，其密度函数 $f(\lambda)$ 几乎处处为正，并且

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda>-\infty.$$

用此 $f(\lambda)$，可求得最优预报值如下. 存在属于关于单位圆的 Hardy 族† H_2 的

$$\gamma(z)=\sum_{t=0}^{\infty}C(t)z^t,$$

用其边界函数 $\varphi(\lambda)=\gamma(e^{-i\lambda})$ 将 $f(\lambda)$ 表示为

$$f(\lambda)=(1/2\pi)|\varphi(\lambda)|^2. \tag{3}$$

而 $X(t)$ 可用相互正交的随机变量序列 $\{\xi(t)\}$ $(t\in T)$ 和 $\gamma(z)$ 的系数 $\{C(t)\}$ 表示成后向移动平均†

$$X(t)=\sum_{s=-\infty}^{t}C(t-s)\xi(s). \tag{4}$$

这里满足关系 (4) 的 $\{C(t)\}$ 和 $\{\xi(t)\}$ 的组虽有多种，但当 $\gamma(z)$ 为**极大** (maximal, optimal) 即能写成

$$\gamma(z)=\sqrt{2\pi}\exp\left(\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)\times\frac{e^{-i\lambda}+z}{e^{-i\lambda}-z}d\lambda\right) \tag{5}$$

时，(4)的表示在下述意义上是标准的：对任意的 t 有 $M_t(X)=M_t(\xi)$. 因而 $\hat{X}(t,\tau)$ 为

$X(t+\tau)$ 向 $M_t(\xi)$ 的射影，

(6) $$\hat{X}(t,\tau)=\sum_{s=-\infty}^{t} C(t+\tau-s)\xi(s)$$

$$\left(=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\hat{\varphi}(\lambda,\tau)dZ(\lambda)\right)$$

并且

$$\hat{\varphi}(\lambda,\tau)=$$
$$e^{i\lambda\tau}\left(\varphi(\lambda)-\sum_{s=0}^{\tau-1} C(s)e^{-i\lambda s}\right)\Big/\varphi(\lambda).$$

关于预报误差，有

$$\sigma^2(\tau)=\sum_{s=0}^{\tau-1}|C(s)|^2.$$

例）当 $X(t)$ 的协方差函数†为 $e^{-\alpha|t|}$ ($\alpha>0$) 时，

$$f(\lambda)=(1/2\pi)(1-\beta^2)|1-\beta e^{-i\lambda}|^{-2},$$
$$\beta=e^{-\alpha}.$$

因极大的 $\gamma(z)$ 为 $\sqrt{1-\beta^2}\,(1-\beta z)^{-1}$，故得

$$\hat{X}(t,\tau)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\frac{e^{i\lambda\tau}}{1-\beta e^{-i\lambda}}$$
$$\times\sum_{\tau}^{\infty}\beta^s e^{-i\lambda s}Z(d\lambda)=\beta^\tau X(t),$$

$$\sigma^2(\tau)=1-2\beta^\tau e^{-\alpha\tau}+\beta^{2\tau}=1-e^{-2\alpha\tau}.$$

上述讨论向多维弱平稳过程

$$X(t)=(X_1(t),\cdots,X_n(t))\ (t\in T)$$

的推广，被 Wiener, P. Masani, Ю. А. Розанов 等人所进行．在 (1), (2) 中，分别取 $Z(\lambda)$ 是以 λ 为参数的 n 维正交增量过程，取 $\hat{\varphi}(\lambda,\tau)$ 为 n 阶矩阵，它们仍然成立．在纯非决定性时，谱密度矩阵

$$f(\lambda)=(f_{kj}(\lambda))\ (k=1,\cdots,n;$$
$$j=1,\cdots,n)$$

具有一定的秩 m，进而存在属于 Hardy 族 H_2 的

$$\gamma_{kj}(z)=\sum_{t=0}^{\infty} C_{kj}(t)z^t,$$

由其边界函数 $\gamma_{kj}(e^{-i\lambda})=\varphi_{kj}(\lambda)$ 可表示成

(3′) $$f(\lambda)=(1/2\pi)\varphi(\lambda)\varphi(\lambda)^*,$$
$$\varphi(\lambda)=(\varphi_{kj}(\lambda));$$
$$k=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m.$$

m 称为 $X(t)$ 的**秩** (rank)．$X(t)$ 可用相互正交的$\{\xi_j(t)\,|\,1\leqslant j\leqslant m,\ t\in T\}$ 和 γ_{kj} 的系数 $\{C_{kj}(t)\}$ 表示成如下的后向移动平均

(4′) $$X_k(t)=\sum_{s=-\infty}^{t}\sum_{j=1}^{m} C_{kj}(t-s)\xi_j(s),$$
$$k=1,\cdots,n.$$

与前面相同，为使这个表示是标准的充分必要条件是 $\gamma(Z)$ 为极大，即对属于 H_2 的边界函数满足(3′)的任意的 $\tilde{\gamma}(Z)$，

$$\gamma(0)\gamma(0)^*-\tilde{\gamma}(0)\tilde{\gamma}(0)^*$$

总是正定的．如果(4′)的表示是标准的，则最优预测值由与 (6) 类似的形式所给出．特别在 $m=n$ 即**满秩** (full rank) 的情形，可以得到较具体的结果．为使纯非决定性的 $X(t)$ 为满秩的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\log\det f(\lambda)d\lambda>-\infty.$$

在最优预报值由与 (2) 类似的形式表出时，$\hat{\varphi}(\lambda,\tau)$ 为

$$e^{i\lambda\tau}\left(\varphi(\lambda)-\sum_{s=0}^{\tau-1} C(s)e^{-i\lambda s}\right)\Big/\varphi(\lambda).$$

这里 $\varphi(\lambda)$ 是(3′)中的函数，$C(s)$ 是由 $\gamma(Z)$ 的系数构成的矩阵．

在 $X(t)$ 为一般的情形，如将 $X(t)$ 分解为决定性部分与纯非决定性部分之和，对各成分使用上述方法，即可求出最优预报值(→平稳过程)．

在 T 为实数的情形，即连续时间参数时，将关于 t 强连续的弱平稳过程 $X(t)$ 谱分解为

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}dZ(\lambda),$$

注意谱测度在直线上分布的事实，如将单位圆内正则的 $\gamma(Z)$ 换为半平面上正则的函数，则可进行与离散时间参数情形差不多平行的讨论．为使 $X(t)$ 为纯非决定性的充分必要条件是存在谱密度函数 $f(\lambda)$，使

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}d\lambda>-\infty.$$

极大的 $\gamma(Z)$ 可表示为

$$\gamma(Z) = \sqrt{\pi}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\log f(\lambda)\frac{1+\lambda Z}{Z-\lambda}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

利用由 $\gamma(Z)$ 的边界(实轴)函数的 Fourier 变换所得到的 $C(t)$ 和正交增量过程† $\xi(t)$，可以得到标准的后向移动平均表示

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-s)d\xi(s).$$

由此寻求最优预报值和预报误差，与离散时间参数的情形是一样的．特别在极大的 $\gamma(Z)$ 用 p 次多项式 $P(Z)$ 表示成

$$\gamma(Z) = c/P(iZ)$$

(c 为常数)时，因 $X(t)$ 关于 t 为 $p-1$ 次可微，故由 $P(d/dt)\ X(t)$ 可具体求出 $d\xi(t)$ 从而 $\hat{X}(t,\tau)$．以上事实向多维平稳过程的推广，与离散时间参数的情形一样．

Wiener 还着眼于各个样本函数† $X(t,\omega)$，考虑用 $\{X(s)|s\leqslant t\}$ 的线性泛函

$$\int_0^{\infty} X(t-s,\omega)dK(s)$$

(K 为有界变差函数)寻求 $X(t+\tau,\ \omega)$ 的最优预报值的问题([10])．谱测度仍然起着重要作用，计算的方法也与这里所说的有许多类似之点．

对于弱平稳广义过程† $X(\varphi)$ ($\varphi\in\mathscr{S}$(或 $\mathscr{D}$))，可以如下归结为通常的函数型的平稳过程的情形．协方差广义函数 ρ 可表示为

$$\rho(\varphi) = \int\hat{\varphi}(\lambda)dF(\lambda),$$

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \int e^{i\lambda t}\varphi(t)dt,$$

存在某正整数 K 使谱测度 $dF(\lambda)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+\lambda^2)^{-K}dF(\lambda) < \infty.$$

今取

$$e(t) = \exp t(t\leqslant 0);\ = 0\ \ (t>0),$$

令 $e_K(t)$ 为 $e(t)$ 的 K 次卷积．用

$$Y(\varphi) = X(e_K * \varphi)$$

定义广义过程，它就是函数型的弱平稳过程，并且满足

$$M_t(X) = M_t(Y).$$

其中 $M_t(X)$ 为 $\{X(\varphi)|\varphi$ 的支集$\subset(-\infty,t)\}$ 张成的线性空间． 由此事实即知 $X(\varphi)$ 的预测能够归结为前述情形．

此外关于线性预报，在 $dZ(\lambda)$ 不必为随机测度(→随机过程)而能将 $X(t)$ 表示为 (1) 的形式的情形，或者在非平稳正态过程的情形，都可以讨论同样的问题 (H. Cramér [4]，P. Lévy)． 关于平稳 Gauss 噪声的核场 (germ field)，曾被 N. Levinson 和 H. P. McKean, Jr 所研究([13])．

【插值和滤波】 与线性预报理论在问题的提出以及解决的办法上都有许多类似之处的，还有**插值** (interpolation) 和**滤波** (filtering)．

关于除某时间间隔 T_1 以外的 t，$X(t)$ 的值 $\{X(t)|t\notin T_1\}$ 为已知时，用已知量线性组合的极限作 $X(t)(t\in T_1)$ 的最优近似，即是(线性)插值的问题．举一 T 为整数时的例子．例) 取 $T_1=\{t_0\}$，设 $X(t)$ 的谱测度为 $f(\lambda)d\lambda$．为使 $X(t_0)$ 的插值必定伴随有误差的充分必要条件是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda)}d\lambda < \infty,$$

而当 $X(t)$ 已表示为 (1) 的形式时 $X(t_0)$ 的最优插值值 $\hat{X}(t_0)$ 由

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0}\left(1-2\pi\left(f(\lambda)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\mu)}d\mu\right)^{-1}\right)dZ(\lambda)$$

所给出．而插值误差为

$$E(|X(t_0)-\hat{X}(t_0)|^2) = 4\pi^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f(\lambda)}d\lambda\right)^{-1}.$$

$X(t)$ 取多维值的情形也已进行了研究 (Розанов [8])．

滤波产生于从混有噪声的信号中分离出所需要成分的通讯问题 (Wiener [10]，A. Blanc-Lapierre-R. Fortet [2])．设在 T 为实数的情形，$X(t)$ 取复值并且可表示为

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}dZ(\lambda) = S(t) + N(t),$$

而 $(S(t),\ N(t))$ 为平均向量为 0 的弱平稳过程． $S(t)$ 相当于信号，而 $N(t)$ 相当于噪声．

这时我们考虑用 $M_t(X)$ 的元对 $S(t+\tau)$ 做最优近似的问题. 最优近似是 $S(t+\tau)$ 向 $M_t(X)$ 的射影,然而用谱测度写出来却相当复杂 ([10]). 这一问题多数是在 $S(t)$ 与 $N(t)$ 正交的假定之下来求解. 进一步加强, 设两者的谱测度绝对连续,具有密度函数 $f_S(\lambda), f_N(\lambda)$. 在已知 $\{X(t) \mid t \in T\}$ 时, 在一时点 t 处 $S(t)$ 的最优(线性)近似 $\hat{S}(t)$, 取

$$\varphi_0(\lambda) = f_S(\lambda)/(f_S(\lambda) + f_N(\lambda))$$

而由

$$\hat{S}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi_0(\lambda) dZ(\lambda)$$

所给出,误差 $E(|S(t) - \hat{S}(t)|^2)$ 为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_S(\lambda) f_N(\lambda)/(f_S(\lambda) + f_N(\lambda)) d\lambda.$$

【非线性预报】 在比 $M_t(X)$ 范围更广的 $H_t(X)$ 当中寻求预报值 $\hat{X}(t, \tau)$ 即是**非线性预报** (nonlinear prediction) 的问题. 这时有

$$\hat{X}(t, \tau) = E(X(t+\tau) | \mathfrak{B}_t),$$

然而仅在特殊情形下才能具体地求出它来.

i) 在正态随机过程†的情形从更广的 $H_t(X)$ 当中求出的最优预报值仍然属于 $M_t(X)$, 从而与线性预报值是一致的. ii) 在存在依据 Brown 运动†的标准表示 (→Brown 运动)而表示成

$$X(t) = \sum_n \int \cdots \int^t f_n(u_1 - t, \cdots, u_n - t) dB(u_1) \cdots dB(u_n)$$

时,由 $H_t(X) = H_t(B)$ 可得

$$\hat{X}(t, \tau) = \sum_n \int \cdots \int^t f_n(u_1 - t - \tau, \cdots, u_n - t - \tau) dB(u_1) \cdots dB(u_n)$$

([7]). iii) 设 $X(t)$ 为古典扩散过程 (→扩散过程),生成算子为

$$\mathfrak{G} = a(x) d^2/dx^2 + b(x) d/dx.$$

由于

$$\hat{X}(0, \tau) = E(X(\tau) | X(0)),$$

使用

$$\partial u/\partial t = \mathfrak{G}u, \quad u(0, x) = x$$

的解 $u(t, x)$ 可表示成

$$\hat{X}(0, \tau) = u(\tau, X(0)) \ ([1]).$$

iv) 在 T 为整数时, $X(s)$ $(s \leqslant t)$ 的多项式在 $H_t(X)$ 中稠密的情形, Wiener-Masani [9] 处理了用这些多项式对 $\hat{X}(t, \tau)$ 做近似的问题.

此外, 对于时间参数空间 T 为多维情形的线性预报理论的推广, 有 H. Helson-D. Lowdenslager, 江泽培, A. M. Яглом 等人进行了研究. 关于由随机微分方程给出的过程的滤波的近代发展, →[12].

【参】 [1] A. V. Balakrishnan, Prediction theory for Markov process, Pacific J. Math., **11** (1961), 1171—1182; [2] A. Blanc-Lapierre-R. Fortet, Théorie des fonctions aléatoires, Masson, 1953; [3] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley, 1953; [4] H. Cramér, On the linear prediction problem for certain stochastic processes, Ark. Mat., **4** (1960), 45—53; [5] K. Karhunen, Über die Struktur stationärer zufälliger Funktionen, Ark. Mat., **1** (1950), 141—160; [6] P. Masani-N. Wiener, Non-linear prediction, The H. Cramér volume, John Wiley, 1959, p. 190—212; [7] M. Nisio (西尾真喜子), Remark on the canonical representation of strictly stationary processes, J. Math. Kyoto Univ., **1** (1961), 129—146; [8] Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, 1963; [9] N. Wiener-P. Masani, The prediction theory of multivariate stochastic processes I, II, Acta Math., **98** (1957), 111—150, **99** (1958), 93—137; [10] N. Wiener, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, MIT Press, 1949; [11] P. Whittle, Prediction and regulation by linear least- sguare methods, van Nostrand, 1963; [12] Р. Ш. Липцер-А. Н. Ширяев, Статистика случайных процессов, Наука, 1974; [13] N. Levinson-H. P. McKean, Jr., Weighted trigonometrical approximation on $\boldsymbol{R}^1$ with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, Acta Math., **112** (1964), 99—143.

十七、统 计 数 学

统计推断 [英 statistical inference 法 induction statistique 德 statistische Folgerung 俄 статистический вывод 日 統計的推論] **统计推断**是科学研究中最重要的推断程序之一. 这种推断程序的研究, 已成为现代统计学的一个主要目标. 从数学观点看来,"统计的"这个形容词意味着用概率去了解各种现象, 但得到这种见解曾经历了各种历史变迁.

这种意义下的统计推断是归纳逻辑的一种形态,它的源流也可以追溯到 F. Bacon. 但是, 从数量上去掌握集团是统计推断早期的情况, 从这种意义看, J. Graunt 使用调查员调查伦敦市死亡人数(1662), 是历史上最早出现的统计推断. Graunt 的方法是社会现象的数量表现, W. Petty 在《政治算术》(Political arithmetic, 1690)一书中, 沿袭 Graunt 的方法, 进行了社会相互间的比较. J. P. Süssmilch 更进一步继承了这个流派, 注意到作为大量观察结果所出现的规律性, 强调了它的统计意义. **统计学** (statistics) 一词是 G. Achenwall 针对十七世纪在德国兴起的**政治学**(德 Staatenkunde) 而使用的术语, 但这门学问以描述国家的状态为其目的, 和今天的统计学是很不相同的. 还有, 丹麦人 J. P. Ancherson 发展了政治学, 借助表格使描述一目了然, 提出了更方便的推断方法.

另一方面, 概率论的发展不可避免地要影响到统计推断理论. 现在人们所理解的统计推断程序, 可以说, 最早的就是 T. Bayes 方法. 用他的名字命名的定理(Bayes 定理[†])指出,当已知原因 C 产生结果 E 的概率 $P_C(E)$ 时, 如果已给出原因的先验概率[†](事前概率)$P(C)$, 那末在知道结果 E 后原因 C 的条件概率(后验概率[†])就是

$$P_E(C) = P(C)P_C(E)\Big/\sum_C P(C)P_C(E).$$

这个定理当然也能推广到 C, E 为连续的情形, 它暗示着如下的统计推断: "如果知道结果 E 已发生, 就可以对所有原因 C 计算其后验概率 $P_E(C)$, 进行比较后,找出使其值为最大的 C^*: $P_E(C^*) = \max_C P_E(C)$, 就推断出 C^* 为 E 的原因."

C. F. Gauss 和 P. S. Laplace 应用 Bayes 定理讨论了参数的估计法(→统计估计). Laplace 在这项研究中,把参数 θ 与其估计值 t 之间的距离的单调函数 $W(|t-\theta|)$ 当作衡量估计误差的重要程度的基准, 特别是讨论了 $W=|t-\theta|$ 的情形. Gauss 也仿照 Laplace, 考虑了 $W(|t-\theta|)$, 他注意到若取 $W=(t-\theta)^2$, 就能得到数学上的丰硕成果. Gauss 从这种考虑出发对最小二乘法[†]进行了研究,他那时使用的符号和术语,现在仍然使用.

在统计推断借助于概率论观点取得重要进展同时, 统计在政府工作中的重要性逐渐为人们所认识, 各国都设置了统计机构. 其间 L. A. J. Quetelet 曾致力于比利时的国势调查以及组织国际统计活动. Quetelet 有所谓"平均人"的概念,但它起了总体概念的先驱作用.

生物学家 F. Galton 揭示了统计方法在生物学研究中的有用性, 引进了回归直线[†]、相关系数[†]的概念, 创始了回归分析[†]. 这是在遗传的研究中以弄清儿辈特征值与父辈特征值的相关关系为目的的, 但在他那个时代, 样本特征值[†]与总体特征值[†]的区别还是很不清楚的.

K. Pearson 继 Galton 之后进一步发展了回归与相关的理论,成功地创建了生物统计学,并得到了**总体** (population) 的概念. 所谓总体, 是由可观测的个体构成的集团, 为了观测从这

个集团抽出的个体，是反映总体特征的**样本**(sample)．统计研究不是研究样本本身，而是根据样本对总体进行推断．这种想法导致了**拟合优度检验**(test of goodness of fit)，亦即作为样本取出的若干个体是否拟合从理论上所确定的总体分布问题．K. Pearson 用微分方程刻划总体分布的特征，并将这些分布分为若干类型．然后，讨论了样本的频率分布是否拟合这些总体分布，为了对此进行检验，发展了 χ^2 分布†．

K. Pearson 时代的统计学家把总体看作是无限多个个体的集团(**无限总体**(infinite population))，并认为样本的**大小**(size)(亦即样本中个体的数目)越大，就越能精确地反映总体的特征．因此，取尽可能大的样本，由近似计算来进行统计推断，特别是进行假设检验(→假设检验)．这叫做**大样本理论**(large sample theory)．例如，如果大小为 n 的样本 $X_1, \cdots, X_n$ 是一组服从正态分布† $N(\mu, \sigma^2)$ 的独立†随机变量†，那末，随机变量 $T = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\sigma$ $\left(\bar{X} = \sum_i X_i \big/ n\right)$ 当 $\mu = \mu_0$ 时服从 $N(0, 1)$．所以，对充分大的样本 $(n \to \infty)$，可用

$$\hat{\sigma} = \left(\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \big/ n\right)^{1/2}$$

来估计 σ，并且可以认为在用 $\hat{\sigma}$ 来代替 T 中的 σ 后的随机变量 $Z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)/\hat{\sigma}$ 仍然服从 $N(0, 1)$．由此看来，就在 n 不是那样大的时候，也可用这个方法进行假设 $\mu = \mu_0$ 的检验．

Student (这是笔名，原名是 W. S. Gosset) 于 1908 年发现了 Z 的精确分布，创始了**精确样本理论**(→样本分布)．Student 的这个发现，不仅不再依靠近似计算，而且能用所谓**小样本**(small sample) 来进行统计推断，并且还成为使统计学的对象由集团现象转变为随机现象的转机．换句话说，总体应理解为含有未知**参数**(parameters) 的概率分布†(总体分布)所定义的概率空间†；要根据样本来推断总体，还必须强调样本要从总体中**随机地**(at random) 抽取．也就是说，一定要是**随机样本**(random sample)．

Student 推导 t 分布†的方法是极不完整的．R. A. Fisher 利用 n 维几何方法(多重积分法)给了完整的证明．此外，Fisher 引进了解消假设†和显著性检验的概念，成为假设检验理论的先驱；并列举了一致性、有效性和充分†性，作为参数的估计量†应具备的性质．他还对估计的精度与样本所具有的信息之间的关系进行了考察，得到了信息量†的概念．极大似然法†也是由 Fisher 提出的．这个方法由于不需要假定关于先验概率的信息，所以其意义是重大的，而假定这种信息的存在，是用 Bayes 定理进行推断的一个致命缺点．由此方法得到的估计程序，只证明了它具有渐近的(大样本情形的)有效性，这是一个缺点．试验设计法(→试验设计)也是由 Fisher 开创和发展的统计方法之一．Fisher 凭借**随机化**(randomization) 的手段，成功地把概率模型带进了实验领域，并作为分析这种模型的一个方法，建立了方差分析†法．他强调了统计方法在试验设计中的重要性．

Fisher 还想避开 Bayes 定理的缺点，作为不利用先验概率而直接由样本观测值来求参数分布的方法，引进了**可信分布**(fiducial distribution) 的概念，但后来引起了很大争论．例如 Behrens-Fisher 问题："设 $X_1, \cdots, X_m$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n$ 为分别由 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 抽出的独立样本，当其中参数 μ_1, μ_2, σ_1 和 σ_2 全为未知时，检验假设 $\mu_1 = \mu_2$ 的问题，或对 $\delta = \mu_1 - \mu_2$ 做区间估计†的问题"，若设

$$\bar{X} = \sum_i X_i/m, \quad \bar{Y} = \sum_i Y_i/n,$$

$$S_1^2 = \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \big/ (m-1),$$

$$S_2^2 = \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 \big/ (n-1),$$

则

$$T_1 = \sqrt{m}(\bar{X} - \mu_1)/S_1$$

和

$$T_2 = \sqrt{n}(\bar{Y} - \mu_2)/S_2$$

互相独立地分别服从自由度为 $m-1$ 和 $n-1$ 的 t 分布†．Fisher 利用这个事实，在得到 $\bar{X}$，$\bar{Y}$，S_1，S_2 的观测值 $\bar{x}$，$\bar{y}$，s_1，s_2 后，参数 μ_1 和 μ_2

的分布，通过变换

$$\mu_1 = \bar{x} - T_1 s_1/\sqrt{m}$$

和

$$\mu_2 = \bar{y} - T_2 s_2/\sqrt{n}$$

（设 $\bar{x}, \bar{y}, s_1, s_2$ 为一定），可以从 T_1 和 T_2 的分布导出，从而得到了

$$\delta = \bar{x} - \bar{y} - (T_1 s_1/\sqrt{m} - T_2 s_2/\sqrt{n})$$

的分布．这就是可信分布，由此决定的区间 $|\delta - (\bar{x} - \bar{y})| < c$ 称为可信区间．

Fisher 给出了很多现代统计学的基础概念，他的思考方法是非常直观的，但在数学上也存在着不够精练的地方．例如检验程序的推导方法完全是直观的，但未提出判断这些程序好坏的准则．与此相反，J. Neyman 和 E. S. Pearson 发展了假设检验的数学理论．他们把所有可能的总体分布族看作一个集合，其中考虑了一个与解消假设相对立的备择假设，引进了检验功效函数†的概念，以此作为判断检验程序好坏的标准．这种思想使统计推断理论变得非常明确．Neyman 还想从数学上定义可信区间，提出了置信区间†的概念，但这两个概念实际上是有本质差异的．

自从 A. Wald 的统计判决函数理论（→统计判决函数）于 1939 年发表以来，它的重要性逐渐增长．在这个理论中，把推断程序的全体 $\mathscr{D}$ 命名为判决函数空间†，第一次明确地定义它为一个集合．这个集合 $\mathscr{D}$ 虽已在 Neyman-Pearson 理论中不明显地考虑过，但是到了 Wald 才明确地成为考察对象．Wald 定义了统计推断程序的风险函数†，用来作为推断程序好坏的准则；他还积极地利用先验概率和有关的 Bayes 程序，证明了完备类定理†．自从 Fisher 引进极大似然法使得估计法避开了先验概率和 Neyman 强调了参数空间†上的概率分布没有意义之后，先验概率作为统计方法已为人们完全遗弃不顾，所以，对 Wald 的这种方法反响极大，其后，还出现了很多关于先验概率的著作．Wald 还使统计理论与对策论（→对策论）结合起来，并在统计学中引进了极小极大原理†．

如此以数学为其基础的统计推断理论，它的应用范围正在不断地扩大．工业上由于成批生产技术发展的结果，二十年代以来广泛应用统计质量管理，并由此产生了抽样检验†、管理图†等方法，这是一个最显著的例子．抽样调查理论已确定为从有限个个体所构成的总体（所谓**有限总体**（finite population））中抽取的随机样本理论，由此探究了各种抽样程序，并在实际中得到有效的应用．此外，统计推断理论在计量经济学、计量生物学、计量心理学和计量社会学等学科上的应用一直在发展（→统计质量管理，抽样方法，计量经济学，计量生物学，计量心理学）．

在日本，数理统计学在二十年代由亀田豐治朗和佐藤良一郎等人介绍进来；到了四十年代，北川敏男和增山元三郎等人已开始进行创造性的研究．

〔参〕［1］ R. A. Fisher, Statistical methods for research workers, Oliver and Boyd, 1925, 第十一版, 1950; ［2］ R. A. Fisher, The design of experiments, Oliver and Boyd, 1935, 第四版, 1947; ［3］ R. A. Fisher, Contributions to mathematical statistics, John Wiley, 1950; ［4］ J. Neyman-E. S. Pearson, Contributions to the theory of testing statistical hypotheses I, II, Statist. Res. Mem. London Univ., 1 (1936), 1—37, 2 (1938), 25—57; ［5］ A. Wald, Statistical decision functions, John Wiley, 1950 (中译本: A. 瓦尔特, 统计决策函数, 上海科学技术出版社, 1960); ［6］ L. J. Savage, The foundation of statistical inference, Methuen, 1962; ［7］ C. R. Rao, Linear statistical inference and its applications, John Wiley, 1965; ［8］ D. A. S. Fraser, The structure of inference, John Wiley, 1968; ［9］ D. V. Lindley, Introduction to probability and statistics from a Bayesian viewpoint I, II, Cambridge Univ. Press, 1965; ［10］ J. S. Maritz, Empirical Bayes methods, Methuen, 1970.

统计量　［英 statistic　*法* statistique　*德* statistische Grösse　*俄* статистические величины　日 統計量］　统计量是指在统计推断的过程中由观测值（亦即样本值）的函数所表达的量（→统计推断）．

【样本与统计量】　在统计推断中，基础概念是总体与样本．这些概念可用概率论（→概率论）观点表述如下．设 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 是概率空间†，P 是 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度†．随机变量† X 确定了一维概率分布† $\Phi(A) = P\{\omega | X(\omega) \in A\}$（$A$ 是一维 Borel 集†），这产生一维概率空间（$\boldsymbol{R}$,

$\mathfrak{B}^1, \Phi$). 其中 $\boldsymbol{R}$ 是实数全体，$\mathfrak{B}^1$ 是一维 Borel 集族. 现在，设 $X_1, \cdots, X_n$ 是具有相同的一维概率分布 Φ 且互相独立†的随机变量†. 这时，n 维随机变量† $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 叫做由总体 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 抽出的**大小** (size) 为 n 的**随机样本** (random sample). 特别当 $X_1, \cdots, X_n$ 只能取两个值时（通常是 $\{0, 1\}$），这个随机样本叫做 **Bernoulli 样本**或 **Bernoulli 试验序列** (Bernoulli trials). 一般地，设由 X 确定的 n 维概率分布†为 Φ_n，则 n 维概率空间 $(\boldsymbol{R}^n, \mathfrak{B}^n, \Phi_n)$ ($\mathfrak{B}^n$ 是 n 维 Borel 集的全体) 叫做 n 维**样本空间** (sample space)，此时 Φ_n 是 n 个一维概率分布 Φ 的直积测度†. 提到样本 X 的时候，按定义，它是一个随机变量，但有时也把它看做是实际观测的值. 为了表明后者，称它为**样本值** (sample value) 并用小写字母 x 表示. 这样，样本值既可以表为 $x = X(\omega)$ $(\omega \in \Omega)$，又可以看做是样本空间的一点（**样本点**）.

尽管总体对应的是集合 Ω，但是由于我们的统计处理是通过样本进行的，因此通常并不直接考虑 Ω 本身. 由样本 X 确定的一维概率分布 Φ 和 n 维概率分布 Φ_n，分别称为一维和 n 维样本空间的**总体分布** (population distribution)，因为那是由总体上的概率测度诱导出来的.

统计量 Y 是形如 $Y = f(X)$ 的随机变量，其中 f 是样本空间 $(\boldsymbol{R}^n, \mathfrak{B}^n, \Phi_n)$ 到可测空间† $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{B}^1)$ 的可测函数. 与样本 X 的样本值 x 相对应的统计量 Y 的值用 $y = f(x)$ 表示.

当我们做统计推断时，我们并不精确地知道总体分布 Φ 或 Φ_n，而只是知道它们属于 $\mathfrak{B}^1$ 或 $\mathfrak{B}^n$ 上的概率测度族 $\mathscr{P} = \{P_\theta\}$ $(\theta \in \Theta)$. 这时，θ 叫做概率测度的**参数** (parameter)，Θ 叫做**参数空间** (parameter space).

上面叙述的典型情形还可推广如下. 1) 以 r 维概率分布 Ψ 代替一维概率分布 Φ，从而大小为 n 的样本确定 nr 维样本空间. 2) 随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 虽互相独立，但它们的概率分布不是相同分布. 3) 随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 不为互相独立. 在上述情形 1), 2) 和 3) 中，样本空间都是形状 $(\boldsymbol{R}^n, \mathfrak{B}^n, \Phi_n)$，但 n 不一定是样本的大小，Φ_n 也不一定是 n 个相同的一维概率测度的直积. 4) 最一般的样本空间可表为某可测空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 和 $\mathfrak{B}$ 上的概率测度族 $\mathscr{P} = \{P_\theta\}$ $(\theta \in \Theta)$.

一般地说，统计量可表为形如 $Y = f(X)$ 的随机变量，其中 f 是样本空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 到另外的可测空间 $(\mathscr{Y}, \mathfrak{C})$ 的可测函数. 特别当 $(\mathscr{Y}, \mathfrak{C})$ 是 $(\boldsymbol{R}, \mathfrak{B}^1)$ 或 $(\boldsymbol{R}^n, \mathfrak{B}^n)$ 时，称 $Y = f(X)$ 为**一维统计量**或 **n 维统计量**.

【总体特征值】 在具有总体分布 P_0 的一维概率空间 $(\boldsymbol{R}^1, \mathfrak{B}^1, P_0)$ 中，用来表明一维分布 P_0 的特征的下列诸量叫做**总体特征值** (population characteristic). 令 P_0 的分布函数†为 $F(z) = P_0((-\infty, z))$，则**总体均值** (population mean) $\mu = \int z dF(z)$；**总体方差** (population variance) $\sigma^2 = \int (z-\mu)^2 dF(z)$；**总体标准差** (population standard deviation) σ $(\geqslant 0)$；**总体 k 阶矩** (population moment of order k) $\mu_k' = \int z^k dF(z)$ $(\mu_1' = \mu)$；**总体中心矩** (central moment) $\mu_k = \int (z-\mu)^k dF(z)$ $(\mu_2 = \sigma^2)$；**峭度** (kurtosis) μ_4/σ^4；**超出率** (coefficient of excess) $\mu_4/\sigma^4 - 3$；**偏斜度** (skewness) μ_3/σ^3；**α 点** (α quantile) 或 $100\alpha\%$ **分位点** (percentile) 是满足 $F(m-0) \leqslant \alpha \leqslant F(m+0)$ 的 m，**中位数** (median) 是 50% 分位点，**第 1 和第 3 四分位数** (first and third quartile) 分别是 25% 分位点和 75% 分位点；**范围**或**极差** (range) 是第 3 四分位数减去第 1 四分位数；**众数** (mode) 是使 $dF(z)/dz$ 为最大的 z 值. (关于峭度等词，如有必要也冠以总体一词，如总体峭度等.) 这里冠以"总体"一词，是为了在必要时用来区别总体特征值和下述样本特征值.

【样本特征值】 令 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 为 n 维样本空间的点（样本值）. 关于一维 Borel 集 A，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中属于 A 的数目叫做 A 在样本值 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 中的**频数** (frequency)，而 (频数)/n 叫做 A 的**相对频数** (relative frequency). 若取 $A = (-\infty, z]$，并把 A 的相对频

数 $F_x(z)$ 看做 z 的函数,则它对于每一个 $x\in \boldsymbol{R}^n$ 是一个分布函数[†],并称为基于样本值 x 的**经验分布函数** (empirical distribution function).

恰如由总体分布函数求出总体特征值那样,由经验分布函数也可定出各种特征值. 这些叫做样本特征值,并可表为 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数.

设 $x=(x_1, \cdots, x_n)$ 是样本 $X=(X_1, \cdots, X_n)$ 的样本值,在表示样本特征值的 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数中,将 $x_1, \cdots, x_n$ 换成 $X_1, \cdots, X_n$ 后得到的统计量叫做**样本特征值** (sample characteristic),并采用与对应的总体特征值相同的名称(但代替"总体"冠之以"样本"). 也就是说,**样本均值** (sample mean)

$$\bar{X}=\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n,$$

样本方差 (sample variance)

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \Big/ n$$

$\left(\text{有时也将 } \sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \Big/ (n-1) \text{ 叫做样本方差}\right)$, **样本标准差** (sample standard deviation)

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \Big/ n},$$

亦即样本方差的正平方根,**样本中位数** (sample median) 是将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 按大小顺序排列时位于中央的值(特别当 n 是偶数时, 取中央二值的平均),**样本众数** (sample mode) 是频数最大的 X_i 所取的值, **样本 k 阶矩** (sample moment of order k)

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k \Big/ n,$$

等等.

除此以外, 常用的统计量还有将 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 按照大小顺序重排的**顺序统计量** (order statistic), **样本极差** (sample range) $\max_i X_i - \min_i X_i$,等. 在 Bernoulli 试验序列中,由一串相连的同样记号所成的集叫做一个**游程** (run). 例如, 在 (01100010) 中, 有一个长度为 3 的"0"游程和一个长度为 2 的"1"游程.

在上面举出的统计量中, 顺序统计量是 n 维统计量,其它都是一维统计量.

对于样本值 $x=(x_1, \cdots, x_n)$, 经常为了方便而将 $\boldsymbol{R}$ 分割为若干个(多数情况下是等宽的)区间, 以便将 n 个值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 分组. 这些区间叫做**组** (class). 将各组的频数作成一个表(**频数分布表** (frequency table)) 或一个**直方图** (histogram), 便可观察样本值的大概分布状态. 要想从这些图或表了解样本特征值时, 人们往往在每个组中确定一个适当的值(**组值** (class value)) (通常取区间中点的值), 并在假定属于各个组的样本值的分量都等于它的组值后, 再来求近似的特征值. 例如, 当 l 为组数, 相应的组值为 $a_1, a_2, \cdots, a_l$, 频数为 $f_1, f_2, \cdots, f_l$ 时,用 $\bar{x} \doteq \sum_{j=1}^{l} a_j f_j \Big/ n$ 作为均值的近似值. 使 f_j 为最大的 a_j 就是**众数** (mode).

这些(总体的以及样本的)特征值中, 均值、中位数、众数三者, 都用来表示分布中心的大概位置. 而方差、标准差、极差则用来表示分布的散布程度. 一般地说,峭度越大,分布的中心越接近众数. 超出率是峭度与正态分布的峭度 3 比较的产物. 正的偏斜度越大,一般说来,分布的尾巴越伸向右侧. 偏斜度为负时, 与此相反,尾巴伸向左侧.

【二维的情形】 令 P_0 为二维总体分布, $(\boldsymbol{R}^2, \mathfrak{B}^2, P_0)$ 为二维概率空间, $(X_1, \cdots, X_n)$ $(X_i=(U_i, V_i))$ 为来自同分布 P_0 的大小为 n 的随机样本. 此时, 如前面那样, 可以定义 U_i 和 V_i 的边缘分布[†]的总体特征值, 以及 $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ 和 $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ 的样本特征值.

此外,作为表示 U_i 与 V_i 的相关的尺度,定义 U_i 和 V_i 的**总体协方差** (population covariance) 为 $\iint (u-\mu_{(1)})(v-\mu_{(2)})dF(u, v)$ 以及**总体相关系数** (population correlation coefficient) 为 (协方差)$/\sigma_{(1)}\sigma_{(2)}$, 其中 $F(u, v)$ 是 U_i 和 V_i 的联合分布函数, $\mu_{(1)}$ 和 $\mu_{(2)}$ 分别是 U_i 和 V_i 的总

体均值，$\sigma_{(1)}$ 和 $\sigma_{(2)}$ 是总体标准差．作为与此相对应的样本特征值，人们用 $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$ 和 $(V_1, V_2, \cdots, V_n)$ 的**样本协方差** (sample covariance)

$$\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U})(V_i-\bar{V})\Big/n$$

以及**样本相关系数** (sample correlation coefficient)

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U})(V_i-\bar{V})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(V_i-\bar{V})^2}},$$

其中

$$\bar{U}=\sum_{i=1}^{n}U_i\Big/n,\qquad \bar{V}=\sum_{i=1}^{n}V_i\Big/n.$$

当协方差从而相关系数为正时，一般地说 U_i，V_i 之中的一个值大时，另一个的值也大；当协方差从而相关系数为负时，情况恰好相反．相关系数的值在 -1 与 $+1$ 之间．当相关系数等于 -1 或 $+1$ 时，U_i 与 V_i 以概率 1 成立着线性关系．当总体相关系数为 0 时，称 U_i 与 V_i 是**不相关的** (uncorrelated)．如果两个随机变量是相互独立的，则它们是互不相关的，但其逆并不真．

$f(v)=E(U_i|V_i=v)$ 叫做 U 对 V 的**回归函数** (regression function)．

关于 X_i 是更高维变量的情形，→ 多元分析；关于总体分布与统计量分布之间的关系，→ 样本分布．

【统计量的一般性质】 考虑最一般的样本空间与统计量，亦即考虑由可测函数 t 定义的从可测空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 到可测空间 $(\mathscr{Y}, \mathfrak{C})$ 的统计量 $Y=t(X)$．因为 t 是可测的，可从 X 的分布 P 由 $P^Y(C)=P(t^{-1}(C))$ $(C\in\mathfrak{C})$ 诱导出 $(\mathscr{Y}, \mathfrak{C})$ 上的概率测度 P^Y．这个 P^Y 叫做 Y 的样本分布†．t 诱导出 $\mathfrak{B}$ 的 σ 子代数 $\mathfrak{A}(t)=\{B\mid B\in\mathfrak{B}, t(B)\in\mathfrak{C}\}$．以后字母 $\mathfrak{A}$ 通常表示 $\mathfrak{B}$ 的 σ 子代数．

关于两个 σ 子代数 $\mathfrak{A}_1$ 和 $\mathfrak{A}_2$，记号 $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_2[\mathscr{P}]$ 意味着对 $\mathfrak{A}_1$ 的任意元素 A_1，必存在 $\mathfrak{A}_2$ 的元素 A_2，使对所有的 $P_\theta\in\mathscr{P}$，满足 $P_\theta((A_1-A_2)\cup(A_2-A_1))=0$．反过来，当 $\mathfrak{A}_1\supset\mathfrak{A}_2[\mathscr{P}]$ 也成立时，记作 $\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_2[\mathscr{P}]$．设两个统计量 t_1 和 t_2 的值域分别为 $(\mathscr{Y}_1, \mathfrak{C}_1)$ 和 $(\mathscr{Y}_2, \mathfrak{C}_2)$．此时，我们称 t_1 几乎确实地是 t_2 的函数，并写做 $t_1\subset t_2[\mathscr{P}]$，如果存在一个由 $(\mathscr{Y}_2, \mathfrak{C}_2)$ 到 $(\mathscr{Y}_1, \mathfrak{C}_1)$ 上的可测变换 $y_1=h(y_2)$ 和一个 $N\in\mathfrak{B}$，使得对所有的 $P_\theta\in\mathscr{P}$，有 $P_\theta(N)=0$，且在 $\mathscr{X}-N$ 上有 $t_1(x)=h(t_2(x))$ 的话．当 $t_1\supset t_2[\mathscr{P}]$ 也成立时，写做 $t_1=t_2[\mathscr{P}]$．若 $t_1\subset t_2[\mathscr{P}]$，则 $\mathfrak{A}(t_1)\subset\mathfrak{A}(t_2)[\mathscr{P}]$．

在后面，凡是依 $\mathfrak{A}(t)$ 对统计量 t 定义的各概念，除非特别声明，都适用于一般的 $\mathfrak{A}$（即使不是由统计量诱导的 $\mathfrak{A}$）．

我们称统计量 t 对 $\mathscr{P}$ 是**充分的** (sufficient)，如果对任意的 $B\in\mathfrak{B}$，存在一个与 θ 无关的 $\mathfrak{A}(t)$ 可测函数 $\varphi_B(x)=P(B\mid\mathfrak{A})$（条件概率†），亦即对所有的 $A\in\mathfrak{A}(t)$ 和所有的 $P_\theta\in\mathscr{P}$，成立着

$$P_\theta(A\cap B)=\int_A\varphi_B(x)dP_\theta(x).$$

若 $\mathscr{P}\supset\mathscr{P}'$，且 t 对 $\mathscr{P}$ 是充分的，则 t 对 $\mathscr{P}'$ 也是充分的．一个统计量 t 是**必要的** (necessary)，当且仅当对所有的充分统计量 t_0，有 $t\subset t_0[\mathscr{P}]$．$\mathfrak{B}$ 的一个 σ 子代数 $\mathfrak{A}$ 是**必要的** (necessary)，如果对所有的充分 σ 子代数 $\mathfrak{A}_0$，有 $\mathfrak{A}\subset\mathfrak{A}_0[\mathscr{P}]$．我们称 t 是**完备的** (complete)，如果对 $\mathfrak{A}(t)$ 可测可积函数 $\varphi(x)$，$\int\varphi(x)dP_\theta(x)=0$ 对所有的 $P_\theta\in\mathscr{P}$ 成立蕴涵着 $P_\theta(\{x\mid\varphi(x)\neq 0\})=0$ 对所有的 $P_\theta\in\mathscr{P}$ 成立．当对有界函数 $\varphi(x)$，上述命题成立时，称统计量 t 是**有界完备的** (boundedly complete)．对两个统计量 t_1 和 t_2，若 $\mathfrak{A}(t_1)\subset\mathfrak{A}(t_2)$，则 t_2 的（有界）完备性蕴涵 t_1 的（有界）完备性．若 t_1 是（有界）完备且充分的，以及 t_2 是必要且充分的，则 $\mathfrak{A}(t_1)=\mathfrak{A}(t_2)[\mathscr{P}]$．

【受控的概率分布族】 所有属于 $\mathscr{P}$ 的 P_θ 对 $\mathfrak{B}$ 上的一个 σ 有限测度† λ 为绝对连续时，称 $\mathscr{P}$ 为一个**受控的** (dominated) 概率分布族．当 $\mathscr{P}$ 为受控时，每个 P_θ 根据 Radon-Nikodym 定理†都有关于 λ 的密度 $f_\theta(x)=dP_\theta/d\lambda$．此外，$\mathscr{P}$ 有一个可数子族 $\mathscr{P}_0=\{P_{\theta_1}, P_{\theta_2}, \cdots\}$，使

得对任意的 $N\in\mathfrak{B}$, $P_{\theta_k}(N)=0$ 对所有的 $P_{\theta_k}\in\mathscr{P}_0\,(k=1,2,\cdots)$ 成立，蕴涵着 $P_\theta(N)=0$ 对所有的 $P_\theta\in\mathscr{P}$ 成立. 所有属于 $\mathscr{P}$ 的 P_θ 也都关于 $\lambda_0=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k P_{\theta_k}$ 为绝对连续，$dP_\theta/d\lambda_0=\bar{f}_\theta(x)$.

对受控的 $\mathscr{P}$，作为判别统计量(以及 σ 代数)的充分性的条件,给出下面的分解定理. **分解定理** (factorization theorem): t 是充分统计量的充分必要条件是: 对每个 θ 存在一个 $\mathfrak{A}(t)$ 可测的(即 t 的函数) $g_\theta(x)\geqslant 0$, 并且存在一个与 θ 无关的 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $h(x)\geqslant 0$, 使得

$$f_\theta(x)=g_\theta(x)h(x)$$

关于 $P_\theta\,(\theta\in\Theta)$ 对几乎所有的 x 成立.

假定 $\mathscr{P}$ 是受控的,并且统计量 t 满足如下条件: 对 Θ 的任意两点 θ' 和 θ'', t 对由两个分布 $P_{\theta'}$ 和 $P_{\theta''}$ 所成的族 $\{P_{\theta'},P_{\theta''}\}$ 是充分的. 这时, t 对 $\mathscr{P}$ 全体也是充分的.

在统计推断和判决问题中，知道充分统计量的值，往往跟知道样本值 X 本身具有完全相同的效果. 同理，只考虑关于充分 σ 代数为可测的统计量往往是足够的(→ 统计判决函数，统计估计,假设检验). 通常存在许多充分统计量，要使用其中形状尽可能简单的那些. 最复杂的充分统计量是 $t(x)=x$, $\mathscr{Y}=\mathscr{X}$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{B}$; 而最简单的是**必要充分统计量** (necessary and sufficient statistic) (也叫做**最小充分统计量** (minimal sufficient statistic)). 对受控的 $\mathscr{P}$, 存在一个必要充分 σ 代数 $\mathfrak{A}^*$, 它由形如 $B_\theta(z)=\{x\,|\,\bar{f}_\theta(x)<z\}$ $(\theta\in\Theta,\ 0<z<\infty)$ 的集合的全体生成. 若 $\mathscr{P}$ 还关于距离

$$d(P_\theta,P_{\theta'})=\sup_{B\in\mathfrak{B}}|P_\theta(B)-P_{\theta'}(B)|$$

是可分的(或者说，若 $\mathfrak{B}$ 是由可数个集所生成的族), 则必要充分统计量存在,求法如下. 取 $\mathscr{P}$ 的可数稠密子族 $\mathscr{Q}=\{Q_{\theta_1},Q_{\theta_2},\cdots\}$, 记 $dQ_{\theta_i}/d\lambda=k_{\theta_i}(x)$. 在 $\mathscr{X}$ 上引进如下的等价关系~: 若对 $\mathscr{X}\ni x,x'$, 存在常数 $c(x,x')$, 使 $k_{\theta_i}(x)=c(x,x')k_{\theta_i}(x')$ 或者 $k_{\theta_i}(x')=c(x,x')k_{\theta_i}(x)$ 对所有的 i 成立时, 记作 $x\sim x'$. 若 t^* 满足 $x\sim x'\Leftrightarrow t^*(x)=t^*(x')$, 则统计量 t^* 是必要充分的. 例如, 令 $dQ_{\theta_i}/d\lambda_0=\bar{f}_{\theta_i}(x)$, 则 $t^*(x)=\{\bar{f}_{\theta_1}(x),\bar{f}_{\theta_2}(x),\cdots\}$ 是这种统计量之一. 那末, 可取 $\{t^*(x)\,|\,x\in\mathscr{X}\}$ 当作 $\mathscr{Y}$, 并令 $\mathfrak{C}=\{C\,|\,C\subset\mathscr{Y},\ t^{*-1}(C)\in\mathfrak{B}\}$ (→ 统计判决函数).

当 $\mathscr{P}$ 为受控时, 若 $\mathfrak{A}_1$ 是充分的, 且 $\mathfrak{A}_1\subset\mathfrak{A}_2[\mathscr{P}]$, 则 $\mathfrak{A}_2$ 也是充分的. 由此推出, 当一个必要充分统计量 t^* 存在时, 1) t 是必要的 $\Leftrightarrow t\subset t^*[\mathscr{P}]$; 2) t 是充分的 $\Leftrightarrow t\supset t^*[\mathscr{P}]$; 3) t 是必要充分的 $\Leftrightarrow t=t^*[\mathscr{P}]$ 成立. 同样的结果对 σ 代数也成立.

如果 $\mathscr{P}$ 是受控的, $X_1,\cdots,X_n$ 是在样本空间 $\mathscr{X}=\boldsymbol{R}^n$ 上具有同分布相互独立的随机变量, 并且每个 $P_\theta\in\mathscr{P}$ 对集合 $\mathscr{X}$ 的点 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 的分量的所有置换为不变, 则顺序统计量是充分统计量. 若 $\mathscr{P}$ 充分大,则顺序统计量也是完备的. 例如,我们有如下定理:如果每个 P_θ^0 (P_θ 在 $\mathfrak{B}_0\subset\mathfrak{B}^1$ 上的分量, $\theta\in\Theta$) 关于 $\boldsymbol{R}$ 上的 Lebesgue 测度 l 是绝对连续的, 而且 $\{P_\theta^0\,|\,\theta\in\Theta\}$ 包含所有使得 $g_\theta(z)=dP_\theta^0/dl$ 在 $\mathscr{X}_0\subset\boldsymbol{R}$ 中互不相交的有限个区间内为常数的概率测度 P_θ^0, 那末顺序统计量是完备的. 对离散分布,也有同样结果.

我们称 θ 是一个**选择参数** (selection parameter), 如果 $f_\theta(x)=c(\theta)\chi_{E_\theta}(x)h(x)$, 其中 $h(x)$ 是正的 $\mathfrak{B}$ 可测函数, $\chi_{E_\theta}(x)$ 是集合 $E_\theta\in\mathfrak{B}$ 的示性函数, $c(\theta)$ 是依赖于 θ 的常数. 这里, θ 只影响 $f_\theta(x)>0$ 的范围(亦即 E_θ), 而在本质上不影响 $f_\theta(x)$ 的函数形式. 这时,一个必要和充分统计量由 $t^*(x)=\bigcap\{E_\theta\,|\,E_\theta\ni x,P_\theta\in\mathscr{Q}\}$ 给出. 这里,取形如展式右边所给集合空间为 $\mathscr{Y}$, 且令 $\mathfrak{C}=\{C\,|\,C\subset\mathscr{Y},\ t^{*-1}(C)\in\mathfrak{B}\}$. 我们称 $t^*(x)$ 为**选择统计量** (selection statistic). 举例如下.

i) 均匀分布[†]. 设 $\Theta=\{\theta\,|\,\theta=(\alpha,\beta),\ -\infty<\alpha<\beta<\infty\}$, $\mathscr{X}_0=\boldsymbol{R}$, P_θ^0 是 (α,β) 上的均匀分布, 以及 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是以 P_θ^0 为分布的大小为 n 的随机样本. 那末,

$$E_\theta=\{x\,|\,\alpha\leqslant\min_i x_i\leqslant\max_i x_i\leqslant\beta\}$$

和

$$f_\theta(x) = (\beta - \alpha)^{-n} \cdot \chi_{E_\theta}(x).$$

若令

$$t(x) = (\min_i x_i,\ \max_i x_i),$$

$\mathscr{Y} = \boldsymbol{R}^2$ 和 $\mathfrak{C}$ 是 Borel 集的全体，则 $t(x)$ 与选择统计量 $t^*(x)$ 之间成立着 $t(x) = t^*(x)[\mathscr{P}]$. 从而，$t(x)$ 本身是必要充分统计量.

ii) 指数分布†. 设 $\Theta = (-\infty, \infty)$, $\mathscr{X}_0 = \boldsymbol{R}$, $g_\theta(z) = \alpha e^{-\alpha(z-\theta)}$ $(z \geqslant \theta)$; $= 0$ $(z < \theta)$ (其中 α 是已知常数)，以及 $X = (X_1, \cdots, X_n)$ 是以 g_θ 为分布密度的大小为 n 的随机样本，则

$$E_\theta = \{x \mid \theta \leqslant \min_i x_i\}$$

和

$$f_\theta(x) = \alpha^n e^{n\alpha\theta} \chi_{E_\theta}(x) e^{-\alpha \Sigma x_i}.$$

设 $t(x) = \min_i x_i$, 并令 $t^*(x)$ 为选择统计量，则有 $t^*(x) = t(x)[\mathscr{P}]$, 因而 $t(x)$ 是必要充分统计量. 若令 $\Theta = \{(\alpha, \theta) \mid 0 < \alpha < \infty, -\infty < \theta < \infty\}$, 则

$$t(x) = \left\{\min_i x_i,\quad \sum_{i=1}^n x_i\right\}$$

是必要充分统计量.

【指数型分布族】 一个受控的 $\mathscr{P}$ 叫做**指数型分布族** (exponential family of distributions), 当且仅当 $f_\theta(x) = dP_\theta / d\lambda$ 能表为如下形式:

$$(1) \qquad f_\theta(x) = \exp\left\{\sum_{j=1}^k s_j(x)\alpha_j(\theta) + \alpha_0(\theta) + s_0(x)\right\},$$

$$x \in \mathscr{X}, \quad \theta \in \dot{\Theta},$$

其中 $s_j(x)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测的实值函数，$\alpha_j(\theta)$ $(j = 0, 1, \cdots, k)$ 是依赖于 θ 的常数.

如果存在一个不与样本本身或顺序统计量等价而更为简单的充分统计量，那末在适当的正则条件下，$\mathscr{P}$ 为指数型分布族. 下面举出条件的一例. 定理: 设 X 是从总体分布为 P_θ^0 的一维概率空间 $(\mathscr{X}_0, \mathfrak{B}_0, P_\theta^0)$ 抽出的大小为 n 的随机样本，其中 $\mathscr{X}_0$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的(有限或无限的)区间，$\mathfrak{B}_0$ 是 Borel 集的全体. 设 l 是 Lebesgue 测度. 设 P_θ^0 关于 l 为绝对连续的，$g_\theta(z) = dP_\theta^0/dl$ 在 $\mathscr{X}_0$ 上大于某一正数，并且关于 $\mathscr{X}_0$ 上的 z 为连续可微的. 再设存在一个有如下性质的充分统计量 $t(x)$: 对 $\mathscr{X}(\subset \boldsymbol{R}^n)$ 的任何开子集 B 和 λ 零测集 N, 必在 $B - N$ 中存在两点 $x \neq x'$ 使 $t(x) \neq t(x')$. 那末 $\mathscr{P}$ 是指数型分布族，并且 (1) 中的 k 小于 n ([4]). 对 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 不是同分布的情形，也得到了同样的结果 ([5]).

由上述必要和充分统计量的求法明显地看出，在指数型分布族 (1) 中，统计量 $t(x) = (s_1(x), \cdots, s_k(x))$ 是充分的;而若 $\alpha_1(\theta), \cdots, \alpha_k(\theta)$ 为线性独立，则此统计量又是必要的. 若 $\{(\alpha_1(\theta), \cdots, \alpha_k(\theta)) \mid \theta \in \Theta\}$ 包含一个 k 维区间，则 $t(x)$ 是完备的. 此外，$t(x)$ 的分布是指数型. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为相互独立且具有相同的指数型分布，则 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布也是指数型，其逆也成立. 分布族 (1) 是 Pólya 型†分布族的特殊情况，下列各种分布都能表为 (1) 的形状. 在下面，设 X 是各分布的大小为 n 的随机样本，$f_\theta(x)$ 在 iii), iv), v) 中是关于 Lebesgue 测度的密度，以及在 vi), vii) 中是关于各点加权为 1 的测度的密度 (→ 公式 22.)

iii) 正态分布† $N(\mu, \sigma^2)$, $\mathscr{X}_0 = (-\infty, \infty)$.

$$f_\theta(x) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\frac{1}{2\sigma^2} + \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{n\mu^2}{2} - n\log\sigma - \frac{n}{2}\log 2\pi\right).$$

iv) Γ 分布† $\Gamma(p, \sigma)$, $\mathscr{X}_0 = (0, \infty)$.

$$f_\theta(x) = \exp\left((p-1)\sum_{i=1}^n \log x_i - \frac{1}{\sigma}\sum_{i=1}^n x_i - np\log\sigma - n\log\Gamma(p)\right).$$

v) 指数分布† $e(\mu, \sigma)$, $\mathscr{X}_0 = (\mu, \infty)$.

$$f_\theta(x) = \exp\left(-\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\frac{1}{\sigma} - n\log\sigma + n\frac{\mu}{\sigma}\right).$$

vi) 二项分布† $Bin(N, p)$, $\mathscr{X}_0 = \{0, 1, 2, \cdots, N\}$.

$$f_\theta(x) = \exp\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\log\frac{p}{1-p} + nN\log(1-p) - \sum_{i=1}^{n}\log\binom{N}{x_i}\right).$$

vii) Poisson 分布† $P(\lambda)$, $\mathscr{X}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

$$f_\theta(x) = \exp\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\log\lambda - \sum_{i=1}^{n}\log(x_i!) - n\lambda\right).$$

【辅助统计量】 统计量 t 叫做**辅助统计量** (ancillary statistic), 如果对 $\mathfrak{A}(t)$ 的所有元素 A, $P_\theta(A)$ 与 θ 无关, 也就是说 t 的样本分布与 θ 无关. 统计量为辅助统计量的充分条件是它与某一充分统计量独立. 反过来, 辅助统计量与所有的有界完备充分统计量独立.

【不变统计量】 假定已分别给出 $\mathscr{X}$ 和 Θ 上的一对一可测变换群 G 和 $\bar{G}$. 还假定已给一个由 G 到 $\bar{G}$ 的同态†对应 $g \to \bar{g}$ 满足 $P_\theta(g^{-1}B) = P_{\bar{g}\theta}(B)$. 那末, 若 $\bar{G}$ 是可迁的†, 则存在 Θ 的一个固定元素 θ_0, 它可通过 $\bar{G}$ 的一个元素 $\bar{g}$ 变到任意的 $\theta \in \Theta$. 这时称 θ 为**变换参数** (transformation parameter). 特别, 若 $\Theta = \boldsymbol{R}$, 且在随机样本中, 对任意的 $B \in \mathfrak{B}$, 有 $P_\theta(B) = P_0(B - \theta)$, 其中 $B - \theta = \{x \mid (x_1 + \theta, \cdots, x_n + \theta) \in B\}$, 则称 θ 为**位置参数** (location parameter). 若 $\Theta = (0, \infty)$, 且 $P_\theta(B) = P_1(B/\theta)$, 其中 $B/\theta = \{x \mid (\theta x_1, \cdots, \theta x_n) \in B\}$, 则称 θ 是**尺度参数** (scale parameter). 如果 θ 是这两种参数的组合, 使得 $\theta = (\alpha, \beta)$ $(-\infty < \alpha < \infty, 0 < \beta < \infty)$, $P_\theta(B) = P_{\theta_0}((B - \alpha)/\beta)$ (令 $\theta_0 = (0, 1)$), 那末若 $\mathscr{P}$ 为指数型分布族, 则 (1) 可以写成

$$g_\theta(z) = \frac{dP_\theta^0}{dl} = \frac{1}{\beta}\exp\left(\sum_{j=0}^{m} k_j\left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)^j\right),$$

此处 k_j $(j = 0, 1, \cdots, m)$ 为常数.

在一般的变换群 G 中, 统计量 $t(x)$ 对所有的 $g \in G$ 满足 $t(gx) = t(x)$ $(x \in \mathscr{X})$ 时, 称 t 为关于 G 的**不变统计量** (invariant statistic). 如果不变统计量 t 满足下列条件: 对 $t(x) = t(x')$, 存在一个 $g \in G$, 使 $x = gx'$, 那末称 t 关于 G 是**最大不变的** (maximal invariant). 如果 t_0 关于 G 为最大不变的, 那末 t 关于 G 为不变的充分必要条件是: 若 $t_0(x) = t_0(x')$, 则 $t(x) = t(x')$.

【参】 [1] D. A. S. Fraser, Nonparametric methods in statistics, John Wiley, 1957; [2] E. L. Lehmann, Testing statistical hypotheses, John Wiley, 1959; [3] R. R. Bahadur, Sufficiency and statistical decision functions, Ann. Math. Statist., **25** (1954), 423—462; [4] L. Brown, Sufficient statistics in the case of independent random variables, Ann. Math. Statist., **35** (1964), 1456—1474; [5] E. W. Barankin-A. P. Maitra, Generalizations of the Fisher-Darmois-Koopman-Pitman theorem on sufficient statistics, Sankhyā, Ser. A, **25** (1963), 217—244; [6] S. S. Wilks, Mathematical statistics, John Wiley, 1962.

样本分布 [英 sampling distribution 法 distribution des échantillons 德 Stichprobenverteilung 俄 распространение образчиков 日 標本分布] 为了进行统计推断†, 需要知道其中出现的统计量†的概率分布 (→ 统计量). 一般地说, 统计量的概率分布叫做**样本分布**. 一组服从相同分布 F 的互相独立†的随机变量† $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 叫做来自分布 F 的**随机样本**. 这里主要对来自正态分布的随机样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 讨论统计量 $Y = f(X_1, \cdots, X_n)$ 的样本分布. 当分布为一维时, 统计量 Y 的例子是样本均值†、样本方差†等样本, $X_1, \cdots, X_n$ 的一次型或二次型、它们的比和顺序统计量†等等; 而分布为多维情形的 Y 的例子是样本均值向量†、样本协方差矩阵†和关于这些向量或矩阵的特征值等等. 下面, 均值为 μ 和方差为 σ^2 的正态分布†记作 $N(\mu, \sigma^2)$; 均值向量为 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵为 Σ 的 p 维正态分布†记作 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ (→ 公式 22).

【来自一维正态分布的样本】 如果随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 互相独立地分别服从 $N(\mu_1, \sigma_1^2), \cdots, N(\mu_n, \sigma_n^2)$, 那末正态分布 X_i 的线性型 $\sum_i a_i X_i$ 服从 $N\left(\sum_i a_i\mu_i, \sum_i a_i^2\sigma_i^2\right)$. 特别, 当 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的随

机样本时，样本均值 $\bar{X}=\sum_i X_i\Big/n$ 服从$N(\mu,\sigma^2/n)$. 关于多维正态分布，上述结果同样成立.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态分布 $N(0,1)$ 的随机样本，则统计量 $Y=\sum_i X_i^2$ 的分布叫做**自由度** (degree of freedom) 为 n 的 **χ^2 分布** (chi square distribution). 其密度函数(以下，只给出密度为正的范围)为

$$f_n(y)=2^{-n/2}(\Gamma(n/2))^{-1}y^{n/2-1}e^{-y/2},\quad 0<y<\infty,$$

其中 Γ 是 Γ 函数[†]. 这个分布记作 **$\chi^2(n)$分布**.

$Y=\sum_{i=1}^n(X_i+\mu_i)^2$ 的分布只依赖于 n 和 $\lambda=\sum_{i=1}^n\mu_i^2$，其密度函数为

$$\begin{aligned}f_{n,\lambda}(y)&=\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k\frac{1}{k!}f_{n+2k}(y)\\&=e^{-\lambda/2}\,{}_0F_1(n/2;\lambda y/4)f_n(y),\\&\qquad 0<y<\infty,\end{aligned}$$

此处 f_{n+2k} 和 f_n 是 χ^2 分布的密度函数，${}_0F_1$是推广的超几何函数[†]. 这个分布叫做**自由度**为 n 和**非中心参数** (non-centrality parameter) 为 λ 的**非中心 χ^2 分布** (non-central chi square distribution)，并记作 **$\chi^2(n,\lambda)$ 分布**. 非中心 χ^2 分布具有如下的再生性[†]：若 $Y_1,\cdots,Y_k$ 的分布互相独立地分别服从 $\chi^2(n_1,\lambda_1),\cdots,\chi^2(n_k,\lambda_k)$，则 $\sum_i Y_i$ 的分布服从 $\chi^2\left(\sum_i n_i,\ \sum_i\lambda_i\right)$. 我们还有 **Cochran 定理**：如果 $X_1,\cdots,X_n$ 互相独立地分别服从 $N(\mu_1,1),\cdots,N(\mu_n,1)$，并对 $X_1,\cdots,X_n$ 的 k 个二次型统计量 $Q_m=\sum_i\sum_j a_{ij}^{(m)}X_iX_j\ (m=1,\cdots,k)$，矩阵 $A_m=(a_{ij}^{(m)})$ 满足 $A_1+\cdots+A_k=I$ (单位矩阵)，A_m 的秩[†]为 r_m，那末，$Q_1,\cdots,Q_k$ 互相独立地分别服从自由度为 $r_1,\cdots,r_k$ 的非中心 χ^2 分布的充分必要条件是 $r_1+\cdots+r_k=n$. 特别，当 $\mu_i=0$ 时，这些二次型是 χ^2 分布. 这个定理包含了 χ^2 分布的再生性.

若随机变量 X 和 Y 互相独立地分别服从 $N(\delta,1)$ 和 $\chi^2(n)$，则 $T=X/\sqrt{Y/n}$ 的分布叫做**自由度**为 n 和**非中心参数**为 δ 的**非中心 t 分布** (non-central t-distribution)，其密度函数为

$$\begin{aligned}f_{n,\delta}(t)&=\sum_{k=0}^\infty e^{-\delta^2/2}\delta^k\frac{2^{k/2}}{k!}\frac{\Gamma((n+k+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\\&\quad\times\frac{(t/\sqrt{n})^k}{(1+t^2/n)^{(n+k+1)/2}},\\&\qquad -\infty<t<\infty.\end{aligned}$$

这个分布记作 **$t(n,\delta)$ 分布**. 特别，当 $\delta=0$ 时，这个分布叫做**自由度**为 n 的 **t 分布** (t-distribution)，其密度函数为

$$f_n(t)=\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(n/2)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2},\quad -\infty<t<\infty.$$

这个分布记作 **$t(n)$ 分布**.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，则样本均值 $\bar{X}$ 和样本方差

$$S^2=\sum_i(X_i-\bar{X})^2\Big/(n-1)$$

为互相独立，并且 $\bar{X}$ 服从 $N(\mu,\sigma^2/n)$ 以及 $(n-1)S^2/\sigma^2$ 服从自由度为 $n-1$ 的 χ^2 分布. 因此，$T=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)/S$ (μ_0 是常数，S 是 S^2 的正的平方根)服从自由度为 $n-1$ 和非中心参数为 $\sqrt{n}(\mu-\mu_0)/\sigma$ 的非中心 t 分布；特别，当 $\mu=\mu_0$ 时，T 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布.

设随机变量 X 和 Y 互相独立地分别服从 $\chi^2(m,\lambda)$ 和 $\chi^2(n)$，则 $Z=(X/m)/(Y/n)$ 的分布叫做**自由度**为 (m,n) 和**非中心参数**为 λ 的**非中心 F 分布** (non-central F-distribution). 特别，当 $\lambda=0$ 时，这个分布叫做**自由度**为 (m,n) 的 **F 分布** (F-distribution)，并记作 **$F(m,n)$ 分布**. 设这些分布的密度函数为 $f_{m,n,\lambda}$ 和 $f_{m,n}$，则对 $0<z<\infty$ 分别有

$$f_{m,n}(z)=\frac{(m/n)^{m/2}}{B(m/2,n/2)}\frac{z^{m/2-1}}{(1+mz/n)^{(m+n)/2}},$$

$$f_{m,n,\lambda}(z)=\sum_{k=0}^\infty e^{-\lambda/2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k\frac{1}{k!}$$

$$\times \frac{(m/n)^{m/2+k}}{B(m/2+k, n/2)} \frac{z^{m/2+k-1}}{(1+mz/n)^{(m+n)/2+k}}$$

$$= e^{-\lambda/2} {}_1F_1\left(\frac{m+n}{2}; \frac{m}{2}; \frac{\lambda}{2} \frac{mz/n}{1+mz/n}\right) f_{m,n}(z),$$

此处 B 是 B 函数†，${}_1F_1$ 是合流型超几何函数†.

设随机变量 X 服从自由度为 (m, n) 的 F 分布，则 $Z = (\log X)/2$ 的分布叫做**自由度**为 (m, n) 的 **z 分布** (z-distribution). 这个分布记作 **$z(m, n)$ 分布**. 其密度函数由

$$\frac{2(m/n)^{m/2}}{B(m/2, n/2)} \frac{e^{mz}}{(1+me^{2z}/n)^{(m+n)/2}}$$

给出，此处 $-\infty < z < \infty$.

【来自多维正态分布的样本】 设以随机变量为分量的 p 维列向量 $\boldsymbol{X}$ 服从正态分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$，其中 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \cdots, \mu_p)'$, $\Sigma = (\sigma_{ij})$ $(i, j = 1, \cdots, p)$，此处"$'$"表示转置矩阵. 那末，若 A 是一个 $m \times p$ 型常数矩阵，则 $A\boldsymbol{X}$ 服从正态分布 $N(A\boldsymbol{\mu}, A\Sigma A')$.

设 n 个 p 维列向量 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自 $N(\mathbf{0}, \Sigma)$ 的随机样本，$\mathbf{X} = \|\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n\|$ 是 $p \times n$ 型矩阵，那末，$\mathbf{W} = \mathbf{XX}'$ 的分布叫做协方差矩阵为 Σ 和**自由度**为 n 的 p 维 **Wishart 分布** (Wishart's distribution)，并记作 $\boldsymbol{W_p(\Sigma, n)}$ 或简单地记作 $\boldsymbol{W(\Sigma, n)}$. 由于 $\mathbf{W} = (W_{ij})$ 是对称矩阵，不同的随机变量 W_{ij} $(i \leqslant j)$ 的数目是 $p(p+1)/2$. 这个分布是 χ^2 分布推广到多维的情形. 当 $n \geqslant p$ 时，其密度函数为

$$f_{\Sigma,n}(W) = 2^{-pn/2}(\Gamma_p(n/2))^{-1}|\Sigma|^{-n/2} \times \exp(-\mathrm{tr}\Sigma^{-1}W/2)|W|^{(n-p-1)/2}.$$

此处 $W > 0$（这意味着 W 为正定矩阵†），Γ_p 是多变量 Γ 函数，其定义为

$$\Gamma_p(a) = \pi^{p(p-1)/4}\prod_{i=1}^{p}\Gamma\left(a - \frac{i-1}{2}\right), \quad a > \frac{p-1}{2}.$$

当 $n < p$ 时，Wishart 分布是**奇异的** (singular)，没有密度函数.

设 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 互相独立地分别服从 $N(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma), \cdots, N(\boldsymbol{\mu}_n, \Sigma)$，又设 $\mathbf{X} = \|\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n\|$, $M = \|\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_n\|$. 那末 $\mathbf{W} = \mathbf{XX}'$ 的分布叫做协方差矩阵为 Σ、**自由度**为 n 和**非中心参数矩阵**为 $\Lambda = MM'$ 的 p 维**非中心 Wishart 分布** (non-central Wishart's distribution). 当 $n \geqslant p$ 时，其密度函数为

$$\exp(-\mathrm{tr}\,\Sigma^{-1}\Lambda/2)\,{}_0F_1(n/2; \Sigma^{-1}\Lambda\Sigma^{-1}W/4) \times f_{\Sigma,n}(W), \quad W > 0,$$

此处 $f_{\Sigma,n}$ 是 $W(\Sigma, n)$ 分布的密度函数，${}_0F_q$ $(q = 0, 1)$ 是以矩阵为变量的推广的超几何函数†. 当 $n < p$ 时，这个分布是奇异的. 非中心 Wishart 分布如同非中心 χ^2 分布一样具有再生性; Cochran 定理还能够推广到这种多维的情形.

设 $\mathbf{W}$ 服从 Wishart 分布 $W(\Sigma, n)$ $(n \geqslant p)$. 那末，当 $\Sigma = I$ 时，$|\mathbf{W} - \lambda I| = 0$ 的根 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_p$ 的密度函数是

$$f_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) = Ce^{-\Sigma\lambda_i/2}\left(\prod_i \lambda_i\right)^{(n-p-1)/2} \times \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j),$$

此处 $C = \pi^{p^2/2}(2^{pn/2}\Gamma_p(p/2)\Gamma_p(n/2))^{-1}$. 对一般的 Σ，密度函数由

$$|\Sigma|^{-n/2}\,{}_0F_0(-\Sigma^{-1}/2, L)\,f_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$$

给出，此处 L 是以 $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ 为对角元素的对角矩阵.

设 $\boldsymbol{X}$ 和 $\mathbf{W}$ 互相独立地分别服从分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 和 $W(\Sigma, n)$ $(n \geqslant p)$ 时，那末 $T^2 = n\boldsymbol{X}'\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{X}$ 的分布叫做**自由度**为 n 和**非中心参数**为 $\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}$ 的**非中心 T^2 分布** (non-central T^2-distribution). $(n+1-p)T^2/np$ 服从自由度为 $(p, n+1-p)$ 和非中心参数为 $\boldsymbol{\mu}'\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}$ 的非中心 F 分布. 特别当 $\boldsymbol{\mu} = 0$ 时，后者成为 F 分布.

如果 $\boldsymbol{X}_1, \cdots, \boldsymbol{X}_n$ 是来自 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ 的随机样本，那末样本均值

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \sum_\alpha \boldsymbol{X}_\alpha \Big/ n$$

和样本协方差矩阵

$$\mathbf{S} = \sum_\alpha (\boldsymbol{X}_\alpha - \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_\alpha - \bar{\boldsymbol{X}})' \Big/ (n-1)$$

是互相独立的，而且 $\bar{\boldsymbol{X}}$ 服从 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma/n)$ 和 $(n-1)\mathbf{S}$ 服从 Wishart 分布 $W(\Sigma, n-1)$. 因此，对于 Hotelling 的 T^2 统计量†: $T^2 = n(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)'\mathbf{S}^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)$, $(n-p)T^2/p(n-1)$ 服从自由度为 $(p, n-p)$ 和非中心参数为 $n(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)'\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$ 的非中心 F 分布. 特别当 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ 时这个分布成为 F 分布.

如果 $(X_1, Y_1), \cdots, (X_n, Y_n)$ 是来自二维正态分布的随机样本，其总体相关系数† 为 ρ，那末样本相关系数

$$R = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\left(\sum_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2\right)^{1/2}}$$

的密度函数是

$$f_n(r) = (2^{n-3}/\pi(n-3)!)(1-\rho^2)^{(n-1)/2} \times (1-r^2)^{(n-4)/2} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma^2\left(\frac{n+k-1}{2}\right) \frac{(2\rho r)^k}{k!}.$$

此处 $-1 < r < 1$. 特别当 $\rho = 0$ 时，这密度函数成为

$$f_n(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma((n-2)/2)} (1-r^2)^{(n-4)/2},$$

这蕴涵着

$$T = \sqrt{n-2}\, R/\sqrt{1-R^2}$$

服从自由度为 $n-2$ 的 t 分布.

设已从 p 维正态分布抽出大小为 n 的随机样本，那末第一和第二分量之间在其余分量固定下的样本偏相关系数† $R_{12\cdot 3\cdots p}$ 的分布，可在上述样本相关系数的分布中，由 n 换成 $n-p+2$ 和由 ρ 换成对应的总体偏相关系数† $\rho_{12\cdot 3\cdots p}$ 后得到. 设 $R = R_{1(2\cdots p)}$ 为第一个分量与其余 $p-1$ 个分量之间的样本多重相关系数†, $\rho = \rho_{1(2\cdots p)}$ 为对应的总体多重相关系数†. 那末 R^2 的密度函数由

$$\left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-p}{2}\right)\right)^{-1}(1-\rho^2)^{(n-1)/2} \times r^{p-3}(1-r^2)^{(n-p-2)/2} \times \sum_{k=0}^{\infty}\left(k!\,\Gamma\left(\frac{p-1}{2}+k\right)\right)^{-1} \times \Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}+k\right)(\rho r)^{2k}$$

给出，此处 $0 < r^2 < 1$. 特别当 $\rho = 0$ 时，$(n-p)R^2/(p-1)(1-R^2)$ 服从自由度为 $(p-1, n-p)$ 的 F 分布.

【大样本理论】 到此为止所讨论的样本分布，都是样本的大小 n 为有限的所谓小样本理论. 当 n 充分大时，亦即在大样本理论中，由于可以应用中心极限定理†，样本分布变得简单，应用上也有很多的方便.

对于随机变量序列 $\{X_n\}$、常数序列 $\{\mu_n\}$ 和正数序列 $\{\sigma_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，若当 $n \to \infty$ 时 $(X_n - \mu_n)/\sigma_n$ 依分布收敛† 于正态分布 $N(0, 1)$，则称 X_n **渐近地** (asymptotically) 服从 $N(\mu_n, \sigma_n^2)$. 同样可以定义多变量的情形. 对一串正数 r_n，把 X_n/r_n 当 $n \to \infty$ 时依概率收敛† 于 0，仿照 Landau 的符号，写做 $X_n = o_p(r_n)$. 这样下面的定理是有用的：若 $X_n = a + o_p(r_n)$ (a 是常数，$r_n = o(1)$)，且实值函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 的邻域内 s 次连续可微†，则有

$$f(X_n) = \sum_{k=0}^{s} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(X_n - a)^k + o_p(r_n^s).$$

若 X_n 渐近地服从 $N(\mu, \sigma^2/n)$，$f(x)$ 在 $x = \mu$ 处可微，且 $f'(\mu) \neq 0$，则 $f(X_n)$ 渐近地服从 $N(f(\mu), (f'(\mu))^2\sigma^2/n)$. 对多变量的情形，若 $\boldsymbol{X}_n$ 渐近地服从 p 维正态分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma/n)$，实值函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\mu}$ 的邻域内连续可微，且 $\mathbf{c} = (\partial f/\partial x_1, \cdots, \partial f/\partial x_p)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\mu}}$ 不为零向量，则 $f(\boldsymbol{X}_n)$ 渐近地服从 $N(f(\boldsymbol{\mu}), \mathbf{c}\Sigma\mathbf{c}'/n)$.

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是从矩 $\nu_i = E(X^i)$ $(i = 1, \cdots, k)$ 为有限的一维分布抽出的随机样本，

$$a_i = \sum_{\alpha} X_\alpha^i \Big/ n \quad (i = 1, \cdots, k)$$

为其样本矩，则随机向量 $(a_1, \cdots, a_k)$ 当 $n \to \infty$ 时渐近地服从均值向量为 $(\nu_1, \cdots, \nu_k)$ 和协方差矩阵为 $n^{-1}(\sigma_{ij})$ $(\sigma_{ij} = \nu_{i+j} - \nu_i\nu_j)$ 的 k 维正态分布. 设

$$M_i = \sum_{\alpha} (X_\alpha - \bar{X})^i \Big/ n \quad (i = 2, \cdots, k)$$

为样本中心矩，

$$\mu_i = E(X - \nu_1)^i \quad (i = 2, \cdots, k)$$

为总体中心矩，则随机向量 $(\bar{X}, M_2, \cdots, M_k)$ 当 $n\to\infty$ 时渐近地服从均值向量为 $(\nu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k)$ 和协方差矩阵为 $n^{-1}(\sigma_{ij})$ 的 k 维正态分布，此处 $\sigma_{11}=\mu_2$, $\sigma_{1i}=\mu_{i+1}-i\mu_2\mu_{i-1}$, $\sigma_{ij}=\mu_{i+j}-i\mu_{i-1}\mu_{j+1}-j\mu_{i+1}\mu_{j-1}-\mu_i\mu_j+ij\mu_2\mu_{i-1}\mu_{j-1}$ $(i, j\geqslant 2)$.

服从自由度为 n 的 χ^2 分布的随机变量 χ_n^2，当 $n\to\infty$ 时渐近地服从 $N(n, 2n)$. 还有

$$\sqrt{2\chi_n^2}-\sqrt{2n-1}$$

渐近地服从 $N(0, 1)$. 后者近似较好. 自由度为 n 的 t 分布也当 $n\to\infty$ 时渐近地服从 $N(0, 1)$. 若 X_n 服从自由度为 (m, n) 的 F 分布，则 mX_n 当 $n\to\infty$ 时渐近地服从 $\chi^2(m)$ 分布. 若 X_n 服从二项分布† $Bin(n, p)$，则当 $n\to\infty$ 时 X_n 渐近地服从 $N(np, np(1-p))$，并且 $\text{Arcsin}\sqrt{X_n/n}$ 渐近地服从 $N(\text{Arcsin}\sqrt{p}, 1/4n)$. 这个变换叫做**反正弦变换** (arcsine transformation) 或**角变换** (angular transformation). 若 X_n 服从均值为 λ_n 的 Poisson 分布†，且 $\lambda_n\to\infty$ $(n\to\infty)$，则 X_n 渐近地服从 $N(\lambda_n, \lambda_n)$ 和 $\sqrt{X_n}$ 渐近地服从 $N(\sqrt{\lambda_n}, 1/4)$. 来自二维正态分布的大小为 n 的样本的样本相关系数 R，当 $n\to\infty$ 时，渐近地服从 $N(\rho, (1-\rho^2)^2/n)$ (ρ 是总体相关系数)，从而

$$z=(1/2)\log((1+R)/(1-R))$$

渐近地服从 $N((1/2)\log((1+\rho)/(1-\rho)), 1/n)$. 分布

$$N\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+\rho}{1-\rho}+\frac{\rho}{2(n-1)}, \frac{1}{n-3}\right)$$

的近似更好. 这个变换叫做 Fisher 的 **z 变换** (z-transformation).

【顺序统计量】 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为来自具有连续密度函数 $f(x)$ 的一维分布的随机样本，$X_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 为顺序统计量†. 其中的 p 个 $Y_1=X_{(\alpha)}, Y_2=X_{(\beta)}, \cdots, Y_{p-1}=X_{(\varepsilon)}$ 和 $Y_p=X_{(\eta)}$ 的联合密度函数，对 $-\infty<y_1<\cdots<y_p<\infty$，是

$$\frac{n!}{(\alpha-1)!(\beta-\alpha-1)!\cdots(\eta-\varepsilon-1)!(n-\eta)!}$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{y_1}f(x)dx\right)^{\alpha-1}\left(\int_{y_1}^{y_2}f(x)dx\right)^{\beta-\alpha-1}\cdots$$
$$\times\left(\int_{y_{p-1}}^{y_p}f(x)dx\right)^{\eta-\varepsilon-1}\left(\int_{y_p}^{\infty}f(x)dx\right)^{n-\eta}$$
$$\times f(y_1)\cdots f(y_p),$$

此处 $\alpha<\beta<\cdots<\varepsilon<\eta$. 对给定常数 $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_p<1$，若 $\alpha=r_1, \beta=r_2, \cdots, \eta=r_p$ 满足条件

$$r_i=n\lambda_i+o(\sqrt{n})\quad(i=1, \cdots, p)$$

且 $n\to\infty$，则随机向量 $(Y_1, \cdots, Y_p)$ 渐近地服从均值向量为 $(\xi_1, \cdots, \xi_p)$ 和协方差矩阵为 $n^{-1}(\sigma_{ij})$ $(\sigma_{ij}=\lambda_i(1-\lambda_j)/f(\xi_i)f(\xi_j);\ i\leqslant j)$ 的 p 维正态分布，此处 ξ_i 是总体的 λ_i 分位数：

$$\int_{-\infty}^{\xi_i}f(x)dx=\lambda_i,\quad f(\xi_i)\neq 0.$$

关于最大值 $X_{(n)}$ 的渐近分布，可以在较宽的条件下，选取适当的一串实数 $\{a_n\}$ 和一串正数 $\{b_n\}$，使得 $(X_{(n)}-a_n)/b_n$ 当 $n\to\infty$ 时依分布收敛于下列三个分布(函数)中的一个:

1) $F(x)=0,\quad x<0;\quad =\exp(-x^{-\alpha}),$ $x\geqslant 0$,

2) $F(x)=\exp(-(-x)^{\alpha}), x<0; =1,$ $x\geqslant 0$,

3) $F(x)=\exp(-e^{-x}), -\infty<x<\infty$,

此处 $\alpha>0$.

【U 统计量】 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是来自某分布的随机样本，$\varphi(x_1, \cdots, x_m)$ 是关于变量 $x_1, \cdots, x_m$ 的对称实值函数，则

$$U=\binom{n}{m}^{-1}\sum\varphi(X_{\alpha_1}, \cdots, X_{\alpha_m})$$

叫做 **U 统计量** (U-statistic)，式中 $\sum$ 是取自 $(1, 2, \cdots, n)$ 的所有组合 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 的求和. 假定均值 $E(\varphi(X_1, \cdots, X_m)^2)$ 为有限，并令 $\theta=E(\varphi(X_1, \cdots, X_m))$. 那末 U 的均值和方差由

$$E(U)=\theta,$$

$$V(U)=\binom{n}{m}^{-1}\sum_{i=1}^{m}\binom{m}{i}\binom{n-m}{m-i}\zeta_i$$

给出，此处 ζ_i 是 $\varphi(X_1, \cdots, X_m)$ 和 $\varphi(X_1, \cdots, X_i, X'_{i+1}, \cdots, X'_m)$ 的协方差，其中 $X'_{i+1}, \cdots, X'_m$ 是来自同一分布的附加样本，它们既互相独立，

又与 $(X_1, \cdots, X_m)$ 独立. 若 $\zeta_1 \neq 0$, 则 U 当 $n \to \infty$ 时渐近地服从正态分布 $N(\theta, m^2\zeta_1/n)$.

以上的结果能够推广到有几个总体和样本的情形. 设 $X_{11}, \cdots, X_{1n_1}; \cdots; X_{c1}, \cdots, X_{cn_c}$ 是来自 c 个总体的独立随机样本, 且实值函数 $\varphi(x_{11}, \cdots, x_{1m_1}; \cdots; x_{c1}, \cdots, x_{cm_c})$ 对每个 i 关于 $(x_{i1}, \cdots, x_{im_i})$ 为对称, 则称

$$U = \prod_{i=1}^{c} \binom{n_i}{m_i}^{-1} \cdot \sum \varphi(X_{1\alpha(11)}, \cdots, X_{1\alpha(1m_1)}; \cdots; X_{c\alpha(c1)}, \cdots, X_{c\alpha(cm_c)})$$

为 **U 统计量**, 式中 $\sum$ 是对每个 i 取自 $(1, 2, \cdots, n_i)$ 的所有组合 $(\alpha(i1), \cdots, \alpha(im_i))$ 的求和. U 的均值和方差可如一个样本的情形那样算出. 当样本大小 $n_1, \cdots, n_c$ 保持一定比例趋于 ∞ 时, U 渐近地服从正态分布. 此外, 几个 U 统计量的联合分布渐近地为多维正态分布.

【具有单调似然比的分布和 Pólya 型分布】 设 $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ 为样本空间†, $\{p_\theta(x) | \theta \in \Omega\}$ 为关于某一固定 σ 有限†测度的密度函数族. 那末 $p_\theta(x)$ —— 在观测值 x 固定下看做 θ 的函数 —— 叫做**似然函数** (likelihood function), 而它在点 θ 的值叫做该点的**似然** (likelihood). 我们说 $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ 上的分布族 $\mathscr{P} = \{p_\theta | \theta \in \Omega\}$ ($\Omega \subset \boldsymbol{R}^1$) 关于实值函数 $T(x)$ 具有**单调似然比** (monotone likelihood ratio), 是指对任意的 $\theta < \theta'$ ($\theta, \theta' \in \Omega$), 似然比 $p_{\theta'}(x)/p_\theta(x)$ 为 $T(x)$ 的非减函数. 当这个比是 $T(x)$ 的单调增加函数时, 我们说 $\mathscr{P}$ 关于 $T(x)$ 具有**狭义单调似然比**. 设 x 为实数, 且 $\partial^2 \log p_\theta(x)/\partial\theta\partial x$ 存在, 那末 $\mathscr{P}$ 关于 $T(x) = x$ 具有单调似然比的充分必要条件是 $\partial^2 \log p_\theta(x)/\partial\theta\partial x > 0$. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 是从具有单调似然比的分布抽出的随机样本, 且实值函数 $\phi(x_1, \cdots, x_n)$ 关于各分量为非减函数, 则均值 $E_\theta(\phi(X_1, \cdots, X_n))$ 是 θ 的非减函数.

若对所有的 $m = 1, 2, \cdots, n$ 和所有的实数 $x_1 < \cdots < x_m$ 及 $\theta_1 < \cdots < \theta_m$, 行列式 $\det(p_{\theta_i}(x_j))$ 为非负的, 则称 $\mathscr{P}$ 为 **Pólya n 型**; 若此行列式为正, 则称 $\mathscr{P}$ 为**狭义 Pólya n 型**. 是 **Pólya 2 型**等价于有单调似然比. 若 $\mathscr{P}$ 对于所有的正整数 n 为 (狭义) Pólya n 型, 则简称为 (**狭义**) **Pólya 型** (Pólya type). 以 $p_\theta(x) = \exp(\theta x + \alpha_0(\theta) + s_0(x))$ ($x \in \mathscr{X} \subset \boldsymbol{R}^1, \theta \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^1$) 为密度函数的指数型分布族†. 是狭义 Pólya 型. 此外, 非中心 χ^2 分布, 非中心 t 分布和非中心 F 分布是以各自的非中心参数为参数的 Pólya 型.

【参】 [1] T. W. Anderson, An introduction to multivariate statistical analysis, John Wiley, 1958; [2] H. Chernoff, Large-sample theory: parametric case, Ann. Math. Statist., **27** (1956), 1—22; [3] H. Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966); [4] A. T. James, Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples, Ann. Math. Statist., **35** (1964), 475—501; [5] S. Karlin, Decision theory for Pólya type distributions, Case of two actions I, Proc. 3rd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. I, Univ. of California Press (1956), 115—128; [6] A. E. Sarhan-B. G. Greenberg (eds.), Contributions to order statistics, John Wiley, *1962*; [7] S. S. Wilks, Mathematical statistics, John Wiley, 1962.

统计线性模型 [英 statistical linear model 法 modèle linéaire statistique 德 lineares statistisches Modell 俄 линейная статистическая модель 日 統計的線形模型] 设 $\boldsymbol{X} = (X_1, \cdots, X_n)'$ (以下如无特别声明, 向量指的是列向量, 并以 ′ 表示转置) 为 n 维随机变量†, 且 $\boldsymbol{X}$ 的均值向量为 $E(\boldsymbol{X}) = (\mu_1, \cdots, \mu_n)'$ (→ 统计量). 若 $E(\boldsymbol{X})$ 能由未知参数 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_k)'$ ($k \leqslant n$) 和已知的 $n \times k$ 矩阵 A 表为形状 $A\boldsymbol{\xi}$, 则 $\boldsymbol{X}$ 可表为

(1) $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{W}, \quad E(\boldsymbol{W}) = (0, \cdots, 0)'$,

此处 $\boldsymbol{W} = (W_1, \cdots, W_n)'$. 关于 $\boldsymbol{X}$ 的分布, 往往假定下列条件:

a) $X_1, \cdots, X_n$ 是互不相关†的随机变量,

b) $X_1, \cdots, X_n$ 具有共同的未知方差 σ^2,

c) $X_1, \cdots, X_n$ 服从正态分布.

包含这些条件的方程 (1) 叫做**线性模型** (linear model), 而 $\boldsymbol{W}$ 叫做**误差项** (error term) (→ 试验设计).

回归分析、方差分析和协方差分析都是有关线性模型的统计分析方法, 但是它们的区别并不清楚. 1) 在试验设计†即方差分析中, A 叫

做**设计矩阵**(design matrix), $\boldsymbol{\xi}$ 叫做**效应**(effect), 而 A 的元素通常取为 0 或 1. 2) 在**回归分析**(regression analysis) 中, 对由向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\cdots,a_k)'$ 的一次式 $x=\sum_{j=1}^{k}a_j\xi_j$ 表达的量 x, 在 $n\ (\geqslant k)$ 个点 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},\cdots,a_{ik})'\ (i=1,\cdots,n)$ 进行观测, 得观测值 $X_1,\cdots,X_n$. 这时, 如果观测是无偏的, 即

$$E(X_i)=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\xi_j,$$

那末置 $A=(a_{ij})$, 便得到模型(1). 通常 $\boldsymbol{\alpha}$ 的一个分量(例如 a_k)取为常数 1. $\boldsymbol{\alpha}$ 的函数 $x=\sum a_j\xi_j$ 叫做**线性回归** (linear regression) 或**回归超平面** (regression hyperplane), 特别当 $k=2$ 时, $x=a_1\xi_1+\xi_2$ 叫做**回归直线** (regression line), ξ_1 叫做**回归系数** (regression coefficient). 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分量或称**固定变量**或称**说明变量**. 有时也遇到 $\boldsymbol{\alpha}$ 从而 A 是随机变量的情形, 那时只要把(1)中的 $A\boldsymbol{\xi}$ 看做是 A 给定后 $\boldsymbol{X}$ 的条件均值即可. 3) 在**协方差分析**(analysis of covariance) 中, A 分割为两个矩阵: 由 0 与 1 组成的矩阵 A_1(试验设计部分)和相当于说明变量的矩阵 A_2(回归分析部分), 即 $A=(A_1 \vdots A_2)$. 这时称 A_2 中的变量为**相伴变量** (concomitant variable).

【最小二乘法】 在模型(1)中, A 的列向量在 $\boldsymbol{X}$ 的值域 $\boldsymbol{R}^n$ (样本空间) 中张成的子空间 Π_A (它的维数 s 等于 A 的秩) 叫做**估计空间** (estimation space), 而 Π_A 的正交补空间叫做**误差空间** (error space). $\boldsymbol{R}^n$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 到 Π_A 的正射影† $\boldsymbol{y}$ 可由射影矩阵† P_A 表为 $\boldsymbol{y}=P_A\boldsymbol{x}$. 这时 $\boldsymbol{Y}=P_A\boldsymbol{X}$ 叫做 $E(\boldsymbol{X})$ 的**最小二乘估计量** (least-squares estimator). 求最小二乘估计量的程序叫做**最小二乘法** (method of least-squares), 这就是对给定的 $\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{\xi}$ 使误差平方和 $(\boldsymbol{X}-A\boldsymbol{\xi})'\times(\boldsymbol{X}-A\boldsymbol{\xi})$ 为最小. 为达此目的, 要对 ξ 求解**正规方程** (normal equation) $A'A\boldsymbol{\xi}=A'\boldsymbol{X}$, 设解为 $\boldsymbol{\xi}=\hat{\boldsymbol{\xi}}$, 然后令 $\boldsymbol{Y}=A\hat{\xi}$ 即可. 对 $s=k$, 有 $\boldsymbol{Y}=A(A'A)^{-1}A'\boldsymbol{X}$. 尽管 $s<k$ 时 $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ 不唯一, 但 $\boldsymbol{Y}$ 是唯一确定的. 设 I 为 $n\times n$ 单位矩阵, 则 $Q=\boldsymbol{X}'(I-P_A)\boldsymbol{X}$ 是点 $\boldsymbol{X}$ 和子空间 Π_A 的距离的平方.

参数 $\boldsymbol{\xi}$ 的具有系数向量 $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\cdots,\beta_k)'$ 的线性函数 $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\xi}$ 叫做(线性)**可估的** (estimable), 如果存在一个**线性无偏估计量** (linear unbiased estimator) (形状为 $\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}$ 的无偏估计量†) 的话. $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\xi}$ 是可估的充分必要条件为 $\boldsymbol{\beta}'$ 是 A 的行向量的线性组合. 如果条件 a), b) 被满足, 则对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{u}$, 在参数 $\gamma=\boldsymbol{u}'A\boldsymbol{\xi}$ 的线性无偏估计量中, 方差(关于 $\boldsymbol{\xi}$)一致最小的(**最佳线性无偏估计量** (best linear unbiased estimator)) 是 $\boldsymbol{u}'\mathbf{Y}$, 其方差为 $(\boldsymbol{u}'P_A\boldsymbol{u})\sigma^2$, 而 Q 的均值为 $(n-s)\sigma^2$. 这个命题叫做 **Gauss-Markov 定理**. 因此 $\hat{\gamma}=\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Y}$ 叫做 γ 的最小二乘估计量. Q 称为**自由度** (degree of freedom) $n-s$ 的**误差平方和** (error sum of squares) 或**残差平方和** (residual sum of squares). $\hat{\sigma}^2=Q/(n-s)$ 是 σ^2 的无偏估计量, 叫做**均方误差** (mean square error). 若条件 a), b) 和 c) 都满足, 则 $\hat{\gamma}$ 和 $\hat{\sigma}^2$ 分别是 γ 和 σ^2 的最小方差无偏估计量.

【线性假设】 几个可估参数的值都为 0 的统计假设 H, 叫做(一般)**线性假设** (linear hypothesis). 对满足线性假设 H 的 $\boldsymbol{\xi}$, $A\boldsymbol{\xi}$ 的全体是由 $n\times k_1$ 矩阵 B 的列向量张成的 Π_A 的子空间 Π_B. 设 Π_B 的维数(B 的秩)为 $s-r$. 设 $n\times k_2$ 矩阵 C 的列向量张成的子空间 Π_C 只与 Π_B 在原点相重, 且 Π_B 与 Π_C 张成 Π_A. 这样模型(1)可用 k_1 维向量 $\boldsymbol{\eta}$ 和 k_2 维向量 $\boldsymbol{\zeta}$ 写做

(2) $\quad \boldsymbol{X}=B\boldsymbol{\eta}+C\boldsymbol{\zeta}+\boldsymbol{W},\quad E(\boldsymbol{W})=0,$

从而假设 H 成为 "$\boldsymbol{\zeta}=0$". $\boldsymbol{X}$ 到 Π_B 的射影记作 $\boldsymbol{Z}=P_B\boldsymbol{X}$, 则 $Q_H=\boldsymbol{X}'(P_A-P_B)\boldsymbol{X}$ 等于向量 $\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z}$ 的长度的平方, 且是对假设 H 的误差平方和. 由于 $\hat{\sigma}_H^2=Q_H/r$ 在 H 成立时是 σ^2 的无偏估计, 所以 $\hat{\sigma}_H^2$ 叫做**无偏方差** (unbiased variance).

设 $B'C=0$. 选取 $\boldsymbol{R}^n$ 中的正交变换 U, 使 UB 的第 $1,\cdots,r,s+1,\cdots,n$ 行和 UC 的第 $s+1,\cdots,n$ 行都为 0. 令 $\tilde{\boldsymbol{X}}=U\boldsymbol{X}$, $\tilde{\boldsymbol{\eta}}=UB\boldsymbol{\eta}$, $\tilde{\boldsymbol{\zeta}}=UC\boldsymbol{\zeta}$, $\tilde{\boldsymbol{W}}=U\boldsymbol{W}$, 则(2)成为 $\tilde{\boldsymbol{X}}=\tilde{\boldsymbol{\eta}}+\tilde{\boldsymbol{\zeta}}+\tilde{\boldsymbol{W}}$. 若 $\boldsymbol{X}$ 满足条件 a) 和 b), 则 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 也

满足这些条件. 若再假定条件 c), 则 $\boldsymbol{X}$ 也继承这一条件. 假设H成为“$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}=0$”. 这种模型叫做线性假设的**标准型** (canonical form). 在这模型中,我们有 $E(\tilde{X}_i)=0\ (i=s+1,\cdots,n)$, 以及进一步有 $E(\tilde{X}_i)=0\ (i=1,\cdots,r,s+1,\cdots,n)$, 当且仅当$H$为真确.

在条件 a), b) 和 c) 下, 最小二乘估计量 $\boldsymbol{Y}$是 $A\boldsymbol{\xi}$ 的极大似然估计量†, 并且 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 互相独立且分别服从 n 维正态分布 $N(0,\sigma^2(I-P_A))$, $N((P_A-P_B)C\boldsymbol{\zeta},\sigma^2(P_A-P_B))$ 和 $N(B\boldsymbol{\eta}+P_BC\boldsymbol{\zeta},\sigma^2P_B)$. 因此 Q/σ^2, Q_H/σ^2 和 $\boldsymbol{X}'P_B\boldsymbol{X}/\sigma^2$ 分别服从非中心参数为 0, $\boldsymbol{\zeta}'C'(P_A-P_B)C\boldsymbol{\zeta}/\sigma^2$ 和

$$(B\boldsymbol{\eta}+P_BC\boldsymbol{\zeta})'(B\boldsymbol{\eta}+P_BC\boldsymbol{\zeta})/\sigma^2$$

以及自由度为 $n-s$, r 和 $s-r$ 的非中心 χ^2 分布†. 假设H的似然比检验†, 是以 $\hat{\sigma}_H^2/\hat{\sigma}^2>c$ 为临界域的检验. 这个检验既是一致最大功效不变†检验, 又是最紧迫检验†, 并在功效函数†有单一变量 $\boldsymbol{\zeta}'C'(P_A-P_B)C\boldsymbol{\zeta}/\sigma^2$ 的检验中,是一致最大功效的. 特别当 $s-r=1$ 时, 这个检验是一致最大功效无偏†检验. $C\boldsymbol{\zeta}$ 的置信区间†由满足 $(\boldsymbol{X}-C\boldsymbol{\zeta})'(P_A-P_B)(\boldsymbol{X}-C\boldsymbol{\zeta})/\hat{\sigma}^2<c_0^2$, 或等价地对任意的 $\boldsymbol{u}\in\Pi_A\cap\Pi_B^\perp$, 满足

$$|\boldsymbol{u}'C\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{u}'\boldsymbol{Y}|<(\boldsymbol{u}'P_A\boldsymbol{u})^{1/2}\hat{\sigma}c_0$$

的所有 $C\boldsymbol{\zeta}$ 的集合给出. 如果存在一个 $\boldsymbol{u}\in\Pi_A\cap\Pi_B^\perp$, 使置信区间 $(\boldsymbol{u}\boldsymbol{Y}-(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})^{1/2}\hat{\sigma}c_0,\ \boldsymbol{u}\boldsymbol{Y}+(\boldsymbol{u}'\boldsymbol{u})^{1/2}\hat{\sigma}c_0)$ 不覆盖 0,就拒绝假设 H,那末这就是上述的似然比检验. (另一种区间估计是由 J. W. Tukey [2] 提出的.)这样,分解式

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'(P_A-P_B)\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}'P_B\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}'(I-P_A)\boldsymbol{X}$$

叫做**方差分析** (analysis of variance), 列于表 1 的所谓**方差分析表** (analysis-of-variance table) 中.

在 (1) 中, 当 $\boldsymbol{W}$ 的协方差矩阵 $\Sigma=\sigma^2\Sigma_0$ (σ^2 是未知参数, Σ_0 是已知矩阵) 时, 使 $Q=(\boldsymbol{X}-A\boldsymbol{\xi})'\Sigma_0^{-1}(\boldsymbol{X}-A\boldsymbol{\xi})$ 为最小的 $\boldsymbol{\xi}$ 叫做**广义最小二乘估计量** (generalized least-squares

表 1

因素	平方和	自由度	均方	方差比
H	$Q_H=\boldsymbol{X}'(P_A-P_B)\boldsymbol{X}$	r	$\hat{\sigma}_H^2=Q_H/r$	$\hat{\sigma}_H^2/\hat{\sigma}^2$
B	$Q_B=\boldsymbol{X}'P_B\boldsymbol{X}$	$s-r$	$\hat{\sigma}_B^2=Q_B/(s-r)$	
误差	$Q=\boldsymbol{X}'(I-P_A)\boldsymbol{X}$	$n-s$	$\hat{\sigma}^2=Q/(n-s)$	
总和	$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$	n		

estimator). 这个估计量与上述最小二乘估计量有相同的性质. 此外, 在 (1) 中, 若 A是已知的 $n\times k$ 矩阵, $\boldsymbol{\xi}$ 是未知的 $k\times p$ 矩阵, 以及 $\boldsymbol{W}$是各行互相独立服从 p 维正态分布 $N(0,\Sigma)$ 的 $n\times p$ 矩阵(从而 $\boldsymbol{X}$ 也是以随机变量为元素的 $n\times p$ 矩阵),则这个模型叫做多元线性模型(→ 多元分析).

【参】 [1] R. L. Plackett, Principles of regression analysis, Clarendon Press, 1960; [2] H. Scheffé, The analysis of variance, John Wiley, 1959; [3] E. L. Lehmann, Testing statistical hypotheses, John Wiley, 1959.

多元分析 [英 multivariate analysis 法 analyse de quantité multivariable 德 Analytik mehrerer verändern Quantitäten 俄 многовариантный анализ 日 多変量解析] 如果每个个体有多个观测数据, 或者从数学上说, 若个体的观测数据能表为 p 维 Euclid 空间的点,那末这样的数据叫做**多元数据** (multivariate data), 而分析多元数据的统计方法叫做**多元分析**. 到目前为止, 多元分析可以分成两种情况: 一种是一元分析法的直接推广,另一种是多元本身所特有的.

【多元线性模型】 **多元线性模型** (multivariate linear model) 是一元线性模型†的直接推广. 设 $\mathbf{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)}\cdots\boldsymbol{X}^{(n)})$ 为 p 维多元数据的 $n(n>m+p)$ 个观测值 $\boldsymbol{X}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(n)}$ 的 $p\times n$ 矩阵,并能表为

$$\mathbf{X}=BZ+\mathbf{U}, \tag{1}$$

此处, B 是未知参数的 $p\times m$ 矩阵, Z 是已知说明变量的 $m\times n$ 矩阵和 $\mathbf{U}$ 是误差变量的 $p\times n$ 矩阵. 我们假定: 1) $\mathbf{U}$ 的均值 $E(\mathbf{U})=0$; 2) $\mathbf{U}$ 的各列向量 $\boldsymbol{U}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{U}^{(n)}$ 为互相独立且同分布; 3) 各列向量 $\boldsymbol{U}^{(i)}$ 服从具有相同协方差矩阵† Σ的分布. 那末, 类似于一元情

形，B 的最小二乘估计量† $\hat{\mathbf{B}}$ 可以定义为使 $\operatorname{tr}(\mathbf{X}-BZ)(\mathbf{X}-BZ)'$ 为最小的 $p\times m$ 矩阵，并当 $|ZZ'|\neq 0$ 时，由

$$\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{X}Z'(ZZ')^{-1}$$

给出，此处符号′表示矩阵的转置．令

$$\mathbf{Q}=\mathbf{XX}'-\hat{\mathbf{B}}Z\mathbf{X}',\quad \hat{\mathbf{\Sigma}}=\mathbf{Q}/(n-m),$$

则 $\hat{\mathbf{B}}$ 和 $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ 分别是 B 和 Σ 的无偏估计量．若再假定：4) $\mathbf{U}$ 的各列向量服从 p 维正态分布†，则 $\hat{\mathbf{B}}$ 和 $\mathbf{Q}$ 为完备†的充分†统计量，从而 $\hat{\mathbf{B}}$ 和 $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ 为最小方差的无偏估计量†．此外，$\hat{\mathbf{B}}$ 服从正态分布，其协方差矩阵的元素可表示为

$$E((\hat{\beta}_{ij}-\beta_{ij})(\hat{\beta}_{hk}-\beta_{hk}))=\sigma_{ih}m_{jk}.$$

此处 β_{ij}，σ_{ih} 和 m_{jk} 分别是 B，Σ 和 $(ZZ')^{-1}$ 的元素．$\mathbf{Q}$ 的分布，依多元情形的 Cochran 定理†，是自由度为 $n-m$ 的 Wishart 分布†（→样本分布）．

为了检验假设 $B=B_0$，置

$$\mathbf{Q}_B=(\hat{\mathbf{B}}-B_0)ZZ'(\hat{\mathbf{B}}-B_0)',$$

并得分解式

$$(\mathbf{X}-B_0Z)(\mathbf{X}-B_0Z)'=\mathbf{Q}_B+\mathbf{Q}.$$

若假设真确，则 $\mathbf{Q}_B$ 和 $\mathbf{Q}$ 独立地服从 Wishart 分布．当假设不真确时，$\mathbf{Q}_B$ 服从非中心 Wishart 分布†．利用这个事实，已经提出几种检验程序．若要求关于线性变换的不变性，则由于矩阵方程 $|\mathbf{Q}_B-\lambda\mathbf{Q}|=0$ 的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ 是最大不变统计量†，检验程序应依据这些根的函数来确定．当这些根的值大时放弃假设，这是一种自然的临界域．经常用的检验统计量有：i) 似然比检验 $W=|\mathbf{Q}|/|\mathbf{Q}_B+\mathbf{Q}|=\Pi(1+\lambda_i)^{-1}<c$ (S. S. Wilks)；ii) $\operatorname{tr}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}_B=\sum\lambda_i>c$ (D. N. Lawley)；iii) $\max\lambda_i>c$ (S. N. Roy)．这些统计量的小样本分布是复杂的，但当 $n\to\infty$ 时，$-(n-m)\log W$ 和 $n\operatorname{tr}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}_B$ 渐近地服从自由度 pm 的 χ^2 分布．作为一个特殊的情形，如果 $m=1$，只存在一个非 0 的根 λ，上述的程序都相同，从而归结为由

$$T^2=(ZZ')(\hat{\mathbf{B}}-B_0)'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}(\hat{\mathbf{B}}-B_0)$$

做的检验．而且由于 $(n-p)T^2/(n-1)p$ 在假设真确时服从自由度 $(p,n-p)$ 的 F 分布，能够求出它的临界域．我们还知道，当 $p=2$ 时

$$(n-m-1)(1-\sqrt{W})/m\sqrt{W}$$

和当 $m=2$ 时，

$$(n-1-p)(1-\sqrt{W})/p\sqrt{W},$$

分别在假设真确时服从自由度 $(2m,2(n-m-1))$ 和自由度 $(2p,2(n-1-p))$ 的 F 分布．由这些检验程序能够求出关于 B 的联合置信域．例如 $\operatorname{tr}\mathbf{Q}^{-1}(B-\hat{\mathbf{B}})ZZ'(B-\hat{\mathbf{B}})'<c$．

其次，若把矩阵 B 分解为 $B=(B_1\,\vdots\,B_2)$，此处 B_1 是 $p\times q$ 矩阵，B_2 是 $p\times(m-q)$ 矩阵，则检验关于 B_1 的假设 $B_1=0$，可以如下进行．把矩阵 Z 分解为 $Z'=(Z_1'\,\vdots\,Z_2')$，此处 Z_1 是 $q\times n$ 矩阵，Z_2 是 $(m-q)\times n$ 矩阵．设 $\hat{\mathbf{B}}_2^*=\mathbf{X}Z_2'(Z_2Z_2')^{-1}$，$\mathbf{Q}^*=\mathbf{XX}'-\hat{\mathbf{B}}_2^*Z_2\mathbf{X}'$，且 $\mathbf{Q}_{B_1}=\mathbf{Q}^*-\mathbf{Q}$，则当假设真确时 $\mathbf{Q}_{B_1}$ 与 $\mathbf{Q}$ 独立，且服从 Wishart 分布．从而，用 $\mathbf{Q}_{B_1}$ 代替 $\mathbf{Q}_B$，就可以应用上段的几种检验程序．

这样的检验程序叫做**多元方差分析** (multivariate analysis of variance 缩写为 **MANOVA**)（→统计线性模型）．很多标准的问题可按照这个方法处理．下面举几个例子．

1) 设 $\mathbf{X}$ 是由相同的 p 维正态分布 $N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ 抽出的大小为 n 的样本，则 $\mathbf{X}$ 可表示为 $\mathbf{X}=\boldsymbol{\mu}\mathbf{1}'+\mathbf{U}$（$\mathbf{1}$ 是只由 1 所成的 n 维列向量）．从而，$\boldsymbol{\mu}$ 和 Σ 的估计量分别由 $\hat{\boldsymbol{\mu}}=\mathbf{X1}/n=\bar{\boldsymbol{X}}$ 和 $\hat{\mathbf{\Sigma}}=(\mathbf{X}-\bar{\boldsymbol{X}}\mathbf{1}')(\mathbf{X}-\bar{\boldsymbol{X}}\mathbf{1}')'/(n-1)$ 给出．可见假设 $\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0$ 的检验可用 **Hotelling 的** T^2 统计量来进行，即临界域为

$$T^2=n(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{\mu}_0)>c.$$

2) 设 $\mathbf{X}_i$ $(i=1,\cdots,k)$ 是由 p 维正态分布 $N(\boldsymbol{\mu}_i,\Sigma)$ 抽出的大小为 n_i 的样本．假设 $\boldsymbol{\mu}_1=\cdots=\boldsymbol{\mu}_k=\boldsymbol{\mu}$ 的检验如下：令

$$\mathbf{Q}=\sum_i(\mathbf{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}_i\mathbf{1}')(\mathbf{X}_i-\bar{\boldsymbol{X}}_i\mathbf{1}')',$$

此处

$$\bar{\boldsymbol{X}}_i=\mathbf{X}_i\mathbf{1}/n_i,$$

$$\mathbf{Q}_\mu=\sum_i n_i(\bar{\boldsymbol{X}}_i-\bar{\boldsymbol{X}})(\bar{\boldsymbol{X}}_i-\bar{\boldsymbol{X}})',$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}=\sum_i n_i\bar{\boldsymbol{X}}_i\Big/n\ (n=\sum n_i),$$

则

$$\sum_i (\mathbf{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}}\mathbf{1}')(\mathbf{X}_i - \bar{\boldsymbol{X}}\mathbf{1}')' = \mathbf{Q}_\mu + \mathbf{Q}.$$

我们称 $\mathbf{Q}$ 为**组内平方和矩阵** (matrix of sum squares within classes), $\mathbf{Q}_\mu$ 为**组间平方和矩阵** (matrix of sum squares between classes). 当假设真确时, $\mathbf{Q}_\mu$ 服从自由度为 $k-1$ 的 Wishart 分布†.

3) 设 $\boldsymbol{X}_{ij} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{U}_{ij}$ $(i=1, \cdots, p;\ j=1, \cdots, q)$, 此处 $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是满足 $\sum \boldsymbol{\alpha}_i = 0$, $\sum \boldsymbol{\beta}_j = 0$ 的 p 维常数, $\boldsymbol{U}_{ij}$ 互相独立地服从 p 维正态分布 $N(0, \Sigma)$. 设

$$\mathbf{Q}_\alpha = q \sum_i (\bar{\boldsymbol{X}}_i - \bar{\boldsymbol{X}})(\bar{\boldsymbol{X}}_i - \bar{\boldsymbol{X}})',$$

$$\mathbf{Q}_\beta = p \sum_j (\bar{\boldsymbol{X}}_j - \bar{\boldsymbol{X}})(\bar{\boldsymbol{X}}_j - \bar{\boldsymbol{X}})',$$

$$\mathbf{Q} = \sum_i \sum_j (\boldsymbol{X}_{ij} - \bar{\boldsymbol{X}}_i - \bar{\boldsymbol{X}}_j + \bar{\boldsymbol{X}}) \times (\boldsymbol{X}_{ij} - \bar{\boldsymbol{X}}_i - \bar{\boldsymbol{X}}_j + \bar{\boldsymbol{X}})',$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}_i = \sum_j \boldsymbol{X}_{ij} \Big/ q,$$

$$\bar{\boldsymbol{X}}_j = \sum_i \boldsymbol{X}_{ij} \Big/ p,$$

$$\bar{\boldsymbol{X}} = \sum_i \sum_j \boldsymbol{X}_{ij} / pq,$$

则有分解式

$$\sum_i \sum_j (\boldsymbol{X}_{ij} - \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{X}_{ij} - \bar{\boldsymbol{X}})' = \mathbf{Q}_\alpha + \mathbf{Q}_\beta + \mathbf{Q},$$

并且 $\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta$ 和 $\mathbf{Q}$ 互相独立地分别服从自由度为 $p-1$, $q-1$ 和 $(p-1)(q-1)$ 的非中心 Wishart 分布†. $\mathbf{Q}_\alpha, \mathbf{Q}_\beta$ 和 $\mathbf{Q}$ 分别叫做 **$\boldsymbol{\alpha}$ 平方和矩阵**, **$\boldsymbol{\beta}$ 平方和矩阵**和**误差平方和矩阵**. 利用这些矩阵可以得到假设 $\boldsymbol{\alpha}_i = 0$ $(i=1, \cdots, p)$ 以及假设 $\boldsymbol{\beta}_j = 0$ $(j=1, \cdots, q)$ 的检验程序.

【变量之间的相关】 多元分析所特有的问题,一般说来,是处理 p 维观测值的各分量之间相互关系的结构. 先从描述性的概念说起. 设 $\boldsymbol{X}^{(\cdot)} = (X_1, \cdots, X_p)'$ 为 p 维随机向量, 则用来描述 $\boldsymbol{X}^{(\cdot)}$ 的各分量之间关系的最常见方法是计算 $\boldsymbol{X}^{(\cdot)}$ 的协方差矩阵†

$$\Sigma = E((\boldsymbol{X}^{(\cdot)} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{X}^{(\cdot)} - \boldsymbol{\mu})') = (\sigma_{ij}),$$

此处 $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{X}^{(\cdot)})$, 或相关矩阵 $P = (\rho_{ij})$ $(\rho_{ij} = \sigma_{ij}/\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}})$. 由 $p \times n$ 样本矩阵 $\mathbf{X}$ 计算的

$$\mathbf{S} = ((\mathbf{X} - \bar{\boldsymbol{X}}\mathbf{1}')(\mathbf{X} - \bar{\boldsymbol{X}}\mathbf{1}')'/n) = (s_{ij})$$

和 $\mathbf{R} = (r_{ij})$ $(r_{ij} = s_{ij}/\sqrt{s_{ii}s_{jj}})$ 分别叫做**样本协方差矩阵** (sample covariance matrix) 和**样本相关矩阵** (sample correlation matrix). 记 P 的余因子为 P_{ij}, 则

$$P_{i\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots p} = \sqrt{1 - |P|/P_{ii}}$$

叫做变量 X_i 与 $X_1, \cdots, X_p$ (除去 X_i, 在下面, P 中的足码 $\hat{i}$ 表示已除掉的 X 的足码) 的**多重相关系数** (multiple correlation coefficient).

$$P_{ij\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots \hat{j}\cdots p} = -P_{ij}/\sqrt{P_{ii}P_{jj}}$$

叫做变量 X_i 和 X_j 对给定的 $X_1, \cdots, X_p$ (除去 X_i 和 X_j) 的**偏相关系数** (partial correlation coefficient). $P_{i\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots p}$ 等于 X_i 关于 $X_1, \cdots, X_p$ (不包含 X_i) 的线性回归与 X_i 的相关系数, $P_{ij\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots \hat{j}\cdots p}$ 等于 $X_i - \tilde{X}_i$ 和 $X_j - \tilde{X}_j$ 的相关系数,其中 $\tilde{X}_i$ 和 $\tilde{X}_j$ 是 X_i 和 X_j 关于 $X_1, \cdots, X_p$ (不包含 X_i 和 X_j) 的线性回归. 同样地,记 $\mathbf{R}$ 的余因子为 R_{ij}, 则**样本多重相关系数** (sample multiple correlation coefficient) 可定义为

$$R_{i\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots p} = \sqrt{1 - |\mathbf{R}|/R_{ii}}$$

以及**样本偏相关系数** (sample partial correlation coefficient) 可定义为

$$R_{ij\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots \hat{j}\cdots p} = -R_{ij}/\sqrt{R_{ii}R_{jj}}.$$

如果 $\mathbf{X} = (\boldsymbol{X}^{(1)} \cdots \boldsymbol{X}^{(n)})$ 是由 p 维正态分布抽出的大小为 n 的独立样本, 那末 $R_{i\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots p}$ 和 $R_{ij\cdot 1\cdots \hat{i}\cdots \hat{j}\cdots p}$ 的样本分布是已知的 (→ 样本分布).

协方差矩阵的行列式 $|\Sigma|$ 或者 $|\mathbf{S}|$ 叫做 (样本) **广义方差** (generalized variance), 是用来衡量 p 维分布分散程度的一个尺度. 具有共同协方差矩阵 Σ 及均值向量分别为 $\boldsymbol{\mu}_1$ 和 $\boldsymbol{\mu}_2$ 的两个分布的距离,常用

$$\delta = (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)' \Sigma^{-1} (\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)$$

来表示. 这叫做 Mahalanobis 的**广义距离** (generalized distance).

其次, 对由 $p + q$ 维观测值组成的向量

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$，设其协方差矩阵为

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{pmatrix}.$$

设矩阵方程 $|\rho\,\Sigma_{YY} - \Sigma_{YX}\,\Sigma_{XX}^{-1}\,\Sigma_{XY}| = 0$ 的 $r(=\min(p, q))$ 个根为 $\rho_1, \cdots, \rho_r$，则 $\rho_1^{1/2}, \cdots, \rho_r^{1/2}$ 叫做**典型相关系数**（canonical correlation coefficient），是关于 X 和 Y 的线性变换的最大不变统计量，可以认为是表示 X 与 Y 之间的整体关系．此外，记对应 ρ_i 的特征向量为 η_i，即 $\rho_i\Sigma_{YY}\eta_i = \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}\eta_i$，则线性统计量 $\eta_i'Y$ 和 $(\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}\eta_i)'X$ 叫做**典型变量**（canonical variates）．

【主成分分析】 多元分析的一个重要问题是用少数几个指标来表示多个变量的变动．主成分分析是处理这种问题的一个方法．设 A 是 $r \times p$ 常数矩阵（$r < p$），且 $\mathbf{T} = AX^{(\cdot)}$．$\mathbf{T}$ 表示由线性型构成的 r 个指标．标准化 $X^{(\cdot)}$ 使其各变量的方差均为 1，则 $X^{(\cdot)}$ 对 $\mathbf{T}$ 变量的多重相关系数的平方和可表为

$$Q = \operatorname{tr}(PA'(APA')^{-1}AP).$$

而使 Q 为最大的 A，是由 P 的较大的 r 个特征根所对应的 r 个特征向量形成的 $r \times p$ 矩阵．这样的分析法叫做**主成分分析**（principal component analysis），$\mathbf{T}$ 叫做**主成分**（principal components）．

其次，当我们假定 $X^{(\cdot)}$ 的正态性时，这时 $\mathbf{R}$ 的特征根是 P 的特征根的最大似然估计量．在主成分分析中，设 $\mathbf{R}$ 的较大的 r 个特征根为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$，而对 P 的特征根中除去较大的 r 个后剩下的 $p-r$ 个都相等的假设，可用

$$R_{p-r} = |\mathbf{R}|/(\lambda_1\cdots\lambda_r((p-\lambda_1-\cdots-\lambda_r)/(p-r))^{p-r})$$

来进行检验．$-C\log R_{p-r}$（C 是某正常数）在假设真确时可由 χ^2 分布来近似．

在主成分分析法中，有时也求协方差矩阵 Σ 的特征向量．这无非是使 $\mathbf{X}^{(\cdot)}$ 对 $\mathbf{T}$ 的线性回归的残差方差之和为最小．此外，还有对各变量考虑适当的加权 W，以便求 $W^{-1}\Sigma$ 的特征值和特征向量的情形．

因子分析（factor analysis）与主成分分析有着密切的关系．设 $\mathbf{X} = BF + \mathbf{U}$，此处 B，F 和 $\mathbf{U}$ 分别是 $p \times r$，$r \times n$ 和 $p \times n$ 矩阵，且 $\mathbf{U}$ 的各列向量为独立的误差向量．因子分析的问题是求未知的 B 和 F．F 表示 r（$r < p$）个因子，B 表示它在 p 维观测中所反映的程度．F 叫做**因子得分**（factor score），B 叫做**因子载荷**（factor loading）．这里，假定 $FF' = nI$．若 $\mathbf{U}$ 的方差矩阵 $E(\mathbf{UU}') = n\Phi$ 为已知，则可应用最小二乘法的原则，使 $\operatorname{tr}(\mathbf{X} - BF)'\Phi^{-1}\times(\mathbf{X} - BF)$ 为最小以确定 B 和 F．这样的 B 可由矩阵 $\Phi^{-1}\mathbf{XX}'$ 的较大的 r 个特征根所对应的特征向量来确定．若 Φ 为未知（设 Φ 是对角矩阵），则求解关于 Φ 和 B 的联立方程，可得解 $\hat{\mathbf{B}}$ 为 $\hat{\Phi}^{-1}\mathbf{XX}'$ 的特征向量所成的矩阵和解 $\hat{\Phi}$ 为由 $\mathbf{XX}'/n - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{B}}'$ 的对角元素所成的矩阵．

当 Φ 已知时，若对 $\mathbf{U}$ 假定正态性，则由上述的程序，能得到 B 和 F 的最大似然估计量．与此相反，当 Φ 未知时，把 F 看作参数不能导出合理的推断程序．若再假定 F 与 $\mathbf{U}$ 独立且服从正态分布，则 $\mathbf{X}$ 服从多元正态分布．若 $E(F)=0$，则 $E(\mathbf{S}) = E(\mathbf{XX}')/n = BB' + \Phi$．于是可以考虑由样本协方差矩阵 $\mathbf{S} = \mathbf{XX}'/n$ 来估计 B 和 Φ．Lawley 证明了，如此得到的最大似然估计量与上述联立方程的解 $\hat{\mathbf{B}}$ 和 $\hat{\Phi}$ 是一致的．这时，即使假定总体协方差矩阵 $\Sigma = E(\mathbf{S})$ 为已知，仍然存在形如 $\Sigma = BB' + \Phi$ 的表现是否唯一的问题．这叫**识别**（identification）问题，还没有完全解决．

【典型相关分析】 考虑由 $\mathbf{X}$ 来构作 $\mathbf{T} = A\mathbf{X}$，以便能最好地说明另一组变量 $\mathbf{Y}$ 的变动．设 $\mathbf{R}_{XX}$，$\mathbf{R}_{YY}$ 和 $\mathbf{R}_{XY}$ 分别是 $\mathbf{X}$，$\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{XY}$ 的样本相关矩阵，则 $\mathbf{Y}$ 的各分量对 $\mathbf{T}$ 的多重相关系数的平方和可表为

$$Q = \operatorname{tr}(\mathbf{R}_{YX}A'(A\mathbf{R}_{XX}A')^{-1}A\mathbf{R}_{XY}).$$

使 Q 为最大的 A，可由 $\mathbf{R}_{XX}^{-1}\mathbf{R}_{XY}\mathbf{R}_{YX}$ 的较大的 r 个特征根所对应的特征向量构成．此外，为了使 $\mathbf{Y}$ 对 $\mathbf{T}$ 的线性回归的残差方差矩阵的**迹**（trace）为最小，只须利用 X 和 Y 的方差矩阵 $\mathbf{S}_{XX}$ 和协方差矩阵 $\mathbf{S}_{XY}$，并取 $\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}\mathbf{S}_{YX}$

的特征向量即可.

对应这样的分析法，假定线性模型 $\mathbf{Y}=B\mathbf{X}+\mathbf{U}$，此处 $q\times p$ 矩阵 B 的秩† $=r<p$，$B=CA$，C 是 $q\times r$ 矩阵，A 是 $r\times p$ 矩阵. 这样，置 $\mathbf{T}=A\mathbf{X}$，则有 $\boldsymbol{Y}=C\mathbf{T}+\mathbf{U}$，因此 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbf{Y}$ 的说明变量. 于是若设 $C'C=I$，而且 $\mathbf{U}$ 的方差矩阵 $\Sigma_{\boldsymbol{U}}$ 为已知，则由最小二乘法知道，A 可由 $\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}\Sigma_{U}^{-1}\mathbf{S}_{YX}$ 的最大特征根所对应的特征向量构成. 若 $\Sigma_{\boldsymbol{U}}$ 为未知，而由 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_U=\mathbf{S}_{YY}-\mathbf{S}_{YX}\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}$ 来估计，那末我们知道 A 可取为 $\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}\mathbf{S}_{YY}^{-1}\mathbf{S}_{YX}$ 的特征向量. 此外，C 可由 $\mathbf{S}_{YY}^{-1}\mathbf{S}_{YX}\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}$ 的特征向量构成. 可是，$\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}\mathbf{S}_{YY}^{-1}\mathbf{S}_{YX}$ 和 $\mathbf{S}_{YY}^{-1}\mathbf{S}_{YX}\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}$ 的特征根，都等于方程

$$|\rho\mathbf{S}_{YY}-\mathbf{S}_{YX}\mathbf{S}_{XX}^{-1}\mathbf{S}_{XY}|=0$$

的根 ρ，也就是等于样本典型相关系数的平方. 从而，$\mathbf{T}=A\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Z}=C\mathbf{Y}$ 分别与较大的 r 个典型相关系数所对应的（样本）典型变量相一致. 若假定 $\mathbf{U}$ 的正态性，则这种程序等价于最大似然法，从而可求出估计量的样本分布. 此外，还能导出关于 r 的检验.

尽管模型关于 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 是不对称的，但其结果关于 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{Z}$ 却是对称的，所以对于典型变量 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{Z}$ 可以有几种解释. $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 中的任一个既可看作说明变量，也可看作从属变量，并且还可考虑 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的联合分布进行说明. 若假定 $(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ 的正态性，则 A 和 C 也是典型变量在总体中的系数向量的极大似然估计量.

【线性判别函数】 设 $\mathbf{X}_i\ (i=1,\cdots,k)$ 为 k 个总体的观测值. 我们考虑取一个向量 $\mathbf{a}$，使 $\boldsymbol{T}_i=\mathbf{X}_i'\boldsymbol{\alpha}$ 尽可能地表示这 k 个总体之间的差异. 为此，要确定 $\boldsymbol{\alpha}$ 使 $\boldsymbol{T}_i$ 的组间方差与组内方差的比 l 为最大. 若设 $\mathbf{Q}_b$ 为 $\mathbf{T}_i$ 的组间平方和矩阵，$\mathbf{Q}_w$ 为组内平方和矩阵，则有

$$l=\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Q}_b\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Q}_w\boldsymbol{\alpha},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}$ 可取为 $\mathbf{Q}_w^{-1}\mathbf{Q}_b$ 的最大特征根所对应的特征向量. 这样的 $\boldsymbol{T}$ 叫做**线性判别函数** (linear discriminant function). 特别当 $k=2$ 时，若 $\bar{\boldsymbol{X}}_1$ 和 $\bar{\boldsymbol{X}}_2$ 是两个总体的样本均值向量，则有 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{Q}_w^{-1}(\bar{\boldsymbol{X}}_1-\bar{\boldsymbol{X}}_2)$. 当 $k>2$ 时，利用由 $\mathbf{Q}_w^{-1}\mathbf{Q}_b$ 的较大的 r 个特征根所对应的特征向量构成的矩阵 A，并令 $\mathbf{T}_i=A\mathbf{X}_i$，则得到 r 维线性判别函数. 线性判别函数分析与单因素试验的多元方差分析有着密切关系；若对分布假定正态性，则能够求出关于样本分布的种种性质.

如果使用线性判别函数，还能够判定新得到的观测值 $\boldsymbol{X}_0$ 是属于哪个总体的样本. 设 $\boldsymbol{T}_0=A\boldsymbol{X}_0$，并将 $\boldsymbol{T}_0$ 的值与 $\mathbf{T}$ 在各总体的均值 $\boldsymbol{T}_i=A\bar{\boldsymbol{X}}_i$ 进行比较，由此便可决定新得到的样本最接近哪个总体.

【其他问题】 与本项所讨论的程序有关联的样本分布，常常是非常复杂的，通常只知道它们的渐近性质（→样本分布）. 完整的讨论过分地依赖于正态性的假定；虽然近来人们讨论了 **MANOVA** 的某些非参数程序，但是不依赖于正态性假定的纯粹多元方法还没有找到.

【参】 [1] T. W. Anderson, An introduction to multivariate statistical analysis, John Wiley, 1958; [2] M. G. Kendall, A course in multivariate analysis, Griffin, 1957; [3] D. N. Lawley-A. E. Maxwell, Factor analysis as a statistical method, Butterworth, London, 1963; [4] C. R. Rao, Advanced statistical methods in biometric research, John Wiley, 1952.

统计判决函数 [英 statistical decision function 法 fonction de decision statistique 德 statistische Entscheidungsfunktion 俄 функция статистического решения 日 統計的決定関数] 【基本概念】 统计判决函数论作为统计学的统一数学理论是由 A. Wald 创立的（→统计推断）. 在这个理论中，检验和估计等数理统计问题可用一个统一的方法叙述如下（[1]）.

可测空间† $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 叫做**样本空间** (sample space)，它的元素 $x(\in\mathscr{X})$ 叫做**样本点** (sample point). 设已给 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上的概率测度族 $\mathscr{P}=\{P_\theta|\theta\in\Omega\}$，此处 Ω 叫做**参数空间** (parameter space)，并且随机变量 X 按属于 $\mathscr{P}$ 的真概率分布 P 而取值于 $\mathscr{X}$，这一项将讨论对参数 θ 作出判决的问题，所谓决定参数的真值，使得 $P=P_\theta$. 为了描述根据 X 的样本 x 作出这种判决的程序，我们需要一个三重组 $(\mathscr{A},\mathfrak{C},D)$，

其中 $\mathfrak{C}$ 是集合 $\mathscr{A}$ 的子集的 σ 代数，D 是由 $\mathscr{X}$ 到 ($\mathscr{A}$, $\mathfrak{C}$) 上的概率测度的映射 δ 的集合，δ: $x \to \delta(\cdot|x)$，使得对固定的 $C \in \mathfrak{C}$，函数 $\delta(C|x)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测的. 我们称 $\mathscr{A}$ 为**行动空间** (action space) 或**判决空间** (decision space)，δ 为**统计判决函数** (statistical decision function) 或**统计判决程序** (statistical decision procedure) 或简称**判决函数**，以及 D 为**判决函数空间** (space of decision function). 在实际的判决程序中，$\delta(C|x)$ 是在得到样本点 x 后采取属于 C 的行动的概率. 我们进一步考虑一个非负函数 w: $\Omega \times \mathscr{A} \to R$，叫做由行动 $a(\in \mathscr{A})$ 引起的**损失函数** (loss function) $w(\theta, a)$，使对固定的 θ，$w(\theta, a)$ 关于 a 是 $\mathfrak{C}$ 可测的. 取损失的平均，我们得到**风险函数** (risk function)

$$r(\theta,\delta) = \int_{\mathscr{X}}\int_{\mathscr{A}} w(\theta, a)\delta(da|x)P_\theta(dx).$$

两个判决函数 δ 和 δ' 是等同的，如果对所有的 $\theta \in \Omega$ 和所有的 $C \in \mathfrak{C}$，$\delta(C|x) = \delta'(C|x)$ 关于 P_θ 对几乎所有的 x 成立的话. 特别，若对各个样本点 $x \in \mathscr{X}$ 都存在一个确定的行动 $a_x(\in \mathscr{A})$ 使 $\delta(\{a_x\}|x) = 1$，则 δ 叫做**非随机化判决函数** (non-randomized decision function)，否则叫做**随机化判决函数** (randomized decision function). 允许我们使用的判决函数 δ 的集合. D 叫做**判决函数空间**. 系统($\mathscr{X}$, $\mathfrak{B}$, $\mathscr{P}$, Ω, $\mathscr{A}$, $\mathfrak{C}$, w, D) 叫做一个**统计判决问题** (statistical decision problem). 若各个 $P_\theta(\in \mathscr{P})$ 关于 $\mathscr{X}$ 上的某一 σ 有限测度 λ 为绝对连续，则称 $\mathscr{P}$ 受控†于 λ，并称 $\mathscr{P}$ 是一个受控族. 若 $\mathscr{P}$ 以距离

$$d(P_\theta, P_{\theta'}) = \sup_B |P_\theta(B) - P_{\theta'}(B)|$$

构成距离空间，且 $\mathfrak{B}$ 是可分†的，则 $\mathscr{P}$ 是受控族的充分必要条件是 $\mathscr{P}$ 为可分的.

点估计†，区间估计†和假设检验†可用这个理论的观点描述如下.

1) 在点估计中，我们假定行动空间 $\mathscr{A}$ 是 R 的一个子集，且给定函数 φ: $\mathscr{X} \to \mathscr{A}$ 和 l: $\mathscr{P} \to R$. 问题是利用样本点 $x \in \mathscr{X}$ 的值 $\varphi(x)$ 来估计 $l(P_\theta)$ 的值. 作为损失函数，往往设 $w(\theta,a) = C(\theta)(a - l(P_\theta))^2$，此处 $C(\theta)$ 是 θ 的函数，叫做**平方损失函数** (quadratic loss function) (→ 统计估计).

2) 在区间估计中，行动空间是区间全体. 若把区间 $[u, v]$ 表为 $\boldsymbol{R}^2$ 的点 (u, v)，则可取 $\boldsymbol{R}^2$ 的半平面 $\boldsymbol{R}^{2'} = \{z = (z_1, z_2)|z_1 \leqslant z_2\}$ 为行动空间. 作为损失函数，可考虑两个函数 $w_1(\theta, z)$ 和 $w_2(\theta, z)$ 的加权和 $\alpha w_1(\theta, z) + \beta w_2(\theta, z)$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$，其中 $w_1(\theta,z) = 1$ $(\theta \notin [z_1, z_2])$; $= 0$ $(\theta \in [z_1, z_2])$，而 $w_2(\theta,z) = z_2 - z_1$ (→ 统计估计).

3) 在解消假设† H: $\theta \in \omega_0$ 针对备择假设† A: $\theta \in \omega_1$ $(\omega_0 \cap \omega_1 = \varnothing$, $\omega_0 \cup \omega_1 = \Omega)$ 的检验中，行动空间可表为 a_1 和 a_2 两个元素所成的集合，其中 a_1 表示拒绝 H，a_2 表示接受 H. 损失函数定义为 $w(\theta,a_1)=1$ $(\theta \in \omega_0)$; $= 0$ $(\theta \in \omega_1)$ 以及 $w(\theta, a_2) = 0$ $(\theta \in \omega_0)$; $= 1$ $(\theta \in \omega_1)$. 这叫做**简单损失函数** (simple loss function). 采用判决函数 δ 时的第一类错误†或第二类错误†的概率分别为 $r(\theta,\delta)$ $(\theta \in \omega_0)$ 或 $r(\theta,\delta)$ $(\theta \in \omega_1)$ (→ 假设检验).

如果 Ω 能分解为有限个互不相交且非空的子集 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 的并，$\mathscr{A} = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 和 $w(\theta,a_j) = c_{ij}$ $(\theta \in \omega_i)$ (其中 $c_{ij} \geqslant 0$, $c_{ii} = 0$)，则这判决问题叫做 ***n* 判决问题** (*n*-decision problem).

【理想的判决函数】 判决函数论的一个重要问题是：在判决函数空间 D 中选择最好的判决函数 δ. 对两个判决函数 δ_1 和 δ_2，如果对所有的 θ，有 $r(\theta, \delta_1) \leqslant r(\theta, \delta_2)$，且存在一个 θ_0 使 $r(\theta_0, \delta_1) < r(\theta_0,\delta_2)$，那末我们认为取 δ_1 要比取 δ_2 为佳. 这时说 δ_1 比 δ_2 **一致地好** (uniformly better). 如果在 D 中存在一个判决函数 δ_0 比 D 中任何一个判决函数 δ 都一致地好，那末 δ_0 是最好的判决函数. 但这样的判决函数 δ_0 不一定存在. 若在 D 中不存在比 $\bar{\delta}$ 一致地好的 δ，则称 $\bar{\delta}$ 为**容许的** (admissible). 换句话说，$\bar{\delta}$ 是容许的，当且仅当对所有的 $\theta(\in \Omega)$ 和 $\delta(\in D)$，不等式 $r(\theta, \delta) \leqslant r(\theta, \bar{\delta})$ 蕴涵着 $r(\theta,$

$\delta) = r(\theta, \bar{\delta})\ (\theta \in \Omega)$.

除了 $P \in \mathscr{P}$ 以外，没有关于 P 的任何信息时，可考虑选取使预期损失的上限为最小的判决函数 δ^*. 这叫做**极小极大原理** (minimax principle)：

$$\inf_{\delta} \sup_{\theta \in \Omega} r(\theta, \delta) = \sup_{\theta \in \Omega} r(\theta, \delta^*).$$

这个 δ^* 叫做**极小极大判决函数** (minimax decision function) 或**极小极大解** (minimax solution).

设 $\mathfrak{F}$ 为 Ω 的子集的一个 σ 代数，它包含 Ω 的所有可列子集为元素，并设 $r(\theta, \delta)$ 对任何固定的 δ 为 $\mathfrak{F}$ 可测. 如果再给 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上的一个概率测度 ξ，叫做**先验分布** (a priori distribution)，我们选择一个满足

$$\inf_{\delta \in D} \int_{\Omega} r(\theta,\delta) d\xi(\theta) = \int_{\Omega} r(\theta, \hat{\delta}) d\xi(\theta)$$

的 $\hat{\delta}$. 这个 $\hat{\delta}$ 和 $r(\theta, \hat{\delta})$ 的积分

$$\int_{\Omega} r(\theta, \hat{\delta}) d\xi(\theta)$$

分别叫做 **Bayes 解** (Bayes solution) 和关于 ξ 的 **Bayes 风险** (Bayes risk). 设 F 为 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上的先验分布族. 若判决函数 $\hat{\delta}$ 满足

$$\inf_{\xi \in F}\left(\int_{\Omega} r(\theta, \hat{\delta})\, d\xi(\theta) - \inf_{\delta \in D} \int_{\Omega} r(\theta,\delta) d\xi(\theta)\right) = 0,$$

则称 $\hat{\delta}$ 为关于 F 的**广义 Bayes 解** (Bayes solution in the wide sense). 若 $\mathscr{P}$ 受控于 λ，具有 $\mathfrak{B} \times \mathfrak{F}$ 可测的 $f(x, \theta) = dP_\theta / d\lambda$，$w(\theta, a)$ 是 $\mathfrak{F} \times \mathfrak{C}$ 可测的，并且

$$A_x = \left\{\bar{a} \in \mathscr{A} \;\middle|\; \int_{\Omega} w(\theta, \bar{a}) f(x, \theta) d\xi(\theta) = \inf_{a \in \mathscr{A}} \int_{\Omega} w(\theta, a) f(x, \theta) d\xi(\theta)\right\}$$

对任何一个 x 是不空的和 $\mathfrak{C}$ 可测的，则关于 ξ 的 Bayes 解可由 $\delta(A_x \mid x) = 1$ 求出. 对满足 $\int_{\Omega} f(x, \theta)\, d\xi(\theta) \neq 0$ 的样本点 x，在 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 上由

$$\eta(B \mid x, \xi) = \int_{B} f(x, \theta) d\xi(\theta) \Big/ \int_{\Omega} f(x,\theta) d\xi(\theta)$$

定义的概率测度 $\eta(\cdot \mid x, \xi)$，叫做**后验分布** (a posteriori distribution). 为了得到关于 ξ 的一个 Bayes 解，无非是对 x 取使

$$\int_{\Omega} w(\theta, a) d\eta(\theta \mid x, \xi)$$

为最小的行动 a.

设 D' 为判决函数空间 D 的一个子集. 若对任意的 $\delta \in D - D'$，存在一个比 δ 一致地好的 $\delta' \in D'$，则称 D' 为一个**完备类** (complete class). 若对任意的 $\delta \in D$，存在一个 $\delta' \in D'$ 或者比 δ 一致地好或者有与 δ 相同的风险函数，则称 D' 为**本质完备类** (essentially complete class). 若 D' 是完备类，且 D' 的任何真子集都不是完备类，则称 D' 为**最小完备类** (minimal complete class). 若最小完备类存在，则它是唯一的，且与所有容许的判决函数的全体相一致.

【n 判决问题】 在 n 判决问题中，对任意的判决函数 δ，当得到观测值 x 时采取判决 a_i 的概率 $\delta(a_i \mid x)$ 可记作 $\delta_i(x)$. 这时，$\delta_i(x)$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测函数，且满足 $\delta_i(x) \geqslant 0$，$\delta_1(x) + \cdots + \delta_n(x) = 1$. 从而，满足这些条件的 n 个函数 $\delta_1(x), \delta_2(x), \cdots, \delta_n(x)$ 的集合

$$\delta(x) = (\delta_1(x), \cdots, \delta_n(x))$$

可以看做一个判决函数. 记如此定义的 $\delta(x)$ 的全体为 $\mathscr{D}$. 如果参数空间 Ω 是一个有限集 $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k\}$，那末我们可以定义一个由 $\mathscr{D}$ 到 k 维空间 $\boldsymbol{R}^k$ 的映象

$$\phi(\delta) = (r(\theta_1, \delta), \cdots, r(\theta_k, \delta)),$$

并且 $\mathscr{D}$ 的象 $S = \phi(\mathscr{D})$ 在 $\boldsymbol{R}^k$ 上是凸闭集 ([2]). 若对非随机化判决函数造一个上述的向量值函数 $\delta(x)$，则 $\delta(x)$ 的坐标 $\delta_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中只有一个是 1，而其他都是 0. 此时，样本空间 $\mathscr{X}$ 是 $\mathfrak{B}$ 可测子集 B_i $(i = 1, \cdots, n)$ 的互不相交的并，使得 $\delta(a_i \mid x) = 1$，当且仅当 $x \in B_i$. 设 m 是 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的概率测度，如果对满足 $m(A) > 0$ 的任何集 $A \in \mathfrak{B}$ 和满足 $0 < b < m(A)$ 的任何 b，存在 A 的一个子集 $B \in \mathfrak{B}$，使得 $m(B) = b$，则称 m 是不具有原子的. 如果 Ω 是有限集，且所有的 P_θ 是不具有原子的，则非随机化判决函数的全体 $\mathscr{D}^\circ$ 由 ϕ 所得的象 $\phi(\mathscr{D}^\circ)$ 与 $\phi(\mathscr{D})$ 相一致. 这表明 $\mathscr{D}^\circ$ 在判决函数空间 $\mathscr{D}$ 中是一个

本质完备类（[2]）．可是，P_θ 具有原子时，不一定有 $\psi(\mathscr{D}^\circ)=\psi(\mathscr{D})$，但 $\psi(\mathscr{D}^\circ)$ 是个闭集．特别当 $n=2$ 时，对 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上给定的有限多个概率测度 $P_1,\cdots,P_k$，$\boldsymbol{R}^k$ 的点 $(P_1(B),\cdots,P_k(B))$ $(B\in\mathfrak{B})$ 的全体 S 是一个闭集．此外，如果 $P_1,\cdots,P_k$ 都不具有原子，则 S 是一个凸集．这些结果被称为 **Ляпунов 定理**.

一个具有 $\omega_1=\{1\}$，$\omega_2=\{2\}$ 和 $c_{ij}=1$ $(i\neq j)$；$=0$ $(i=j)$ 的 2 判决问题，叫做二分法 (dichotomie)，是最简单的统计判决问题．我们稍为详细地讨论这个问题，为的是要说明判决函数的优良性这个概念．对于一个二分法，$S=\psi(\mathscr{D})$ i) 是一个凸集；ii) 是一个闭集；iii) 关于点 $(1/2,1/2)$ 为对称；iv) 包含点 $(0,1)$ 和 $(1,0)$；v) 是区间 $[0,1:0,1]$ 的一个子集．图 1 中斜线部分就是 S．在图 1 中映射于 S 的下侧边界曲线 $ACDB$ 的 δ 全体构成 $\mathscr{D}$

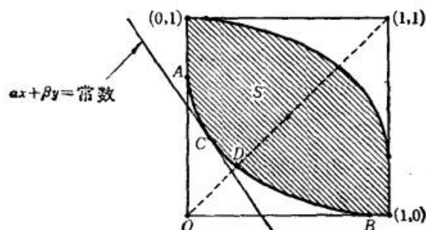


图 1

中的最小完备类；映射于点 D 的 δ 为极小极大解．令 ξ 为一个先验分布，使得 $\xi(1)=\alpha$，$\xi(2)=\beta$ $(\alpha+\beta=1,\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0)$．那末一个关于 ξ 的 Bayes 解，是映射于 S 的方向系数为 $-\alpha/\beta$ 的切线上的切点 C 的 δ，且是

$$E=\{x\mid \alpha f(x)<\beta g(x)\}$$

的示性函数，此处 f 和 g 分别是 P_1 和 P_2 关于 $\lambda=P_1+P_2$ 的 Radon-Nikodym 导数 $dP_1/d\lambda$ 和 $dP_2/d\lambda$，或者说，f 和 g 是 $\mathscr{X}$ 上的可测函数，使得对任意的可测集 E，我们有 $P_1(E)=\int_E fd\lambda$ 和 $P_2(E)=\int_E gd\lambda$．这个事实表明，由 Neyman-Pearson 基本引理†求得的最大功效检验不外是 Bayes 解.

【完备类定理】 设 $\mathscr{P}$ 是受控于 σ 有限测度 λ 的，且 $f(x,\theta)$ 是 P_θ 关于 λ 的 Radon-Nikodym 导数．设 L 是 $L_1(\mathscr{X},\lambda)$ 的子空间包含着 $\{f(x,\theta)\mid\theta\in\Omega\}$，并且考虑 $\mathscr{X}$ 上有界可测函数之间的下述等价关系：φ_1 和 φ_2 是等价的，当且仅当 $\int_{\varphi_1}fd\lambda=\int_{\varphi_2}fd\lambda$ 对每一个 $f\in L$ 成立．我们还假定 L 的对偶空间是刚定义的有界可测函数等价类的线性空间 $\mathfrak{M}$．设 $C_0(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}$ 上具有紧支集的连续函数的全体，$\pi\circ\alpha$ 是 $\alpha\in C_0(\mathscr{A})$ 关于 $\mathscr{A}$ 上概率测度 π 的积分，以及对 $g\in L$ 和 $\delta\in D$，$g\circ\delta$ 是积分

$$\int\delta(\cdot\mid x)g(x)d\lambda.$$

作为判决函数空间的围绕 $\delta_0\in D$ 的邻域的基，我们考虑

$$V(\delta_0;\alpha,g,\varepsilon)=\{\delta\mid |g\circ\delta_0\circ\alpha-g\circ\delta\circ\alpha|<\varepsilon\},$$

此处 $\alpha\in C_0(\mathscr{A})$，$g\in L$，$\varepsilon>0$.

设 F 为给 Ω 的一有限集赋予概率 1 的先验分布 ξ 的全体，B 为关于 $\xi(\in F)$ 的 Bayes 解的全体、以及 W 为关于 F 的广义 Bayes 解的全体．设 $\mathscr{A}$ 为局部紧†、可分†的距离空间，且 $w(\theta,a)$ 对固定的 θ 关于 a 为下半连续函数．那末，若 D 是紧的且是凸的 $(0\leqslant\alpha\leqslant 1$，对 $\delta_1,\delta_2\in D$，有 $\alpha\delta_1+(1-\alpha)\delta_2\in D)$，则 B 的闭包 $\bar{B}$ 与 W 的交 $\bar{B}\cap W$ 是本质完备类（[3]）．此外，如果 Ω 关于距离

$$d(\theta_1,\theta_2)=\sup_{B\in\mathfrak{B}}|P_{\theta_1}(B)-P_{\theta_2}(B)|$$

是紧的，且 Ω 上的函数族 $\{w(\theta,a)\mid a\in\mathscr{A}\}$ 是一致有界和同等连续的，那末关于先验分布 ξ 的 Bayes 解的全体 B 本身是一个完备类（[1]）．这些命题叫做**完备类定理** (complete class theorem)．（关于在每个特殊问题中的完备类和个别程序的容许性 → 假设检验，统计估计，公式 23.）

两个可测空间 $(S,\mathscr{S})$ 和 $(R,\mathscr{R})$ 称为同构的，如果存在一个由 S 到 R 上的一一对应 ρ，使得 $E\in\mathscr{S}$ 蕴涵 $\rho(E)\in\mathscr{R}$，反之，$\rho(E)\in\mathscr{R}$

蕴涵 $E\in\mathscr{S}$. 设 D 为样本空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 和行动空间 $(\mathscr{A},\mathfrak{C})$ 上有定义的判决函数的全体，T 为一个在 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上定义的、取值于可测空间 $(\mathscr{Y},\mathfrak{E})$ 的统计量†，以及 D^* 是以 $(\mathscr{Y},\mathfrak{E})$ 为样本空间而对行动空间 $(\mathscr{A},\mathfrak{C})$ 有定义的判决函数的全体．对 $\delta^*\in D^*$ 使 $\delta(C|x)=\delta^*(C|T(x))\ (C\in\mathfrak{C})$ 的 $\delta\in D$ 的全体记作 D_T，如果 i) T 是一个充分统计量†；ii) $(\mathscr{A},\mathfrak{C})$ 与 $\boldsymbol{R}^k$ 及其 Borel 子集类所成的可测空间同构，那末 D_T 是 D 中的本质完备类．反之，如果 i) $\mathscr{P}$ 是受控族；ii) $f(x,\theta)$ 在 $\mathscr{X}$ 上常为正；iii) 对 Ω 的任意两点 θ_1 和 θ_2，存在 $\theta_3\in\Omega$，使得对任何的 $a\in\mathscr{A}$，$w(\theta_i,a)\ (i=1,2,3)$ 中不会有两个同时达到最小，那末 D_T 在 D 中的本质完备性蕴涵着 T 的充分性（[4]，[5]）（→统计估计）.

设在 $\mathscr{X}$，Ω 和 $\mathscr{A}$ 上分别存在一对一变换群 G，$\bar{G}$ 和 $\tilde{G}$（属于 G，$\bar{G}$ 和 $\tilde{G}$ 的变换分别关于 $\mathfrak{B}$，$\mathfrak{F}$ 和 $\mathfrak{C}$ 为可测†变换），以及存在分别由 G 到 $\bar{G}$ 和 $\tilde{G}$ 的同态对应 $g\to\bar{g}$ 和 $g\to\tilde{g}$，使得对 $B\in\mathfrak{B}$ 有 $P_\theta(g^{-1}B)=P_{\bar{g}\theta}(B)$ 和 $w(\bar{g}\theta,\tilde{g}a)=w(\theta,a)$，则判决问题 $(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mathscr{P},\Omega,\mathscr{A},\mathfrak{C},w,D)$ 叫做关于 $(G,\bar{G},\tilde{G})$ 是**不变的** (invariant). 在关于 $(G,\bar{G},\tilde{G})$ 为不变的判决问题中，满足 $\delta(\tilde{g}B|gx)=\delta(B|x)$ 的判决函数叫做**不变判决函数** (invariant decision function).

设变换群 G 是局部紧的，且是紧子集的可数类 $\{K_n\}$ 的并集．令 Γ 是 G 的 Borel 子集的 σ 代数，使映射 $(g,x)\to(g,gx)$ 在下述意义上是可测的：即 $\Gamma\times\mathfrak{B}$ 中任何集的逆象还是 $\Gamma\times\mathfrak{B}$ 中的集．对于这样的 Γ，G 通过 x 的轨道† (orbit) 是 Γ 可测的．我们假定下列条件：(1) $\mathscr{P}$ 是受控的，(2) G 有效地作用在 $\mathscr{X}$ 上，(3) $\bar{G}$ 在 Ω 上是可迁的，(4) 对 G 的任何紧子集 J，

$$\lim_{n\to\infty}\{\mu^r(K_n)/\mu^r(K_n\cdot J^{-1})\}=1,$$

其中 μ^r 是 G 上的右不变 Haar 测度†以及 $K_n\cdot J^{-1}=\{gh^{-1}|g\in K_n,h\in J\}$，(5) 对 $\mathscr{X}$ 上给定的 $G(x)\ni z$，存在条件概率分布† $P_\theta(\cdot;z)$，(6) 积分 $\int_{G(x)}w(\theta,\bar{g}a)P_\theta(dgx;z)$ 对于任何的 θ 与 $z\in G(x)$ 能达到它的最小值 $b(\theta,z)$，且对 a 一致地有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_{K_nx}w(\theta,\bar{g}a)P_\theta(dgx;z)-b(\theta,z)\right\}\geqslant 0,$$

其中 $K_nx=\{gx|g\in K_n\}$. 那末最佳不变判决函数存在，并且就是极小极大解（[6]）（→假设检验）. 在 [11] 中指出，某些不变极小极大判决函数不是容许的.

【信息量】 在判决问题 $\mathscr{E}=(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mathscr{P},\Omega,\mathscr{A},\mathfrak{C},w,D)$ 中，当 $\mathscr{P}$ 是由有限个概率测度 $P_{\theta_1},P_{\theta_2},\cdots,P_{\theta_n}$ 构成时，$\boldsymbol{R}^n$ 的子集 $\{(r(\theta_1,\delta),r(\theta_2,\delta),\cdots,r(\theta_n,\delta))|\delta\in D\}$ 记作 $L(\mathscr{E})$. 在 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上有定义的概率测度的集合 $\mathscr{P}_1=(P_{\theta_1},P_{\theta_2},\cdots,P_{\theta_n})$ 和 $\mathscr{P}_2=(P_{\theta_1'},P_{\theta_2'},\cdots,P_{\theta_n'})$ 无论对任何行动空间 $\mathscr{A}$ 与损失函数 $w(\theta,a)$ 的判决问题 $\mathscr{E}_i=(\mathscr{X},\mathfrak{B},\mathscr{P}_i,\Omega,\mathscr{A},\mathfrak{C},w,D)\ (i=1,2)$ 都常有 $L(\mathscr{E}_1)\supset L(\mathscr{E}_2)$ 时，则称实验 $\mathscr{P}_1$ 比实验 $\mathscr{P}_2$ **更富有信息** (more informative)（[8]） 这时，对于判断随机变量 X 的分布是 $(P_{\theta_1'},P_{\theta_2'},\cdots,P_{\theta_n'})$ 中哪一个的任何判决程序，都存在一个风险更小的关于 $(P_{\theta_1},P_{\theta_2},\cdots,P_{\theta_n})$ 的判决程序．正因为风险小，辨别事物的能力就大，而辨别能力大小意味着实验对某些判断所赋予的信息量，所以认为 $L(\mathscr{E})$ 代表信息量．但是，要比较这个集合的形状，一般是很困难的.

S. Kullback-R. A. Leibler 定义了如下的信息量（[7]）. 当 X 服从关于 λ 的广义密度函数 $f_1\,(>0)$ 或 $f_2\,(>0)$ 的分布时，我们定义

$$I(X;1,2)=I(f_1,f_2)=\int_X\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}f_1(x)d\lambda,$$

并叫做**K-L信息数** (Kullback-Leibler information number). 这个数只由图 1 的集合 S 唯一确定，并且 S 越大，$I(f_1,f_2)$ 就越大．若 f_1 和 f_2 的先验概率分别为 $\xi(f_1)$ 和 $\xi(f_2)$ $(\xi(f_1)+\xi(f_2)=1)$，以及后验概率分别为 $\eta(f_1|x)$ 和 $\eta(f_2|x)$，

则由 Bayes 定理†，有

$$\log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \log \frac{\eta(f_1|x)}{\eta(f_2|x)} - \log \frac{\xi(f_1)}{\xi(f_2)},$$

上式右边表示在观测到 x 后状态出现概率的变化，而左边在 f_1 下的均值无非就是 $I(f_1, f_2)$. K-L 信息数具有如下性质. i) $I(X: 1,2) \geqslant 0$, $I(X: 1, 2) = 0 \Longleftrightarrow f_1 = f_2$; ii) 若 X 与 Y 独立，则 $I(X: 1,2) + I(Y: 1,2) = I(X, Y: 1, 2)$; iii) 若统计量 $T = t(x)$，则 $I(X: 1,2) \leqslant I(T: 1, 2)$，当且仅当 T 对 $\{f_1, f_2\}$ 为充分时等号成立; iv) 若 $X_1, \cdots, X_n$ 为独立且服从同一分布，则 $I(X_1, \cdots, X_n: 1, 2) = nI(X_1: 1, 2)$.

设 Ω 是实数直线，且统计量 T 的联合分布的广义密度函数 $g(t:\theta)$ 有下述性质: i) 使 $g(t:\theta) > 0$ 的 t 的集合与 θ 无关, ii) $g(t:\theta)$ 关于 θ 两次连续可偏微, iii) 关于 θ 的微分与关于 t 的积分顺序是可交换的. 那末对 θ 的微小变化 $d\theta$，有 $I(T:\theta, \theta+d\theta) = I(T:\theta)d\theta^2$. 此处

$$I(T:\theta) = \int_X \left(\frac{\partial \log g(t:\theta)}{\partial \theta}\right)^2 g(t:\theta)d\lambda,$$

这里，$I(T;\theta)$ 跟 Fisher 信息量†相一致（→ 统计估计）.

作为能够无误地识别无限多个随机变量 $X_1, X_2, \cdots$ 分别具有密度函数 $f_1, f_2, \cdots$ 或 $g_1, g_2, \cdots$ 的充分必要条件，可举下面的**角谷定理**（[2]）: 设 $X_1, X_2, \cdots$ 为互相独立，且 X_i 服从 f_i 或 g_i. 当 X_i 服从 f_i 时，记 $(X_1, X_2, \cdots)$ 的分布为 F; 当 X_i 服从 g_i 时，记 $(X_1, X_2, \cdots)$ 的分布为 G. 为了判断 $(X_1, X_2, \cdots)$ 是服从 F 还是服从 G，我们把判错记作 1，判对记作 0. 在这种判决问题 $\mathscr{E}$ 中，一般有 $L(\mathscr{E}) \subset \varDelta$（其中 $\varDelta = \{(x, y) | 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$），而 $L(\mathscr{E}) = \varDelta$ 的充分必要条件为

$$\prod_{n=1}^{\infty} \rho(f_n, g_n) = 0,$$

此处

$$\rho(f_n, g_n) = \int_X \sqrt{f_n(x) g_n(x)}\, dx.$$

因此，若 X_n 有同一分布，则 $L(\mathscr{E}) = \varDelta$，并且通过独立地观测 $X_1, X_2, \cdots$，总可辨别 $\{X_i\}$ 是服从 F 还是服从 G.

【与对策论的关系】 统计判决函数论与对策论†有密切关系. 从对策论的观点来看，统计判决问题可以认为是"自然界"与"统计家"之间的博奕. 自然界提出的策略†是"变量 X 的真正的分布法则 P^{θ}"或"真正的 θ"，而统计家的策略是"判决函数 δ". 这时，风险函数 $r(\theta, \delta)$ 被看做是统计家支付给自然界的金额(支付函数). 先验分布 ξ 是自然界的混合策略，随机化判决函数是统计家的混合策略. 极小极大解不外是统计家的极小极大策略，自然界的极小极大策略叫做**最不利的先验分布** (least favourable a priori distribution). 若把判决问题严格确定†为一个博奕，则极小极大解是广义 Bayes 解（→ 对策论）([8]).

在判决函数论中序贯检验†可描述如下: 设样本空间 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 为一串可测空间 $\{(\mathscr{X}_n, \mathfrak{B}_n)\}$ 的直积，且 $\mathscr{P}$ 是 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上的概率测度的集合. 那末，$x \in \mathscr{X}$ 可表为 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ $(x_n \in \mathscr{X}_n)$，且行动 a 表为形状 $(s_1, s_2, \cdots, s_n, a^t)$. 这里 s_i 是一个正整数的有限集，这些整数表示 x 坐标在第 i 阶段被观测的序号，$s_1, \cdots, s_n$ 是互不相交的. a^t 叫做**最后判决** (terminal decision)，而行动 a 意味着人们在第 i 阶段的实验 $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 中观测到 x_j $(j \in s_i)$ 后采取最后判决 a^t. 令 a^t 的全体为 $\mathscr{A}^t$，且 $(s_1, \cdots, s_n, a^t)$ 的全体为 $\mathscr{A}$. 判决函数 δ 虽有形状 $\delta(s_1, s_2, \cdots, s_n, C|x)$ $(C \subset \mathscr{A}^t)$，但作为 x 的函数，它与序号不在 $\bigcup_{i=1}^{n} s_i$ 内的坐标值无关. 损失函数 $w(\theta, (s_1, \cdots, s_n, a^t))$ 可表为最后判决 a^t 引起的损失 $u(\theta, a^t)$ 和实验**费用** (cost) $c(s_1, \cdots, s_n, x)$ 之和 ([1]). 这里，费用可以是观测值 x 的函数，但它与序号不属于 $\bigcup_{i=1}^{n} s_i$ 的坐标值无关（→ 假设检验，统计质量管理）.

【参】 [1] A. Wald, Statistical decision functions, John Wiley, 1950 (中译本: A. 瓦尔特，统计决策函数，上海科学技术出版社，1960); [2] 工藤弘吉，数理統計学，現代数学講座，共立出版，1957; [3] L. LeCam, An extension of Wald's theory of statistical decision functions,

Ann. Math. Statist., **26** (1955), 69—81; [4] 工藤弘吉, 統計量の充足性と完備性について, 数学, **8** (1957), 129—138; [5] R. R. Bahadur, Sufficiency and statistical decision functions, Ann. Math. Statist., **25** (1954), 423—462; [6] H. Kudô (工藤弘吉), On minimax invariant estimates of the transformation parameter, Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ., **6** (1955), 31—73; [7] S. Kullback, Information theory and statistics, John Wiley, 1959; [8] D. H. Blackwell-M. A. Girshick, Theory of games and statistical decisions, John Wiley, 1954; [9] L. Weiss, Statistical decision theory, McGraw-Hill, 1961; [10] H. Raiffa-R. Schlaifer, Applied statistical decision theory, Harvard Univ. Graduate School of Business Administration, 1961; [11] W. James-C. Stein, Estimation with quadratic loss, Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob. 1, Univ. of California Press (1961), 361—379.

统计估计 [英 statistical estimation 法 estimation statistique 德 statistische Schätzung 俄 статистическая оценка 日 統計的推定] 统计推断† 的一个重要问题,就是从观测到的样本值†去估计总体分布†参数†(或其函数). 这个问题可以叙述如下(→统计量). 设 $\mathscr{P}=\{P_\theta\}$ $(\theta\in\Omega)$ 是在可测空间†$(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上定义的以参数 θ 为附标的概率分布族. 设 X 是取值于 $\mathscr{X}$ 的随机变量†, 且服从概率分布 $P(\in\mathscr{P})$. 使 $P=P_\theta$ 的 θ 值叫做参数的**真值**. 设我们观测随机变量 X, 得到值 $x(\in\mathscr{X})$. 对 Ω 上给定的函数 g, 由 x 来估计 g 在 θ 处的真值 $g(\theta)$, 叫做**统计估计**问题. g 叫做**参数函数** (parametric function),它的值域通常是 $\boldsymbol{R}^1$ 的子集,但有时是 $\boldsymbol{R}^k$ 或函数空间的子集. 统计估计有点估计和区间估计(区域估计)之分, 前者用来估计"$g(\theta)$ 是某一个值", 而后者用来估计"某区域包含 $g(\theta)$". 预测随机变量取值的容许区域的问题, 也可放在统计估计理论中进行研究.

【点估计】 由随机变量 X 的观测值 x 来估计"$g(\theta)$ 的值是 $\varphi(x)$", 这种统计判决程序叫做**点估计** (point estimation). 此处 φ 是由样本空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 到可测空间 $(\mathscr{A},\mathfrak{C})$ 的可测映射. φ 或随机变量 $\varphi(X)$ 叫做 $g(\theta)$ 的**估计量** (estimator), 而由观测值 x 所确定的值 $\varphi(x)$ 叫做 $g(\theta)$ 的**估计值** (estimate). 这个估计值为了与下述估计量的广义概念对照, 有时称作**非随机化估计值** (nonrandomized estimate). 由 $\mathscr{X}$ 到 $(\mathscr{A},\mathfrak{C})$ 上概率分布全体所成集合的映射, 叫做**随机化估计量** (randomized estimator). 特别当概率分布退化为一点分布时, 这后者归结为非随机化估计量. 以下如无特别声明, 我们总假定 $\mathscr{A}=\boldsymbol{R}^1$ 和 $\mathfrak{C}=\mathfrak{B}^1$ (Borel 集的全体). 关于 P_θ 的均值和方差,我们分别记作 E_θ 和 V_θ.

【无偏估计量】 若对所有的 $\theta\in\Omega$,

$$E_\theta(\varphi(X))=g(\theta),$$

则称 $\varphi(X)$ 为 $g(\theta)$ 的**无偏估计量** (unbiased estimator). 有无偏估计量的参数函数 g 叫做**可估的** (estimable).

$$b(\theta)=E_\theta(\varphi(X))-g(\theta)$$

通常叫做估计量 $\varphi(X)$ 的**偏倚** (bias).

如果我们只考虑无偏估计量, 那末最好是选择方差 $V_\theta(\varphi(X))$ 关于 $\theta\in\Omega$ 为一致最小的那个估计量. 我们有下面的 **Rao-Blackwell 定理**: 若 $T=t(X)$ 是一个充分统计量†, 则对 $g(\theta)$ 的任意无偏估计量 $\varphi(X)$, 条件均值† $\phi(t)=E(\varphi(X)|T=t)$ 产生 $g(\theta)$ 的另一个无偏估计量 $\varphi^*(X)=\phi(t(X))$, 且 $V_\theta(\varphi^*)\leqslant V_\theta(\varphi)$ $(\theta\in\Omega)$, 而当且仅当 $\varphi(x)=\varphi^*(x)$ (a. e. $\mathscr{P}$) 时等号成立. 这里记号 a. e. 的意义如下: a. e. $\mathscr{P}$ 是指命题对所有的 $\theta\in\Omega$ 关于 P_θ 以概率 1 成立. $g(\theta)$ 的一个估计量 φ 叫做**一致最小方差** (uniformly minimum variance, 略为 UMV) **无偏估计量**, 如果 φ 对 $g(\theta)$ 为无偏的, 且在 $g(\theta)$ 的无偏估计量中其方差对 $\theta\in\Omega$ 一致地为最小. **Lehmann-Scheffé 定理**: 若 T 是一个完备的†充分统计量,则对任意的可估参数函数,存在唯一的 UMV 无偏估计量, 且是 T 的函数. 例: 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自具有指数型分布 P_θ 的总体的随机样本,其密度函数为

$$p_\theta(x)=\beta(\theta)u(x)\exp\left(\sum_{i=1}^k\alpha_i(\theta)t_i(x)\right),$$

且集合 $\{(\alpha_1(\theta),\cdots,\alpha_k(\theta))|\theta\in\Omega\}$ 含有 $\boldsymbol{R}^k$ 的开集,则 $T=(t_1(X),\cdots,t_k(X))$ 是一个完备充分统计量,从而 T 的任意实值可测函数 $\phi(T)$ 是参数函数 $E_\theta(\phi(T))$ 的唯一的 UMV 无偏估计量.

【无偏估计量的方差的下限】 在完备充分统计量不存在的情形，我们依然想使无偏估计量在特定一点 $\theta=\theta_0$ 的方差为最小. 在下面的三个定理中,对于密度函数 $p_\theta(x)$，置 $\pi_\theta(x)=p_\theta(x)/p_{\theta_0}(x)$.

Barankin 定理：设 $\mathfrak{M}$ 是参数函数 $g(\theta)$ 的方差在 $\theta=\theta_0$ 为有限的无偏估计量的全体. 假定 $\mathfrak{M}$ 不是空的,且对所有的 θ,

$$E_{\theta_0}((\pi_\theta(X))^2)<\infty.$$

那末，在 $\mathfrak{M}$ 中存在一个使方差在 θ_0 处为最小的估计量 φ_0. 实际上，$\{\varphi_0\}=\mathfrak{M}\cap\mathfrak{P}_0$，此处 $\mathfrak{P}_0$ 是由 $\{\pi_\theta(X)|\theta\in\Omega\}$ 生成的线性空间. 如果在所有关于概率分布 P_{θ_0} 平方可积函数的空间 L_2 中，由 $(\varphi,\psi)=E_{\theta_0}(\varphi(X)\psi(X))$ 来定义内积 $(\varphi,\ \psi\in L_2)$，则 φ_0 是 φ 在 $\mathfrak{P}_0$ 的投影. 此外,

$$V_{\theta_0}(\varphi_0(X))=\sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g(\theta_i)g(\theta_j)\lambda^{ij}\right\},$$

此处，sup（上确界）跑遍所有正整数 n 和 $\theta_1,\cdots,\theta_n\in\Omega$，$\lambda^{ij}$ 是以 $\lambda_{ij}=E_{\theta_0}(\pi_{\theta_i}(X)\pi_{\theta_j}(X))$ 为元素的 $n\times n$ 矩阵 (λ_{ij}) 的逆的 $(i,\ j)$ 元素. 由这个定理可导出下面两个定理.

定理：设 $\Omega\subset\boldsymbol{R}^1$. 对 $g(\theta)$ 的任意的无偏估计量 $\varphi(X)$，在某些正则条件下,有

$$V_{\theta_0}(\varphi(X))\geqslant(g'(\theta_0))^2/E_{\theta_0}((\partial\log p_\theta(X)/\partial\theta|\theta=\theta_0)^2)$$

(**Cramér-Rao 不等式**)，其中等号只对指数型分布 $p_\theta(x)=\beta(\theta)u(x)\exp(\alpha(\theta)\varphi(x))$ 才成立. 一个正则条件是 $E_{\theta_0}((\pi_\theta(X))^2)<\infty$ $(\theta\in\Omega)$；$p_\theta(x)$ 在 $\theta=\theta_0$ 处有偏导数 $p'_{\theta_0}(x)$ (a. e. P_{θ_0})；且

$$\lim_{\Delta\theta\to0}E_{\theta_0}\left(\left(\frac{p_{\theta_0+\Delta\theta}(X)-p_{\theta_0}(X)}{p_{\theta_0}(X)\Delta\theta}-\frac{p'_{\theta_0}(X)}{p_{\theta_0}(X)}\right)^2\right)=0.$$

(另外的一例见 [1].)

系：设 $X=(X_1,\ \cdots,\ X_n)$ 是来自密度函数为 $f(x_1,\theta)$ 的分布的随机样本,且设

$$I(\theta)=E_\theta((\partial\log f(X_1,\theta)/\partial\theta)^2),$$

则由于

$$E_\theta((\partial\log p_\theta(X)/\partial\theta)^2)=nI(\theta),$$

Cramér-Rao 不等式成为

$$V_{\theta_0}(\varphi(X))\geqslant(g'(\theta_0))^2/nI(\theta_0).$$

数 $I(\theta)$ 叫做分布 $f(x,\theta)$ 的**信息量** (amount of information)，而使等号成立的无偏估计量 $\varphi(X)$ 叫做 $g(\theta)$ 的**有效估计量** (efficient estimator).

定理：对 $g(\theta)$ 的任意无偏估计量 $\varphi(X)$，在某种正则条件下,我们有

$$V_{\theta_0}(\varphi(X))\geqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}g^{(i)}(\theta_0)g^{(j)}(\theta_0)K^{ij}$$

(**Bhattacharya 不等式**)，此处

$$g^{(i)}(\theta_0)=d^ig(\theta)/d\theta^i|_{\theta=\theta_0},$$

且 K^{ij} 是以

$$K_{ij}=E_{\theta_0}\left(\frac{p^{(i)}_{\theta_0}(X)}{p_{\theta_0}(X)}\cdot\frac{p^{(j)}_{\theta_0}(X)}{p_{\theta_0}(X)}\right),\quad i,j=1,\cdots,k$$

为元素的矩阵 (K_{ij}) 的逆的 $(i,\ j)$ 元素. 一个正则条件的例子是：$E_{\theta_0}((\pi_\theta(X))^2)<\infty$ $(\theta\in\Omega)$；$p_\theta(x)$ 在 $\theta=\theta_0$ 处关于 θ 为 k 次可偏微 (a. e. P_{θ_0})；第 i 阶 $(1\leqslant i\leqslant k)$ 偏导数 $p^{(i)}_{\theta_0}(x)$ 满足

$$\lim_{\Delta\theta\to0}E_{\theta_0}\left(\left(\frac{\Delta^ip_\theta(X)|_{\theta=\theta_0}}{p_{\theta_0}(X)(\Delta\theta)^i}-\frac{p^{(i)}_{\theta_0}(X)}{p_{\theta_0}(X)}\right)^2\right)=0.$$

若参数 $\theta=(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)$ 是多维的，则对 $g(\theta)$ 的任意无偏估计量 $\varphi(X)$，在与一维情形相同的条件下,我们有

$$V_{\theta_0}(\varphi(X))\geqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}g'_i(\theta_0)g'_j(\theta_0)J^{ij},$$

此处 $g'_i(\theta_0)=\partial g(\theta)/\partial\theta_i|_{\theta=\theta_0}$，且 J^{ij} 是以

$$J_{ij}=E_{\theta_0}(\partial\log p_\theta(X)/\partial\theta_i|_{\theta=\theta_0}\cdot\partial\log p_\theta(X)/\partial\theta_j|_{\theta=\theta_0})$$

为元素的矩阵 $\boldsymbol{J}=(J_{ij})$ 的逆的 $(i,\ j)$ 元素. 此外，若 $\theta^*(X)=(\theta^*_1(X),\ \cdots,\ \theta^*_k(X))$ 是 $\theta=(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 的无偏估计量(即 $E_\theta(\theta^*_i(X))=\theta_i,\ i=1,2,\cdots,k$)，则 $\theta^*(X)$ 在 θ_0 处的协方差矩阵 $V_{\theta_0}(\theta^*(X))\geqslant\boldsymbol{J}^{-1}$ (亦即差 $V_{\theta_0}(\theta^*(X))-\boldsymbol{J}^{-1}$ 是非负定矩阵[†]). 若 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自密度函数为 $f(x_1,\theta)$ 的分布的随机样本，且设

$$I_{ij}=E_{\theta_0}(\partial\log f(X_1,\theta)/\partial\theta_i|_{\theta=\theta_0}$$

$\times \partial \log f(X_1, \theta)/\partial\theta_i|_{\theta=\theta_0})$,

则 $J_{ij} = nI_{ij}$. 矩阵 $\boldsymbol{I} = (I_{ij})$ 叫做分布 $f(x_1,\theta)$ 的**信息矩阵** (information matrix).

【中位数无偏性】 若对任意的 $\theta \in \Omega$, 当 X 服从 P_θ 时, 估计量 $\varphi(X)$ 之分布的中位数是参数函数 $g(\theta)$, 亦即

$$P_\theta\{\varphi(X)<g(\theta)\} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant P_\theta\{\varphi(X) \leqslant g(\theta)\},$$

那末 $\varphi(X)$ 叫做 $g(\theta)$ 的**中位数无偏估计量** (median-unbiased estimator). 为了和此种无偏性相区别, 前面说的无偏性有时叫做**均值无偏** (mean-unbiased)性. 若 $\varphi(X)$ 是 $g(\theta)$ 的中位数无偏估计量, 则对任意的广义单调实函数 h, 估计量 $h(\varphi(x))$ 是参数函数 $h(g(\theta))$ 的中位数无偏估计量. 也就是说, 中位数无偏性在单调变换下能够保持下来, 而均值无偏性就不是这种情形.

如果我们只考虑参数 θ 的所有中位数无偏估计量, 那末作为衡量估计量好坏的一个指标, 可使用函数

$$\begin{aligned} a(u,\theta,\varphi) &= P_\theta\{\varphi(X) \leqslant u\}, \quad 当\ u<\theta\ 时, \\ &= P_\theta\{\varphi(X) \geqslant u\}, \quad 当\ u>\theta\ 时. \end{aligned}$$

对所有的 u 和 θ $(u \neq \theta)$, 使函数 a 的值为最小的估计量 $\varphi(X)$ 叫做一致最佳的. 这个性质在单调变换下也能保持. **A. Birnbaum 定理**: 如果分布族 $\{P_\theta\}$ $(\theta \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^1)$ 关于统计量 $t(X)$ 具有单调似然比†, 且 $T = t(X)$ 的分布函数 $F(t,\theta)$ 对每个 θ 关于 t 连续和对每个 t 关于 θ 连续, 那末存在参数 θ 的一个一致最佳中位数无偏估计量. 实际上, 若 $\theta = \hat\theta(t)$ 是 $F(t, \theta) = 1/2$ 的解, 则 $\varphi(X) = \hat\theta(t(X))$ 就是所求的估计量.

【按统计判决理论的系统描述】 (→ 统计判决函数) 当参数的真值为 θ 时, 由参数的估计值 (或行动) a 招来的损失记作 $W(\theta, a)$, 则参数函数 $g(\theta)$ 的估计量 $\varphi(X)$ 的风险函数†可定义为

$$r(\theta, \varphi) = E_\theta(W(\theta, \varphi(X))).$$

统计判决理论处理这样的问题: 通过适当的作法, 选择 φ 使风险函数为最小. 这里或即将提到的完备类, Bayes 估计量, 容许性, 极小极大估计量和不变估计量是这个理论的最重要的概念. 上述无偏估计量也是这个理论的一个重要概念.

估计量的集合 C 称作是本质完备类†, 如果对任意的估计量 φ, 在 C 中存在一个 φ_0, 使得

$$r(\theta, \varphi_0) \leqslant r(\theta, \varphi), \quad \theta \in \Omega.$$

如果行动空间 $\mathscr{A}$ 是 R 并且损失函数 $W(\theta, a)$ 对于任意的 θ 关于 $a \in \mathscr{A}$ 是凸的, 那末我们有下面的两个定理. **Hodges-Lehmann 定理**: 如果当 $|a| \to \infty$ 时 $W(\theta,a) \to \infty$, 则非随机化估计量全体所成的集合是本质完备类. 定理: 若 $T = t(X)$ 是一个充分统计量, 则 T 的函数全体是本质完备类. 实际上, 对 $g(\theta)$ 的任意估计量 $\varphi(X)$, 条件均值

$$\phi(t) = E(\varphi(X)|T = t)$$

产生一个估计量 $\varphi_0(X) = \phi(t(X))$ 满足

$$r(\theta, \varphi_0) \leqslant r(\theta, \varphi) \quad (\theta \in \Omega),$$

其中, 当且仅当 $\varphi \equiv \varphi_0$ 时等号成立, 倘若 W 是狭义凸的. 形如

$$W(\theta, a) = \lambda(\theta)(a - g(\theta))^2, \quad \lambda(\theta) > 0$$

的损失函数 W 叫做**平方损失函数** (quadratic loss function). 特别当 $\lambda(\theta) \equiv 1$ 时,

$$r(\theta, \varphi) = E_\theta((\varphi(X) - g(\theta))^2)$$

叫做 $g(\theta)$ 的估计量 $\varphi(X)$ 的**均方误差** (mean square error). 若 $\varphi(X)$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计量, 则均方误差与方差 $V_\theta(\varphi(X))$ 是一致的.

【Bayes 估计量】 考虑 $(\Omega,\mathfrak{F})$ 上的先验分布† ξ, 这时平均风险 $r(\xi,\varphi) = E_\xi(r(\theta, \varphi)) = E_\xi E_\theta(W(\theta, \varphi(X)))$ 遍及其值域的下确界, 叫做关于 ξ 的 Bayes 风险†, 而使这个 $r(\xi, \varphi)$ 达到下确界的 $g(\theta)$ 的估计量 $\varphi(X)$ 叫做关于 ξ 的 **Bayes 估计量** (Bayes estimator). Bayes 估计量可如下求得: 假定密度函数 $p_\theta(x)$ 为 $(\mathfrak{B}, \mathfrak{F})$ 可测, 损失函数 $W(\theta, a)$ 为 $(\mathfrak{F}, \mathfrak{C})$ 可测, 且

$$\int_\Omega p_\theta(x) d\xi(\theta) < \infty.$$

对每一观测值 x, Bayes 估计量 $\varphi(X)$ 取值 a, 使

$$r(a|x)=E_\xi(W(\theta,a)|x)$$
$$=\int_\Omega W(\theta,a)p(\theta|x)d\xi(\theta)$$

为最小，此处 $r(a|x)$ 对给定的 x 是 $W(\theta,a)$ 关于 θ 的分布

$$p(\theta|x)d\xi(\theta)=\frac{p_\theta(x)d\xi(\theta)}{\int_\Omega p_\theta(x)d\xi(\theta)}$$

的条件均值．$r(a|x)$ 叫做**后验风险**（a posteriori risk）.

Girshick-Savage 定理：假定损失函数是平方的．对每个 x，后验风险 $r(a|x)$ 要么是 ∞（对 a 的每一个值），要么是有限的（对 a 的所有或只一个值）．若关于 ξ 的 Bayes 风险是有限的，则关于 ξ 的 Bayes 估计量 $\varphi^*(X)$ 可唯一确定如下：若对 a 的仅一个值 a_0 有 $r(a_0|x)<\infty$，则 $\varphi^*(x)=a_0$；若对所有的 a 有 $r(a|x)<\infty$，则 $\varphi^*(x)=E_\xi(g(\theta)\lambda(\theta)|x)/E_\xi(\lambda(\theta)|x)$．若 $E_\xi(\lambda(\theta))<\infty$，则 Bayes 估计量要么是有偏的，要么是平均风险为 0．

【估计量的容许性】 参数函数 $g(\theta)$ 的估计量 $\varphi_0(X)$ 叫做**容许的**（admissible），当且仅当对 $g(\theta)$ 的任意估计量 $\varphi(X)$，不等式 $r(\theta,\varphi)\leqslant r(\theta,\varphi_0)$ $(\theta\in\Omega)$ 蕴涵 $r(\theta,\varphi)\equiv r(\theta,\varphi_0)$，$\theta\in\Omega$．

若一个估计量是关于某先验分布的唯一的 Bayes 估计量，则它是容许的．例：设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态分布 $N(\theta,1)$ 的随机样本，且损失函数 $W(\theta,a)=(a-\theta)^2$．那末 $\varphi(X)=(c+n\sigma^2\bar{X})/(1+n\sigma^2)$（$\bar{X}$ 是样本均值[†]）是关于 θ 的先验分布 $N(c,\sigma^2)$ 的唯一的 Bayes 估计量．因此，θ 的形如 $\varphi(X)=a\bar{X}+b$ $(0<a<1,\ -\infty<b<\infty)$ 的任意估计量都是容许的．

以下只考虑平方损失函数的情形．首先，若对实数 c，形如 $c\varphi(X)$ 的统计量作为 $g(\theta)$ 的估计量是容许的，则

$$\inf_\theta(g(\theta)E_\theta(\varphi)/E_\theta(\varphi^2))\leqslant c$$
$$\leqslant\sup_\theta(g(\theta)E_\theta(\varphi)/E_\theta(\varphi^2)).$$

Karlin 定理：对具有参数 θ 的一维指数型分布

$$dP_\theta(x)=\beta(\theta)e^{\theta x}d\mu(x),$$

令参数空间 Ω 为开或闭区间

$$I(\underline{\theta},\bar{\theta})=\left\{\theta\,\middle|\,\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}d\mu(x)<\infty\right\},$$

并且考虑参数函数

$$g(\theta)=E_\theta(X)=-\beta'(\theta)/\beta(\theta)$$

的点估计．那末，若对实数 λ 与任意的 c $(\underline{\theta}<c<\bar{\theta})$，当 $b\to\bar{\theta}$ 时

$$\int_c^b\beta^{-\lambda}(\theta)d\theta\to\infty,$$

且当 $a\to\underline{\theta}$ 时

$$\int_a^c\beta^{-\lambda}(\theta)d\theta\to\infty,$$

则估计量 $\varphi_\lambda(X)=X/(\lambda+1)$ 是容许的．系 1：若 $\Omega=(-\infty,\infty)$，则估计量 $\varphi_0(X)=X$ 是容许的．系 2：设 $\Omega=(-\infty,\infty)$，并且假定区间 $(-\infty,0]$ 和 $[0,\infty)$ 都有关于 μ 的正测度．那末形如 $\varphi(X)=aX$ $(0<a\leqslant1)$ 的估计量是容许的．这个定理可以应用于由指数型分布抽出的随机样本 $X_1,\cdots,X_n$，因为充分统计量 $\bar{X}=\sum X_i/n$ 服从指数型分布，并且 $E_\theta(\bar{X})=E_\theta(X_1)$．

还有 **Karlin 定理**：设 X 为服从分布

$$dP_\theta(x)=q(\theta)r(x)\,dx\ (0\leqslant x\leqslant\theta);$$
$$=0\ (\text{其他})$$

的随机变量，其参数空间为 $\Omega=(0,\infty)$，此处 $\int_0^\infty r(x)dx=\infty$．在 $g(\theta)=(q(\theta))^{-\alpha}$ $(\alpha>0)$ 的形如 $\varphi_c(X)=c(q(X))^{-\alpha}$ 的估计量当中，只有 $c=(2\alpha+1)/(\alpha+1)$ 的估计量是容许的．这个定理也可用于随机样本的大小大于 1 的情形．

Stein 定理：设 $X_1,\cdots,X_n$ 是由位置参数为 θ 的一维分布 $dP_\theta(x)=f(x-\theta)\,dx$ 抽出的随机样本，并令

$$A_k=A_k(x_1,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\theta^k\left(\prod_{i=1}^n f(x_i-\theta)\right)d\theta$$
$$(k=0,1,2).$$

若

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{A_2}{A_0}-\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2\right)^{3/2}\times\prod_{i=1}^{n}f(x_i)\prod_{i=1}^{n}dx_i<\infty,$$

则参数 θ 的 **Pitman 估计量** (Pitman's estimator) $\varphi_0(X_1,\cdots,X_n)=A_1(X_1,\cdots,X_n)/A_0(X_1,\cdots,X_n)$ 是容许的.

【极小极大估计量】 估计量 $\varphi^*(X)$ 叫做**极小极大的** (minimax)，当且仅当

$$\sup_\theta r(\theta,\varphi^*)=\inf_\varphi\sup_\theta r(\theta,\varphi).$$

若 φ^* 是容许的，且风险 $r(\theta,\varphi^*)$ 关于 θ 是个常数,则 φ^* 是极小极大的. 例: 位置参数 θ 的 Pitman 估计量和 X 服从二项分布[†] $Bin(n,\theta)$ 时 θ 的估计量

$$\varphi^*(X)=(X+\sqrt{n}/2)/(n+\sqrt{n})$$

都是极小极大的.

Hodges-Lehmann 定理: 一个关于先验分布 ξ 的 Bayes 估计量 φ^* 是极小极大的,如果 ξ 给子集 $\omega\subset\Omega$ 以概率 1, $r(\theta,\varphi^*)$ 对 $\theta\in\omega$ 取常数值 (如 c), 并且对 $\theta\in\Omega$ 有 $r(\theta,\varphi^*)\leqslant c$. 例: 考虑区间 $[0,1]$ 上的所有概率分布的全体, 令 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自其中一个分布的随机样本. 那末

$$\varphi^*(X)=\left(\sum_{i=1}^{n}X_i+\sqrt{n}/2\right)\Big/(n+\sqrt{n})$$

是 $E(X_i)=\mu$ 的一个极小极大估计量. 同样的结果对所有的绝对连续分布的全体也成立.

Wald 定理: 如果存在一串先验分布 $\{\xi_n\}$, 使得对任意的 $\theta\in\Omega$ 有

$$\liminf_{n\to\infty}\left(r(\theta,\varphi^*)-\inf_\varphi\int_\Omega r(\theta,\varphi)d\xi_n(\theta)\right)\leqslant 0,$$

则 φ^* 是极小极大的.

【不变估计量】 为了简单起见, 考虑参数 θ (不假定是实数) $\in\Omega$ 的点估计,且令 $\mathscr{A}=\Omega$. 设在 $\mathscr{X}$ 和 Ω 上分别有一一对应的可测变换群 $G=\{\tau\}$ 和 $\bar{G}=\{\bar{\tau}\}$, 使得存在一个由 G 到 $\bar{G}$ 的同态对应 $\tau\to\bar{\tau}$; 若 X 服从分布 P_θ, 则 τX 服从分布 $P_{\bar{\tau}\theta}$; 并且对任意的 θ, a 和 τ, 有 $W(\bar{\tau}\theta,\bar{\tau}a)=W(\theta,a)$. 那末满足

$$\varphi(\tau x)=\bar{\tau}\varphi(x);\quad \tau\in G,\quad \text{a.e.}\ \mathscr{P}$$

的估计量 $\varphi(X)$ 叫做**不变估计量** (invariant estimator). 一个估计量 φ 叫做**最佳不变估计量** (best invariant estimator), 如果风险函数 $r(\theta,\varphi')$ 当 $\varphi'=\varphi$ 时取最小值, 此处 φ' 限于不变估计量.

若 $\bar{G}$ 是可迁的[†], 则不变估计量的风险函数与 θ 无关,从而,容许不变估计量是最佳不变估计量. 例: 在位置参数 θ 的点估计中, Pitman 估计量关于平方损失函数是最佳不变估计量. 定理: 若 Ω 是一个紧拓扑空间, $\bar{G}$ 是 Ω 的同态群, 并且 $\bar{G}$ 在 $g\in\bar{G}\to g\theta_0\in\Omega$ (固定 $\theta_0\in\Omega$) 下同态于 Ω, 则任意关于 $\bar{G}$ 的右不变 Haar 测度[†]的 Bayes 估计量是最佳不变估计量. 这个结果可以推广到局部紧的 Ω (→ 统计判决函数).

【序贯估计】 基于序贯抽样的估计法, 就点估计来说,不如序贯检验用得那样普遍,因为其效率与非序贯估计效率相比并不特别高. 作为 Cramér-Rao 不等式的推广,在同样的正则条件下,对参数函数 $g(\theta)$ 的任意序贯无偏估计量 $\varphi(X)$, 有

$$V_{\theta_0}(\varphi(X))\geqslant(g'(\theta_0))^2/E_{\theta_0}(N)I(\theta_0)$$

(**Wolfowitz 不等式**),此处 $I(\theta_0)$ 是信息量, N 是序贯抽样的样本大小.

【渐近理论】 在统计推断对实际问题的应用中, 有时样本大小 n 取得相当大, 以使估计量的分布能用 $n\to\infty$ 时的渐近分布来近似. 设 $X=(X_1,X_2,\cdots)$ 中各元素 X_i 独立地服从可测空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上的分布 P_θ $(\theta\in\Omega)$. 对任意的 n, 令 $\varphi_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个由乘积空间 $(\mathscr{X}^n,\mathfrak{B}^n)$ 到 $(\mathscr{A},\mathfrak{C})$ 的可测映射. 那末大小为 n 的随机样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的函数 $\varphi_n(X)=\varphi_n(X_1,\cdots,X_n)$ 的序列 $\{\varphi_n(X)\}$ 叫做 $g(\theta)$ 的**估计量** (estimator). 对每个 $\theta\in\Omega$, 当参数的真值为 θ 时, 若 $\varphi_n(X)$ 当 $n\to\infty$ 时依概率收敛[†]于 $g(\theta)$, 则称 $\{\varphi_n(X)\}$ 是 $g(\theta)$ 的**相容估计量** (consistent estimator). 关于相容估计量存在的充分条件, 由下面结果给出. **LeCam 定理**: 设 $\mathscr{X}$ 是一个 Euclid 空间, $\mathfrak{B}$ 是 $\mathscr{X}$ 上 Borel 集的全体. 若参数空间 Ω 是 $\boldsymbol{R}^k$ 的局部紧子集; 对 $\theta\neq\theta'$ 有 $P_\theta\neq P_{\theta'}$ (能识性

条件)，且当 $\theta_n \to \theta$ 时 $P_{\theta_n} \to P_\theta$，则存在 θ 的一个相容估计量．如果对每个 n，φ_n 的均值

$$E_\theta(\varphi_n(X)) = m_n(\theta)$$

和方差 $v_n(\theta) = V_\theta(\varphi_n(X))$ 存在，并且随机变量 $(\varphi_n(X) - m_n(\theta))/v_n(\theta)^{1/2}$ 依分布收敛于正态变量 $N(0, 1)$，其中 θ 是参数的真值，则称估计量 $\{\varphi_n(x)\}$ 服从渐近正态分布 $N(m_n(\theta), v_n(\theta))$（→ 概率分布；极限定理；概率论）．

【极大似然法】 设分布 P_θ 具有密度函数 $f(x, \theta)$，$\theta \in \Omega = R$，并且 $x_1, \cdots, x_n$ 是来自总体 $f(x, \theta)$ 的随机样本 $X_1, \cdots, X_n$ 的观测值，那末由

$$L_n(\theta; x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta)$$

定义的 θ 的函数 L_n 叫做**似然函数**（likelihood function），如果 $\theta = \hat{\theta}_n(x_1, \cdots, x_n)$ 对固定的 $x_1, \cdots, x_n$ 使 L_n 为最大，且是一个由 $(\mathscr{X}^n, \mathfrak{B}^n)$ 到 $(\Omega, \mathfrak{C})$（$\mathfrak{C}$ 是 Ω 上的 σ 代数）的可测映射，则 $\hat{\theta}_n(X) = \hat{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n)$ 叫做 θ 的**极大似然估计量**（maximum likelihood estimator）．这种寻找估计量的方法叫做**极大似然法**（maximum likelihood method）．如果用已知的一一对应的双可测变换 h 把参数 θ 变换到一个新的参数 $\eta = h(\theta)$，并且存在 θ 的唯一极大似然估计量 $\hat{\theta}_n$，那末 $\hat{\eta}_n = h(\hat{\theta}_n(X))$ 是 η 的唯一极大似然估计量．换句话说，极大似然法在一对一变换下能够保持下来．**Wald 定理：** 假定 i) 对任意的 $x \in X$，$f(x, \theta)$ 关于 θ 是连续的，且 $\lim_{|\theta| \to \infty} f(x, \theta) = 0$；ii) $E_\theta\{|\log f(X, \theta)|\} < \infty$；iii) $f(x, \theta, \rho) = \sup_{|\theta - \theta'| < \rho} f(x, \theta')$ 和 $\varphi(x, r) = \sup_{|\theta| > r} f(x, \theta)$ 是 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B})$ 上可测的；iv) $E_\theta\{\log^+ f(X, \theta, \rho)\} < \infty$ 和 $E_\theta\{\log^+ \varphi(X, r)\} < \infty$．设 θ_0 是参数的真值．那末，若可测函数序列 $\{\bar{\theta}_n(x_1, \cdots, x_n)\}$ 满足 $L_n(\bar{\theta}_n; x_1, \cdots, x_n)/L_n(\theta_0; x_1, \cdots, x_n) \geq c > 0$（a. e. P_{θ_0}），则 $\bar{\theta}_n(X_1, \cdots, X_n)$ 当 $n \to \infty$ 时几乎处处收敛†于 θ_0．因此，若 θ 的极大似然估计量存在，则它是相容估计量．

当 θ 是实数，且 $f(x, \theta)$ 关于 θ 可偏微时，方程

$$\frac{\partial \log L_n}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

叫做**似然方程**（likelihood equation）．**Cramér 定理：** 设 θ 是实数，且 $f(x, \theta)$ 在含有真值 θ_0 的开区间 A 内对 θ 三次可偏微；对所有的 $\theta \in A$，$|\partial f/\partial x| < F_1(x)$，$|\partial^2 f/\partial x^2| < F_2(x)$，且

$$|\partial^3 \log f/\partial \theta^3| < H(x) \quad (\text{a. e. } P_{\theta_0}),$$

此处 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上可积；以及 $E_\theta(H(X)) < M$，且

$$0 < I(\theta) = E_\theta((\partial \log f(X, \theta)/\partial \theta)^2) < \infty,$$

则似然方程有一个依概率收敛于 θ_0 的解（当 $n \to \infty$），且这个解渐近地服从正态分布 $N(\theta_0, (nI(\theta_0))^{-1})$．

一般地，如果 θ 的估计量服从渐近分布 $N(\theta, v(\theta)/n)$，则在适当的正则条件下，$v(\theta) \geq (I(\theta))^{-1}$ $(\theta \in \Omega)$ 成立．服从渐近正态分布并对所有的 $\theta \in \Omega$ 满足 $v(\theta) = (I(\theta))^{-1}$ 的估计量叫做**最佳渐近正态**（best asymptotically normal, 缩写为 BAN）**估计量**或**渐近有效**（asymptotically efficient）**估计量**．除了 Cramér 条件以外，作为极大似然估计量是 BAN 估计量的一些正则条件已经得到．LeCam 在较弱的假定下证明了，对任意的估计量，满足 $v(\theta) < (I(\theta))^{-1}$ 的所有 θ 的集合是 Lebesgue 零测集．

设 $X = (N_1, \cdots, N_k)$，$n = N_1 + \cdots + N_k$，服从多项分布† $M(n; \pi_1, \cdots, \pi_k)$，$\pi_1 + \cdots + \pi_k = 1$，且 A 是所考虑的 k 维向量 $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_k)$ 的全体，例如当我们考虑 π 对 $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m) \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^m$ 的参数表示 $\pi = \pi(\theta) = (\pi_1(\theta), \cdots, \pi_k(\theta))$ 时，$A = \{\pi(\theta) | \theta \in \Omega\}$．置 $\hat{p}_i^{(n)} = N_i/n$，$i = 1, \cdots, k$ 和 $\hat{p}^{(n)} = (\hat{p}_1^{(n)}, \cdots, \hat{p}_k^{(n)})$．$g(\theta)$ 的一个估计量 $\{\varphi_n(X)\}$ 叫做 **Fisher 相容估计量**（Fisher's consistent estimator），如果存在一个 A 上不依赖于 n 的实函数 $\varphi(\pi)$，使得 $g(\theta) = \varphi(\pi(\theta))$ $(\theta \in \Omega)$ 和 $\varphi_n(X) = \varphi(\hat{p}^{(n)})$（对所有的 n）．与此相对，前面定义的相容性有时叫做**概率相容性**．若估计量形状为 $\varphi_n(X) = \varphi(\hat{p}^{(n)})$，且 φ 是连续的，则 Fisher 相容估计量等价于概率相容估计量．定理：若 $\varphi_n(X) = \varphi(\hat{p}^{(n)})$ 是

$g(\theta)$ 的 Fisher 相容估计量，函数 $\varphi(\pi)$ 对各变量 π_i 为连续可偏微，以及 $g(\theta)$ 和 $\pi_i(\theta)$ $(i=1, \cdots, k)$ 对每个 θ_j 可偏微，则 $\{\varphi_n(X)\}$ 渐近地服从正态分布 $N(g(\theta), v(\theta)/n)$，此处

$$v(\theta)=\sum_{i=1}^{k} \pi_i(\theta)\left(\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_i}\bigg|_{p=\pi(\theta)}\right)^2 -\left(\sum_{i=1}^{k} \pi_i(\theta) \frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_i}\bigg|_{p=\pi(\theta)}\right)^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta_i} \cdot \frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta_j} I^{ij},$$

其中 I^{ij} 是信息矩阵†的逆的 (i, j) 元素. 对于极大似然估计而言，若 $\pi=\hat{\pi}_n(X)$ 使似然函数

$$L_n(\pi, X)=n!\left(\prod_{i=1}^{k} N_i!\right)^{-1} \prod_{i=1}^{k} \pi_i^{N_i} \quad (\pi \in A)$$

为最大，则序列 $\{\hat{\pi}_n(X)\}$ 是 π 的极大似然估计量. 对参数表示 $\pi=\pi(\theta)$ 的情形，使 $L_n(\pi(\theta), X)$ $(\theta \in \Omega)$ 为最大的 $\hat{\theta}_n(X)$ 是 θ 的极大似然估计量. 设 π 和 θ 的真值分别为 π_0 和 θ_0. 那末，**Rao 定理**若 π 的极大似然估计量 $\{\hat{\pi}_n(X)\}$ 存在，则 $\hat{\pi}_n(X)$ 当 $n \to \infty$ 时几乎处处收敛于 π_0. 对 π 有参数表示 $\pi=\pi(\theta)$ 且 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^1$ 的情形，**Rao 定理**: 如果

$$\lim_{m\to\infty} \pi_i(\theta_m)=\pi_i(\theta_0) \quad (i=1, \cdots, k)$$

蕴涵

$$\lim_{m\to\infty} \theta_m=\theta_0;$$

并且 θ 的极大似然估计量 $\{\hat{\theta}_n(X)\}$ 存在，则 $\hat{\theta}_n(X)$ 当 $n \to \infty$ 时几乎处处收敛于 θ_0. 此外，如果对每个 i，$\pi_i(\theta_0) \neq 0$；$\pi_i(\theta)$ 在 θ_0 的邻域二次连续可微；并且对某些 i 有

$$d\pi_i(\theta)/d\theta\,|_{\theta=\theta_0} \neq 0,$$

则 θ 的极大似然估计量 $\{\hat{\theta}_n(X)\}$ 唯一存在，满足似然方程，且是 BAN 估计量.

使

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}(N_i-n\pi_i(\theta))^2 \Big/ n\pi_i(\theta)$$

为最小的 θ 的值，叫做参数 θ 的**极小 χ^2 估计量** (minimum chi square estimator). 还有使

$$\chi_1^2=\sum_{i=1}^{k}(N_i-n\pi_i(\theta))^2 \Big/ N_i$$

为最小的修正极小 χ^2 估计量，以及使 K-L 信息量† $\sum_{i=1}^{k} \pi_i(\theta) \log(\pi_i(\theta)/p_i)$ 为最小的估计量. 所有这些估计量都是 BAN 估计量.

作为求估计量的一般方法，还有**矩估计法** (moment method). 设 $\mathscr{X} \subset \boldsymbol{R}^1$ 和 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^m$. 令样本矩与总体矩相等，得到联立方程组

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^k}{n}=E_\theta(X^k)=\int x^k f(x, \theta) dx, \quad k=1, \cdots, m,$$

由它的解 $\theta=\hat{\theta}(X) \in \Omega$ 确定估计量的方法称为矩估计法.

【区间估计】 设 x 是随机变量 X 的观测值，且 $S(x)$ 是相应的参数函数 $g(\theta)$ 的值域 $\mathscr{A}$ 的一个子集，若判断参数函数 $g(\theta)$ 的真值属于 $S(x)$，则这种统计推断叫做 $g(\theta)$ 的**区间估计**(或**区域估计**) (interval estimation). 若对常数 α $(0<\alpha<1)$，有

$$P_\theta\{g(\theta) \in S(X)\} \geqslant 1-\alpha, \quad \theta \in \Omega,$$

则随机区域 $S(X)$ 叫做 $g(\theta)$ 的**置信水平** (confidence level) 为 $1-\alpha$ 的**置信区域** (confidence region)，而左边关于 $\theta \in \Omega$ 的下确界叫做**置信系数** (confidence coefficient). 特别，若 $\Omega \subset \boldsymbol{R}^1$，且置信区域是一个区间，那末这个区域叫做**置信区间** (confidence interval)，而区间的两端叫做**置信界限** (confidence limits). 在 $g(\theta)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区域族中，对所有的 θ 和 θ' $(\theta \neq \theta')$，使 $P_\theta\{g(\theta') \in S(X)\}$ 为最小的 $S(X)$ 叫做 $g(\theta)$ 的**一致最大功效** (uniformly most powerful, 缩写为 UMP) **置信区域**. 若 $g(\theta)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区域 $S(X)$ 对任意的 θ 和 θ' $(\theta \neq \theta')$ 满足

$$P_\theta\{g(\theta') \in S(X)\} \leqslant 1-\alpha,$$

则称 $S(X)$ 为 $g(\theta)$ 的**无偏置信区域** (unbiased confidence region). 同样还可以定义置信区域的**不变性** (invariance)，并且 $S(X)$ 是**一致最大功效无偏**(UMPU)或者**一致最大功效不变**(UMPI) **置信区域**的定义也是显然的.

对每个 $\theta_0 \in \Omega$，设 $A(\theta_0)$ 是假设† $\theta=\theta_0$ 的水平 α 的检验†的接受区域†. 若对每个 $x \in$

$\mathscr{X}$，置 $S(x)=\{\theta | x\in A(\theta),\theta\in\Omega\}$，则 $S(X)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区域．如果不管假设 $\theta=\theta_0$ 的 θ_0 在 Ω 中取什么值，$A(\theta_0)$ 都是一致最大功效†检验的接受区域，则 $S(X)$ 是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的一致最大功效置信区域．同样，对应一致最大功效无偏（或不变）检验†的接受区域 $A(\theta_0)$，可以构造 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的一致最大功效无偏(或不变)置信区域 $S(X)$．

【容许区域】 设随机变量 X 和 Y 分别服从可测空间 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 和 $(\mathscr{Y},\mathfrak{C})$ 上的概率分布 P_θ^X 和 P_θ^Y $(\theta\in\Omega)$，并且考虑由 X 的观测值 x 来预测 Y 的未来值的问题．如果用一个把点 x 输送到 $\mathfrak{C}$ 的一个集的映射 $S(x)$ 来预测 Y 取 $S(x)$ 中的值，那末 $S(X)$ 或 $S(x)$ 叫做 Y 的**容许区域**(tolerance region)．特别，若实随机变量的容许区域是一个区间，则这区域叫做**容许区间**(tolerance interval)，它的两端叫做**容许界限**(tolerance limits)．

以下为了简单起见，设 X 和 Y 是独立的．容许区域有好几类．首先，若对任意的 $\theta\in\Omega$，有 $P_\theta^X(P_\theta^Y\{Y\in S(X)\}\geqslant\beta)\geqslant\gamma$，则 $S(X)$ 叫做 Y 的**容量**(content)为 β 和**水平**(level)为 γ 的容许区域．其次，若对任意的 $\theta\in\Omega$，有

$$E_\theta^X(P_\theta^Y\{Y\in S(X)\})\geqslant\beta,$$

则 $S(X)$ 叫做 Y 的**平均容量**为 β 的容许区域．设 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自某分布的随机样本，并且 X 和 Y 服从同一分布．如果集合 $\{P_\theta^Y|\theta\in\Omega\}$ 是一维连续分布的全体，并且 $P_\theta^Y\{Y\in S(X)\}$ 的样本分布与 θ 无关，则称 $S(X)$ 为非参数的容许区域．例：设 $X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)}$ 为顺序统计量†，则对任意的 $r<s$，区间 $[X_{(r)},X_{(s)}]$ 是非参数的容许区域．

【参】 [1] H. Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本：H. 克拉美，统计学数学方法，上海科学技术出版社，1966)；[2] 竹内啓，統計的推定論，I, II, 数学，14 (1963), 193—209, **16** (1965), 139—149; [3] A. Wald, Note on the consistency of the maximum likelihood estimate, Ann. Math. Statist. **20** (1949), 595—601; [4] D. Dumas de Rauly, L'estimation statistique, Gauthier-Villars, 1966.

假设检验 [英 testing statistical hypothesis 法 vérification des hypothèses statistiques 德 Test der statistischen Hypothese 俄 статистическая проверка гипотез 日 仮説検定] 统计学中的**统计假设**(statistical hypothesis)是一个有关随机变量† X 的概率分布†的命题．当已知 X 的概率分布属于参数为 θ 的概率分布族 $\mathscr{P}=\{P_\theta|\theta\in\Omega\}$ 时，统计假设可表为"θ 的真值属于 ω_H"，此处 ω_H 是参数空间† Ω 的非空子集．这个假设也写作 $\boldsymbol{H}$: $\theta\in\omega_H$．当 ω_H 是只由一点构成的集合时，假设称为**简单假设**(simple hypothesis)，否则称为**复合假设**(composite hypothesis)．要检验一个假设 $\boldsymbol{H}$，就是要根据样本空间† $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$（集合 $\mathscr{X}$ 和由 $\mathscr{X}$ 的子集所成的 σ 代数† $\mathfrak{B}$）的样本点† $x\in\mathscr{X}$ 来判断"假设 $\boldsymbol{H}$ 是假的"或者"假设 $\boldsymbol{H}$ 不是假的"．但是，$\boldsymbol{H}$ 不是假的这一主张未必蕴涵 $\boldsymbol{H}$ 的真确性．前一主张是**拒绝**(reject)假设 $\boldsymbol{H}$，而后一主张是**接受**(accept)假设 $\boldsymbol{H}$．在检验问题的这种结构中，假设 $\boldsymbol{H}$ 往往叫做**解消假设**(null hypothesis)（→统计量）．

设已给观测值 $x\in\mathscr{X}$．考虑以概率 $\varphi(x)$ $(0\leqslant\varphi(x)\leqslant1)$ 拒绝假设 $\boldsymbol{H}$ 和以概率 $1-\varphi(x)$ 接受假设 $\boldsymbol{H}$ 这样一个检验程序．那末，这个检验程序可由 $\mathscr{X}$ 上定义而取值于 0 与 1 之间的 $\mathfrak{B}$ 可测函数 $\varphi(x)$ 来表述．这时，$\varphi(x)$ 叫做**检验函数**(test function)或**检验**(test)．若 $\varphi(x)$ 是集合 $B(\in\mathfrak{B})$ 的示性函数 $\chi_B(x)$，则当观测值 x 属于 B 时拒绝 $\boldsymbol{H}$，否则接受 $\boldsymbol{H}$．集合 B 叫做**临界域**(critical region)，它的余集叫做**接受区域**(acceptance region)．这时，$\varphi(x)=\chi_B(x)$ 叫做**非随机化检验**(non-randomized test)．而由一般的 $\varphi(x)$ 做的检验叫做**随机化检验**(randomized test)．

设样本 X 的分布是 $(\mathscr{X},\mathfrak{B})$ 上的一个概率测度 P_θ．当 θ 是参数的真值时，拒绝 $\boldsymbol{H}$ 的概率可由下式算出：

$$E_\theta(\varphi)=\int_{\mathscr{X}}\varphi(x)P_\theta(dx).$$

预先给定一个常数 α $(0<\alpha<1)$．如果检验 $\varphi(x)$ 对 $\theta\in\omega_H$ 满足 $E_\theta(\varphi)\leqslant\alpha$，或者换句话说，如果假设 $\boldsymbol{H}$ 真确时拒绝 $\boldsymbol{H}$ 的概率不大于

α，α 叫做检验 φ 的**水平** (level)，而这样的检验叫做**水平 α 的检验** (level α test)．水平 α 的检验的全体记作 $\boldsymbol{\Phi}(\alpha)$，并且 $\sup_{\theta\in\omega_H} E_\theta(\varphi)$ 叫做检验 φ 的**大小** (size)．针对假设 $\boldsymbol{H}$，确定 $\Omega-\omega_H$ 的一个子集 ω_A，并把另一个不同的假设 $\boldsymbol{A}$："θ的真值属于 ω_A" 叫做**备择假设** (alternative hypothesis)．当 $\boldsymbol{H}$ 真确时拒绝 $\boldsymbol{H}$ 而犯的错误叫做**第一类错误** (error of the first kind)，当 $\boldsymbol{A}$ 真确时接受 $\boldsymbol{H}$ 而犯的错误叫做**第二类错误** (error of the second kind)．当 $\theta\in\omega_A$ 时拒绝 $\boldsymbol{H}$ 的概率 $E_\theta(\varphi)$，也就是说，对 $\theta\in\omega_A$ 作出正确决定的概率叫做**检验功效** (power)，而把这功效看作 $\theta\,(\in\omega_A)$ 的函数，就是**检验功效函数** (power function)．$1-E_\theta(\varphi)$ $(\theta\in\omega_A)$ 是第二类错误的概率．检验的集合 $\boldsymbol{\Phi}$ 中的一个检验 φ 叫做在 $\boldsymbol{\Phi}$ 中是**一致最大功效的** (uniformly most powerful 缩写 **UMP**)，如果对任意的 $\phi\in\boldsymbol{\Phi}$，有 $E_\theta(\varphi)\geqslant E_\theta(\phi)(\theta\in\omega_A)$．特别当$\omega_A$只由一点组成时，叫做**最大功效的** (most powerful)．

【Neyman-Pearson 基本引理】 设 μ 是($\mathscr{X}$，$\mathfrak{B}$) 上的 σ 有限测度†，且 $f_1,\cdots,f_{n+1}$ 是 μ 可积的实函数．若 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是 n 个实数，使满足 $\int\varphi f_i d\mu\leqslant c_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的检验函数 φ 的集合 $\boldsymbol{\Phi}(c_1,\cdots,c_n)$ 不为空集，则在 $\boldsymbol{\Phi}(c_1,\cdots,c_n)$ 中至少存在一个检验 φ_0 使 $\int\varphi f_{n+1}d\mu$ 为最大．如果检验函数 $\tilde\varphi$ 满足下列两个条件：

(1) 对适当的 $k_1,\cdots k_n\geqslant 0$

$$\tilde\varphi(x)=1,\ \text{当}\ f_{n+1}(x)>\sum_{i=1}^n k_i f_i(x)\ \text{时},$$

$$=0,\ \text{当}\ f_{n+1}(x)<\sum_{i=1}^n k_i f_i(x)\ \text{时}$$

关于 μ 几乎处处成立；

(2) $\int\tilde\varphi f_i d\mu=c_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$

则 $\tilde\varphi$ 是在 $\boldsymbol{\Phi}(c_1,\cdots,c_n)$ 中使 $\int\varphi f_{n+1}d\mu$ 为最大的一个检验．如果 $(c_1,\cdots,c_n)$ 是 n 维空间 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集

$$\boldsymbol{M}=\left\{\left(\int\varphi f_1\,d\mu,\cdots,\int\varphi f_n d\mu\right)\,\middle|\,\varphi\ \text{是检验函数}\right\}$$

的内点，且 $\tilde\varphi$ 满足 (2) 并在 $\boldsymbol{\Phi}(c_1,\cdots,c_n)$ 中使 $\int\varphi f_{n+1}d\mu$ 为最大，则 $\tilde\varphi$ 满足 (1)．这叫做 **Neyman-Pearson 基本引理** (fundamental lemma of Neyman-Pearson)．

作为一个例子，设 $\Omega=\{1,2,\cdots,n,n+1\}$，且 $\{P_\theta|\theta\in\Omega\}$ 受控于 σ 有限测度 μ．令 $f_i(x)$ 为 P_i 关于 μ 的密度函数．若假设 $\boldsymbol{H}$ 中的 ω_H 是一个有限集 $\{1,\cdots,n\}$，而备择假设 $\boldsymbol{A}$ 的 ω_A 只由一点 $n+1$ 组成，那末由 Neyman-Pearson 基本引理，对 $c_1=\cdots=c_n=\alpha$ 满足 (1) 和 (2) 的 $\tilde\varphi$ 就是一致最大功效水平 α 的检验．

如果 $\mathfrak{B}$ 是由可数个集合生成，那末针对简单的备择假设 $\boldsymbol{A}$：$\theta=\bar\theta$，对任意假设存在一个最大功效水平 α 的检验．求这样一个最大功效检验的方法由下面的 **Lehmann-Stein 定理**给出：设 f_θ 为 P_θ 关于 σ 有限测度 μ 的密度函数，并对 ω_H 上的概率测度 λ，定义 $h_\lambda(x)=\int_{\omega_H}f_\theta(x)d\lambda(\theta)$．考虑检验一个简单解消假设 $\boldsymbol{H}_\lambda$：h_λ 是样本分布密度，针对备择假设 $\boldsymbol{A}$：$\theta=\bar\theta$，令 φ_λ 是检验 $\boldsymbol{H}_\lambda$ 的最大功效水平 α 的检验．如果存在一个概率测度 λ 使

$$\sup_{\theta\in\omega_H}E_\theta(\varphi_\lambda)\leqslant\alpha,$$

则 φ_λ 是针对备择假设 $\boldsymbol{A}$：$\theta=\bar\theta$ 检验解消假设 $\boldsymbol{H}$：$\theta\in\omega_H$ 的最大功效水平 α 的检验．因为定理中的测度 λ 对 ω_H 上的任意概率测度 λ' 都满足 $E_\theta(\varphi_{\lambda'})\geqslant E_\theta(\varphi_\lambda)$，所以叫做**最不利分布** (least favorable distribution)．

当备择假设 ω_A 由两点以上组成时，一般不存在一致最大功效检验．然而，如果 $\Omega=\boldsymbol{R}^1$，$\omega_H=(-\infty,\theta_0]$，$\omega_A=(\theta_0,\infty)$，并且 $f_\theta(x)$ 是关于统计量 $T(x)$ 具有单调似然比†的分布密度函数（也就是说，当 $\theta<\theta'$ 时使 $f_{\theta'}(x)/f_\theta(x)$ 是 $y=T(x)$ 的非减函数的密度函数，例如属

于一个参数的指数型分布†族的分布)，则存在一个一致最大功效水平 α 的检验 $\varphi(x)$，并定义为：$\varphi(x)=1$，若 $T(x)>c$；$\varphi(x)=$ 常数，若 $T(x)=c$；以及 $\varphi(x)=0$，若 $T(x)<c$. 对于一个参数的指数型分布，针对 $\boldsymbol{A}$: $\omega_A=(\theta_1,\theta_2)$ $(\theta_1<\theta_2)$，存在一个检验 $\boldsymbol{H}$: $\omega_H=(-\infty,\theta_1]\cup[\theta_2,\infty)$ 的一致最大功效水平 α 的检验. 然而，对 ω_H 与 ω_A 对调位置的问题，不存在一致最大功效检验.

一致最大功效检验存在的假设检验问题是很有限的，所以，对选择检验函数的准则必须另作考虑. 可以考虑两种作法. 一种是限定检验的类型，且在限定的范围内求一致最大功效检验的方法；另一种是引进另一个称心的准则，并照它去选择检验的方法. 先从限定检验类型的方法说起.

【无偏检验】 无偏性准则以下述观点为基础：当假设 $\boldsymbol{H}$ 为真时拒绝 $\boldsymbol{H}$ 的概率(即第一类错误的概率)不要比当 $\boldsymbol{H}$ 为假时拒绝 $\boldsymbol{H}$ 的概率(即检验功效)来得大. 也就是说，如果一个水平 α 的检验 φ 满足 $E_\theta(\varphi)\geqslant\alpha\ (\theta\in\omega_A)$，则 φ 叫做**无偏水平 α 检验** (unbiased level α test). 设 $\boldsymbol{\Phi}_u(\alpha)$ 为无偏水平 α 检验的全体. $\boldsymbol{\Phi}_u(\alpha)$ 中的一致最大功效检验叫做**一致最大功效无偏水平 α 检验** (uniformly most powerful unbiased level α test)，缩写为 UMP 无偏水平 α 检验.

如果 P_θ 是指数分布族，其参数空间 Ω 是 $\boldsymbol{R}^k$ 的有限或无限开区间，那末对下列两个假设检验问题，存在 UMP 无偏水平 α 的检验：1) $\boldsymbol{H}$: $\theta_1\leqslant a$，$\boldsymbol{A}$: $\theta_1>a$，其中 θ_1 是参数 $\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 的第一个坐标；2) $\boldsymbol{H}$: $\theta_1=a$，$\boldsymbol{A}$: $\theta_1\neq a$. 例如，对均值 μ 和方差 σ^2 都未知的正态分布，假设 $\boldsymbol{H}$: $\mu=\mu_0$ 和备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\mu\neq\mu_0$ 的 Student 检验(以后给出)，就是一例 UMP 无偏检验.

【相似检验与 Neyman 结构】 若 $E_\theta(\varphi)$ 对所有的 $\theta\in\omega\ (\subset\Omega)$ 为常数，则 φ 叫做关于 ω 的**相似检验** (similar test). 若 $E_\theta(\varphi)$ 是 θ 的连续函数，则无偏检验 φ 关于 ω_H 与 ω_A 的共同边界点集合 $\tilde{\omega}$ 是相似的，只要 Ω 是一个拓扑空间. 因此对这种情况，无偏检验可从关于 $\tilde{\omega}$ 的相似检验中求得. 设统计量† $y=T(x)$ 对 $\mathscr{P}_\omega=\{P_\theta|\theta\in\omega\}$ 是充分的，且其值域为 $\mathscr{Y}$. 若检验 φ 的条件均值 $E_\theta(\varphi|T(x)=y)$ 关于 $\mathscr{P}_\omega$ 几乎处处为常数(以下记作 $\mathscr{P}_\omega$ a. e.，即对 $\mathscr{P}_\omega$ 的所有的 P_θ，存在 $N\subset\mathscr{Y}$ 使 $P_\theta(N)=0$ 而 $E_\theta(\varphi|T(x)=y)$ 在 $\mathscr{Y}-N$ 上为常数)，则称 φ 具有关于 T 的 **Neyman 结构** (Neyman structure). 对 $\mathscr{P}_\omega$ 的充分统计量具有 Neyman 结构的检验函数，关于 ω 是相似的. 这个命题的逆："关于 ω 相似的检验函数 φ 关于 ω 的充分统计量 T 具有 Neyman 结构"的充分必要条件是，T 的边缘分布† $\mathscr{Q}=\{Q_\theta=P_\theta T^{-1}|\theta\in\omega\}$ 为有界完备的(即对所有的 $\theta\in\omega$ 使 $E_\theta(f)=0$ 的 $T(x)$ 的有界函数 f 满足 $f(y)=0$ ($\mathscr{P}_\omega$ a. e.)).

【不变检验】 考虑 $\mathscr{X}$ 和 Ω 上各自的一一对应变换群 G 和 $\bar{G}$. 设 G 的各元素 g 是可测变换(亦即对任意的 $B\in\mathfrak{B}$ 有 $gB\in\mathfrak{B}$)，并定义由 G 到 $\bar{G}$ 的同态对应 $g\to\bar{g}$ 使

$$P_\theta(g^{-1}B)=P_{\bar{g}\theta}(B).$$

如果 $\bar{g}\omega_H=\omega_H$ 和 $\bar{g}\omega_A=\omega_A$ $(g\in G)$，则称假设 $\boldsymbol{H}$: $\theta\in\omega_H$ 和备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\theta\in\omega_A$ 关于 G 是**不变的** (invariant)，并且这时称 $\boldsymbol{H}$ 针对 $\boldsymbol{A}$ 的假设检验问题是**不变的**. 满足 $\varphi(gx)=\varphi(x)$ $(g\in G)$ 的水平 α 检验 φ 叫做**不变水平 α 检验** (invariant level α test). 对不变的 φ，有

$$E_{\bar{g}\theta}(\varphi)=E_\theta(\varphi).$$

从而，如果 $\bar{G}$ 在 ω_H 是可迁的†，则不变检验对 ω_H 是相似检验. 若把在 $\boldsymbol{R}^n$ 上的**平移变换**：$(x_1,\cdots,x_n)\to(x_1+a,\cdots,x_n+a)$ 下为不变的 $\boldsymbol{R}^n$ 的子集 $\mathscr{X}$ 看做样本空间，且对任意的 $\theta\in\Omega$，存在 $\theta'=\bar{a}\cdot\theta\in\Omega$ 使 $P_{\theta'}(B)=P_\theta(\{(x_1-a,\cdots,x_n-a)|(x_1,\cdots,x_n)\in B\})$，则 $\bar{a}$ 是 Ω 上的变换. 这时，实数 a 叫做**位置参数** (location parameter). 另外，若把在 $\boldsymbol{R}^n$ 的相似变换 $(x_1,\cdots,x_n)\to(ax_1,\cdots,ax_n)$ $(a>0)$ 下为不变的子空间 $\mathscr{X}$ 看做样本空间，且对任意的 $\theta\in\Omega$，存在 $\theta'=\bar{a}\cdot\theta\in\Omega$ 使 $P_{\theta'}(B)=P_\theta(\{(x_1/a,\cdots,x_n/a)|(x_1,\cdots,x_n)\in B\})$，则实数 a 叫做**尺度参数** (scale parameter). 在一个

关于变换群G为不变的假设检验问题中，宁可使用关于G为不变的检验函数．这叫做**不变性原理**（invariance principle）．若检验函数$\varphi(x)$对所有的$g\in G$满足$\varphi(gx)=\varphi(x)(\mathscr{P}\text{ a.e.})$，则称$\varphi$为**几乎不变的检验函数**．

不变水平α检验的全体记作$\Phi_I(\alpha)$．$\Phi_I(\alpha)$中一致最大功效的检验叫做**一致最大功效不变水平α的检验**（uniformly most powerful invariant level α test），或缩写为UMP不变水平α的检验．在关于$\mathscr{X}$的变换群G为不变的假设检验问题中，如果UMP无偏水平α检验φ^*与UMP不变水平α检验$\tilde{\varphi}$存在，且UMP无偏水平α检验在$\mathscr{P}$ a.e.的意义下唯一确定，则UMP不变水平α检验也在$\mathscr{P}$ a.e.意义下唯一确定，且$\varphi^*(x)=\tilde{\varphi}(x)$（$\mathscr{P}$ a.e.）．若函数$T(x)$关于G是不变的，且当$T(x_1)=T(x_2)$时存在$g\in G$使$x_2=gx_1$，则称$T(x)$是**最大不变的**（maximal invariant）．当$T(x)$关于G为最大不变时，$\varphi(x)$是不变的充分必要条件为φ是$T(x)$的函数．例如，设随机变量$X_1,\cdots,X_n$独立地服从相同的正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ和σ^2均为未知，我们来考虑检验假设$\boldsymbol{H}$: $\mu/\sigma^2=\theta_0$或者假设$\boldsymbol{H}$: $\mu/\sigma^2\leqslant\theta_0$等问题．对样本点$x=(x_1,\cdots,x_n)$，置

$$\bar{x}=\sum x_i/n$$

和

$$s=\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2},$$

则$(\bar{x},s)$作为统计量是充分的．设G为在这个统计量的值域$\mathscr{Y}$上的变换$(\bar{x},s)\to(c\bar{x},cs)$ $(c>0)$的群和$\bar{G}$为在(μ,σ^2)的空间Ω上的变换$(\mu,\sigma^2)\to(c\mu,c\sigma^2)$ $(c>0)$的群，则上述假设$\boldsymbol{H}$关于G是不变的．由变换群G知，

$$t=\sqrt{n}\,\bar{x}/(s/\sqrt{n-1})$$

是最大不变的，所以UMP不变水平α的检验可在t的函数求得，后面给出的Student检验关于G是UMP不变检验．

【极小极大检验和最紧迫检验】 标题的检验有时用来代替一致最大功效检验．假定$\mathscr{P}=\{P_\theta|\theta\in\Omega\}$是受控†族，$\mathfrak{B}$是可分的．如果水平$\alpha$的检验$\varphi^*$对任意的水平$\alpha$的检验$\varphi$满足

$$\inf_{\theta\in\omega_A}E_\theta(\varphi^*)\geqslant\inf_{\theta\in\omega_A}E_\theta(\varphi),$$

则称φ^*为**极小极大水平α检验**（minimax level α test）．对任何的$\alpha\in(0,1)$，极小极大水平α检验存在．设G为样本空间$(\mathscr{X},\mathscr{B})$上的一一对应可测变换群，并且假设检验问题关于$G$为不变．那末关于检验的极小极大性与不变性之间的关系，我们有下面的定理：设存在G的子集所成的σ域$\mathscr{A}$与$(G,\mathscr{A})$上的一串概率测度$\{\nu_n\}$，使得i) $B\in\mathfrak{B}$蕴涵$\{(x,g)|gx\in B\}\in\mathfrak{B}\times\mathscr{A}$；ii) $A\in\mathscr{A}$，$g\in G$蕴涵$Ag\in\mathscr{A}$；iii) 对任何的$A\in\mathscr{A}$和$g\in G$，有

$$\lim_{n\to\infty}|\nu_n(Ag)-\nu_n(A)|=0,$$

那末对任何的$\alpha\in(0,1)$，存在几乎不变的极小极大水平α的检验．不变检验问题的基础是**Hunt-Stein引理**：在上述条件i)，ii)，iii)下，对任何的检验φ，必存在几乎不变的检验ψ使得

$$\inf_{\bar{g}\in G}E_{\bar{g}\theta}(\varphi)\leqslant E_\theta(\psi)\leqslant\sup_{\bar{g}\in\bar{G}}E_{\bar{g}\theta}(\varphi).$$

满足定理条件的变换群的例子有：1) $\boldsymbol{R}^n$上的平移变换群；2) $\boldsymbol{R}^n$上的相似变换群；3) $g=(a,b)$: $(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n\to(ax_1+b,\cdots,ax_n+b)\in\boldsymbol{R}^n$ $(0<a<\infty,-\infty<b<\infty)$，变换$g$的群；4) 有限群；5) $\boldsymbol{R}^n$上的正交变换群；以及6) 这些群的直积．

$\beta_\alpha^*(\theta)=\sup_{\varphi\in\Phi(\alpha)}E_\theta(\varphi)$叫做**包络检验功效函数**（envelope power function）．如果检验φ^* $(\in\boldsymbol{\Phi}(\alpha))$对任意的$\varphi(\in\boldsymbol{\Phi}(\alpha))$满足

$$\sup_{\theta\in\omega_A}(\beta_\alpha^*(\theta)-E_\theta(\varphi^*))\leqslant\sup_{\theta\in\omega_A}(\beta_\alpha^*(\theta)-E_\theta(\varphi)),$$

则φ^*叫做**最紧迫水平α检验**（most stringent level α test）．对任意的$\alpha\in(0,1)$，必存在最紧迫水平α检验．如果一个检验问题关于$\mathscr{X}$上的变换群G是不变的，且G满足Hunt-Stein引理的条件，则一致最大功效不变水平α检验在水平α检验中间是最紧迫的（$\rightharpoonup$统计判决函数）．检验的容许性和检验族的完备性可从第二类错误的概率来定义（$\rightharpoonup$统计判决函数）．一致最大功效水平α检验和一致最大功效无偏水平α检

验都是容许的.

【有关正态分布的常用检验】(→ 公式 22) 本节讨论在检验问题中通常用的有关正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的临界域 S. 如无特别声明,参数(μ, σ^2)是未知的,临界域 S 的水平为 α. $c(\alpha)$ 和 $d(\alpha)$ 是由 α 确定的正数. 设随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 独立地服从同分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 且对样本点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$, 置

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

和

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2.$$

1) 要检验假设 $\boldsymbol{H}$: $\mu \leqslant \mu_0$, 针对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\mu > \mu_0$, 用 $S = \{x \mid t(x) > c(\alpha)\}$, 此处

$$t(x) = \sqrt{n}\,(\bar{x} - \mu_0)/\sqrt{s^2/(n-1)}$$

(**单侧 t 检验**或**单侧 Student 检验** (one-sided Student test)). 2) 要检验假设 $\boldsymbol{H}$: $\mu = \mu_0$, 针对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\mu \neq \mu_0$, 可用

$$S = \{x \mid |t(x)| \geqslant c(\alpha)\},$$

此处 $t(x)$ 与 1) 中的相同 (**双侧 t 检验**或**双侧 Student 检验** (two-sided Student test)). 一般用统计量 $t(x)$ 所做的检验叫做 **Student 检验** (Student test) 或 **t 检验** (t-test). 3) 要检验假设 $\boldsymbol{H}$: $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$, 针对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\sigma^2 > \sigma_0^2$ (其中 $\sigma_0^2 > 0$), 可用

$$S = \{x \mid \chi^2(x) \geqslant c(\alpha)\},$$

此处 $\chi^2 = s^2/\sigma_0^2$ (**单侧 χ^2 检验** (one-sided chi square test)). 4) 要检验假设 $\boldsymbol{H}$: $\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$, 针对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\sigma^2 < \sigma_0^2$, 可用

$$S = \{x \mid \chi^2(x) \leqslant c(\alpha)\},$$

此处 χ^2 与 3) 中的相同 (单侧 χ^2 检验). 5) 要检验假设 $\boldsymbol{H}$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$, 针对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$, 可用

$$S = \{x \mid \chi^2(x) \leqslant c(\alpha) \text{ 或 } \chi^2(x) \geqslant d(\alpha)\},$$

此处 χ^2 与 3) 中的相同(**双侧 χ^2 检验** (two-sided chi square test)). 用统计量 χ^2 所做的检验叫 **χ^2 检验** (chi square test). 在这些检验中, 3) 是一致最大功效的, 1) 当 $\alpha \geqslant 1/2$ 时是一致最大功效的. 所有 1)—5) 的检验都是一致最大功效无偏的. 3)—5) 对变换

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1 + a, \cdots, x_n + a) \quad (-\infty < a < \infty)$$

是一致最大功效不变的, 1) 和 2) 对变换

$$(x_1, \cdots, x_n) \to (ax_1, \cdots, ax_n) \quad (0 < a < \infty)$$

是一致最大功效不变的,从而是最紧迫检验.

设随机变量 $X_1, \cdots, X_m$ 独立地服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 随机变量 $Y_1, \cdots, Y_n$ 独立地服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 如无特别声明, 其中 μ_1, μ_2, σ_1 和 σ_2 均为未知. 这里举出关于参数 μ_1, μ_2, σ_1^2 和 σ_2^2 的主要检验. 对样本点 $x = (x_1, \cdots, x_m)$ 和 $y = (y_1, \cdots, y_n)$, 令

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \Big/ m,$$

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \Big/ n,$$

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x})^2$$

和

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2.$$

6) 假定 σ_1 和 σ_2 为已知, 并考虑假设 $\boldsymbol{H}$: $\mu_1 = \mu_2$. 对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\mu_1 < \mu_2$ (单侧检验) 用

$$S = \{(x, y) \mid T(x, y) \geqslant c(\alpha)\};$$

对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\mu_1 \neq \mu_2$ (双侧检验) 用

$$S = \{(x, y) \mid |T(x, y)| \geqslant c(\alpha)\},$$

其中

$$T(x, y) = (\bar{x} - \bar{y})/\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}.$$

这两个检验都是一致最大功效无偏检验且对变换 $(x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_n) \to (x_1 + a, \cdots, x_m + a, y_1 + a, \cdots, y_n + a)$ 是不变的. 7) 假定 $\sigma_1 = \sigma_2$ 并考虑假设 $\boldsymbol{H}$: $\mu_1 = \mu_2$. 当备择假设 $\boldsymbol{A}$ 分别为 $\mu_1 \neq \mu_2$ (双侧检验) 和 $\mu_1 < \mu_2$ (单侧检验) 时分别用

$$S = \{(x, y) \mid |T(x, y)| \geqslant c(\alpha)\}$$

和

$$S = \{(x, y) \mid T(x, y) > c(\alpha)\},$$

其中

$$T(x, y)=\frac{(\bar{x}-\bar{y})\sqrt{m+n-2}}{\sqrt{1/m+1/n}\sqrt{s_x^2+s_y^2}}.$$

这些检验都是一致最大功效无偏检验且对变换 $(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)\to(ax_1+b,\cdots,ax_m+b,ay_1+b,\cdots,ay_n+b)$ $(-\infty<b<\infty,0<a<\infty)$ 是不变的. 8) 检验假设 $\boldsymbol{H}$: $\mu_1=\mu_2$, 这里不对 σ_1 和 σ_2 的关系作任何假定. 这个检验问题叫做 **Behrens-Fisher 问题** (Behrens-Fisher problem). 这里,要造出假设 $\boldsymbol{H}$ 为真确时其分布不依赖于 σ_1^2 和 σ_2^2 的统计量是困难的(在例 1)—7) 中一直用这样的统计量求得类似的临界域 S). 这时,令

$$\{(x,y)\mid(\bar{x}-\bar{y})/\sqrt{s_x^2/m+s_y^2/n}\geqslant f(s_y^2/s_x^2)\}$$

为临界域, 并适当选择函数 f, 可得到大体上相似于 S 的检验. 这个检验叫做 **Welch 检验** (Welch's test). 9) 假设 $\boldsymbol{H}$: $\sigma_1=\sigma_2$ 的检验. 对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\sigma_1<\sigma_2$ (单侧检验),用

$$S=\{(x, y)\mid F(x, y)\leqslant c(\alpha)\},$$

对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\sigma_2<\sigma_1$ (单侧检验),用

$$S=\{(x, y)\mid F(x, y)\geqslant c(\alpha)\},$$

对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\sigma_1\neq\sigma_2$ (双侧检验),用

$$S=\{(x, y)\mid F(x, y)\geqslant d(\alpha) \text{ 或 } F(x, y)<c(\alpha)\},$$

其中

$$F(x, y)=s_x^2/s_y^2.$$

这些检验是一致最大功效无偏检验, 且对变换 $(x_1,\cdots,x_m,y_1,\cdots,y_n)\to(ax_1+b,\cdots,ax_m+b,ay_1+b,\cdots,ay_n+b)$ $(-\infty<b<\infty,0<a<\infty)$ 是不变的. 用统计量 $F(x, y)$ 作的检验叫做 **F 检验** (F-test).

【线性假设】 (→ 统计线性模型) 这里只讨论线性假设的标准型[†]的概念. 设随机变量 $X_1,\cdots,X_n$ 独立地服从正态分布 $N(\mu_i,\sigma^2)$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 此处 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_s$ $(s<n)$ 和 σ 是未知的,且 $\mu_i=0$ $(n\geqslant i>s)$. 假设是 $\boldsymbol{H}$: $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_r=0$ $(r\leqslant s)$, 针对的备择假设是至少有一个 μ_i 不为 0. 临界域

$$S=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\mid F(x_1,\cdots,x_r;\ x_{s+1},\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{r}x_i^2\Big/\sum_{i=s+1}^{n}x_i^2\geqslant c(\alpha)\right\}$$

是这一问题的一个一致最大功效无偏检验, 而且这个 S 对平移变换群 g_1: $(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1},\cdots,x_s,x_{s+1},\cdots,x_n)\to(x_1,\cdots,x_r,x_{r+1}+a,\cdots,x_s+a,x_{s+1},\cdots,x_n)$, 相似变换群 g_2: $(x_1,\cdots,x_n)\to(cx_1,\cdots,cx_n)$, $\boldsymbol{R}^r=\{(x_1,\cdots,x_r)\}$ 上的正交变换群 g_3: $O(r)$ 和 $\boldsymbol{R}^{n-s}=\{(x_{s+1},\cdots,x_n)\}$ 上的正交变换群 g_4: $O(n-S)$, 以及这些变换群 g_1, g_2, g_3 和 g_4 中元素的有限积是不变的. 这个检验也是 F 检验的一种. 线性假设问题包括前节的例 2) 和 7) 作为其特殊情形.

【似然比检验】 **似然比检验** (likelihood ratio test) 是比较容易求得的, 虽然它未必具备上面指出的合意条件. 设 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 为似然函数[†]$\Big($这是样本分布的密度函数. 当 $X_1,\cdots,X_n$ 为独立且对参数 θ 具有相同的密度函数 $f(x,\theta)$ 时, $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)\Big)$. 则**似然比** (likelihood ratio) 为

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{\sup\limits_{\theta\in\omega_H}L(x_1,\cdots,x_n;\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\omega_H\cup\omega_A}L(x_1,\cdots,x_n;\theta)},$$

用临界域

$$S=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\lambda(x_1,\cdots,x_n)\leqslant c_\alpha\}$$

作的检验叫做似然比检验, 此处 c_α 是由水平 α 确定的常数. 设 $\hat{\theta}_H(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\hat{\theta}_{H\vee A}(x_1,\cdots,x_n)$ 分别是 θ 在 ω_H 和 $\omega_H\cup\omega_A$ 中的极大似然估计量[†],亦即

$$L(x;\hat{\theta}_H(x))=\sup_{\theta\in\omega_H}L(x;\theta)$$

和

$$L(x;\hat{\theta}_{H\vee A}(x))=\sup_{\theta\in\omega_H\cup\omega_A}L(x;\theta),$$

则

$$\lambda(x)=L(x;\hat{\theta}_H)/L(x;\hat{\theta}_{H\vee A}).$$

前节线性假设的 F 检验是似然比检验. 似然比检验的其他例子, 见公式 23. 但一般地说, 似然比检验未必具有前几段所提的合意性质.

【完备类】 问题 $\boldsymbol{H}$: $\theta\leqslant\theta_0$ 和 $\boldsymbol{A}$: $\theta>\theta_0$

的临界域 $\{x \mid T(x) < c\}$（单侧检验）的全体，其中统计量 T 是狭义 Pólya 2 型†以及问题 $\boldsymbol{H}$: $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$ 和 $\boldsymbol{A}$: $\theta < \theta_1$ 或 $\theta_2 < \theta$ 的临界域 $\{x \mid c < T(x) < d\}$（双侧检验）的全体，其中统计量 T 是狭义 Pólya 3 型，都是最小完备类的例子（[6]）. 对指数型分布的简单解消假设，已在较弱的条件下证明了凸临界域的检验的全体是本质完备类（[7]）.

【渐近理论】 设 $(\mathscr{X}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, P_{\nu\theta})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ 为一串概率空间，这里参数空间 Ω 对所有 ν 是公共的. 设 $(\mathscr{X}^{(n)}, \mathfrak{B}^{(n)}, P_\theta^{(n)})$ 为 $(\mathscr{X}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, P_{\nu\theta})$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ 的直积概率空间. 对每一样本空间 $(\mathscr{X}^{(n)}, \mathfrak{B}^{(n)}, P_\theta^{(n)})$，假设 $\boldsymbol{H}$: $\theta \in \omega_H$ $(\subset \Omega)$ 和备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\theta \in \omega_A$ $(\subset \Omega - \omega_H)$ 的检验函数记作 $\varphi_n(x_1, \cdots, x_n)$. 往往将 φ_n 的序列 $\{\varphi_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ 简单地叫做**检验**. 例如，所谓"似然比检验"，往往理解为由 $(\mathscr{X}^{(n)}, \mathfrak{B}^{(n)}, P_\theta^{(n)})$ 和 ω_H 定义的似然比 $\lambda_n(x_1, \cdots, x_n)$ 所成的检验序列

$$S_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \lambda_n(x_1, \cdots, x_n) < \lambda_n\},$$

此处 λ_n 是一常数. 如果检验 $\{\varphi_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时满足 $E_\theta(\varphi_n) \to 0$ $(\theta \in \omega_H)$ 和 $E_\theta(\varphi_n) \to 1$ $(\theta \in \omega_A)$，则称 $\{\varphi_n\}$ 为**相容检验** (consistent test). 如果这些收敛关于 θ 是一致的，则 $\{\varphi_n\}$ 叫做**一致相容检验** (uniformly consistent test). 当一致相容检验存在时，称 ω_H 和 ω_A 是**有限可辨别的** (finitely distinguishable). 设观测值服从同一分布（亦即 $(\mathscr{X}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, P_{\nu\theta})$ 与 ν 无关地等于 $(\mathscr{X}, \mathfrak{B}, P_\theta)$），并且 ω_H 和 ω_A 关于 Ω 中的距离

$$\rho(\theta, \theta') = \sup_{B \in \mathfrak{B}} |P_\theta(B) - P_{\theta'}(B)|$$

是紧致的. 这时，ω_H 和 ω_A 是有限可辨别的，如果 $E_\theta(\varphi)$ 对任何的检验函数 φ 是 θ 的连续函数的话（[4]）. 如果解消假设和备择假设都是简单的，那末关于 ω_H 和 ω_A 的可辨别性的命题，可举出角谷定理（→ 统计判决函数）.

下面关于似然比检验的极限分布的结果，应归功于 H. Chernoff（[3]）：设 $\mathscr{X}^{(n)}$ 为 n 维空间，且 Ω 为包含原点 0 的 k 维空间 $\boldsymbol{R}^k$ 的开集. 设观测值独立地服从具有密度函数 $f(x, \theta)$ 的分布，亦即设样本点 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 的似然函数为

$$L(x; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

再假定下列正则条件：1) $\log f(x, \theta)$ 在 $\theta = 0$ 的邻域 N 的闭包的各点上关于 θ 三次可偏微；2) 存在一个可积函数 F 和一个可测函数 H，使得 i) 对 $\theta \in N$，有 $|\partial f/\partial\theta_i| < F(x)$，ii) 对 $\theta \in N$，有 $|\partial^2 f/\partial\theta_i\partial\theta_j| < F(x)$，iii) $|\partial^3 \log f/\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_m| < H(x)$，iv) $\sup_\theta E_\theta(H(x)) < \infty$. 3) 对每个 $i, j = 1, 2, \cdots, k$，

$$J_\theta^{ij} = (E[(\partial \log f/\partial\theta_i)(\partial \log f/\partial\theta_j)])$$

是有限的，且矩阵 $J_\theta = (J_\theta^{ij})$ 对所有的 $\theta \in N$ 是正定的. 对 Ω 的子集 ω，置

$$P(x_1, \cdots, x_n; \omega) = \sup_{\theta \in \omega} L(x_1, \cdots, x_n; \theta).$$

考虑假设 $\theta \in \omega_H$ 针对备择假设 $\theta \in \omega_A$ 的检验. 令

$$\lambda^*(x_1, \cdots, x_n) = \frac{P(x_1, \cdots, x_n; \omega_H)}{P(x_1, \cdots, x_n; \omega_A)},$$

这个 λ^* 和前述的似然比外表上不同，但本质上起同样作用. Chernoff 求出了 λ^* 的渐近分布. 设 $\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$ 是对 ω_H 的极大似然估计量，且 0 是 ω_H 的聚点，则 $\hat{\theta}(x)$ 依概率收敛于 0（当 $\theta = 0$）. 我们称 Ω 的一个子集 C 为锥体，如果 $\theta \in C$ 蕴涵 $a\theta \in C$（对所有的正数 a）. 如果 $\omega \subset \Omega$ 满足 $\forall y \in \omega$:

$$\inf_{x \in C} \|x - y\| = o(\|y\|)$$

且 $\forall x \in C$:

$$\inf_{y \in \omega} \|x - y\| = o(\|x\|)$$

$$\left(\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2\right),$$

则称 ω 能由 C 逼近. 假定 ω_H 和 ω_A 能分别由锥体 C_H 和 C_A 逼近. 那末，若置

$$z_n = \sqrt{n}\, J_0^{-1} A(x),$$

此处

$$A(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \log f(x_\alpha, 0)}{\partial\theta_1}, \cdots, \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \log f(x_\alpha, 0)}{\partial\theta_k}\right)',$$

则 $-2\log\lambda^*(X)$ 当 $\theta=0$ 时的极限分布等于

$$\inf_{\theta\in C_H}(z_n-\theta)'J_0(z_n-\theta)-\inf_{\theta\in C_A}(z_n-\theta)'J_0(z_n-\theta)$$

的分布. 特别,如果 $\Omega=\boldsymbol{R}^k$ 和 $\omega_H=\{(\theta_1^0,\cdots,\theta_s^0,\theta_{s+1},\cdots,\theta_k)\mid-\infty<\theta_i<\infty,\ i=s+1,\cdots,k\}$,并假定一些正则条件,那末在解消假设下, $-2\log\lambda^*(X)$ 的极限分布是自由度 s 的 χ^2 分布.

χ^2 拟合优度检验的渐近状态也是很重要的. 设 $(X_1,\cdots,X_k)$ 服从多项分布† $M(n;p_1,\cdots,p_k)$

$$\left(\sum_{i=1}^k X_i=n,\quad X_i\geqslant 0\right),$$

并考虑检验假设 $\boldsymbol{H}$: $p_1=p_1^0,\cdots,p_k=p_k^0$. **$\chi^2$ 拟合优度检验**(chi square test of goodness of fit)的临界域是 $\{x\mid\chi^2(x_1,\cdots,x_k)\geqslant c\}$, 此处

$$\chi^2(x_1,\cdots,x_k)=\sum_{i=1}^k\frac{(x_i-np_i^0)^2}{np_i^0},$$

亦即 p_i 的值 p_i^0 与 p_i 的极大似然估计量 x_i/n 之差的加权平方和. 这个统计量 $\chi^2(x_1,\cdots,x_k)$ 当 $p_i=p_i^0(i=1,2,\cdots,k)$ 时的极限分布是自由度为 $k-1$ 的 χ^2 分布†. 此外,检验 $p_1,\cdots,p_k$ 是参数 $\theta\in\boldsymbol{R}^s$ 的函数 $p_i=p_i(\theta)$ $(i=1,\cdots,k;\ s<k)$ 这样一个假设,也能用上述的 χ^2 拟合优度检验. 假定 $p_i(\theta)$ 满足下列条件: 1) $p_i(\theta)>c^2>0$ $(i=1,\cdots,k)$, 且

$$\sum_{i=1}^k p_i(\theta)=1,$$

2) $p_i(\theta)$ 关于 θ 二次连续可偏微, 3) 矩阵 $(\partial p_i/\partial\theta_j)$ 的秩为 k. 如果在这些条件下, **修正最小 χ^2 法** (modified chi square minimum method) 的方程

$$\sum_{i=1}^k\frac{x_i-np_i}{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial\theta_j}=0\quad(j=1,\cdots,s)$$

有唯一解 $\theta=\hat\theta_n(x_1,\cdots,x_k)$, 且当 $\theta=\theta_0$ 时 $\hat\theta_n$ 依概率收敛于 θ_0, 则

$$\chi^2(x)=\sum_{i=1}^k\frac{(x_i-np_i(\hat\theta_n))^2}{np_i(\hat\theta_n)}$$

的渐近分布是自由度为 $n-s-1$ 的 χ^2 分布([8]).

列联表的独立性检验也是 χ^2 拟合优度检验的一个应用. 设有两个属性 A 和 B, 属性 A 分为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$, 属性 B 分为 $B_1,B_2,\cdots,B_s$. 设观测值属于 A_i 和 B_j 的概率分别为 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$, 属于 $A_i\cap B_j$ 的概率为 p_{ij}. 设 $x_{i\cdot}$, $x_{\cdot j}$ 和 x_{ij} 分别是在大小为 n 的样本中属于 A_i, B_j 和 $A_i\cap B_j$ 的观测值的个数. 表 1 叫做**列联表**(contingency table). 为了检验两个属性是独立的假设 $\boldsymbol{H}$: $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$, 要用统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^s(x_{ij}-x_{i\cdot}x_{\cdot j}/n)^2\Big/(x_{i\cdot}x_{\cdot j}/n).$$

若 $\boldsymbol{H}$ 真确, 则 χ^2 当 $n\to\infty$ 时渐近服从自由度为 $(r-1)(s-1)$ 的 χ^2 分布.

表 1　列　联　表

	B_1	B_2	$\cdots$	B_s	合　计
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1s}	$x_{1\cdot}$
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2s}	$x_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_r	x_{r1}	x_{r2}	$\cdots$	x_{rs}	$x_{r\cdot}$
合　计	$x_{\cdot 1}$	$x_{\cdot 2}$	$\cdots$	$x_{\cdot s}$	n

似然比检验和 χ^2 拟合优度检验,在各自的条件下是相容检验. 一般地说,对一个问题有许多相容检验. 因此,需要考虑另一个准则,它为许多相容检验中的最佳检验所满足. Pitman 的**渐近相对效率** (asymptotic relative efficiency) 就是这样一个准则. 检验效率除此之外还有各种各样的定义([5]).

另一方面,在很多应用问题中,不能限制随机变量的分布类型. 对于这种情形,已提出各种不依赖于分布类型的检验,并且渐近理论起重要的作用(→ 非参数方法).

【序贯检验】 设已给一串随机变量 $X_1,X_2,\cdots$. 为了检验一个与这些变量(样本大小不预先确定)的分布有关的假设,我们首先观测 X_1, 然后观测 $X_2,\cdots$. 在每一观测阶段, 都要根据前面已得的数据, 作出决定是继续观测还是停止观测并作出拒绝或接受假设的判断. 这

种检验叫做**序贯检验**(sequential test). 设 X_1, X_2, $\cdots$互相独立且有同一密度函数 $f_\theta(x)$. 为了检验解消假设 $\boldsymbol{H}$: $\theta=0$, 针对备择假设 $\boldsymbol{A}$: $\theta=1$, 我们提出如下的**序贯概率比检验**(sequential probability ratio test): 置

$$G_n = G_n(x_1, x_2, \cdots x_n) = \prod_{i=1}^n f_1(x_i) \Big/ \prod_{i=1}^n f_0(x_i),$$

且确定两个常数 $a_0 < a_1$. 若 $a_0 < G_n < a_1$, 则继续观测 X_{n+1}, 否则停止观测, 并且当 $G_n \leqslant a_0$ 时接受 $\boldsymbol{H}$, 当 $a_1 \leqslant G_n$ 时接受 $\boldsymbol{A}$. a_0 和 a_1 分别根据犯第一类错误的概率 α_0 和犯第二类错误的概率 α_1 确定. 我们知道, 在犯第一(第二)类错误的概率不大于 $\alpha_0(\alpha_1)$ 的序贯检验中, 序贯概率比检验, 当 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{A}$ 中的任一个为真确时, 使观测次数的期望值为最小 (→ 统计判决函数, 统计质量管理).

【参】[1] E. L. Lehmann, Testing statistical hypotheses, John Wiley, 1959; [2] A. Wald, Sequential analysis, John Wiley, 1947; [3] H. Chernoff, On the distribution of the likelihood ratio, Ann. Math. Statist., **25** (1954), 573—578; [4] J. Wolfowitz-W. Hoeffding, Distinguishability of sets of distributions, Ann. Math. Statist., **29** (1958), 700—718; [5] M. G. Kendall-A. Stuart, The advanced theory of statistics, vol. 2, Charles Griffin, 1961; [6] S. Karlin, Decision theory for Pólya type distributions, Case of two actions I, Proc. 3rd Berkeley Symp., Math. Stat. Prob. I, Univ. of California Press (1956), 115—128; [7] A. Birnbaum, Characterizations of complete classes of tests of some multiparametric hypotheses, with applications to likelihood ratio tests, Ann. Math. Statist., **26** (1955), 21—36; [8] H. Cramér, Mathematical methods of statistics, Princeton Univ. Press, 1946 (中译本: H. 克拉美, 统计学数学方法, 上海科学技术出版社, 1966).

非参数法 [英 non-parametric method, distribution free method 法 méthode non-parametrique 德 nichtparametrische Methode, verteilungsfrei Methode 俄 непараметрический метод 日 ノンパラメトリック法] 非参数法是为了能适用于更广的概率分布族而提出的统计方法. 这个名词是在与参数方法对比的意义上使用的, 后者假定观测值的分布函数类型, 并对其中所含参数进行推断. 但要从理论上严格定义这个名词是困难的. 处理检验问题的各种**非参数检验**(non-parametric test) 方法已经常为人们所使用, **非参数估计**(non-parametric estimation) 最近有一些进展. → 假设检验, 统计估计.

【一样本问题】 设 $F(x)$ 为实随机变量 X 的分布函数, $(X_1, \cdots, X_n)$ 是来自 $F(x)$ 的大小为 n 的随机样本†, 且 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是观测值. F 的 **p 分位数** ($100p$ percentile) 记作 ξ_p, 亦即 $F(\xi_p)=p$. 为了检验假设† H: $\xi_p \leqslant \xi_0$, 针对备择假设† A: $\xi_p > \xi_0$, 人们提出下述检验程序: 设 $i(x_1, \cdots, x_n)$ 是比 ξ_0 大的 x_i 的数目, 那末由检验函数† $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= 1, \quad \text{当 } i(x_1, \cdots, x_n) > c \text{ 时}, \\ &= a, \quad \text{当 } i(x_1, \cdots, x_n) = c \text{ 时}, \\ &= 0, \quad \text{当 } i(x_1, \cdots, x_n) < c \text{ 时}\end{aligned}$$

作的检验是一致最大功效的† $(0 < a < 1, 0 \leqslant c \leqslant n)$. 这个检验叫做**符号检验**(sign test).

【二样本问题】 设 $F(x)$ 和 $G(y)$ 分别是随机变量 X 和 Y 的连续分布函数, $(X_1, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, \cdots, Y_n)$ 分别是 X 和 Y 的独立随机样本, 且 $(x_1, \cdots, x_m)$ 和 $(y_1, \cdots, y_n)$ 是相应的样本值. 考虑检验假设 H: $F(x)=G(x)$ 针对备择假设 A_1: $F(x) \neq G(x)$ 或 A_2: 对所有的 x, $F(x) \geqslant G(x)$ 且 $F(x) \not\equiv G(x)$. 当备择假设 A_2 为真确时, 我们说随机变量 Y **随机地大** (stochastically larger) 于随机变量 X, 并记作 $F > G$. 经常用的这种备择假设 A_2 的一例是 $G(x)=F(x-\theta), \theta>0$. 设 $\mathscr{H}$ 为连续且单调递增函数全体的集合, 那末假设 H 和备择假设 A_2 关于变换 $x'=h(x)$, $y'=h(y)$ $(h \in \mathscr{H})$ 所成的群是不变的. 对 $\mathscr{H}$ 的最大不变统计量† 是(将观测值 $x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n$ 按大小顺序排列的) 顺序统计量†.

令 $\varphi(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n)$ 为检验函数, 置

$$P_\varphi(F, F) = E_H(\varphi),$$

$$P_\varphi(F, G) = E_A(\varphi) = \int \cdots \int \varphi(x_1, \cdots, x_m;\ y_1, \cdots, y_n) \prod_i dF(x_i) \times \prod_j dG(y_j).$$

若对所有的 $F > G$, 有 $P_\varphi(F, F) \leqslant \alpha$, 且

$P_\varphi(F, G) \geqslant \alpha$，则$\varphi$将是一个称心的检验．**Lehmann 定理**：若 $y_j^* \geqslant y_j$ $(j=1, \cdots, n)$ 蕴涵 $\varphi(x_i, y_j^*) \geqslant \varphi(x_i, y_j)$，则 $P_\varphi(F, G) \geqslant P_\varphi(F, F)$．此外，若$\varphi$是相似检验†，则$\varphi$是无偏检验†．例：作为$U$统计量†，设

$$U = m^{-1}n^{-1}\sum_i \sum_j \phi(X_i, Y_j),$$

$$\text{其中 } \phi(x, y) = 1, \quad x \leqslant y \text{ 时}, \quad = 0, \quad x > y \text{ 时},$$

那末满足 $\varphi = 1$（当$U \geqslant c$时）；$= 0$（当$U < c$时）的φ叫做 **Wilcoxon 检验** (Wilcoxon's test) 或 **Mann-Whitney 的 U 检验**．这检验既是相似的又是无偏的．检验假设 H: $F=G$，针对备择假设 A: $F \neq G = F(x/\sigma)$ $(\sigma \neq 1$ 或 $\sigma > 1)$，是另一个二样本问题．关于此例，田村亮二提出了如下的检验．作为U统计量，设

$$U = \binom{m}{2}^{-1}\binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<i'}\sum_{j<j'}\phi(X_i, X_{i'}; Y_j, Y_{j'})$$

其中 $\phi(u, u'; v, v') = 1$，当 $v < u < v'$，$v < u' < v'$ 或 $v' < u < v$，$v' < u' < v$ 时，$= 0$，其他．

于是检验函数是 $\varphi = 1$（当 $U \geqslant c$ 时）；$= 0$（当$U < c$时）．

如下的统计量 T_N 也是在非参数问题中经常用到的．把观测值 $x_1, \cdots, x_m$; $y_1, \cdots, y_n$ 按大小顺序排列起来，从最小的算起第 i 个是 x 时置 $Z_{Ni} = 1$；是 y 时置 $Z_{Ni} = 0$（其中 $N = m + n$）．令 e_{Ni} 为一实数，且定义

$$T_N = m^{-1}\sum_i e_{Ni}Z_{Ni}.$$

设 $F_m(x)$ 和 $G_n(x)$ 为两个样本各自的经验分布函数†，且

$$0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_N = m/N \leqslant 1 - \lambda_0 < 1.$$

若置

$$H_N(x) = \lambda_N F_m(x) + (1 - \lambda_N)G_n(x),$$

则 T_N 可表为积分

$$T_N = \int J_N(H_N(x))dF_m(x)$$

$$(\text{其中 } e_{Ni} = J_N(i/N)).$$

在某些正则条件下，T_N 当$N \to \infty$ 时渐近服从正态分布．T_N 的渐近均值 μ 和方差 σ^2 如下：

$$\mu = \int J(\overline{H}(x))dF(x),$$

$$N\sigma^2 = 2(1-\lambda)\Big\{\iint_{x<y} G(x)(1-G(y)) \times J'(H(x))J'(H(y))dF(x)dF(y) + \frac{1-\lambda}{\lambda}\iint_{x<y} F(x)(1-F(y)) \times J'(H(x))J'(H(y))dG(x)dG(y)\Big\},$$

其中

$$J(H) = \lim_{N\to\infty} J_N(H),$$

$$\overline{H}(x) = \lambda F(x) + (1-\lambda)G(x),$$

且 $\lambda = \lim \lambda_N$．列举用 T_N 做的检验的例子如下：首先，当 $e_{Ni} = i/N$ 时，统计量 T_N 等价于 Wilcoxon 检验的U统计量．设 Z_i 是从标准正态分布 $N(0, 1)$ 抽出的大小为N的独立样本中从最小的算起的第 i 个顺序值，且置 $e_{Ni} = E(Z_i)$，则由 T_N 做的检验叫做 **Fisher-Yates-Terry 正态得分检验** (normal score test)．若 J 是 $N(0,1)$ 的分布函数的反函数，则由 T_N 做的检验叫做 **van der Waerden 的 X 检验**．

【k 样本问题】 设 X_{ij} $(i=1, \cdots, k; j=1, \cdots, n_i)$ 是从分布函数 $F_i(x)$ $(i=1, \cdots, k)$ 抽出的大小为 n_i 的独立样本．**k 样本问题** (k-sample problem) 是检验假设 $F_1(x) = \cdots = F_k(x)$，针对的备择假设是 $F_i(x)$ 不全相等，

$$F_i(x) = F(x - \theta_i) \quad (\theta_i > 0)$$

或者

$$F_i(x) = F(x/\sigma_i) \quad (\sigma_i > 1).$$

对这个问题，使用向量值U统计量 $\boldsymbol{U} = (U^1, \cdots, U^k)$ 的二次型统计量做的检验已经提出几种．设 U^i 是由函数

$$\phi^i(x_{11}, \cdots, x_{1m_1 i}; \cdots; x_{k1}, \cdots, x_{km_k i}) \quad (i = 1, \cdots, k)$$

定义的U统计量，若

$$N = \sum n_i \to \infty, \quad n_i = \rho_i N \quad (0 < \rho_i < 1),$$

且 $\sum \rho_i = 1$，则

$$\boldsymbol{V} = (\sqrt{N}(U^1 - E(U^1)), \cdots, \sqrt{N}(U^k - E(U^k)))$$

渐近地服从多维正态分布 $N(0, \Sigma)$（→ 样本分

布)．设 B 为协方差矩阵† $\Sigma=(\sigma_{ij})$ 的特征值 0 所对应的特征空间上的射影矩阵†．若 Λ 是一个满足 $\Lambda B=0$ 和 $\Sigma\Lambda=I-B$ 的矩阵，则 $\boldsymbol{V}\Lambda\boldsymbol{V}'$ 渐近地服从以 Σ 的秩为自由度的非中心 χ^2 分布†．已经提出了以 $\boldsymbol{V}\Lambda\boldsymbol{V}'>c$ 为临界域的各种类型的检验，其中的一个是以

$$\phi^i(x_1;\cdots;x_k)=\sum_\alpha n_\alpha n_i^{-1}\delta(x_\alpha,x_i),\quad i=1,\cdots,k$$

(当 $x<y$ 时 $\delta(x,y)=1$；当 $x>y$ 时 $\delta(x,y)=0$) 为基本函数的检验，这叫做 **Kruskal-Wallis 检验** (Kruskal-Wallis test).

【检验的渐近相对效率】 如果对同一个假设检验问题存在很多检验，那末比较这些检验的好坏是需要研究的问题．设 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{\phi_n\}$ 是水平 α 检验的两个序列，此处 φ_n 和 ϕ_n 是基于大小为 n 的样本的检验函数，并且它们的检验功效函数分别记作 $\beta(\theta|\varphi_n)$ 和 $\beta(\theta|\phi_n)$．设 θ 是实参数．考虑假设 $\theta=\theta_0$ 和备择假设序列 $\{\theta_i\}$，当 $i\to\infty$ 时 $\theta_i\to\theta_0$．设 $\{n_i\}$ 和 $\{n_i^*\}$ 是正整数的递增数列，使检验功效函数†满足

$$\alpha<\lim\beta(\theta_i|\varphi_{n_i})=\lim\beta(\theta_i|\phi_{n_i^*})<1.$$

若对所有这样的数列 $\{n_i\}$ 和 $\{n_i^*\}$，$\lim n_i^*/n_i=e(\{\varphi_n\},\{\phi_n\})$ 存在且不依赖于 α 和 $\lim\beta(\theta_i|\varphi_{n_i})$，则称 e 为 $\{\varphi_n\}$ 对 $\{\phi_n\}$ 的渐近相对效率†．

我们还假定检验 $\{\varphi_n\}$ 和 $\{\phi_n\}$ 用统计量 $T_n=t_n(X)$ 与 $T_n^*=t_n^*(X)$，由如下形式给出：

$$\begin{aligned}\varphi_n(x)&=1,\ \text{当}\ t_n(x)>c,\\&=a,\ \text{当}\ t_n(x)=c,\\&=0,\ \text{当}\ t_n(x)<c;\\\phi_n(x)&=1,\ \text{当}\ t_n^*(x)>c^*,\\&=b,\ \text{当}\ t_n^*(x)=c^*,\\&=0,\ \text{当}\ t_n^*(x)<c^*,\end{aligned}$$

此处 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $x=(x_1,\cdots,x_n)$．为简单起见，置 $\theta_0=0$ 和 $\theta_n=k/\sqrt{n}$ (k 是常数)．若 $\{T_n\}$ 和 $\{T_n^*\}$ 渐近地服从正态分布，则在适当的条件下，e 由

$$e=\lim\frac{(dE_\theta(T_n)/d\theta|_{\theta=0})^2\sigma_0^2(T_n^*)}{(dE_\theta(T_n^*)/d\theta|_{\theta=0})^2\sigma_0^2(T_n)}$$

给出．作为一个例子，考虑关于位置参数的二样本问题．若总体分布为正态分布，且使用 Wilcoxon 检验来检验均值相等的假设，则这检验对 Student 的 t 检验的渐近相对效率为 $3/\pi$．对于同一个问题，Fisher-Yates-Terry 正态得分检验及 van der Waerden 的 X 检验对 Student 的 t 检验的渐近相对效率均为 1．在 k 样本问题中，若样本是正态分布的，则检验均值相等的 Kruskal-Wallis 检验对 F 检验的渐近相对效率为 $3/\pi$.

【Колмогоров-Смирнов 检验】 设 $F_0(x)$ 为随机变量的分布函数，$F_n(x)$ 为来自分布 $F_0(x)$ 的大小为 n 的随机样本的经验分布函数．置

$$\begin{aligned}d_n&=\sup|F_n(x)-F_0(x)|,\\D_n&=\sup(F_n(x)-F_0(x)),\\s_n&=\sup_{a\leqslant F_0(x)}\left|\frac{F_n(x)-F_0(x)}{F_0(x)}\right|,\\S_n&=\sup_{a\leqslant F_0(x)}\frac{F_n(x)-F_0(x)}{F_0(x)},\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Pr(d_n<z/\sqrt{n})&=L(z)\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2z^2},\\\lim_{n\to\infty}\Pr(D_n<z/\sqrt{n})&=K(z)\\&=1-e^{-2z^2},\end{aligned}$$

$$\Pr(D_n<D)=1-D\sum_{j=0}^{[n(1-D)]}\binom{n}{j}\times\left(1-D-\frac{j}{n}\right)^{n-j}\left(D+\frac{j}{n}\right)^{j-1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\Pr(s_n<z/\sqrt{n})=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\times(2k+1)^{-1}e^{-((2k+1)^2\pi^2/8)((1-a)/az^2)},$$

$$\lim_{n\to\infty}\Pr(S_n<z/\sqrt{n})=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{z\sqrt{\frac{a}{1-a}}}e^{-t^2/2}dt.$$

统计量 d_n, D_n, s_n 和 S_n 都可用来检验假设 $F(x)\equiv F_0(x)$ (这个检验叫做拟合优度检验)．在二样本问题中，设 $F_m(x)$ 和 $G_n(x)$ 为两个经验分布函数，它们分别来自分布 $F(x)$ 和 $G(x)$ 的大小为 m 和 n 的随机样本．置

$$d_{m,n} = \sup |F_m(x) - G_n(x)|,$$
$$D_{m,n} = \sup(F_m(x) - G_n(x)).$$

如果假设 $F = G$ 为真确，且 m 和 n 趋于 ∞ 使得 $N = mn(m+n)^{-1} \to \infty$ 以及 m/n 为常数，则有

$$\lim \Pr(d_{m,n} < z/\sqrt{N}) = L(z),$$
$$\lim \Pr(D_{m,n} < z/\sqrt{N}) = K(z).$$

由于这个事实，$d_{m,n}$ 和 $D_{m,n}$ 可以用来检验假设 $F=G$. 用统计量 $d_n, D_n, d_{m,n}$ 和 $D_{m,n}$ 做的检验叫做 **Колмогоров-Смирнов 检验**（Kolmogorov-Smirnov test）.

【非参数估计】 由于这个问题用一般理论来统一处理是困难的，这里只举数例以说明它所处理的问题.

如果对大小为 n 的样本 $X_1, \cdots, X_n$，存在一个函数 f 使得 $E_\theta(f(X_1, \cdots, X_n)) = g(\theta)$，则称 $g(\theta)$ 为可估的参数函数. 使 $g(\theta)$ 为可估的样本容量的最小值 m 叫做 $g(\theta)$ 的**度数**（degree），并且样本大小为 m 的 $g(\theta)$ 的无偏估计量 $f(x_1, \cdots, x_m)$ 叫做**核**（kernel）. 我们总可取一个对称函数作为核. 如果样本大小 $n \geqslant m = g(\theta)$ 的度数，则

$$U(X_1, \cdots, X_n) = \binom{n}{m}^{-1} \sum_C f(X_{i_1}, \cdots, X_{i_m})$$

是 $g(\theta)$ 的无偏估计量[†]，其中 f 是核，且 C 是由 $X_1, \cdots, X_n$ 取出 m 个的所有可能的组合. 例 1) $\mu = E(X)$ 是度数 1 的可估参数，并且 $U = n^{-1}\sum X_i = \bar{X}$. 例 2) $\sigma^2 = E((X-\mu)^2)$ 是度数 2 的可估参数，$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2$ 是核，对称化为 $f = (x_1 - x_2)^2/2$，并且

$$U = (\sum X_i^2 - n\bar{X}^2)/(n-1).$$

如果顺序统计量是完备的充分[†]统计量，那末 U 是最小方差无偏估计量[†].

设 $F(x)$ 为 X 的分布函数，$G(y)$ 为 Y 的分布函数. 对于

$$\delta = \Pr(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dG(x)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - G(x))dF(x)$$

的估计问题，在检验假设 $F = G$ 和备择假设 $F > G$ 中出现的 U 统计量是 δ 的无偏估计量.

考虑 $G(y) = F(y - \theta)$ 中的位置参数 θ 的估计问题. 为了求得 θ 的估计量 $\hat{\theta}(x)$，人们经常考虑假设 H: $\theta = 0$ 针对备择假设 A: $\theta > 0$ 的检验，并选择临界域为 $h(x, y) = h(x_1, \cdots, x_m; y_1, \cdots, y_n) > c$（常数）的检验. 设 $h(x, y + a) = h(x_1, \cdots, x_m; y_1 + a, \cdots, y_n + a)$ 是 a 的递增函数，并且 h 的分布当 $\theta = 0$ 时关于点 μ 是对称的. 那末，令

$$\theta^* = \sup\{\theta | h(X, Y - \theta) > \mu\}$$

和

$$\theta^{**} = \inf\{\theta | h(X, Y - \theta) < \mu\},$$

并取 $\hat{\theta} = (\theta^* + \theta^{**})/2$ 作为 θ 的估计量. 在很多实际情况中，$\hat{\theta}$ 有时是中位数无偏估计量[†].

设对 n 个个体的第 i 个个体测了两个特性 a_i 和 b_i，并把每组数据 $(a_1, \cdots, a_n)$ 和 $(b_1, \cdots, b_n)$ 按大小顺序重排. 重排后 a_i 在 $(a_1, \cdots, a_n)$ 中的位置叫做第 i 个个体关于特性 a 的**秩**（rank），并用序数 X_i 表示. 同样可以定义第 i 个个体关于特性 b 的秩 Y_i. 用来表示这两种特性相关程度的系数，叫做**秩相关系数**（coefficient of rank correlation）. 下面叙述两种. i) 设 n 个个体按两种特性所排成的秩分别为 $X_1, \cdots, X_n$ 和 $Y_1, \cdots, Y_n$. 置 $d_i = X_i - Y_i$，则

$$r_S = 1 - 6 \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i^2}{n^3 - n}$$

叫做 **Spearman 秩相关系数**. 若两种特性之间完全没有相关（例如，X_i 和 Y_j 为独立的随机变量），则 $E(r_S) = 0$ 和 $V(r_S) = (n-1)^{-1}$. ii) 从 n 个个体中取出第 i 个和第 j 个个体. 若 X_i 和 X_j 的秩与 Y_i 和 Y_j 的秩顺序相同，亦即若 $(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0$，则令 $\phi_{ij} = 1$；否则令 $\phi_{ij} = 0$. 统计量

$$r_K = \binom{n}{2}^{-1} \sum \phi_{ij}$$

叫做 **Kendall 秩相关系数**，此处 $\sum$ 取遍由 n 个取两个的一切组合. 若两种特性之间完全没有相关，则

$$E(r_K) = 0$$

和

$$V(r_K)=2(2n+5)(9n(n-1))^{-1}.$$

应用这些统计量可以检验两种特性无相关性的假设.

【参】 [1] D. A. S. Fraser, Nonparametric methods in statistics, John Wiley, 1957; [2] H. Chernoff-I. R. Savage, Asymptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics, Ann. Math. Statist., 29(1958), 972—994; [3] M. Fisz, Probability theory and mathematical statistics, John Wiley、第三版, 1963 (中译本: M. 费史,概率论及数理统计,上海科学技术出版社, 1962); [4] M. G. Kendall-A. Stuart, The advanced theory of statistics, Griffin, I, 1958; II, 1961; [5] A. E. Sarhan-B. G. Greenberg, Contributions to order statistics, John Wiley, 1962; [6] J. E. Walsh, Handbook of non-parametric statistics I, van Nostrand, 1962; [7] J. Hajek-Z. Šidák, Theory of rank tests, Academic Press, 1967; [8] J. Hajek, A course in nonparametric statistics, Holden-Day, 1969; [9] H. A. David, Order statistics, John Wiley, 1970; [10] M. L. Puri, Nonparametric techniques in statistical inference, Cambridge Univ. Press, 1970.

试验设计 [英 design of experiments 法 plan expérimental 德 Versuchsplanung 俄 планирование экспериментов 日 実験計画] 从数学的观点来看, **试验设计**是以分析给定的线性模型†和在某种意义上决定一个好的线性模型为目的的一种统计方法. 方差分析也可包含在试验设计之中 (→ 统计线性模型).

设观测值亦即 n 维随机样本† $\boldsymbol{X}=(X_1,\cdots,X_n)'$ 可表为线性模型:

$$(1)\qquad \boldsymbol{X}=A\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{W},$$

此处, A 是已知的 $n\times s$ 实矩阵, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_s)'\in\boldsymbol{R}^s$ 是 s 维向量, $\boldsymbol{W}=(W_1,\cdots,W_n)'$ 是具有均值 $E(\boldsymbol{W})=(0,\cdots,0)'$ 的随机向量. 那末 $\boldsymbol{X}$ 叫做**观测向量** (observation vector), $\boldsymbol{W}$ 叫做**误差项** (error term), 以及 $\boldsymbol{\xi}$ 叫做 $\boldsymbol{X}$ 的**效应** (effect). 矩阵 A 叫做**设计矩阵** (design matrix) 或 $\boldsymbol{\xi}$ 的**关联矩阵** (incidence matrix), 其元素在多数情形中是 0 或 1. 按照效应 $\boldsymbol{\xi}$ 的性质, 线性模型 (1) 分为下面三种情况. i) **固定效应模型** (fixed effect model) 是在线性模型中 $\boldsymbol{\xi}$ 是固定的未知参数的模型. 这时 $\boldsymbol{\xi}$ 的分量 ξ_i 称为**固定效应** (fixed effect). $\boldsymbol{\xi}$ 的线性函数 $\varkappa=\boldsymbol{F}'\boldsymbol{\xi}$ (其中 $\boldsymbol{F}$ 是已知的, $\boldsymbol{F}\in\boldsymbol{R}^s$) 叫做**线性参数** (linear parameter) 或**参数函数**. ii) **随机效应模型** (random effect model) 是在线性模型中 $\boldsymbol{\xi}$ 的分量 Ξ_i 是随机变量的模型. 这时, Ξ_i 叫做**随机效应** (random effect), 且把 ξ 记作 Ξ. iii) **混合模型** (mixed model) 是在 $\boldsymbol{\xi}$ 中既有固定效应 ξ_i 又有随机效应 Ξ_i 的模型. 这时 (1) 变成

$$(2)\qquad \boldsymbol{X}=A_1\boldsymbol{\xi}^1+A_2\boldsymbol{\Xi}^2+\boldsymbol{W},$$

此处 $\boldsymbol{\xi}^1=(\xi_1^1,\cdots,\xi_r^1)'$ 是固定效应向量, $\boldsymbol{\Xi}^2=(\Xi_1^2,\cdots,\Xi_t^2)'$ 是随机效应向量. 关于 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布†, 往往假定下面的条件:

a) 误差项 W_i $(i=1,\cdots,n)$ 是互相独立†的随机变量, 且 $E(W_i)=0$,

b) 误差项 W_i $(i=1,\cdots,n)$ 有共同的未知方差† σ^2,

c) 误差项 W_i $(i=1,\cdots,n)$ 服从正态分布†,

d) 随机效应 Ξ_j $(j=1,\cdots,s)$ 是互相独立且与误差项 $\boldsymbol{W}$ 也独立的随机变量,

e) 随机效应 Ξ_j $(j=1,\cdots,s)$ 有共同的未知方差 σ_1^2,

f) 随机效应 Ξ_j 服从正态分布.

设 $L(A)$ 为一个由 A 的列向量张成的线性子空间. 线性模型

$$(3)\qquad \boldsymbol{X}=B\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{W}$$

叫做关于线性模型 (1) 的假设, 如果 $L(B)\subsetneqq L(A)$.

试验设计主要关心的是: 1) 统计推断, 诸如对模型 (1), (2), (3), i), ii) 和 iii) 的估计或假设检验; 2) 求满足某种要求的矩阵 A; 3) 给出理论根据, 借以阐明按上述模型对观测数据的统计处理的有效性.

【区组设计】 这里将用所谓**区组设计** (block design) 阐述试验设计. 设有 n 个试验**小区** (plot), 各小区的观测值为 X_α $(\alpha=1,\cdots,n)$. 几个小区构成一个**区组** (block). 区组中小区的个数叫做区组的**大小** (size). 令第 i 个区组的大小为 $k_i\left(j=1,\cdots,b;\ \sum_i k_i=n\right)$. 设有 v 种称为**处理** (treatment) 的操作实施于每

个小区. 设第 i 个处理实施于第 j 个区组的小区 α 的观测值 X_α 有下列结构:

$$X_\alpha = \xi_i + \eta_j + W_\alpha,$$

其中 $\xi_i\ (i=1,\cdots,v)$ 叫做**处理效应** (treatment effect) 和 $\eta_j\ (j=1,\cdots,b)$ 叫做**区组效应** (block effect). 还假定 $\sum_i \xi_i = 0$. 这时 $\boldsymbol{X}$ 可用矩阵记号表为:

$$\text{(4)}\qquad \boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Phi}\xi + \Psi\eta + \boldsymbol{W},$$

此处 $\Phi = (\varphi_{\alpha i})\ (\alpha = 1,\cdots,n;\ i = 1,\cdots,v)$, 其中 $\varphi_{\alpha i} = 1$ (当第 i 个处理实施于小区 α); $=0$ (其他), 并且 $\Psi = (\phi_{\alpha j})\ (\alpha = 1,\cdots,n;\ j = 1,\cdots,b)$, 其中 $\phi_{\alpha j} = 1$ (当小区 α 属于第 j 个区组); $=0$ (其他). 这里假定

$$\sum_i \varphi_{\alpha i} = 1, \qquad \sum_\alpha \varphi_{\alpha i} = r_i \geqslant 1,$$

$$\sum_i r_i = n, \qquad \sum_j \phi_{\alpha j} = 1$$

和

$$\sum_\alpha \phi_{\alpha j} = k_j \geqslant 1.$$

r_i 叫做第 i 个处理的**重复数** (number of replication). 若置 $N = (n_{ij}) = \Phi'\Psi$, 则 n_{ij} 是第 i 个处理实施于第 j 个区组的次数. 矩阵 N 叫做区组设计的**关联矩阵** (incidence matrix).

我们说处理 i_0 与处理 i_h 是**连通的** (connected), 如果存在一整数链 $i_0j_1i_1j_2\cdots i_{h-1}j_hi_h$, 使得 $1 \leqslant i_p \leqslant v\ (p = 1,\cdots,h)$, $1 \leqslant j_q \leqslant b\ (q = 1,\cdots,h)$ 和 $n_{i_0j_1} > 0$, $n_{i_1j_1} > 0$, $n_{i_1j_2} > 0,\cdots$, $n_{i_{h-1}j_h} > 0$, $n_{i_hj_h} > 0$. 同样可以定义两个区组之间的连通性. 若所有的处理和所有的区组互为连通, 则称设计是连通的. 这时, 后面定义的矩阵 C 的秩是 $v-1$. 若设计是不连通的, 则关联矩阵 N 可分割为二个或更多的连通部分, 如 $N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix}$. 因此, 不失普遍性, 可以只考虑连通情形.

【固定模型中的估计与检验】 这里假定关于 $\boldsymbol{W}$ 的条件 a) 和 b) 成立. 求 $\boldsymbol{\xi}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 各自的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{H}}$ 的正规方程是

$$\text{(5)}\qquad \begin{pmatrix} \Phi' \\ \Psi' \end{pmatrix} (\Phi\Psi) \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\Xi}} \\ \hat{\boldsymbol{H}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi' \\ \Psi' \end{pmatrix} \boldsymbol{X}.$$

置 $\Phi'\Phi = \operatorname{diag}(r_1,\cdots,r_v) = D_r$ ($\operatorname{diag}(\cdots)$ 是以 $\cdots$ 为对角元素的对角矩阵),

$$\Psi'\Psi = \operatorname{diag}(k_1,\cdots,k_b) = D_k,$$
$$C = D_r - ND_k^{-1}N'$$

和

$$\boldsymbol{Q} = (\Phi' - ND_k^{-1}\Psi')\boldsymbol{X},$$

则 (5) 变为

$$\text{(6)}\quad C\hat{\boldsymbol{\Xi}} = \boldsymbol{Q},\quad \boldsymbol{H} = D_k^{-1}(\Psi'\boldsymbol{X} - N'\hat{\boldsymbol{\Xi}}).$$

令 L 是一个使 C 对角化的正交矩阵, 亦即

$$L'CL = \operatorname{diag}(\rho_1,\cdots,\rho_{v-1},0) = \Lambda(\rho_i > 0(\forall i)).$$

置

$$\Lambda^* = \operatorname{diag}(\rho_1^{-1},\cdots,\rho_{v-1}^{-1},0)$$

和 $C^* = L\Lambda^*L'$, 则 $\hat{\boldsymbol{\Xi}} = C^*\boldsymbol{Q}$ 是 (6) 的特解, 且 $\sum_i \hat{\boldsymbol{\Xi}}_i = 0$. 带有系数向量 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2,\cdots,F_v)'$ 的参数函数 $\pi = \boldsymbol{F}'\boldsymbol{\xi}$ 叫做**处理对比** (treatment contrast), 如果系数的和 $\sum_i F_i$ 为 0. 特别当 $\boldsymbol{F}'\boldsymbol{F} = 1$ 时, 处理对比 π 叫做**正规化对比** (normalized contrast). 若设计是连通的, 则任意的处理对比 π 是可估的†, 且 π 的最佳线性无偏估计量†是 $\Pi = \boldsymbol{F}'\hat{\boldsymbol{\Xi}}$. 设 $\boldsymbol{f}_i$ 是矩阵 C 的对应于特征根 ρ_i 的单位长度特征向量, 且

$$\boldsymbol{F} = \sum_i a_i\boldsymbol{f}_i,$$

则 Π 的方差是 $\sigma^2 \sum_i a_i^2 \Big/ \rho_i$.

这里假定关于 $\boldsymbol{W}$ 的条件 a), b) 和 c) 成立. 考虑假设 H: $\xi_1 = \cdots = \xi_v$ 的检验. 这个假设可表为

$$\text{(7)}\qquad \boldsymbol{X} = \Psi\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{W}.$$

考虑 $\boldsymbol{R}^n$ 的直和分解

$$\boldsymbol{R}^n = L(\boldsymbol{\Gamma}) + L_\Gamma^\perp(\Psi) + L_\Psi^\perp(\Phi,\Psi) + L_{\Phi\Psi}^\perp,$$

其中 $L_B^\perp(A)$ 和 $L_B^\perp$ 分别是 $L(B)$ 关于 $L(A)$ 和 $\boldsymbol{R}^n$ 的正交补空间, 而且 $\boldsymbol{\Gamma} = (1,\cdots,1)' \in \boldsymbol{R}^n$. 分解子空间 $L(\boldsymbol{\Gamma})$, $L_\Gamma^\perp(\Psi)$, $L_\Psi^\perp(\Phi,\Psi)$ 和 $L_{\Phi\Psi}^\perp$ 的射影矩阵†分别记作 $P_i\ (i=1,\cdots,4)$, 则

$$P_1 = (1/n)E_{nn},$$
$$P_2 = \Psi D_k^{-1}\Psi' - (1/n)E_{nn},$$

$$P_3 = (I_n - \Psi D_k^{-1}\Psi')\Phi C^*\Phi'(I_n - \Psi D_k^{-1}\Psi'),$$
$$P_4 = I_n - P_1 - P_2 - P_3,$$

其中 E_{ab} 是元素全为1的 $a \times b$ 矩阵和 I_n 是 $n \times n$ 单位矩阵. 关于模型(4)的假设(7)的检验的方差分析[†]由

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}'P_1\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}'P_2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}'P_3\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}'P_4\boldsymbol{X}$$

给出. 这叫**区组内分析** (intrablock analysis). 对假设 H 常用的一个检验可由临界域

$$F = ((n-b-v+1)/(v-1)) \times (\boldsymbol{X}'P_3\boldsymbol{X}/\boldsymbol{X}'P_4\boldsymbol{X}) > \text{常数}$$

给出(→统计线性模型).

【最优设计】 在某种意义下, 使正规化对比 π 的估计量 $\hat{\Pi}$ 的方差为最小的区组设计叫做**最优** (optimal) 设计. 设已给处理数 v, 区组数 b 和各区组的大小 $k_j < v$ $(j=1, \cdots, b)$. 对应下列条件之一的区组设计是最优的: I) $\sum_{i=1}^{v-1} \rho_i$ 为最大; II) $\min \rho_i$ 为最大; III) 参数 $\xi_i - \xi_j$ 的估计量的方差的总和为最小. 若

$$\rho_1 = \cdots = \rho_{v-1} = (n-b)/(v-1) = \rho,$$

且 $n_{ij} = 1$ 或 0, 那末, 无论对哪个条件 I), II) 和 III) 设计都是最优的. 这时我们有 $C = \rho(I_v - v^{-1}E_{vv})$. 这样的区组设计叫做**平衡区组设计** (balanced block design). 特别, 当区组的大小 k_j 不依赖于 i 而为常数 k, 处理的重复数 r_i 不依赖于 i 而为常数 r, 相遇数 $\lambda_{ii'} = \sum_j n_{ij}n_{i'j}$ (处理 i 和 i' 一起实施于相同区组的次数) 不依赖于 i 和 i' 而为常数 λ 时, 设计是平衡的. 这时设计叫做**平衡不完全区组设计** (balanced incomplete block design, 缩写为 **BIBD**). 由于 $k < v$, 所以是不完备的. 这样一个 BIBD 记作 (v, k, b, r, λ), 并且有关系 $vr = bk$, $\lambda(v-1) = r(k-1)$, $v \leqslant b$ 和 $r \geqslant k$. 特别当 $v = b$ 时, 设计称为对称的. 当 $v = b$ 为偶数时, $r - \lambda$ 必须是一个完全平方数. BIBD 存在的一些必要条件已经得到. 其中的一个是用 Hasse-Minkowski 的 p 不变量

$$C_p(A) = (-1, -1)_p \prod_{i=1}^{n} (D_i, -D_{i-1})_p$$

表述的, 此处

$$(m, n)_p = \left(\frac{m, n}{p}\right)$$

是 Hilbert 的范数剩余记号[†]和 D_i 是 A 的主子行列式. 但是 BIBD 存在的充分必要条件还不知道.

构造 BIBD 的一个方法, 是把有限域[†]上的投影几何和有限仿射几何的子空间当作区组. 但靠这些只能构造特殊的设计. 为了说明构造 BIBD 的另一方法, 我们令 G 为一个 n 阶加群, 并且 $x_1^{(i)}, \cdots, x_m^{(i)}$ 是对应此群各元素 $x^{(i)}$ 的 m 个处理. 处理 $x_\alpha^{(i)}$ 称做属于第 α 组, 以及处理对 $(x_\alpha^{(i)}, x_\beta^{(j)})$ 称做 $(\alpha, \beta, x^{(p)})$ 型的**差** (difference), 如果 $x^{(i)} - x^{(j)} = x^{(p)}$ $(\neq 0)$. 我们构造大小为 k 的 t 个区组 $B_1 = \{x_{\alpha_1}^{(i_1)}, \cdots, x_{\alpha_k}^{(i_k)}\}, \cdots, B_t = \{x_{\beta_1}^{(j_1)}, \cdots, x_{\beta_k}^{(j_k)}\}$, 使得每个区组 B_i 恰好包含属于第 α 组的 r 个处理 $(\alpha = 1, \cdots, m)$, 并在相同区组中的所有处理对中间, 存在 λ 个 $(\alpha, \beta, x^{(p)})$ 型的差. 这样一组 t 个区组叫做**差集** (difference set). 差集中的这 t 个区组叫做**初始区组** (initial block). 设已给这样一个差集, 那末我们通过把加群 G 的元素加到每个 B_s $(s = 1, \cdots, t)$ 的处理上, 可以得到 nt 个区组. 这 nt 个区组形成一个 BIBD $(v = mn,\ k = rm/t,\ b = nt,\ r,\ \lambda)$.

【混合模型中的估计】 在区组大小 k 与重复数 r 一定的区组设计(4)中, 设 $\boldsymbol{\xi}$ 是固定效应, $\boldsymbol{\eta}$ 是随机效应 $\boldsymbol{H}$, 并假定 $\boldsymbol{W}$ 满足条件 a) 和 b) 以及 $\boldsymbol{H}$ 满足条件 d) 和 e) (这里把 Ξ_i 换为 $\boldsymbol{H}$ 的坐标 H_i). 若 $E(H_i) = \gamma$, $j = 1, \cdots, b$, 则用 $\boldsymbol{H}$ 代替 $\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\Gamma}_v\gamma$, (4) 便可写成

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Gamma}\gamma + \Phi\boldsymbol{\xi} + \Psi\boldsymbol{H} + \boldsymbol{W}, \tag{8}$$

并且 $E(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{0}$. 求 $\boldsymbol{\xi}$ 的最小二乘估计 $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$ 的正规方程是

$$(C + \sigma^2(\sigma^2 + k\sigma_1^2)^{-1}C_1)\hat{\boldsymbol{\Xi}} = \boldsymbol{Q} + \sigma^2(\sigma^2 + k\sigma_1^2)^{-1}\boldsymbol{Q}_1, \tag{9}$$

其中 C 和 $\boldsymbol{Q}$ 已在(6)中定义, 并且

$$C_1 = ND_k^{-1}N' - rv^{-1}E_{vv},$$
$$\boldsymbol{Q}_1 = (ND_k^{-1}\Psi' - v^{-1}E_{v1}\boldsymbol{\Gamma}')\boldsymbol{X}.$$

(9) 在比 $\sigma^2 : \sigma_1^2$ 给定的情况以外无解. 当 $\sigma^2 : \sigma_1^2$

不给定时，把由方差分析表得到的$\sigma^2 + k\sigma_1^2$的无偏估计量代入(9)而得的解，当区组数趋于无穷大时是$\boldsymbol{\xi}$的相容估计量†.

设模型(8)中的$\boldsymbol{\xi}$(为简单起见记作$\boldsymbol{\Xi}$)和$\boldsymbol{H}$都是随机效应. 假定$\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{W}$互相独立，且$\boldsymbol{\Xi}$, $\boldsymbol{H}$和$\boldsymbol{W}$的分布分别是$N(\mathbf{0}, \sigma_2^2 I_v)$, $N(\mathbf{0}, \sigma_1^2 I_b)$和$N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_n)$. (8)的$\boldsymbol{X}$的分布有四个参数$\gamma, \sigma^2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$. 当$k < v$时，最小充分估计量†一般是不完备的†. 所以，$\gamma, \sigma^2, \sigma_1^2$和$\sigma_2^2$的最优估计量就不能确定. 例如，BIBD (v, k, b, r, λ)的随机模型的最小充分统计量是$(\sum x_i, \boldsymbol{X}'P_{21}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'P_{22}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'P_3\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'P_4\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}'P_5\boldsymbol{X})$，此处

$$P_{21} = k^{-1}(r-\lambda)^{-1}BTB - kr(r-\lambda)^{-1}n^{-1}E_{nn},$$
$$P_{22} = k((k-1)r+\lambda)^{-1}r^{-1} \times (T-k^{-1}BT)(T-k^{-1}TB),$$
$$P_3 = k^{-1}B - k^{-1}(r-\lambda)^{-1}BTB + v\lambda(r-\lambda)^{-1}n^{-1}E_{nn},$$
$$P_4 = I - k^{-1}B - P_{22},$$
$$P_5 = r^{-1}T - n^{-1}E_{nn},$$

其中$T = \Phi\Phi'$和$B = \Psi\Psi'$. 这时有

$$E(\boldsymbol{X}'P_4\boldsymbol{X}) = (n-b-v+1)\sigma^2,$$
$$E(\boldsymbol{X}'P_3\boldsymbol{X}) = (b-v)(\sigma^2 + k\sigma_1^2).$$

由这些方程可以导出σ^2和σ_1^2的无偏估计量，但不能保证其最优性(→统计量).

【随机化】 无论是什么试验，小区总有小区本身的效应. 区组要构造成使区组内的小区效应尽量地均匀，但也不能完全消除小区效应. 于是，当从v个处理中取k个实施于某一区组时，哪个处理安排在哪个小区要随机地决定. 这种程序叫做**随机化**(randomization). 这样一来，小区效应是随机的，而且模型(4)中的误差项可以看作是小区效应与原有误差的总和. 当$k = v$和$N = E_{vb}$时，设计叫做**随机区组设计**(randomized block design).

【析因试验】 设有h个因素$F_1, F_2, \cdots, F_h$对$\boldsymbol{X}$有影响，且各因素有$s_i\ (i = 1, \cdots, h)$个**水平**(level). 假定h个因素的水平的所有组合$v = s_1 \times s_2 \times \cdots \times s_h$种处理的效应可表为**主效应**(main effect)和**交互作用**(interaction)的和. 这样一种试验叫做**析因试验**(factorial experiments). 当$h = 2$时，主效应记作

$$\boldsymbol{\xi}^1 = (\xi_1^1, \cdots, \xi_{s_1}^1)', \quad \boldsymbol{\xi}^2 = (\xi_1^2, \cdots, \xi_{s_2}^2)',$$

交互作用记作

$$\boldsymbol{\xi}^{12} = (\xi_{11}^{12}, \xi_{12}^{12}, \cdots, \xi_{s_1 s_2}^{12})',$$

此处

$$\sum_{i=1}^{s_1} \xi_i^1 = 0, \qquad \sum_{j=1}^{s_2} \xi_j^2 = 0,$$
$$\sum_i \xi_{ij}^{12} = \sum_j \xi_{ij}^{12} = 0.$$

若对试验次数没有任何限制，可把$v = s_1 \times s_2$个处理组合各重复试验t次. 这种试验叫做**二因素试验设计**(two-way layout). 观测向量$\boldsymbol{X}$的分量X_{ijk}可表为线性模型

$$X_{ijk} = \gamma + \xi_i^1 + \xi_j^2 + \xi_{ij}^{12} + W_{ijk}$$
$$i = 1, \cdots, s_1; \quad j = 1, \cdots, s_2; \quad k = 1, \cdots, t,$$

或用向量记号表为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Gamma}\gamma + A_1\boldsymbol{\xi}^1 + A_2\boldsymbol{\xi}^2 + A_{12}\boldsymbol{\xi}^{12} + \boldsymbol{W}.$$

方差分析由$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \sum \boldsymbol{X}'P_i\boldsymbol{X}$给出，此处$P_i$是由直和分解$\boldsymbol{R}^n = L(\boldsymbol{\Gamma}) + L_{\Gamma}^{\perp}(A_1) + L_{\Gamma}^{\perp}(A_2) + L_{A_1A_2}{}^{\perp}(A_{12}) + L_{A_{12}}{}^{\perp}$导出的子空间的射影矩阵$(i = 1, 2, \cdots, 5)$. X_{ijk}关于足码k的算术平均记作$\bar{X}_{ij\cdot}$，同样得到$\bar{X}_{i\cdot\cdot}$, $\bar{X}_{\cdot j\cdot}$和$\bar{X}_{\cdots}$，则

$$\boldsymbol{X}'P_1\boldsymbol{X} = n\bar{X}_{\cdots}^2,$$
$$\boldsymbol{X}'P_2\boldsymbol{X} = s_2 t\sum(\bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2,$$
$$\boldsymbol{X}'P_3\boldsymbol{X} = s_1 t\sum(\bar{X}_{\cdot j\cdot} - \bar{X}_{\cdots})^2,$$
$$\boldsymbol{X}'P_4\boldsymbol{X} = t\sum(\bar{X}_{ij\cdot} - \bar{X}_{i\cdot\cdot} - \bar{X}_{\cdot j\cdot} + \bar{X}_{\cdots})^2,$$
$$\boldsymbol{X}'P_5\boldsymbol{X} = \sum(X_{ijk} - X_{ij\cdot})^2.$$

方差分析表如表1.

表1 方差分析表

因素	平方和	自由度
F_1 主效应	$\boldsymbol{X}'P_2\boldsymbol{X}$	$s_1 - 1$
F_2 主效应	$\boldsymbol{X}'P_3\boldsymbol{X}$	$s_2 - 1$
F_1F_2 交互作用	$\boldsymbol{X}'P_4\boldsymbol{X}$	$(s_1-1)(s_2-1)$
误差项	$\boldsymbol{X}'P_5\boldsymbol{X}$	$s_1s_2(t-1)$

【代数的应用】 在试验设计的理论中，结合代数与关系代数的概念起着重要的作用. 设

$A_i\ (i=0,1,\cdots,m)$ 是元素为 1 或 0 的 $v\times v$ 对称矩阵. 满足下列条件的 A_i，叫做结合矩阵：

$$A_0=I_v,\qquad \sum_{i=0}^{m}A_i=E_{vv},$$

且对每一 i,j,k 存在常数 p_{jk}^i，使

$$A_jA_k=\sum_{i=0}^{m}p_{jk}^iA_i.$$

若 $A_i=(a_{jl}^i)$ 的 $a_{jl}^i=1$，则称处理 j 与处理 l 是第 i 结合. 由矩阵 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 生成的实数域上的代数† $\mathscr{A}$ 叫做**结合代数** (association algebra). $\mathscr{A}$ 是可换的，而且 $A_k\to\mathscr{P}_k=(p_{jk}^i)$ 是 $\mathscr{A}$ 的正则表示. 存在正则矩阵 $C=(c_{ij})$ 使所有 $\mathscr{P}_i$ 同时变换为对角矩阵：

$$C\mathscr{P}_iC^{-1}=\mathrm{diag}\,(z_{0i},\cdots,z_{mi})$$
$$(i=0,1,\cdots,m).$$
$$A_i^{\#}=\Big(\sum_u c_{iu}z_{iu}\Big)^{-1}\sum_j c_{ij}A_j$$

是 $\mathscr{A}$ 的互相正交的幂等元. $m=3$ 时 $\mathscr{A}$ 的一个例子：

$$A_0=I_{s_1}\otimes I_{s_2},$$
$$A_1=(E_{s_1s_1}-I_{s_1})\otimes I_{s_2},$$
$$A_2=I_{s_1}\otimes(E_{s_2s_2}-I_{s_2}),$$
$$A_3=(E_{s_1s_1}-I_{s_1})\otimes(E_{s_2s_2}-I_{s_2}),$$

其中 $\otimes$ 表示 Kronecker 积†. 由 A_0, A_1, A_2 和 A_3 生成的代数 $\mathscr{A}$ 叫做 G_3 型结合代数. 结合矩阵 A_0, A_1, A_2 和 A_3 对应着二因素试验设计的处理之间的关系. 正交的幂等元这时是

$$A_0^{\#}=s_1^{-1}E_{s_1s_1}\otimes s_2^{-1}E_{s_2s_2},$$
$$A_1^{\#}=(I_{s_1}-s_1^{-1}E_{s_1s_1})\otimes s_2^{-1}E_{s_2s_2},$$
$$A_2^{\#}=s_1^{-1}E_{s_1s_1}\otimes(I_{s_2}-s_2^{-1}E_{s_2s_2})$$

和

$$A_3^{\#}=(I_{s_1}-s_1^{-1}E_{s_1s_1})\otimes(I_{s_2}-s_2^{-1}E_{s_2s_2}).$$

$h\ (>2)$ 个因素的析因试验设计的 $\mathscr{A}$，可同样得到. 当 $h=3$ 时，可得到结合矩阵 $A_i\ (i=0,1,\cdots,7)$. 已知道有各种类型的结合方案，其中的一些分为可分组、三角和循环等类型.

考虑由 n 个试验单位(我们称之为小区)组成的试验设计. 把小区之间的关系 R 定义为小区的一组有序对 (i,j). n 个小区之间的关系 R 可表为由 0 与 1 组成的 $n\times n$ 对称矩阵 (r_{ij})：

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果依关系 } R,\ i \text{ 和 } j \text{ 有关系},\\ 0, & i \text{ 和 } j \text{ 无关系},\end{cases}$$

而这个矩阵也记作 R. 如果 n 个小区之间有 k 种关系 $R_1,\cdots,R_k$，则由矩阵 $R_1,\cdots,R_k$ 生成的实数域上的代数 $\mathscr{R}$ 叫做设计的**关系代数** (relationship algebra). $\mathscr{R}$ 是一个半单代数†.

例 1). 在 $h=2$ 的析因试验中重复 t 次的情形，由下列矩阵生成的实数域上的代数 $\mathscr{R}$ 是这一试验的**关系代数** (relationship algebra)：

$$B_1=A_0\otimes I_t,$$
$$B_2=A_0\otimes(E_{tt}-I_t),$$
$$B_3=A_1\otimes E_{tt},$$
$$B_4=A_2\otimes E_{tt},$$
$$B_5=A_3\otimes E_{tt},$$

其中 $A_i\ (i=0,1,2,3)$ 是 G_3 型结合矩阵. 对应 $\mathscr{R}$ 的对边理想†分解的互相正交幂等元是

$$B_1^{\#}=A_0^{\#}\otimes t^{-1}E_{tt},$$
$$B_2^{\#}=A_1^{\#}\otimes t^{-1}E_{tt},$$
$$B_3^{\#}=A_2^{\#}\otimes t^{-1}E_{tt},$$
$$B_4^{\#}=A_3^{\#}\otimes t^{-1}E_{tt}$$

和

$$B_5^{\#}=A_0^{\#}\otimes(I_t-t^{-1}E_{tt}),$$

而这些都与二因素试验设计的射影矩阵 P_i 相同.

例 2). 考虑一个有 v 个处理和 b 个区组的区组设计，其中每个处理重复相同的次数 r 和每个区组的大小同是一定的 $k\ (<v)$. 设由结合矩阵 $A_i(i=0,1,\cdots,m)$ 定义处理之间的结合关系. 设 λ_{jl}^i 为第 i 结合的处理 j 和 l 所实施的区组数目. 设计叫做**部分平衡不完全区组设计** (partially balanced incomplete block design, 缩写为 **PBIBD**)，如果 λ_{jl}^i 不依赖 j 和 l 而为一定的 $\lambda^i\geqslant 0$. 特别当 $m=1$ 时，设计是 BIBD. 设观测向量由 (4) 表示. 置 $B=\Psi\Psi'$, $T_i=\Phi A_i\Phi'$，则由 I_n, E_{nn}, B, $T_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ 生成的实数域上的代数 $\mathscr{R}$ 是 PBIBD 的关系代数. 置 $NN'=\sum\lambda_iA_i=\sum\rho_iA_i^{\#}$，其中 $\rho_i(0\leqslant$

$\rho_i \leqslant rk$) 是常数，且 $T_i^\# = \Phi A_i^\# \Phi'$，则当 $\rho_i = rk$ 时称 $L(T_i^\#)$ 与区组**混杂** (confounded)；当 $0 < \rho_i < rk$ 时称 $L(T_i^\#)$ 与区组**部分混杂** (partially confounded)；当 $\rho_i = 0$ 时称 $L(T_i^\#)$ 与区组正交. $\mathscr{R}$ 是非可换的，完全可约的，且与图 1 所示类型的矩阵的代数同构. 使单位阵 I_n 分解为 $\mathscr{R}$ 的相互正交的幂等元，可以得到 PBIBD 的方差分析. 对一个 PBIBD，(6) 中的矩阵 C 的形状是

$$C = \sum_i \tau_i A_i^\#,$$

此处 $\tau_i = k - k^{-1}\rho_i$.

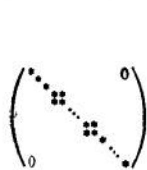


图 1

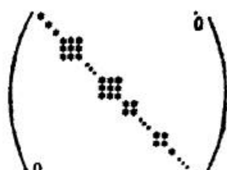


图 2

【两方消除非均匀性的设计】 考虑 v 个处理在 $u \times w$ 矩形区组的试验设计. 行效应和列效应分别记作 $\boldsymbol{\eta}$ 和 $\boldsymbol{\nu}$. 这样一来，$\boldsymbol{X}$ 的形状是

(10) $$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Gamma}\mu + \Phi\boldsymbol{\xi} + \Psi\boldsymbol{\eta} + \Pi\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{W}$$

此处 $\boldsymbol{\Gamma}$, Φ, Ψ 和 Π 的定义与区组设计的相同. 置 $L = \Phi'\Pi$, $M = \Phi'\Psi$, $D_r = \Phi'\Phi$, $F = D_r - w^{-1}LL' - u^{-1}MM' + u^{-1}w^{-1}LE_{uu}L'$，则 F 起到 (6) 中的矩阵 C 的作用. 当 F 的秩为 $v-1$ 时，设计称为连通的. 若

(11) $$F = \tau(I_v - v^{-1}E_{vv}),$$

则设计满足前述的最优条件 I), II), III). 若 $u = w = v$ 且 (11) 成立，则设计称为**拉丁方** (Latin square)；若 $u = v$ 且 (11) 成立，则设计称为 **Youden 方** (Youden square)；若 $u > v$ 且 (11) 成立，则设计称为 **Shrikhande 方** (Shrikhande square).

如果 v 个处理之间的关系可由结合方案来定义，则**两方消除非均匀性的部分平衡设计** (partially balanced designs for two-way elimination of heterogeneity) 可如 PBIBD 那样定义. 这时，

$$F = \sum_{i=1}^{m} \tau_i A_i^\#$$

成立. 特别，若 $\mathscr{A} = \{I_v, E_{vv} - I_v\}$，则 (11) 成立，从而最优条件得到满足. 两方消除非均匀性的部分平衡设计的关系代数 $\mathscr{R}$ 的定义，也和 PBIBD 的相同. $\mathscr{R}$ 与图 2 所示类型的矩阵的代数同构. 使 I_n 分解为 $\mathscr{R}$ 的相互正交的幂等元，可得出这个设计的方差分析.

【正交表】 考虑 v 种不同字母在 $N \times k$ 矩阵的排列. 若对任意 d ($2 \leqslant d < k$) 列，v 个字母取 d 个的排列(可能排列的数目是 v^d)在 N 行里各重复 λ 次，则这种排列叫做一个**大小** (size) 为 N，**约束数** (constraint) 为 k，**水平** (level) 为 v 和**强度** (strength) 为 d 的**正交表** (orthogonal layout)，记作 (N, k, v, d). 特别，当 $d = 2$ 和 $\lambda = 1$ 时，正交表 $(v^2, k, v, 2)$ 等价于 $k-2$ 个互相正交的 v 阶拉丁方. 正交表的存在与 BIBD 的存在有着密切的关系. 例如，正交表 $(k^2, k+1, k, 2)$ 的存在性等价于 BIBD ($v = k^2$, $b = k(k+1)$, k, $r = k+1$, $\lambda = 1$) 的存在性.

关于试验设计，上面没有涉及到的主题还有很多. 特别，关于多重比较，见 [4]，关于部分实施，见 [5]，关于响应曲面，见 [7].

【参】 [1] 現代統計学大辞典，実験計画の項，東洋経済，1962；[2] 増山元三郎，実験計画法，岩波講座現代応用数学，1958；[3] A. T. James, The relationship algebra of an experimental design, Ann. Math. Statist., 28 (1957), 993—1002；[4] H. Scheffé, The analysis of variance, John Wiley, 1959；[5] O. Kempthorne, The design and analysis of experiments, John Wiley, 1952；[6] W. G. Cochran-G. M. Cox, Experimental designs, John Wiley, 1950；[7] G. E. P. Box-N. R. Draper, Evolutionary operation, John Wiley, 1968.

抽样方法 [英 sampling methods 法 méthode d'échantillonnage 德 Stichprobeverfahren 俄 метод осмотра образчиком 日 標本調査法]

抽样方法，是要从被调查集团的几个而不是所有的观测值中得到关于整个集团的讯息的一种手段. 有关的集团，通常叫做总体，而被观测或调查的部分叫做**样本** (sample). J. Neyman 提倡随机抽样思想，对抽样引进某些随机操作，以保证所得结果的客观可靠性. 在此不想涉及具体调查的技术细节，而只说明其数学上的理论

结构.

设总体由N个单位组成，叫做**大小为N的有限总体** (finite population of size N). 设各单位有特征值α，它是集合Ω的元素. 总体所有的特征值的集合记作$\theta=(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$，并把它看做一个参数[†]. 所有可能的$\theta$的集合记作$\Theta\subset\Omega^N$.

设一个单位已被抽出，并按某种程序进行观测，被观测的单位的序号是J，被观测的单位的特征值是X. 若观测是没有误差的，则$X=\alpha_J$. 设n为被观测单位的个数即**样本的大小**(sample size). n可以是随机变量. 整个观测值记作$(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X})=(J_1, \cdots, J_n; X_1, \cdots, X_n)$，此处$X_i=\alpha_{J_i}$. $J_1, \cdots, J_n$之中允许有相同的重复出现. 确定$\boldsymbol{J}$的概率格式叫做**抽样程序** (sampling procedure). 若抽样程序满足条件 C): $\Pr(J_i=j)$ 不依赖于α_j和$X_{i+1}, \cdots, X_n$ (但可以依赖$J_1, \cdots, J_{i-1}$以及$X_1, \cdots, X_{i-1}$)，则此抽样程序叫做**随机抽样程序** (random sampling procedure). 此外，若$\boldsymbol{J}$的联合分布不依赖θ，则称抽样程序是**正则** (regular) 的，若n为一定，且$\Pr(\boldsymbol{J})$关于$\boldsymbol{J}$为对称的，则称抽样程序为一致的.

抽样方法的两个主要数学问题是，决定一个随机抽样程序和提供关于θ的统计推断方法.

【推断的问题】 假定条件 C) 成立. $(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X})$的概率分布为

$$\Pr((\boldsymbol{J},\boldsymbol{X})=(j_1, \cdots, j_n; X_1, \cdots, X_n))$$

$$=\Pr(J_1=j_1)\chi_\theta(X_1)\Pr(J_2=j_2|J_1, X_1)\chi_\theta(X_2)\cdots\Pr(J_n=j_n|J_1,X_1,\cdots,J_{n-1},X_{n-1})\chi_\theta(X_n),$$

$$\text{其中}\quad \chi_\theta(X_i)=1,\quad \text{当 } X_i=\alpha_{J_i},$$
$$=0,\quad \text{当 } X_i\neq\alpha_{J_i}.$$

这个公式可简化为形状

$$\Pr((\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X}))=P(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X})\chi_\theta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J}),$$

其中

$$\chi_\theta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})=1,\ \text{若 } X_i=\alpha_{J_i},\ i=1,\cdots,n,$$
$$=0,\ \text{其他}.$$

上式是抽样调查问题的基本模型. 我们注意到$P(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X})$与参数$\theta$无关.

现在，设$\boldsymbol{I}=(I_1, \cdots, I_m)$ $(I_1<I_2<\cdots<I_m)$是从$\boldsymbol{J}$去掉重复后的顺序统计量和$\boldsymbol{Y}=(Y_1, \cdots, Y_m)$ $(Y_j=\alpha_{I_j})$ 是对应的$\boldsymbol{X}$值，则$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{Y})$是由$(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{X})$求得的统计量[†]. $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{Y})$的分布也和上面一样表为

$$\Pr((\boldsymbol{I}, \boldsymbol{Y}))=\tilde{P}(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{Y})\chi_\theta(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{I}),$$

其中

$$\chi_\theta(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{I})=1,\ Y_j=\alpha_{I_j},\ j=1,\cdots,m,$$
$$=0,\ \text{其他}.$$

因为对所有的θ有$\chi_\theta(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{I})=\chi_\theta(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})$，所以，条件分布 $\Pr((\boldsymbol{X}, \boldsymbol{J})|(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{I}))$ 与参数θ无关. 从而，$(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{Y})$是充分统计量[†]. 于是，根据充分统计量的一般理论可知，关于所有的推断问题，利用去掉重复后的顺序统计量就足够了.

【估计的问题】 设$g(\theta)=g(\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$为一个实参数，考虑它的无偏估计量[†]. 定理: $g(\theta)$有无偏估计量的充分必要条件是，它能够分解为形状

$$g(\theta)=\sum h_\nu(\alpha_{j_1(\nu)}, \cdots, \alpha_{j_n(\nu)}),$$
$$\Pr(\boldsymbol{I}=(j_1(\nu), \cdots, j_n(\nu)))>0,$$
$$\nu=1, 2, \cdots.$$

若抽样程序是正则的，第二个条件可以换成$\Pr(\boldsymbol{I}\supset(j_1(\nu),\cdots,j_n(\nu)))>0,\ \nu=1,2,\cdots$ ([4]). 从而，若α_i为实数，且抽样程序为正则的，则$\bar{\alpha}=\sum\alpha_i/N$是可估的，当且仅当对所有的$i$有$\Pr(\boldsymbol{I}\ni i)>0$，以及$\sigma_\alpha^2=\sum(\alpha_i-\bar{\alpha})^2/(N-1)=\sum\sum(\alpha_i-\alpha_j)^2/N(N-1)$是可估的，当且仅当对所有的$i$和$j$有

$$\Pr(\boldsymbol{I}\supset(i, j))>0.$$

$\prod_{i=1}^{N}\alpha_i$ 并不可估，除非

$$\Pr(\boldsymbol{I}=(1, \cdots, N))>0.$$

对于任意的$g(\theta)$，上述的分解不是唯一的. 对应不同的分解可以导出不同的无偏估计量. 此外，对抽样程序为正则的情形，当$\theta=\theta_0$时总可以构造一个无偏估计量$\hat{g}(\theta)$使

$$\Pr(\hat{g}(\theta)=g(\theta_0)|\theta=\theta_0)=1,$$

如果$g(\theta)$是可估的. 从而局部最佳无偏估计

量的方差常为 0. 所以，除了方差常为 0 的估计量以外，一致最小方差无偏估计量†不存在.

如同抽样程序和参数那样，如果总体的单位中间存在某种对称性，那末对估计量也要求某种对称性是合理的. 设 G 是 N 个数的置换群. 设对 $\theta\in\Theta$ 和 $\gamma\in G$，有 $\gamma\theta\in\Theta$ 和 $g(\gamma\theta)=g(\theta)$. 如果对所有的 $\gamma\in G$，有

$$\Pr(\gamma \boldsymbol{J})=\Pr(\boldsymbol{J}),$$

那末称抽样程序关于 G 是不变的†. 一个估计量称为不变的，如果其值对样本单位号的置换 $\gamma\in G$ 为不变的话. 如果 G 是所有置换的全体(即对称群)，那末不变估计量只是 $\boldsymbol{Y}$ (或 $\boldsymbol{X}$) 的函数. 若 $\boldsymbol{Y}$ 的维数 m 是一定的，则 $\boldsymbol{Y}$ 是完备的†(在某些弱的条件下). 所以存在唯一的最小方差不变无偏估计量.

当有某种附加信息时，可用**补助变量** (auxiliary variable) $\beta_1,\cdots,\beta_N$ 来表示，而这些变量是已知的，且假定与 $\alpha_1,\cdots,\alpha_N$ 有某些关系. 假定 α_i 为实数，且要估计的参数是 $\theta=\bar{\alpha}=(\sum\alpha_i)/N$. 当 $\boldsymbol{I}$ 的维数 $m\geqslant k+1$，时，如果对某个已知函数 φ 和 k 个参数 $c_1,\cdots,c_k$，我们有

$$\alpha_i=\varphi(\beta_i;c_1,\cdots,c_k),\quad i=1,\cdots,N,$$

那末我们可以为 $\bar{\alpha}$ 造出一个方差为 0 的无偏估计量. 特别，对应关系 $\alpha_i=c\beta_i$ 的估计量，叫做**无偏比估计量** (unbiased ratio estimator)；对应 $\alpha_i=c_1\beta_i+c_2$ 的估计量叫做**无偏回归估计量** (unbiased regression estimator). 若抽样概率是均匀的，则无偏比估计量由

$$\hat{\alpha}=\bar{r}\bar{\beta}+(n(N-1)/N(n-1))[\bar{Y}-\bar{r}\bar{b}]$$

给出，此处 $\bar{r}$ 是 α_i/β_i 的样本均值，$\bar{b}$ 是 β_i 的样本均值，$\bar{\beta}$ 是 β_i 的总体均值.

【渐近置信区间】 通常不可能根据精确小样本理论得到任何有意义的置信区间†. 但若 α_i 是实的，并且抽样程序是一致的和无放回的，则当 N 和 $n\to\infty$ 并且 $\limsup n/N<1$ 时，样本均值 $\bar{X}$ 渐近地服从正态分布

$$N\left(\bar{\alpha},\ \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\sigma_\alpha^2\right),$$

其中

$$\sigma_\alpha^2=\frac{1}{N-1}\sum(\alpha_i-\bar{\alpha})^2,$$

只要

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(\alpha_i-\bar{\alpha})^2}{\sum(\alpha_i-\bar{\alpha})^2}=0.$$

此外，当 $n\to\infty$ 时样本方差收敛于 σ_α^2. 由这些结果，我们可以构造 $\bar{\alpha}$ 的渐近置信区间.

【抽样程序的问题】 在确定抽样程序时，必须考虑抽样的技术以及估计值的精度这两个方面. 作为常用的抽样程序，考虑**多级抽样** (multistage sampling) 和**分层抽样** (stratified sampling)，或者两者的某种组合. 例如将总体分为 n 个子总体，第一阶段，先将子总体作为抽样单位，选取几个子总体，其次，再由所选取的子总体抽出最终单位，这种方法叫做二级抽样. 选取子总体的概率可以是均匀的，或者是与子总体的大小成比例的. 分层抽样，是把同一总体分为几个组(叫做**层** (stratum))，在每个层中，以不同的比率选取单位的一种方法. 若第 i 层的大小为 N_i ($\sum N_i=N$)，每层抽样的大小为 n_i，且每个层内的抽样概率是均匀的，那末总体均值 $\bar{\alpha}$ 的最普通的估计量为

$$\hat{\alpha}=\sum(N_i\bar{X}_i)/N.$$

此处 $\bar{X}_i$ 是第 i 层的样本均值. $\hat{\alpha}$ 的方差为

$$V(\hat{\alpha})=(1/N)^2\sum(N_i^2/n_i)(1-n_i/N_i)\sigma_i^2,$$

此处 σ_i^2 是第 i 层内的总体方差.

如果从第 i 层中抽出一个单位所需费用为 c_i，那末在总费用一定的条件下，令

$$n_i/N_i\propto\sigma_i/\sqrt{c_i}$$

便可使估计量的方差 $V(\hat{\alpha})$ 为最小. 这叫做**最优分配** (optimum allocation).

如果从判决函数†的观点来统一看待抽样程序和估计程序，那末，上述的程序可以认为是最佳不变程序或者极小极大†程序.

在实际中，样本单位的测定不能说是没有误差的. 这样，我们设

$$X_j=\alpha_{I_j}+\varepsilon_j,$$

此处 ε_j 表示误差. 如果已知误差的概率性质，

则可制订能估计误差有多大的抽样程序. P. C. Mahalanobis 的"贯通抽样"(interpenetrating sample)的方法，就是为了控制误差的一种方法.

【概念的问题】 虽然已经确认抽样方法在大量社会的或经济的调查中是有用的，但是关于方法的基础(特别是当辅助信息存在时)，还有困难的概念问题尚待解决.

【参】 [1] W. G. Cochran, Sampling techniques, John Wiley, 1953; [2] M. H. Hansen-W. N. Hurwitz-W. G. Madow, Sample survey methods and theory I, II, John Wiley, 1953; [3] T. Dalenius, Recent advances in sample survey theory and methods, Ann. Math. Statist., **33** (1962), 325—349; [4] K. Takeuchi, Some remarks on general theory for unbiased estimation of a real parameter of a finite population, Japan. J. Math., **35** (1966), 73—84; [5] D. Raj, Sampling theory, McGraw-Hill, 1968.

统计质量管理 [英 statistical quality control 法 contrôle statistique des qualités 德 statistische Qualitätskontrolle 俄 статистический контроль качества 日 統計的品質管理] 在质量管理的业务中，用统计方法进行的，叫做**统计质量管理**. 这里讲的"质量"，一般指产品的强度、纯度等从物理、化学上可以测定的量，此外还包含为顾客提供的服务的质量、银行贷款经营的好坏、已出卖的产品修理的难易等，是一个很广泛的概念. 在这些特性中多数是具有随机波动性的，因此它们就成为应用统计方法的对象. 特别是工业生产的产品质量，是主要而且典型的对象，所以下面就对这种情况予以说明(→ 统计推断).

把产品的质量这个多方面的概念，用几个尽可能是物理上的特征加以规定，称为**质量特性**(quality characteristic). 把质量特性看做随机变量，并控制它的波动，就是统计质量管理. 为此目的，当然要测出质量特性值，进行分组，求频数分布表，以了解其分布的大致情况，此外，在生产过程的各个阶段中，还需要下述的方法. 例如，在设计阶段，在研究室做试验的试验设计[†]；为了弄清各种生产条件、各种质量特性之间的关系，以便确定应当取为管理对象的特性而做的相关分析和回归分析[†]；着眼于其特性的波动，并为发现生产条件的异常而用的管理图法；为了进一步得到改进生产条件的数据，而用于工厂试验的试验设计；产品的出厂检验，原料的验收，以及在生产的各个阶段中抽检所用的抽样检验等等. 在这些方法当中，本条只说明质量管理所特有的统计方法——管理图法和抽样检验方案.

【管理图法】 管理图法的目的，是在质量特性的波动中，判断在生产过程稳定的状态下由偶然原因产生的波动和查明后能够消除的异常原因所产生的波动. 从一**批**(lot)(由生产过程生产出来的一定数量产品的集合. 在管理图法中也叫做**群**(subgroup))产品中抽出大小为 n 的随机样本[†] $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，计算适当的统计量[†]，并由此作出判断. 记录这些统计量的观测值的图(graph)就是**管理图**(control chart).

根据所假定的样本分布型和所用的统计量，管理图分为 $\bar{X}$ **管理图**($\bar{X}$-chart)$\left(\text{假定正态分布 } N(\mu,\sigma^2)\text{，计算样本均值 } \bar{X}=\sum_{i=1}^{n} X_i \Big/ n \text{ 做的管理图}\right)$，$R$ **管理图**(R-chart)(正态分布，$R=\max_i X_i - \min_i X_i$)(这两者通常是并用的，叫做 $\bar{X}$-R 管理图)，p **管理图**(p-chart)(二项分布，样本均值)，pn **管理图**(pn-chart)$\left(\text{二项分布，} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$，$c$ **管理图**(c-chart)$\left(\text{Poisson 分布，} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$和 u **管理图**(u-chart)(Poisson 分布，样本均值)等等.

例如在 $\bar{X}$ 管理图中，假定 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 是互相独立的且服从相同的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，此处 μ 和 σ，如后所述，使用由过去的大量数据计算的估计值. 于是关于 $\bar{X}$ 有

$$\Pr\left(\mu-\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\mu+\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) \doteqdot 0.997.$$

由于这个值很接近 1，所以如果

$$\bar{X} \notin (\mu - 3\sigma/\sqrt{n}, \ \mu + 3\sigma/\sqrt{n}),$$

则可判断为发生某种异常使得 X_i 的分布起了变化．对其他的管理图也完全相同，估计好统计量的均值和标准差，而当统计量的值不落入(均值)±(3 × 标准差)的区间时，就判断分布有了变化．特别在 $\bar{X}-R$ 管理图中，$\bar{X}$ 管理图起着发现 μ 变化的作用，而 R 管理图则起着发现 σ 变化的作用．管理图通常由一根表示统计量均值的和两根表示均值加减三倍标准差的平行线组成，并依次把由每批 (lot) 算出的统计量的值点在其上．"3"这个系数是在经验上认为合适而被广泛使用的(叫做 **3σ 法** (three sigma method))，并没有特殊的理论意义．

为了应用上述管理图法，事先要在研究过去数据的基础上，把产品适当地分群，使样本 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 有相同分布．当把生产过程依次生产的产品质量特性 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_t, \cdots$ 看做是随机变量时，在很多情况下，原封不动地假定它们服从同一分布是有困难的．例如 Y_t 的分布随 t 而变化的周期为 N 时，每隔 N 个取一个所成的群是同分布的．有的时候，通过 Y_t 的适当分层，也能得到同样的效果．由这样的操作所成的群叫做**合理的群** (rational subgroup)．若能造出合理的群，则称生产过程是处于**管理状态** (state of control)．这时，$\bar{X}$ 管理图中的 μ 和 σ 的估计可如下进行．假定全部过去的数据已分为 k 个合理群，且由每个群抽出的大小为 n 的样本为 X_{ij} $(i=1,2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, k)$．通常，用

$$\bar{\bar{X}} = \sum_{j=1}^{k} \bar{X}_j \Big/ k = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n} X_{ij} \Big/ kn$$

$$\left(\bar{X}_j = \sum_{i=1}^{n} X_{ij} \Big/ n\right)$$

估计 μ 和用

$$\bar{R}/d_2 = \sum_{j=1}^{k} R_j \Big/ kd_2$$

$$(R_j = \max_i X_{ij} - \min_i X_{ij})$$

估计 σ，此处 d_2 是当 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 时，使 $E(\max_i X_i - \min_i X_i) = d_2\sigma$ 的常数，与 n 是有关的．当生产过程不处于管理状态，亦即不能造出合理的群时，应采取适当的措施作进一步的分析，并调整生产条件，使能造出合理的群．

【抽样检验方案】 **抽样检验** (sampling inspection) 是把由一批产品抽出的样本的质量特性值与预先确定的判定准则进行比较，以便判定这批产品是否合格的一种检验方法．抽样可以分几次进行．每次抽样都有一个判定准则，以便根据到那时为止的抽检结果来判定该批产品是否合格或继续抽检，并在继续抽检时要有一些规则来决定下一抽样的样本大小．这些准则和规则合在一起，叫做**抽样检验方案** (sampling inspection plan)．抽样的次数一般是随机变量．只由一次抽样结果必须做出最终判定的方案，叫做**一次抽样检验** (single sampling inspection)，最多由两次抽样能下最终判定的叫做**二次抽样检验** (double sampling inspection)．同样可以定义**多次抽样检验** (multiple sampling inspection)．对抽样次数事先不作限制的，叫做**序贯抽样检验** (sequential sampling inspection)，但这时要使抽样次数为有限的概率为 1．

抽样检验方案一经确定，具有一定量的一批产品的合格概率就可计算．合格概率作为该批产品组成的函数，叫做检验方案的**抽检特性** (operating characteristic)．在很多情况，一批产品的质量可以由一个参数 θ (废品率，质量特性的平均等)来表现，并且我们只讨论其抽检特性可表为 θ 的函数的抽检方案．此函数的图形叫做 **OC 曲线** (OC curve)．我们对 OC 曲线赋加一些称心的条件，并设计出满足这些条件的检验方案．为此准备有数表（抽样检验表）以供实际使用．通常采用的条件是一批好产品尽可能合格和一批坏的产品尽可能不合格，即当 $\theta \leqslant \theta_0$ (或 $\theta \geqslant \theta_0$) 时不合格的概率最多是 α，而当 $\theta \geqslant \theta_1$ (或 $\theta \leqslant \theta_1$) 时合格的概率最多是 β．这里，α 叫做**厂方风险** (producer's risk)，β 叫做**用户风险** (consumer's risk)．

若把一批产品定为不合格与拒绝假设

$\theta \leqslant \theta_0$ 对应起来，那末 OC 曲线不外是将检验功效曲线翻过来（1 — 检验功效的图形），并且厂方风险和用户风险分别对应第一类错误†和第二类错误†．所以，选择抽检方案，就是对检验功效曲线赋加某种条件后选择检验的问题．实际所用的抽检方案多半也是基于通常熟知的检验作出的，它们各具备某种最优性质．下面举出若干方案为例．其中，**计数抽样检验**（sampling inspection by attributes）是用离散分布的统计量作的抽检方案；**计量抽样检验**（sampling inspection by variables）是用连续分布的统计量作的抽检方案（→ 假设检验）．

1）批废品率为 p 的计数一次抽样检验．设某批产品的废品率为 p，并把它看做上述的参数 θ．OC 曲线应当满足的条件是，指定 p 的两个值 p_0 和 p_1（$0 < p_0 < p_1 < 1$）以及厂方风险 α 和用户风险 β．从这批产品随机地抽出 n 个，假定其中有 Z 个废品，并由 Z 作出决定．Z 服从超几何分布†，并当批量足够大时近似地服从二项分布．对 Z 的分布无论是在哪个假定之下，都要在满足条件的抽检方案中确定一个使所需的样本大小 n 为最小的方案．这是一个当 Z 大于由 p_0, p_1, α 和 β 确定的一个常数时判断这批产品为不合格的方案．这个抽检方案对应于假设：$p \leqslant p_0$ 针对备择假设：$p \geqslant p_1$ 的一致最大功效†检验．

2）总体分布为 $N(\mu, \sigma^2)$（σ^2 为已知）时，关于 μ 的计量一次抽样检验．从一批产品抽出大小为 n 的样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$．假定 X_i 独立地服从同一分布 $N(\mu, \sigma^2)$．设质量特性值越小质量就越好．若指定 μ 的两个值 μ_0 和 μ_1（$\mu_0 < \mu_1$）以及 α 和 β，则可确定使 n 为最小的一个抽检方案．这是一个当样本均值

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

超过由 μ_0, μ_1, α 和 β 确定的某个值时判断这批产品为不合格的方案．这个方案也对应于假设：$\mu \leqslant \mu_0$ 针对备择假设：$\mu \geqslant \mu_1$ 的一致最大功效检验．

3）抽样多于一次的情形．也象上面那样指定参数的两个值以及 α 和 β，但由于各次所抽样本的大小 $n_1, n_2, \cdots$ 可以自由选取，所以满足所加条件的抽检方案可能很多．通常是求 $n_1 + n_2 + \cdots$ 的期望值（**平均抽检个数**（average sample number））尽可能小的方案．例如，也采用与序贯概率比检验†对应的序贯抽样检验方案（→ 假设检验）．

4）在一些特殊的抽检方案中值得一提的有**挑选型抽样检验**（sampling inspection with screening）和**调整型抽样检验**（sampling inspection with adjustment）．前者是对不合格的一批产品进行全部检验，并把废品换成正品的一种方案．这时，在指定 p_1（这里叫做**批容许废品率**（lot tolerance percent defective））和 β，或者抽检后的平均废品率（叫做**平均出厂质量水平**（average outgoing quality level））后，我们采用**平均抽检数量**（expected amount of inspection）（包括不合格批在内的抽检个数的期望值）为最小的方案．后者是根据抽检结果而加严或放宽判定准则的一种方案．

【参】［1］ J. M. Juran ed., Quality control handbook, McGraw-Hill, 1962; ［2］ A. J. Duncan, Quality control and industrial statistics, Richard D. Irwin, 1952; ［3］ 日本規格協会，管理図法 JISZ-9021, 日本規格協会, 1954; ［4］ 日本規格協会，抜取検査表，品質管理と標準化セミナー教材，日本規格協会，1963.

计量经济学［英 econometrics 法 économétrie 德 Ökonometrie 俄 эконометрика 日 計量経済学］ **计量经济学**一词，可在各种意义下使用．广义的解释，一般是指数学方法在经济问题中的应用，包括数理经济学和数学规划法等等．但这里采用比较狭义的解释，把在经济分析中系统地应用的数理统计方法叫做计量经济学．

计量经济学的主要课题是对各种经济量之间的关系提供分析方法．按照各种经济量之间关系的类型，这些方法可以分为四个范畴．1）因果关系的分析：当一组经济变量 $X_1, \cdots, X_n$ 影响到另一经济变量 Y 时，可以分析这些影响的广度和方向．2）平衡关系的分析：当一组经济变量 $Y_1, \cdots, Y_n$ 由市场平衡机构决定时，

分析确定这一平衡的关系．3）相关关系的分析：当一组经济变量 $Y_1, \cdots, Y_n$ 因某些共同因素而同时受到影响时，分析变量的相关结构．4)时间相依关系的分析：分析一组经济变量随时间发展的过程．

【回归分析的问题】 范畴 1）的一般方法是回归分析†．但是在经济分析中，会出现一些特殊问题．例如，自变量 $X_1, \cdots, X_n$ 的个数很多，并且它们之间存在很高的相关，因此各个系数的估计精度显著地下降．这种现象叫做**多重共线性**（multicollinearity）问题．此外，误差项为互相独立和方差为一定的假定也是有疑问的．误差项的方差不相等的情形，或者在时间序列数据中误差项是自回归的情形也是屡见的．关于多重共线性，已有各种各样的研究，但是有决定意义的理论还没有得到．如果误差的协方差矩阵 Σ 为已知，那末可以应用广义最小二乘法†，但协方差矩阵 Σ 通常是未知的．

【联立方程组】 范畴 2）是经济分析所特有的．$\boldsymbol{Y}=(Y_1, \cdots, Y_G)$ 是由 G 个经济量组成的一个向量，且在它们中间存在决定变量平衡水平的 G 个关系，我们还设 K 个变量 $\boldsymbol{Z}=(Z_1, \cdots, Z_K)$ 独立于经济关系但影响平衡关系．变量 $\boldsymbol{Y}$ 叫做**局内变量**(endogenous variable)，$\boldsymbol{Z}$ 叫做**局外变量**（exogenous variable）．关系式通常设想为线性的．亦即

(1) $$\boldsymbol{Y}=B\boldsymbol{Y}+\Gamma\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{u},$$

此处 B 和 Γ 是常数矩阵，$\boldsymbol{u}$ 是干扰或误差向量．(1)叫做**线性结构方程组**（linear structural equation system），也可看做联立方程组．由于(1)是关于 $\boldsymbol{Y}$ 的联立方程，求解便得

(2) $$\boldsymbol{Y}=\Pi\boldsymbol{Z}+\boldsymbol{v}, \quad \Pi=(I-B)^{-1}\Gamma,$$
$$\boldsymbol{v}=(I-B)^{-1}\boldsymbol{u},$$

I 是单位矩阵．

(2)称为**简化型**（reduced form）．通过简化型(2)可以确定 $\boldsymbol{Y}$ 对 $\boldsymbol{Z}$ 的关系，并且如果我们有关于 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{Z}$ 的充分数据，就能够估计 Π．从简化型的参数能否唯一确定 B 和 Γ 中的未知参数，这是一个**识别**（identification）问题．(1)中一个方程里的参数能够识别的必要条件是：未知参数的个数(或者，因为在方程组中的已知参数通常都令为 0，所以就是方程中出现的变量的个数)不大于 $K+1$．如果恰好等于 $K+1$，则称方程为**恰好识别的**（just identified）；如果小于 $K+1$，则称方程为**过分识别的**（over identified）．

若所有的方程都是恰好识别的，则对任意的 Π，存在唯一的 B 和 Γ，它们满足

$$\Pi=(I-B)^{-1}\Gamma.$$

所以，若把(2)中 Π 的最小二乘估计量记作 $\hat{\Pi}$，则可从 $(I-\hat{B})\hat{\Pi}=\hat{\Gamma}$ 估计 B 和 Γ．这个程序叫做**间接最小二乘法**（indirect least squares method）；并且等价于极大似然法，如果假定 $\boldsymbol{u}$ 的正态性的话．

如果某些方程是过分识别的，那末估计方法将是复杂的．已经提出的方法有三种：(1) **整组法**（full system method）；(2) **单一方程法**（single equation method）；(3) **子组法**（subsystem method）．在整组法中，同时考虑所有的参数，如果假定正态性，则能够得到极大似然估计量．因为计算极大似然估计量常常是困难的，所以提出了比较简单但又与极大似然法渐近等价的**三级最小二乘法**（three-stage least squares method）．单一方程法和子组法只考虑一个方程或部分方程中参数的信息，并且分别估计在每个方程里的参数．有一种建立在极大似然法基础上的单一方程法，叫做**限制信息极大似然法**（limited information maximum likelihood method）；还有**二级最小二乘法**（two-stage least squares method），它首先用最小二乘估计 Π，计算 $\hat{\boldsymbol{Y}}=\hat{\Pi}\boldsymbol{Z}$，然后再应用最小二乘法于模型

$$\boldsymbol{Y}=B\hat{\boldsymbol{Y}}+\Gamma\boldsymbol{Z}+\hat{\boldsymbol{u}}.$$

这两种方法以及另外的一些方法是渐近等价的．

关于这些方法的小样本性质，只得到部分结果；关于它们的相对优越性还不知道．

【其他问题】 范畴 3)的问题可用多元分析†解决．有时依靠主成分分析和典型相关分析可以分析大量数据的变动．但所得结果在实用意义上，还有很多疑点．

范畴 4)是时间序列分析的问题. 对于经济问题的时间序列，通常的随机过程理论很不适合,因为它们并不满足诸如平稳性或 Марков 性的条件，但是自回归模型则经常用到. 按照传统，人们把经济上的时间序列的波动分为 i) 趋势，ii) 循环波动，iii) 季节波动和 iv) 偶然波动,但是要把这些波动分离开来或消除出去,这在方法论上仍未成熟. 近来也有人试图把谱分析方法应用于经济的时间序列，但对其结果还是有疑问的.

【参】 [1] T. C. Koopmans-W. C. Hood(ed.),Studies in econometric method, Cowles Commission Monograph, John Wiley, **14** (1953); [2] H. Theil, Economic forecasts and policy, North-Holland, 1959; [3] J. Johnston, Econometric methods, McGraw-Hill, 1963.

计量生物学 [英 biometrics 法 biométrie 德 Biometrie 俄 биометрика 日 計量生物学] **计量生物学**处理的是生物科学各个分支（诸如遗传学、传染病学和人口论等)上的数学问题.

【遗传学】 遗传学上的 **Mendel 模型** (Mendel's model) 如下. 在特定染色体的特定基因座中有两个基因. 其中的一个在生殖之际承受于父亲而另一个则承受于母亲. 每个基因都以概率 1/2 承受于父母. 这样继承下来的基因,除了由于以极小的概率发生的突变以外,其特性通常是不变化的. 个体的遗传特性，由一对或多对基因所决定.

例如,人的血型是由一对基因决定的.三种基因A,B和O的组合与血型的关系如下. A 型: (AA) 或 (AO); B 型: (BB) 或 (BO); AB 型: (AB); O 型: (OO). 基因的组合 (AA) 和 (AO) 等叫做基因型,相当于血型的叫做表现型. 基因 A 和 B 对O是优势的，O对 A 和 B 是劣势的，A 和 B 之间没有优劣关系. 也就是说,O的特性只出现于组合 (OO) 中,而不出现于组合 (AO) 和 (BO) 中. 至于 A 及 B 的特性，只要它们有一个进入组合之中，就会影响到表现型.

设在基因座中父和母的基因型分别为 (x_1, x_2) 和 (y_1, y_2), 则子的基因型 (z_1, z_2) 的概率分布是 $\Pr(z_1=x_i, z_2=y_j)=1/4$ $(i, j=1, 2)$. 这就是 Mendel 法则的概率论基础. 现在假定父母之间有一种近亲关系，也就是有一个或更多的共同的祖先，并设 (ξ_1, ξ_2) 为共同祖先的基因型.那末,同一个基因遗传到父和母再遗传到子的可能性是存在的. 也就是说, $\Pr(z_1=z_2=\xi_1$ 或 $z_1=z_2=\xi_2)\neq 0$. 对所有共同祖先求得的这些概率之和叫做**近交系数** (inbreeding coefficient). 近交系数 f 可由下列递推公式计算:

$$f=\sum((1/2)^{n_1+n_2+1}(1+f_A)),$$

此处求和号跑遍由下列两个逐步序列组成的每一个圈: 从父和从母出发追溯到在这两个序列中是唯一成员的共同祖先. 数 n_1 和 n_2 分别是圈中从父和母追溯到共同祖先的步数，f_A 是共同祖先的近交系数. 对自家授精和伴性基因的情形,要用不同的公式.

与基因型无关地进行的交配叫做任意交配，进行任意交配的总体叫做任意交配总体. 考虑一个具有 n 种基因 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的总体在基因座中进行任意交配，并令 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为基因的频率,如果既没有淘汰也没有突变，那末基因型 A_1A_1, A_1A_2 和 A_2A_2 等的频率等于 $(x_1A_1+x_2A_2+\cdots+x_nA_n)^2$ 的展式中相应项的系数 x_1^2, $2x_1x_2$ 和 x_2^2 等. 一个有趣的事实是：若总体的雄性和雌性数目相同，则基因型频率在雄雌的差异，如果有的话，将不在第二代出现，并且共同频率如平衡状态那样遗留到后代. 这叫做 **Hardy-Weinberg 法则** (Hardy-Weinberg law). 引起偏离这个法则的因素之一就是近亲结婚. 为了看出这一点，设有这样一个总体,它有基因 A 和 a ,它们的频率分别为 p 和 $(1-p)$. 近交系数为 f 的基因型频率是 AA: $(1-f)p^2+fp$, Aa: $2(1-f)p(1-p)$, aa: $(1-f)(1-p)^2+f(1-p)$. 要证明这一点，可以考虑有 A 和 a 的一个无限总体，A 和 a 在总体中的比例分别为 p 和 $(1-p)$, 以及从该无限总体中随机地抽取二个和一个的概率分别为 $(1-f)$ 和 f.

总体遗传学 (population genetics) 研究突变、连锁、自然淘汰、近亲婚姻、移居和隔离等因素对总体遗传特性的影响. 另外，还有估计基

因频率等的数理统计问题,但严格地说,这类问题叫做统计遗传学更为合适. R. A. Fisher, S. Wright, J. B. S. Haldane 和木村資生等人是这个领域的创始人.

【传染理论】 在感染传染病后,通常要经过一段潜伏期才发病. 我们无视这段潜伏期而假定个体在感染后马上感染别人,并假定别人受感染的概率与他接触的被感染个体的数目和接触时间成正比. 考虑一个有 $n+1$ 个个体的总体,其中有一个个体在初期被感染. 设 x 是在时间 t 未被感染的个体的数目,则有

$$dx/dt = -\beta x(n+1-x),$$

且由此得到

$$x = n(n+1)/(n+\exp(n+1)\tau),$$

其中 $\tau = \beta t$. 这样,我们得到各时刻被感染个体的增长率为

$$-\frac{dx}{d\tau} = \frac{n(n+1)^2\exp(n+1)\tau}{(n+\exp(n+1)\tau)^2},$$

这叫做**传染曲线** (epidemic curve). 这是一个决定性模型. 把它看作一个 Марков 链†的问题,求解关于概率母函数或矩母函数†的微分方程,就可作为 t 的函数得到未被感染个体的数目的概率分布、均值和方差. 这些就是**传染理论** (epidemics) 的课题. 由于发病后的死亡、康复或隔离,有的既不可能传染别人也不可能再受感染. **一般传染理论** (general epidemics) 研究两种变量,即未被感染个体的数目和已受感染而不传染别人的个体数目.

【人口数学】 设 P 表示人口,t 表示时间,则人口增长率由 $(1/P)(dP/dt) = R$ 给出. 假定 R 为一常数 r,便得到**几何级数法则** (law of geometric progression) $P = A\exp(rt)$,再假定 $R = r(1-P/L)$ (r, L 是常数),就得到**逻辑斯谛曲线** (logistic curve)

$$P = L/(1+\exp(-r(t-\beta))).$$

人口数学 (population mathematics) 研究的是年龄分布、每一年龄群的出生率、结婚年龄分布和年龄分布随着时间的变化及稳定性等问题的概率处理. **稳定人口** (stable population) 是其年龄分布不随时间而变化的人口.

此外还有称为**生物测定** (bioassay) 的学科,是一门与生物学有很大关系的推断理论.

【参】 [1] 木村資生,集团遺伝学概論,培風館, 1960; [2] N. T. J. Bailey, The mathematical theory of epidemics, Griffin, 1957; [3] M. S. Bartlett, Stochastic population models in ecology and epidemiology, Methuen, 1960; [4] D. J. Finney, Statistical method in biological assay, Griffin, 1952; [5] C. R. Rao, Advanced statistical methods in biometric research, John Wiley, 1952.

计量心理学 [英 psychometrics 法 psychométrie 德 Psychometrie 俄 психометрика 日 計量心理学] **计量心理学**是以数学形式表现心理现象并进行统计推断的一个方法. 主要问题有感觉、嗜好等的官感试验,以及有关学习过程、社会态度和智力检验等的理论模型.

【官感试验】 以人的感觉作为计量来测定物品的质量特性,叫做**官感试验** (sensory test). 试验员的选择必须得当,试验环境必须处于统计管理状态. 下面论述数理统计方法在官感试验中应用的基本内容.

【成对比较法】 当有 t 个对象(有时是处理或者刺激) $O_1, O_2, \cdots, O_t$ 时,通过比较其中的每两个来达到比较全体,这种方法叫做**成对比较法** (paired comparison). 下面举出几个有代表性的数学模型. 1) **Thurstone-Mosteller 模型**: 对于对子 (O_i, O_j),判定 O_i 优于 O_j 的概率记作 p_{ij}. 在比较这一对的 n 个试验员中,喜爱 O_i 的人数为 n_{ij} 和喜爱 O_j 的人数为 n_{ji} $(=n-n_{ij})$. 在这个比较中,设对 O_i 和 O_j 的感觉的强度分别为 X_i 和 X_j,且当 $X_i > X_j$ 时认为 O_i 可取. 还假定 (X_i, X_j) 是服从均值为 (μ_i, μ_j)、方差均为 σ^2 和相关系数为 ρ 的二维正态分布†的随机变量. 不丧失普遍性,可以假定 $2(1-\rho)\sigma^2 = 1$ 和 $\sum_{i=1}^{t}\mu_i = 0$. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,且 $p_{ij} = \Phi(\mu_i - \mu_j)$. 用 $p'_{ij} = n_{ij}/n$ 当作 p_{ij} 的估计值,可以得到估计值 $\hat{\mu}_i$. 应用 $p''_{ij} = \Phi(\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j)$ 和 p'_{ij},可以检验假设 H: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t$. 2) **Bradley-Terry 模型**: 试验方法与 1) 相同. 假定 O_i 的参数

$\pi_i\left(\pi_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{t} \pi_i = 1\right)$ 存在，使得 $p_{ij} = \pi_i/(\pi_i + \pi_j)$. 求 π_i 的极大似然估计值，便可进行假设 H 的检验. 3) **Scheffé 模型**: 每一对 (O_i, O_j) 都提给 $2n$ 个试验员. 其中 n 个试验员先验 O_i，其后验 O_j；剩下的 n 个试验员以相反的顺序验这个对子. 采用 7 点法进行评定(还有 9, 5 或 3 点法). 在 7 点法中，对顺序对 (O_i, O_j)，试验员勾划七个点 3、2、1、0、−1、−2、−3 中的一个，它们的意义分别是 O_i 甚优于 O_j，O_i 优于 O_j，O_i 稍优于 O_j，无优劣，O_j 稍优于 O_i，等等. 第 k 个试验员给 O_i 对 O_j 的优劣的评分记作 x_{ijk}，而这个 x_{ijk} 可以看做是主效应、扣除偏差、顺序效应和误差的总和. 利用统计线性模型†，可以进行对这些效应的检验和各种参数的估计. BIBD†, PBIBD† 等也可应用于成对比较法.

【秩序法】 按某种属性把 $O_1, O_2, \cdots, O_t$ 排成等级的方法叫**秩序法** (ranking method). 为了衡量两个秩序的一致程度，有两个主要的秩相关系数: Spearman 秩相关系数†和 Kendall 秩相关系数†，衡量 $k\,(\geqslant 3)$ 个秩序之间一致性的有**一致性系数** (coefficient of concordance). 二样本的 Wilcoxon 检验†是以合并样本的顺序性质为基础的. Kruskal-Wallis 检验†是二样本 Wilcoxon 检验对 k 样本检验 $(k \geqslant 3)$ 的一个推广. 许多非参数检验†可以应用于这些问题(→非参数方法).

两点试验法 (pair test)、**三点试验法** (triangle test) 和 **1–2 点试验法** (duo-trio test) 都是官感差的试验法. 试验方法如下. 两点试验法: 叫试验员选择两个对象 A 和 B 中他认为好的那个. 三点试验法: 叫试验员把 A, A, B 中两个同类的选出来. 1–2 点试验法: 先让试验员熟悉 A，然后叫他从 A 和 B 中选出他已经看到的那个. A 和 B 之间不存在差异的假设可用二项分布†进行检验.

【尺度化】 按照某种规则给现象以数量化，叫做**尺度化** (scaling). 若用数值来表现对刺激的感觉，则产生一维尺度化问题. 假定心理现象是服从某分布律的随机变量而其分布律的参数决定心理尺度，则通过估计参数便得到心理学的尺度化. Thurstone-Mosteller 模型中的参数 μ_i 就是一个例子. 在实际问题中要求多维尺度化模型. W. S. Torgerson 给出一种决定多维尺度化的方法.

【学习理论】 设为了研究某一行动做了一系列的试验，并且每次试验都产生一些影响到将来行动的特殊事件(刺激、响应、强化等). 那末这行动本身随着一次又一次的试验而不断地变化. **学习模型** (learning model) 反映这种行动的变化过程，并往往可由响应概率的递推公式来表现.

假定在第 n 次试验中，两个互不相容的响应选择 A_1 和 A_2 分别以概率 P_n 和 $1 - P_n$ 发生，且在该次试验中出现的事件为 $\mathscr{E}_n$，而

$$\Pr(\mathscr{E}_n = E_i) = \pi_i$$

$$\left(i = 1, 2, \cdots, t,\ \sum_{i=1}^{t} \pi_i = 1\right).$$

那末 P_n 的递推公式可以表为形状

$$P_{n+1} = f(P_n;\ \mathscr{E}_n, \mathscr{E}_{n-1}, \cdots, \mathscr{E}_1).$$

如果这个递推公式可以写成

$$f = f(P_n;\ \mathscr{E}_n, \mathscr{E}_{n-1}, \cdots, \mathscr{E}_{n-d})$$
$$(d = 0, 1, \cdots, n-1),$$

就称响应概率与 **d 次试验序列相关** (d-trial path dependent). 特别，当 $d = 0$ 时，就称响应概率与**试验序列独立** (path-independent). 为了简单起见，我们置

$$f(P_n;\ \mathscr{E}_n = E_i, \mathscr{E}_{n-1} = E_j, \cdots, \mathscr{E}_1 = E_k)$$
$$= f_{ij\cdots k}(P_n)$$
$$(i, j, \cdots, k = 1, 2, \cdots, t).$$

若响应概率与试验序列独立，则

$$f_{ij\cdots k}(P_n) = f_i f_j \cdots f_k(P_1),$$

此处

$$f_\nu(P_n) = f(P_n;\ \mathscr{E}_n = E_\nu)$$
$$(\nu = i, j, \cdots, k).$$

若递推公式可表为 $f = f(P_n;\ \mathscr{E}_n, n)$，则称响应概率与**试验序列拟独立** (quasi-independent of path) ([12]). 在递推公式 f 中，若

$$f_{\cdots i \cdots j \cdots}(P_n) = f_{\cdots j \cdots i \cdots}(P_n) \quad (i \neq j),$$

则称 E_i 和 E_j 是可换的. 若任何两个事件都是可换的,则称**事件可换性** (event commutativity) 的条件得到满足. 若使 f 对 n 显化,则

$$P_n = F(n; \mathscr{E}_{n-1}, \cdots, \mathscr{E}_1; P_1).$$

在事件可换性的条件下,显式可以写成

$$P_n = F(N_1, N_2, \cdots, N_t; P_1),$$

此处 N_i 是 E_i 从第一次试验到第 $n-1$ 次试验的出现频数$\left(\sum_{i=1}^{t} N_i = n-1\right)$. 若事件的可换性和响应概率的试验序列独立性都得到满足,则可以得到显式 $P_n = f_1^{N_1} f_2^{N_2} \cdots f_t^{N_t}(P_1)$. 下面举几个模型的例子.

【线性模型】 在**线性模型** (linear model) 中,递推公式 f 可以写成 P_n 的线性函数. 例 1) **Bush-Mosteller 模型** ([7]). 这个模型假定响应概率与试验序列独立,递推公式表为

$$f_i(P_n) = \alpha_i P_n + (1-\alpha_i)\lambda_i, \quad \mathscr{E}_n = E_i.$$

此处 α_i $(0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1)$ 表示 E_i 对学习的无效性程度和 λ_i $(0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1)$ 是 f_i 的不动点†. 在此模型中 E_i 与 $E_j (i \neq j)$ 为可换的充分必要条件是: f_i 或 f_j 为一单位算子†,或者 $\lambda_i = \lambda_j$. 例 2) Estes 的**刺激抽样模型** (stimulus-sampling model) ([8]). 把刺激看做由 m 个元素所成的集合,各元素对应于响应 A_1 或响应 A_2; 且这种对应依赖于每次试验. 若在第 n 次试验中 J_n 个元素对应 A_1, 则有 $P_n = J_n/m$. 设在第 n 次试验中抽出 s $(\leqslant m)$ 个元素,其中 X_n 个对应 A_2, 其余的 X'_n $(= s - X_n)$ 个元素对应 A_1. 作为第 n 次试验的结果,若 A_1 被强化,则设 $Y_n = 1$, 否则设 $Y_n = 0$. 再假定

$$J_{n+1} = J_n + X_n Y_n - X'_n(1 - Y_n).$$

由此我们得到递推公式

$$P_{n+1} = P_n + (X_n Y_n - X'_n(1 - Y_n))/m.$$

在这个模型中, $\mathscr{E}_n = (X_n, Y_n)$, 且响应概率与试验序列独立. 此外,也提出了响应概率与试验序列拟独立 ([9]) 或者与试验序列相关的线性模型 ([11]).

【非线性模型】 在非线性模型 (non-linear model) 中递推公式不能表为 P_n 的线性函数. 例 3) **Luce 的 β 模型** (Luce's β-model) ([10]). 设在第 n 次试验中 A_1 和 A_2 的响应强度分别为 v_n 和 v'_n (都为正数), 并假定 A_1 的响应概率 P_n 为 $v_n/(v_n + v'_n)$. 响应强度 v_n 和 v'_n 依赖于每一次试验. 若假定响应强度与试验序列独立且 v_{n+1} 与 v'_n 无关, 则 v_n 的递推公式当 $\mathscr{E}_n = E_i$ 时为 $v_{n+1} = \varphi_i(v_n)$. 这里, 若对于 $v > 0$, 有 $\varphi_i(v) > 0$, 以及对于 $v > 0$ 和 $c > 0$, 有

$$\varphi_i(cv) = c\varphi_i(v),$$

那末 $\varphi_i(v_n) = \beta_i v_n$ $(\beta_i > 0)$. 同样, v'_n 的递推公式可以表为 $\varphi'_i(v'_n) = \beta'_i v'_n$ $(\beta'_i > 0)$. 所以, 当 $\mathscr{E}_n = E_i$ 时, $P_{n+1} = P_n/(P_n + b_i(1 - P_n))$ $(b_i = \beta'_i/\beta_i)$. 这个模型是非线性的, 且响应概率与试验序列独立. 若将递推公式显化,则得

$$P_n = P_1 \Big/ \left(P_1 + (1-P_1)\exp\left(\sum_{i=1}^{t} N_i \log b_i\right)\right),$$

可知事件是可换的. 此外, 也提出了响应概率与试验序列拟独立 ([6]) 或者与试验序列相关的非线性模型 ([10]).

这里说明了只有两个响应选择的情形, 但也能推广到多于两个响应选择的情形. 要拟合一个模型和实验数据,除响应概率外,要用到由模型诱导出来的各种统计量(总错误数;第一次成功的试验数或最后失败的试验数; 以及诸如响应游程†的长、响应之间的自相关一类的序贯统计量等),并设计了相应的参数估计法.

【参】 关于官感试验方面, [1] H. A. David, The method of paired comparisons, Griffin, 1963; [2] J. P. Guilford, Psychometric methods, McGraw-Hill, 第二版, 1954; [3] M. G. Kendall, Rank correlation methods, Griffin, 第三版, 1962; [4] W. S. Torgerson, Theory and methods of scaling, John Wiley, 1958; [5] 日本科学技術連盟官能検査委員会編, 官能検査ハンドブック, JUSE 出版社, 1962. 关于学习理论方面, [6] R. J. Audley-A. R. Jonckheere, The statistical analysis of the learning process, Brit. J. Statist. Psychol., 9 (1956), 87—94; [7] R. R. Bush-F. Mosteller, Stochastic models for learning, John Wiley, 1955; [8] W. K. Estes, Component and pattern models with Markovian interpretations, in R. R. Bush-W. K. Estes (ed), Studies in mathematical learning theory, Stanford Univ. Press, 1959, p. 9—52; [9] M. I. Hanania, A generalization of the Bush-Mosteller model with some significance tests, Psychometrika, 24 (1959), 53—68; [10] R. D. Luce, Individual choice behavior, A theoretical analysis, John Wiley, 1959; [11] S. H. Sternberg, A path-dependent linear model, in R. R. Bush-W. K. Estes (ed), Studies in mathematical learning theory, Stanford Univ. Press, 1959, p. 308—339; [12]

S. H. Sternberg, Stochastic learning theory, in R. D. Luce-R. R. Bush-E. Galanter 编, Handbook of mathematical psychology II, John Wiley, 1963, p. 1—120.

保险数学 [英 insurance mathematics 法 mathématiques des assurances 德 Versicherungsmathematik 俄 математика для страхования 日 保険数学] 保险制度是由多数人缴纳预先计算好的少量金钱(保险费),以便在发生偶然事故时满足经济上的需要的一种制度. 受保人在经济上的需要额叫做保险金,承办这种业务的人叫做承保人. **保险数学**是研究有关保险制度的数理基础的一门应用数学,是把数学成功地应用于社会生活的最早的一个情形. 保险数学,从其应用的侧面来看,可分为两个大的领域. 其一是计算诸如保险费和义务储备金等每个保险合同的各种价值;其二是属于保险公司业务上的,包括再保险制度、最高保险金、应急储备金和利润分析等的研究.

保险数学的唯一基本原则是**收支等价原则** (principle of equivalence). 这就是说,对每一保险合同,它决定每年的保险费和储备金,使得承保人的未来保险费收入的现在价值等于未来保险金支出的现在价值.

保险数学计算的基本因素是:1)事故的发生概率;2)未来的期望利率(称为假定利率);3)承办保险所需要的经费. 利用这些因素和收支等价原则来计算保险费. 下面是一个人寿保险的古典计算方法的例子,为了计算的方便,"交换符号"的利用是很久以来就有的.

设 P 是纯保险费(不计上述 3) 中的经费), P' 是总保险费, T_t 是加入后第 t 年的死亡保险金额, E_t 是加入后第 t 年开头的生存保险金额, n 是保险期, m 是保险费缴纳期. 再设 α, β 和 γ 是正的常数, 初始费用 $=\alpha\times(T_1$ 或 $E_1)$, 收集保险费的费用 $=\beta P'$, 维持费 $=\gamma\times(T_t$ 或 $E_t)$. 其次,考虑作出人的生死模型. 设 l_x 是活到 x 岁的人数, q_x 是 x 岁的人在一年间的死亡率, 则 l_x 人中在一年间的死亡数 $d_x=l_xq_x$, 一年后的生存人数 ($x+1$ 岁的人数) $l_{x+1}=l_x-d_x=l_x(1-q_x)$. 下面是通常使用的交换符号的定义: 记 $v=1/(1+i)$ (i 是假定利率),

$$D_x=l_xv^x,\qquad C_x=d_xv^{x-1},$$

$$N_x=\sum_{t=0}^{n}D_{x+t},\qquad M_x=\sum_{t=0}^{n}C_{x+t}.$$

这时,对 x 岁的一个受保人,承保人未来收入的现在价值可表为 $P'(N_x-N_{x+m})/D_x$, 而承保人未来支出的现在价值可表为

$$\begin{aligned}\frac{1}{D_x}\Big(&\sum_{t=1}^{n}T_tC_{x+t-1}+\sum_{t=1}^{n+1}E_tD_{x+t-1}\\&+\alpha(T_1\text{ 或 }E_1)D_x\\&+\gamma\sum_{t=1}^{n}(T_t\text{ 或 }E_t)D_{x+t-1}\Big)\\&+\beta P'(N_x-N_{x+m})/D_x,\end{aligned}$$

由此,令(收入的现在价值)=(支出的现在价值)便可求出总保险费 P'. (在上式中,令表示经费的 α,β 和 γ 为 0 而求出的保险费 P 叫做纯保险费, $P'-P$ 叫做附加保险费.)

对死亡以外的残废或意外事故的支出,只要我们能得到一个偶然性模型,就可以应用类似的计算方法.

【义务储备金】 在保险期间中,经常出现未来收入的现在价值小于未来支出的现在价值的情况. 如果出现这种情形,承保人要把这个差额作为**义务储备金** (liability reserve) 去积累. 它的财源是过去收入的保险费和利息. 不考虑经费的纯保险费义务储备金可由

$$V_t=\frac{1}{D_{x+t}}\Big(\sum_{\tau=t+1}^{n}T_\tau C_{x+\tau-1}+\sum_{\tau=t+1}^{n+1}E_\tau D_{x+\tau-1}-P(N_{x+t}-N_{x+m})\Big)$$

计算. 纯保险费 P 和纯保险费储备金 V 之间,有下列关系:

$$P=(vV_t-V_{t-1})+(T_t-V_t)vq_{x+t}+E_t.$$

右边第一项叫做储蓄保险费,因为它是在第 t 年收入的保险费中,作为义务储备金被积累的数额;第二项叫做应急保险费,用来充当保险金与事故(死亡)发生时现存义务储备金之差额;第三项是用来支付生存保险金(或养老金)的数额. 承保人承担风险的金额 T_t-V_t 的符号对

所有的 t 为正时是死亡保险；为负时是生存保险；对不同的 t 在正与负之间变化时是混合保险；若 $T_t = V_t$，则保险是纯粹的储蓄．现今的多数保险是死亡保险，而养老金保险则是生存保险．长久以来，当上述三个基本因素 1)，2) 和 3) 更改时保险费和义务储备金如何变化的问题，已为人们所研究．

【风险论】 在保险数学中占特殊地位的有**风险论** (risk theory)．保险数学是随着概率论的诞生而发展起来的．但是由于 A. H. Колмогоров 等人的研究，建立了以测度论为基础的概率论，不可避免地改变了保险数学的面貌．其中一个代表的例子就是风险论．

风险论分为两个部分．一个称为**古典风险论** (classical risk theory) 或**个体风险论** (individual risk theory)．这里把保险合同在一定期间内产生的盈亏看做随机变量．由于承保人的收益等于所有保险合同的随机变量的总和，应用概率论便可得到各种概率函数．第二是**集体风险论** (collective risk theory)，它不注意对每一个别的合同进行考察，而是作为一个整体，研究承保人的收支状况随时间的变化．F. Lundberg, H. Cramér 等人作了集体风险论的奠基工作．

考虑一个只经营死亡保险的承保人，假定他除了支付保险金外没有其他任何支付．设 dP 是在单位时间 dt 中的应急保险费收入，$d\pi$ 是在 dt 之间发生偶然事故的概率和 $p(z)dz$ 是在偶然事故发生时保险金在 z 与 $z+dz$ 之间的(条件)概率．若取平均应急保险金为单位额，则

$$\int_0^\infty zp(z)dz = 1.$$

因此在 dt 之间支付保险金的期望值为

$$d\pi\int_0^\infty zp(z)dz = d\pi.$$

由收支等价原则，$dP = d\pi$．为了简单，如果将应急保险费收入 P 取做时间，那末承保人在时间 dP 之间的收益是：i) 偶然事故不发生的概率为 $1-dP$，且收益为 dP；ii) 偶然事故发生的概率为 dP，保险金在 z 与 $z+dz$ 之间的条件概率为 $p(z)dz$，且收益为 $dP-z$．其特征函数†是

$$v(t) = e^{itdP}(1-dP) + dP\int_0^\infty e^{it(dP-z)}p(z)dz.$$

因为在时间 $(0, P)$ 承保人的收益是各时间 dP 之间的收益的和，其特征函数为

$$\exp\left(P\int_0^\infty (e^{-itz} - 1 + itz)p(z)dz\right).$$

假定一位承保人以应急储备金 u 开始营业．在当初的应急储备金中加进收入或减去支出后的储备金在未来为负的概率叫做**破产概率** (ruin probability)．若破产概率为 $\phi(u)$，且应急保险金常为正，则有

$$\phi(u) = \alpha_u e^{-Ru}, \quad 0 < \alpha_u < 1,$$

此处 R 是由

$$\int_0^\infty e^{Rz}p(z)dz = 1 + (1+\lambda)R$$

确定的常数，λ 是应急保险费的安全补贴率．(当把这个方法应用于实际问题时，通常令 $\alpha_u = 1$，以便使破产概率适当地大．)

【参】 [1] C. W. Jordan, Life contingencies, Society of Actuaries, 1952; [2] W. Saxer, Versicherungsmathematik, Springer, I 1955, II 1958; [3] E. Zwinggi, Versicherungsmathematik, Birkhäuser, 1945; [4] P. F. Hooker-L. H. Longley-Cook, Life and other contingencies I, Cambridge Univ. Press, 1953; [5] H. Cramér, Collective risk theory, Stockholm, 1955; [6] 守田常直，保険数学，上，下，生命保険文化研究所，1963.

十八、数学规划、运筹学、信息论和控制理论

数学规划 [英 mathematical programming 法 programmation mathématique 德 mathematische Programmierung 俄 математическое программирование (планирование) 日 数理計画法]

数学规划狭义地是指线性规划†、二次规划(→非线性规划)、非线性规划†、动态规划†等,发展至今已成为所谓规划论的数学理论的总称. **随机规划** (stochastic programming) 当然也在内. 广义地理解有时也包括排队论†、对策论†、库存管理论(→库存管理论)、拓扑的研究方法等.这时,如果着重于它的数学形式,则也可以用**规划数学** (mathematics for programming) 这个名称.

广义的数学规划的发展基础,可以说在于运筹学†与经济规划论. 以数学模型来讨论关于系统管理的决策是可能且必要的,这种认识是在二十世纪四十年代以后确立起来的. 将某一个组织或系统的秩序看成自然的,就是承认人无能为力的法则的支配. 所谓规划,则与此相反,它承认人为作用的可能性和有效性.而数学规划就是在对于人为作用的效果建立规律性.

从目的与方法的关系考察系统时,必须区别有关变量和关系式的类型. 1)给定条件或**外生变量** (external variable); 2) **目标变量** (target variable 或 object variable); 3) **策略变量** (strategic variable), 这些是关于变量类型的区别. 1)也称为**规划系数**; 3) 也称为**规划变量**. 模型的结构就是根据在这些变量之间存在的关系而决定的. **结构方程** (equation of structure) 或**运动方程** (equation of motion) 的区别,表现在模型的各变量之间的关系上,前者主要是作为静态模式,后者则是引进时间变量的动态描述. 这里必须特别提出的是,对于变量可以变动的容许范围即变域有一个规定,即在数学规划中存在有**边界条件** (boundary condition). 它的存在使规划问题成为现实. 这些边界条件,常常是以不等式给出.在由不等式定义的区域的内点处,结构方程或运动方程起作用,而在边界点上,边界条件与这些方程一齐起决定性的作用. 例如,设 x, c 为 n 维列向量, b 为 m 维列向量, A 为 $m\times n$ 实矩阵,"在

$$x\geqslant 0,\ Ax\leqslant b$$

的条件下,求出使内积 $z=(c,\ x)$ 为最大的 x", 这是线性规划的问题. 这里, x 为策略变量, A, b, c 为外生变量, z 为目标变量(函数). $x\geqslant 0$, $Ax\leqslant b$ 是规定 x 的容许取值区域的边界条件.

规划本来是关于将来要实现的行动的,因此是与预测有关的. 对于所给条件、目标、结构关系以及它们的函数类型和参变量,都不确实了解,这应说是正常现象. 因此在规划的数学模型中,要求有不确定条件下的行动决策理论.为此,提供下列三个模型.

1) **确定性模型** (deterministic model). 变量全部是确定性变量,而且在关系式以及边界条件中出现的系数也全都具有确定的值. 例如,上述的线性规划.

2) **随机性模型** (stochastic model). 条件变量中的某一变量,结构关系式或边界条件的某一系数,不是确定性变量而是随机变量. 例如排队论,统计控制论等.

3) **对策性模型** (game theoretic model). 这是试图将规划问题归结为互相对抗的主体之间的对策的模型. 对于不得不在非确实的信息所提供的条件下决定行动的主体来说,将不确定事件作为随机事件来处理,尚缺乏客观依据时,就假想一个阻碍它且进行对抗的对手,在制定规划决策的限度内这样一种虚构还是具有现实性的. 克服规划中出现的不确定性问题,很有可能应用对策论的方式来研究.

如果更仔细地考察规划过程的实际情况，就可以明白，对一个行动者来说，并非只是从某一预先规定的行动集合中选择最优行动，而是从实际行动的结果中获取信息，再进一步改善选择，学会采取更为适宜的行动并不断加以修正．因此，行动者一面是学习者，另一面也是探索者，在这样的意义上说，规划论也就与适应(adaptation)、学习(learning)以及自组织系统(self-organizing system)的理论相联系起来了．然而在数学规划的实际问题中，由于数学模型的复杂，导出解析形式的困难以及它的数值解法的困难，所以也使用模拟技术．对应于上述的三种模型，模拟也分为确定性、随机性(Monte Carlo 法)、对策性(例如，营业对策)三种类型．

【参】[1] N. V. Reinfeld-W. R. Vogel, Mathematical Programming, Prentice-Hall, 1958; [2] S. Karlin, Mathematical methods and theory in games, Programming and Economics I, II, Addison-Wesley, 1959; [3] 北川敏男，数理計画法，現代統計学大辞典，東洋経済新報社，1962; [4] K. J. Arrow-L. Hurwicz-H. Uzawa (eds.), Studies in linear and non-linear programming, Stanford Univ. Press, 1958; [5] H. Hancock, Theory of maxima and minima, Dover, 1960; [6] R. T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton Univ. Press, 1970; [7] R. L. Graves-P. Wolfe (eds.), Recent advances in mathematical programming, McGraw-Hill, 1963.

线性规划 [英 linear programming 法 programmation linéaire 德 lineare Programmierung 俄 линейное программирование, линейное планирование 日 線形計画法] **线性规划**（简写为 **LP**）是用来处理在线性等式及不等式组的条件下求线性**目标函数**(objective function)的极值问题的方法．通常还附有变量向量的各分量均为非负的条件．从它的理论构成方面看，要建立存在极值解或判别一个解是极值解的条件，其方法包含有代数的和拓扑的两种．在古典形式中，**LP** 被表述为凸集[†]上的问题；特别是，凸锥的对偶性和线性不等式组起了重要的作用．然而，在现代表现形式中，利用了线性规划的对偶性，以及在非线性的场合也适用的对于 Lagrange 形式的鞍点条件．从 $\boldsymbol{R}^n$ 中的纯代数理论到线性拓扑空间[†]中的理论，展现出在各个不同阶段上的处理方法．

【发展历史】线性规划的历史，至少可以追溯到 G. Monge (1781), J. B. Fourier (1823)．关于 $\boldsymbol{R}^n$ 的凸多面锥，凸多面体，有限个线性不等式的代数理论，有 P. Gordon (1873), J. Farkas (1902) ([7]), E. Stiemke (1915) ([19]), H. Weyl (1935) ([21]) 等的古典结果．其后有 A. W. Tucker (1956) 的精确化的结果([15]论文 1)．关于 $\boldsymbol{R}^n$ 的一般凸集理论，C. Carathéodory (1911)([2]), A. Haar (1924)([9]) 是古典的结果．其后有A. Charnes-W. Cooper-W. Kortanek (1963) ([3]) 的推广．在 Stieltjes 积分情形下的 F. Riesz (1911) 理论中，包含了分析学的许多重要的表示定理．为回顾理论的发展，这里仅引用 G. Choquet (1956) 的文章 ([4])．在以线性规划的形式向函数空间的推广中，有以 P. C. Rosenbloom (1951, 1952)([18])为主的对数列空间[†](l)的推广．从 H. W. Kuhn- Tucker (1951)([14]) 的最大值问题与鞍点问题之间的对应关系出发的推广中，L. Hurwicz (1958)([10]) 及石井恵一 (1964)([11]) 在线性拓扑空间中作出的理论与应用都是值得注意的．另一方面，线性规划对经济学的应用，基于 J. von Neumann 的对策论[†](1928)，平衡增长模型 (1935, 1936) ([20]), W. Leontief ([16]) 的产业关联分析等而应运发展，出现了 T. C. Koopmans 等[13] (1951)以后所做的工作．关于实用的计算方法及在产业上的应用，Л. В. Канторович (1939) ([12]) 等取得的孤立成果长期未被注意，而以 G. B. Dantzig 提出的单形法([13]第 21 章)为转机，主要在美国得到发展的方法占有压倒的地位．

以下，只要没有特别说明，系数都是实数，设 $\boldsymbol{R}^n$ 为 n 维 Euclid 空间，X, Y 等为 n 维列向量，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^1$，$'$表示矩阵的转置，*表示对偶空间[†]或它的元素或对偶算子[†]．对于向量的三个半序关系≦，≤，< 应有所区别，$X \leqslant Y$ 和 $X<Y$ 分别意为 $X_i \leqslant Y_i$ $(i=1, \cdots, n)$ 和 $X_i<Y_i$ $(i=1, \cdots, n)$，$X \leqslant Y$ 约定为

$$X \leqslant Y \text{ 且 } X \neq Y.$$

【线性不等式与凸集的理论】 对于 $\boldsymbol{R}^n$ 的闭凸集 K，在 K 之外的任意一点与 K 之间可以由一个超平面分离之（分离定理†）；关于凸多面锥† C，设 A，B 为矩阵，$\{X|AX\geqslant 0\}$ 的形式与 $\{X|X=BY,\ Y\geqslant 0\}$ 的形式这两个定义的同等性；凸多面锥 C 与它的共轭凸锥†

$$C^*=\{Y\,|\,Y'X\geqslant 0,\ \forall X\in C\}$$

之间的对偶性 $C^{**}=C$；关于有界的凸多面体†，"被有限个超平面所包围的区域"与"由有限个顶点生成的凸集"这样两个定义的同等性；以上这些都是闭凸集的基本性质．无界的凸多面体，可由有界的凸多面体和凸多面锥进行加法运算而得到(→凸集)．与这些事实密切对应的线性不等式的定理，举出如下几个．**Minkowski-Farkas 定理**：$AX=B$（B 为向量)具有 $X\geqslant 0$ 的解的充分必要条件是，对于满足 $U'A\geqslant 0$ 的所有的 U，均使 $U'B\geqslant 0$．**Stiemke 定理**：关于 A，下面两个命题之中必定只有一个成立：i) $AX=0$，$X>0$ 有解；ii) $U'A\geqslant 0$ 有解．**Tucker 定理(互补松弛性定理** (theorem of complementary slackness))：对于 A 的两组不等式 i) $AX=0$ $(X\geqslant 0)$ 以及ii) $U'A\geqslant 0$，存在满足 $A'U+X>0$ 的解 X，U．

【有限维空间的线性规划】 问题一般以如下的形式表述．设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$B\in\boldsymbol{R}^m$，$P\in\boldsymbol{R}^{n*}$．

问题 P：在条件 i) $AX=B$，ii) $X\geqslant 0$ 之下，求出使 $X_0=P'X\to\max$ 的 $X\in\boldsymbol{R}^n$．

称满足 i) 的任意的 X 为**解** (solution)，满足 ii) 的解为**可行解** (feasible solution)．以 $\mathfrak{F}$ 表示可行解的全体，则 $\mathfrak{F}\neq\varnothing$ 的条件是：不存在满足

$$(1)\qquad V'A\geqslant 0,\ V'B<0$$

的 $V\in\boldsymbol{R}^{m*}$；$X_0\in\boldsymbol{R}^n$ 是最大解的条件为：存在满足

$$(2)\qquad U'A\geqslant P',$$

$$(3)\qquad (U'A-P')X_0=0$$

的 $U=U_0\in\boldsymbol{R}^{m*}$．称 U_0 为**影子价格** (shadow price)，(2) 为**单形准则** (simplex criterion)．条件 i)，ii)，(2)，(3) 表明，对于 $X\geqslant 0$，

$$(4)\qquad \Phi(X,U)=P'X-U'AX+U'B$$

在(X_0,U_0)处有鞍点†．改写(4)为

$$\Phi(X,U)=P'X-U'(AX-B)$$
$$=(P'-U'A)X+U'B,$$

可以推导出下面的对偶定理．问题 P 与下面叙述的问题 D 互为**对偶问题** (dual problem)．

问题 D：在条件(2)之下，求出使 $U'B\to\min$ 的 $U\in\boldsymbol{R}^{m*}$．

这里，下述的**线性规划的对偶定理** (duality theorem of linear programming) 成立．如果问题 P(D) 有可行解，且目标函数上(下)方有界，则这两个问题都有极值解，且两者的极值是一致的．这时问题D的最小解由上面的 U_0 给出．若问题 P(D) 有可行解，则问题 D(P) 下(上)方有界．

Kuhn 和 Tucker 将最大解对应于(4)的鞍点的事实推广到非线性的情形([14])．设 $f(X)$ 为 $X\in\boldsymbol{R}^n$ 的可微函数，$A(X)$ 为从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的可微映射，这时，在关于可行解集合的某种条件的限制下，对于最大化问题：在条件

$$A(X)\geqslant 0,\ X\geqslant 0$$

之下，对 $f(X)\to\max$ 的最大解 X_0，存在 $U_0\in\boldsymbol{R}^{m*}$，使得对于

$$(5)\qquad \Phi(X,U)=f(X)+U'A(X),$$

i) $\Phi_X^0\leqslant 0, \Phi_X^{0\prime}X_0=0\ (X_0\geqslant 0)$;

ii) $\Phi_U^0\geqslant 0,\ \Phi_U^{0\prime}U_0=0(U_0\geqslant 0)$

成立，这里

$$\Phi_X^{0\prime}=(\partial\Phi/\partial x_1,\partial\Phi/\partial x_2,\cdots,\partial\Phi/\partial x_n)_{X=X_0}$$

等．另一方面若 X_0，U_0 除了满足 i)，ii) 以外，还满足

iii) $\Phi(X,U_0)\leqslant\Phi(X_0,U_0)+\Phi_X^{0\prime}(X-X_0)(\forall X\geqslant 0)$;

iv) $\Phi(X_0,U)\geqslant\Phi(X_0,U_0)+\Phi_U^{0\prime}(U-U_0)\ (\forall U\geqslant 0)$;

则 X_0 即为最大解．如果 $A(X)$ 的各分量及 $f(X)$ 在所有的 $X\geqslant 0$ 处为凹且可微，则 X_0 成为最大解这一命题，与 $\exists U_0\geqslant 0$，使 (X_0,U_0) 是 Φ 的鞍点的命题是等价的．设 $F(X)$ 为从

$\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^k$ 上的可微映射，将上述的最大化问题的 $f(X)\to\max$ 置换为求在 $\boldsymbol{R}^k$ 中的半序 $\leqslant$ 意义下的极大点即**有效点**（efficient point）的问题时，则有如下更一般的定理：对于 X_0 有适当的 $V_0\in\boldsymbol{R}^{k*}$，$V_0>0$ 使得对于

$$\Phi(X, U)=V_0'F(X)+U'A(X),$$

i)，ii) 成立.

【空间的扩张与应用】 在序列空间

$$(l)=\left\{X=\{x_j\}\mid\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|<\infty\right\}$$

中的线性规划，曾由 Rosenbloom（Bull. Soc. Math. France, 1951—52）研究过. 利用 (l) 上的线性泛函† λ，$\lambda_i\in(l)^*=(m)$ $(i=1,\cdots,k)$，加上 i) 等式 $\lambda_i(X)=c_i$ 或 i') 不等式

$$\lambda_i(X)\leqslant c_i,$$

以及 ii) $x_j\geqslant 0$ $(\forall j)$ 的条件，在 (l) 上建立了作为

$$(c_0)=\{X=\{x_j\}\mid\lim_{j\to\infty}x_j=0\}$$

的对偶空间的弱拓扑†. 若 $\lambda_i(X)$ 为弱下半连续†，$\lambda(X)$ 为弱上半连续†，在 $\mathfrak{F}\neq\varnothing$ 时 $\lambda(X)$ 上方有界，则 $\lambda(X)$ 的最大值在 $\mathfrak{F}$ 的端点达到，在完全正则性的假定下它是唯一的. 有界的 $\mathfrak{F}$ 成为端点的**凸闭包**（convex hull），就是包含端点的最小的凸闭集. 将这一理论用于通过在 $\boldsymbol{R}$ 上给定的函数系

$$\varphi_j(x)(j=1,2,\cdots),$$

能表示为

$$f(x)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\varphi_j(x)$$

的函数族，则 С. Н. Бернштейн 的函数逼近论、绝对单调函数的理论和复变数函数论的一些不等式可以统一处理. 如使用已扩张到作为有界函数的Banach 空间上的线性泛函而定义的有限可加测度（А. Д. Александров, 1940—43）上的上述理论，则作为对于以

$$f(x)=\int_S K(x,s)d\mu(s)$$

的形式表现的 $f(x)$ 的函数空间上的线性泛函的极值问题，有非负调和函数的插值公式，关于它的 Fourier 系数的 Carathéodory-L. Fejér 的结果，还有关于热传导方程† Harnack 定理的类似结果等等.

设 J 为任意的足标集合，定义**广义有限序列空间**（generalized finite sequence space）$(f(J))$ 为在 $X=\{x_j\}(j\in J)$ 中除去有限个 j 之外为 $x_j=0$ 这样的 X 的全体. 对这一空间的推广是由 Charnes-Cooper-Kortanek 给出的([3]). 设 A_j，$B\in\boldsymbol{R}^m(j\in J)$，若考虑下列二问题：

问题 P_J：在

$$\sum_{j\in J}x_jA_j=B\,(X\in(f(J)),$$

$X\geqslant 0$) 之下，使

$$\sum_{j\in J}p_jx_j\to\max,$$

问题 D_J：在 $U'A_j\geqslant p_j\,(j\in J,\ U\in\boldsymbol{R}^{m*})$ 之下，使 $U'B\to\min$，

则 $\{(A_j', p_j)\mid j\in J\}$ 在比 Haar 条件稍强的标准封闭这个条件下，在这两个问题之间完全对偶性成立.

Kuhn-Tucker 的理论向线性拓扑空间的推广是由 L. Hurwicz 所作的([10]). 设 $\mathscr{X}$ 为线性空间，$\mathscr{Y},\mathscr{Z}$ 为线性拓扑空间，$\mathscr{Y},\mathscr{Z}$ 的非负凸锥 P_Y，P_Z 为闭凸锥且有内点，D 为 $\mathscr{X}$ 的凸集，F,G 分别是从 D 到 $\mathscr{Y},\mathscr{Z}$ 的凹映射（→ 凸函数），$G(D)$ 包含 P_Z 的内点. 如果 X_0 是在 $G(X)\geqslant 0$ $(X\in D)$ 下的 $F(X)$ 的最大解，则存在 $Y_0^*\geqslant 0$，$Z_0^*\geqslant 0$，使得

$$\Phi(X,Z^*)=Y_0^*(F(X))+Z_0^*(G(X))$$

在 (X_0,Z_0^*) 处有鞍点. P_Y,P_Z 有内点的条件是不能完全排除的，但再稍许弱一些，能够包括 (l_p)，(L_p)，(s)，(S) 的情形（Hurwicz-宇沢弘文 [1] 论文 5）. 对于 F,A 为线性，$\mathscr{Y}=\boldsymbol{R}$ 的情形，以 Hurwicz 给出的形式，设 $\mathscr{Z}$ 为局部凸†，P_X,P_Z 各为 $\mathscr{X},\mathscr{Z}$ 的闭凸锥，考虑

问题 L：在

$$G(X)=A(X)-B\geqslant 0,\ X\geqslant 0$$

之下，使

$$F(X)=X^*(X)\to\max,$$

令

$$\Phi(X,Z^*) = X^*(X) + Z^*(A(X) - B).$$

若对 $\rho \in \boldsymbol{R}$，定义从 $\mathscr{W} = \mathscr{X} \times \boldsymbol{R}$ 到

$$\mathscr{V} = \mathscr{Z} \times \mathscr{W}$$

的线性映射为

$$T((X,\rho)) = (A(X) - \rho B, (X,\rho)),$$

则在 $\mathscr{V}^*$ 的非负凸锥经 T^* 映射所得的象集成为 $\mathscr{W}^*$ 的正则凸†集的条件下，X_0 为问题 L 的最大解之命题，与 $\exists Z_0^* \in \mathscr{Z}^*$，$(X_0, Z_0^*)$ 为 Φ 的非负鞍点之命题是等价的．设空间为 Banach 空间，使用 Fréchet 微分†，则在并不比 Kuhn-Tucker 的条件限制强的一些限制之下，能够平行地讨论非线性问题的最大解和用导数表示的弱鞍点条件之间的对应．石井在较为简单地表示的条件之下，阐明了目标函数的 sup 与 Lagrange 形式的 $\inf_{Z^*} \sup_{X\in D}$ 的一致性，同时给出达到 sup, inf 所应满足的条件，并将此应用于发展 Чебышев 不等式†和 Cramér-Rao 不等式†的一般理论([11])．

【实用计算方法】 在有限维线性规划的实用的数值计算法中，以 Dantzig 的单形法为基础的**二段单形法**(2-phase simplex method)是标准的，还有**对偶单形法** (dual simplex algorithm)，**合成单形法** (composite simplex algorithm)，**主对偶法** (primal dual method) 等，它们都是以主元†消去法为基本运算的多种变形，可以根据具体情况采用 (P. Wolfe-L. Cutler [8] 论文 23)．

在问题 P 的条件 i) 和 $x_0 \to \max$ 合并起来的关于 $n+1$ 个变量的 $m+1$ 个方程中，对应于含有 x_0 列的线性无关的 $m+1$ 个列向量的变量集合称为**基** (basis)，仅对属于一个基的变量给以非零值所得的解称为**基本解** (basic solution)，将**可行基本解** (feasible basic solution)简记为 f. b. s. 将方程关于一个基的变量解出的形式称为**基本型** (basic form, canonical form)．对基本型应用主元消去法，就得到一个将基变量替换了的基本型与基本解．重复这样做，最后达到最优解的方法就是**单形法** (simplex method)． 对基本型逐次反复运用主元消去法形式的计算表格称为**单形表** (simplex tableau)．

在二段单形法之中，i) 找出一个基本解；ii) 找出一个可行基本解；iii) 求出一个最大解；逐次执行这三个阶段，在各阶段上所求的解不存在时会自动地得到判别． 无论何种情形，计算总将在有限次迭代后结束．在 iii) 这一阶段上的各步计算是，求出一个可行基本解 X，对它求出由满足(3)的 U 确定的 $U'A - P'$，根据它的分量的符号判别，如果没有满足单形准则(2)，则选取主元素，使得 X 移动到给出 $P'X$ 的更大值的与原来的可行基本解 X 相邻的 $\mathfrak{F}$ 的顶点处．退化情形的计算程序的有限性，可由在主元的选择上引用辞典式顺序而得到解决．在 ii) 这一阶段，将基本型表示的基本解中取负值的变量之和→max 作为仅限于那一步骤上的假定目标函数并对之使用 iii) 进行计算的做法是高效率的．这一过程当 $\mathfrak{F} = \varnothing$ 时自动地给出(1)的 V．

使 B 与 P 作为一个参变量 t 的线性函数而变动，在求最大解 X_t，x_{0t}，U_t 的**参数规划** (parametric programming) 中，主元消去法也占主要地位．$\max x_0$ 为 B 的凹函数，P 的凸函数．

除主元消去法之外，还有许多方法提出来作为基本运算．线性规划的无限维空间推广与实用计算相结合的一条途径，有利用 Dantzig-Wolfe 的分解原理 (decomposition principle) 的广义线性规划的处理方法([6])．**二段不确定性线性规划** (2-stage programming under uncertainty) 的问题也可通过对于对偶角形系统(dual angular system) 应用分解原理来进行计算．

【整数规划】 限定变量的全部或一部分取整数值的线性规划问题称为**整数规划** (integer programming)．求解整数规划的方法，由 R. E. Gomory 在 1959—60 年[8]的论文 34 中提出了几种方法．主要想法是在无视整数限制条件下求得的解为非整数时，再导出整数解应该满足的较强的不等式条件，依靠添加这样的约束条件，删去前已求得的解．对基本型的一行

$$(6)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a_0$$

规定一个正整数 λ，设

$$a_j = [a_j/\lambda]\lambda + \rho_j$$
$$(0 \leqslant \rho_j < \lambda;\ j = 0, 1, \cdots, n),$$

若令

$$z = \left(\sum_{j=1}^{n} \rho_j x_j - \rho_0\right) \Big/ \lambda,$$

则对于 (6) 的非负整数解，z 就成为非负的整数，通过令 $z \geqslant 0$，删去 $\rho_0 > 0$ 的解. 今设一个基本型的一行为

$$(7) \qquad x_i + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = a_0,$$

其中 a_0 不是整数. 我们可以按本小节所述程序，取 $\lambda = 1$，并加上条件 $z \geqslant 0$，以删去 $x_i = a_0$ 的基本解. 对于全部变量和全部系数都为整数的情形，计算过程的有限性已得到证明. 对整数规划问题，已得到的能够满足实用的计算方法将会开辟出广泛的应用领域. 这已由 Dantzig 部分地指出 ([5]).

【参】 [1] K. J. Arrow-L. Hurwicz-H. Uzawa(宇沢弘文)(eds.), Studies in linear and nonlinear programming, Stanford Univ. Press, 1958; [2] C. Carathéodory, Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, Rend. Circ. Mat. Palermo, **32** (1911), 193—217; [3] A. Charnes-W. Cooper-K. Kortanek, Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Carathéodory, Management Sci., **9** (1963), 209—228; [4] G. Choquet, Existence et unicité des representations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes, Sem. Bourbaki, 139, 1956/1957 (Benjamin, 1966); [5] G. B. Dantzig, On the significance of solving LP problems with some integer variables, Econometrica, **28** (1960), 30—44; [6] G. B. Dantzig-P. Wolfe, Decomposition principles for linear programs, Operations Res., **8** (1960), 101—111; [7] J. Farkas, Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, J. Reine Angew. Math., **124** (1902), 1—24; [8] R. L. Graves-P. Wolfe (eds.), Recent advances in mathematical programming, McGraw-Hill, 1963; [9] A. Haar, Über lineare Ungleichungen, Acta Sci. Math. Szeged, **2** (1924), 1—14; [10] L. Hurwicz, Programming in linear spaces; in Studies in linear and non-linear programming, edited by K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa (宇沢弘文) Stanford Univ. Press, 1958, 38—102; [11] K. Isii(石井恵一), Inequalities of the types of Chebyshev and Cramér-Rao and mathematical programming, Ann. Inst. Stat. Math., **16** (1964), 277—293; [12] Л. В. Канторович, Математические методы организации и планирования производства, Издание ленинградского госуд. унив., 1939(中译本:Л. В. 康特洛维奇,生产组织与计划中的数学方法,科学出版社, 1959),(英译本: Mathematical methods of organization and Planning production, Management Sci., **6** (1960). 366—422); [13] T. C. Koopmans(ed.), Activity analysis of production and allocation, John Wiley, 1951; [14] H. W. Kuhn-A. W. Tucker, Nonlinear programming, Proc. 2nd Berkeley Symp., 1951, p. 481—492; [15] H. W. Kuhn-A. W. Tucker (eds.), Linear inequalities and related systems, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1956 (中译本:寇恩,塔凯尔,线性不等式与线性规划,上海科学技术出版社, 1964); [16] W. Leontief, The Structure of American economy 1919—1939, Oxford Univ. Press, 1951; [17] 二階堂副包,経済のための線型数学,培風館, 1961; [18] P. C. Rosenbloom, Quelques classe de problèmes extrémaux, Bull. Soc. Math. France, **79** (1951), 1—58; **80** (1952), 183—215; [19] E. Stiemke, Über positive Lösungen homogener linearer Gleichungen, Math. Ann., **76** (1915), 340—342; [20] J. von Neumann, Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Math. Kolloquiums, **8** (1937), 73—83,(英译本: A model of general economic equilibrium, Rev. Economic Studies, **13** (1945—46), 1—9); [21] H. Weyl, Elementare Theorie der konvexen Polyeder, Comment. Math. Helv., **7** (1935), 290—306. 另→运输问题之[参].

运输问题 [英 transportation problem 法 problème de transport 德 Transportproblem 俄 задача о перевозках 日 輸送問題] **运输问题**是线性规划问题的特殊情况(→线性规划,下述的问题 H)，然而通常把与线性规划有同样性质的问题 A, T, F, S, CPS 等统称为运输型的问题是方便的. 在历史上，作为几何问题处理的最早的工作是 G. Monge ([16])的一系列研究[1],[11]. 另一方面,如[9],[14] 从实用的观点得出的特殊类型的线性规划问题具有特殊的代数性质: "条件关系式的系数矩阵为**完全幺模的** (completely unimodular), 即所有的子行列式为 0, ± 1". 人们还陆续发现了具有这样的性质的其他问题，并且弄清楚了它们之间的相互关系,还明确了它们同[13], [2]所述系统的组合**图论** (graph theory) 的重要课题有密切的联系 ([3], [8]).

线性有限图 (finite linear graph) 是由顶点的有限集 V，边的有限集 $A \subset V \times V$ 给出的一维复形†，并且有 V, A 上的整系数加法群 $M(V)$, $M(A)$ 之间的边缘算子†

$$\partial: M(A) \to M(V)$$

以及它的共轭线性变换

$$\delta: M(V) \to M(A).$$

由**树** (tree) 或**最大树** (maximal tree) 与**补树** (co-tree) (或称**共轭树**)构成作为一维循环形之基的闭路的集合,而且与此对应,可以构成 $\delta(M(V))$ 中的基 ([10]). $\delta(M(V))$ 的元素被称为**切割集** (cut set).

【运输型问题】 问题 H: **Hitchcock 运输问题** (Hitchcock transportation problem). 在

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

$x_{ij} \geqslant 0$ 的条件下,使

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

问题 A: **分配问题** (assignment problem). 在

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1,$$

$x_{ij} = 0$ 或 1 的条件下,使

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

问题 T: **图上运输问题** (transshipment problem) 或称**网络运输问题** (transportation problem on a network). 设以各边 $(i, j) \in A$ 上的"流量"(flow) x_{ij} 为变量,要求 i) 对各顶点的净流入量=给定值; ii) $0 \leqslant x_{ij} \leqslant b_{ij}$; 在这两个条件下,使

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

问题 F: **最大流问题** (maximum flow problem). 在图上逐个给出流入点,流出点,在 i') 对其他顶点的净流入量 = 0; 以及 ii) 的条件下,使总流入量=总流出量→max.

问题 S: **最短路问题** (shortest path problem) 在图 G 的各边上长度给定时,求出连接两个顶点的最短通路.

问题 CPS: **日程计划** (critical path scheduling) ([12]). 在有向道路的存在所定义的半序关系中,当 V 有最大点 v_n, 最小点 v_0 时,在

$$y_{ij} \leqslant t_j - t_i \ (t_0 = 0, \ t_n = T),$$
$$b_{ij} \leqslant y_{ij} \leqslant b'_{ij}$$

的条件下,使

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij} \to \max.$$

考察这几种问题. 问题 H, T, F, CPS 本身是线性规划问题,从上述图的性质,知它们的系数矩阵是完全幺模的, 对于整数的右端项可以求得整数最优解, 且对于整数的目标函数系数可以求得整数对偶解. 问题 A, S 也可以无视整数条件而分别包含在问题 H,T 之中. 问题 H, A, T 可以相互变换,它们与 CPS 一起都可以利用问题 F 的解解出 ([6]). 利用以消元法为基本运算的线性规划问题的各种解法的特殊化, 能够对运输型诸问题给出一些特殊解法. 问题 H, A, T, S 的对偶解允许分别作为顶点位势来解释, CPS 是一种类型的位势问题, 同它的对偶问题一起可以作为某一力学系统或电流回路的平衡条件来解释([5], [3]).

线性规划的对偶定理, 对于问题 F 成为**最大流最小切断定理** (maximum flow minimum cut theorem) ([4]). 稍行推广, 则得到关于问题 T 的可行解存在条件的 D. Gale 定理([7]), 关于有限集族的一系列表示的 P. Hall 定理 (1935) 的推广 ([18] 论文 10), 关于半序集† 分解为最小数目的线性有序集†的 R. P. Dilworth 定理 (1950) ([18] 论文 11),关于图的两个顶点集的连通性的 G. Menger 定理([4]), 在问题 A 的解法([15])中用到的 D. Kőnig 定理 ([13]), 以及关于一般的图上位势的存在性的 B. Roy 的结果([17])等.

【参】 [1] P.-E. Appel, Le problème geométrique des déblais et remblais, Gauthier-Villars, 1928; [2] C. Berge, Théorie des graphes et ses applications, Dunod, 第二版 1963; [3] C. Berge-A. Ghouila-Houri, Programmes, jeux et réseaux de transport, Dunod, 1962; [4] G. B. Dantzig-D. R. Fulkerson, On the max-flow min-cut theorem of networks, [18] 之論文 12; [5] J. B. Dennis, Mathematical programming and electrical networks, John Wiley, 1959; [6] L. R. Ford-D. R. Fulkerson, Flows in networks, Princeton Univ. Press, 1962; [7] D. Gale, A theorem on flows in networks, Pacific J. Math., 7(1957), 1073—1082; [8] A. J. Hoffman-J. B. Kruskal, Integral boundary points of convex polyhedra, [18] 之論文 13; [9] F. L. Hitchcock, The distribution of a product from several sources to numerous localities, J. Math. Phys., 20 (1941), 224—230; [10] 伊理正夫, グラ

フの理論，経営科学，9 (1965)，5—28；[11] L. V. Kantorovič (Л. В. Канторович)，On the translocation of masses，Dokl. Akad. Nauk SSSR，37 (1942)，199—201，(Management Sci.，5 (1958)，1—4)；[12] J. E. Kelley，Critical path planning and scheduling; mathematical basis，Operations Res. 9 (1961)，296—320；[13] D. König，Theorie der endlichen und unendlichen Graphen，Akademische Verlag.，1936；[14] T. C. Koopmans-S. Reiter，A model of transportation，T. C. Koopmans(ed.)，Activity analysis of production and allocation，p. 222—259，John Wiley，1951；[15] H. W. Kuhn，The Hungarian method for the assignment problem，Naval Res. Logist. Quart.，2 (1955)，83—97；[16] G. Monge，Déblai et remblai，Mem. Acad. Sci.，1781；[17] B. Roy，Cheminement et connexité dans les graphes; applications aux problèmes d'ordonnancement，METRA，Ser. speciale no. 1，1962；[18] H. W. Kuhn-A. W. Tucker，Linear inequalities and related systems，Ann. Math. Studies，Princeton，1956. 另→线性规划的[参].

非线性规划 [英 nonlinear programming 法 programmes non-linéaires 德 nichtlineare Programmierung 俄 нелинейное программирование 日 非線形計画法] 一般的**非线性规划问题** (nonlinear programming problem) 可以表述如下：设 X^0 为 n 维 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的子集，$\theta(x_1,\cdots,x_n)$，$g_1(x_1,\cdots,x_n)$，$\cdots$，$g_m(x_1,\cdots,x_n)$ 为在 X^0 上定义的实值函数. 问题是确定满足约束

$$g_i(x_1,\cdots,x_n)\leqslant 0\ (i=1,\cdots,m)$$

且 $(x_1,\cdots,x_n)\in X^0$ 同时使得 $\theta(x_1,\cdots,x_n)$ (称为**目标函数** (objective function)) 取最小值 (或最大值)的点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的集合. 我们只需考虑最小化的问题，因为最大化的问题，由于明显的关系 $\max\theta=-\min(-\theta)$，可以变成最小化问题.

若用向量记号，**最小化问题** (minimization problem) 可以表述为如下形式：

(P) 确定所有 $\bar{x}$ 的集合，使得

$$\theta(\bar{x})=\min_{x\in X}\theta(x),$$

$$\bar{x}\in X=\{x\,|\,x\in X^0,\ g(x)\leqslant 0\},$$

其中 $g=(g_1,\cdots,g_m)$，在本条中，对于实向量 $a=(a_1,\cdots,a_n)$来说，$a\leqslant 0$ 意味着

$$a_1\leqslant 0,\cdots,a_n\leqslant 0$$

集合 X 称为**可行区域** (feasible region) 或**约束集** (constraint set)，而 $\bar{x}$ 称为**最优解** (optimal solution) 或简称解. 在许多非线性规划问题中，$X^0=\boldsymbol{R}^n$. 若 $X^0=\boldsymbol{R}^n$ 且 θ 和 g 为在 $\boldsymbol{R}^n$ 上定义的线性函数，则问题 (P) 成为**线性规划问题** (linear programming problem). 目标函数为二次函数而要满足线性约束的最小化问题称为**二次规划问题** (quadratic programming problem). 如果 X 是凸集，而 θ 在 X 上为凸(或凹)函数，则相应的问题称为**凸规划问题** (convex programming problem). 凸函数与凹函数在非线性规划中起重要作用. 因为它们满足最优性的相当直接的充分条件，也是使得最优性的必要条件能够不需要经过线性化就给出的仅有的一类函数.

在通常的微分学中，如果一个多变量函数在适合一些等式约束的情况下要寻求最大值或最小值，通常是用 Lagrange 乘子法. 作适当的修改，Lagrange 乘子法也可以用于求解非线性规划问题.

关于最小化问题 (P) 的 **Lagrange 函数** (Lagrangian function) ϕ 定义为

$$\phi(x,\ u)=\theta(x)+u'g(x),$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)$，$u=(u_1,\cdots,u_m)$，且 u' 表示 u 的转置，

$$u'g(x)=\sum_{i=1}^{m}u_ig_i(x_1,\cdots,x_n).$$

$(\bar{x},\bar{u})$ 称为 $\phi(x,u)$ 的**鞍点** (saddle point)，倘若 $\bar{x}\in X^0$，$\bar{u}\in\boldsymbol{R}^m$，$\bar{u}\geqslant 0$，且

$$\phi(\bar{x},\ u)\leqslant\phi(\bar{x},\ \bar{u})\leqslant\phi(x,\ \bar{u})$$

对所有 $x\in X^0$ 和所有满足 $u\geqslant 0$ 的 $u\in\boldsymbol{R}^m$ 成立.

H. W. Kuhn 及 A. W. Tucker ([15])证明了，在某些正则条件下，凸规划问题可以归结为寻求 Lagrange 函数 $\phi(x,\ u)$ 的鞍点的问题.

【最优性判据】 我们现在要叙述关于最小化问题 (P) 的一些最优性判据.

1) (H. Uzawa [22]) 如果 $(\bar{x},\ \bar{u})$ 是 $\phi(x,\ u)$ 的鞍点，则 $\bar{x}$ 是最优解.

2) (Kuhn and Tucker [15])设 X^0 是开凸集，且 θ 和 g 是可微的凸函数. 如果存在$(\bar{x},\bar{u})$

使得

$$\nabla\theta(\bar{x}) + \bar{u}'\nabla g(\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{x} \in X,\ \bar{u}'g(\bar{x}) = 0,\ \bar{u} \geqslant 0,$$

则 $\bar{x}$ 是最优解，其中 $\nabla\theta(\bar{x})$ 表示 θ 的梯度向量，$\nabla g(x)$ 表示 g 在 x 点的 Jacobi 矩阵.

上述的 1)，2) 是问题 (P) 的最优解的充分条件. 另一方面，关于最优性的必要条件由下面的结果给出.

3) (F. John [12]) 设 X^0 为开集，θ 和 g 可微，则若 $\bar{x}$ 是问题 (P) 的解，便存在 $u_0 \geqslant 0$ 和 $\bar{u} \in \boldsymbol{R}^m$ 使得

$$\bar{u}_0\nabla\theta(\bar{x}) + \bar{u}'\nabla g(\bar{x}) = 0,$$

$$g(\bar{x}) \leqslant 0,\ \bar{u}'g(\bar{x}) = 0,\ \bar{u} \geqslant 0.$$

要推导出其他的必要条件，我们需要称为**约束规范** (constraint qualification) 的一类正则条件. 下面是两个这样的约束规范.

(S) 设 X^0 为凸，则凸向量函数 g 称为满足 **Slater 约束规范**(在 X^0 上)，如果存在 $x^1 \in X^0$ 使得 $g(x^1) < 0$

(即 $g_1(x^1) < 0, \cdots, g_n(x^1) < 0$).

(KT) 设 X^0 为开集，则称向量函数 g 在 $\bar{x} \in X^0$ 处满足 **Kuhn-Tucker 约束规范**，如果 g 在 $\bar{x}$ 可微，且若 y 是任意一个向量，并满足线性不等式 $\nabla g_i(\bar{x}) \cdot y \leqslant 0$,

$$i \in I = \{i \mid g_i(\bar{x}) < 0\},$$

则 y 与包含于

$$X = \{x \mid x \in X^0,\ g(x) \leqslant 0\}$$

中的一条约束弧相切.

4) (Uzawa [22]) 设 X^0 为凸集，θ 和 g 是 X^0 上的凸函数，且设 g 满足 Slater 约束规范. 如果 $\bar{x}$ 是最优解，则存在 $\bar{u} \in \boldsymbol{R}^m, \bar{u} \geqslant 0$，使得 $\bar{u}'g(\bar{x}) = 0$ 且 $(\bar{x}, \bar{u})$ 是

$$\phi(x, u) = \theta(x) + u'g(x)$$

的鞍点.

5) (Kuhn and Tucker [15]) 设 X^0 为开集，设 $\bar{x}$ 为问题 (P) 的最优解，设 θ 和 g 在 $\bar{x}$ 可微，并设 g 满足 Kuhn-Tucker 约束规范，则存在 $\bar{u} \in \boldsymbol{R}^m$ 满足

$$\nabla\theta(\bar{x}) + \bar{u}'\nabla g(\bar{x}) = 0,\ g(\bar{x}) \leqslant 0,$$

且 $\bar{u}'g(\bar{x}) = 0, \bar{u} \geqslant 0$.

【对偶性】 数学规划中的**对偶定理**(duality theorem) 表述了两个问题之间的某种关系. 这个关系有两个方面，(i) 一个问题是约束最小化问题而另一个问题是约束最大化问题; (ii) 其中一个问题的解的存在性保证另一个问题的解的存在性，且在这种情形它们的最优值相等.

设 X^0 是 $\boldsymbol{R}^n$ 中的开集，设 θ 和 g 分别为数值函数和 m 维向量函数，二者都定义在 X^0 上. 我们考虑下面两个问题:

(P) 原问题: 求 $\min\theta(x)$，对

$$x \in X = \{x \mid x \in X^0,\ g(x) \leqslant 0\}.$$

(D) 对偶问题: 求

$$\max\phi(x, u) = \theta(x) + u'g(x),$$

对

$$(x, u) \in Y = \{(x, u) \mid x \in X^0,\ u \in \boldsymbol{R}^m,\ u \geqslant 0,\ \nabla_x\phi(x, u) = 0\}$$

(其中 $\nabla_x\phi(x, u)$ 表示向量，它的分量是偏导数 $\partial\phi(x, u)/\partial x_i$, $i = 1, \cdots, n$).

线性或二次情形的例子是:

(P)	(D)
$\min(-p'x)$ 对 $Ax \leqslant b, x \geqslant 0$.	$\max(-b'u)$ 对 $A'u \geqslant p, u \geqslant 0$.
$\min(-p'x)$ 对 $Ax \leqslant b$.	$\max(-b'u)$ 对 $A'u = p, u \geqslant 0$.
$\min\left(\frac{1}{2}x'Cx - px\right)$ 对 $Ax \leqslant b, x \geqslant 0$.	$\max\left(-\frac{1}{2}x'Cx - b'u\right)$ 对 $Cx + A'u \geqslant p$.
$\min\left(\frac{1}{2}x'Cx - p'x\right)$ 对 $Ax \leqslant b$.	$\max\left(-\frac{1}{2}x'Cx - b'u\right)$ 对 $Cx + A'u = p, u \geqslant 0$.

这里 b 是 m 维向量，p 是 n 维向量，A 是 $m \times n$ 矩阵，C 是 $n \times n$ 对称阵. 注意，在线性情形，对偶问题不含有原变量 x.

关于这些对偶问题 (P) 和 (D) 有一些对偶定理，下面举出二个:

1) (P. Wolfe [25]) 设 X^0 是开凸集，θ 和 g 是可微的凸函数，且 g 满足 Kuhn-Tucker 约束规范. 如果 $\bar{x}$ 是 (P) 的一个解，则存在 $\bar{u} \in \boldsymbol{R}^m$ 使得 $(\bar{x}, \bar{u})$ 是 (D) 的解且

$$\theta(\bar{x}) = \phi(\bar{x}, \bar{u}).$$

2）(O. L. Mangasarian and J. Ponstein [17]) 设 X^0 是开凸集，θ 和 g 是可微的凸函数，且 $(\hat{x},\hat{u})$ 是 (D) 的解. 如果 $\phi(x,\hat{u})$ 在 $\hat{x}$ 的某一邻域内是严格凸函数，则 $\hat{x}$ 是 (P) 的解且 $\theta(\hat{x})=\phi(\hat{x},\hat{u})$.

上面两个问题 (P) 和 (D) 并不是对称的. 对称的对偶性的概念已由 G. B. Dantzig, E. Eisenberg 和 R. W. Cottle 引进. 他们考虑了下面的对偶规划问题:

原问题：求

$$\min F(x,u)=K(x,u)-u'\nabla_u K(x,u),$$

约束为

$$\nabla_u K(x,u)\leqslant 0,\ x\geqslant 0 \text{ 且 } u\geqslant 0;$$

对偶问题：求

$$\max\ G(x,u)=K(x,u)-x'\nabla_x K(x,u),$$

约束为

$$\nabla_x K(x,u)\geqslant 0,\ x\geqslant 0 \text{ 且 } u\geqslant 0,$$

其中 K 是在 $(x,u)\in \boldsymbol{R}^n\times\boldsymbol{R}^m$ 上连续可微的.

主要结果 ([8]) 是原问题和对偶问题存在共同的最优解 $(\bar{x},\bar{u})$，条件为 (i) 对原问题存在一个最优解 $(\bar{x},\bar{u})$; (ii) K 对每一个 u 是 x 的凸函数，对每一个 x 是 u 的凹函数; (iii) K 为二次可微且二阶偏导数矩阵 $(\partial^2K/\partial u^i\partial u^j)$ 在 $(\bar{x},\bar{u})$ 是负定的.

【求解方法】 (i) **二次规划** (quadratic programming). 对于求解凸(凹)二次规划问题已有一些方法 ([14]). E. M. L. Beale 法 ([6]) 是线性规划的单形法的直接推广. M. Frank 及 P. Wolfe 算法 ([9]) 与 Wolfe 算法 ([24]) 都是直接与 Kuhn-Tucker 关系有联系的并用了单形法.

(ii) **Arrow-Hurwicz-宇沢梯度法** (Arrow-Hurwicz-Uzawa gradient method) ([4]). 凹或凸规划问题可以由寻求 Lagrange 函数 $\phi(x,u)$ 的鞍点来解决. 设 $\varphi(x,u)$ 关于 n 维向量 $x\geqslant 0$ 是严格凹函数且属于 C^2, 关于 m 维向量 $u\geqslant 0$ 是凸函数且属于 C^2, 并且具有鞍点 $(\bar{x},\bar{u})$. 要求得 $\varphi(x,u)$ 的鞍点，设计出以下的梯度法是自然的:

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\quad \frac{du_j}{dt}=-\frac{\partial\varphi}{\partial u_j}.$$

为保持变量在正卦限内，我们对上式略加修改而考虑如下的微分方程组:

$$\frac{dx_i}{dt}=\begin{cases}0, \text{ 若 } x_i=0 \text{ 且 } \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}<0,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}, \text{ 其他情形,}\end{cases}$$
$$(i=1,\cdots,n),$$
$$\frac{du_j}{dt}=\begin{cases}0, \text{ 若 } u_j=0 \text{ 且 } \dfrac{\partial\varphi}{\partial u_j}>0,\\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_j}, \text{ 其他情形.}\end{cases}$$
$$(j=1,\cdots,m).$$

在某些正则性假定下，对任一初始条件 (x^0,u^0) 此方程组存在唯一解 $(x(t),u(t))$，并且解的 x 分量 $x(t)$ 当 $t\to\infty$ 时收敛于 $\bar{x}$.

将上述结果用于 Lagrange 函数 $\phi(x,u)$ 我们可以解凸或凹规划问题.

(iii) **Rosen 梯度投影法** (Rosen's gradient projection method) ([20]). 如果可行域的一点 x^0 没给出最小化问题 (P) 的解，我们可以从 x^0 沿着函数 $-\theta(x)$ 的梯度方向求出一个可行点且得到较小的函数值. 若 x^0 是边界点且如果梯度向量指向可行区域的外部，此法失效. Rosen 方法 ([20]) 是将梯度投影到可行区域的边界上，随后沿此投影方向进行搜寻. 这样得到的下一点保持在可行域的边界上.

(iv) **可行方向法** (method of feasible directions). 这是最初由 G. Zoutendijk ([26]) 提出的. 考虑在满足约束 $x\in S\subset\boldsymbol{R}^n$ 之下求 $\theta(x)$ 的最小值的问题，其中 S 是满足某些正则性条件的一个连通闭集，$\theta(x)$ 是 n 维向量 x 的连续可微函数，且对某一个 α, 集合

$$\{x\in S\mid\theta(x)\leqslant\alpha\}$$

是有界和非空的.

任一按下列步骤来解这一问题的方法都是可行方向法: 1) 从某个使 $\theta(x^0)<\sup\alpha$ 的 $x^0\in S$ 开始, 2) 从第 k 次迭代点 x^k 过渡到 x^{k+1} 时，首先在 x^k 点确定一个方向 s^k，使得对所有充分小的 $\lambda>0$，射线 $x^k+\lambda s^k$ 位于 S 内, 3) 随后确定步长 λ_k，从而得到第 $(k+1)$

次迭代点 $x^{k+1}=x^k+\lambda_k s^k$. 4) 重复这一过程直至某个预先规定的停止条件得到满足.

有许多确定 s^k 的方法，在大多数情形下，λ_k 是由沿着所得到的方向进行一维搜寻而确定的. Zoutendijk 统一了各种形式的可行方向法并且提出了产生最优方向 s^k 的规范化准则，同时从计算方法的观点对此问题进行了详细的研究([27], [28]).

【推广】 L. Hurwicz ([11]) 发展了在线性拓扑空间中的一般的规划论，主要结果是将 Minkowski-Farkas 定理和 Kuhn-Tucker 定理(→线性规划)推广到线性空间中的规划问题. P. P. Varaiya ([23]) 考虑了 Banach 空间中的非线性规划问题：

(B) 求 $\max f(x)$，约束为 $x\in A$，$g(x)\in A_Y$，其中 X，Y 为实的 Banach 空间，$x\in X$，$g: X\to Y$ 是 Fréchet 可微映射，f 为实值可微函数，A 是 X 的子集，而 A_Y 是 Y 中的凸集. 主要结果类似于 Kuhn-Tucker 必要条件. 当 A_Y 是闭凸锥时，Varaiya 也揭示了关于 (B) 的一个鞍点值问题. L. W. Neustadt ([19]) 研究了线性向量空间中的非线性规划问题，并且给出对最优控制理论的应用. 主要结果是：(i)对于最优性的 Kuhn-Tucker 型充分必要条件；(ii) 对于求得广义 Kuhn-Tucker 条件中的乘子的对偶性定理；(iii) 对于最优控制理论的应用.

【参】 [1] J. Abadie (ed.), Nonlinear programming, North-Holland, 1967; [2] J. Abadie (ed.), Integer and nonlinear programming, North-Holland, 1970; [3] K. J. Arrow-L. Hurwicz-H. Uzawa (宇沢弘文), (eds.), Studies in linear and nonlinear programming, Stanford Univ. Press, 1958; [4] K. J. Arrow-L. Hurwicz, Gradient method for concave programming I, in [3], p. 117—126; H. Uzawa(宇沢弘文)Gradient method for concave programming II, in [3], p. 127—132; [5] E. M. L. Beale, On minimizing a convex function subject to linear inequalities, J. Roy. Statist. Soc., (B) **17**(1955), 173—184; [6] E. M. L. Beale, On quadratic programming, Nav. Res. Log. Quart, **6** (1959), 227—243; [7] E. M. L. Beale, Nonlinear programming, numerical methods, in [1], p. 135—205; [8] G. B. Dantzig-E. Eisenberg-R. W. Cottle, Symmetric dual nonlinear programs, Pacific J. Math., **15** (1965), 809—812; [9] M. Frank-P. Wolfe, An algorithm for quadratic programming, Nav. Res. Log.Quart., **3** (1956), 95—110; [10] G. Hadley, Nonlinear and dynamic programming, Addison-Wesley, 1964; [11] L. Hurwicz, Programming in linear spaces, in [3], p. 38—102; [12] F. John, Extremum problems with inequalities with subsidiary conditions, in Studies and essays, Courant anniversary volume, Interscience, p. 187—204; [13] S. Karlin, Mathematical methods and theory in games, programming and economics I, Addison-Wesley, 1959; [14] H. P. Künzi-W. Krelle, Nichtlineare Programmierung, Springer, 1962; [15] H. W. Kuhn-A. W. Tucker, Nonlinear programming, Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., 1951, p. 481—492; [16] O. L. Mangasarian, Nonlinear programming, McGraw-Hill, 1969; [17] O. L. Mangasarian-J. Ponstein, Minimax and duality in nonlinear programming, J. Math. Anal. Appl., **11** (1965), 504—518; [18] F. Nikaido (二階堂副包), Introduction to sets and mappings in modern economics, North-Holland, 1970; [19] L. W. Neustadt, Sufficiency conditions and a duality theory for mathematical programming problems in arbitrary linear spaces, in [21], p. 323—348; [20] J. B. Rosen, The gradient projection method for nonlinear programming, J. Soc. Indust. Appl. Math., **8** (1960), 181—217; **9**(1961), 514—553; [21] J. B. Rosen-O. L. Mangasarian-K. Ritter (eds.), Nonlinear programming, Academic Press, 1970; [22] H. Uzawa (宇沢弘文), The Kuhn-Tucker theorem in concave programming, in [3], p. 32—37; [23] P. P. Varaiya, Nonlinear programming in Banach space, SIAM. J. Appl. Math., **15** (1967), 284—293; [24] P. Wolfe, The simplex method for quadratic programming, Econometrica, **27**(1959), 382—398; [25] P. Wolfe, A duality theorem for nonlinear programming, Quart. Appl. Math., **19**(1961), 239—244; [26] G. Zoutendijk, Methods of feasible directions, Elsevier, 1960; [27] G. Zoutendijk, Nonlinear programming, computational methods, in [2], p. 37—86; [28] G. Zoutendijk, Some algorithms based on the principle of feasible directions, in [21], p. 93—121; [29] 二階堂副包，現代経済学の数学的方法，岩波，1960.

动态规划 [英 dynamic programming 法 programmation dynamique 德 dynamische Programmierung 俄 динамическое программирование 日 動的計画法] 决策问题已经成为现代数学的对象，多阶段决策问题大致有两个类型. 它们的共同之处是，根据在各阶段分别选择怎样的决策而确定全过程. 区别在于，一个类型在中间阶段不确定结果，全过程的结果直到最后一个阶段才被确定. 另一个类型不仅在每一阶段确定相应的结果，而且这样的结果还成为在它以后的阶段考虑决策时的前提. 前一种类型常常用扩充型†对策论处理，而系统地处理后一种类型的方法有**动态规划**. 这是 R. Bellman 在本世纪五十年代发展起来的一种方法. 它继

线性规划*，非线性规划*之后成为数学规划理论中的一个基本分支.

这里所讨论的动态规划过程的基本结构，大致可以看出有以下共同点：1）系统无论处于过程的哪一阶段，都由一组状态变量刻划其特征. 2）无论在过程的哪一阶段，都从不同的**决策**（decision）中选择. 3)决策的结果以状态变量的变换形式表现出来. 4)仅仅是各阶段上系统的现状能够影响下一阶段的决策选择，而与通过怎样的途径达到这一现状的经历无关（Марков 性质）. 5）在过程中决策选择的整个序列称为**策略**（policy），策略的目标是使状态变量的某个特定函数之值为最大（或最小）. 这个特定函数就称为目标函数，如上所述使这一目标函数值为最大(或最小)的策略称为**最优策略**（optimal policy）. 由 Bellman 所发展的动态规划方法的特点是始终利用下述的**最优化原理**（principle of optimality）："最优策略应具备如下性质：就是无论初始状态和初始决策如何，对于作为这一初始决策的结果所产生的状态，以后的决策序列必须构成最优策略."

决策过程可以按其是确定性的、随机性的或对策性的以及是离散的或连续的来进行分类. 下面结合起来叙述几个典型情况.

【离散确定性过程】 决策的结果可以唯一地确定的过程称为**确定性过程**(deterministic process). 当过程的分段数为有限或者可数无限时，则称为离散的. 这个过程的系统状态以M维向量p表示，尽管在各个阶段它可变化，但设其总是属于某一区域D内的. $T=\{T_q\}$为变换 T_q 的集合，这里设 $q\in S$，变换 $p\in D$，所得的状态 $T_q(p)$ 仍设它属于 D，那么，N个阶段组成的有限过程中的策略就是选择在各阶段依次实施的N个变换的组合（$T_1, T_2, \cdots, T_N$），这里令 $p_1=T_1(p)$, $p_2=T_2(p_1), \cdots$,

$$p_N=T_N(p_{N-1}).$$

这样，N 阶段的最优策就是使最终状态 p_N 的函数 $k(p_N)$ 作为目标函数而取最大值. 于是，以 $f_N(p)$ 表示初始状态为p时而其后采用最优策略的情况下的N阶段收益. 应用最优化原理的方法要点有以下二个：第一，是将面临的问题嵌入到更一般的问题类型中去加以解决的方法，称之为**嵌入原理**（imbedding principle). 不是探求一个孤立的过程的最优策略的特性，而是致力于求得一类过程的最优策略集合所具有的共同特性. 第二，是应用嵌入原理与最优化原理导出递推关系（recurrence relation），从而建立关于未知函数组 $f_k(p)$ 的函数方程的方法，称之为**函数方程法**（functional equation approach). 设初始状态为 p，并采用某一变换 T_q 作为最初决策，则得到的新状态为 $T_q(p)$. 在这以后的 $k-1$ 个阶段上运用最优策略时，则得到的最大收益（maximum return）为 $f_{k-1}(T_q(p))$. 根据最优化原理，它与取k阶段最优策略所得的收益 $f_k(p)$ 之间，必定有如下的关系成立：

$$f_k(p)=\max_{q\in S} f_{k-1}(T_q(p)).$$

这个关系式对于$N\geqslant k\geqslant 2$的所有k都应当成立，特别对于 $k=1$，则有

$$f_1(p)=\max_{q\in S} R(T_q(p)).$$

这一推理若用于可列无限阶段的情形，则成为

$$f(p)=\max_{q\in S} f(T_q(S)).$$

【离散随机性过程】 决策q的结果不是确定一个变换，而是考虑某一变换按概率分布规律概率地确定的情形. 现在，设处于状态p时，已取决策为 q. 这时其结果使系统的状态在 $(z, z+dz)$ 之间的概率以 $dG_q(p,z)$ 表示. 设z的分布函数 $G_q(p, z)$ 为已知. 再设，作为它的结果，在进行下一步的决策之前，成为怎样的新状态z也是已知的. 这样引入概率分布的场合，往往会提出收益期望值的问题. 与离散确定性过程的情形相同，设目标函数为最终阶段状态的收益，则最优策略是使这个值为最大. 于是，同样地，可得下列函数方程：

$$f_k(p)=\max_{q\in S}\int_{z\in D} f_{k-1}(z)dG_q(p, z),$$
$$N\geqslant k\geqslant 2,$$

$$f_1(p)=\max_{q\in S}\int_{z\in D} R(z)dG_q(p, z).$$

关于无限阶段，则有

$$f(p)=\max_{q\in S}\int_{z\in D}f(z)dG_q(p,z).$$

【连续确定性过程】 在某一连续统的各点选择决策并考虑上述决策过程时，若限于确定性的情形，则往往是变分法的问题．例示处理这种情形的动态规划的要点，从 $0\leqslant t\leqslant T$ 的初始时刻 0 开始，设终止时刻为 T，若假定关于其间的所有时刻 t 都可以进行决策，如果试图应用前述的最优化原理，则可预料如下的函数方程成立：

$$f(p;t+s)=\sup_{D\in[0,s]}f(p_D;t),$$

这里设 $f(p,t)$ 为从初始状态 p 出发，采用最优策略，在区间 $[0,t]$ 上所得的收益．上式右边的意思是，以D表示在区间 $[0,s]$ 上任意一个可能的策略，以 p_D 表示初始状态为 p 时采用策略D的结果状态．根据最优化原理，可以将区间 $[0,t+s]$ 分成 $[0,t]$ 和 $[t,t+s]$，设对前一区间采用策略D的结果状态 p_D 作为后一区间的起始状态，则在后一个长为 s 的区间上采用最优策略的收益为 $f(p_D;t)$．于是，应用最优化原理，对一切可能的D的选择就以关于 $D\in[0,s]$ 取 sup 来表示．对导出这一函数方程有关的条件在此不拟叙述．但是下面一点是应该注意的．那就是，当自治系统的常微分方程解的唯一性得以保持时成立的半群性质，即初始点为 $x(0)=c$ 时以

$$x(t)=f(c,t)$$

表示解，此时类似于

$$f(c,s+t)=f(f(c,s),t)$$

的关系成立．

在动态规划中，必须求解这样导出的函数方程．但问题不仅在于了解关于解的存在性与唯一性的一般定理，而且现实情况是要按照各个具体问题寻求特殊的独创方法．应该看到，动态规划的理论开拓了五十年代以前未曾见过的函数方程理论中的新领域．

1) **多阶段分配过程** (multistage allocation process)．将所给数量为 $x>0$ 的物资分成 y 及 $x-y$ 两部分，前者派作用途 A 的收益为 $g(y)$，后者派作用途 B 的收益为 $h(x-y)$，因此计得收益为 $g(y)+h(x-y)$．但是派这样的用处消耗掉物资的一部分，设多余的物资还有 $ay+b(x-y)$．这里 $0<a,b<1$ 且设 a,b 为常数．这些多余的物资再按某一比例分配使用于 A,B 这两种用途．这样经过有限次或无限次反复分配使用，要使各阶段所得收益的合计即总收益为最大，怎样的策略为最优？

对于无限阶段过程的情形，由最优策略所得的总收益若设为 $f(x)$，则有

$$f(x)=\sup_{0\leqslant y\leqslant x}[g(y)+h(x-y)+f(ay+b(x-y))].$$

2) **多阶段选择过程** (multistage choice process)．要开采储量为 x 的金矿 A 和储量为 y 的金矿 B，但采掘机只有一台．若开采 A，则采得储量的 r_1 倍 $(0<r_1<1)$ 且机台还能进一步使用的概率为 p_1，而其余的 $1-p_1$ 为机台不能使用或采掘量为 0 的概率．同样，若开采 B，则可设采掘率为 r_2，且概率 p_2，$1-p_2$ 具有相同的意义．这时，要使直至机台不能再使用为止采掘所得的金矿量为最大，应当怎样地逐次决定 A，B 的选择？这个问题是离散随机过程．若设应用最优策略时的采掘量期望值为 $f(x,y)$，则在 $x,y\geqslant 0$ 的范围内，如下的函数方程成立：

$$f(x,y)=\max\{p_1(r_1x+f((1-r_1)x,y)),\ p_2(r_2y+f(x,(1-r_2)y))\}.$$

这时，最优策略成为下述形式：若是

$$p_1r_1x/(1-p_1)>p_2r_2y/(1-p_2),$$

则选择 A；如果不等号的方向相反，则选择 B．若等号成立，则 A，B 无论选择哪个都行．这一条件是由 (x,y) 的位置所决定的．但在作出那样的决策之后，或许机台已是不能使用也未可知．在机台能够使用时，从 (x,y) 状态转移到一个新的状态．于是，下一阶段的选择按照上述的准则而决定．

【Марков 型决策过程】 设 N 个状态 S_1，$S_2,\cdots,S_N$ 之间的$N\times N$转移概率矩阵

$$(p_{ij}(q))\ (i,j=1,2,\cdots,N)$$

依赖于参变量 q，但与时刻 $n(n=1, 2, \cdots)$ 无关. 在各时刻要使处于 S_1 这一特定状态的概率为最大而对参变量 q 之值进行选择. 若设过程为与已往的历经途径无关的 Марков 型的,则问题就是选择如下的 $q^*=q^*(n)$，使得

$$y_1(n+1)=\max_q\left(\sum_{i=1}^N y_i(n)p_{i1}(q)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^N y_i(n)p_{i1}(q^*),$$

$$y_j(n+1)=\sum_{i=1}^N y_i(n)p_{ij}(q^*),$$

$$j=2, 3, \cdots, N.$$

关于连续时间 t 也有类似的问题. 无论离散的或连续的,这样的问题统称为 **Марков 型决策过程** (Markovian decision process). 这在动态规划中也曾由 Bellman 讨论过. R. A. Howard 还讨论过伴有报酬的 Марков 型决策过程. 即对于各个状态 i，有 k 个可能的选择 1, 2, ⋯ k，其中若选择 h，则转移概率确定为 p_{ij}^h，在变为 j 状态时,则获得报酬 r_{ij}^h. 这里设 k 为有限，并设 i 一般是表示不同的状态. 现在若设 $v_i(n)=$(在从状态 i 开始的 n 阶段 Марков 型决策过程中采用最优策略所得到的总期望收益),则由动态规划中的最优化原理而得

$$v_i(n+1)=\max_h\left(\sum_{j=1}^N p_{ij}^h(r_{ij}^h+v_j(n))\right).$$

若设初始状态为 i 时，在 n 阶段过程中的选择为 $d_i(n)$，则一旦给出在 $n=0$ 处的边界条件，就可以由上面的函数方程逐次地确定 $d_i(n)$. 这样，以收益函数 $v_i(n)$ 为目标而逐次递推求解的方法称为收益值迭代法. 关于这一方法，包含有确定收益值的运算，策略改进程序以及迭代循环. 这由 R. A. Howard 给出之后，又有 D. H. Blackwell 等人严格地证明了收敛性定理.

【动态规划与变分法】 多阶段决策过程若为连续型，则动态规划从来就与变分法处理的问题具有某些共同之处. 例如,当函数 $y(t)$ 与 $x(t)$ 之间存在着条件

$$dx(t)/dt=h(x(t),y(t)),\ x(0)=c$$

时,对于求控制函数 $y(t)$ 使泛函

$$J(y)=\int_0^T g(x(t),\ y(t))dt$$

为最小的问题,譬如在

$$|y(t)|\leqslant m<\infty$$

(m 为某一常数) 这个约束条件下求解的问题，若设上述这样的函数 y 的所属区域为 $D(0,T)$，令

$$f(c,\ T)=\max_{y\in D}\int_0^T g(x,y)dt,$$

那么,由最优化原理得

$$f(c,T)=\max_{y\in D(0,s)}\left(\int_0^s g(x,y)dt + f(x(s),\ T-s)\right).$$

由此,令 $y(0)=y_0$，当 $s\to 0$ 时,则推得

$$\partial f/\partial T=\max_{y_0}(g(c,\ y_0)+(\partial f/\partial c)h(c,\ y_0)).$$

这与变分法中的 Euler 微分方程有着密切的关系. 另一方面动态规划的原理可以用来将变分法问题重新归结为多阶段决策过程，并对之应用动态规划的函数方程求解.

【动态规划和最大值原理】 一般地说，在最优控制理论中动态规划方法具有比最大值原理更为普遍适用的特征. 然而,与后者相比,这一方法缺少严格的逻辑基础. 最近，V. G. Boltyanskii ([6]) 提出过动态规划方法的论证.考虑下面的最优问题:

设 $f_i(x,u)(i=0, 1,\cdots,n)$ 为对 $x\in V\subset \boldsymbol{R}^n$ 及 $u\in U\subset \boldsymbol{R}^r$ 定义的函数,其中 V 是开集，f_i 关于变量在 $V\times U$ 上连续可微. 设 x^0, x^1 是 V 中的两个给定点. 在按照

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x,\ u(t)),\ i=1,\cdots,n$$

的规律运动的相点从 $x^0=x(t_0)$ 转移到

$$x^1=x(t_1)$$

的所有的逐段连续的控制

$$u(t)=(u_1(t),\ \cdots,\ u_r(t))\in U$$

中,求这样的控制 $u(t)$，对它泛函

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),u(t))dx$$

取最小值.

如果一个连续函数 $\omega(x)=\omega(x_1,\cdots,x_n)$ 对于一点 $a\in V$ 具有下述性质，则称为 **Bellman 函数**：(1) $\omega(a)=0$；(2) 在V中存在闭集 M ($\omega(x)$ 的奇点集),它不含内点且使得函数 $\omega(x)$ 在集 $V-M$ 上是连续可微的，并满足条件

$$\sup_{u\in U}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\omega}{\partial x_i}f_i(x,u)-f_0(x,u)\right)=0,$$

$$x\in V-M.$$

下面的定理给出一个最优性充分条件.

定理：假定对在区域 $V\subset\boldsymbol{R}^n$ 中给定的

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u(t)),$$

存在一个关于点 $a\in V$ 的 Bellman 函数 $\omega(x)$ 且具有逐段光滑的奇集. 再假定对任一点 $x^0\in V$, 存在一个控制 $u(t)$ 将相点从 $x^0=x(t_0)$ 转移到 $x^1=a=x(t_1)$ 并且满足关系式

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),u(t))dt=-\omega(x^0),$$

则这样一个控制 $u(t)$ 在V中是最优的.

通过以上诸例说明，动态规划方法的特征是：1) 与计算一切可能的策略的穷举法相比，能降低维数；2) 若对变量的取值范围有所限制，能够求得用微积分方法难以求得的最大值和最小值；3) 即使所给函数不是以解析形式表示的,也可以递归地求得数值解；4) 用古典的方法不能处理的一些问题可以容易表述，特别对于二点边值问题以及隐变分问题的解决是有力的；5) 数学规划的许多问题可以表述为动态规划. 特别关于 5)，对库存管理、生产计划或最优搜索等,都提供了有效的方法；还有,在控制理论†中,关于最优控制，自适应控制等问题,动态规划也给出了极为有效的方法.

【参】 [1] R. Bellman, Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957; [2] R. Bellman, Applied dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1962; [3] R. Bellman, Adaptive control processes, A guided tour, Princeton Univ. Press, 1961; [4] S. M. Roberts, Dynamic programming in chemical engineering and process control, Academic Press, 1964; [5] G. Leitman, Optimization techniques with applications to aerospace systems, Academic Press, 1962; [6] V. G. Boltyanskii, Sufficient conditions for optimality and the justification of the dynamic programming method, SIAM J. Control, **4** (1966), 326—361.

对策论 [英 theory of games 法 théorie des jeux 德 Theorie der Gesellschaftsspiele 俄 теория игр 日 ゲームの理論] 【历史】 目前，**对策论**是指研究社会现象的特定的数学方法，在 J. von Neumann 的初期成果([6]),以及他同 O. Morgenstern 的合著([7])的直接或间接影响下，正在出现显著的进展. 对策论的基本思想，就是在分析多数个主体之间的利害关系时,重视在各种室内游戏(围棋,象棋,玩扑克牌等)中的竞赛者之间的讨价还价，交涉，结伙，利益分配等行为方式的类似性. 大致已达到完善地步的不过是最简单情形的**二人零和对策**(zero-sum two-person game) 的理论. 关于一般的 ***n* 人对策** (n-person game), 自 von Neumann 和 Morgenstern ([7]) 以来提出过各种求解的途径,但还没有确立统一的理论. 然而，对策论给予数理经济学和其它社会科学以很大的影响,特别是在这些科学领域中拓扑学、代数学方法的得到积极应用. 作为基本的研究方向，有**非合作对策** (non-cooperative game) 与**合作对策** (cooperative game) 的各种理论，尚未解决的问题也很多,但今后的研究主流,看来是后者.

【n 人非合作对策论】 集合

$$X_i(i=1,\cdots,n)$$

与在直积

$$\prod_{i=1}^{n} X_i$$

上定义的实值函数

$$K_i(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_n)\ (i=1,\cdots,n)$$

的组对 $\{K_i, X_i\}$ $(i=1,\cdots,n)$ 称为**标准型** (normalized form) n 人对策. K_i, X_i, $x_i(x_i\in X_i)$ 分别称为竞赛者 i 的**支付函数** (pay-off function)，**策略空间** (strategy space) 和**策略** (strategy). 如果

$$\sum_{i=1}^{n} K_i(x_1, \cdots, x_n) = c$$

是常数，则称为**常和对策** (constant-sum game)，特别当 $c = 0$ 时，称为**零和对策** (zero-sum game). 在各竞赛者选择策略之际，当不允许竞赛者之间结伙时，称为非合作对策，当允许这样做时，称为合作对策.

非合作对策的基本理论比较简单，可以在 J. Nash 提出的**平衡点** (equilibrium point) 的概念([5])上统一. 对各个 i 使

$$K_i(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_{i-1}, \hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, \cdots, \hat{x}_n) \geqslant K_i(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_{i-1}, x_i, \hat{x}_{i+1}, \cdots, \hat{x}_n),$$

对所有的 $x_i \in X_i$ 成立的策略组合

$$(\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, \hat{x}_n)$$

称为平衡点. 这一概念的萌芽已见于不完全竞争理论的先驱者 A. Cournot 的著作 ([15]).

关于二人零和对策的 von Neumann **鞍点定理** (saddle point theorem) ([7])，相当于 X_1, X_2 为 Euclid 空间内的单形，K_1, K_2 为双线性型，且恒等关系

$$K_1(x_1, x_2) + K_2(x_1, x_2) = 0$$

成立这种最简情形下的平衡点存在定理. 这种场合的平衡点 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ 与**鞍点** (saddle point)，即满足

$$K_1(x_1, \hat{x}_2) \leqslant K_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \leqslant K_1(\hat{x}_1, x_2);$$
$$x_1 \in X_1, \quad x_2 \in X_2$$

的点组是同一个概念. 因为鞍点的存在与等式

$$\max_{x_1 \in X_1} \min_{x_2 \in X_2} K_1(x_1, x_2) = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} K_1(x_1, x_2)$$

的成立是等价的，所以也称鞍点定理为**最小最大定理** (minimax theorem). 在最小最大定理成立的情形，就称二人零和对策是**严格确定的** (strictly determined). 对于这种情形，设计了实际求得鞍点的各种数值算法(例如，线性规划的单形法→线性规划).

如设 M, N 分别为含有 m, n 个元素的有限策略集，且第一个竞赛者的支付函数为

$$a(i, j) = a_{ij} (i \in M, j \in N),$$

则一般地不能保证鞍点的存在. 然而，如果各个竞赛者各自利用策略集 M, N 上的概率分布 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ $(x_i \geqslant 0, \sum x_i = 1)$，

$$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) (y_j \geqslant 0, \sum y_j = 1)$$

作为广义策略，并以在这样的广义策略之全体 X, Y 上的支付的期望值

$$K(x, y) = \sum a_{ij} x_i y_j$$

为新的支付函数而展开对局，则鞍点存在. 这是上述的 von Neumann 鞍点定理的概率论的解释. 将一些策略概率地混合使用的上述广义策略称为**混合策略** (mixed strategy). 特殊地，当混合策略为一点分布时，称之为**纯策略** (pure strategy).

作为一般对策的平衡点存在定理的典型情形是，若设 X_i 为紧凸集，K_i 连续，而且对于任意固定的 $x_j \in X_j (j \neq i)$ 使

$$K_i(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$$

为最大的 x_i 的集合为凸，则利用角谷不动点定理*([3])以及它在局部凸线性拓扑空间的推广(→不动点定理)，可以证明平衡点的存在.

【n 人合作对策论】 对竞赛者的集合

$$N = \{1, 2, \cdots, n\}$$

的任意的子集 $S \subset N$ 定义的实数值集函数 $v(S)$，若它满足 i) $v(\phi) = 0$，ii) 超加性条件：当 $S, T \subset N$，且 $S \cap T = \varnothing$ 时

$$v(S \cup T) \geqslant v(S) + v(T),$$

则称之为 n 人合作对策的**特征函数** (characteristic function). 当对策被表述为标准型时，在适当的条件下能够由支付函数与策略空间构成特征函数. $v(S)$ 表示由属于 S 的各竞赛者的结伙而可以确保的，S 全体成员的总得益. 设给竞赛者 i 的得益最终分配值为 α_i，则满足

i) $\alpha_i \geqslant v(\{i\})$,

以及

ii) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N)$

的向量 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 被称为这一对策的**分配** (imputation). 在此分配之中，除了由对策的规则所决定的得益和支付之外，还包含着由结伙带来的**旁支付** (side payment). 对于两个分配 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，若集合 $S \subset N$ 存在，且使得

$$1)\ v(S) \geqslant \sum_{i \in S} \alpha_i,\ 2)\ \alpha_i > \beta_i$$

(对所有的 $i \in S$)成立，则称 α **优势** (dominate) 于 β. 根据优势的概念，可以在全体分配的集合 I 里引入非传递的二元关系. I 的一个子集，对于这一关系满足适当条件者，看着是**合作对策的解** (solution of cooperative game). 至于作为解的特征的条件，除了 von Neumann-Morgenstern 形式的条件之外，还提出了其他的一些条件，但目前尚没有充分满意的条件. 就此而言，n 人合作对策的理论远未达到充分系统化的地步. 以下列举有代表性的二种情形的求解.

分配的集合 P 满足如下的条件 i), ii) 时，就称它为 **von Neumann-Morgenstern 解**: i) 在任意的二元素 $\alpha, \beta \in P$ 之间不存在优势关系; ii) 对于任意的 $\gamma \notin P$, 在 P 内有优势于 γ 的元 α 存在. 另一方面，无论根据怎样的分配都不产生优势于所有的分配的集合 C 时，则称 C 为合作对策的**核心** (core). 根据定义得，

$$C = \left\{\alpha \mid \sum_{i \in S} \alpha_i \geqslant v(S)(\text{对所有的} S \subset N)\right\}.$$

关于 P, C 的存在还不知道有一般的定理. 在存在的情况下，P 一般不是唯一的，而 C 是唯一的，任意的 P 必定包含 C. 核心这一概念是由 D. B. Gillies 与 L. S. Shapley 引进的.

核心是线性不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant v(N),$$

$$\sum_{i \in S} a_i \geqslant v(S)\ (\forall S \subset N)$$

之解的集合，它的性质是熟知的，而且可以由线性规划的方法进行研究.

从早期关于 von Neumann-Morgenstern 解的研究中，曾经猜测过可能对所有对策都存在这样的解. 但是，这一猜测最后被否定了，因为 W. F. Lucas ([16]) 发现一个十人对策，对之不存在这样的解.

另外，还有把满足适当条件的分配的特定结果看成是合作对策之值的思想. 在这一方向上，有代表性的是 **Shapley 值** (Shapley value) ([9] vol. II, 论文 17). 对于 N 上的超加性的集函数(特征函数) $v(S), w(S), \cdots$ 定义取值为 n 维线性空间之点的泛函

$$\eta(v) = (\eta_1(v), \cdots, \eta_n(v)),$$

当它满足如下的条件 i), ii), iii) 时，称为 Shapley 值: i) $\eta_{\pi i}(\pi v) = \eta_i(v)$;

$$\text{ii)}\ \sum_{i \in N} \eta_i(v) = v(N);$$

$$\text{iii)}\ \eta(v + w) = \eta(v) + \eta(w).$$

这里，π 是 N 中元的任意置换，而且

$$\pi v(S) = v(\pi S).$$

Shapley 值由条件 i), ii), iii) 唯一地确定如下:

$$\eta_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{(s-1)!\,(n-s)!}{n!} \times (v(S) - v(S - \{i\})),$$

其中 s 是 S 中元的个数，求和是关于包含 i 的所有 S 进行的. $\eta_i(v)$ 是一个分配. 再者，$\eta_i(v)$ 可以有概率论的解释. 设肯定出现包含第 i 个竞赛者在内的某一个合作，其成员数目为 s (即由 s 个竞赛者所组成)的概率，对于各个 $s = 1, \cdots, n$ 均为 $1/n$, 且若设成员数目相等的二个结伙产生的概率相等，则 $\eta_i(v)$ 就等于 i 对结伙 S 的限界贡献

$$v(S) - v(S - \{i\})$$

在这一概率分布下的期望值.

合作对策的理论围绕着上例所始的各种解的性质的研究不断获得进展. 特征函数，分配，优势，旁支付这些概念，虽以竞赛者之间可转移的 (transferable) 价值测度的存在为前提，但考虑到对经济理论等的应用，最近几年由 R. J. Aumann 和 B. Peleg ([17]) 等提出了对不存在共同价值测度的情形进行考察与这些概念相对应的概念，并且按同样方式发展了相应的理论.

【对策的扩充型】 连室内游戏的结构都能加以公式化的有**扩充型** (extensive form) 对策. 室内游戏可以看成是由竞赛者从多数个对象之中直接地或(通过掷骰子，轮盘赌等)概率地进行选择的**步着** (move) 所组成的半序集，以**对**

策树 (tree of a game) 表示之. 对策树的分枝点表示步着,并指定着是哪一个竞赛者的步着. 从最下端的分枝点顺次向上方的分枝点前进直至最上端的一点(不含有循环)的一条通路就表示这一室内游戏的具体的一次经过, 称它为**一局** (play). 在一局中, 各个竞赛者的得分是确定的. 对上述扩充型对策引进策略的概念, 可以将扩充型对策变换为标准型对策. 扩充型对策的理论,应归于 von Neumann 和 Morgenstern ([7] chap. II), H. W. Kuhn ([9] vol. II, 论文 11).

【对数理经济学的应用】 经济理论中的数学研究方法, 大致分为以定性的研究为目标的纯粹理论与以实证的、统计的研究为目标的**计量经济学** (econometrics). 前者称为**数理经济学** (mathematical economics). 从历史上来看, 数理经济学源出于 A. Cournot (1801—77) 的研究工作, 由 L. Walras, (1834—1910) 的一般平衡理论形成体系, 但数理经济学的正式确立则是在本世纪四十年代之后, 特别是在第二次世界大战以后. 它无论在思想上和方法上, 受对策论的直接与间接的影响是显著的. 关于典型的数理经济学问题列举数例如下.

Walras 的一般平衡论是以**完全竞争经济** (competitive economy) 的分析为主要内容的.考虑包括大量的财货;消费者(家计), 生产者(企业)的经济. 这时, 如果有适当的价格体系(财货的交换比率) 存在, 并且在这种价格体系之下, 各主体作为价格接受者 (price-taker) 进行活动,那末就能实现给消费者带来最大效用,给生产者带来最大利润, 而且能使财货的供需达到一致的**完全竞争平衡**(competitive equilibrium) 的状态. 这一命题被称为**竞争平衡的存在定理** (existence theorem of competitive equilibrium), 是由 Walras 猜测性地提出的,直至半个世纪后的五十年代才在数学上得到证明. 证明的依据是角谷的不动点定理 (例如见[2]). 完全竞争经济的模型大体上与非合作对策相接近.

此外,Walras 还通过一旦需求超过供给,则其财货的价格要上涨,反之,则价格会下跌这样的价格变动方式, 预料到经济最终将向竞争平衡状态收敛, 并且发展了**探索** (法 tâtonnement) 理论, 这一理论现在作为 n 个变量的常微分方程组的解的全局性稳定问题而得到研究. 表述探索过程的微分方程由于其经济学的制约而具有数学上的特殊性质, 因此以这一特殊性质为基础,论证了竞争平衡解的收敛性. 在这方面的研究中, K. Arrow, H. Block 和 L. Hurwicz 的结果是有划时代意义的([1]).

完全竞争的概念, 是以在包含多数主体的经济中, 各主体对于整个经济体系的影响作用是很小的这样一个古典的思想为基础的, 在这一点上有兴趣的是用对策论方法对它进行处理的尝试. 若将国民经济视为合作对策, 则竞争平衡解属于前述的核心. 用适当的方法让主体的数量增至无限大时, 此核心收敛于仅由竞争平衡解组成的集合, 这个结果已被 H. Scarf, G. Debreu 等人证明. 另一方面, 利用测度†论的概念将一开始就包含无限个主体的经济公式化, 证明其核心仅由竞争均衡解组成的, 有 R. J. Aumann, K. Vind 等人的研究工作. 此外,作为合作对策形式的国民经济的 Shapley 值随着主体数的增大而收敛于竞争平衡解也得到了讨论.

应用简单的线性模型讨论国民经济的静态平衡和动态变动的, 有产业关联论, 线性规划 (→线性规划). 如象经济成长, 资本积累等的真正的动态问题最近也正在成为活跃的数学方面的分析对象. 在这一方向上的研究, 有论及最优经济成长过程对平衡成长过程时偏移的**盘旋定理** (turnpike theorem) (在[4]中有恰当的解说) 还有涉及整个周期的效用使积分为最大的成长过程的变分法的研究,这同 Л. С. Понтрягин 的最优控制理论 ([8]) 也在联系着.

【参】 [1] K. J. Arrow-H. D. Block-L. Hurwicz, On the stability of the competitive equilibrium II, Econometrica, **27** (1959); 82—109; [2] G. Debreu, Theory of value, John Wiley, 1959; [3] S. Kakutani (角谷静夫), A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. J., **8** (1941), 457—459; [4] T. C. Koopmans, Economic growth at a maximal rate, Quart. J. Economics, **78**(1964), 355—394; [5] J. Nash, Noncoo-

perative games, Ann. of Math., **54** (1951), 286—295; [6] J. von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Math. Ann., **100** (1928), 295—320; [7] J. von Neumann-O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 1944; [8] Л. С. Понтрягин-В. Г. Болтянский-Р. В. Гамкрелидзе-Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, физматгиз, 1961 (英译本: L. S. Pontryagin-V. G. Boltyanskii-R. V. Gamkrelidze-E. F. Mishchenko, The mathematical theory of optimal processes, Interscience, 1962;日译本: 最適過程の数学的理論,総合図書, 1967); [9] Contributions to the theory of games I, II, III, IV, Ann. Math. Studies, nos. 24, 28, 39, 40, Princeton Univ. Press, 1950, 1953, 1957, 1959; [10] M. Dresher-L. S. Shapley-A. W. Tucker (eds.), Advances in game theory, Ann. Math. Studies, no. 52, Princeton Univ. Press, 1964; [11] 宫沢光一, ゲームの 理論,岩波講座现代応用数学,岩波, 1958 (中译本: 宫泽光一,现代应用数学丛书,博奕论,上海科学技术出版社,1963); [12] M. Shubik (ed.), Game theory and related approaches to social behavior, John Wiley, 1964; [13] J. C. C. Mckinsey, Introduction to the theory of games, McGraw-Hill. 1952; [14] R. P. Isaacs, Differential games, John Wiley, 1965; [15] A. A. Cournot, Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. L. Hachette, 1838; (英译本: Researches into the mathematical principles of the theory of wealth, Macmillan, 1929); [16] W. F. Lucas, The proof that a game may not have a solution, Trans. Amer. Math. Soc., **137**(1969), 219—229; [17] R. J. Aumann-B. Peleg, Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960), 173-179。

排队论 [英 queuing theory 法 théorie des attentes 德 Warteproblem 俄 теория очередей, теория массового обслуживания 日 待合せの理論] 譬如，当旅客到售票处购买火车票时，如果前面已有旅客,就要按次序排队等候.又如市内电话,由于线路占满,会在拨号过程中出现忙音,而不得不等待重拨. 这种拥挤,在营业窗口或电话线路空暇时也会出现，而在顾客集中来到或者长时间占用窗口或线路的顾客较多，也就是说,来到和离去的时间有随机波动时,就成为一种不可避免的现象了. 在许多实际问题中，希望尽可能地减少这种拥挤. 特别，对于电话线路的设计，还必须预测这种拥挤的程度,因而从 1910 年左右开始，对这种现象进行概率论的分析和研究就以话务理论的名称开展起来了. 近期,随着运筹学†的发展，逐渐注意到除电话通信以外的其他领域中所产生的类似问题,与此相应,或则添加或则放松各种约束条件,做了大量的研究,形成了所谓**排队论**的专门理论.

【问题的公式化】 按到达的先后次序对顾客编号，设第 i 个顾客于时刻 τ_i 到达，并等待 w_i 时间，接着在窗口受到服务 s_i 时间之后离去. 在后，也将涉及成批到达或成批服务的情形，但这里暂且假定顾客是单个行动的. $\{\tau_i\}$ 形成一个随机过程†,通常所处理的是

$$\tau_{i+1} - \tau_i = g_i (i = 1, 2, \cdots)$$

为相互独立且服从同一分布 $F(x)$ 的随机变量序列的情形. 设 $\{s_i\}$ 也是相互独立且服从同一分布 $G(x)$ 的随机变量序列. 令在时刻 t 时正被服务和正在排队等待的顾客的总数为 $\xi(t)$，则当且仅当 $F(x)$，$G(x)$ 同为指数分布†时，$\xi(t)$ 才为一 Марков 链†(特别是生灭过程†)，在 $F(x)$ 是指数分布的情形也就是 $\{\tau_i\}$ 为 Poisson 过程†的情形，由于它不仅符合通常出现的最易引起拥挤和排队的实例，而且很多实际情形都能通过它来给出适合的表述，再加之数学上处理的方便，所以人们对这种情形进行了相当深入的研究.

当 $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ 是相互独立且服从相同指数分布的随机变量时，

$$\sum_{i=1}^{k} X_i$$

服从自由度为 $2k$ 的 χ^2 分布†，在排队论中，特别称此分布为 k 阶 **Erlang 分布** (Erlang's distribution). 当 $F(x)$ 或 $G(x)$ 或二者均为 Erlang 分布时，可将到达和服务都分成 k 个假想的窗口（称此为**相** (phase)），每个顾客顺次耗用 X_i 的时间通过各相，若以相作为单位来计数，则 $\xi(t)$ 为一生灭过程. 这一考虑还能进而推广到混合型 Erlang 分布,因此，在原则上可用这种方法来处理相当一般的分布. 但由于计算上的复杂性激剧增大，从而在实用上并不是那么有效（[14]，[22]）.

当 $G(x)$ 为指数分布时，$\{\xi(\tau_i - 0)\}$ 为一 Марков 链；当 $F(x)$ 为指数分布时，若关注于服务结束的时刻 $\{t_i\}$，则 $\{\xi(t_i + 0)\}$ 为一 Марков 链（单服务台情形）. 这样的 Ma-

рков 链一般被称为嵌入 Марков 链 (imbedded Markov chain). 由于根据这一分析所得的结论与根据 $\xi(t)$ 本身的分析所得的结论,在反映现实问题上非常接近,因此,对于这种 Марков 链进行研讨的方法也被广泛地应用.这是从 D. G. Kendall 开始的 ([7]).

如果考虑的并不是象 $\xi(t)$ 这样的顾客总数,而是等待时间 w_i,则只有一个窗口时,可得递推关系

$$w_{i+1} = \max\ (0,\ w_i + s_i - g_i).$$

以这一等待时间所具有的 Марков 性质为基础的分析也是有效的,这里有两边取特征函数[†]引进函数论讨论的方法 (F. Pollaczek, [13]),以及从概率论的角度归结出积分方程的方法 ([10], [16], [8], [4]) 等.

可以采用类似于嵌入 Марков 过程的方法来处理 w_i,因为此时考察的只是一些特定时刻. 但反过来,也可以添加辅助变量于 $\xi(t)$ 过程来构造出一个 Марков 过程 ([5] 等). 就是说,在有 c 个窗口的情形,同 $\xi(t)$ 一起考虑在时刻 t 正被服务的顾客从服务开始到 t 为止所经过的时间 $\eta_j(t)\ (j = 1, 2, \cdots, c)$ 以及

$$\zeta(t) = t - \tau_r\ (\text{此处}\ \tau_r \leqslant t < \tau_{r+1}),$$

若将 $(\xi(t), \zeta(t),\ \eta_1(t), \cdots,\ \eta_c(t))$ 看作是相空间内的一点,这就成为一个 Марков 过程. 因此,从这一观点出发,只要没有特殊的约束条件,就可以把一般的排队过程归结为 Марков 过程,这样,就能以 Chapmann-Колмогоров 方程[†]等为线索进行 Марков 过程的分析. 然而,由于它的复杂性,在目前情况下作为一般的解法很难说是成功的. 作为这一流派的成果,虽然时期上较为陈旧, L. Takács 引进的虚等待时间 (virtual waiting time) ([19]),和 V. E. Beneš 对一般到达模型的处理([1])等应该受到注意. 还有,在 Kendall 的综合报告中,关于上述诸点也阐述过极富于启发性的见解 ([24]). 而 J. F. C. Kingman ([29]) 则统一了本节所述的几种方法.

【Kendall 记号】 所谓**多窗口的排队系统** (queuing system with many servers),是指各个窗口无论对哪个顾客都可以提供同样效果的服务,而且所有顾客仅排成一个公共队伍的情形. 于是,不论哪个窗口有空,按顺序轮到的下一个顾客就立即到窗口接受服务. 这种情形,比起在各个窗口前面分别排队的情形所引起的拥挤程度要小些,因此在实用上是不可忽视的特点,同时,由于数学处理上也出现颇为不同的状况,所以,窗口数目的确定就成为排队问题数学表述的不可欠缺的条件. 当然,具体地假定 $F(x)$, $G(x)$ 为怎样的分布也是重要的条件,因此 Kendall 为了简单地表示出排队模型,引入了 $F/G/c$ 这样的记号([7]),称之为 **Kendall 记号** (Kendall's notation). 这里,c 表示窗口数,当它是特别指定的数时,就写上那一数字. F, G 分别表示到达间隔与服务时间的分布,并根据具体场合所用到的分布类型,采取如下的一些记号: M = 指数分布, D = 单位分布, E_k = k 阶 Erlang 分布, $\Gamma = \Gamma$ 分布, G = 一般分布,等等. 其中 G 表示没有确指特定的分布类型的场合. 另外,当 $\{g_i\}$ 独立时,写成 GI. 这种记号也有在进一步推广的形式下被使用的 ([18], [22], [23]).

【瞬时解与遍历条件】 对 $M/M/1$ 的情形, $P(\xi(t) = n) = p_n(t)$ 满足如下的微分差分方程:

$$(1)\qquad \begin{aligned} p_0'(t) &= -\rho p_0(t) + p_1(t), \\ p_n'(t) &= \rho p_{n-1}(t) - (1+\rho)p_n(t) \\ &\quad + p_{n+1}(t),\ n \geqslant 1, \end{aligned}$$

其中, $E(g_n) = 1/\rho$, $E(s_n) = 1$. 在初始条件 $p_n(0) = \delta_{nm}$ 之下,方程 (1) 的解是

$$(2)\qquad p_n(t) = e^{-(1+\rho)}\rho^{(n-m)/2} \times\Big(I_{n-m}(2t\sqrt{\rho}) + \rho^{-1/2}I_{n+m+1}(2t\sqrt{\rho}) + (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{-(k+1)/2}I_{m+n+k+1}(2t\sqrt{\rho})\Big),$$

([14], [22], [23]) 此处 $I_k(x)$ 为第一类修正 Bessel 函数(→公式 19). 象(2)这样对任意的 $t > 0$ 解出的解称为**瞬时解** (transient solution). 当

$$\lim_{t\to\infty} P(\xi(t) = n \mid \xi(0) = m) = p_n$$

存在且与初始条件无关时，$\{p_n\}$ 称为**平衡分布** (equilibrium distribution) 或**稳态分布** (steady distribution)． 由于瞬时解对于通常的应用反而不便，且一般难以求得，所以普遍的作法是求出平衡分布来使用．使得平衡分布存在的条件称为**遍历条件** (ergodic condition)． 对于上述 $M/M/1$ 的情形，当且仅当 $\rho < 1$ 时，平衡分布存在，即为

$$p_n = (1-\rho)\rho^n, n \geqslant 0.$$

一般地，在 $GI/G/s$ 之情形，除概率为 1，$sg_n = s_n =$ 常数的情形外，$sE(g_n) > E(s_n)$ 是使平衡分布存在的充分必要条件 (J. Kiefer-J. Wolfowitz [8])． R. M. Loynes ([27]) 还将讨论推广到了 $\{\tau_i\}$，$\{s_i\}$ 均为严格平稳的情形．

【各种排队模型】 在许多实际情形，有必要对 Kendall 记号所指出的三项条件进一步附加一些别的条件，以便正确地反映现实．随着应用范围的日趋广泛，这些附加条件也逐渐增多． 现有研究中有代表性的条件是：1) 服务的次序，2) 窗口的设置，3) 顾客成批行动的方式，4) 排队方式与等待方式，5) 特殊性服务，6) 关于到达顾客总数和等待空间大小的限制等． 一般称这样的条件为**排队规则** (queuing discipline)． (狭义情形下，仅指第 1) 项)以下，对于这些条件的每一项给以扼要的说明([22]，[9]，[2]，[23])．

1) **次序** (order)． 只要没有特别说明，总是规定为先来先服务，但是，也考虑给予某类顾客以优先权的情形，或者服务者从排队等待的顾客中等概率地选出一人进行服务的情形 (随机选取)等． 这类模型在电话等领域中应用的实例很多，只要问题是着眼于 $\xi(t)$ 等人数指标，它们在原则上与先来先服务的场合并无不同．但是寻求 w_n 的分布却是这类模型中值得关心的重要问题．

2) **设置** (arrangement)． 窗口排列成串联的形式，顾客从第 i 级窗口出来，就立刻到达第 $i+1$ 级，这种类型的排队称为**串联排队** (tandem queue)． 如果在后级窗口前的等待空间有限，就会发生在前级窗口处服务结束但顾客无法离开的现象． 这一现象称为**阻滞** (blocking)． 各级窗口都只有一个，且在它前面的等待空间不予限制的情形下，遍历条件为

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant \nu} (E(s_n^j)) < E(g_n)$$

(J. Sacks [15])，其中，s_n^j 表示第 n 个顾客在第 j 级($j=1, 2, \cdots, \nu$)中的服务时间．在有阻滞现象的情形，铃木武次证明了：当 $\nu=2$，同时，在第二级前没有等待空间时的遍历条件能以 $E(\max_j s_n^j) < E(g_n)$ 给出 ([17])． 关于等待时间等分布，已有的结果还很少，对于 Poisson 到达(平均到达间隔为 $1/\lambda$)，指数分布服务的二级串联排队(平均服务时间分别为 ρ_1/λ，ρ_2/λ)， 在两级窗口前的等待空间都无限制的情形下，两级的顾客数分别为 n_1，n_2 的平衡分布是 $\rho_1\rho_2(1-\rho_1)^{n_1}(1-\rho_2)^{n_2}$， 因而可将各级顾客数的分布看成是相互独立的([2]，[22])．窗口呈网络形的模型可通过模拟† 进行探讨．

3) **成批** (bulk)． 成批到达单个服务，单个到达成批服务，以及成批到达成批服务的情形，统称为**成批排队** (bulk queue) ([9]，[14]，[22])．

4) **顾客行为** (customer behavior)． 到达的顾客由于见到队伍太长而立即离去的情况是有的．这一现象被称为**折回** (balking)．另外，也有排了队但因等不及而中途离去的顾客行为的模型． 这些可统一进行研究 ([20])．

5) **特殊性服务时间** (special service times)． 在有一些模型中，对窗口空暇时到达的顾客，或反之，对先到顾客正在服务时到达的顾客，除了固有的服务时间以外还需要额外的时间．也有考虑额外的服务时间依赖于等待时间等因素的情形([13]等)．

6) **输入总数的限制** (restriction of the input source)． 如果将机器发生故障，或将电话交换机上收到呼唤视为顾客到达的话，由于顾客总数有限，到达间隔的分布依赖于排队系统的状态．考虑到实际应用的需要，对顾客总数有限的情形进行过许多研究． ([2]，[14]，[18]，

[22]).

【在稳定状态的平均等待时间】 $M/G/1$ 的平均等待时间 W，由

$$W = \lambda b_2/2(1-\lambda b_1)$$

给出 (F. Pollaczek [13], A. Я. Хинчин [21], Kendall [6]). 并且,等待时间的方差为

$$\lambda b_3/3(1-\lambda b_1)+\lambda^2 b_2^2/4(1-\lambda b_1)^2,$$

其中,b_i 是服务时间的 i 阶矩. 在成批到达时,若设各批顾客数为相同的一般分布 (令它的 i 阶矩为 δ_i),则可推广为

$$W = \lambda b_1^2((\delta_2/\delta_1)+(b_2/b_1^2)-1)/2(1-\lambda b_1)$$

(D. P. Gaver [3]). 平均等待时间与平均队长之间有着密切的关系, 对于 $GI/G/s$ 的情形, $L=\lambda W$ 成立 (J. D. C. Little [11]), 其中,L表示在任意时刻观察到的平均队长.若设在顾客到达之前的瞬时观察到的平均队长为 L^*,则只对 $M/G/s$ 公式 $L^*=\lambda W$ 成立(森村英典 [12]). 还有, J. F. C. Kingman 对 $GI/G/1$ 的情形研究了 $\rho\to 1$ 时的渐近性态,得到了 $W\sim \mathrm{Var}(g_i-s_i)/2E(g_i-s_i)$ 的结果 ([25], [26], [28]).

【参】 [1] V. E. Beneš, General stochastic processes in the theory of queues, Addison-Wesley, 1963; [2] D. R. Cox-W. L. Smith, Queues, Methuen, 1961; [3] D. P. Gaver, Imbedded Markov chain analysis of a waiting line process in continuous time, Ann. Math. Statist., **30** (1959), 698—720; [4] T. Kawata (河口竜夫), On the imbedded queuing process of general type, Bull. Inst. Internat. Statist., **38** (3), (1961), 445—455; [5] J. Keilson-A. Kooharian, On time dependent queuing process, Ann. Math. Statist., **31**(1961), 104—112; [6] D. G. Kendall, Some problems in the theory of queues, J. Roy. Statist. Soc., B, **13** (1951), 151—185; [7] D. G. Kendall, Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain, Ann. Math. Statist., **24** (1953), 338—354; [8] J. Kiefer-J. Wolfowitz, On the theory of queues with many servers, Trans. Amer. Math. Soc., **78** (1955), 1—18; [9] P. Le Gall, Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques, tome 1, Dunod, 1962; [10] D. V. Lindley, The theory of queues with a single server, Proc. Cambridge Philos. Soc., **48** (1952), 277—289; [11] J. D. C. Little, A proof of the queuing formula: $L=\lambda W$, Operations Res., **9** (1961), 383—387; [12] H. Morimura(森村英典) On the relation between the distributions of the *queue size and the waiting time*, Kôdai Math. Sem. Rep., **14** (1962), 6—19; [13] F. Pollaczek, Problèmes stochastiques posés par le phénomène de formation d'une queue d'attente à un guichet et par des phénomènes apparentés, Mémor. Sci. Math., 136, Gauthier-Villars, 1957; [14] T. L. Saaty, Elements of queuing theory, McGraw-Hill, 1961; [15] J. Sacks, Ergodicity of queues in series, Ann. Math. Statist., **31** (1960), 579—588; [16] W. L. Smith, On the distribution of queuing times, Proc. Cambridge Philos. Soc., **49** (1953), 449—461; [17] T. Suzuki (鈴木武次),Ergodicity of a tandem queue with blocking, J. Operations Res. Soc. Japan, **7** (1964), 68—75; [18] R. Syski, Introduction to congestion theory in telephone systems, Oliver & Boyd, 1960; [19] L. Takács, Introduction to the theory of queues, Oxford Univ. Press, 1962; [20] И. Н. Коваленко (I. N. Kovalenko), Некоторые задачи массового обслуживания с ограничением, Теория Вероятностей и её Применение, **6** (1961), 222—228; [21] А. Я. Хинчин (A. Ja. Hinčin), Математические методы теории массового обслуживания, Труды Мат. Инст. им. В. А. Стеклова, **49**, 1955; [22] 森村英典-大前義次, 待ち行列の理論と実際, 日本科学技術連盟, *1962*; [23] 本間鶴千代, 待ち行列の理論, 理工学社. *1966*; [24] D. G. Kendall, Some recent work and further problems in the theory of queues, Теория Вероятностей и её Применение, **9** (1964), 1—12; [25] J. F. C. Kingman, The single server queue in heavy traffic, Proc. Cambridge Philos. Soc., **57** (1961), 902—904; [26] J. F. C. Kingman, On queues in heavy traffic, J. Roy. Statist., Soc., B, **24** (1962), 383—392; [27] R. M. Loynes, The stability of a queue with non-independent interarrival and service times, Proc. Cambridge Philos. Soc., **58** (1962), 497—520; [28] W. L. Smith-W. E. Wilkinson (eds.), *Proceedings of the symposium on congestion theory*. Univ. of North Carolina Press. 1965; [29] J. F. C. Kingman, On the algebra of queues, J. Appl. Prob., **3** (1966), 285—326; [30] J. Riordan, Stochastic service systems, John Wiley, 1962; [31] N. U. Prabhu, Queues and inventories, John Wiley, 1965.

运筹学 [英 operational research 美 operations research 法 recherche opérationelle 德 Operationsuntersuchung 俄 исследование операций 日 オペレーションズ・リサーチ] **运筹学** (operations research, 简称 OR) 这一名词, 是在第二次世界大战中产生的. 这是美国称, 在英国多称之为 operational research. 实际上, 在英国它是与对空火器的研究有关而产生的, 随即在美国这一思想也得到传播. 战后, 英美等国为将运筹学用于产业方面进行的努力, 以至使它具有广泛的应用范围. 然而, 要确切地定义**运筹学**究竟是什么,未必是容易的.

下面列举三个有代表性的定义.

第一, P. M. Morse 和 G. E. Kimball 的

定义．运筹学是：1）对在负责经营管理部门职权内的业务，2）根据科学的方法，3）向负责经营管理的部门，4）提供作为决策判断依据的最优资料的科学方法．

第二，C. W. Churchman-R. L. Ackoff- E. L. Arnoff 的定义．运筹学是：1）对于有关系统运用的问题，2）应用科学的方法、技巧和工具，3）向管理系统运用的人们，4）提供对问题的最优解答．

第三，S. Beer 的定义．认为运筹学是：1）关于人员，机械，材料和资金，2）在其所处的周围环境中发生的，3）经营和管理上，4）会有可能性出现的问题进行的，5）基于现代科学的研究．从而运筹学的独特方法是：6）根据对可能出现的行动的度量、比较、预测，7）研究制订管理策略（strategy of control）．

以上的三个定义，因为对本来是同一个对象作出规定，当然具有共同点．首先第一点，无论哪一种定义，与其说是决策本身，不如说是希望给出作为判断决策基础的旁观和建议，因而是只限于向经营管理部门提供服务． 第二点，它之所以应限于旁观和建议，是因为有科学方法能够适用的范围这一限制．科学的方法以具有作为演绎系统的模型，而且模型的合理性能够与实际资料对比而进行验证为其基本要求．第三点，**业务**（operation）要成为这样的科学研究的对象，必须满足以下三个条件：i）它是客观确定的；ii）业务的作用结果，效应和影响可以客观地计测；iii）有重复实施的可能． 第四点，虽是以科学的方法为基础，但并不是以建立某个一般的科学性命题为目的，目的在于求得面临的实践行动的指导策略．以上这四点，是运筹学的基本要求，也是在上述的三个定义中的共同之处．

然而，另一方面也可以看到，上述三个定义，在运筹学的发展上侧重有所不同．在第一个定义中，前提是运筹适用的场所，在第二个定义中，明白地表现出来的是系统的运用．还有，在第一个定义中，将提供于经营管理部门的最优资料称为决策判断依据，第二个定义则进一步加强意义称为最优解． 运筹学的实际成果，反映出很多是求最优解的问题．而当通过最优解的表现形式来考察时，也可看出数学规划方法往往被应用于运筹学．至于第三个定义，最明确地在 1）—4）中规定了系统，在 5）—6）中规定了运筹的概念，在 7）中给出了运筹学的目标．它在 5）中还明确指出依靠科学是应用研究的一个方法．业务与组织，是在它们互相干涉且互相影响的形态上研究的．运筹学的方法论认为有必要对此提供综合的、全面的处理，而且以各部门之间的协调合作形成运筹学工作组为其特征．

运筹学的方法，由于集中关注于输入与输出之间的关系，而能对整体有个全面更好的看法．不去详究内部机理而把它当作装在盒子里的东西，不去过问盒子的内部而仅仅掌握它的输入对输出的关系，运用这种所谓暗盒法已成为一种基本方法．按照运筹学求解的步骤，由 i）问题的数学描述，ii）构成模型以及解的探索，iii）对模型与解进行试验，iv）建立对解案的管理，并付之实施等组成．建立数学模型时，应当强调建立系统中的信息传输系统模型的重要性．常用的数学模型，有分配模型，竞争模型，排队模型，库存模型，生产模型等等．

【参】［1］ P. M. Morse-G. E.Kimball, Methods of operations research, M. I. T., The Technology Press of M. I. T., John Wiley, 1951; ［2］ C. W. Churchman-R. L. Ackoff-E. L. Arnoff, Introduction to operations research, John Wiley, 1957; ［3］ M. W. Sasieni-A. Yaspan-L. Friedman, Operations research—Methods and problems, John Wiley, 1959; ［4］ T. L. Saaty, Mathematical methods of operations research, McGraw-Hill, 1959; ［5］ A. Vazsoni, Scientific programming in business and industry, John Wiley, 1958; ［6］ R. L. Ackoff, Progress in operations research, 1, John Wiley, 1964; ［7］ 国沢清典-宇田川銈久，オペレーションズ・リサーチ入門，広川書店，1962.

控制论 ［英 cybernetics *法* cybérnetique *德* Kybernetik *俄* кибернетика *日* サイバネティックス］【控制论的定义】 **控制论**（cybernetics）作为综合地处理动物与机器中的通信及控制机能的科学领域，是由 N. Wiener（1894—1964）于 1947 年创始的．

这一名称源出于意思为舵手的希腊语 κυβερνήτης，与调速器(governer)是同一个语源．创立这一新的科学领域的动因是来自 (i) 自动计算，(ii) 自动控制，(iii) 信息处理等方面的研究．当时，这些领域中已经出现如高速电子计算机，自动瞄准器，电信设备和自控仪器等技术发明，从而为构成自动化技术基础的电子学，通信工程学和控制工程学的近代发展奠定了基础．

控制论的中心问题不是研究物质或能量，而是研究信息，因而**人工脑** (mechanical brain) 以及**人工智能**(artificial intelligence)的研究当然从一开始就是极为重要的．控制论的一个重要分支称为**生物控制论** (biocybernetics)．它是用控制论方法来研究生物信息现象的．生物控制论提供了有用的生物研究中的假说，同时，生物学中的实验知识和发现也刺激了控制论的发展．

控制论自 1954 年以来已获得了显著的进展：第一，是 Wiener 对**非线性随机理论** (nonlinear random theory) 的发展．在此基础上，建立了自组织系统 (self-organizing system) 和学习理论 (learning theory)． 后者不仅与生物控制论中的组织 (organization) 理论有深入的联系，而且使控制论得到别开生面的发展． 第二，苏联科学家在以下两方面取得了显著的进展：(1) 确立了控制论与数学和物理学并列的作为基础科学的地位，(2) 培植了控制论对于经济规划的应用．第三，控制论在西欧也得到了显著的发展，那里的控制论研究对于基础的哲学思想，以及对于工程学，语言学和人文学等方面的应用也极为丰富．

尽管有以上这些新发展，但是在核心的数学理论的构成上，Wiener 用 J. W. Gibbs 的统计力学处理的某些数学模型对控制论问题的原始表述仍然具有中心地位的重要性．Wiener 曾以下述方式为控制论下过定义："设有两个状态变量，其中一个是能由我们进行调节的，而另一个是我们不能控制的．这时面临的问题是如何根据那个不可控制变量从过去到现在的信息来适当地确定可以调节的变量的最优值，以求实现对于我们为最合适最有利的状态．控制论正是旨在提供我们解决这样一些问题的方法和途径"．

【控制论的数学表述】 (I) 首先要处理对于不可控变量的时间序列给出数学表述的问题． Wiener 考察了数学模型为 Brown 运动† 的所有不规则运动 (→Brown 运动)．

事实上，Wiener 给出了一个构造式的定义．通过建立 (t, X) 平面上的

$$0\leqslant t\leqslant 1,\ -\infty < X < \infty$$

的带状区域上的样本函数 $X(t)$ 与一个概率空间 Ω 中的 ω 之间的对应，构造地定义了具有以下一些性质的 $X(t,\ \omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1,\ \omega\in\Omega)$：(1) $X(0,\ \omega)=0$；(2) 对于 $0<t_1<t_2\leqslant 1$ 的任意实数 t_1, t_2，随机变量†

$$X(t_2,\ \omega)-X(t_1,\ \omega)$$

服从平均值为 0 而且方差为 t_2-t_1 的正态分布† $N(0, t_2-t_1)$；(3) 对于

$$0<t_1<t_2\leqslant t_3<t_4\leqslant 1$$

的任意实数 t_1, t_2, t_3 和 t_4， 随机变量

$$X(t_2,\omega)-X(t_1,\omega)$$

与随机变量 $X(t_4,\ \omega)-X(t_3,\ \omega)$ 互相独立．

这样的 $X(t,\omega)$ $(0\leqslant t\leqslant 1,\ \omega\in\Omega)$，称为 **Wiener 过程** (Wiener process)． 可以证明它具有如下的性质： (i) $X(t,\ \omega)$ 作为 t 的函数以概率 1 为连续； (ii) $X(t,\ \omega)$ 作为 t 的函数以概率 1 为不可微．条件(1)也可以取消，这时，可将 $X(t,\ \omega)$ 的定义域延拓为

$$-\infty < t < \infty.$$

这样的推广使得 $X(t,\ \omega)$

$$(-\infty < t < \infty,\ \omega\in\Omega)$$

和定义在整个实 t 轴上的、具有特定的概率测度的所有连续函数的集合相重合，在此概率测度意义下，上述集合中的几乎所有函数对于 t 是几乎处处不可微的函数，这一函数族由 Wiener 采纳为输入函数族．

Wiener 方法有两个本质的方面． 其一是遍历定理的有效性． 据此，在 Wiener 的概率空间†中的相平均就按概率 1 等于各个样本

函数的时间平均，因此只须估计 Wiener 的概率空间中的样本函数的时间平均即可．因为对几乎所有的样本函数，当观测时间长度趋于无穷大时样本平均趋于相平均．其二，根据上述的性质 (2), (3)，能够对于由 $X(t,\omega)$ 导出的随机变量进行详细的计算．例如，我们有

$$\int_{\Omega}[X(t_2,\omega)-X(t_1,\omega)]^n d\omega$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}\int_{-\infty}^{\infty}u^n e^{-u^2/2(t_2-t_1)}du,$$
$$\int_{\Omega}X(t_1,\omega)X(t_2,\omega)\cdots X(t_n,\omega)d\omega$$
$$=\begin{cases}0, & n=2m+1,\\ \sum\prod_{i=1}^{m}\int_{\Omega}X(t_{i_1},\omega)X(t_{i_2},\omega)d\omega, & n=2m,\end{cases}$$

其中，第二个等式右端的 $\sum$ 是关于从 $2m$ 个 t_i $(i=1,2,\cdots,2m)$ 中取每二个为一组的所有可能的组合 $(1_11_2,\ 2_12_2,\ \cdots,\ m_1m_2)$ 求和．当 $t\geqslant s$ 时，我们有

$$\int_{\Omega}X(t,\omega)X(s,\omega)d\omega=s.$$

而且还有

$$\int_{\Omega}\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\varphi_i(t_i)dX(t_i,\omega)\right)d\omega$$
$$=\begin{cases}0, & n=2m+1,\\ \sum\prod_{i=1}^{m}\int_{\Omega}\varphi_{i_1}(t)\varphi_{i_2}(t)dt, & n=2m,\end{cases}$$

其中 $\sum$ 的含义同上．

(II) 其次，需要设计一个将输入函数变换为输出函数的算子．

在控制论的 Wiener 表述中占重要地位的算子具有两个性质：(i) **可平移性** (translatability)，即平移 $T^\tau f(t)=f(t+\tau)$ 对任一实数 τ 可交换．(ii) **可实现性** (realizability)，即输出函数 $Y(t)$ 仅与输入函数的过去乃至现在时刻的值 $X(t-\tau)$ $(0\leqslant\tau<\infty)$ 有关． 除此之外，还可以增加第三个性质，(iii) 算子的**线性** (linearity)，在控制论的基本问题中都是满足的． 应该看到，Wiener 理论的特点之一是它既能适用于线性问题，也能适用于非线性问题．

(III) 第三，需要在算子设计中建立起确定最优性意义的判据． 由于 Wiener 方法在本质上是属于统计学的，因此很自然地引进无偏性，最小方差，以及对输入和输出函数的自相关函数[†]和相关分析等概念． 从而，Wiener 又创立并发展了广义调和分析 (generalized harmonic analysis)，还借助于遍历定理[†]，将它应用于每个个别的样本函数以取得所需要的信息．广义调和分析还可应用于经典调和分析即一般的 Fourier 分析所不能应用的情形，这是由于在理论中出现的函数并不一定总满足象周期性，殆周期性，或当 $t\to\pm\infty$ 时绝对收敛于 0 这样一些性质．

通过这些数学表述，容易看出关于时间序列的预报 (prediction) 理论和滤波 (filtering) 理论中的 Wiener 方法的数学特色在控制论中的意义． 例如，当知道至某一时刻 t 为止的 $X(s)$ 之值 $(-\infty<s\leqslant t)$，要对未来时刻之值 $X(t+\alpha)$ $(\alpha>0)$ 进行预报时问题可归结为寻求核函数 $K(\tau)$，并通过它来定义一个满足下述条件的线性、可平移、可实现的算子

$$\int_0^{\infty}X(t-\tau)dK(\tau):$$
$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|X(t+\alpha)-\int_0^{\infty}X(t-\tau)dK(\tau)\right|^2dt=\min.$$

这个问题的解由广义调和分析的结果给出．我们定义谱密度函数 $\Phi(\lambda)$ 为

$$\varphi(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{-\tau}X(t+\tau)X(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\tau\lambda}\Phi(\lambda)d\lambda.$$

现在，由于有假设

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\log|\Phi(\lambda)||}{1+\lambda^2}d\lambda<\infty,$$

所以得谱分解表示

$$\Phi(\lambda)=|\Psi(\lambda)|^2,$$

其中 $\Psi(u+iv)$，能证明它在下半平面

$$(v<0)$$

内既没有奇点也没有零点．这样，解 $K(\tau)$ 由下式给出：

$$\int_0^{\infty}e^{-it\lambda}dK(t)=$$

$$\frac{1}{2\pi\Psi(\lambda)}\int_0^{\infty}e^{-i\lambda t}dt\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(u)e^{iu(t+\sigma)}du.$$

这一结果在各个具体问题的应用上都能给出解答.

由 Wiener 讨论的非线性算子已被证明在验证**牵引现象**（phenomenon of pulling off）上是有用的，后者在处理自增殖和自组织问题上有重要应用. Wiener的设想是，非线性随机理论(nonlinear random theory) 必定成为生物控制论的基础. 在 Wiener 的理论中，非线性算子被展开为正交算子的级数,后者对应于 Hermite 多项式†展开,其系数构成一族函数

$$\{k_n(\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n)\}\ (n=1,2,\cdots),$$

其中每一个又可被展成 Laguerre 函数†的级数.

【参】 [1] N. Wiener, Cybernetics (or control and communication in the animal and the machine), John Wiley, 第二版 1961; [2] N. Wiener, Nonlinear problems in random theory, MIT Press, 1958; [3] N.Wiener-J. P. Schadé, Cybernetics of the nervous system, Progress in brain research XVII, Elsevier, 1965; [4] K.Steinbuch-S. W. Wagner, Neuere Ergebnisse der Kybernetik, R. Oldenbourg, 1964; [5] S. Beer, Decision and control, John Wiley, 1966.

信息论 [英 information theory 法 information théorie 德 Informationstheorie 俄 теория информации 日 情報理論] 现在称之为**信息论**的关于通信系统中的信息传输的数学理论最初主要是由 C. E. Shannon 开创的([1]),发展至今已成为最重要的数学领域之一，它综合了各种数学方法的应用，包括数理统计,概率论,泛函分析,Fourier 分析,以及一部分代数知识.一个信息传输系统有信息的发生源，称为**信源**（information source)，以及信息由之传输的通道，称为**信道**(channel)，最后信息被传送到**接收端**（receiver, destinator). 在信息从信源转移到信道之前,要经过**编码**（coding)，相应地,在信道与接收端之间需要**译码**（decoding). (→编码理论). 有时,由于通信系统中的**噪声**（noise)，被接收到的最终信息是错误的. 在这种情形，信道称为**有噪声信道**（noisy channel)，否则称为**无噪声信道**（noiseless channel). 下面,先考虑信源中所用的元素的集合 A 是有限的情形，而后再考虑无限的情形.

【熵】 在信息论中,**信息量**（amount of information）用**熵**（entropy）进行计量,其定义如下：信源由一个有限的集合 A 以及在其上定义的一个概率分布† p 构成,记作$[A, p]$，它可以看成是一个有限概率空间. 例如

$$A=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$$

可为字母的集合，p 为 A 的字母的使用概率分布，$p_i=p(\alpha_i)$ 是 $\alpha_i\in A$ 在数据中出现的概率,且 $p_i\geqslant 0$，$\sum p_i=1$. 这样构成的信源有时以 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_N;\ p_1,\cdots,p_N)$ 表示. 在信源 $[A, p]$ 中,由每一元素 $\alpha_k\in A$ 所产生的信息量用 $I(\alpha_k)=-\log p(\alpha_k)$ 来定义，称之为**自信息**（self-information)，这里的 $p(\alpha_k)$ 为 α_k 的出现概率. 进而,自信息的平均值,即

$$H(A)=-\sum_{k=1}^{N}p(\alpha_k)\log p(\alpha_k)$$

$$(p(\alpha_k)\geqslant 0,\ \sum p(\alpha_k)=1)$$

就称为信源 $[A, p]$ 的**熵**（entropy). C. E. Shannon, A. Я. Хинчин, A. D. Fadeev 等人讨论了熵的性质([13]).为了给出熵的数值,我们常取 2 为底的对数,定其值的单位为**比特**(bit). 当取 10 为底或 e 为底的对数时,相应的单位称为**迪西特**（decit)(十进制单位)与**奈特**（nat).

【熵的性质】 作为N个变量

$$p_i\left(i=1,\cdots,N,\ p_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{N}p_i=1\right)$$

的取值在 $\{\lambda|0\leqslant\lambda\leqslant+\infty\}$ 中的函数，熵 $H(\cdot)$的几个重要的特性由 Shannon 等人给出([13]). (i) 函数 $f(p)=H(p, 1-p)$ 在

$$0\leqslant p\leqslant 1$$

上是连续的,且对至少一个 p_0, $0<p_0<1$, 有 $f(p_0)>0$. (ii) 对 $(p_1,\cdots,p_N)$ 的任一置换 $(p_1',\cdots,p_N')$,

$$H(p_1,\cdots,p_N)=H(p_1',\cdots,p_N').$$

(iii) 对任一 $p_N=q+r>0$ 且

$$q\geqslant 0,\ r\geqslant 0,$$

$$H(p_1,\cdots,p_{N-1},q,r)$$
$$=H(p_1,\cdots,p_N)+p_NH(q/p_N, r/p_N).$$

此外，下列命题成立：

(I) $-\sum_{i=1}^{N} p(\alpha_i)\log p(\alpha_i) \leqslant \log N$.

等式当且仅当 $p(\alpha_i)=1/N(i=1,\cdots,N)$ 时成立. (II) 给定两个信源 $[A,p]$ 和 $[B,p]$，它们是一个概率空间 (X,p) 的子空间，我们可以定义 $\alpha_i\in A$ 与 $\beta_j\in B$ 的联合概率分布 $p(\alpha_i,\beta_j)$，它所构成的熵是

$$H(A,B)=-\sum_{i,j} p(\alpha_i,\beta_j)\log p(\alpha_i,\beta_j),$$

则有不等式 $H(A,B)\leqslant H(A)+H(B)$. 当且仅当对所有的 i,j

$$p(\alpha_i,\beta_j)=p(\alpha_i)p(\beta_j)$$

时，才有等式成立. (III). 若以 $p(\alpha_i|\beta_j)$ 表示条件概率†，则

$$H(A|\beta_j)=-\sum_{i=1}^{N} p(\alpha_i|\beta_j)\log p(\alpha_i|\beta_j)$$

称为 A 关于 $\beta_j\in B$ 出现的条件熵，且称

$$H(A|B)=\sum_j p(\beta_j)H(A|\beta_j)$$

为给定 B 时 A 的**条件熵** (conditional entropy). 对于条件熵，有

$$H(A,B)=H(A)+H(B|A)$$
$$=H(B)+H(A|B),$$

以及 $H(A|B)\leqslant H(A)$，其中，当且仅当

$$p(\alpha_i,\beta_j)=p(\alpha_i)p(\beta_j)$$

对所有的 i,j 成立时，上面的不等式才有等号成立.

【信源】 构成信源的集合，可以直接给出一个有限集 $A=\{\alpha_1^0,\cdots,\alpha_N^0\}$，也可以考虑采用 $A^n=A\times\cdots\times A$ 或

$$A^Z=\prod_{k=-\infty}^{\infty} A_k(A_k=A,$$
$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

其中每个 $a_n\in A^n$ 及 $a\in A^Z$ 表示为

$$a_n=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

$(\alpha_k\in A)$ 和

$a=(\cdots,\alpha_{-2},\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_1,\cdots)(\alpha_k\in A)$. 设 $\mathfrak{F}_A$ 为在 A^Z 中的所有柱集†生成的 σ 代数，在 $\mathfrak{F}_A$ 上给定一个概率测度† P，则定义了信源 $[A^Z,P]$. 当 P 在 A^Z 上的推移变换† T 下具有不变性，即

$$P(E)=P(TE)\ (E\in\mathfrak{F}_A)$$

时，$[A^Z,P]$ 称为**平稳信源** (stationary information source). 特别，若对任意关于 T 不变的集合

$$E=TE\in\mathfrak{F}_A,$$

都有 $P(E)=0$ 或 1，则称 $[A^Z,P]$ 为**遍历信源** (ergodic information source). 在平稳信源 $[A^Z,P]$ 中，对每个

$$a=(\cdots,\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$$

令一个截断的有限维向量 $a_n=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 与它对应，则自然可导出信源 $[A^n,P_n]$，设 $H(A^n)$ 为 $[A^n,P_n]$ 的熵，则

$$\lim_{n\to\infty} H(A^n)/n$$

存在. 将这一极限记为 $H(A^Z,P)$，称之为信源 $[A^Z,P]$ 的相当于一个元素的**平均熵** (mean entropy). 当 $[A^Z,P]$ 是一个遍历信源时，若信源 $[A^n,P_n]$ 的自信息为 $-\log P_n(a_n)$ (其中 $a\in A^Z$, $a_n\in A^n$)，则当 $n\to\infty$ 时，$-\log P_n(a_n)/n$ 依概率收敛于 $H(A^Z,P)$. 这就是 **McMillan 定理**([13]).

【信道】 最简单的信道是无噪声的，对之存在输入元素与输出元素之间的一一对应，通过信道时不产生信息量的损失. (在有噪声信道内，总会产生信息损失.) 设由信源 $[A^Z,P]$ 给出信号 $a=(\cdots,\alpha_{-1},\alpha_0,\alpha_1,\cdots)$，如果每个 $\alpha_i\in A$ 是逐次通过信道的，则接收端得到与之对应的某一有限集 B 的元素 β_i 的序列

$$b=(\cdots,\beta_{-1},\beta_0,\beta_1,\cdots).$$

设 $\mathfrak{F}_B$ 为由 B^Z 中的所有柱体生成的 σ 代数. 任一 $a\in A^Z$ 确定了一个条件概率† $\nu(S|a)$ $(S\in\mathfrak{F}_B)$，可当成从 A^Z 到 B^Z 的转移概率. 由 A^Z, B^Z 和 ν 共同刻划的**信道**被记为 $[A^Z,\nu,B^Z]$.

1) 可测性. 如果对于任一集 $S\in\mathfrak{F}_B$, $\nu(S|\cdot)$ 是 $(A^Z,\mathfrak{F}_A)$ 上的可测函数，则信道 $[A^Z,\nu,B^Z]$ 称为**可测的** (measurable). 2) 平稳性. 如果对任意的 $a\in A^Z$ 和 $S\in\mathfrak{F}_B$,

$$\nu(TS|Ta)=\nu(S|a)$$

成立，则信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$ 称为**平稳的** (stationary). 3) 非预测性. 设对某一固定的指标值 t 以及某个 $S\in\mathfrak{F}_B$, 当 $\beta_j'=\beta_j$ 对 $j\leqslant t$ 成立时，信息

$$b=(\cdots, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \cdots)\in S$$

等价于

$$b'=(\cdots, \beta_{-1}', \beta_0', \beta_1', \cdots)\in S.$$

此时，如果对 $i\leqslant t$ 的指标 i 满足 $\alpha_i'=\alpha_i$ 的 $a'=(\cdots, \alpha_{-1}', \alpha_0', \alpha_1', \cdots)$ 和

$$a=(\cdots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \cdots),$$
$$\nu(S|a)=\nu(S|a')$$

成立，则此信道称为**非预测的** (nonanticipating). 4) 有限历史性. 如果存在一个固定的整数 $m>0$, 使得给定任一柱集

$$c_{n,t}=[\beta_n, \beta_{n+1}, \cdots, \beta_t]\in\mathfrak{F}_B,$$

其中 n, t 是满足 $n\leqslant t$ 的任意整数，等式

$$\nu(c_{n,t}|a)=\nu(c_{n,t}|a')$$

对于任何一对满足

$$\alpha_k=\alpha_k'\ (n-m\leqslant k\leqslant t)$$

的 $a=(\cdots, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \cdots)$ 和

$$a'=(\cdots, \alpha_{-1}', \alpha_0', \alpha_1, \cdots)\in A^Z$$

都成立，则信道称为具有**有限历史** (finite history), 而 $[\beta_n, \cdots, \beta_t]$ 是所有第 k 座标等于 $\beta_k\ (n\leqslant k\leqslant t)$ 的 $b\in B^Z$ 的柱集. 满足这一要求的最小整数 $m>0$ 被称为**历史长度** (length of history). 这时的转移概率

$$\nu([\beta_n, \cdots, \beta_t]|[\alpha_{n-m}, \cdots, \alpha_t])$$

可由这一历史长度推导得到. 5) M 步相关性. 设已给定一个正整数 M. 如果对任意的整数组 n, r, s, t $(n\leqslant r<s\leqslant t)$, 只要

$$s-r>M,$$

对两组坐标序号所确定的柱集

$$c_{n,r}=[\beta_n, \beta_{n+1}, \cdots, \beta_r]$$

和 $c_{s,t}=[\beta_s, \beta_{s+1}, \cdots, \beta_t]$ 就有

$$\nu(c_{n,r}\cap c_{s,t}|a)=\nu(c_{n,r}|a)\cdot\nu(c_{s,t}|a)$$

成立，则称信道为 ***M* 步相关的** (M-dependent) (高野金作[13]). 6)无记忆信道. 如果有某一个整数 $m>0$ 存在，使信道既是有限历史又是 m 步相关的，则称此信道为具有**有限记忆** (finite memory) 的信道. 特别，当 $m=0$ 时，即对于每一对整数 n, r 且 $n<r$,

$$\nu([\beta_n, \cdots, \beta_r]|[\alpha_n, \cdots, \alpha_r])=\prod_{k=1}^{r}\nu([\beta_k]|[\alpha_k]),$$

则称此信道为**无记忆** (memoryless) 信道.

【信道的传输容量】 给定信源 $[A^Z, P_A]$ 和信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$, 两个概率测度即在 $(A\times B, \mathfrak{F}_A\otimes\mathfrak{F}_B)$ 上的 P_{AB} 以及在 $(B, \mathfrak{F}_B)$ 上的 P_B 分别由下式定义:

$$P_{AB}(E\times F)=\int_E\nu(F|a)P(da),$$
$$P_B(F)=P_{AB}(A\times F),$$
$$E\in\mathfrak{F}_A,\ F\in\mathfrak{F}_B.$$

我们称 P_A 为**输入测度** (input measure), P_{AB} 为**合成测度** (compound measure), 而 P_B 为**输出测度** (output measure). 若 P_A, ν 为平稳时, P_{AB} 和 P_B 也是平稳的，若 $[A^Z, P_A]$ 是遍历的且 $[A^Z, \nu, B^Z]$ 为具有有限记忆的信道，则 $[B^Z, P_B]$ 也是遍历的. 当 P_A, P_{AB}, P_B 为平稳时，平均熵 $H(A^Z, P)$, $H(B^Z, P_B)$, $H(A^Z\times B^Z, P_{AB})$ 有定义. 这时，从信源 $[A^Z, P_A]$ 出发通过信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$ 传送信息的**传输速率** (transmission rate) 定义为

$$R(A^Z, B^Z)=H(A^Z, P_A)+H(B^Z, P_B)-H(A^Z\times B^Z, P_{AB})\geqslant 0,$$

这是信源 $[A^Z, P_A]$ 发出信号通过信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$ 传输时所得到的相当于 A^Z 的一个元素的平均信息量. 在有限记忆且 M 步相关的平稳信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$ 中，关于一切可能的遍历信源 $[A^Z, P_A]$, 以

$$C_e=\sup R(P)=\sup R(A^Z, B^Z)$$

表示这一 R 的上限，称 C_e 为此信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$ 的**遍历传输容量** (ergodic transmission capacity). 关于一切可能的平稳信源 $[A^Z, P_A]$(从而遍历信源全被包括在其中) 的 R 的上限被称为信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$ 的**平稳传输容量** (stationary transmission capacity), 记为 C_s. 在上述情形, $C_e=C_s$ 成立. 这一结果是由 L. Carleson, И. П. Чаpeградский, A. Feinstein 等人建立的([13]). 从

而 C_e，C_s 通称为信道的**传输容量**(transmission capacity)．后来，L. Breiman 证明了对某个遍历输入测度 P 成立 $C_e = R(P)$，即上界可以达到([13])．

【信息论的基本定理】 最先知道的信息论**基本定理**(fundamental theorem)是关于无记忆信道的 Shannon 定理([1])．其严格证明是由 A. Feinstein 给出的([2])．定理是说，给定一个具有容量 $C_s > 0$ 的平稳无记忆信道以及取自一个遍历信源的任意数据，则对任一 $\varepsilon > 0$ 和

$$R(0 < R < C_s),$$

存在具有充分大的长度 n 的编码信息 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，它以 R 为传输速率传递有关数据，同时译码错误的概率 λ_n 小于 ε．

这一基本定理的**弱逆定理**(the weak converse theorem)是说，在基本定理所假设的信源与信道的条件下，若 $R > C_e$，则当编码长度 n 趋于无穷大时，译码的错误概率 λ_n 不收敛于零(A. Feinstein [3]，D. Blackwell-L. Breiman-A. J. Thomasian [14])．在这种情形，一般地 $\lambda_n \to 1$ $(n \to \infty)$ 也并不一定成立．如果弱逆定理的结论被 $\lambda_n \to 1$ 代替，则结果就称为**强逆定理**(the strong converse theorem)．对于强逆定理成立的充要条件业已给出(A. Feinstein [3]，吉原健一[15])．对无记忆信道证明的基本定理由 Хинчин 推广如下([13])：通过平稳的非预测的有遍历传输容量 C_e 和有限记忆 m 的信道 $[A^Z, \nu, B^Z]$，对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和

$$R(0 < R < C_e),$$

从遍历信源发出的任意信号可有长度 n 为充分大的编码词实现以 R 为传输速率且译码错误概率小于 ε 的传输．

【编码问题】 信息论基本定理证明了理想编码在适当条件下的存在性．关于形成理想编码过程的实际方法也有各种研究．对于无噪声信道，问题已经完全解决，有几种实际的编码方法，例如，Shannon，R. M. Fano 和 D. A. Huffman 编码法以及国沢清典-本多波雄-池野信一的等长编码法．对于有噪声信道，也有 R. W. Hamming，寄安善市，D. E. Muller 和 M. J. E. Golay 等人的研究(国沢 [12]，R. B. Ash [16]，W. W. Peterson [17])．特别，对于二进制对称信道，利用奇偶性校验†已经建立了类似于基本定理的编码定理([16])(→编码理论)．

【连续的情形】 A. H. Колмогоров ([4]) 及其学派研究了连续信源的情形并且讨论了广义的 Shannon 理论．设 ξ，η，$\cdots$，为取值在可测空间† $(X, \mathfrak{X})$，$(Y, \mathfrak{Y})$，$\cdots$ 之中的随机变量的序列．设 P_ξ，P_η 为对 ξ 和 η 的概率分布，而 $P_{\xi\eta}$ 为对 ξ，η 的联合分布，则 ξ，η 中任何一个关于另一个的信息量由

$$I(\xi, \eta) = \sup \sum_{i,j} P_{\xi\eta}(E_i \times F_j)$$

$$\times \log [P_{\xi\eta}(E_i \times F_j) / P_\xi(E_i) P_\eta(F_j)]$$

定义，其中上确界是对 X 及 Y 的所有可测子集遍取的，即关于 X，Y 的一切可测分划 $\{E_i\}$，$\{F_j\}$ 而取的．ξ 的熵定义为 $I(\xi) = I(\xi, \xi)$．对 $I(\xi, \eta)$ 和 $I(\xi)$ 的积分表示和信息密度的概念已由 И. М. Гельфанд-А. М. Jaglom，A. Pérez 等人([5])引进，对于 $I(,)$ 所具有的基本性质也进行过种种研究([8])．用这些概念 Колмогоров 作出了连续信道的数学模型，信道的精确表现由 Р. Л. Добрушин ([5]) 进行过讨论．此外，也引进了信息的**再现精确度**(exactness of reproduction)，信息与信道之间的**信息稳定性**(information stability)等概念，Shannon 的编码定理也对这些一般情形进行过讨论([5]，[8])．Колмогоров 及其学派还对动力体系的流引入熵的概念，他们得到了许多有价值的成果(В. А. Рохлин [6]，Я. Г. Синай [7])．

【ε 熵】 设 A 为度量空间 (X, ρ) 的完全有界子集，且设 $\varepsilon > 0$ 为给定正数．X 的子集的有限族 $U_1, \cdots, U_n$ 称为 A 的 **ε 覆盖**，如果对每一子集 U_k，直径 $d(U_k) \leqslant 2\varepsilon$，且

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_k.$$

X 的点 $x_1, \cdots, x_n$ 的有限集被称为对于 A 的 ε 网，如果对于每一点 $a \in A$，至少存在一点

$$x_k \in \{x_1, \cdots, x_n\}$$

使得 $\rho(a,x_k)\leqslant\varepsilon$. 有限点集 $a_1,\cdots,a_n\in A$ 称为ε可分辨的，如果 $\rho(a_i,a_j)>\varepsilon$ 对所有的 i, $j(i\neq j)$ 成立. 对给定的 $\varepsilon>0$, A 的ε覆盖子集的个数和对于 A 的ε网元素的个数的最小值分别记为 $N_\varepsilon(A)$ 和 $N_\varepsilon^X(A)$, A 的ε可分辨点的最小数目记为 $M_\varepsilon(A)$. 令

$$H_\varepsilon(A)=\log N_\varepsilon(A),$$
$$H_\varepsilon^X(A)=\log N_\varepsilon^X(A),$$

且 $C_\varepsilon(A)=\log M_\varepsilon(A)$, 分别称它们为 A 的 **ε 熵** (ε-entropy), A 关于 X 的ε熵，以及 A 的 **ε 容量** (ε-capacity). 它们满足关系

$$C_{2\varepsilon}(A)\leqslant H_\varepsilon(A)\leqslant H_\varepsilon^X(A)\leqslant C_\varepsilon(A).$$

这些量在计算信息的再现精确度和信源编码过程中被采用，这些概念也被用于各种函数空间的逼近问题，在解决 Hilbert 第十三问题中也有用处 (Колмогоров, 和 В. М. Тихомиров [13], G. G. Lorentz [21]).

熵的概念还有一些推广，如象 S. Kullback, R. A. Leibler 给出的用于母体判别的平均信息量([9]), 由 L. Brillouin 给出的与物理上热力学有关的负熵 (negentropy) ([10]), 以及在 J. von Neumann 的量测理论中的信息量的概念 (中村正弘-梅垣寿春([11])等).

【参】 [1] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. **27** (1948), 379—423, 623—656; [2] A. Feinstein, Foundations of information theory, McGraw-Hill, 1958; [3] A. Feinistein, On the coding theorem and its converse for finite memory channels, Inform. Control, **2** (1959), 25—44; [4] A. N. Kolmogorov, Theory of transmission of information, Acad. R. P. Romino-Soviet, Mat. Fiz., (3) **13**(1959) no. 1, 5—33; [5] Р. Л. Добрушин (R. L. Dobrušin), Общая формулировка основной теоремы Шеннова в теории информации, Успехи Мат. Наук, **14** (1959) no. 6, 3—104 (英译本: General formulation of Shannon's main theorem in information theory, Amer. Math. Soc. Transl., Series 2, v. 33, 323—438); [6] В. А. Рохлин (V. A. Rohlin), Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, Успехи Мат. Наук, **15** (1960) no. 4, 3—26; [7] Я. Г. Синай (Ja. G. Sinaĭ), Вероятностные идеи в эргодической теории. Proc. Intern. Congr. Math., 1962, Stockholm, Almqvist & Wiksells, P. 540—559:; [8] М. С. Пинскер (M. S. Pinsker), Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов, Acad. Sci. SSSR, 1960 (英译本: Information and information stability of random variables and processes, Holden-Day, 1964); [9] S. Kullback, Information theory and statistics, John Wiley, 1958; [10] L. Brillouin, Science and information theory, Academic Press, 1956; [11] M. Nakamura-H. Umegaki (中村正弘-梅垣寿春), On von Neumann's theory of measurements in quantum statistics, Math. Japonicae, **7** (1962), 151—157; [12] 国沢清典，情報理論，オートメーションシリーズ1，共立出版，1960; [13] 国沢清典-梅垣寿春编，情報理論の進歩——エントロピー理論の発展，岩波，1965; [14] D. Blackwell-L. Breiman-A. J. Thomasian, Proof of Shannon's transmission theorem for finite-state indecomposable channels, Ann. Math. Statist., **29** (1958), 1209—1220; [15] K. Yosihara (吉原健一), Simple proof of the strong converse theorems in some channels, Kôdai Math. Sem. Rep., **16** (1964), 213—222; [16] R. B. Ash, Information theory, Interscience, 1965; [17] W. W. Peterson, Error correcting codes, John Wiley, 1961; [18] R. M. Fano, Transmission of information. MIT Press, 1961; [19] R. G. Gallager, Information theory and reliable communication, John Wiley, 1968; [20] F. Jelinek, Probabilistic information theory, McGraw-Hill, 1968; [21] G. G. Lorentz, Approximation of functions, Holt, 1966.

编码理论 [英 coding theory 法 théorie codée 德 Codierungstheorie 俄 теория кодирования 日 符号化の理論] 电信上的 Morse 码和印刷电码等的编码问题最初由 C. E. Shannon 归纳成为数学上的编码问题. 在电信中，信息常被表现为离散信号的序列，这就是对每个字符指定可用信号的有限序列 $b_1,\cdots,b_n$ 与之对应，从而可以看成为某一个映射 ϕ. 若共有 q 个不同的信号可被取用，则这样的序列 $b_1,\cdots,b_n$ 可以看成是基数为 q 的一个 n 位数 (在通信系统中，一般 $q=2$). 以序列 $\phi(X)$ 代替字符 X 的运算称为**编码** (encoding), 相反的运算称为**译码** (decoding). $\phi(X)$ 称为 X 的**代码字** (code word), ϕ 的象集(即代码字的集合)称为**代码** (code).

编码理论的目的是构造适于高效率地进行信息输送的代码. 如果信号是通过无噪声信道传输的，则与此有关的问题仅仅是传输速率(字符/秒)的最优性. 信息论在这方面起着重要的作用，因为它给出了用熵 (→信息论) 来表示的传输速率的理论上界. 信息论的基本定理指出，如果将熵为 H(比特/字符)的信息源所产生的字符编排成为适当的代码(或密码)，则能够由传输速率为 C/H (字符/秒)的信道来传递信息. 关于无噪声信道，有 shannon, R. M. Fano,

D. A. Huffman 和池野信一等人提出的编码方法([1]).

当信息传输带有误差时，自动检错与纠错具有明显的实际重要性. 检错的一种简单方法是增加一位数字 b_0 以扩大每一个代码字 $b_1\cdots b_n$，使得各位之和 $b_0+b_1+\cdots+b_n$ 等于模 q 的零. 这一附加位数字 b_0 称为**奇偶校验位** (parity digit). 这样，这 $n+1$ 位数字中出现的单个错误可以由检验它们的和而察知. 通过添加更多位数字,则可以检查出更多的错误,而且在某些情况下,还能予以纠正. 但是,这些附加位显然降低了传输速率.

这种情形的另一个重要问题是所要求的运算的复杂性，即包含有编码,译码,加上检错与纠错的运算. 这方面，也有以概率论为基础的编码法，如 Shannon 的随机编码法，但因为它们没有提供实际的译码方法，所以被认为实质上是无法使用的.

以下主要讨论**二进制代码组** (binary block code)，记为 S. 它是具有固定长度 n 的二进制数的集合. 这样，代码 S 便是 Boole 环† $B_n=\{0,1\}^n$ 的子集. S 的元素 x 被称为代码字,而 x 的分量 x_i ($x_i=0$ 或 1, $i=1,\cdots,n$)通称为**比特** (bit). 元素 $x\in B_n$ 的**重量** (weight) 是在 $x=(x_i)$ 中,数字 1 出现的个数,记为 $w(x)$. 两个元素 $x,y\in B_n$ 之间的 **Hamming 距离** (Hamming distance) $d(x,y)$ 是其中的不相同位 ($x_i\neq y_i$) 的总数. 显然,

$$d(x,y)=w(x\oplus y),$$

其中 $\oplus$ 表示在 B_n 环上的按位加法. 两个代码组 $X,Y\subset S$ 的距离 $d(X,Y)$ 是 $\min_{x\in X,y\in Y} d(x,y)$. 设 s 为某一被接收的元素 y 的对应代码字中的错误位的个数，如果相应的被传输的代码字是 x，则应该有 $s=d(x,y)$. 设 d 为 S 中的不同代码字之间的最小距离. 若 $s>0$ 且 $s<d$,则出现的错误可以被检查出来,因为 y 不可能是 S 中的另一个代码字. 若 $s\leqslant(d-1)/2$,则出现的传输错误可以得到纠正,因为只要把与 y 距离最近的代码字作为被输送的代码字即可. 将每个代码字 x 从 $(x_1\cdots x_n)$ 扩充为 $(x_1\cdots x_ny_1\cdots y_k)$，则可以增加代码 S 的最小距离 d. 新代码 $S'\subset B_{n+k}$ 的最小距离 d' 满足下述条件 (称为 **Hamming 上界**)：如果 $d'\geqslant 2t+1$，则有

$$\sum_{i=0}^{t}\binom{n+k}{i}(q-1)^i\leqslant q^{(n+k)(1-R)},$$

其中，q 是可用的符号数 (这里 $q=2$)，R 是**信息率** (information rate)，且

$$R=\log_q s'/(n+k),$$

s' 是 S' 中的代码字个数. 对某个 t 值，达到这一上界的代码被称为**完全的** (perfect). 最近,对于素数幂 q，已经得到完全代码的全部表示([7]).

许多重要的代码可以在各种代数理论的基础上进行定义和分析,其中特别是有限域理论. 设 q 是一个素数幂,则集合

$$V_n=\{0,1,\cdots,q-1\}^n$$

可以看成是有限域 $GF(q)$ 上的一个 n 维向量空间. V_n 的一个向量子空间 S 被称为**线性代码** (linear code). 如果对 V_n 的每一元素 c,使它对应于 $GF(q)$ 上的多项式

$$c(X)=c_1+c_2X+\cdots+c_nX^{n-1},$$

则以**生成函数** (generator) $g(X)$ 为模的**循环代码** (cyclic code)S 定义为:

$$S=\{c\mid c(X)\equiv 0\pmod{g(X)}\}.$$

特别,如果维数 n 是 q^m-1 的因子(m 是某一正整数)，则在 $GF(q^m)$ 中某个 n 阶元素 β 满足的关系式

$$g(\beta^t)=g(\beta^{t+1})=\cdots=g(\beta^{t+r-1})=0$$

所对应的任一生成函数 $g(X)$ 确定一个所谓的 **BCH 码** (Bose-Chaudhuri-Hocquenghem code). 这样一种代码能够检出 r 个错误并纠正 $r/2$ 个错误. BCH 码类中还包含许多重要类型的码，例如 Hamming 码 (Hamming code), Reed-Solomon 码 (Reed-Solomon code) 等等. 此外,对纠正密集错误的代码也正在研究，这个问题还同试验设计法有着密切的关系 ([6]). 还有专门考虑用于电信技术的编码 ([5]).

其他的重要类型的码包括用于纠正突发错

误（burst errors）的**卷积码**(convolutional codes)，用于算术电路的 **AN 码**（AN codes）以及作为 BCH 码类的扩充的 **Goppa 码**（Goppa codes）等．新的代码和新的译码算法仍在继续发展． 这一研究领域紧密联系于信息论，代数学，以及组合分析的各种应用，如试验设计等([3])．

【参】 [1] 喜安善市-室賀三郎，情報理論，岩波講座現代応用数学，1957（中译本：喜安善市，室贺三郎，现代应用数学丛书，信息论，上海科学技术出版社，1962)；[2] J. Wolfowitz, Coding theorems of information theory, Springer, 1961；[3] E. R. Berlekamp, Algebraic coding theory, McGraw-Hill, 1968；[4] W. W. Peterson, Error-correcting codes, MIT Press, John wiley, 1961, 第二版 1972；[5] R. G. Gallager, Low-density parity check codes, MIT Press, 1963；[6] 北川敏男，サイバネティックス，境界領域としての考察，みすず書房，1953；[7] A. Tietäväinen, On the non-existence of perfect codes over finite fields, SIAM, J. Appl. Math., **24** (1973), 88—96；[8] 喜安善市，誤りの訂正できる符号，数学，**15** (1963), 6—12；[9] S. Lin, An introduction to error-correcting codes, Prentice-Hall, 1970.

随机数 ［英 random numbers 法 nombres aléatoires 德 Zufallszahlen 俄 случайные числа 日 乱数］ 可以看成服从同一分布的独立随机变量†的实现值数列称为**随机数**（random numbers)，将它们列成表的形式则称为**随机数表**（table of random numbers)． 随机数是利用 Monte Carlo 法†进行计算和对随机现象进行模拟†的基础，对于统计学各种方法中的抽样，随机组合等也是不可缺少的工具．然而，要对随机数作出严密的数学定义的尝试却是不久前才开始的([1])．实用上，只能满足于这样的定义："符合一些关于拟合度、独立性等的统计假设检验，不具有明显的规律性的数列，为随机数．"

【伪随机数】 少量的随机数可以从已有的随机数表中选取，也可以利用函数表末尾的位数．大量需要的随机数，也可以通过具有随机性结构的物理装置产生，而用于特殊的目的．然而，在数值电子计算机的使用中，用的是根据一定的算法产生的．在实际应用上可以看成随机数的数列． 这些称之为**伪随机数**（pseudo-random numbers)． 作为随机数的共同的分布，一般的是十点 $\{0, 1, \cdots, 9\}$ 上的均匀分布，以及区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布． 后者可以由 $\{0, 1, \cdots, N-1\}$ $(N \gg 1)$ 上的均匀分布来逼近． 分布函数为 $F(\cdot)$ 的随机数，可由 $F^{-1}(\cdot)$ 将 $(0, 1)$ 均匀分布变换得到． 根据 $F(\cdot)$ 的性质相应地运用各种技巧，可以找出减少演算的方法([6])． 其中，顺序统计量的应用和舍弃法一般是有效的（[2]，[6])．

当 $N = n^s$ 时，在 $\{0, 1, \cdots, N-1\}$ 上均匀分布的(伪)随机数的生成方法，有下列几种．每一种方法都考虑到能够在计算机上以时间短而且简单的演算实现．

1) **平方取中法**（middle-square method)．这种方法是由 J. von Neumann 首先提出的． 将 n 进制 s 位的数平方而得出 $2s$ 位的乘积，从中取出它的中央部分 s 位．反复这样做而得到的数列，最后成为一个短循环，或者在极端的场合形成一个数重复出现，不过关于到达这种程度的数列长度等尚未形成理论，需要凭经验来检定．

2) Fibonacci 数列†的利用． 该数列 $\{u_k\}$ 由 $u_{k+1} = u_k + u_{k-1} \pmod{n^s}$ 定义．它显然不是独立的，但是根据经验，对多数的初始值可以形成均匀分布．

3) **同余法**（congruence method)． 该数列由 $u_{k+1} = au_k + c \pmod{n^s}$ 或 $(\mathrm{mod}\, n^s \pm 1)$ 定义． 按 $c = 0, \neq 0$，相应地分别称为乘法同余法，混合同余法以示区别．求出周期即

$$u_{k+1} = u_1$$

成立的最小的 k 值的方法，以及关于给定的 n^s 确定使周期尽可能长的 a, c 的方法，根据整数理论已弄清楚．这一方法对于多数的检验给出良好的结果，特别是 $c = 0$ 的情形值得推荐，但是有报告说，若相继作出 $l(\geqslant 3)$ 个这样的数组，从它作为 l 维随机变量的各种性质，反倒不能形成随机数．

4) 均匀分布†的利用． 按照 H. Weyl 的意义，在区间 $(0, 1)$ 上均匀分布的整数变量的函数值 $f(k) \pmod 1$ 序列，虽然一般地有相关性，但对于特定的目的(例如用 Monte Carlo 法计算定积分等)可以作为伪随机数使用． 然

而，若作出 $x_k = k^2\alpha(\mathrm{mod}\,1)$（$\alpha$ 为任意的无理数）这样的数列，则可证明序列相关†

$$\lim N^{-1} \sum^{N} x_k x_{k+l} = 1/4$$

关于 l 一致地为 0.

【随机数的检验】 对 (0, 1) 上均匀分布随机数的检验，可以考虑如下几项：

1) 将区间 (0, 1) 分成适当的小区间，对落在各个小区间之内的频数，进行多项分布的拟合度检验（χ^2 检验†），或者考察一组随机数所落入区间的图形（Poker 检验）．进一步，还可看出关于相继二个随机数所落入的区间的转移频数的一致性．

2) 对一组随机数的经验分布函数与理论分布函数之间的差距进行检验（Колмогоров-Смирнов 检验等）．

3) 仅考察一组随机数的大小顺序，检验排列顺序是否随机(升降游程)．

【正规数】 设实数 $x(0 < x < 1)$ 的小数部分的 r 进制表示为 $\sum x_n r^{-n}$． 设

$$B_k = b_1 b_2 \cdots b_k$$

为 $0, 1, \cdots, r-1$ 的任意排列，且设在整数列 $X_n = x_1 x_2 \cdots x_n$ 中构形 B_k 出现的次数为 $N(B_k, X_n)$． 对于所有的 k，B_k，当

$$\lim_{n\to\infty} N(B_k, X_n)/n = r^{-k}$$

时，称 x 是关于 r 的**正规数**（normal number）．虽然已经证明，除掉 Lebesgue 测度为 0 的集合外的其他数，都是关于任一个 r 的正规数，但是正规数的具体例子尚一无所知．

从 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，π，e 这些无理数以十进小数表示时的各位数字的不规则性，是否可说这些数为正规数，进而能否将它们的数字序列看成随机数列，这样的问题是有兴趣的．尽管，理论的阐明尚未得出，然而至今为止所作的很多检验（例如见 [4]，[5]）并没有提出上述诸数不是正规数的反证．

【参】 [1] A. N. Kolmogorov, On tables of random numbers, Sankhyā, A, **25** (1963), 369—376; [2] H. A. Meyer (ed.), Symposium on Monte Carlo methods, John Wiley, 1956; [3] T. E. Hull-A. R. Dobell, Random number generators, SIAM Rev., **4** (1962), 230—254; [4] N. C. Metropolis-G. Reitwiesner-J. von Neumann, Statistical treatment of values of first 2000 decimal places of e and π calculated on the ENIAC, Math. Tables Aids Comput., **4** (1950), 109—111; [5] 田中穆，円周率10万桁の統計，数理科学，**2** (1964), no. 7, 6—11; [6] 渋谷政昭，擬似乱数の生成，数学，**15** (1963), 68—71; [7] 山内二郎-森口繁一-一松信編，電子計算機のための数値計算法 I，第9章モンテ・カルロ法，培風館 1965; [8] B. Jansson, Random number generators, Victor Pettersons, 1966.

模拟 [英 simulation 法 simulation 德 Simulation 俄 моделирование, имитация 日 シミュレーション，模擬] 所谓**模拟**，广义地理解是为了考察现实事物所具有的性质而用类似事物进行实验或观测的做法．若对于现实的事物直接进行实验，需要花费相当大的费用或相当长的时间，或者测定本身有困难，或者条件变化的影响甚大等而不可能或难以进行，这时就应用模拟．

现在被广泛地称为模拟的主要有以下四种类型．当然，这不过是大致的分类，实际上通常是以这些类型的混合形式进行模拟的．

第一，是模型实验，有船舶和飞行器等的水槽实验或风洞实验，或是在化学工业中的中间试验工厂等．这是在设计大型实物之前，用小型的实物作实验，旨在检验或修正作为设计依据的理论．

第二，是所谓**相似模拟**（analog simulation）或**实验分析**（experimental analysis）的类型．这是这样一种类型的模拟，先探索另外一种现象，它与支配某一事物性质的规律有相同微分方程（也包括近似地相同的微分方程的情形），并对之进行实验，从而研究对象事物的性质．例如，对力学的振动问题用等价的电路来处理，或将热传导的问题变换为力学系统，或在浅底水槽中进行关于超音速的研究等．还有，在难于对现实的问题进行理论分析时，探求在现象上具有类似的性质，在数学结构上为已知的另一问题，并建立与之相似的数学模型的方法．在人机学的研究中有很多是依靠这一方法的．这一类型的方法，以往主要是用作工程问题的分析手段，最近已经广泛地用于经济现象的研究，神

经系统的研究，用人工心脏进行循环系统的研究等方面．作为进行相似模拟的工具，在考虑常微分方程时，最广泛的是利用模拟计算机†．在偏微分方程的情形，将它改变为差分方程，再变换为相应的电路模拟，这种做法居多．

第三，是随着数字计算机的进步而逐渐受到重视的数字模拟．模拟这个名词，狭义地理解主要就是指的这种类型．一般说，很多对象是比相似模拟的规模更大更复杂的事物．无论是什么样的问题，只要掌握了它的数学结构，弄清楚它的算法†，则通过编制对它进行处理的（数字计算机的）程序，就容易在计算机中进行模拟．特别是，对于某些专用机器、设备的组合，或经营管理的组织体系等，以及关于系统的研究（设计，运用方法），在这些方面用得较多，有时将这种情形特别称为**系统模拟**（system simulation）．道路或飞机场的交通管理，水库的使用，机械工厂中的机器位置与运转，化学工程中的各种平衡，考虑到库存与需求的生产日程计划，更为广泛地掌握企业活动的经营管理模拟，以及计算机系统的模拟等，都是这样的例子．此外，数字计算机模拟还被广泛地用于原子反应堆的设计，高速公路的路面设计，国际问题的研究等方面．还有，在研究要制造的计算机的指令系统，或者在机器本身制造完成之前研究程序系统，也可以在已有的其他计算机上作出正在设计或制造的机器的模拟程序来进行模拟．在进行模拟之际，当有必要考虑过程中的随机变动时，随机数†起着重要的作用，这种模拟特别称之为 Monte-Carlo 法（见后述）．

第四，是带有人对人，人对自然之间的对策因素的模拟．属于这种类型的有军队中用于作战训练的战争对策，企业活动中训练用的企业对策，以及飞机驾驶员训练用的模拟装置等．在这种情形，人的意志决定介入于过程中为其特征．譬如说，在企业对策中，参加者分属于几个企业集团，每一个集团各自对如何安排设备投资，研究投资，广告，生产计划等，每季度讨论决定一次．对于作出的决定，利用随机数，根据蕴含的规则算出某一季度的销售成绩、库存量、持有现金等．考察它的结果，再作出下一季度的决定．这样地持续几次，在各集团之间竞争成长．这样做，不仅是单纯地作为训练之用，而且将它当作研究人的意志决定的机理的一种手段，今后看来是重要的．还有，处于这一范畴的边缘而受到注目的，作为学习机器出现的所谓仿脑机就是模拟人的大脑活动的机器．

以上四种类型的模拟，每一种都是目的在于定量地阐明事物的研究手段，重点在于掌握数学结构并建立模型（包括根据其实验结果对模型修正）．

【Monte Carlo 法】 **Monte Carlo 法**（Monte Carlo method）这一用语，是 1945 年左右由 J. von Neumann 和 S. M. Ulam 引进的．他们将它定义为“使用随机数处理确定性数学问题的方法．”G. L. L. von Buffon 投针实验，即利用很多次随机投针的实验求出圆周率 π 的近似值，就是这一方法的古典例子．近年来，随着电子计算机的发展，利用数字计算机，大规模的模拟成为可能，并逐渐广泛地应用起来．对于定积分

$$I=\int_a^b f(x)dx\ (B\geqslant f(x)\geqslant A\geqslant 0)$$

的计算，大量作出在 $\{a\leqslant x\leqslant b, A\leqslant y\leqslant B\}$ 范围内均匀分布的随机数组 (x,y)，若实验性地求出 $y\leqslant f(x)$ 的概率 p，则有

$$I\doteqdot p(B-A)(b-a),$$

这就是应用该方法的一例．此外、对于求逆矩阵，偏微分方程的边值问题等，通过对表示这些对象的随机模型的模拟来求解，也是在上述的本来意义下使用 Monte Carlo 法的例子．然而，在这种问题中，多数情形采取直接的数值计算法是有利的．现在对于以随机移动等为中心的概率论与随机过程问题，在建立方程有困难时，或者虽能建立方程但求解有困难，这时就利用数字计算机进行模拟求解，这样的方法一般统称为 Monte Carlo 法．在这种情况下，不一定要对原来的现象本身进行模拟，而常见的是对以相同的方程表述的随机模型进行模拟，或者对基本方程的简化方程求解进行模拟．

在整个模拟过程中，随机数的生成与检验是重要的，对此→随机数.

【参】[1] D. N. Chorafas, Systems and simulation, Academic Press, 1965; [2] F. S. Grodins, Control theory and biological systems, Columbia Univ. Press, 1963; [3] J. M. Hammersley-D. C. Handscomb, Monte Carlo methods, Methuen-John Wiley, 1964; [4] A. E. Rogers-T. W. Connolly, Analog computation in engineering design, McGraw-Hill, 1960; [5] F. Rosenblatt, Principles of neuro-dynamics, Sparton, 1962; [6] K. D. Tocher, The art of simulation, English Univ., 1963; [7] H. H. Sun (孫), The role of computers in research, Data Processing Magazine, 1965, 6 月号; [8] 宮武修-中山隆，モンテカルロ法，日刊工業新聞社，1960; [9] M. C. Minsky-S. Papert, Perceptrons: An introduction to computational geometry. MIT Press, 1969.

数据处理 [英 data processing 法 traitement de l'information 德 Datenverarbeitung 俄 обработка данных 日 データ処理] 近年以来，随着电子计算机†的发展，大规模的数据传输和处理系统得以实现，而且以此为前提的数据处理的技术与方式的研究也得到发展. 下面所述的是它的简单的概况介绍. 广义的数据处理包括统计量†的处理，试验设计†，运筹学†，但是这些都放到其他条目中去解说.

数据处理的研究，可以分为关于各种处理手法的研究，和关于总体的处理系统例如程序设计技术的研究（→计算机 [指令和程序设计]）. 还可以按应用的目的列举出**信息检索** (information retrieval)，库存管理，**计划评价** (program evaluation and review technique) 等自成体系的各个领域. 也可以根据处理对象的数据集合 D 的性质，分为各种问题. 以下就按这一方针顺次进行叙述(以下，假定 D 为有限集).

【D 为全序集的情形】 此处，基本上是**排序** (sorting) 问题和**查表** (table look up) 问题. 所谓排序，是按照在 D 中规定的次序排列所给集合 D 的元素(即排列). 由于以前曾经利用分类机进行穿孔卡片的排序，所以也称之为**分类** (sorting). 将多数个已经良序化的数据序列归总起来排为一列良序集的做法称为**合并** (merging). 这些方法在使用磁带作为存储装置时特别重要，在许多事务处理计算中也是必要的.

数据排序时的基本操作是对给定的 D 中的次序进行“比较”. 在对 n 个元素构成的排列进行排序的一般方法当中找出比较次数为最小的方法，是相当麻烦的问题，但对于 $n \leqslant 11$ 的情形，及 $n=20, 21$ 等的情形已经解决 ([1]). 对于一般的 n，除了知道比较次数的下限 ($\log_2 n!$) 外，还有一些应用上较为方便的方法. 如果将一些方法的名称及在 n 较大的情形比较次数 T 的近似值列举出来，则有**合并法** (sorting by merging) $T \sim n \log_2 n$，**选择法** (sorting by selection) (反复进行选取最小元素的操作) $T \sim n(n-1)/2$，**插入法** (sorting by insertion) (每次一个，将新元素补加到已有的序列之中) $T \sim n(n-1)/4$，**交换法** (sorting by exchanging) (反复进行二个元素的比较和交换位置) $T \sim n^2$ 等等. 此外，在 D 为至多有 s 位数字的 p 进制数的情形，也可以利用**基数法** (radix sorting) (狭义的分类法，反复进行每个特定位的排序)，或**地址计算法** (sorting by address calculation) (将 $d \in D$ 存放于存储器的地址 d 处. 配置结束后，再按地址顺序收取)，或者它们的变型等. (在这些场合，比较运算不一定是必要的.) 在实际应用上，还必须考虑存储器的类型及其容量 ([2], [10], [11]).

如果给出从 D 到另一集合 D' 的单值对应 $f: D \to D'$，并将这一对应的映射表以适当的形式存放于存储器内，这时就产生查表的问题. 所谓查表，是由所给的 $d \in D$ 求出 $f(x)$，这种场合的基本运算，是处于表中某一位置的 $x \in D$ 与 d 的比较. 能使比较的平均次数少且占用存储单元少而解决问题的方法为好. 至于造表方法，有按照 $x \in D$ 的出现频率的顺序对 $x, f(x)$ 的配对进行排列的方法 I，以及按照 $x \in D$ 在 D 中的次序进行排列的方法 II. 对于 II，求 $f(d)$ 的方法，有从表的开始处顺次进行比较的方法 II_a；还有取备查区间(最初为表的全部)的中点(那是由存储器中所规定的地址系统机械地确定的)，通过比较检查是否越过 d，从而逐次缩小区间直至所选区间充分小令人满意为止的二

分法 (binary chopping) II_b 等. 设D的元素个数为n,如果假定每一元素出现的频率都相等,则所需要的比较次数,用方法 II_a 平均为$n/2$,用方法 II_b 平均为 $\log_2 n$. 按照 x 的分布如何,我们有选择地使用方法 I 和 II. 例如,若此分布接近于指数分布(设n为充分大),方法 I 是有利的,但若近于均匀分布,则 I 与 II_a 相近,比之 II_b 为差.无论用哪一种方法,当各个 $d\in D$ 的数据量可视为相同时,是易于实施的. 在一般情况下,也有如下所述的利用树表示的方法.

在各个 $d\in D$ 为自然数的情形,则有将 $f(d)$存储于存储器中地址d处的方法.据此,因为 $f(d)$ 的存储地址直接由各个 $d\in D$ 确定,没有必要进行比较,所以查表的速度极快. 但是,除在D稠密地集中于某一范围内的情形外,为了有效地使用存储器,有必要作种种考虑而选取适当的方法([3],[10],[11]).

这些方法和技巧是库存管理等的基础.

【D为偏序集的情形】 在所给有限集满足自反律与可迁律这些顺序关系的情形下,在存储器内表现这一顺序的方法,一般是以地址作为媒介. 下面就以例子来说明一种简单的方法.

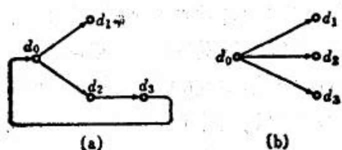


图 1

图1所示是作为表现对象的偏序集的例子. 各个小圆圈(称为结点)表示D的元素,其中,以附写的文字表示 $d\in D$. 对于一个 $d\in D$,使三个量 d, L, R 为一组与它对应. 其存储地址以d^*表示. 假定 $d^*\neq 0$. L, R 的含义从下列表示的例子中容易推知:

a) $(d_0,\ d_1^*,\ d_2^*)$, $(d_1,\ 0,\ 0)$,
$(d_2,\ d_3^*,\ 0)$, $(d_3,\ d_0^*,\ 0)$,

b) $(d_0,\ d_1^*,\ e_1^*)$, $(d_1,\ 0,\ 0)$,
$(e_1,\ d_2^*,\ d_3^*)$, $(d_2,\ 0,\ 0)$,
$(d_3,\ 0,\ 0)$.

这里,e_1 是为了方便而补加的元素,只要不属于D,无论取什么都行. 即使在需要许多地址 e_1^*, e_2^*, $\cdots$ 的情形,令 $e_1=e_2=\cdots=e$ 就足够了. 当然,具体的实施方法有各种各样,不限于这里所述的.

a), b) 这样的数据集合,被称为**树表示** (tree representation) 或称为**表** (list).

逻辑式的集合,按给定的推理规则排序,便成为偏序集. 一系列推理过程成为一个有序子集. 所以,为了对逻辑推理过程作自动处理,只要能对树表示作自动处理即可. 处理树表示的基本运算是新结点的增补,某些结点的消除等等. 能够实行所有这些运算的、在某种意义上带有普遍性的一些处理系统实际上已有实例([4],[5]). 对于普遍性的证明,要利用基础理论的结果(→自动机). 这些系统在一般的符号处理,逻辑推断,语言处理上应用广泛. 对于计划评价也有应用.

【D为半群的情形】 在语言数据(例如单词,或句子)的处理中自然往往要考虑由有限个生成元(字母,或词汇)生成的非交换自由半群D. 这时,如果生成元相互之间存在自然的顺序,则按照"辞典式顺序"来规定D的偏序. 那里,把D的某个元素作为索引标题的辞典式表示方法,可以应用树表示. 虽不能说查表速度以及所占用的存储容量是那么满意,但它有时能使复杂的数据处理简单化.

也有对D事先给定与群的运算相类似的偏序的情形. 这时由有限个基本关系(依据群运算与可迁律)生成的偏序是特别重要的. 在这种场合,判定在 $d_1, d_2\in D$ 之间怎样的顺序关系成立(或不成立)的问题是基本的. 对于这一问题,树表示以及下述的后进先出存储器也提供了有用的方法.

【其他情形】 为了对代数式以及带有括号的语言进行数据处理,作为辅助的数据存储管理方式,采用后进先出**存储器** (push down storage) 方式往往是便利的. 这种存储的特点是,取出数据的顺序恰好与数据进入存储的时间顺序相反. 这是利用对应于括号的性质,即闭合

与打开的顺序相反. 这是自动程序设计†中的基本方法.

数据处理的统一的系统理论还没有. 抽象计算机的理论(→自动机,计算机)正在建立.近年来,这一理论已联系到**计算语言学** (computational linguistics), 许多结果正在积累([6],[7],[8]).

【信息检索】 最后, 作为一项有兴趣的应用, 提一下信息检索. 所谓信息检索是整理和存储大量的数据, 根据需要自动地检索和提供(印刷)必要的数据的工作. 必要的数据是以满足某些条件的形式指出的. 根据这些条件的记述方法,这一问题也有难有易. 人类的语言如能全部在其原来的意义上使用, 信息检索就可以说是一种人工头脑. 实际上是, 或者规定记述的方法,或者使解释的方法简化, 来供实用.

如果问题是对各个数据分别附给一个标识符,并由所给的标识符求一个数据,这个问题与查表问题是一致的. 如果是有多数个独立的标识符, 要收集所有满足与那些标识符有关的某个逻辑命题的数据, 则问题变得非常困难. 这方面的问题在数学上还没有公式化的表述.

【参】 [1] 喜安善市-池野信一, 分類の情報理論的考察, インホメーシ ョン理論専門委員会資料, 電気通信学会, 1961; [2] 淵一博, 分類, 情報処理, 2 (1962), 86—92, 146—151; [3] 伊吹公夫, 大容量記憶方式の記憶容量からみた一考察, 情報処理, 3 (1963), 184—188; [4] A. K. Scidmore-B. L. Weinberg, Storage and search properties of a tree-organized memory system, Comm, ACM, 6 (1963), 28—31; [5] J. McCarthy 编, Lisp manual 1, 5, Computation Center and Research-Laboratory of Electronics, M. I. T., 1962; [6] R. D. Luce-R. R. Bush- E. Galanter, Handbook of mathematical psychology, vol. 2, John Wiley, 1963; [7] Y. Bar-Hillel, Language and information, Addison-Wesley, 1964; [8] J. A. Forder-J. J. Katz, The structure of language, Readings in the phylosophy of languages, Prentice-Hall, 1964; [9] 奥野治雄-後藤以紀-竹内正治-和田弘, 情報処理ハンドブック, 光琳書院, 1965; [10] D. E. Knuth, The art of computer programming, vol. 1, Ch. 2, Addison-Wesley, 1973; [11] D. E. Knuth, The art of computer programming. vol. 3, Addison-Wesley, 1973.

控制理论 [英 control theory 法 théorie de contrôle 德 Kontrollestheorie 俄 теория регулирования 日 制御理論] 【概述】 在控制工程学中,**自动控制理论** (theory of automatic control) 很早就发展起来了([14]).自动控制的古典理论主要处理线性控制系统, 其数学结构是由常系数常微分方程组来描述的, 并且以控制系统的稳定性†为中心问题. Laplace 变换†的应用在讨论系统的响应特性中起着重要的作用, 并获得了一些稳定性判据. 直至本世纪三十年代,自动控制理论是处于这样一个阶段. 因此,就数学方法而言,没有新的独创,仅仅是做了许多工作以使现有的数学方法用之于实际问题. 尽管如此,在数学方面也有所整理和加工,如象(i) 在考虑到控制作用的时滞时, 应用常系数差分微分方程†来处理; (ii) 讨论了系统的过渡特性; (iii) 外部干扰的表示; (iv) 讨论了与干扰有关的频率响应分析. 总而言之, 当时的古典控制理论中所采用的数学原理从整体上说, 是属于对线性可平移算子适用的一般调和分析和 Cauchy 级数的范畴.

第二次世界大战之后, 在电子学上的飞跃进步和新的自动控制装置及系统的创新发明开辟了走向自动化时代的道路. 与此有关, 现代控制理论得到了显著的进展.

第一, 数学表述的一般化使我们能够将实际情形所遇到的各种特性纳入考虑. 非线性控制理论以非线性振动†理论为基础,而采样值控制理论有赖于相空间的系统分析, 离散控制系统以离散的控制动作和控制信号的离散传输为实际背景. 这里面进一步又可划分为空间形式的离散控制即动作水平取离散值的控制, 以及时间形式的离散控制即控制信号在离散的时间间隔点上获取的控制.

第二,不规则输入,包括有随机噪声的情形使得控制问题的随机表述纳入考虑. 本世纪三十年代后期的随机过程† 理论在这方面有重要的应用.引进了评价控制特征的统计判据,作为解决这些问题的解析方法, 处理不规则运动的广义调和分析也成为重要的工具.

第三,也是最显著的特点,即现代控制过程的实现形式是以计算机中心为管理中枢的集中控制系统. 计算机由于具有大容量的信息存储

器和高度的信息处理能力，从而导致许多先进的控制机能的实现，如象最优控制，适应控制，学习控制等，无论在控制理论和实际工程应用方面，都已成为极为重要的内容.

以上这些新领域中的研究也激起控制论[†](cybernetics)作为一门控制与通信科学的发展.控制理论是现代的一个重要的研究课题.事实上，现代控制理论所涉及的许多分支已逐渐形成新的学科领域，例如自组织理论，学习理论，适应理论等.可以认为，控制理论与方才所述的由它衍生出来的三个理论形成了信息科学的一个基本方面.现代控制理论所涉及的范围甚为广泛.我们将仅限于解说其中的几个目前认为是主要的研究课题.

【最优控制问题的确定性数学表述】 设在 t 时刻的某一个实际系统的状态由 n 维向量

$$x(t)=(x^1(t),\ x^2(t),\cdots,\ x^n(t))$$

表示.系统的状态由一组微分方程及初始条件

$$\frac{dx^i}{dt}=G^i(t,x,u),$$

$$x^i(t_0)=x_0^i,\ i=1,2,\cdots,n,$$

所确定，其中，

$$u=(u^1(t),\ u^2(t),\cdots,\ u^m(t))$$

被称为**控制函数**(control function)或**控制**(control).它是取自某一类预先规定的容许函数的集合，通常要求它满足**约束条件**(constraints)

$$R^j(t,x,u)\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,r.$$

控制函数的选择还必须使系统从初始状态 (t_0,x_0) 出发能够达到终态 (t_1,x_1).通常假设 (t,x) 在 $(n+1)$ 维 Euclid 空间的某一区域 $\mathfrak{R}$ 中变化，而 u 在 m 维 Euclid 空间的一个区域 $\mathfrak{U}$ 中变化.**最优控制**(optimal control)的问题是选取控制 $u(t)$，使得给定的泛函

$$(1)\qquad J(u)=g(t_1,x_1)+\int_{t_0}^{t_1}f(t,x,u)dt$$

取最小值(或最大值)，其中，g 是定义在终态的集合上的给定函数，f 是在 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{U}$ 上定义的一个给定的函数，而积分是沿着对应于 $u(t)$ 的选择而得到的解进行的.通常假定给定的函数 f,G,R 在 $\mathfrak{R}\times\mathfrak{U}$ 上有定义并具有连续性和可微性.我们也假定终态组成在 $\mathfrak{R}$ 中的一个 p 维流形 $\mathfrak{S}$，且 $0\leqslant p\leqslant n$.

最优控制的存在性问题是讨论对于泛函 $J(u)$ 是否存在下确界，如果存在的话，这个下确界是否可由某一容许控制 u^* 达到.

研究线性系统的**时间最优问题**(time-optimal problem)最先得到存在性定理.这类问题是状态方程中的函数形式为

$$G^i=\sum_{j=1}^{n}a^{ij}x^j+\sum_{k=1}^{m}b^{ik}u^k+h^i,$$

$$i=1,\ 2,\cdots,\ n,$$

并且要求以最短的时间将系统由 t_0 时刻的某一初始状态 x_0 转变成 x 相空间的原点.通常要求控制向量 u 的分量满足约束条件

$$|u^i|\leqslant 1,\ i=1,\ 2,\cdots,\ m.$$

对于写成矩阵向量形式的线性系统，

$$\frac{dx}{dt}=Ax+Bu+h,$$

$$A=(a^{ij}),\ B=(b^{ij}),$$

$$h=(h^1,\ h^2,\cdots,\ h^n)$$

其中 A，B，h 是与时间有关的矩阵和向量.这是 J. P. La Salle([3])推广了 R. Bellman, I. Glicksberg, O. Gross([1])和 H. H. Красовский([2])所得到的结果.La Salle 提出了以最快的时间达到一条运动着的轨线上的点 $z(t)$ 的问题，并且证明了如果存在这样的控制 u 能使由之决定的一条运动轨线 $x(t)$ 达到移动目标，则一定存在着**饱和型**(bang-bang type)的最优控制.所谓饱和型，即这样的最优控制函数 u，它的分量仅取两个水平的离散值，也即约束规定的饱和值，通常是+1和-1.再附加一些对系数 A 和 B 的限制，La Salle 还证明了能击中 $z(t)$ 的控制的存在性和最优控制的唯一性.关于有固定端点的时间最优问题的一般结果是由 A. Ф. Филиппов([4])给出的，其中放弃了微分方程为线性的要求，并且控制向量 u 允许属于随时间而变动的有界闭集 $\Omega(t,\ x)$. E. B. Lee(李)及 L. J. Markus 得到了关于紧致目标集在固定的时间区间上连续移动的问题的一个结

果,也包括了 La Salle 的存在性定理.

【Понтрягин 最大值原理】 设时刻 t 的状态向量是 $x=(x^1,x^2,\cdots,x^n)$,m 维控制参量是 $u=(u^1,u^2,\cdots,u^m)$,相应的状态方程组是

$$\frac{dx^i}{dt}=f^i(x,u),\ i=1,\cdots,n.$$

函数 $f^i(x,u)$ 及 $\partial f^i(x,u)/\partial x^j$ 设为在 $\boldsymbol{R}^n\times\bar{U}$ 直积集上为连续,其中 $\bar{U}$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 中的 U 的闭包.定义在闭区间 $[t_0,t_1]$ 上的一个分段连续函数如果满足 $u(t)\in U$, $t\in[t_0,t_1]$,则称它为容许控制.设我们在 $\boldsymbol{R}^n$ 中给定两点 x_0, x_1,又设存在状态方程组的解 $x(t)$,其初值为 $x(t_0)=x_0$,而终值为 $x(t_1)=x_1$. 考察下面的泛函:

$$J=\int_{t_0}^{t_1}f^0(x(t),u(t))dt,$$

其中,f^0 是在 $\boldsymbol{R}^n\times\bar{U}$ 中连续的某一适当的函数. 使泛函 J 取最小值的控制 u 称为对应于端点值为 x_0 到 x_1 的**最优控制** (optimal control). 对应的轨线 $x(t)$ 称为**最优轨线** (optimal trajectory). 设 x^0 适合运动规律

$$\frac{dx^0}{dt}=f^0(x^1,x^2,\cdots,x^n,u).$$

引进 $(n+1)$ 维向量

$$x=(x^0,x^1,x^2,\cdots,x^n),$$

并且引进 $n+1$ 个辅助函数 $(\psi_0,\psi_1,\cdots,\psi_n)$,后者满足下列微分方程组:

$$\frac{d\psi_i}{dt}=-\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{\partial f^\alpha(x,u)}{\partial x^i}\psi_\alpha,$$

$$i=0,1,2,\cdots,n.$$

定义

$$H(\psi,x,u)=(\psi,f(x,u))$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(x,u).$$

设 π 为 $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 中的平行于 x^0 轴且通过点 $(0,x_1)$ 的直线. **Понтрягин 最大值原理** (Pontrjagin's maximum principle) 叙述如下:

设 $u(t)$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$,为对应于以 x_0 为初始点而终止点在直线 π 上的轨线 $x(t)$ 的一个容许控制. $u(t)$ 及 $x(t)$ 为最优控制及最优轨线的必要条件是,存在一个非零的绝对连续的向量函数 $\psi(t)=(\psi_0(t),\psi_1(t),\cdots,\psi_n(t))$ 与函数 $u(t)$, $x(t)$ 相对应,使得: (i) 以 $u\in U$ 为变量的函数 $H(\psi(t),x(t),u)$ 关于区间

$$t_0\leqslant t\leqslant t_1$$

几乎处处在点 $u=u(t)$ 处达到最大值,即

$$H(\psi(t),x(t),u(t))=\max_{u\in U}H(\psi(t),x(t),u)$$

(几乎处处成立); (ii) 在终止时刻 t_1, 满足关系式

$$\psi_0(t_1)\leqslant 0,\ H(\psi(t_1),x(t_1),u(t_1))=0.$$

最大值原理可以推广到非自治微分方程组的情形,有界可测控制函数的情形,以及移动端点的问题.

【最优控制的特征】 假设已经肯定了最优控制的存在,接下去的问题就是刻划它的特征. 一般认为,特别是在不出现约束的情形,最优控制问题可以作为变分法†的问题处理. 设 $y'=u$, 问题便在 (t,x,y) 空间中作为 Bolza 问题提出. 当有约束出现时,我们可以引进**松弛变量** (slack variable) $\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^r)$, 并建立相应的微分方程

$$\frac{d(\xi^i)^2}{dt}=R^i(t,x,u),\xi^i(t_0)=0,$$

但是,用这种方法所得的实质性结果较少. 两个突出的方法,一个是以 Понтрягин 及其合作者 В. Г. Болтянский 及 Р. В. Гамкрелидзе ([6][7])所提出的最大值原理为基础的方法,另一个是 Bellman ([8][9][10])所提出的动态规划†方法. 这两者都给出最优控制的必要条件.

我们假定问题的表述如前,函数 g, f, G, R 都是在相应的定义域上属于 C^2 类的. 对于约束作下面的假定: (i) 若 $r>m$, 则向量 R 的至多 m 个分量可以在某一给定点(t,x,u)上取值为零. (ii) 在每一点 (t,x,u), 设 $\hat{R}_u$ 表示矩阵 $(\partial R^i/\partial u^j)$,其中 $j=1,\cdots,m$,而 i 取使 $R^i(t,x,u)=0$ 成立的关系式的指标集合中的值,则在每一点 (t,x,u), $\hat{R}_u$ 有最大的秩.

设控制为在一个适当的固定区间

$$t'\leqslant t\leqslant t''$$

上定义的逐段连续函数，$t_0 > t'$，$t'' \geqslant t_1$，使得 $(t_1, x_1) \in \Re$. 引进变量 $(t, x, u, \lambda_0, \lambda)$ 的函数 H，其中 λ_0 为纯量，而 λ 为向量 $\lambda = (\lambda^1, \cdots, \lambda^n)$. 我们定义

$$H(t, x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i G^i(t, x, u).$$

L. D. Berkovitz ([11])证明了下述定理:

设 u^* 为容许控制类中的最优控制，K^* 为对应的相轨线，$x^*(t)$ 为 $[t_0, t_1]$ 上的最优状态函数，则存在常数 $\lambda_0 \geqslant 0$，以及一个 n 维向量 $\lambda(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上定义且连续，且有一个 r 维向量 $\mu(t) \leqslant 0$ 在 $[t_0, t_1]$ 上定义且连续(除去在那些 t 值对应于 K^* 的角点之处，其处此函数具有唯一的右极限与左极限)，使得向量 $(\lambda_0, \lambda(t))$ 不为零向量，并且满足下列条件:

I. 沿 K^*，下列方程成立:

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda^i}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$\frac{d\lambda^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} - \sum_{k=1}^{r} \mu^k \frac{\partial R^k}{\partial x^i}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$\frac{\partial H}{\partial u^i} + \sum_{k=1}^{r} \mu^k \frac{\partial R^k}{\partial u^i} = 0, \quad i = 1, \cdots, m.$$

$$\mu^i R^i = 0, \quad i = 1, \cdots, r.$$

在 K^* 的端点 (t_1, x_1^*)，横截条件成立:

$$\lambda_0 \frac{\partial g}{\partial \sigma^j} + H \frac{\partial t_1}{\partial \sigma^j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \frac{\partial x_1^i}{\partial \sigma^j} = 0, \quad j = 1, \cdots, p,$$

或等价的条件为

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial g}{\partial \sigma^j} + f \frac{\partial t_1}{\partial \sigma^j} \right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \left(G^i \frac{\partial t_1}{\partial \sigma^j} - \frac{\partial x_1^i}{\partial \sigma^j} \right) = 0, \quad j = 1, \cdots, p.$$

沿 K^*，函数 H 为连续.

II. 对每一组元素 $(t, x^*, u^*) \in K^*$，以及容许控制 $u = u(t)$，有

$$H(t, x^*, u, \lambda_0, \lambda) \geqslant H(t, x^*, u^*, \lambda_0, \lambda).$$

III. 设 $$a^{ij} = \frac{\partial^2 \left(H + \sum_{k=1}^{r} \mu^k R^k \right)}{\partial u^i \partial u^j}, \quad i, j = 1, \cdots, m,$$

并设 $I(t, x)$ 为使得 $R^i(t, x, u^*) = 0$ 成立的 $i \in \{1, \cdots, r\}$ 的子集，则在 K^* 的每一点处，对满足方程组

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial R^i}{\partial u^j} e^j = 0, \quad i \in I$$

的所有向量 $e = (e^1, \cdots, e^m)$，下列关系式成立:

$$\sum_{i,j=1}^{m} e^i a^{ij} e^j \geqslant 0.$$

这一定理可以由引进松弛变量 ξ 并将控制问题转化为变分法问题来证明. 我们可以用 G. A. Bliss ([12])得到的并由 E. J. McShane ([13]) 扩充的某些必要条件，这些条件再转变为对控制问题的条件，从而导致定理的证明. 条件 I 来自 Lagrange 乘子法则，条件 II 来自 Weierstrass 条件，而条件 III 和不等式 $\mu \leqslant u$ 是来自 Clebsch 条件. 条件 I 和 II 组成对这一问题的 Понтрягин 最大值原理的形式. 由于 Понтрягин 取的 $\lambda_0 \leqslant 0$，因此 H 函数与上述的 H 正好反号. Понтрягин 最大值原理有广泛的应用. 近几年来已有最大值原理对偏微分方程模型以及随机性模型的推广.

【动态规划与控制过程】 设 $W(t, x)$ 作为初始时刻与状态 (t, x) 的函数表示上述泛函 $J(u)$ 的最小值. Bellman 用动态规划方法得到的必要条件是如下的方程([9]):

$$W_t(t, x) = -\min_u \left[f(t, x, u) + \sum_{i=1}^{m} W_{x^i} G^i(t, x, u) \right],$$

其中 $u = u(t)$ 遍历所有的容许控制 u.

由此方程能导出 Hamilton-Jacobi 方程的一种形式. Bellman 还证明了动态规划方法对于较一般的控制过程包括适应控制过程的有效

性（[9]）. 他的做法是利用对最优控制成立的泛函方程求解.

【函数空间的一些控制问题】 自 Понтрягин 等人发表了关于最优控制的结果([7])之后，对于将此原理推广到涉及偏微分方程的控制问题的方向上，已经有相当多的工作，其中有一些问题可以放在抽象函数空间的控制理论的范畴内予以处理. 如对于发展方程(evolution equation)的控制问题即可归结为抽象函数空间中的常微分方程的控制问题，只要将空间微分算子作为适当的函数算子处理.

1. Понтрягин 最大值原理.

Ю. В. Егоров ([15]) 推广了Понтрягин 最大值原理使之适用于 Banach 空间中的常微分方程. 应用动态规划的方法, P. K. C. Wang(王耿介)([16]) 在 1964 年与 W. L. Brogan ([17]) 在 1965 年也对由偏微分方程描述的系统获得相应的最大值原理. 1965 年, А. Г. Бутковский ([18])也对涉及偏微分方程和积分方程的控制系统得到了最大值原理连同许多其他的有兴趣的结果. 也在 1965 年, A. V. Balakrishnan ([19]), 利用凸规划的方法, 研究了关于 Banach 空间的发展方程的时间最优和终值问题. 此后, A. Friedman ([20]) 用不同的方法改进了 Balakrishnan 的结果. 他们的结果在形式上类似于原来对常微分方程所得到的类似结果. 用泛函分析的方法, J.-L. Lions([21])解决了关于偏微分方程的控制理论的许多问题, 特别是推导出一些变分不等式, 它相应于 Понтрягин 最大值原理. Lions 还从这些不等式推出一系列的"单侧边界问题".

2. **可控性** (Controllability).

在偏微分方程的控制理论中出现的控制大体上有两种类型. 这就是, 分布控制以及边界控制. 前者是控制函数定义在某一空间的区域上, 后者则是控制函数定义在某个区域的边界上. Бутковский ([18]) 将关于偏微分方程的可控性问题化为矩量问题进行过处理. 与此类似, D. L. Russell([22])通过利用非调和 Fourier 级数解矩量问题, 分析了一维波动方程的可控性问题. 考虑发展方程

$$\frac{du}{dt} = Au + Bf, \tag{2}$$

在 Hilbert 空间 X 中定义且具有初始条件

$$u(0) = 0,$$

其中 A 是一个 X 中的强连续半群 $\{e^{tA},\ t \geqslant u\}$ 的无限小生成算子, 而 B 是由一个 Hilbert 空间 Y 到 X 的有界算子. 我们取 $C^1([0, \infty), Y)$ 作为我们的容许控制类. 对任一控制 f, (2)式的唯一解

$$u(t) = \int_0^t e^{(t-s)A} Bf(s) ds$$

称为轨线. 我们说 (2) 式写出的方程在时刻 T 可控, 是指 X 是集合

$$R_T = \left\{ \int_0^T e^{(T-S)A} Bf(s) ds \,\middle|\, f \in C^1([0, T], Y) \right\}$$

的闭包 $\overline{R_T}$. 此方程为可控于某一有限时刻, 是指 $X = \overline{\bigcup_{T>0} R_T}$. 显然, 如 $T \leqslant S$, 则 $\overline{R_T} \subset \overline{R_S}$. 如果 $\{e^{tA}\}$ 是全纯半群, 则 $\overline{R_T} = \overline{R_S}$, 因此这种情形的可控性是与 T 无关的. 对于热传导方程, 其中 $A = \Delta$, $\{e^{tA}\}$ 为全纯, 因此可控性是独立于时间 t 的. 但是, 若将一个波动方程写成一阶发展方程组, 则可控性取决于时间(Russell [22]). H. O. Fattorini ([23][24]) 研究了 (2) 的可控性与 A, B 性质的关系在假定 A 是半有界的自伴算子的情形. 推广了 LaSalle 对常微分方程描述的情形所得到的结果. Fattorini 给出了为使 (2) 为可控的 (对有限维的 Y 及某些 B) 须使 A 满足的充分必要条件. 对于高阶发展方程的可控性也已由 Fattorini ([25])进行过研究, 他还研究了对边界控制问题的可控性, 将其归结到分布控制的情形([26]).

[参] [1] R. Bellman-I. Glicksberg-O. Gross, On the bang-bang control problem, Quart. Appl. Math; **14** (1956), 11—18; [2] Н. Н. Красовский, К теории оптимального регулирования, Automat. i Telemeh., **18** (1957), 960—970; [3] J. P. LaSalle, The time optimal control problem, Contributions to the theory of nonlinear oscillations V, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1960, 1—24; [4] А. Ф. Филиппов, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования, Вестник Московского Унив., **2** (1959), 25—32; [5] E. B. Lee-L. J. Markus, Optimal control for nonlinear processes, Arch. Rational Mech. Anal., **18** (1961), 36—58;

[6] Р. В. Гамкрелидзе (R. V. Gamkrelidze), Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Известия Акад. Наук СССР, 22(1958), 449—474; [7] Л. С. Понтрягин-В. Г. Болтянский-Р. В. Гамкрелидзе-Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961 (英译本: L. S. Pontrjagin-V. G. Boltjanskiĭ-R. V. Gamkrelidze-E. F. Mishchenko, The mathematical theory of optimal processes, Interscience, 1962); [8] R. Bellman, Dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1957; [9] R. Bellman, Adaptive control processes, A guided tour, Princeton Univ. Press, 1961; [10] R. Bellman-S. Dreyfus, Applied dynamic programming, Princeton Univ. Press, 1962; [11] L. D. Berkovitz, Variational methods in problems of control and programming, J. Math. Anal. Appl., 1 (1961), 145—169; [12] G. A. Bliss, Lectures on the calculus of variations, Univ. of Chicago Press, 1946; [13] E. J. McShane, On multipliers for Lagrange problems, Amer. J. Math., 61 (1939), 809—819; [14] 制御工学ハンドブック, 朝倉, 1964, 特别是其中的 II 理論篇; [15] Ю. В. Егоров Sufficient conditions for optimality in Banach space, Mat. Sb. 64. (1964). 79—101; [16] P. K. C. Wang (王耿介), Control of distributed parameter systems, in Advances in control systems I. ed, by C. T. Leondes, Academic Press (1964). p. 75—172; [17] W. L. Brogan, Optimal control theory applied to systems described by partial differential equation, Ph. D. thesis, U. C. L. A, 1965; [18] А. Г. Бутковский, Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, Изд. "Наука", Москва, 1965 (英译本: Theory of optimal control of distributed parameter systems, American Elsevier, 1969); [19] A. V. Balakrishnan, Optimal control problems in Banach space, SIAM J. Control. 3 (1965), 152—180; [20] A. Friedman, Optimal control in Banach space, Math. Anal. Appl. 18 (1967), 35—55; [21] J.-L. Lions, Optimal control of systems governed by partial differential equations (in French), Dunod 1968 (英译本: Springer, 1971); [22] D. L. Russell, Non harmonic Fourier series in the theory of distributed parameter systems, J. Math. Anal. Appl. 18 (1967), 542—560; [23] H. O. Fattorini, Some remarks on complete controllability, SIAM J. Control. 4 (1966) 686—693; [24] H. O. Fattorini, On complete controllability of linear systems. J. Differential Equations, 3 (1967), 391—402; [25] H. O. Fattorini, Controllability of higher order linear systems, in Mathematical theory of control, ed. by Balakrishnan and Neustadt, Academic Press (1967), p. 301—311; [26] H. O. Fattorini, Boundary control systems SIAM J. Control, 6 (1968), 349—385.

库存管理论 [英 inventory control 法 contrôle du magasin 德 Vorratskontrol 俄 теория управления запасами, теория инвентаризации 日 在庫管理論] 建立**库存管理论**,必须探讨 i)费用与收益, ii) 需求, iii) 运送,并确定它们的数学结构. 关于 i), 有 1) 订货费或生产费, 2) 储存费(保管费), 3) 贴现率, 4)罚金, 5)收益(但是价格及需求被置于企业的控制之外), 6) 与生产率变化有关的费用,7)处理费,等等. 关于 ii), 有能够完全预测的情形与不能的情形. 还有需求行情稳定的情形与不稳定的情形. 对于需求量不是预先已知, 但对需求量的概率分布规律为已知的情形, 以及对需求量为已知的固定量, 但它的出现时期可看作随机变量且服从已知的概率分布规律的情形, 已建立起它们的理论. 至于连这些随机变量的概率分布规律也为未知的情形,可以考虑运用极小极大原理. 关于 iii) 的问题, 是在从订货至到货, 从下达生产指令到产品制造出来之间有一个时间延滞, 同时在这一时间内的需要量又不能确实预先知道的情况下出现的.

库存管理论的数学模型, 有的假定定货和发货皆是在一系列等间隔的时间出现, 而在另外的情形, 则假定在相继的时期中的需要量是独立随机变量. 设 x_t 为在某一期间的初始时的库存水平, y_t 为发出订单后的库存水平, z_t 为订货量, r_t 为销售量, 当考虑离散的时间间隔,且无上述时滞时, $z_t = y_t - x_t$,

$$x_{t+1} = y_t - r_t,$$

设需求量为 ξ_t, 期间初始时作出生产决定或订货决定,其后出现需求,而收益及费用是决定于需求和库存时,将费用作为负的收益汇算时,则

$$\begin{aligned}\text{收益} &= \text{价格} \times \text{销售量}\\ &= r(\xi_t - \max(0, \xi_t - y_t)),\end{aligned}$$

$$\text{订货费} = c(z_t),\ \text{保管储存费} = h(y_t),$$

$$\text{处理费} = v(y_t - \xi_t),$$

$$\text{罚金} = \begin{cases} p(\xi_t - y_t), & \xi_t - y_t > 0,\\ 0, & \xi_t - y_t \leqslant 0.\end{cases}$$

随着生产费用而变化的费用 $= G(z_t - z_{t-1})$. 通过以上的分析, 利润 π_t 是由收益中扣除订货,储存,罚金,处理,由生产率变化而引起的费用得到的:

$$\begin{aligned}\pi_t = r(\xi_t - \max(0, \xi_t - y_t)) - c(z_t)\\ - p(\xi_t - y_t) - h(y_t) - v(y_t\\ - \xi_t) - G(z_t - z_{t-1}).\end{aligned}$$

最优策略的决定是: 1) 若已知需求 ξ_t,则

取使 π_t 为最大的 x_t，但 x_{t-1} 设为已知；2）若需求 ξ_t 为未知，并可将它看成随机变量时，则使 π_t 的期望值为最大．不论是哪一种情形，ξ_t 都是在计划者的控制之外的外部变量．$r\xi_t$ 在策略的比较中可以不予考虑．而 $r\cdot\max(0,\xi_t-y_t)$ 可以纳入罚金之中．于是，在静态的库存模型中，问题即为：使损失

$$L_t(z_t|x_t)=c(z_t)+p(\xi_t-y_t)+h(y_t)+v(y_t-\xi_t)+G(x_t-x_{t-1}).$$

或其期望值达到极小．以上只是一段期间，一般地，在 T 段期间中，损失的贴现值为

$$\lambda(z|x_1)=\sum_{t=1}^{T}a^{t-1}L_t(z_t|x_t)+V(y_T-\xi_T),$$

这里 $0<a<1$ 为贴现率，右边最后一项为处理费，$z=(z_1, z_2,\cdots, z_T)$ 为确定库存的策略．进一步推广到无限段期间，则为

$$\lambda(z|x_1)=\sum_{t=1}^{\infty}a^{t-1}L_t(z_t|x_t).$$

一般说来，想通过对于这些数学模型进行分析，找出一个构造性方法求出最优策略，并不是容易的．在特殊情况下，有三种处理这些模型的方法：第一，在问题的参数全部给定的情形，提供确定最优策略的实际的计算公式．第二，建立最优策略应当满足的函数方程，并对之求解的方法．第三，是推广非线性规划†的特殊方法．关于第一种，确定性或随机性库存模型中的经济批量公式即为其例．关于第二种，以 R. Bellman 的动态规划† 为依据的方法是有名的．关于第三种，由于非负条件和边界条件起作用，数学规划†的特征尤为显著．斯坦福大学在这方面的研究是著名的．在适当范围的策略当中，要求最优策略时往往就是已知的实际上经常采用的库存管理方式．例如，**二库法**（two-bin system）或（s, S）策略等，都是可以由这样的理论导出．二库法，就是一旦库存量 x 减少到 s 这一界限以下时立即订货，使库存量为 S，只要 $x>s$ 就不订货这样一种方式．对于需求的概率分布的变动，可以考虑动态的库存模型．这种场合下的（s, S）策略的作用特性也有所讨论．

【参】［1］K. J. Arrow-S. Karlin-H. E. Scarf, Studies in the mathematical theory of inventory and production, Stanford Univ. Press, 1958;［2］H. E. Scarf-D. M. Gilford-M. W. Shelly, Multistage inventory models and technigues, Stanford Univ. Press, 1963;［3］T. Whitin, The theory of inventory management, Princeton Univ. Press, 1953;［4］横山保-福場庸，在庫管理，共立出版，1959;［5］北川敏男，在庫管理，現代統計学辞典，東洋経濟，1962;［6］G. Hadley-T. M. Whitin, Analysis of inventory systems, Prentice-Hall, 1963.

生产计划理论［英 scheduling, production planning　法 plan de production　德 Produktionsplan　俄 теория планирования производства　日 生產計画理論］所谓生产计划理论在各方面都可以见到．作为经济计划的计划模型，有 1）财政政策的，2）最终需求的，3）结构形式的，4）总支出的，5）工业化的各种类型，其中，2），3）及 5）都侧重于生产方面，因此在广义上都可以称为生产计划理论．

然而，作为**生产计划理论**首先应当举出的是自 T. C. Koopmans 命名以后发展起来的**活动分析**（activity analysis）．这个理论的主要内容是线性规划．事实上，用线性规划处理的应用问题，很多与生产活动有关．生产活动的可加性，分割与结合以及生产活动水平的限界等，都使生产计划的问题有可能归结为线性规划的问题．寻求最优生产计划的线性规划中的一些线性代数方法在现代经济学中占有重要地位．其所以如此，不仅因为线性规划作为一种计算方法是有用的，而且因为象线性规划的对偶问题那样，对于价格的作用，也提供以深刻的灼见．一般平衡理论的创始者对于各个经济变量之间存在的方程组解的存在性，未能给出解析的证明．关于确定这种平衡解的问题，联系到 Walras-Cassel 方程有 A. Wald 的论文，进而将寻求联立线性不等式组

$$\alpha\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i\leqslant\sum_{i=1}^{m}b_{ij}x_i,\quad j=1,2,\cdots,n,$$

$$\beta \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \geq \sum_{j=1}^{m} b_{ij}y_j,\ i = 1,\ 2,\cdots,\ m$$

的非负解（未知数为 α, β, x_i, y_j）的问题归结为求

$$\Phi(X,\ Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j \Big/ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

的鞍点的问题，对解的存在性的证明是由 J. von Neumann 利用 Brouwer 的不动点定理[†]作出的．这一结果表明，无论需求函数怎样给定，只要需求量不超过供给量，肯定会有平衡解存在．

生产活动与生产管理相结合而具体化为日程计划，这在机械加工等方面颇多遇到． 在这种情形，活动的不可分性，**准备费用**（set-up cost），作业程序的约束等问题都会产生，因而已不可能在线性的假定下进行讨论．尽管如此，仍然往往可以使用运输问题的线性规划方法．但是，日程计划有它的特殊困难．原因是： i）作业中有技术上的顺序要求，ii）在作业中有临时插进或其它特殊情况， iii）必须考虑工厂的能力和潜力，iv）预定计划的变更多，v）数据的处理量大．对此的处理方法，首先必须从**目标函数**（objective function, criterion）的定义开始．例如，应使其为最小的目标可有：1）偏离预定完成日期的方差，2）最大误期，3）工程期间库存物品的费用，4）机器设备的停工率，5）误期引起的费用，等等．至于数学模型，也有确定性模型与随机性模型之分．在如此种种可能场合之中，着眼于技术顺序的处理方式，仅仅选择那些技术上可行的方法，再从它们中间选出关于目标函数为最优的计划的方法，这就是所谓 Nelson 法（[9]）．此外，在附给**优先号数**（priority number）的做法上，有立足于成本费用的，也有用时间作为指标的，特别在后者之中，UCLA法是有名的（[10]）．还有称为**生产日程对策**（production scheduling game）的方法．这是根据一定的准则，给结果评分，据此有助于认识判断准则的必要性，以及统一计划的重要性．

作为生产计划理论，其次应当提到的是与库存计划论有关的方法，有时也与销售计划论相联系．例如，设在时刻 t 的生产速度为 $z(t)$，需求量为 $r(t)$ 时，在 $z(t) \geq r(t)$ 的条件下，使

$$\int_0^T (z(t) + \beta\max(dz/dt,\ 0))dt$$

成为最小的问题．利用库存管理的雇佣与生产的稳定化问题也在这个范围内．这就是说，把保持库存当作减少雇佣变动的一种手段． 这与利用库存管理使生产平稳化的问题有密切联系．至于生产的平稳化，动态规划方法是极其有效的．

【参】 [1] T. C. Koopmans, Activity analysis of production and allocation, John Wiley, 1951; [2] O. Morgenstern, Economic activity analysis, John Wiley, 1954; [3] J. von Neumann, Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerischen Fixpunktsatzes, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 8 (1937), 78—83; [4] R. L. Sisson, Sequencing theory, Progress in operations research I (R. L. Ackoff (ed.)), John Wiley, 1961; [5] G. B. Dantzig, Linear programming and extensions, Princeton Univ. Press, 1963; [6] A. Vazsonyi, Scientific programming in business and industry, John Wiley, 1958; [7] 吉谷龍一，生産計画と日程計画，日刊工業新聞社，1960; [8] 古瀬大六，生産の経済学，春秋社，1964; [9] R. T. Nelson, Job-Shop scheduling; an application of linear programming, Industrial Logistics Circuit Project, discussion paper no. 28, 1954; [10] A. J. Rowe-J. R. Jackson, Research problems in production routine and scheduling, Research Report no. 46, UCLA, 1955.

十九、力学和理论物理

单位制 [英 system of units 法 système des unités 德 Masssystem 俄 система единиц 日 单位系] 表示各种物理量的单位都可以由几个**基本单位** (elementary units) 推导出来，这些基本单位的体系就称为**单位制**.

【力学单位制】 力学的单位制通常都是由以长度、质量、时间为基本单位的**绝对单位制** (system of absolute units) 推导出来的，但是，有时也使用以长度、力、时间为基本单位的**重力单位制** (system of gravitation units). 表 1 中列出了绝对单位制(括号内为重力单位制)的单位名称. 此外，为了特殊目的，有时还使用表 2 所列的长度单位.

表 1 绝对单位制

单位制	基本单位 (括号内为重力单位制)	力	能量
C. G. S.	厘米 cm，克 g (克重)，秒 sec	达因	尔格
M. K. S.	米 m，千克 kg (千克重)，秒 sec	牛顿	焦耳
F. P. S.	英尺 ft，磅 lb (磅重)，秒 sec	磅达 §	

§ 质量单位是斯勒格 (slug).

表 2 长度的特殊单位

名 称	符号	大 小	用 途
微米	μm	10^{-3}mm	一般
埃	Å	10^{-8}cm	光的波长
X 射线单位		10^{-11}cm	X 射线的波长
天文单位		1.495×10^{11}m	太阳系
光年(光速×1 年)		9.46×10^{15}m	恒星系
秒差距	parsec	3.259 光年	恒星系

天文单位是地球与太阳的平均距离；秒差距是周年视差为 1″ 的距离 $\fallingdotseq 60^2\times(180/\pi)$ 天文单位.

【热学单位制】 温度单位在理论上采用绝对温度 (K)，而在实用上采用摄氏温度 (℃)，或者华氏温度 (°F). 热量单位采用卡(小卡) (cal)；使 1 克水从 14.5℃ 上升到 15.5℃所需要的热量称为 1 卡. 实用上多取它的 10^3 倍，称为千卡(大卡) (kcal). 热的功当量为 1 卡 = 4.184×10^7 尔格.

【电磁学单位制】 电磁学单位制有从静电学的 Coulomb 定律出发而以 Biot-Savart 定律规定磁学量的静电单位制，有从磁学的 Coulomb 定律出发得到的电磁单位制，也有把介电常数、磁导率当作无量纲量的 Gauss 单位制，但目前普遍使用的是 M. K. S. 合理单位制. M. K. S. 合理单位制是以力学量的 M. K. S. 单位制为基础推导出来的，其中电流的单位为安培 (ampere) (A). 安培的定义如下：让大小相等的稳恒电流通过在真空中相距 1 米、横截面积可以忽略不计的两根无限长平行导线，当每米导线的相互作用力为 2×10^{-7} 牛顿时，则这个电流的大小就是一安培.

【其他单位】 光强的单位为坎德拉 (cd)；按照 1948 年第九届国际计量会议的规定，处于铂凝固点温度的黑体，它的 1 米^2 平坦表面向垂直方向发出的光强度的 $1/(6\times10^5)$，就是 1 坎德拉 ($\approx$ 0.98 旧烛光) (1967 年第十三届国际计量大会修订的坎德拉定义如下：坎德拉是在 101325 牛顿每平方米压力下，处于铂凝固温度的黑体的 $1/(6\times10^5)$ 平方米表面在垂直方向上的光强度.——译者注). 该会议还规定，向各个方向均匀发光强度为 1 坎德拉的光源所发出的总光通量为 4π 流明 (lm)；以 1 流明的光通量均匀地照射 1 米^2 面积时的照度为 1 勒克斯 (lx). 在原子物理学中，经常使用电子伏特 (eV) 作为能量单位，这是一个电子通过 1V (伏特) 的电势差所获得的能量.

在理论工作中，有时也把万有引力常数、光速、Planck 常数和 Boltzmann 常数等普遍常数

的值取为 1 来规定质量、长度和时间等基本单位，这样的单位制也称为"绝对单位制"。

【参】［1］ 芝龟吉-白井俊明编，理化学定数表，岩波，1952；［2］ Handbook of chemistry and physics, 第四十五版，Chemical Rubber Co., 1964.

量纲分析 ［英 dimensional analysis　法 analyse dimensionelle　德 Dimensionsanalyse　俄 анализ размерностей　日 次元解析］ 物理量的单位制都可以由几个基本单位[*]推导出来，若以 θ, φ, ψ 等代表基本单位，则任何其他单位(称为**导出单位** (derived unit)) α，根据定义或者物理定律都可以表示为 $\alpha = c\theta^l\varphi^m\psi^n\cdots$ 的形式 (c, $l, m, n, \cdots$都是常数)。这里指数 $l, m, n, \cdots$ 就称为 α 的**量纲** (dimension)。这种表达法可以写为

$$[\alpha] = [\theta^l\varphi^m\psi^n\cdots],$$

称为**量纲公式** (dimensional formula)。通常以长度、时间、质量、温度、能量等作为基本单位，分别记作 L, T, M, θ, H 等。应用下述的 π 定理和相似定律去考察各物理量之间的关系，就叫做**量纲分析**。

π 定理 (π-theorem)。设有 n 个物理量 α, $\beta, \cdots$，如果 $f(\alpha, \beta, \cdots) = 0$ 这个关系式的成立与基本量的单位无关，则 $f(\alpha, \beta, \cdots) = 0$ 总是可以转换为 $F(\pi_1, \pi_2, \cdots) = 0$ 的形式；这里 π_i 是 $n - m$ 个无量纲量 (m 是基本量的个数)，它们具有 $\pi_i = \alpha^{a_i}\beta^{b_i}\cdots$ 的形式。在上式中如果取 $\pi_1 = \alpha\beta^{-r_1}\gamma^{s_1}\cdots$，而 π_2 以下都不含有 α，则 $\alpha = \beta^{r_0}\gamma^{s_0}\cdots\Phi(\pi_2, \pi_3, \cdots)$ 就表明 α 与其他各物理量 β, γ 等之间的关系。

相似定律 (law of similitude)。一般地说，两个同种类的物理系统，如果 π_i 的值相同，它们的物理状态就是相似的。因此，可以从模型实验的结果去推断实物的情况。

例如，考虑在不可压缩粘性流体中运动的几何形状相似的物体受到的阻力 D。设物体的速度为 v，物体的特征长度为 l，流体的密度为 ρ，粘滞系数为 μ (量纲公式为 $ML^{-1}T^{-1}$)，则由 π 定理可得 $D/\rho v^2l^2 = f(\rho vl/\mu)$。因此，由相似模型实验便可以求得左边的阻力系数。无量纲量 $R = vl/\nu (\nu = \mu/\rho)$ 称为 **Reynolds 数** (Reynolds number)。若考虑到重力所产生的造波阻力以及可压缩性的影响，还必须把重力加速度 g 和声速 a 包括进去，于是有

$$D/\rho v^2l^2 = f(vl/\nu, v^2/lg, v/a, C_1, C_2, \cdots)$$

(C_1, C_2 是与流体的性质有关的其他无量纲常数)。$Fr = v^2/lg$ 称为 **Froude 数** (Froude number)，$M = v/a$ 称为 **Mach 数** (Mach number)。

对于流体的热传递问题，若设固体的表面积为 S，单位时间内散发的热量为 $Q(HT^{-1})$，流体的导热率为 $k(HL^{-1}T^{-1}\theta^{-1})$，比热为 $c(HM^{-1}\theta^{-1})$ (括号里均为量纲公式)，两个特征温度为 T_0, T_1，而特征长度为 l，则除 R 外，还需考虑无量纲量 **Nusselt 数** (Nusselt number)

$$Nu = Q/(kS(T_1 - T_0)/l),$$

Prandtl 数 (Prandtl number)

$$Pr = \nu/\kappa \quad (\kappa = k/\rho c),$$

Grashoff 数 (Grashoff number)

$$Gr = l^3g(T_1 - T_0)/\nu^2T_0,$$

而且根据 π 定理，可以得到关系式

$$Nu = f(R, Pr, Gr, C_1, C_2, \cdots).$$

$$Pe = vl/\kappa = PrR$$

称为 **Péclet 数** (Péclet number)。

因为几个物理量之间成立的物理关系式，理论上是对基本(运动)方程进行数学运算而得到的，所以，在这些关系式中出现的数值系数在多数情况下数量级为 1，因此，相反地，在几个量之间进行量纲分析时，如果根据实验结果所决定的系数值不是过大或过小，就可以推断，在这几个物理量之间可能存在物理相关性。

【参】［1］ A. W. Porter, The method of dimensions, Methuen, 1933.

变分原理 ［英 variational principle　法 principe de variation　德 Variationsprinzip　俄 вариационный принцип　日 变分原理］ 在物理学的诸原理中，有一些不以微分形式而以变分形式表示的原理，它们描述某些量取极值的条件，这些原理总称为**变分原理**。在这些原理中，首先有

经典力学中的 Hamilton 原理和几何光学中的 Fermat 原理,此外在电磁学、相对论、量子力学、场论等部门中也都能见到变分原理的实例. 变分原理的最大特点是它与坐标系的选取无关. 在历史上,变分原理在产生当时曾带有宗教的和形而上学的色彩,而现在是以这一条原理为主导来给一般理论建立基础,因此被认为是物理学诸定律的最高形式.

【力学】 自从 1744 年 P. L. Maupertuis 发表了关于**最小作用定律**(law of the least action)的近乎神学的论文以来,L. Euler, C. F. Gauss, W. Hamilton, H. R. Hertz 等人相继进行了寻求单一的、普遍的力学原理的工作.

设 q_r 为一个质点系的广义坐标,考察函数 $L(q_r, \dot{q}_r, t)$ 从时刻 t_0 到时刻 t_1 的积分. 只要比较这个积分在时刻 t_0 从坐标空间一个定点 P_0 出发而在时刻 t_1 到达另一定点 P_1 沿各种路径的积分值,并适当地选取 L 的形式,则实际的(依照力学定律的)运动 $q_r(t)$ 可以由上述积分取极值(平稳值)的条件,即

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$$

来决定. 这就是 **Hamilton 原理** (Hamilton's principle),L 是 Lagrange 函数. 在 Newton 力学范围内,质点系的动能 T 可以用 $\dot{q}_r$ 的二次型表示. 如果作用在各质点上的力能够用不含 $\dot{q}_r$ 的势能的 V 梯度 $-\operatorname{grad} V$ 给出,则可以取 $L = T - V$. 而在带电粒子的狭义相对论力学中,也可以取

$$L = -m_0c^2(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}} - e\varphi + e(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{A});$$

这里 m_0 是粒子的静止质量,e 是电荷,$\boldsymbol{V}$ 是速度(它的大小是 v),c 是真空中的光度,φ 和 $\boldsymbol{A}$ 分别为电场的标量势和矢量势.

在广义相对论中,质点的运动可由变分原理 $\delta\int ds = 0$ (ds 为线元)导出,它的几何意义无非是四维时空的短程线而已.

【几何光学】 光线(经过反射、折射)通过 P_0, P_1 两点间的实际路径,可以由下列条件决定:即与其附近某些假想路径相比,通过时间取极值(平稳值). 这就是 **Fermat 原理** (Fermat's principle). 若设折射率为 n,则可以把这一原理表示为

$$\delta\int_{P_0}^{P_1} n\,ds = 0.$$

光线的反射定律、折射定律以及在均匀媒质中的直进定律,都可以从这一原理导出.

【场论】 从变分原理用适当的 Lagrange 函数不仅能导出质点系的运动方程,还可以导出场的方程(电磁场的 Maxwell 方程†,电子场的 Dirac 方程†,介子场方程,重力场方程等). 这时从 Lagrange 函数的相对论不变性以及规范不变性的假定出发,可以把场的各种可能的性质和守恒定律等作统一论述,这也是变分原理的一个特征.

特别是对于真空中的电磁场,Lagrange 函数的密度为

$$L = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2),$$

积分是在四维空间的某区域中进行的.

若令 $\boldsymbol{H}$ 为任意量子力学系统的 Hamilton 算子,则本征函数 ϕ 可以由下面的变分原理决定:

$$\delta\int \bar{\Phi}\boldsymbol{H}\phi\,d\tau = 0, \quad 这里 \int \bar{\Phi}\phi\,d\tau = 1.$$

其中 $\bar{\Phi}$ 是 ϕ 的共轭复数. 利用这种性质得到了变分法的直接法†,而基于直接法的数值解法,在求能量本征值的近似值以及本征函数的近似值时常常要用到. 特别是当 ϕ 被限定为一体波函数的积的形式时,可以导出 Hartree 方程,对它进一步适当地对称化,还可以导出 Fock 方程.

【参】[1] R. Courant-D. Hilbert, Methods of mathematical physics, Interscience, I 1953, II 1962 (中译本:R. 柯朗,D. 希尔伯特,数学物理方法卷 I 1958,卷 II 1977,科学出版社). → 变分法的[参].

Newton 力学 [英 Newtonian mechanics 法 mécanique newtonienne 德 Newtonsche Mechanik 俄 механика Ньютона 日 ニュートン力学] 关于表述物体运动现象的规律即运动定律的研究,是从研究落体运动开始的, G. Galilei (1564—1642) 首先建立了落体运动的

正确定律. 然而力和加速度的一般关系是 Newton 首先阐明的，他建立了下述的关于运动的三条定律，称为 **Newton 运动三定律** (Newton's three laws of motion). 以这三条定律为基础建立的力学称为 **Newton 力学**. 这些定律是 Newton 在他的巨著《原理》(Principia) 中发表的(1686—1687). 他在这部著作中，系统地阐述了引力定律及其应用、流体问题、太阳系内诸行星的运动等.

第一定律: 静止或作直线匀速运动的物体，如果不受使它改变运动状态的外来作用(即外力)，一切都永远保持它的原有状态.

这条定律又叫**惯性律**或**惰性律** (law of inertia).

第二定律: 物体运动的变化与作用力成正比，而且发生在力所作用的方向. 物体的质量 m 与速度 $\boldsymbol{V}$ 的乘积 $m\boldsymbol{V}$ 称为**动量**(momentum). 若令以适当的单位表示的力为 $\boldsymbol{F}$, 就可以把这条定律写为 $d(m\boldsymbol{V})/dt=\boldsymbol{F}$. 因为 $d\boldsymbol{V}/dt$ 是加速度 $\boldsymbol{\alpha}$, 所以当 m 一定时就可以把上式写为 $m\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{F}$. 这些方程称为**运动方程** (equations of motion). 有时也把第二定律简称为运动定律.

第三定律: 属于同一力学系统的两个物体间的相互作用力，大小相等方向相反. 这条定律又称为**作用与反作用定律**或简称为**反作用定律** (law of reaction).

Newton 力学的基础的严密公式化，在 E. Mach 之后曾进行了各种尝试. 进入本世纪以来，知道当物体的速度近于光速或运动范围小于原子半径时，Newton 力学就不适用了；于是建立了相对论和量子力学[†]. 与此相对，Newton 力学也称为**经典力学** (classical mechanics).

【参】→分析力学的【参】.

刚体动力学 [英 dynamics of a rigid body 法 dynamique de corps rigide 德 Dynamik des starren Körpers 俄 динамика твёрдого тела 日 剛体の力学] 【刚体】 内部任意两点间的距离，从力学的观点来说永远不变，而且施加任何外力也不发生形变的物体称为**刚体** (rigid body). 在力学中，刚体和质点都是为了把理论简化而引入的概念. 在实际存在的物体中，多数固体受到普通大小的外力作用时发生的形变很小，可以看做刚体. 刚体可以看做是无数质点的集合，因此适用于一般质点系的运动方程也适用于刚体，而且它的运动完全可以由下述动量定理和角动量(动量矩)定理来决定.

【动量定理】 设刚体 K 上的一点 $\boldsymbol{r}$ 处的微小体积的质量为 dm, 并且假定刚体的运动即 $\boldsymbol{r}$ 为时间的函数，这时称

$$\boldsymbol{Q}=\int_K \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dm$$

为刚体的**动量** (momentum). 若令作用于 K 的外力为 $\boldsymbol{F}_i\ (i=1,2,\cdots)$, 则

$$d\boldsymbol{Q}/dt=\sum \boldsymbol{F}_i.$$

这就是**动量定理** (theorem of momentum). 若令刚体的重心(质心) G 的速度为 $\boldsymbol{V}_G$, 加速度为 $\boldsymbol{A}_G$, 刚体的质量为 m, 则 $\boldsymbol{Q}=m\boldsymbol{V}_G$, 因而可以把上式写为

$$m d\boldsymbol{V}_G/dt=m\boldsymbol{A}_G=\sum \boldsymbol{F}_i.$$

对于空间的任意一点 $\boldsymbol{r}_0$,

$$\boldsymbol{H}=\int_K(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dm,\quad \times\text{表示矢量积}$$

称为 K 的围绕 $\boldsymbol{r}_0$ 的**角动量** (angular momentum). 令力 $\boldsymbol{F}_i$ 的作用点的矢径为 $\boldsymbol{P}_i$, 则

$$d\boldsymbol{H}/dt=\sum(\boldsymbol{P}_i\times\boldsymbol{F}_i)=\boldsymbol{G}.$$

这称为**角动量定理** (theorem of angular momentum). 对于有固定点 $\boldsymbol{r}_0$ 的刚体，取固定点 $\boldsymbol{r}_0$ 为原点，并令关于固定于空间的坐标轴的角动量 $\boldsymbol{H}$ 和刚体旋转的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的 x, y, z 分量分别为 H_x, H_y, H_z; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, 则

$$H_x=A\omega_x-F\omega_y-E\omega_z,$$
$$H_y=-F\omega_x+B\omega_y-D\omega_z,$$
$$H_z=-E\omega_x-D\omega_y+C\omega_z,$$

式中 A, B, C 分别为刚体的关于 x, y, z 轴的**转动惯量** (moment of inertia), D, E, F 称为**惯性积** (product of inertia), 可以分别用下式给出，即

$$A=\int(y^2+z^2)dm,\quad B=\int(z^2+x^2)dm,$$

$$C=\int(x^2+y^2)dm,\quad D=\int yzdm,$$

$$E=\int zxdm,\qquad F=\int xydm.$$

积分是遍及刚体全体的三重积分．用上面的方程可以把刚体绕固定轴的旋转完全描述出来；但是对于绕固定点旋转的刚体，在一般情况下，A, B, C, D, E, F 是时间的未知函数，因此，上面的方程实际上不太方便．

【惯性椭球】 二次曲面

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy=1$$

表示以原点为中心的椭球，称之为**惯性椭球**(ellipsoid of inertia)．如果选这个椭球的主轴 ξ, η, ζ 为坐标轴，就可以把惯性椭球的方程写为 $A\xi^2+B\eta^2+\Gamma\zeta^2=1$；$A, B, \Gamma$ 是关于 ξ, η, ζ 轴的转动惯量，称之为**主转动惯量**(principal moment of inertia)，ξ, η, ζ 称为**惯量主轴**(principal axis of inertia)．

若令角动量 $\boldsymbol{H}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在惯量主轴方向的分量分别为 H_1, H_2, H_3；$\omega_1, \omega_2, \omega_3$，则 $H_1=A\omega_1, H_2=B\omega_2, H_3=\Gamma\omega_3$．若令外力的合成力矩 $\boldsymbol{G}=\sum(\boldsymbol{P}_i\times\boldsymbol{F}_i)$ 的分量为 G_1, G_2, G_3，则 $d\boldsymbol{H}/dt=\boldsymbol{G}$ 的分量成为

$$Ad\omega_1/dt=G_1+(B-\Gamma)\omega_2\omega_3,$$
$$Bd\omega_2/dt=G_2+(\Gamma-A)\omega_3\omega_1,$$
$$\Gamma d\omega_3/dt=G_3+(A-B)\omega_1\omega_2.$$

这称为 **Euler 方程**．

惯性椭球固定在刚体上而且随刚体旋转，因此考察惯性椭球的运动就可以同时知道刚体本身的运动．这种用惯性椭球的运动表示刚体运动的方法称为 **Poinsot 表示**(Poinsot's representation)．惯性椭球相同的两个刚体，如果外力的力矩相等，即使形状不同，其运动也相同．

自由运动的刚体，其重心 G 的运动可以根据动量定理决定．绕重心旋转的运动，也可以根据把角动量定理 $d\boldsymbol{H}/dt=\boldsymbol{G}$ 加以变形而得到的公式 $d\boldsymbol{H}'/dt=\boldsymbol{G}'$ 来决定．这里 $\boldsymbol{H}'$ 是关于重心的角动量，$\boldsymbol{G}'$ 是外力关于重心的力矩．在这种情况下，也是取关于以重心为中心的惯性椭球的主轴的方程，才便于研究．

【参】 [1] F. Klein-A. Sommerfeld, über die Theorie des Kreisels I, II, III, IV, Teubner, 1910. 另一分析力学的［参］．

分析力学 ［英 analytical dynamics 法 méchanique analytique 德 analytische Mechanik 俄 аналитическая механика 日 解析力学］ I. Newton 本人的力学表示法是几何方法，后来 L. Euler, J. L. Lagrange 等人研究了用分析法处理力学的方法，称之为**分析力学**．Lagrange 采用单值地表示力学系位置的所谓**广义坐标**(generalized coordinates) $q_j\,(j=1,2,\cdots,f$；f 是系的自由度）导出了 **Lagrange 运动方程**(Lagrange's equation of motion)：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q_j}=0,$$
$$j=1,2,\cdots,f.$$

这里 $\dot{q}_j=dq_j/dt$，$\mathscr{L}$ 表示动能 T 和势能 U 的差，是 $q_j, \dot{q}_j$ 的函数，称为 **Lagrange 函数**(Lagrangean function)．W. R. Hamilton 还利用

$$p_j=\partial T/\partial\dot{q}_j,$$
$$H=\sum p_j\dot{q}_j-\mathfrak{L}$$
$$=H(p_1,\cdots,p_f;q_1,\cdots,q_f)$$

把运动方程改写为下面的形式：

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},$$
$$j=1,2,\cdots,f,$$

称为 **Hamilton 典型方程**(Hamilton's canonical equations)，p_j 称为与 q_j 共轭的**广义动量**(generalized momentum)，q_j, p_j 称为**典型变量**(canonical variables)．当用 q_j 表示力学系的位置时，如果表达式中不显含时间 t，则 **Hamilton 函数**(Hamiltonian function, Hamiltonian) H 和系统的总能量 $T+U$ 一致．

【典型变换】 使典型方程的形式不变的变换 $(p,q)\to(P,Q)$：

$$p_j=\frac{\partial W}{\partial q_j},\quad P_j=-\frac{\partial W}{\partial Q_j},\quad K=H+\frac{\partial W}{\partial t}$$

称为**典型变换**(canonical transformation)．这里

$$W=W(q_1,q_2,\cdots,q_f;Q_1,\cdots,Q_f),$$

K是对于变换之后的系统的哈密顿函数．典型变换的集合构成一个群，称为**典型变换群**(group of canonical transformations)．若令 ε 为无穷小常数，典型变换群的无穷小变换可用下式，即

$$dp_i = -\varepsilon \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad dq_i = \varepsilon \frac{\partial S}{\partial p_i}$$

给出．这里 S 是 p, q 的任意函数，称为无穷小变换的**母函数** (generating function)．可以认为，典型方程意味着 p, q 在 $\varepsilon = dt$ 范围内的变化是以 $H(p, q, t)$ 为母函数的无穷小典型变换．

p, q 的任意函数 $F(p, q)$ 因无穷小变换而产生的变化为

$$dF = \varepsilon(F, S).$$

这里，称

$$(u,v) = \sum_i \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = \sum_i \frac{\partial(u, v)}{\partial(q_i, p_i)}$$

为 Poisson 括号[†]．于是力学量 $F(p, q)$ 对时间的变化可以写为

$$dF/dt = (F, H).$$

因此，满足 $(F, H) = 0$ 的函数 $F(p, \dot{q})$ 是典型方程的积分[†]．

如果典型变换 $(p, q) \to (P, Q)$ 使动量和坐标成为 $P_i = \alpha_i$, $Q_i = \beta_i$ 这样的具有一定值的系统，运动就可以由

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

来决定．这里W是 **Hamilton-Jacobi 方程**，即

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial W}{\partial q_f}; q_1, \cdots, q_f, t\right) = 0$$

的全解[†]（→ 接触变换）．

【参】［1］E. T. Whittaker, Analytical dynamics, Cambridge, 1917;［2］山内恭彦，一般力学，岩波，1941，增订版 1957;［3］伏見康治，現代物理学を学ぶための古典力学，岩波，1964;［4］G. D. Birkhoff, Dynamical systems, Amer. Math. Soc. Colleq. Publ., 1927;［5］M. Born, Vorlesungen über Atommechanik, Springer, 1925.

球面天文学 ［英 spherical astronomy 法 astronomie sphérique 德 sphärische Astronomie 俄 сферическая астрономия 日 球面天文学］ 在天体力学[†]中，主要研究以太阳为基准的行星、彗星的真实位置，以地球为基准的月球、卫星的真实位置；而在**球面天文学**中，主要研究天体在以地面观测者为中心的天球上的视位置和运动等问题．因此，球面天文学的主要目的是探讨使天球上的天体的位置发生变化的所有的原因以及这些原因所产生的影响．这些原因有大气差、地心视差、光行差、周年视差、岁差、章动、自行等等．

天体的光线通过地球周围的大气时，由于大气各层的密度不同而发生折射，于是受到**大气折射**(astronomical refraction)的影响．当天体在天顶时大气差为零，在地平线时大气差最大(约为 34′.5)．

与月球、太阳、行星等天体间的距离相比地球半径还不是小到可以忽视的程度，因此，在地球表面和在地球中心所看到的方向要有差异．这种差异当观测者位于赤道上而天体在赤道的水平线上时最大，称为**地心视差**(geocentric parallax)．月球的地心视差在 53′.9 到 60′.2 之间变化，太阳在 8″.64 到 8″.94，水星在 6″ 到 16″.5，金星在 5″ 到 32″，火星在 3″.5 到 23″.5，木星在 1″.4 到 2″.1，土星在 0″.8 到 1″.1 之间变化．对于像恒星那样的很远的天体，可以把它的地心视差看做零．

地球绕着与其公转轨道面约成 66°.5 角的地轴以大约一日 (23 小时 56 分 4.691 秒)为周期自转，同时绕着太阳以一年 (365.2564 天) 为周期公转．于是地球表面上的观测者因所在位置的纬度不同而以不同的速度 (例：在赤道上为 0.465 公里/秒，在东京为 0.370 公里/秒) 自转，又以 29.785 公里/秒的平均速度沿轨道公转．由于地球的自转速度和公转速度的影响，来自恒星的光线要产生光行差，因此可以看到恒星的视位置在变化．由自转速度产生的光行差叫**周日光行差**(diurnal aberration)；由公转速度产生的光行差叫**周年光行差**(annual aberration)．在地球上看到的恒星的位置，由于周日光行差

的影响，在表观上以一日为周期在 0″ 到 0″.32 的范围内变化；由于周年光行差的影响，在表观上以一年为周期在 0″ 到 20″.496 的范围变化．此外，关于太阳系内的天体，光线到达观测者的时间有差异，需要加以修正．

所谓**周年视差**（annual parallax），是以地球和太阳为基线的两端，由此两端所看到的恒星的方向差，这也是以一年为周期变化的．实际上，需要考虑周年视差的只有离地球极近的恒星，这样的恒星不过二十个左右．

由于受到月球、太阳、行星的引力的影响，地轴在黄道极点的周围作岁差运动，春分点不断地在黄道上逆行．在这种情况下，由于月球、太阳、行星的引力是周期变化的，所以春分点的运动也不是一定不变的，可以把它分为不变的运动和周期运动两种，前者称为**进动**（precession），后者称为**章动**（nutation）．因为恒星的位置是以春分点为基准决定的，所以它的赤经、赤纬受岁差和章动的影响也在不断地变化．

因为所有的恒星都在空间运动（**自行**），所以恒星在天球上的位置也在改变．

上述事项是球面天文学的主要研究对象，此外，研究日蚀、月蚀问题的日月蚀理论，研究天体的视位置和实际轨道的关系的轨道计算†，计算太阳、月球、行星、恒星的位置而编制天体历的历法计算学等也可看做是球面天文学的一部分．另外，还有实用天文学和航海天文学也可以看做是球面天文学的延伸．所谓实用天文学是研究观测天体用的仪器（子午仪、子午环、天顶仪、六分仪、经纬仪、赤道仪、天文钟等）的理论和用法，或研究时刻、经度、纬度、方向角的观测法及产生的观测误差的学问；航海天文学所研究的是决定船舶在海上的位置的方法．最近还利用雷达测定从观测者到月球、行星的距离，有助于决定太阳系的大小．

【参】［1］ W. Chauvenet, Spherical and practical astronomy I, Lippincott, Philadelphia, 1906;［2］ W. M. Smart, Textbook on spherical astronomy, Cambridge, 1936;［3］ 荒木俊馬，球面天文学，恒星社，1950;［4］ 鈴木敬信，球面天文学，岩波講座数学，1935;［5］ E. W. Woolard-G. M. Clemence, Spherical astronomy, Academic Press, 1966.

天体力学［英 celestial mechanics, astro-dynamics 法 mécanique céleste 德 Mechanik des Himmels 俄 небесная механика 日 天体力学］ **天体力学**主要是用力学方法研究太阳系内的行星、彗星、月球、卫星等天体的运动的学问．更广义地说，银河系内的恒星、双星的运动，天体的平衡形状，地球、月球等天体的自转运动等也是这门学问的研究对象．

这门学问的基础是 Newton 力学†，必要时把广义相对论†的效应等作为修正加以考虑．这样，根本问题就是解运动方程；但是，众所周知，n 体问题的微分方程，当 $n>2$ 时是不能完全解出的（→ 三体问题）．但是，在具体情况下，n 体问题可以对照着观测精度求近似解，探讨这种方法的学问也是天体力学中的一个主要部分．

可以看做质点的两个天体的运动，是相互引力作用下的**二体问题**（two body problem），利用重心运动的积分可以把这样问题归结为有心力作用下的一体问题．它的 Hamilton-Jacobi 方程†满足分离条件，因此是可以完全解出的．二体问题的轨道是以二体的重心为一焦点的二次曲线，大多数的天体作**椭圆运动**（elliptic motion）．有关椭圆运动的 Kepler 轨道要素†，是 Hamilton-Jacobi 方程的积分常数的函数，是由初始条件决定的常数．

【摄动】 研究三体以上的 n 体问题†时，首先由二体问题的椭圆运动出发，然后用摄动†法，即**常数变易法**（method of constant variation）求出展开成微小参数的幂级数的解．这个参数，对于行星的运动是行星与太阳的质量比，对于月球的运动是由地球上看到的地球与月球和地球与太阳的距离之比．最近由于电子计算机的发展，对于行星运动等，通过数值计算，用了相当长的时间求得了把所有引力都考虑在内的微分方程的解．但是，当讨论太阳系的稳定性等问题时，还是用解析法比较便利．在这种情况下，通过典型变换等消去短周期摄动项来求**长期摄动**（secular perturbation）的方法更为有效，这是一种平均化的方法．到目前为止，由于

用摄动法不能保证解的收敛性，所以有关运动的稳定性的许多重要问题还没有得到解决．至于太阳系的行星的长期摄动，由于行星轨道的偏心率以及轨道面对黄道面的倾斜角都很小，可以通过忽视其三次方以上的各项，来求解线性方程．这种运动方程的固有值，在一般情况下，相当于近日点或轨道面升交点（→ 轨道计算[†]）的运动的平均角速度，决定这个固有值的固有方程特别称为**长期方程**（secular equation）.

【人造卫星】由于人造卫星在地球的附近运动，所以讨论这种运动时就不能把地球看做质点或球体；必须把地球看做扁平的旋转椭球．这时，首先从二体问题的椭圆轨道出发，这个二体问题是把地球的位势看做球体的位势来解的，而地球是扁平的，由此产生的影响可以作为摄动来计算．然而，众所周知，即便采取与地球的实际位势非常接近的某种特殊位势，Hamilton-Jacobi 方程也满足分离条件，是可以解的．这种分离型位势等于处于虚轴上的具有相等质量的二固定中心问题的位势．如果地球的位势是轴对称的，则卫星的运动方程的自由度是 2．这时对于分离型位势存在两个基频，当这两个频率相等时成为所谓"临界倾斜"问题，这是很有数学趣味的问题．人造卫星的力学问题也可以应用于银河系内的恒星运动．

【平衡形状】把天体看做流体研究它在旋转时的**平衡形状**（equilibrium figures）和稳定性，从很早以来就开始了．特别是关于两个互相有潮汐作用的天体的研究，是很有趣味的．关于地球-月球系统消长的研究也是这个问题的应用．

地球自转的研究，即岁差、章动、纬度变化的问题，也是弹性理论、地球物理学的应用．

【参】［1］H. Poincaré, Les méthodes nouvelies de la mécanique céleste 1, 2, 3 Gauthier-Villars, 1892—1899; ［2］荻原雄祐，天体力学の基礎Ⅰ，河出，上 1947，下 1950（英译本：Y. Hagihara, Celestial mechanics I, Dynamical principles and transformation theory, MIT Press, 1970, II, Pt. 1 and Pt. 2, Pertubation theory MIT Press 1972, III, Pt. 1 and Pt. 2, Differential equations in celestial mechanics, Japan Society for the Promotion of Science, 1974, IV. pt. 1 and pt. 2 Periodic and quasiperiodic solutions. Japan Society for the Promotion of Science. 1975); ［3］A. Wintner, The analytical foundation of celestial mechanics, Princeton Univ, Press, 1941; ［4］L. Lichtenstein, Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Springer, 1933; ［5］C. L. Siegel, Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer, 1956; ［6］F. Tisserand, Traité de méchanique céleste 1—4, Gauthier-Villars 1889—1898; ［7］D. Brouwer-G. M. Clemence, Methods of celestial mechanics, Academic Press, 1961; ［8］C. L. Siegel—J. K. Moser, Lectures on celestial mechanics, Springer, 1971 (revised and enlarged translation of ［6］).

轨道计算［英 orbit determination 法 détermination de l'orbite 德 Bahnbestimmung 俄 определение орбиты 日 軌道論］研究**轨道计算**的目的在于下述各点：1）讨论天体的轨道，2）根据测得的天体位置决定轨道要素，3）由已知的轨道要素推算天体位置．所研究的天体主要是太阳系内的大行星、小行星、彗星、卫星、人造卫星等；广义地说，还包括决定流星、目视双星、分光双星、蚀变光星等天体的轨道．

【Kepler 轨道要素】现在以小行星为例讨论天体的轨道，小行星运行描绘着以太阳为一焦点的椭圆轨道．这个椭圆轨道可以由初始条件或 Hamilton-Jacobi 方程的积分常数决定（→ 天体力学）；但是，在天文学中通常用六个 **Kepler 轨道要素**（Kepler's orbital elements）（图 1）决定轨道．这就是说，椭圆的大小和形状由

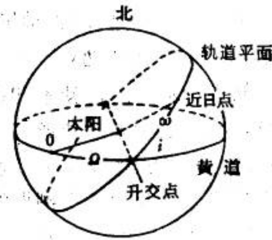


图　1

半长轴 a 和偏心率 e 决定，长轴的方向由近日点参数（从升交点到近日点的角距离）ω 决定（有时不用 a 而用近日点距离 $q=a(1-e)$）．轨道面的位置用它对黄道面的倾角 i 和升交点黄径 Ω 决定，小行星在轨道上的位置用它通过近日点的时刻 t_0 决定．由 Kepler 第三定律 $n^2a^3=\mu$ 求出 a 就能计算小行星的公转周期 T

或平均角速度 $n = 2\pi/T$，即**平均运动**（mean motion）。平均运动是表示椭圆运动的 Hamilton-Jacobi 方程的解的基本频率，它是能量常数 $-\mu/2a$ 对作用变数 $\sqrt{\mu a}$ 的导数.

为了表示天体在椭圆上的位置，要用近日点和天体的角距离，即**真近点角**（true anomaly）v，**偏近点角**（eccentric anomaly）E，以及**平近点角**（mean anomaly）$M = n(t - t_0)$. 其中能够从 Kepler 轨道要素直接求出的是平近点角；然而，在计算天体的坐标时需要把它变换成真近点角或偏近点角. E 和 M 的关系可以用 **Kepler 方程**，即

$$(1) \qquad E - e\sin E = M$$

表示. 解这个方程并以 M 表示 E，则得

$$(2) \qquad E = M + \sum_{n=1}^{\infty}(2/n)J_n(ne)\sin nM,$$

式中 J_n 是 n 阶 Bessel 函数†. 然而实际求解时常用数值方法或直接查表.

【轨道计算】 观测天体的位置通常是测定天球上的两个坐标（赤经，赤纬）. 因此，为了决定六个轨道要素需要隔适当的时间观测三组位置. 如果能够用某种方法知道观测者和天体的距离，通过计算可以立即求出天体的轨道要素. 但是，在一般情况下并不是这样. 决定轨道需要特殊技术. 在十九世纪初期，C. F. Gauss 研究了最初发现的小行星，即谷神星（Ceres）的轨道的决定，以此为开端确立了决定轨道的方法（狭义的"轨道计算"）. 即使不知道观测者和天体的距离，也知道天体的轨道在一平面内. 作为第一级近似，应用 Kepler 第二定律，即面积速度一定的定律，假定两次测得的天体位置和太阳构成的三角形的面积与两次观测经过的时间成正比，就可以进行决定轨道的计算. 这种方法称为间接法. 同样方法可以推广到抛物线或双曲线轨道的情况.

【密切要素和轨道修正】 在二体问题†中，椭圆轨道是固定的，也就是说，Kepler 轨道要素不随着时间变化. 但是，若考虑到其他天体的影响而用常数变易法†计算摄动†，就可知道在一般情况下轨道要素是随时间变化的. 可以认为这种变化是周期摄动、长期摄动†和长周期摄动三者之和.

由于摄动的影响，实际轨道要偏离椭圆，但是根据天体在某一瞬间的位置和速度可以定义一个椭圆. 这种每一瞬间每一瞬间的轨道的要素称为**密切要素**（osculating elements），这种要素是随时间变化的. 为了计算这种摄动需要知道运动的初始条件，即初始时间的密切要素. 在比天体的公转周期小得多时间内，密切要素的变化很小. 于是根据在这段时间内在三个瞬时的三组观测就可以决定轨道要素，可以认为它是在这三个瞬时的平均瞬时测得的密切要素. 如果观测时间很短，所决定的要素的误差就要大些，因此需要从较早的时期开始进行较多的观测. 这时，由前面求出的轨道要素出发，以把摄动计算在内的预报值为基础，求出它和每一次观测值的差，用这个差和最小二乘法把轨道要素加以修正，这样来决定天体的轨道.

【人造卫星】 小行星的公转周期为几年，在几周内轨道要素没有很大的变化，决定密切要素比较容易. 然而，人造卫星的公转周期只是两小时左右，在几小时内，不只是周期摄动很大，长期摄动也很大. 对于这样的天体，需要预先知道它的近似轨道要素，计算出周期摄动，考虑到它的影响而把观测值加以修正. 这样，以经过修正的观测值为基础进行轨道修正，就可以求得一种平均轨道要素. 轨道要素的近似值也可以用其他方法，例如人造卫星的发射条件来计算. 这样的平均轨道要素可以每天决定，根据它在某一时期（例如一百天）内的变化情况，即长期摄动的大小，可以得到有关地球周围的大气的密度以及地球的重力位能的情报. 此外，需要注意的是，对于人造卫星，用雷达等装置测量距离，根据测量 Doppler 效应决定速度，都比较容易.

关于其他行星的卫星，可以测定卫星的关于行星中心的两个坐标. 决定了卫星的轨道，就可以根据 Kepler 第三定律决定行星的质量，根据长期摄动决定行星的重力位能.

【双星】 关于目视双星，可以用研究卫星

的方法来研究，但是严格估算到双星的距离常常是不可能的．关于分光双星，可以通过测量 Doppler 效应求得速度在视线方向的分量；关于蚀变光星，可以根据测得的轨道要素得到有关它们的质量、密度、大小等重要知识，以及用来研究它们的内部结构的重要资料．

【参】［1］J. Bauschinger, Die Bahnbestimmung der Himmelskörper, Willelm Eugelmann, 1928；［2］G. Stracke, Bahnbestimmung der Plancten und Kometen, Springer, 1929；［3］渡辺敏夫編，天体の軌道計算，新天文学講座，恒星社，1964．

三体问题［英 problem of three bodies 法 problème des trois corps 德 Dreikörperproblem 俄 вопрос трёх тел 日 3 体問題］ 假设具有任意质量 $m_i(>0)$ 的 n 个质点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 按照 Newton 运动定律†运动，而研究其运动方程：

$$(1)\qquad m_i\frac{d^2w_i}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial w_i},$$

$$i=1, 2, \cdots, n,\quad w=x, y, z,$$

$$U=\sum_{i\neq j}k^2m_im_j\Big/r_{ij}, k^2\text{ 是万有引力常数}.$$

$$r_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2}$$

的问题称为 **n 体问题**（problem of n bodies）．一体问题和二体问题的方程是可以完全解出的，$n>2$ 时不能完全解出．但是，$n=3$ 的情况在天体力学中是很重要的而且具有数学趣味，因此成为有名的**三体问题**．当 $n>3$ 时通常称为**多体问题**（problem of many bodies）．

方程(1)具有十个所谓经典积分，其中包括**能量积分**（energy integral），即

$$\sum(1/2)m_i((\dot{x}_i)^2+(\dot{y}_i)^2+(\dot{z}_i)^2)$$
$$-U=\text{常数}\quad(\dot{w}=dw/dt);$$

六个**重心积分**（center of gravity integral），即

$$\sum m_i\dot{w}_i=\text{常数},$$

$$\sum m_iw_i=(\sum m_i\dot{w}_i)t+\text{常数};$$

以及三个**角动量积分**（angular momentum integral），即

$$\sum_i m_i(u_i\dot{w}_i-w_i\dot{u}_i)=\text{常数}\quad(u\neq w).$$

由这十个积分并利用 Jacobi 方法消去升交点和时间 t，可以使(1)的阶数下降为 $6n-12$．H. Bruns 证明，除这些经典积分外没有代数函数的积分；H. Poincaré 还证明了没有其他单值函数的积分(Acta, Math. **11** (1887))．这些结论称为 **Poincaré-Bruns 定理**．于是不得不放弃用求积法求(1)的通解．因此到目前为止，对于 $n\geqslant 3$ 的情况还不能用解析法求(1)的通解，只求得了几个特解．

【特解】 如果 n 个质点作平面运动，而且在 $t=t_0$ 时作用于各质点的合成加速度指向整个系统的重心 G，其大小与从 G 到各质点的距离成正比，则称这 n 个质点构成**中心图形**（center figure）．在中心图形中以适当的角速度旋转的系统是 n 体问题的一个特解．把这种概念推广到空间运动是很容易的．

当 $n=3$ 时，已知的三体问题的特解有 Lagrange 的**正三角形解**（equilateral triangular point solution）和 Euler 的**直线平衡解**（straight line equilibrium point solution）两种．除去相当于中心图形的自明特解以外，对于任意质量已知的特解只有这两种．

【解的存在】 关于通解的存在，P. Painlevé 曾证明，除去 $\min r_{ij}=0$，即发生碰撞的情况外，存在解析解．K. F. Sundman 证明（Acta Math. **36** (1913)），在三体问题中，若令二体的碰撞时刻为 t_0，则它的解可以展开为 $(t-t_0)^{\frac{1}{3}}$ 的幂级数，于是可以解析开拓到碰撞以后．三体碰撞的发生条件是关于重心的总角动量为零，因此必须是平面运动．这就是 **Sundman 定理**．G. Bisconcini, Sundman, H. Block, C. L. Siegel 等人证明，三体问题的几何图形渐近地接近于 Lagrange 特解的图形，而且碰撞方向是确定的，在一般情况下解析开拓是不可能的．

【摄动理论】 对于天体运动等实际问题进行计算时，Sundman 的展开法因收敛半径太小不能解决问题，这时可以用所谓摄动法．在 n 体问题中，如果质量 $m_2, \cdots, m_n$ 都比 m_1 小得多，在讨论第 n 体的运动时首先假定 $m_2=m_3=\cdots=m_{n-1}=0$，解仅由 m_1 和 m_n 组成

的二体问题，然后考虑 $m_2, \cdots, m_{n-1}$ 的影响，求出解的偏差，这种方法称为**摄动**(perturbation)**法**. 把摄动函数展开从理论上求偏差，称为**一般摄动理论**(general theory of perturbation); 用数值积分法求偏差，称为**特殊摄动理论**(special theory of perturbation). 在一般摄动理论中收敛问题很重要，而且即使都是三体问题，也必须根据其体的天体系统的相互关系把摄动函数适当地简化而后进行讨论. 于是，例如产生了月球的运动理论，特殊小行星的运动理论等问题，另外还产生了卫星的运动理论(例如，木星和太阳以及木星的三个卫星)，这是多体问题的一个分枝.

【限制三体问题】 用数学方法解决三体问题是非常困难的，从十九世纪 Hill 提出月球运动理论以来，数学兴趣集中于限制三体问题(特别是平面三体问题). 所谓**限制三体问题**(restricted problem of three bodies)是假定第三体的质量为零而对其他两个具有有限质量的物体的运动没有任何影响，而且后两个物体围绕着重心作匀速圆运动的情况. 对于平面运动，利用旋转坐标 (ξ, η)，坐标原点取在质心，具有有限质量的二体总是处在 ξ 轴上，并适当选取单位，使得总质量、旋转轴的角速度以及万有引力常数都等于 1，这时第三体的运动方程可以写为

$$(2)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi},$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$U = (1-\mu)\left(\frac{r_1^2}{2} + \frac{1}{r_1}\right) + \mu\left(\frac{r_2^2}{2} + \frac{1}{r_2}\right),$$

$$0 < \mu < 1,$$

$$r_1 = \sqrt{(\xi+\mu)^2 + \eta^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(\xi - 1 + \mu)^2 + \eta^2}.$$

这组方程具有能量积分，即

$$(\dot\xi)^2 + (\dot\eta)^2 - 2U = \text{常数},$$

称为 **Jacobi 积分**(Jacobi's integral). Siegel 证明，除 Jacobi 积分外不存在代数积分. 用 Poincaré 定理可以证明不存在其他单值积分. T. Levi-Civita 研究了两个有限奇点的正则化和通过有限奇点的解. B. O. Koopman 还研究了通过无限远点的解.

消去微分方程(2)里的 t，它就成为三维流动的表达式，而且这种流动具有不变积分†，因此有人从这种观点把这些方程进行了拓扑学的研究，对于限制三体问题，特别是关于周期解，得到了重要结果.

【准周期运动，Колмогоров-Арнольд-Moser 定理】 假设相空间 Ω 是有界域 $B^n \subset \boldsymbol{R}^n$ 和环 T^n 的积，并令 $p = (p_1, \cdots, p_n)$ 是 B^n 上的坐标，$q = (q_1, \cdots, q_n) \pmod{2\pi}$ 是 T^n 上的坐标. 如果给定的 Hamilton 函数 $H(p, q)$ 是实解析函数而且具有

$$H(p, q) = H^0(p) + H^1(p, q)$$

的形式，这里 H^1 是 q 的以 2π 为周期的函数，则对于 B^n 上的任意初始矢量 $v = (v_1, \cdots, v_n)$，未受摄动的 Hamilton 函数系的解由

$$p_j(t) = v_j, \quad q_j(t) = \omega_j t + q_j(0)$$
$$(j = 1, \cdots, n)$$

给出，其频率为 $\omega_j = H^0_{p_j}(v)$. A. H. Колмогоров [5] 和 B. И. Арнольд [6] 证明了下述定理，即如果未受摄动的 Hamilton 函数系是非简并的，则 $\det|H^0_{p_j q_k}| \neq 0$，如果 $|H^1|$ 足够小，则对于几乎所有的频率 ω 都存在摄动 Hamilton 函数系

$$p = v_i^* + G_i(\theta_1, \cdots, \theta_n),$$
$$q_i = \theta_i + F_i(\theta_1, \cdots, \theta_n)$$

的一个解，这里 $\theta_i = \omega_i t + \theta_i(0)$，而且当 $|F|$，$|G|$ 都很小时，F_i，G_i 是 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 的以 2π 为周期的实解析函数. 在下述意义下，这些解是**准周期的**，即对于 $q_1, \cdots, q_n$ 的以 2π 为周期的任意实解析函数 $f(p, q)$ 都可以把函数 $f(p(t), q(t))$ 展开成为下面的 Fourier 级数：

$$\sum_{k_1,\cdots,k_n} a_{k_1,\cdots,k_n} \exp\left(i\left(\sum_{j=1}^n k_j\omega_j\right)t\right),$$

式中 $k_1, \cdots, k_n$ 遍及所有整数，系数 $a_{k_1,\cdots,k_n}$ 当

$$|k| = \sum_i^n |k_i|$$

时以指数形式减小. 此外，这些准周期解在相

空间Ω内构成一个测度为正的集合，使得当$|H^1|$趋近于零时它的余集的测度趋近于零. J. Moser [10, 11] 以 Hamilton 函数存在几百个导数的要求代替关于它的解析性的假设，推广了 Колмогоров-Арнольд 定理. 如果未受摄动的函数系是简并的，Колмогоров-Арнольд-Moser 定理就不能应用了，因此，对极限简并的情况需要进行特殊处理. Арнольд [8] 就一般椭圆平衡证明了点和具有二自由度的周期运动的稳定性（如果在取一级线性近似时平衡位置是稳定的，Арнольд [8] 称这种情况为椭圆平衡）. А. М. Леонтович [9] 把简化三体问题（平面的和圆的）的 Lagrange 周期解的稳定性作为上述结果的推论推导出来了. В. И. Арнольд [7] 还证明了下述结论，即如果行星的质量比中心物体的质量小得很多，从初始条件的优越性来说，n 体运动是准周期的，对于这样的初始条件 Kepler 轨道的离心率和倾斜都很小. 关于更进一步的参考文献和解说可参照 Арнольд-A. Avez [12], C. L. Siegel-J. Moser [13] 和萩原雄祐 [4].

【参】 [1] E. T. Whittaker, A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, Cambridge Univ. Press, 第四版, 1937; [2] H. Happel, Das Dreikörperproblem, Koehler Verlag 1941; [3] 萩原雄祐, 天体力学の基礎 I, 河出, 上 1947, 下 1950; [4] Y. Hagihara (萩原雄祐), Celestial mechanics, I, Dynamical principles and transformation theory, MIT Press, 1970. II pt. 1 and pt. 2, Perturbation theory, MIT Press, 1972. III. pt. 1 and pt. 2, Differential equations in celestial mechanics, Japan Socity for the Promotion of Science 1974. IV, Periodic and quasi-periodic solutions, Japan Society for the Promotion of Science, 1975; [5] A. N. Kolmogorov (А. Н. Колмогоров), On the conservation of qusi-periodic motions for a small change in the Hamilton function. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 98 (1954), 527—530; [6] В. И. Арнольд, Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции гамильтона, Успехи Мат. Наук, **18** (113), 1963, 13—40; [7] В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, Успехи Мат. Наук, **18** (114), 1963, 91—196; [8] В. И. Арнольд, Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных уравнений в общем эллиптическом случае, Докл. Акад. Наук СССР, **137** (1961), 255—257; [9] А. М. Леонтович, Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трёх тел, Докл. Акад. Наук СССР, **143** (1962), 255—258; [10] J. Moser, On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus, Nachr, Akad. Wiss, Göttingen, math-phys. Kl. (1962), 1—10; [11] Moser, On the theory of quasi-periodic motion, SIAM Review (1966); [12] V. I. Arnol'd (В. И. Арнольд)-A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968; [13] C. L. Siegel-J. Moser, Lectures on celestial mechanics, Springer, 1971. 其他→天体力学的 [参].

弹性理论 [英 theory of elasticity 法 théorie de l'élasticité 德 Theorie der Elastizität 俄 теория эластичности 日 弹性論] 当固体受外力作用发生弹性形变时，其各部分受到什么样的作用力，发生什么样的形变呢？把物体看做连续体而从经典力学的立场解决这些问题的理论，就是**弹性理论**. 这种理论是宏观的近似，后面讲的应力与伸长的比例关系有时不一定成立，因此应用于实际问题时需要注意它的适用范围.

【应力】 在物体中取一法线方向为ν的小平面，平面两侧的物体部分在单位面积内的相互作用力称为关于这个平面的**应力** (stress)，用$\boldsymbol{p}_\nu(p_{\nu x}, p_{\nu y}, p_{\nu z})$ 来表示. 应力在垂直于平面的方向的分量称为**正应力** (normal stress)，在平行于平面的方向的分量称为**切向应力** (tangential stress) 或**切应力** (shearing stress). 在物体内的任何一点，关于通过这一点的三个正交平面的三个应力为 $\boldsymbol{p}_x(p_{xx}, p_{xy}, p_{xz})$, $\boldsymbol{p}_y(p_{yx}, p_{yy}, p_{yz})$, $\boldsymbol{p}_z(p_{zz}, p_{zy}, p_{zz})$, $\boldsymbol{p}_\nu$ 和这三个应力平衡而且满足下面的关系，即

$$\boldsymbol{p}_\nu = \boldsymbol{p}_x \cos(\nu, x) + \boldsymbol{p}_y \cos(\nu, y) + \boldsymbol{p}_z \cos(\nu, z).$$

这个关系可以写为矩阵积的形式:

$$\begin{pmatrix} p_{\nu x} \\ p_{\nu y} \\ p_{\nu z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\nu, x) \\ \cos(\nu, y) \\ \cos(\nu, z) \end{pmatrix}.$$

九个量 $(p_{xx}, p_{xy}, \cdots, p_{zz})$ 构成张量†，称为**应力张量** (stress tensor)，而且关系式 $p_{yz} = p_{zy}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{xy} = p_{yx}$ 成立. 应力张量是对称张量，通常用

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{pmatrix}$$

来表示．σ 和 τ 分别为正应力和切向应力．应力张量的散度和作用于物体实体部分的力（在运动物体中还包括惯性力）一起构成平衡式．对称张量的特性是至少有一组主方向．在这个方向上只有 σ 分量（主应力），τ 分量完全为零．主应力的值等于 σ 的三次本征方程的根．

【应变】 设 $\boldsymbol{u}(u, v, w)$ 和 $\boldsymbol{u}+\delta\boldsymbol{u}$ 为物体中相邻近的任意两点 $\boldsymbol{x}(x, y, z)$ 和 $\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}$ 的位移，如果略去 $\delta\boldsymbol{x}$ 的二次以上的各项，相对位移 $\delta\boldsymbol{u}(\delta u, \delta v, \delta w)$ 就可以用

$$\delta\boldsymbol{u}=(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{x})(\delta\boldsymbol{x})$$

来表示．如果把右边的张量 $(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{x})$ 分为对称张量和反对称张量而写为

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\varepsilon_x & \gamma_z & \gamma_y\\ \gamma_z & 2\varepsilon_y & \gamma_x\\ \gamma_y & \gamma_x & 2\varepsilon_z\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix}$$

（式中 $\varepsilon_x=\partial u/\partial x, \cdots$; $\gamma_x=\partial w/\partial y+\partial v/\partial z, \cdots$; $\omega_x=\partial w/\partial y-\partial v/\partial z, \cdots$），则第二项表示刚体的旋转（用矢量 $\boldsymbol{\omega}/2$ 表示）；第一项表示物体应变，称为**应变张量**（strain tensor）．应变张量可以用在物体内想象的线分的长度和角度的变化来表示，即 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 表示线分的伸长，$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ 表示角的改变；但是在应变张量的主方向只有线分量，角分量为零．从位移 (u, v, w) 和应变分量 $(\varepsilon_x, \cdots, \gamma_x, \cdots)$ 的关系能够导出联系应变分量的六个恒等式（相容性条件）．研究形变较大的问题时，需要取到位移的二次项．

如果假定应力 σ 和应变 ε 成正比（服从 **Hooke 定律**（Hooke's law）），而且应力和应变的两主轴一致，则在各向同性物体内三个方向的应力和应变的关系为：

$$E\varepsilon_x=\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z), \cdots,$$

式中 E 表示 Young 模量，ν 表示 Poisson 比．如果物体是各向同性的，那末有两个弹性系数就够了．但是为了便利再用一个系数 $G=E/2(1+\nu)$，就得到 $\tau_x=G\gamma_x, \cdots$ 的关系．如果用位移的一次式表示应变分量，应力也成为 u, v, w 的一次式，于是可以把平衡条件的方程改写为：

$$\Delta u+\frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial x}+\frac{X}{G}=0, \cdots,$$

式中

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

对于运动物体则以 $V-\rho\ddot{u}, \cdots$ 代替 $X, \cdots$（ρ 表示密度，$\ddot{u}$ 表示加速度）．

【能量理论】 使位移发生微小变化时必有外力（包括惰性力）做功，如果同时再有热量出入，则两者都使物体的内能发生变化，在这些量之间有能量方程成立．严格地说，形变一般不是完全弹性的．除去这一点，发生缓慢（等温）形变时内能的变化和发生弹性形变时的内能变化是相等的．发生振动性（绝热）形变时，因为有湿度的变化问题就不像等温变化那样简单了．但是，除去上述由非弹性产生的差异之外，这些情况都存在着应变能量函数．由此可以得到解的唯一性，极小能量理论，关于功和位移的互易定理等重要理论．

当解决棒、板等具体问题时，也有不以位移为主题而利用应力函数的方法．无论哪一种方法，通常都可以作为微分方程的边界值问题来处理．但是，在以极小能量原理为基础的变分问题中，也可以利用直接方法．

【符号】 应力和应变的符号并不统一．在工业上常用 σ, τ 和 ε, γ，而把 $\boldsymbol{p}_x$ 的分量写为 $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$，但是在 A. E. H. Love 的有关弹性理论的著作中把 $\boldsymbol{p}_x$ 的分量写为 X_x, Y_x, Z_x，而且以 e_{xx}, e_{yz} 代替 ε_x, γ_x．γ_x 和 e_{yz} 都代表应变张量的分量，但是实际的应变张量的分量分别为 $\gamma_x/2$, $e_{yz}/2$．弹性常数的符号也有许多种．常用的是 E，也有用 G 的，但是不像 E 那样普遍．Love 不用 G 而用 Lamé 的符号 μ（[1]）．对于 Poisson 比，Love 用 σ，本书为了和应力符号相区别采用了 ν．在工业方面的著作中常用 Poisson 比的倒数 m，称为 Poisson 数．

【参】 [1] A. E. H. Love, Mathematical theory of elasticity, Cambridge Univ. Press, 第四版 1934; [2] I. S. Sokolnikoff, Mathematical theory of elasticity, McGraw-Hill, 第二版 1956.

流体力学　［英 hydrodynamics　法 hydrodynamique　德 Hydrodynamik　俄 гидродинамика　日 流体力学］　气体和液体都具有受到微小作用力就改变形状的性质，所以在运动状态方面也有许多共同点，因此总称为**流体**（fluid）．把这种容易变形的性质用数学的语言来表达，就是当处于静止状态时，想象其中任意一个分界面，分界面两侧相互作用的力(即应力)永远垂直于这个面，而且作用方向是相对的，这样的连续体就是流体．不考虑分子结构而研究气体和液体的平衡与运动的学科，就是**流体力学**．特别是，研究流体平衡的部分称为**流体静力学**（hydrostatics），研究流体流动的部分称为**流体动力学**（hydrodynamics）．

表示流体运动的方法有两种．一种是把流体看做无数质点的集合，研究各个质点在各时刻所作的运动，这是 **Lagrange 方法**（Lagrange's method）．例如，流体的某一粒子在时刻 $t=0$ 的坐标为 $(x, y, z)=(a, b, c)$，在任意时刻 t 来到 $x=f_1(a, b, c, t)$，$y=f_2(a, b, c, t)$，$z=f_3(a, b, c, t)$ 的位置，这时流体的运动用函数 f_1, f_2, f_3 就可以完全决定．另一种是 **Euler 方法**（Euler's method）．这种方法是研究流体在任意时刻和任意位置的速度 $\boldsymbol{v}(u, v, w)$、密度 ρ、压力 p 等所具有的值．也就是把属于流体的各种物理量当作时间和空间 (x, y, z, t) 的函数来研究．任何一个物理量 F，随着流体粒子运动发生的时间变化率，称为 **Lagrange 导数**（Lagrangean derivative），用 DF/Dt 表示，它和普通偏导数有下式所表示的关系，即

$$DF/Dt=\partial F/\partial t+u\partial F/\partial x+v\partial F/\partial y+w\partial F/\partial z.$$

上述五个量，即速度的三个分量 (u, v, w) 和两个状态量 (p, ρ)（其他状态量，如温度 T，熵 S 等一般由状态方程 $T=T(p, \rho)$，$S=S(p, \rho)$ 决定）可以由表示质量、动量、能量守恒定律的五个 $(1+3+1)$ 关系式决定．相当于质量守恒定律的是**连续方程**（equation of continuity），即

$$(1)\qquad \partial\rho/\partial t+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0;$$

相当于动量守恒定律的是**运动方程**（equation of motion），即

$$(2)\qquad \partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}-\boldsymbol{p})=\rho\boldsymbol{K}$$

（$\boldsymbol{K}$ 表示作用于单位质量的外力，$\boldsymbol{p}$ 表示应力张量，$\otimes$ 表示张量积[†]，二阶张量的 div 分别取于各行矢量），利用(1)将(2)的各分量写出，则为

$$(2')\qquad \rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{xz}}{\partial z}+\rho K_x,$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial p_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial z}+\rho K_y,$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial p_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\rho K_z;$$

相当于能量守恒定律的是**能量方程**（energy equation），即

$$(3)\qquad \partial(\rho\boldsymbol{v}^2/2+\rho E)/\partial t+\mathrm{div}\,(\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}^2/2+E)-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{h})=0$$

或**熵生成方程**（equation of entropy production），即

$$(3')\qquad \rho TDS/Dt=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{h}+Q$$

（E 表示单位质量的内能，Q 表示单位时间内单位体积发生的热量，$\boldsymbol{h}$ 表示热流）．但假定 $\boldsymbol{K}$，p_{ik}，$\boldsymbol{h}$，Q 是已知的，或与其他量的关系（例如，$\boldsymbol{h}=-\kappa\,\mathrm{grad}\,T$（$\kappa$ 是温度传导率））是已知的．

【完全流体】　如果流动中有速度梯度，就要出现消减这种梯度使速度均匀的切线应力，这时 $\boldsymbol{p}$ 就不是对角张量 $(-p\delta_{ik}$，即压力)．这种性质称为流体的**粘性**（viscosity）．这时，Q 和 $\boldsymbol{h}$ 一般不为零．但是为了便于进行数学处理，作为实际流体的大范围的近似，假想一种没有粘性的（有时还是绝热的）流体，这种流体称为**完全流体**（perfect fluid）．若令(1)，(2)中的 p_{ik} 只是压力，就得到 **Euler 运动方程**（Euler's equation of motion），即

$$(4)\qquad \rho D\boldsymbol{v}/Dt=-\mathrm{grad}\,\boldsymbol{p}+\rho\boldsymbol{K};$$

令(3′)中的 $Q=0$，$\boldsymbol{h}=0$，得到 $DS/Dt=0$，或者它的积分 $S=$ 常数（**等熵流**（homentropic flow）受绝热定律 $p\propto\rho^\gamma$ 支配）；完全流体的运动由 Euler 运动方程和这样的热力学关系决

定．特别是对于液体，由于可以忽视密度变化，而令 $\rho=$ 常数，于是 (1) 成为

$$\text{div}\,\boldsymbol{v}=0. \tag{5}$$

根据 (2)，(5)，可以作为 (x, y, z, t) 的函数来决定四个未知数 (u, v, w, p).

密度一定的流体称为**不可压缩流体** (incompressible fluid)，密度变化的流体称为**可压缩流体** (compressible fluid)．由常识知道，气体是可压缩流体；但是和在气体中传播的声波的速度 $c=\sqrt{dp/d\rho}$ 相比，气体的流速 $q=|\boldsymbol{v}|$ 不是很大时，也可以把它作为不可压缩流体来处理．$q/c=M$ 称为 **Mach 数** (Mach number).

由速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 得到的矢量 $\boldsymbol{\omega}(\xi, \eta, \zeta)$，即 $\boldsymbol{\omega}=\text{rot}\,\boldsymbol{v}$，称为**旋度** (vorticity, rotation)，流体的微小部分以角速度 $(1/2)\boldsymbol{\omega}$ 旋转．$\boldsymbol{\omega}=0$ 的流动称为**无旋流** (irrotational flow)，$\boldsymbol{\omega}\neq 0$ 的流动称为**旋流** (rotational flow)．曲线 $dx:dy:dz=u:v:w$ 和 $dx:dy:dz=\xi:\eta:\zeta$ 分别称为**流线**和**涡旋线**．沿闭曲线 C 的积分 $\int_C \boldsymbol{v}_t ds$ 称为关于 C 的**环流** (circulation).

在无旋流中，速度可以表示为 $\boldsymbol{v}=\text{grad}\,\Phi$ 的形式，Φ 称为**速度势** (velocity potential)．外力 $\boldsymbol{K}$ 具有势 Ω $(\boldsymbol{K}=-\text{grad}\,\Omega)$，如果 p 只是 ρ 的函数，**压力方程** (pressure equation)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}+\Omega=\text{常数}$$

在流动的各点都成立．在定常流中，方程

$$\frac{1}{2}q^2+\int\frac{dp}{\rho}+\Omega=\text{常数} \tag{6}$$

对每条流线都成立．这就是 **Bernoulli 定理．**上面两方程相当于运动方程的能量积分．还有相当于角动量守恒定律的 **Helmholtz 涡旋定理** (Helmholtz's vorticity theorem)．这就是说，当 $\boldsymbol{K}=-\text{grad}\,\Omega$，$p=f(\rho)$ 时，涡旋既不发生也不消灭.

对于不可压缩流体的无旋运动，由 (1) 可以导出 Laplace 方程 $\Delta\Phi=0$，因此问题就归结为在适当的边界条件(例如，速度在固定壁的法线方向的分量为 $v_n=\partial\Phi/\partial n=0$) 下决定调和函数†．特别是对于二维流动的问题，根据 (1) 可以引入**流函数** (stream function) $u=\partial\Psi/\partial y$，$v=-\partial\Psi/\partial x$，而且 Cauchy-Riemann 微分方程† $\partial\Phi/\partial x=\partial\Psi/\partial y$，$\partial\Phi/\partial y=-\partial\Psi/\partial x$ 成立，所以 $f=\Phi+i\Psi$ 是 $z=x+iy$ 的解析函数．因此二维无旋运动理论在本质上和复变函数论是等同的，保角映射†理论发挥了巨大作用.

对于可压缩流体的无旋定常流动，如果 $\Omega=0$，由 (6) 知道，p 和 ρ 以及声速 c 都可以作为 q 的函数来决定，于是由 (1)、(4) 可以导出关于 Φ 的二阶非线性偏微分方程

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\left(1-\frac{w^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-2\frac{vw}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-2\frac{wu}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}-2\frac{uv}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=0. \tag{7}$$

这个方程相应于 M 小于 1 (流速小于声速) 或大于 1 (流速大于声速) 而分别成为椭圆型或双曲线型偏微方程 (→ 混合型偏微分方程)．对于二维流动，由 (1) 知道，

$$u=\partial\Phi/\partial x=(1/\rho)(\partial\Psi/\partial y),$$
$$v=\partial\Phi/\partial y=-(1/\rho)(\partial\Psi/\partial x),$$

由此可以引入流量函数 Ψ．这是关于 Φ 和 Ψ 的非线性方程；然而，相应于 Legendre 变换† (结果是等同的)，考虑一个以速度的大小 q 和倾角 θ 为独立变数的**速端平面** (hodograph plane)，就可以得到线性方程

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q}=q\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{\rho q}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=-\frac{1-M^2}{\rho q}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=\frac{q}{\rho}\frac{\partial\Psi}{\partial q}$$

$$(d(\rho q)/dq=\rho(1-M^2)).$$

以此为基础研究可压缩流体的二维流动的方法称为**速端曲线法** (hodograph method)．对于 M 较小的流动有逐次逼近法，这种方法的出发点是忽视了 (7) 中的 $O(M^2)$ 项而得到 Laplace 方程，也叫 **M^2 展开法** (M^2-expansion method).

对于绕过置于(x 方向的，速度 U 的)均匀流中的薄翼或细长物体的流动，有**薄翼理论**(thin wing theory, slender body theory)，这是假定 v，w 很小而以方程

(8) $$(1-M^2)\partial^2\Phi/\partial x^2+\partial^2\Phi/\partial y^2+\partial^2\Phi/\partial z^2=0$$

为一级近似的理论．当 $M<1$，或 $M>1$(假定不很大)时，可以用无穷远处的 Mach 数 $M_\infty=U/c_\infty$ 代替M来进行线性化(Prandtl-Glauert 近似)．当 $M>1$ 时，(8)具有特征曲面，即 **Mach 圆锥**(Mach cone)，它和流动成的角为 $\arcsin c/q=\arcsin 1/M$．可以认为，这是从声源出发以速度 c 扩展的球面波以速度 q 移动时产生的包络面．当 $M\sim 1$ 时，若令 $\Phi=c_*x+\varphi$ (c_* 表示 $q=c$ 时的流速)，对于作绝热变化的气体可以用混合型偏微分方程

(9) $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\gamma+1}{c_*}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

作(8)的近似方程．

这样，在 $M\gtrless 1$ 两个领域共存的流动称为**近于声速的流动(跨声速流动)**(transsonic flow)；用速端曲线法求出的精确解虽然是已知的，但在一般情况，从 $M>1$ 向 $M<1$ 的连续减速是不稳定的或不可能的，在流动中通常会出现**冲击波**(shock wave)，这是状态量的不连续面．可以认为，它属于(1)，(2)，(3)的弱解，特别是对于固定在这个面上的坐标系，可以得到它们的积分形：$[\rho v_n]=0$，$[p\delta_{in}+\rho v_i v_n]=0$，$[q^2/2+E+p/\rho]=0$ ($[\ ]$ 表示这些量在面的前后不连续，n 表示法线方向分量)．如果认为熵是增加的，由此可以导出冲击波前后的流速和状态量之间的关系式．对于理想气体这种关系称为 **Rankine-Hugoniot 关系式**(Rankine-Hugoniot relation)．在弯曲的冲击波的后方的流动中熵不是一定的，这种流动不是无旋的；从头部有尖的细长物体的尖端发生的冲击波是弱冲击波，在这样的冲击波中不连续性较小，接近于(8)的特性曲面，即 **Mach 波**(Mach wave)(这时是压缩波)．膨胀性的马赫波出现于绕过凸面的比声音还快的(超声速[†])流动的加速流中．在比声音快的流动中，这些波的发生是产生作用于物体的阻力的一种原因．

【粘性流体】 只要忽视流体的粘性，而且假定流动是连续的，在静止流体中作等速运动(速度小于声速)的物体就不受阻力作用，这样的 **d'Alembert 悖论**(d'Alembert's paradox)是成立的．因此在研究旋涡的发生、消灭以及冲击波的生成、结构和物体所受的阻力等问题时，必须考虑粘性．而 **Newton 定律**是假定摩擦应力与速度梯度成正比，现在需要把它加以推广，而假定应力张量 $\boldsymbol{p}$ 是应变速度张量 $\boldsymbol{e}$ 的线性函数，即

$$p_{xx}=-p+\mu e_{xx}-(2/3)\mu\operatorname{div}\boldsymbol{v}$$
$$=-p+2\mu\partial u/\partial x-(2/3)\mu\operatorname{div}\boldsymbol{v},\cdots,$$
$$p_{yz}=\mu e_{yz}=\mu(\partial w/\partial y+\partial v/\partial z),\cdots.$$

比例常数μ称为**粘性系数**(coefficient of viscosity)．满足这条假定的流体称为 **Newton 流体**(Newtonian fluid)．不满足这条假定的流体称为**非 Newton 流体**(non-Newtonian fluid)．除胶质溶液外，大多数的流体都可以看做是 Newton 流体．

考虑粘性时，不可压缩流体的运动方程为

(10) $$\rho D\boldsymbol{v}/Dt=\rho\boldsymbol{K}-\operatorname{grad}p+\mu\Delta\boldsymbol{v}.$$

这个方程称为 **Navier-Stokes 方程**(Navier-Stokes equation)．假定流动的特征长度为 L，速度为 U，流体的密度为 ρ，粘性系数为 μ，由这些量组成的无量纲量 $R=\rho UL/\mu$ 称为 **Reynolds 数**(Reynolds number)．对于边界形状相似的两个流动，为了使整个流动在力学上是相似的，R必须相等．这称为 **Reynolds 相似定律**(Reynolds law of similarity)．对于R较小的流动有 **Stokes 近似**(Stokes approximation)和 **Oseen 近似**(Oseen approximation)，前者是把运动方程(10)中的加速度 $D\boldsymbol{U}/Dt$ 用 $\partial\boldsymbol{U}/\partial t$ 代替，后者是把 $D\boldsymbol{v}/Dt$ 用 $\partial\boldsymbol{v}/\partial t+U\partial\boldsymbol{v}/\partial x$ 代替(假定物体放在沿 x 方向以匀速度U运动的流动中)．

相反，如果R较大，只要速度梯度不是特别大，就可以忽视 $\mu\Delta\boldsymbol{v}$，因此可以看做是完全流体的流动．但是，在固定壁的附近，在非常薄的

流层中，流速由完全流体的值 U 急速下降到在壁上的值即零，于是产生较大的速度梯度．这一流层称为**边界层** (boundary layer)．对于边界层，下面的 Prandtl **边界层方程** (boundary layer equation) 成立：

$$(11)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{dU}{dx}+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

这里 x，y 分别为壁的平行方向和垂直方向的坐标，U 是边界层外面的流速．在 $\partial U/\partial x<0$ 之处，边界层可能从物体表面分离，这时边界层内部的大旋度被送进流动之中，所以流动中发生涡旋．对于边界层不分离的物体，d'Alembert 悖论作为真理成立，这时阻力很小，这种物体是**流线形物体** (stream-line body)．

对于可压缩流体，存在着边界层与冲击波互相干扰的新问题．发生在物体表面上的冲击波所引起的压力上升，既破坏关于边界层的假设又引起边界层的分离．当 Mach 数增大时 ($M\gtrsim 5$，称为**高超声速流动**(hypersonic flow))，尖头冲击波向物体接近而与边界层干扰．对于边界层的发热 (Q 引起的粘性减小)，需要同时考虑粘性和热传导，这样就需要处理把 κ，μ 对温度的依赖关系和能量方程 (3) 同时完全包括在内的方程组．

对于这样的复杂系统，量纲分析往往是有用的 (→ 量纲分析)．对于几何形状相似的物体，上述雷诺相似定律的仿射变换，也可作为相似定律†来考虑．相应于比声速慢的流动的方程 (8)，考虑翼弦(流动方向的长度)为 1，翼展为 L，翼厚为 τ 的薄翼，它的表面上的压力系数 C_p (无量纲的压力变化) 满足

$$C_p(L\tau)=\lambda C_{p_0}(\sqrt{1-M_\infty^2}L,\tau/\sqrt{1-M_\infty^2}\lambda)$$

的关系，这是有名的 **Prandtl-Glauert 相似定律** (Prandtl-Glauert law of similarity)．式中 λ 是任意常数，C_{p_0} 是放在不可压缩流体中物体的压力系数，此物体的长度、厚度与上述薄翼不同．对于 (9) 有著名的 von kármán 型**跨声速流动的相似法则** (transsonic similarity rule)，即

$$C_p(L,\tau)=\tau^{2/3}(\gamma+1)^{-1/3}\times f\left(\sqrt{1-M_\infty^2}L,\ \frac{(\gamma+1)\tau}{|1-M_\infty^2|^{3/2}}\right).$$

R 较小的流动一般具有平滑的流线，但是，当 R 较大时，流动对时间、空间都有极不规则的变化，所谓定常流动只是从平均值的意义上来说的．前者称为**层流** (laminar flow)，后者称为**湍流** (turbulent flow) (→ 湍流)．从层流向湍流的转变，可以认为是由层流的不稳定性引起的，目前正在用小振动法研究这种问题．关于湍流内部结构的研究，von Kármán, G. I. Taylor (Proc. Roy. Soc. London, **151** (1935)), A. H. Колмогоров (Докл. Акад. Наук, СССР, **30** (1941)) 提出的统计理论占主导地位．

【数学问题】 上述流体力学的各分支，提出了各种数学问题，而最近关于粘性不可压缩流体的理论，亦即关于 Navier-Stokes 方程 (10) 的理论，有显著的发展，下面介绍这方面的情况．

空间领域 G 里的定常流问题，可以归结为由 (5)，(10) 以及边界条件

$$(12)\qquad \boldsymbol{v}|_{\partial G}=\boldsymbol{\beta}$$

构成的边界值问题，这里 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ 和 $p=p(\boldsymbol{x})$ 是未知函数．当 G 不是有界域时 (亦即在所谓外部边界值问题中)，附有下面的无穷远处边界条件 ($\boldsymbol{x}$ 表示位矢)：

$$\boldsymbol{v}(x)\to\boldsymbol{U}_0,\quad |\boldsymbol{x}|\to\infty.$$

这时在 (10) 中 $D\boldsymbol{U}/Dt=(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}$．关于这种边界值问题的解的存在等，曾由 J. Leray 从数学观点进行了研究 ([6])；而最近 R. Finn，藤田宏等人在方法以及结果方面有所改进，或者说已经完成了([8],[10])．Finn 还提出了有关这方面的综合报告 ([9])．

若假定空间领域为 G，而且 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ 是未知函数，非定常流问题就可归结为由 (5)，(10)，(12) 以及下面的初始条件：

$$(13)\qquad \boldsymbol{v}|_{t=0}=\boldsymbol{a}$$

构成的初值-边界值问题．Leray 还研究了 G 为

全空间的情况([6],[7]);对于存在边界的一般情况,E. Hopf [13], A. A. Кислев-О. А. Ладыженская [14] 等人指出存在着各种弱解.伊藤清三([17]), П. Е. Соболевский ([18])等人紧接着得到正则解.加藤敏夫、藤田宏等人利用算子的半群†理论对这些结果进行了改进([11],[12]).在上述各论文中,除 Hopf 的论文外,都得到了解的唯一性.

在初值-边界值问题中,空间的维数 m 和解在无限时间 $0 \leqslant t < \infty$ 内的存在有密切关系.实际上,在有物理意义的 $m=2$, 3 的情况之中,关于 $m=2$ 的情况,Ладыженская 等人证明了在无限时间内的解的存在([15],[19],[12]),而关于 $m=3$ 的情况,解在无限时间内的存在,在一般假定下还没有得到证明.

关于可压缩流体的综合报告,可参阅[20].

【参】 [1] H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 第六版 1932; [2] S. Goldstein, Modern developments in fluid dynamics, Clarendon Press, 1938; [3] 友近晋, 流体力学, 共立出版, 1940; [4] L. Howarth, Modern developments in fluid dynamics, High speed flow I, II, Oxford Univ. Press, 1953; [5] 今井功, 流体力学, 岩波講座現代物理学, 岩波, 1955; [6] J. Leray, Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, J. Math. Pures, Appl., (9) **12** (1933), 1—82; [7] J. Leray, Sur le mouvement d'un liquid visqueux emplissant l'espace, Acta Math., **63** (1934), 193—248; [8] R. Finn, On steady-state solutions of the Navier-Stokes partial differential equations, Arch. Rational Mech. Anal., **3** (1959), 381—396; [9] R. Finn, Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Appl. Math., **17** (1965), 121—153; [10] H. Fujita (藤田宏), On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equation, J. Fac. Soi. Univ. Tokyo, **9** (1961), 59—102; [11] H. Fujita (藤田宏)-T. Kato (加藤敏夫), On the Navier-Stokes initial value problem I. Arch. Rational Mech. Anal., **16** (1964), 269—315; [12] T. Kato (加藤敏夫)-H. Fujita (藤田宏), on the non-stationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **32** (1962), 243—260; [13] E. Hopf, Über die Anbangswertaufgabe für die hydrodymamischen Grundgleichungen, Math. Nachr., **4** (1950—1951), 213—231; [14] A. A. Киселев-О. А. Ладыженская, О существовании и единственности решения нестационарной задачи для вязкой несжимаемой жидкости, Изв. Акад. Наук СССР, **21** (1957), 655—680; [15] O. A. Ladyženskaja (О. А. Ладыженская), Solution "in the large" of the nonstationary boundary value problem for the Navier-Sokes system with two space variables, Comm. Pure Appl. Math., **12** (1959), 427—433; [16] О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Физматгиз, 1961; [17] S. Itô (伊藤清三), The existence and uniqueness of regular solution of nonstationary Navier-Stokes equation J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **9** (1961), 103—140; [18] П. Е. Соболевский, О гладкости обобщенных решений уравнений Навье-Стокса, Докл. Акад. Наук СССР, **131** (1960), 758—760; [19] П. Е. Соболевский, Нестационарных уравнениях гидродинамики вязкой жидкости, Докл. Акад. Наук СССР, **128** (1959), 45—48; [20] L. Bers, Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics, John Wiley, 1958.

磁流体力学 [英 magnetohydrodynamics 法 magnétohydrodynamique 德 Magnetohydrodynamik 俄 магнитная гидродинамика 日 磁気流体力学] **磁流体力学**是研究导电性流体在磁场中运动的学科,也称为**电磁流体力学**.流体在磁场中运动所产生的电动势能使磁场变形,同时,磁场中的电流所产生的力也能改变流体的运动.磁场和运动相互作用的结果,产生了许多重要而且有趣的现象.

在磁流体力学中,我们通常假设:(1)流体是连续的;(2)电导率 σ 是不可忽略的;(3)流速 $\boldsymbol{v}$ 同光速 c 相比是小量,即

$$\max\left(L^2/(c^2T^2),\ U^2/c^2\right) \ll \min\left(1,\ R_m\right),$$

这里 L 是特征长度,T 是特征时间,U 是特征速度,$R_m = \sigma\mu UL$ (μ 表示磁导率)是无量纲量,称为**磁 Reynolds 数**(magnetic Reynolds number).这时,在 Maxwell 方程中,位移电流和对流电流比传导电流 $\boldsymbol{J}$ 小得很多,可以忽略不计,因此可以把方程写为

$$(1)\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}=0,\ \operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J},\ \operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\partial\boldsymbol{B}/\partial t,$$

$$(2)\quad \rho_e = \operatorname{div}\varepsilon\boldsymbol{E}$$

(ε 表示介电常数).在上式中

$$(3)\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{J}=\sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}),$$

后者称为关于运动介质的 Ohm 定律,在温度梯度、Hall 效应等影响都很小的情况下,此定律成立.流体的运动(→ 流体力学)遵守下面几个方程,即连续方程

$$(4)\quad \partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\rho\boldsymbol{v} = 0,$$

运动方程

$$(5)\quad \partial(\rho\boldsymbol{v})/\partial t = -\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v} - P - T)$$

(P 表示力学的应力张量，T 表示 Maxwell 应力张量

$$T_{ij} = \mu(H_iH_j - (1/2)H^2\delta_{ij})),$$

也可以写为

(5′) $\rho D\boldsymbol{v}/Dt = \mathrm{div}\,P + \boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$,

以及状态方程，能量方程(根据最初的假定知道，作用于电荷 ρ_e 的力 $\rho_e\boldsymbol{E}$ 比作用于电流的力 $\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$ 小得多，可以忽略不计．因此可以把(2)和其他方程组分离，成为单独决定 ρ_e 的方程)．

如果 μ, σ 是常数，由(1)和 Ohm 定律消去 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{J}$，就可以得到下面的**感应方程**(induction equation):

(6) $\partial\boldsymbol{B}/\partial t = \mathrm{rot}\,(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) + \lambda\Delta^2\boldsymbol{B}$,

$\Delta^2 = \mathrm{grad\ div} - \mathrm{rot\ rot}$, $\lambda = 1/\mu\sigma$,

这个方程和关于不可压缩粘性流体中的旋度 $\boldsymbol{\omega}$ 的方程 $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t = \mathrm{rot}(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu\Delta^2\boldsymbol{\omega}$ (ν 表示动粘性系数)具有相同的形式，因此称 $\lambda = 1/\mu\sigma$ 为**磁粘性系数**，右边的第一项(对流项)和第二项(扩散项)之比

$$R_m = UL/\lambda = \mu\sigma UL$$

称为磁 Reynolds 数．当 $\sigma \to \infty$ 或 $L \to \infty$ 时，$R_m = \infty$ 相应于完全流体，这时，和在 Helmholtz 涡旋定理†中一样，磁力线就好象附着在流体上而随着流体运动．H. Alfvén 首先注意到(1943)，由于附着于流体的磁力线的张力 μH^2 (是在(5)中除去磁压 $-(1/2)\mu H^2\delta_{ij}$ 所得结果)的作用，在流体中存在着一种横波，沿磁力线方向以速度 $\alpha = \sqrt{\mu H^2/\rho}$ 行进，称为 **Alfvén 波**(Alfvén wave)．对于可压缩完全流体($R_m = \infty$，在(5)中 $P_{ij} = -p\delta_{ij}$ (p 表示压力))，(1)—(5)成为联立双曲线型偏微分方程，在这样的流体中除纯 Alfvén 波之外，由于它和速度为 $a = \sqrt{dp/d\rho}$ 的声波的干涉，还有两种磁声波作为特性面出现，相对于流体的相位速度为

$$a_{\pm} = (1/\sqrt{2})(a^2 + \alpha^2 \pm \sqrt{(a^2 + \alpha^2) - 4a^2\alpha^2\cos^2\theta})^{\frac{1}{2}}$$

(θ 表示磁场方向和波面法线之间的角)，相应于 a_+ 和 a_- 分别称为**快波**(fast wave)和**慢波**(slow wave)．

根据(6)可以说明地球内部磁场的生成和维持，这就是**流体磁力理论**(hydromagnetic dynamo theory)．另外，还可以应用于天体的各种现象以及 MHD 发电等方面．为了验证理论的结果，曾有人用水银及液体钠进行了实验．上述理论对于在热核聚变中使用的实际等离子体已应用到这种地步，使得流体动力学处理作为一级近似是成立的．

【参】[1] T. G. Cowling, Magnetohydrodynamics, Interscience, 1957; [2] H. Alfvén-C. G. Fälthammar, Cosmical electrodynamics, Clarendon Press, 第二版 1963; [3] 木原太郎，偏微分方程式の応用，第 8 章プラズマの力学，岩波講座現代応用数学，1958; [4] 今井功-桜井明，電磁流体力学，岩波講座現代物理学，1959; [5] 木原太郎-水野幸雄，プラズマの物理学，岩波講座現代物理学，1959; [6] Progress of theoretical physics, Suppl. no. 24, 1962.

湍流 [英 turbulent flow 法 écoulement turbulent 德 Turbulentströmung 俄 турбулентное течение 日 乱流] **湍流**是流体的不规则运动．与此相对，流体的各部分描绘着互不相交的曲线的流动称为**层流**(laminar flow)．

湍流通常是由来自外部的扰动引起的；但是，在定常状态下，湍流并不由扰动本身的直接作用来维持，而由流动内部的不稳定性来维持．流动的不稳定性的指标可以用 Reynolds 数† R 给出．以 R 的**临界值**(critical value) R_c 为境界，当 $R < R_c$ 时流动对于来自外部的扰动是稳定的，维持着层流；$R > R_c$ 时流动是不稳定的，受到来自外部的扰动时就转变为湍流．若以圆管中的流动(**Poseuille 流动**(Poseuille flow))为例，则 R = (最大流速)×(圆管半径)/(动粘性系数)，$R_c = 2 \times 10^3$．

临界 Reynolds 数 R_c 的值一般随扰动的大小而改变，上例中的 $R_c = 2 \times 10^3$ 给出了所有扰动的 R_c 的下限．如果使扰动逐渐减小，R_c 就增大；但是，在一般情况下，扰动接近于无穷小时 R_c 也存在着上限．解线性化的扰动振幅的方程，根据流体力学的稳定性理论就可以计算出 R_c 的上限值．关于旋转着的同心圆筒间的流动以及平板上的边界层†问题，理论和实验

结果一致. 此外,对各种典型层流的稳定特性也进行了研究([1],[2]).

如果流动中含有在临界状态下发生的扰动,这种流动不能直接成为湍流,为了使它成为湍流,必须增加扰动的不规则性,这种不规则性体现于 Navier-Stokes 方程'的非线性. 若假定 R 保有比 R_c 稍大的值,则某种波数的正弦波的扰动将以最大速度开始成长. 但是,如果扰动的振幅增大,则由于方程是非线性的,高波数的扰动必定一个接一个地发生. 在层流的情况下,流动的动能因粘性消散而直接消失;但是由于发生了扰动,相当于它的一部分能量一时转化为扰动能量,以后因粘性的影响而消失. 如果 $R-R_c$ 的值增大,则共存的高波数扰动的数量增多,各波的成分间的能量流也增大. 在这种过程中,层流所具有的微小不规则性以及一级扰动的起伏将随着向高级扰动发展而扩大,当扰动的成分高于某种波数时,要出现一种统计的平衡状态. 这时的流动称为湍流,扰动的全体称为**湍性** (turbulence). 上述从层流向湍流的转变过程称为**过渡** (transition). 研究过渡的主要理论主要是非线性稳定理论, 另外还进行了其他许多探讨, 但是都没有得到决定性的成果([1],[3]).

湍性的统计理论所研究的是湍性的统计平衡状态. 为了把研究对象简单化,通常研究**均匀湍性** (homogeneous turbulence)以及更简单的**各向同性湍性** (isotropic turbulence). 在前一种湍性中, 支配湍性的统计规律对于坐标平移是不变的; 在后一种湍性中还增加了对于坐标旋转、反演的不变性.

流体在某一时刻的运动状况, 可以用它在空间内所有的点 $\boldsymbol{x}$ 的速度 $\boldsymbol{u}$ 在三个坐标轴方向的分量的集合来表示,换句话说,就是用无限维相空间内的一点(相点)来表示. 相点随着时间按照 Navier-Stokes 方程沿着复杂而唯一的路线运动. 抽象地说,湍流无非是这种流体的速度场的随机运动(→ 概率过程)而已. 流体的随机速度 $\boldsymbol{u}$ 的分布可以用特征汎函'表示,它所遵循的方程已由 E. Hopf 给出,并证明在非粘性的极限条件下, 它的解存在而且是正态分布'的,但是,除此之外还没有找到其他解([1]).

不考虑概率分布'本身只研究低阶矩量的理论是 G. I. Taylor, Th. von Kármán 创始的, 在第二次世界大战以后有显著的进展. 它的主要研究对象是矩量. 所谓矩量是一种**相关张量** (correlation tensor), 其 (i, j) 分量是流体在 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}$ 两点的速度分量 u_i, u_j 之积的平均值,即

$$B_{ij}(\boldsymbol{r}) = \langle u_i(\boldsymbol{x})u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})\rangle,$$

也是**能谱张量** (energy spectrum tensor), 这是相关张量的 Fourier 变换',即

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int B_{ij}(\boldsymbol{r})\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})d\boldsymbol{r},$$

$$i=\sqrt{-1}.$$

在各向同性湍流中,

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k}) = (1/4\pi k^2)E(k)(\delta_{ij} - k_ik_j/k^2),$$

$$k = |\boldsymbol{k}|.$$

能谱函数 $E(k)$ 表示在波数空间内的半径为 k 的球面上分布的能量. 由于 Navier-Stokes 方程是非线性的, 所以矩量理论的本质上的弱点在于各矩量的方程组不是封闭的; 因此又提出了应用了各种假说的矩量理论. 此外, A. H. Колмогоров 还引入了**局部各向同性湍性** (locally isotropic turbulence)的概念,从物理的观点对能量传播进行了考察, 并利用考察结果和量纲分析'推导出能谱函数,即在雷诺数很大的平衡领域中的能谱 $E(k)\propto k^{-5/3}$. Колмогоров 的能谱函数目前已得到相当多的实验根据.

【参】 [1] 巽友正, 乱流, 槙書店, 1962; [2] C. C. Lin, The theory of hydrodynamical stability, Cambridge Univ. Press, 1955; [3] H. Schlichting, Boundary layer theory, McGraw-Hill, 第七版 1979 [4] G. K. Batchelor, The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press, 1953.

波动 [英 wave 法 onde 德 Welle 俄 волна 日 波動] 媒质中某处发生的状态变化, 以有限速度向周围传播的现象称为**波动**. 在气体、液体、固体内传播的密度或应变的变化称为声波. 特别是,在弹性体内传播的波也称为弹性波. 此外、在水面、地球表面还能发生**表面波** (surface wave). 电磁作用在上述媒质中传播时

就成为电磁波. 但是,电磁波还能在真空中传播. 光就是电磁波的一种. 根据广义相对论†,重力也是以波的形式传播的.

在多数情况下,波动可以用**波动方程**(wave equation)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)$$

来表示. 式中 t 表示时间, x, y, z 表示空间正交坐标, c 表示传播速度, ψ 是表示媒质状态的量.

在闭曲面围成的区域内取一点作为原点,设原点和曲面上某一点的距离为 r, 则原点在时刻 t 的状态 $\psi(0, t)$ 可以由上述曲面在时刻 $t-r/c$ 的状态来决定,即

$$\psi(0,t)=\frac{1}{4\pi}\int\left(\psi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}-\frac{1}{cr}\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right)_{t-r/c}df.$$

这里 n 是上述曲面某一点的内向法线, 积分范围是这个曲面, 在被积分函数中取 $t-r/c$ 为时间. 上面的关系是 **Huygens 原理** (Huygens' principle) 的数学表示. 这种关系在三维空间成立, 而在二维空间这种意义的 Huygens 原理就不成立了(→ 双曲线型偏微分方程).

设 F 为任意函数, 在单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的方向进行的**平面波** (plane wave) 可以用 $\psi=F(t-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}/c)$ 来表示 ($\boldsymbol{r}=(x, y, z)$ 是位矢). 最简单的情况是 $\psi=A\sin(\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\delta)$ 这样的**正弦波** (sine wave). 这里 A (振幅) 和 δ (周相常数) 是任意常数, 矢量 $\boldsymbol{k}$ 指向波的进行方向,具有关系 $|\boldsymbol{k}|c=\omega$. ω 称为**角频率**(angular frequency), $\omega/2\pi$ 称为**频率** (frequency), $\boldsymbol{k}$ 称为**波数矢量**, $|\boldsymbol{k}|$ 称为**波数** (wave number), $2\pi/\omega$ 称为**周期** (period), $2\pi/|\boldsymbol{k}|$ 称为**波长** (wave length). 波峰的进行速度等于 $\omega/|\boldsymbol{k}|=c$, 称为**相速度** (phase velocity).

从原点发散出来的**球面波** (spherical wave) 一般可以用

$$\psi=\sum_n\varphi_n\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n\frac{1}{r}F\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

来表示. 这里 φ_n 是 n 阶球带函数†.

波动并不限于上述方程所表示的范围, 在一般情况下, ψ 不是标量而是具有数个分量的量(例如矢量), 它的分量满足联立微分方程. 方程的形式虽有种种, 但一般都具有正弦波形式的解, 相速度 $c=\omega/|\boldsymbol{k}|$ 一般是波长 λ 的函数. 这种波称为**弥散波** (dispersive wave). 媒质变化的传播速度不等于相速度. 具有近似于平面波形式的有限范围的变化,以 $c-\lambda dc/d\lambda$ 的速度传播, 这样的速度称为**群速度** (group velocity). 在多数情况下, 表示振幅的矢量 $\boldsymbol{A}$ (以及相应的 δ) 和 $\boldsymbol{k}$ 之间也有一定的关系, 称为波的**偏振** (polarization). $\mathbf{A}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 互相平行的波称为**纵波** (longitudinal wave), 互相垂直的波称为**横波** (transversal wave). 通常, 由于波动方程是线性的,两个解的叠加也是一个解(叠加原理†). 使两个进行方向相反的正弦波叠加能构成波峰停止的波(例: $\psi=A\sin\omega t\sin\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$), 这种波称为**驻波** (stationary wave). 由于波的能量与 ψ 的平方成正比, 所以两个波的叠加波的能量不等于两个波的能量之和; 这种现象称为波的**干涉** (interference). 波遇到障碍物时就绕过障碍物传播到它后方, 能量分布随障碍的形状而异,这种现象称为波的**衍射** (diffraction).

对于空气中的声波以及水面上的波, 当振幅很大时,上述波动方程就不适用了,在一般情况下, 需要处理涉及非线性方程的问题. 例如在空气中,如果存在密度和压力的不连续面,就要发生冲击波; 在爆炸或物体以高速度进行等情况下会出现这种现象. 关于研究原子现象的波动力学,可参考量子力学等条.

[参] [1] H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, 第六版 1932; [2] Lord Rayleigh, Theory of sound I, II, Macmillan, 1877—1878; 第二次修订版, I, 1894; II, 1896; 重印, Dover, 1945; [3] M. Born, Optik. Berlin, 1933; [4] P. Frank-R. von Mises, Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Friedr. Vieweg Braunschweig, 第二版 1935.

振动 [英 vibration, oscillation 法 vibration, oscillation 德 Schwingung 俄 колебание 日 振動] 周期地(包括近似的情况)反复出现的

现象一般称为**振动**. 周期振动在理论上完全可以作为微分方程的周期解来研究. 方程的解 $f(t)$ 的周期[†]称为振动的**周期** (period), 周期的倒数称为**频率** (frequency). $f(t)$ 的极大值 (大范围的或一个区间内的)称为**振幅** (amplitude). 振动理论本来起源于机械振动的研究, 但是它的术语还适用于能用同样方程来描述的现象, 例如电路中电流的振荡等等.

在工程中,如何防止振动的发生,如何使持续振动稳定地发生,都是需要解决的问题. 在振动理论中还包括近几年来才确认其存在的地球自由振动等大规模振动的问题.

【线性振动】 关于线性常微分方程的周期解,从很早以来就进行了详细的研究. 最简单的情况是作用于物体的**恢复力** (restitutive force) 与物体到平衡位置的距离成正比, 而能用微分方程

(1) $$d^2x/dt^2 + n^2x = 0$$

表示的现象. 振幅非常小的自由单摆的振动, 自感线圈和电容器连结成的电路(电阻为零)中的电流、电压的振荡等都是这种现象的典型例子. 方程 (1) 的解可以用 $x = A\cos(nt+\alpha)$ 来表示. 这称为**谐振动** (harmonic oscillation) 或**简谐运动** (simple harmonic motion). 这时振幅为 A, 周期为 $2\pi/n$, n 称为**角频率** (angular frequency), α 称为**初相**(initial phase).

当自由度为 n 的系统 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的各坐标能够表示为

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\cos(n_k t + \alpha_k),$$
$$i = 1, \cdots, n$$

时, 则称这个系统在作自由谐振动. 其各个谐振动称为这个系统的**简正振动** (normal vibration). 相当于自由度为无穷大的极限情况的振动是弦振动,其方程为

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{n^2\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$
$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

这个方程的解可以用级数

$$\sum A_k \sin(k\pi x/l)\cos(k\pi nt/l)$$

来表示. 也就是说,这种振动是由相当于 $k=1$ 的基本振动和频率为其整数倍的谐振动合成的.

当振动物体受到与速度成正比的阻力时,其运动方程为

(2) $$d^2x/dt^2 + L\varepsilon dx/dt + n^2x = 0,$$
$$n > \varepsilon.$$

方程的解为:

(3) $$x = Ae^{-\varepsilon t}\cos(\sigma t + \alpha),$$
$$\sigma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}.$$

这个解已不是周期函数, 但 x 以 π/σ 为间隔无限次变为零,这些间隔内的极值构成以

$$v = \exp(-\pi\varepsilon/\alpha)$$

为公比的等比级数, 逐渐趋近于零. 这样的振动称为**阻尼振动** (damped oscillation), v 称为**阻尼比** (damping ratio), $\log v = -\pi\varepsilon/\alpha$ 称为**对数减缩率** (logarithmic decrement). 这时仍把 $2\pi/\alpha$ 称为"周期".

当有外力 $\varphi(t)$ 作用于振动物体时,其运动方程为在 (2) 的右边加上 $\varphi(t)$, 方程的解为在 (3) 上附加下列各项:

$$\frac{e^{-\varepsilon t}}{\sigma}\left(\sin\sigma t\int\varphi(t)e^{\varepsilon t}\cos\sigma t dt\right.$$
$$\left.-\cos\sigma t\int\varphi(t)e^{\varepsilon t}\sin\sigma t dt\right).$$

用这种关系表示的振动称为受迫于 $\varphi(t)$ 的**受迫振动** (forced oscillation).

如果 (2) 中的 $\varepsilon < 0$ (这时是**负阻力** (negative resistance), 则 (3) 的振幅逐渐增大, 即微小干扰逐渐被扩大而"自然"发生振动, 这种振动称为**自激振动**(self-excited vibration). 这种现象能由特殊线路元件 (例如隧道二极管) 发生,此外,系统中如果有时间延迟,也时常引起这种现象 (→ 差分微分方程).

在持续振动中,除上述受迫振动、自激振动外, 还有因系统中的某种参数作周期变化而引起的**参数持续振动** (parametric sustained vibration). 在高速电机车的架线和导电弓之间时常因参数激变而引起持续振动, 对此需要采取防止措施. 也有利用参数持续振动的无线电元

件，即参变元件．

【非线性振动】 在实际系统中，或多或少总要含有非线性因素，因此要发生不能应用线性方程的理论来处理的各种形式的振动（→非线性振动）．例如，方程

$$d^2x/dt^2 - \varepsilon(1 - x^2)dx/dt + x = 0$$
$$(\varepsilon > 0)$$

所表示的稳定持续振动，当 ε 很大时两种大体稳定的状态交互地反复出现，并由一种状态急速向另一种状态转变．这种振动称为**张弛振动**（relaxation oscillation）．

【参】［1］ 坪井忠二，振動論，河出，1942；［2］ Lord Rayleigh, The theory of sound I, II, Macmillan, 1877—1878；第二次修订版，I, 1894, II, 1896；重印，Dover, 1945；［3］ А. А. Андронов- А. А. Витт- С. Э. Чайкин, Теория колебания, Физматгиз, 1959（中译本：А. А. 安德罗诺夫，А. А. 维特，С. Э. 哈依金，振动理论，科学出版社，上册，1973；下册，1974）；［4］ Л. С. Понтрягин, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Физматгиз, 1961（中译本：Л. С. 庞特利雅金，常微分方程，上海科学技术出版社，1962）．另→非线性问题、非线性振动的［参］．

几何光学 ［英 geometrical optics 法 optique géométrique 德 geometrische Optik 俄 геометрическая оптика 日 幾何光学］ 把光看做是光线的集合而不考虑它的波长和频率，只以三个定律为基础来研究光的路径的数学理论称为**几何光学**．这三个定律是：光的直进性；光的反射定律（是 Euclid 发现的，光在平滑表面上反射时入射角等于反射角）；光的折射定律（是 W. Snell, R. Descartes 发现的，光由折射率为 n 的均匀介质进入折射率为 n' 的均匀介质时，如果入射角为 θ，折射角为 θ'，则 $n\sin\theta = n'\sin\theta'$）．按照 **Fermat 原理**，如果介质的折射率是位置 P 的函数 $n(P)$，那么从点 A' 向点 A 进行的光线总是沿着使积分 $\int_{A'}^{A} n(P)ds$ 取极值的路径进行（ds 表示路径的线素；这个积分称为从 A' 到 A 的**光程**（optical distance））．上述三个定律都可以由这一条原理推导出来．于是可以说，几何光学是以 Fermat 原理为基础建立起来的．光学中的 Fermat 原理和质点力学中的变分原理†（Maupertuis 原理）具有相同的形式．原理是：在能量守恒的质点力学系统中，具有一定能量 h 的单位质量的粒子，在势能为 $U(P)$ 的力场中所走的路径由

$$\delta\int\sqrt{2h - 2U(P)}\,ds = 0$$

决定；这里 $\sqrt{2h - 2U}$ 和折射率 n 相对应．

若在一个光学系统中取正交坐标系 x, y, z，用大体上和质点力学相同的方法定义 Lagrange 函数†

$$L = n\sqrt{(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2)}$$
$$(\dot{x} = dx/dz,\ \dot{y} = dy/dz),$$

典型方向坐标（典型变量†）

$$p = \partial L/\partial\dot{x},\quad q = \partial L/\partial\dot{y},$$

Hamilton 函数†

$$H = \dot{x}p + \dot{y}q - L = -\sqrt{n^2 - p^2 - q^2},$$

就可以得到关于路径的典型方程†．若采用

$$pdx + qdy - Hdz = \omega_d$$

这样的线性形式，则根据变分原理知道，沿光的路径所取积分的变分等于 ω_d 在两端 A', A 的差，即 $\omega_d(A) - \omega_d(A')$，因此这个积分只是两点 A' 和 A 的函数 $S(A', A)$．由此可以得到给出典型方向坐标的方程

$$\partial S/\partial x' = -p',\quad \partial S/\partial y' = -q',$$
$$\partial S/\partial z' = H',\quad \partial S/\partial x = p,$$
$$\partial S/\partial y = q,\quad \partial S/\partial z = -H.$$

由以上各式消去典型方向坐标，就可以得到下面的 Hamilton 方程†：

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z'}\right)^2 = n'^2,$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2.$$

根据这样的关系还可以推导出 **Malus 定理**，即和一个曲面正交的光束经过几次反射、折射后，仍然具有和它正交的曲面．

从物方的任意一点 A' 发出的光线，如果通过光学装置的部分都聚集在象方的一点 A 上且物和象是一一对应的，这种成象称为**完全成象**（perfect imaging）．在完全成象系统中，有 **Maxwell 鱼眼**（Maxwell's fish-eye）（介质的折射率是球对称分布的，而且只是到中心的距离

r 的函数,即可以用

$$n(r)=a/(b+r^2)$$

来表示)和 **Luneburg 透镜** (Luneburg lens)

$$(n(r)=\sqrt{a-r^2})$$

等.在完全成象时,光程保持不变,即

$$n'(A')ds'=n(A)ds$$

的关系成立. 这时能给出保形映射,放大率与折射率成反比.

【Gauss 映射】 如果光学系统具有一旋转轴,即**光轴**(optical axis),则接近于光轴而且倾斜很小的光线称为**傍轴光线** (paraxial ray). 傍轴光线的映射,即和光轴的长度相比,把光线与光轴的距离 x, y 以及典型方向坐标 p, q 看做一阶无穷小量,忽视二阶以上的无穷小量而得到的映射,称为 **Gauss 映射** (Gauss' mapping). 以齐次坐标来表示物的位置和象的位置时,Gauss 映射就是可用线性变换表示的共线映射,点和点一一对应,直线和直线一一对应. 和一个空间的无穷远点相对应的另一个空间的点称为**焦点** (focus),如果把焦点取为各空间的坐标原点,而且采用 $x=x_1/x_4$, $y=x_2/x_4$, $z=x_3/x_4$ 这样的齐次坐标 x_i,就可把 Gauss 映射表示为 $x_1=x_1'$, $x_2=x_2'$, $x_3=fx_4'$, $f'x_4=x_3'$. 物体的垂直于光轴的长度 x' 和象的长度 x 之比,即横放大率,为 $x/x'=z/f=f'/z'$; 横放大率为 1 的点称为**主点** (principal point),主点和焦点的距离 f 和 f' 称为各空间的**焦距** (focal length). 在 Gauss 映射中,除此以外还有望远镜的映射,即 $x_1=x_1'$, $x_2=x_2'$, $x_3=ax_3'$, $x_4=bx_4'$ 的情况,这时横放大率一定.

【象差】 不仅有傍轴光线,而且还有倾斜较大的光线时,所成的象对 Gauss 映射要有些偏移,这种偏移普通称为**象差** (aberration). 如果在 (x', y') 通过在点 $z=z'$ 与光轴垂直的平面、典型方向坐标为 p', q' 的光线变为在 (x, y) 通过在点 $z=z$ 与光轴垂直的平面、方向坐标为 p, q 的光线,则根据变分原理,可以得到

$$pdx+qdy-p'dx'-q'dy'=dW$$

(dW 是完全微分),于是可以说,变换

$$(x', y', p', q')\to(x, y, p, q)$$

是一个正则变换[†]. 这种映射也可以用 W 表示如下:

$$p=\frac{\partial W}{\partial x},\qquad q=\frac{\partial W}{\partial y},$$

$$p'=-\frac{\partial W}{\partial x'},\qquad q'=-\frac{\partial W}{\partial y'}.$$

还可以用

$$V=W+p'x'+q'y'$$

或

$$U=W+p'x'+q'y'-px-qy$$

来表示. 对给定的光学系统计算这些函数(称为**光程函数**(德 Eikonal)),就可以求得象差. 如果对变数展开到四次项,就在旋转对称光学系统中出现五种象差,即球面象差,象场弯曲,畸变,彗形象差和象散. 为了消除这些象差,光学系统必须满足: Abbe 正弦条件(消除球面象差和彗形象差), Petzval 条件(消除象散和象场弯曲)和正切条件(消除畸变).

带电粒子在电磁场中所走的路径,可以用大体上与光线相同的方法来研究. 这时若令粒子的荷质比为 ε, 静电势为 A_0, 矢量势的分量为 A_x, A_y, A_z, 能量为 h, 就可取折射率为

$$\sqrt{2(h-\varepsilon A_0)}+\varepsilon(A_x dx/ds+A_y dy/ds + A_z dz/ds).$$

在这种情况下,由于有磁场存在,折射率是各向异性的. 如果只考虑傍轴光线,粒子的路径可以由二阶微分方程决定,和几何光学一样,出现 Gauss 映射.

【参】 [1] C. Carathéodory, Geometrische Optik, Springer, 1937; [2] M. Herzberger, Modern geometrical optics, Interscience, 1958; [3] R. K. Luneburg, Mathematical theory of optics, Univ. of California Press, 1964.

电磁学 [英 electromagnetism 法 électromagnétisme 德 Elektromagnetismus 俄 электромагнетизм 日 電磁気学] 【Maxwell 方程】 从数学的观点来说,**电磁学**就是在各种条件(空间中介质的形状和位置,边界条件,初始条件)下解 Maxwell 方程的问题. 在真空中描述电场矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁场矢量 $\boldsymbol{H}$ 的 **Maxwell 方程** (Maxwell's equation) 为

(1)　$\varepsilon_0 d\boldsymbol{E}/dt = \operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}_0,\quad \varepsilon_0 \operatorname{div}\boldsymbol{E} = \rho_0,$
$\mu_0 d\boldsymbol{H}/dt = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{J}_m,\quad \mu_0 \operatorname{div}\boldsymbol{H} = \rho_m,$

式中 ρ_0 表示电荷密度，ρ_m 表示磁荷密度，$\boldsymbol{J}_0$ 表示电流密度，$\boldsymbol{J}_m$ 表示磁流密度，这些量必须满足连续方程

(2)　$d\rho_0/dt + \operatorname{div}\boldsymbol{J}_0 = 0,$
$d\rho_m/dt + \operatorname{div}\boldsymbol{J}_m = 0.$

ε_0, μ_0 为常数，$1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c$ 为光速常数，等于 2.99797×10^8 米/秒．实际上，根据经验，可以认为 $\rho_m = 0$, $\boldsymbol{J}_m = 0$，这种情况破坏了电学量和磁学量之间的对称性．但是，即使这些量不为零，在经典理论范围内也不发生矛盾．但下面取 ρ_m, $\boldsymbol{J}_m$ 为零．

当有物质存在时，需要对电荷、电流分别加上物质的电极化、磁极化(磁化)所产生的电荷、电流，因此需要对 (1) 进行如下的置换：

(3)　$\rho_0 \to \rho = \rho_0 - \operatorname{div}\boldsymbol{P},$
$\boldsymbol{J}_0 \to \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 + d\boldsymbol{P}/dt + \operatorname{rot}\boldsymbol{M},$
$\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}.$

若分别以

(4)　$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P},\quad \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$

定义**电通量密度或电位移** (electric displacement) $\boldsymbol{D}$，**磁通量密度或磁感应** (magnetic induction) $\boldsymbol{B}$，就可以把 (1) 写为

(5)　$d\boldsymbol{D}/dt = \operatorname{rot}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{J}_0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{D} = \rho_0$
$d\boldsymbol{B}/dt = -\operatorname{rot}\boldsymbol{E},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0.$

真空电磁场中存在着密度为

(6)　$u = (\varepsilon_0/2)\boldsymbol{E}^2 + (\mu_0/2)\boldsymbol{H}^2$

的能量，并且存在着可以用 **Poynting 矢量** (Poynting vector) $\boldsymbol{S}$，即

(7)　$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$

表示的能流密度，即有

(8)　$\operatorname{div}\boldsymbol{S} + du/dt = 0.$

大小为 q 的电荷以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时所受电磁场的作用力为

(9)　$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}.$

也可以认为，这种力是由 **Maxwell 应力** (Maxwell stress) 张量，即

(10)　$T_{ik} = (\varepsilon_0/2)(-E_iE_k + 2\delta_{ik}\boldsymbol{E}^2) + (\mu_0/2)(-H_iH_k + 2\delta_{ik}\boldsymbol{H}^2)$

产生的．

用**标量势** (scalar potential) V 和**矢量势** (vector potential) $\boldsymbol{A}$，还可以把电磁场表示为

(11)　$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} V - d\boldsymbol{A}/dt,$

如果再加上附加条件

(12)　$\varepsilon_0\mu_0 \operatorname{div}\boldsymbol{A} + dV/dt = 0,$

就可以把 (1) 写为下面的波动方程：

(13)　$\Box V = -\rho_0/\varepsilon_0,\quad \Box\boldsymbol{A} = -\mu_0\boldsymbol{J}_0,$

这里

$$\Box = \Delta - \varepsilon_0\mu_0\partial^2/\partial t^2,$$

称为 **d'Alembert 算符** (d'Alembertian)，也可以用 $\Diamond^2$ 表示．于是可以认为电磁场是以速度 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ 在真空中传播的波．由量子理论知道，电磁场的实质以 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 表示，不如用 V, $\boldsymbol{A}$ 表示更适宜一些．但是 V, $\boldsymbol{A}$ 不是唯一确定的，当对于任意时空函数 ϕ 作置换

(14)　$V \to V + \partial\phi/\partial t,\quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \operatorname{grad}\phi$

(这称为**规范变换** (gauge transformation)) 时，$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 保持不变．

Maxwell 方程对 Lorentz 变换†具有不变性，因此可以把它写为四维张量的形式．这时 V 和 $\boldsymbol{A}$ 构成一个四维矢量 A_i: (A_x, A_y, A_z, $(i/c)V$)，ρ_0 和 $\boldsymbol{J}_0$ 也构成一个四维矢量 J_i: (J_{0x}, J_{0y}, J_{0z}, $-ic\rho_0$)，而且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 成为二阶交错张量 f_{ik} 的分量，即

(15)
$$f_{ik}:\begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & iE_x/c \\ -B_z & 0 & B_x & iE_y/c \\ B_y & -B_x & 0 & iE_z/c \\ -iE_x/c & -iE_y/c & -iE_z/c & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 f_{ik} 具有六个独立分量，所以称为**六元矢量** (six vector)．根据这些关系，可以把 Maxwell 方程写为

(16)
$$\sum_k \frac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = \mu_0 J_i,$$
$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial x_j} = 0,$$

可以把 (11) 写为

$$f_{ik} = \partial A_k/\partial x_i - \partial A_i/\partial x_k,$$

还可以把附加条件 (12) 写为

$$\sum\partial A_i/\partial x_i = 0.$$

可以认为，Maxwell 方程是质量为零、自旋为 1 的 Bose 粒子†(光子†)的波动方程. 如果把场的量看做量子力学的变量(q 数)，进行二次量子化†，就可以得到量子电动力学.

【实际问题】 解决电磁学的实际问题时，关于物质的极化和电流，通常作如下的假定，即令

(17) $\boldsymbol{P}=\chi_e\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{J}_0=\sigma\boldsymbol{E}.$

于是得到

(18) $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},$

这里

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\chi_e,\quad \mu=\mu_0(1+\chi_m).$$

这样，(5) 就和把 (1) 中的 ε_0 用 ε 代替，把 μ_0 用 μ 代替的结果相同(但假定 ρ_m, $\boldsymbol{J}_m$ 为零).

下面列举几个有实际意义的问题.

1) 静电场问题. 这是 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ 不含时间，没有电流的情况. 这时 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是独立的. 对 $\boldsymbol{E}$ 来说，可由解 Poisson 方程† $\Delta V=-\rho/\varepsilon$ 求得. 在导体中 V 是一定的.

2) 静磁场问题. 这是在 1)中只考虑 $\boldsymbol{H}$ 的问题，如果没有电流，就可以用解决静电场问题的方法来解决. 如果有稳定电流，就成为解方程

(19) $\Delta\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J},\quad \operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$

的问题.

3) 准稳定电路问题. 这是在电工学中时常遇到的问题，它的特征是电流只存在于几个电路元件(线圈、电容器、电阻)和连结这些元件的导线之中，而其他场所的电流($\boldsymbol{J}_0$ 和 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$)可以忽视. 这相当于在力学中把一切物体当做具有有限自由度的质点系或刚体系来处理，尽管它们原来都是连续弹性体. 网络系统是以这些电路元件为分支的线图. 在网络理论中有拓扑网络理论和函数论网络理论等部门. 前者是研究上述线图的结构与网络的电学特性的关系的理论；后者是研究网络各部分的电流和电压的关系的理论，这时把电流和电压看作为加在网络某一点上正弦交变电压的频率的函数. 这些理论构成了独立的数理工程学体系，它是根据工程学的要求设计网络的理论(→ 网络，色散关系).

4) 电磁波理论. 这种理论所研究的是，电磁场的量都以 $e^{i\omega t}$ 的形式变化，而且 ω 很大，(5) 中 $d\boldsymbol{D}/dt$ 的数量级等于或大于 $\boldsymbol{J}_0$ 的情况；它的特征是专研究电磁场所表现的波动的性质. 根据导体、电介质等物质的形状，空间配置，能源类型等等，可以分为各种类型的问题. 主要问题是：i) 从点源发出的波在自由空间的传播；ii) 平面波在小物体、柱状物体上的散射；iii) 波通过导体板上的开孔时的衍射；iv) 波在不同介质的边界上的反射、折射；v) 导体管(波导管)中传播的波；vi) 在用导体围成的空腔中电磁场的共振等等. 此外，用波导管、空腔等组成的"立体电路"，也可以用类似于研究普通电路的方法来研究，这些理论也可应用于使用微波的装置之中.

【参】 [1] 高橋秀俊，電磁気学，裳華房，1961; [2] J. A. Stratton, Electromagnetic theory, McGraw-Hill, 1941; [3] B. I. Bleaney, Electricity and magnetism, Clarendon Press, 1957; [4] E. Kähler, Bemerkungen über die Maxwellschen Gleichungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 12 (1938), 1—28; [5] R. Fano-L. J. Chu-R. B. Adler, Electromagnetic fields, energy and forces, John Wiley, 1960; [6] E. G. Hallen, Electromagnetic theory, Chapman & Hall, 1962; [7] Л. Д. Ландау-Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1959 (中译本：Л. Д. 朗道、Е. М. 栗弗席兹，连续媒质电动力学，人民教育出版社，1979).

网络 [英 network 法 réseau 德 Netzwerk, Schaltung 俄 сеть 日 回路] 【线图】 在支的集合 $\{B_\kappa\}$ ($\kappa=1,\cdots,n$) 和点的集合 $\{N_a\}$ ($a=1,\cdots,m$) 这两种集合上，若定义表示支和点的连接关系的函数 $[B_\kappa: N_a]$ (点 N_a 是支 B_κ 的起点时其值为 1；是支的终点时其值为 -1；点 N_a 不是支 B_κ 的端点时其值为 0；即当 B_κ 固定时其值为 1 和 -1 的 N_a 各有一个，对于其他的 N_a 其值都为零)，这时支和点的集合以及两者间的连接关系统称为**线图**(linear graph)，或简单地称为**图** (graph). (若用拓扑语言来表达，则为一维有限单纯复形. → 复形.) 所谓广义网络就是对支和点赋予了某种物理性质的线图.

【各种网络】 一种最简单的网络是接触网

络 (contact network)，即让支同继电器或者开关等的接触点相对应，允许有"开 (on)"和"关 (off)"两种状态的网络．这种理论可以应用于电话交换机和电子计算机的网络．在这种理论中使用 Boole 代数† 等数学工具．

在多数情况下，能够使满足下述条件 (i)，(ii) 的两种实数量 (变数或时间的函数) i_κ，E_κ 与网络的支 B_κ 相对应．这些条件是：

(i) $\sum_{\kappa=1}^{n}[B_\kappa:N_a]i_\kappa=0\quad(a=1,\cdots,m)$，

(ii) 满足 $\sum_{a=1}^{m}[B_\kappa:N_a]E_a=E_\kappa\quad(\kappa=1,\cdots,n)$ 的 E_a 一定存在．

如果把 i_κ，E_κ，E_a 分别称为支电流、支电压、点电位，则上述二条件就成为**电网络** (electric network) 中的 **Kirchhoff 定律** (kirchhoff's law)．使在区间 $[a_\kappa, b_\kappa]$ 上定义的凸函数 f_κ 与各支相对应，在条件 (i) 之下使 $\sum_{\kappa=1}^{n}f_\kappa(i_\kappa)$ (或在条件 (ii) 之下使 $\sum_{\kappa=1}^{n}f_\kappa(E_\kappa)$) 成为最小的问题是数学规划中的特殊情况，称为**网络流问题** (network flow problem)，其中包括运筹学† 中的运输问题以及日程规划等重要应用问题．

【电网络】 很早以来开始研究的是有关下述电网络的问题．所谓**网络**，狭义地说是指电网络而言．使 i_κ 成为给定的时间函数的支叫电流源，使 E_κ 成为给定的时间函数的支叫电压源 (两者总称为电源)．电源支数为 M 的网络称为 ***M* 端对网络** (M-port network)．在一网络中，如果电源以外的 n' 个支中的电流 i_κ，电压 E_κ 满足

$$E_\kappa=\sum_{\lambda=1}^{n'}z_{\kappa\lambda}i_\lambda \quad 或 \quad i_\kappa=\sum_{\lambda=1}^{n'}y_{\kappa\lambda}E_\lambda$$

($z_{\kappa\lambda}$，$y_{\kappa\lambda}$ 是线性微分积分算符) 的关系，则称此网络为**线性网络** (linear network)；如果 $z_{\lambda\kappa}=z_{\kappa\lambda}$，$y_{\lambda\kappa}=y_{\kappa\lambda}$，则称为**倒易网络** (reciprocal network, bilateral network)；如果 $z_{\kappa\lambda}$，$y_{\kappa\lambda}$ 对于时间原点的移动是不变的，则称为与时间无关的网络；在与时间无关的网络中，不论选取电源为任何时间函数，对于所有的 t，使得

$$\int_{-\infty}^{t}\sum_{B_\kappa\in S}i_\kappa(\tau)E_\kappa(\tau)d\tau\leqslant 0$$

(S 是电源支的集合) 都成立的网络称为**无源网络** (passive network)．当把电源支 i_κ，E_κ 特别写为 I_κ，e_κ 时，在线性网络中有

$$e_\kappa=\sum_{B_\lambda\in S}Y_{\kappa\lambda}I_\lambda,\quad I_\kappa=\sum_{B_\lambda\in S}Z_{\kappa\lambda}e_\lambda$$

($Z_{\kappa\lambda}$，$Y_{\kappa\lambda}$ 是线性微分积分算符)．$Z_{\kappa\lambda}$ 或 $Y_{\kappa\lambda}$ 构成的矩阵称为端对**阻抗矩阵** (impedance matrix) 或端对**导纳矩阵** (admittance matrix)．

给出线图和 $z_{\kappa\lambda}(y_{\kappa\lambda})$ 求 $Z_{\kappa\lambda}$，$Y_{\kappa\lambda}$ 的问题称为**分析** (analysis)；给出 $Z_{\kappa\lambda}(Y_{\kappa\lambda})$ 的全体或一部分，或它所必须满足的几项条件，并对所允许的 $z_{\kappa\lambda}(y_{\kappa\lambda})$ 的形式加以限制，求 $z_{\kappa\lambda}(y_{\kappa\lambda})$ 和线图的问题称为**综合** (synthesis)．当处理分析和综合的问题时，通常把 $z_{\kappa\lambda}$，$y_{\kappa\lambda}$，$Z_{\kappa\lambda}$，$Y_{\kappa\lambda}$ 用它们的 Laplace 变换† $\bar{z}_{\kappa\lambda}(s)$，$\bar{y}_{\kappa\lambda}(s)$，$\bar{Z}_{\kappa\lambda}(s)$，$\bar{Y}_{\kappa\lambda}(s)$ 来表示 ($s=i\omega$，ω 是角频率)．这时，线图的拓扑性质和 s 的复变函数 $\bar{z}_{\kappa\lambda}(s)$，$\bar{y}_{\kappa\lambda}(s)$ 的函数论性质，决定网络的特性 $\bar{Z}_{\kappa\lambda}(s)$，$\bar{Y}_{\kappa\lambda}(s)$．

这些特性是：i) 如果 $\bar{Z}_{\kappa\lambda}(s)$ 和 $\bar{Y}_{\kappa\lambda}(s)$ 都是在右半平面为正则的 s 的有理函数，那么，网络为无源网络的充分必要条件为：对于任意的实数 ξ_κ，

$$\sum_{B_\kappa,B_\lambda\in S}\xi_\kappa\xi_\lambda\bar{Z}_{\kappa\lambda}(s)\quad 或 \quad \sum_{B_\kappa,B_\lambda\in S}\xi_\kappa\xi_\lambda\bar{Y}_{\kappa\lambda}(s)$$

是 s 的**正实函数** (positive real function)，也就是说，当 s 取实数时，函数值为实数；而当 s 位于右半平面时，函数值也位于右半平面；ii) 任意一个一端对无源网络都可以用有限个电阻、电容、电感这样三种支合成 (这三种支分别具有 $E_\kappa=R_\kappa i_\kappa$，$i_\kappa=C_\kappa dE_\kappa/dt$，$E_\kappa=L_\kappa di_\kappa/dt$ ($R_\kappa>0$，$C_k>0$，$L_k>0$) 的电流-电压关系)；iii) 任何一个 M 端对无源网络 ($M\geqslant 2$)，除了使用上述三种支外，还可以使用理想变压器 (理想变压器是这样一对支 (B_κ，B_λ)，使 $i_\kappa=-ni_\lambda$ 和 $E_\lambda=nE_\kappa$，而 n 为实数) 和理想迴转器 (理想迴转器是这样一对支 (B_κ，B_λ)，使 $i_\kappa=E_\lambda$ 和

$i_1 = -E_s$）来加以合成（不过合成倒易网络不需要迴转器）．这些是已经解决的问题，而不允许使用理想变压器和理想迴转器的 M 端对无源网络的合成问题，还没有得到解决．对于这样的问题，目前正在用拓扑方法进行研究．如果允许使用理想变压器等，网络的线图结构就几乎没有意义了．

【参】［1］K. Kondo 等编，RAAG memoirs of the unifying study of basic problems in engineering and the physical sciences by means of geometry, vols. 1, 2, 3, 学術文献普及会，1955, 1958, 1962；［2］W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Bd. I, Becker & Euler, Leipzig, 1941（英译本：Synthesis of linear communication networks, McGraw-Hill, 第二版 1958）；［3］J. E. Storer, Passive network synthesis, McGraw-Hill, 1957；［4］L. Weinberg, Network analysis and synthesis, McGraw-Hill, 1962；［5］O. Brune, Synthesis of a finite two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency, J. Math. phys., **10** (1931), 191—236；［6］Y. Oono（大野克郎）-K. Yasuura（安浦亀之助），Synthesis of finite passive $2n$-terminal networks with prescribed scattering matrices, Mem. Fac. Engineering, Kyushu Univ., **14** (1954), 125—177；［7］S. Seshu-M. B. Reed, Linear graphs and electrical networks, Addison-Wesley, 1961；［8］W. H. Kim-R. T. Chien（钱天闻），Topological analysis and synthesis of communication networks, Columbia Univ. Press, 1962；［9］C. Berge-A. Ghouila-Houri, Programmes, jeux et réseaux de transport, Dunod, Paris, 1962（英译本：Programming, games and transportation networks, Methuen, 1965）；［10］L. R. Ford, Jr.-D. R. Fulkerson, Flows in networks, Princeton, 1962.

扩散［英 diffusion 法 diffusion 德 Diffusion 俄 рассеивание, диффузия 日 拡散］如果把带颜色的水和不带颜色的水之间的隔壁静静地撤去，而且使之处于完全不发生对流等流动的状态，两种水在相当长的时间内自然互相混合，不久就达到全体均匀的状态．这是因为色素分子受不规则的分子运动的影响发生运动而向全体扩展的缘故．这种现象称为**扩散**．能够直接观察到的扩散过程的典型例子是悬浊于液体中的胶质分子的 Brown 运动（→ Brown 运动）．

当观察大量粒子的扩散时，可以把粒子的浓度 $c(\boldsymbol{r}, t)$ 作为位置 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t 的函数来描述．当追踪一个粒子的移动时，作为随机过程†，可以考虑这个粒子在时刻 t 出现于位置 $\boldsymbol{r}$ 的概率密度 $P(\boldsymbol{r}, t)$．这两种情况都遵守形式为

(1) $\partial f(\boldsymbol{r}, t)/\partial t = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} f(\boldsymbol{r}, t))$

的方程．这个方程称为**扩散方程**（diffusion equation），D 称为**扩散系数**（diffusion coefficient）．$\boldsymbol{j} = -D \operatorname{grad} f$ 是和浓度梯度成正比的粒子流或概率流．这就是 Fick 定律．扩散系数 D 由扩散粒子的性质、扩散粒子与介质粒子的相互作用，以及温度等决定．对于一维扩散，扩散方程成为抛物线型偏微分方程†，即

(2) $\partial f(x, t)/\partial t = D\partial^2 f(x, t)/\partial x^2$.

它的基本解为

(3) $f(x, t) = (4\pi Dt)^{-1/2}\exp(-x^2/4Dt)$,

这表示的是在 $t = 0$ 时集中于原点的粒子的扩散过程．

扩散的分子过程一般是很复杂的，但是可以考虑两个典型的极限例子．一个是稀薄气体中的扩散，每个粒子时常与其他粒子碰撞而改变其飞行方向，沿曲折路径运动．这就是后面要讲的**随机游动**（random walk, random flight）．在这种情况下，若设每两次碰撞之间的平均自由程为 l，飞行速度为 v，则 $D = lv/3$．另一个典型的极限例子是 Brown 运动，扩散粒子不断地从各方面受到不规则的力的作用以及介质的粘性阻力 $-\eta v$（v 是速度）的作用而运动（→ 统计力学）．若周围的温度为 T，可以证明 **Einstein 关系**（Einstein relation）$D = kT/\eta$ 成立．

用分子运动的每个动作的时间、空间尺度来描述分子扩散时，扩散方程(1)是不正确的．扩散方程(1)只对于比分子尺度大得多的时间、空间内的变化近似地成立．这相当于把扩散作为正规 Марков 过程†来描述．

【随机游动问题】K. Pearson 于 1905 年提出了下述问题．"一个人从一点 O 出发沿直线行走一段距离 a，然后任意改变方向再走一段距离 a，把这样的过程反复 n 次之后，这个人位于和出发点的距离为 r 和 $r + \delta r$ 之间的概率是多大？"这样的问题称为**随机游动问题**（problem of random walk）．Lord Rayleigh 已于

1880年就多数声波的合成研究了同样问题([1]).

在一维情况下,若令每次行走的距离为1,行走 n 次之后到达与原点的距离为 x 之处的概率可以用二项分布

$$(4)\quad P_n(x) = \frac{n!}{2^n}\left(\frac{n+x}{2}!\,\frac{n-x}{2}!\right)^{-1}$$

给出. 在二维情况下,若令所求的概率为 $P_n(r)\delta r$ ([2]),则

$$(5)\quad P_n(r) = r\int_0^\infty J_1(rt)(J_0(at))^n dt.$$

在三维情况下([3]),则有

$$(6)\quad P_n(r) = \frac{r}{2a^2}\frac{n^{n-2}}{(n-2)!}\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{n}{s} \times\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{r}{na}\right)-\frac{s}{n}\right)^{n-2},$$

式中

$$k/n \leqslant (1/2)(1-r/na) < (k+1)/n.$$

如果相连两次行走之间没有相关关系,随机游动问题只是偶然量的和的概率分布问题,但是也可以推广到与行走的距离、方向有相关关系的情况. 这时成为随着 Марков 过程逐次积累的偶然量的和的概率分布问题. 当行走的次数 n 很大时,求渐近解一般是很有趣味的. r^2 的平均值一般具有 na^2 的量级,在

$$r \sim \sqrt{n}\,a \ll na$$

的范围内,中心极限定理[†]成立,可以得到正态分布. 例如,根据 Stirling 公式知道,公式(4)成为

$$P_n(x) \sim (1/\sqrt{2\pi n})\exp(-x^2/2n).$$

在三维情况下,位于 (x, y, z) 附近的 $dxdydz$ 中的概率,在这样的极限条件下成为

$$(1/2\pi na^2)^{3/2}\exp(-n(x^2+y^2+z^2)/2a^2).$$

随机游动理论可以应用于许多物理问题,例如上述的 Brown 运动、气体分子扩散的模型([4])、波动的合成、高分子的形状分布、一维物质的统计力学等.

还有随机游动空间受到限制的情况,例如,用壁加以限制,或脱出介质后不能再回去,带有这类条件的随机游动问题是可以想象的. 这和首次通过某一位置的时刻(这叫**首次通过** (first passage))的问题有关联. 这些问题的一般化是随机过程的重要问题([5]) (→ Марков 过程).

【参】 [1] Lord Rayleigh, The theory of sound, Macmillan, 第二次修订版, 1929, Vol. I, p. 36; [2] G. N. Watson, A treatise on theory of Bessel functions, Cambridge, Univ. Press, 1922, p. 419; [3] L. R. G. Treloar, The physics of rubber elasticity, Oxford, Univ. Press, 1949, p. 100; [4] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, Rev. Mod. Phys., **15** (1943), 2—89; [5] W. Feller, Introduction to probability theory and its application, John Wiley, 第二版, I, 1957; II, 1966 (中译本: W. 费勒, 概率论及其应用(第一卷),科学出版社,上册 1964, 下册 1975).

统计力学 [英 statistical mechanics 法 mécanique statistique 德 statistische Mechanik 俄 статистическая механика 日 統計力学] 例如,在1厘米³的水中大约有 3×10^{22} 个水分子. 可见,宏观物质是由极大量的粒子构成的,这些粒子按照力学规律进行着极为复杂的运动. 然而,用力学方法研究这种微观运动的详细状况,不仅不可能而且没有意义. 在热力学以及流体力学等学科中,从现象论的观点对物理过程的描述,是通过少数宏观变量(温度,压力,流场的量等)来进行的; 然而微观运动是非常复杂的(复杂到分子混乱运动),只能从统计的以至于平均的观点来考虑,因此这些变量具有由此产生的单纯性. 于是需要建立一种把微观力学和概率论结合起来的理论体系. 这种理论体系,一般地说就是**统计力学**; 也就是说,统计力学的任务是: 从原子论观点的物质系统的结构、它们的粒子间的相互作用以及力学法则出发,并结合概率的理论,从理论上推导出我们所观测到的宏观物理法则. 用统计力学的方法既能推出热力学以及宏观电磁学中的一般法则,同时还能推导出各个物质系统的固有性质. 从这种意义来说,统计力学是现代物性学的一个柱石.

严格地说,微观世界的力学法则是量子力学; 然而在量子力学诞生以前,以经典力学为基础的统计力学就有了较大的发展,称为**经典统**

计力学 (classical statistical mechanics); 以量子力学为基础的统计力学称为**量子统计力学** (quantum statistical mechanics). 对应着热力学,把研究处于平衡状态的系统的统计力学称为**平衡系统的统计力学**或**统计热力学** (statistical thermodynamics). 到二十世纪五十年代为止,狭义统计力学主要是指统计热力学而言. 而广义统计力学是以一般系统为对象的, 不要求一定处于热平衡状态. 最近把研究处于非平衡状态的不可逆过程的一般理论称为**不可逆过程** (irreversible process) 的统计力学.

【历史】 统计力学是根据十八世纪以来的**气体分子运动论** (kinetic theory of gases) 建立的. 在稀薄气体中,气体分子几乎是自由地在容器中飞来飞去,时时互相碰撞,各分子的平均动能由气体的温度决定,即

$$m\bar{v}_x^2/2 = m\bar{v}_y^2/2 = m\bar{v}_z^2/2 = kT/2,$$

这里 (v_x, v_y, v_z) 表示速度的分量, "$-$" 表示平均, m 表示分子的质量, T 表示绝对温度, k 表示 Boltzmann 常数 ($=1.38\times 10^{-16}$ 尔格·度$^{-1}$). 可以认为,各分子的速度不是一定的,而是遵守某种概率法则. 因此作为 v_x, v_y, v_z 的分布概率密度, 可以定义一个速度分布函数 $f(v_x, v_y, v_z)$. 对于稀薄气体,这个函数具有下式所示的形式,即

$$(1)\qquad f(v_x, v_y, v_z) = C\exp((-m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/kT).$$

这样的分布法则称为 **Maxwell-Boltzmann 速度分布律** (Maxwell-Boltzmann distribution law). L. Boltzmann 认为,由于分子碰撞的影响,速度分布函数随着时间变化, 他对这种变化给出了形式为

$$(2)\qquad \partial f/\partial t = A[f] + \Gamma[f]$$

的方程. 这里 $A[f]$ 表示有外力存在时外力产生的加速度所引起的分布函数 f 的变化, 它对 f 来说是线性的; $\Gamma[f]$ 表示分子互相碰撞所引起的变化, 在一般情况下是关于 f 的非线性积分. 具有这样形式的方程称为 **Boltzmann 方程**.

Boltzmann 根据(2)式证明了由

$$(3)\qquad H = \iiint f \log f dv_x dv_y dv_z$$

定义的H函数具有 $dH/dt \leqslant 0$ 的性质. 这称为 ***H* 定理** (H-theorem) ([1]). 因此, 在稳定热平衡状态下的分布(1), 可以由使 H 成为最小的条件求得. 实际上, H和熵 S 有下面的关系:

$$(4)\qquad S = -kH.$$

Boltzmann 更进一步指出(1877), 对于一般力学系统, 热平衡状态的分布函数可以不由(2)那样的运动论的方程给出, 而由更普遍的立场出发给出; 因此热平衡状态的统计力学是由比分子运动论更高的一般立场出发而建立起来的. 把这个问题更加明确地体系化的是 W. Gibbs (1902).

【遍历假设】 以自由度为 n 的力学系统的坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 和动量 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为坐标的 $2n$ 维空间称为**相空间** (phase space). 系统的力学状态是这个空间的连通集. 系统在某一时刻的状态可以用它的一点 P 来代表, 系统的运动可以用 P 的运动来表示. 因为在守恒系统中能量是一定的, 所以如果假定系统的 Hamilton 函数为 $\mathscr{H}$, 则 P 在能量一定的曲面 ($\mathscr{H} = E$) 即**遍历曲面** (ergode surface) 上运动. 若在遍历曲面上定义一个测度, 以此为夹在 E 和 $E + dE$ 两曲面之间的体积的极限, 则 P 的运动就构成一个使这个测度不变的拓扑群 (Liouville 定理).

已知的力学系统的某种力学量 $A(p, q)$ 的值,随代表点的运动而改变,它的对时间的平均 $\bar{A}$ 可以看做是 A 在热平衡状态的观测值. 对这个问题 Boltzmann 曾提出如下的假设. 他认为遍历曲面是闭曲面,如果 P 的轨道不是闭曲线, P 的轨道就把全部遍历曲面几乎普遍地覆盖了. 这时, A 的长时间的平均 $\bar{A}$, 等于 A 在整个遍历曲面上以上述测度为权函数的平均值, 即**相平均** (phase average) $\langle A\rangle$:

$$(5)\qquad \bar{A} = \langle A\rangle.$$

这条假设称为**遍历假设** (ergode hypothesis) 或**遍历假定**. 这条假设后来促进了数学中的一个

分支——遍历理论的发展（⇀ 遍历理论）.

【平衡系统的统计力学】 如果承认遍历假设，求处于热平衡状态的力学系统的观测值就归结为求遍历曲面上的力学量的相平均，因此热平衡系统的统计力学的主要内容就是求这些相平均以及推导它们之间的关系.

对于能量保持一定的系统，考虑相平均时可以在遍历曲面上设想一个具有上述测度的概率空间，只考虑关于它的概率的平均就可以了. Gibbs 称这样的概率空间为**微正则系综**（microcanonical ensemble）. 这个系综的概率平均可以用下式给出：

$$(6)\quad \langle A\rangle=\int_{\mathscr{H}=E}\frac{A\,dS}{|\mathrm{grad}\,\mathscr{H}|}\Big/\int_{\mathscr{H}=E}\frac{dS}{|\mathrm{grad}\,\mathscr{H}|},$$

式中 $\mathscr{H}$ 表示 Hamilton 函数，$\mathrm{grad}\,\mathscr{H}$ 表示 $\mathscr{H}$ 在 $2n$ 维相空间的梯度，积分在 $\mathscr{H}=E$ 的遍历曲面上进行. dS 表示这个曲面的面积元素.

如果所考虑的系统和热源以力学方式接触而且处于平衡状态，那么这个系统和热源成为一个孤立系统，这时可以作为微正则系综来处理；但是，更方便更合乎物理意义的方法是：认为热源只决定温度 T，而把所考虑的系统用概率的方法来考察. 这时，因为所考察的系统和热源不断地交换能量，所以它的能量不是一定的，因此系统的状态在相空间的所有点以概率形式出现. 为了求这种概率，首先承认遍历假设，进而假定热源是自由度非常大的系统，这样就成为渐近计值问题. 这种渐近计值的推导通常用 Stirling 公式来进行，但是从本质上来说，所根据的是中心极限定理[†].

因此，Gibbs 把表示和温度为 T 的热源相接触而且处于热平衡的系统的概率空间称为**正则系综**（canonical ensemble）. 若以 $d\Gamma$ 表示相空间的体积元素，从这个系综取出的任意一个标本在 $d\Gamma$ 中的某一状态出现的概率可以用下式给出：

$$(7)\quad \Pr(d\Gamma)=C\exp(-\mathscr{H}/kT)\,d\Gamma.$$

力学量 A 的概率平均为

$$(8)\quad \langle A\rangle=\int Ae^{-\mathscr{H}/kT}d\Gamma\Big/\int e^{-\mathscr{H}/kT}d\Gamma.$$

例如，能量平均值为

$$(9)\quad \langle\mathscr{H}\rangle=E=\int\mathscr{H}e^{-\mathscr{H}/kT}d\Gamma\Big/\int e^{-\mathscr{H}/kT}d\Gamma.$$

按照习惯可以令

$$(10)\quad \beta=1/kT,$$

这样就可以把(9)写为

$$E=-\partial\log Z/\partial\beta,$$

式中

$$(11)\quad Z(\beta)=\int e^{-\beta\mathscr{H}}d\Gamma$$

称为**配分函数**（partition function）或**状态和**（英 sum over states 德 Zustandsumme）（⇀[1]，[2]）.

【量子统计力学】 根据量子力学知道，孤立的力学系统处于所谓定态（量子状态）. 但是根据测不准原理

$$\Delta E\Delta t>\hbar$$

（$\hbar$ 是 Planck 常数）知道，系统的总能量相应于观测时间 Δt 具有 ΔE 的测不准量，但是在自由度较大的系统中，实际上在幅度 ΔE 中含有许多量子状态. 经典遍历假设在量子统计力学中的意义是这些量子状态具有相等的权重. 这称为**等权重原理**（principle of equal weight）. 根据这条原理可以定义微正则系综，这样就可以把(6)式改写为

$$(12)\quad \langle A\rangle=\sum_l A_l\Big/\sum_l l.$$

这里 l 表示 ΔE 中存在的各个量子状态，A_l 表示物理量 A 在量子状态 l 中的量子力学期望值. 这时如果假定具有能量 E_i 的量子状态 i 的出现概率为

$$(13)\quad P_i=e^{-\beta E_i}\Big/\sum_i e^{-\beta E_i},$$

就可给出正则系综的定义. 于是概率平均成为

$$(14)\quad \langle A\rangle=\sum_i A_ie^{-\beta E_i}\Big/\sum_i e^{-\beta E_i}$$

对应着(10)，配分函数可由

$$(15)\quad Z=\sum_i e^{-\beta E_i}$$

给出.

对于由大量同种粒子构成的系统，量子力学要求，波函数对于粒子的置换是偶的（Bose 粒子，玻色子†）或奇的（Fermi 粒子，费密子†）．这是经典力学中没有的概念，因此即使对于粒子间没有相互作用的理想气体，量子统计力学和经典统计力学也不相同．例如，(1)所表示的速度分布定律已不正确了．这种差异在粒子的质量很小、密度很大、温度很低的情况下比较显著．这样的量子效应出现于金属中的自由电子、液体氦、高密度的星体等物质中．Bose 粒子所遵守的量子统计规律称为 **Bose 统计法**（Bose statistics），Fermi 粒子所遵守的统计规律称为 **Fermi 统计法**（Fermi statistics）．

【统计热力学】 如果根据(6)、(8)、(12)、(14)进行渐近计算，可以证明，平均值周围的起伏随着自由度 n 的增大而相对地减小；而且还可以证明，这些平均值以及这些平均值之间的关系与热力学诸量以及这些量之间的关系完全一致．这样，根据统计力学既能推导出热力学的诸定理，同时还能在理论上给出从物质的微观结构求热力学函数的方法．热力学与统计力学的基本关系就是 Boltzmann 的关于熵的关系，即

$$S = k \log W. \tag{16}$$

这里W是在给定的宏观条件下可能出现的微观状态(严格地说是量子状态)数．根据这条定义知道，熵是关于研究对象的微观知识的粗糙程度的尺度，也就是情报贫乏程度的尺度．从这种意义上说，热力学第二定律可以用概率论来解释．

【统计力学中的多体问题】 统计力学所研究的对象是由大量粒子构成的系统，因此统计力学的问题一般是**多体问题**(many body problem)．但是，有时可以象理想气体那样，不考虑粒子间的相互作用并以此为极限进行研究．在简单的情况下，还可以把相互作用作为摄动对这种理想极限加以修正，这样来处理实际的物理对象．另一方面，例如气体凝结为液体的现象，一般地说就是所谓相变现象，本质上是粒子间的相互作用在起作用，这是用上述摄动法不能处理的多体问题．由铁磁体向顺磁体的转变，超导状态的出现，以及其他这类现象，在理论上多数是很重要的，但是严格的理论研究一般是很困难的．由高温相向低温相的转变，一般可以认为是在分子热运动中出现了某些新秩序，因此把这样的相变称为**有序-无序转变**（order-disorder transition）．

【Boltzmann 方程和 Bloch 方程】 不可逆过程的统计力学是从气体分子运动论开始的．关于气体的粘性，以及和非平衡状态下的流动有关的物理量，Maxwell, Boltzmann 在很早以前就从理论上进行了研究．Boltzmann 方程一般是非线性微分积分方程，以此为基础的数学理论曾由 D. Enskog, S. Chapman, D. Hilbert 等人就经典气体论加以发展（[9]）．

金属内的自由电子可以看做电子气体，在这种情况下，和电子的互相碰撞相比，由晶格振动或杂质原子引起的散射的影响更大一些．H. A. Lorentz 仿照气体分子运动论建立了处理金属电子的传导现象的不可逆过程理论．但是实际的金属电子遵守 Fermi 统计法，量子效应比较显著，因此用这样的经典理论不能正确处理．A. Sommerfeld, F. Bloch 等人提出并发展了量子力学的金属电子论，对于金属电子，与(2)同形式的方程称为 **Bloch 方程**．

【主方程】 Boltzmann 方程和 Bloch 方程都是关于一个粒子的速度分布方程．作为这些方程的推广，有两个方向．一个方向是**主方程**（master equation）．例如对于含有N个粒子的气体，考虑它的动量的同时分布 $f_N(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_N, t)$．力学中的方程本来是关于 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{p}_N$ 的确定论的方程，但是，如果不考虑坐标 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ 如何而只考虑动量分布，则 $f_N(\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_N)$ 所满足的方程也可以不是确定论的而是概率论的．这一点无论在经典统计力学中还是在量子统计力学中在本质上是相同的．在与观测时间、观测精度有关的某种条件(这种条件普通称为"不精确的看法")下，f_N 的变化成为 Марков 过程†．描述这种过程的方程就是主方程（[10]）．

【粒子分布函数的序列】 Boltzmann 方程的另一个推广方向是：不仅考虑一个粒子的分布函数，而且考虑二个、三个，一般地说有限个(n个)粒子的位置、速度的同时分布函数.例如，$f_2(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_2, t)$ 是两个粒子的分布函数. 如果把全体粒子系统的完全力学描述向这些分布函数的随着时间的变化投影，则 f_1 的运动方程就包含 f_2, f_2 的运动方程就包含 f_3, 这样就形成一条关于 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 的联立方程的链. 这条链的全体和力学中的确定论方程是等价的；但是，如果全体系统是足够大的，而且所考虑的时间是有限的，则在适当的条件下可以期待这条链渐近于描述随机过程的方程. H. H. Боголюбов 指出([11])，Boltzmann 方程实际就是这样的方程. 为了实际应用，J. Yvon, J. G. Kirkwood, M. Born, H. S. Green 等人提出并发展了解这种分布函数的链的近似方法.

同样方法在原则上也能应用于量子统计力学. 这种方法称为 **Green 函数法** (Green function method)，是处理统计力学中的多体问题的一种系统的方法，目前正在发展([12]).

【不可逆过程和随机过程】 研究随时间变化的物理现象的统计力学是力学和随机过程论的结合.这个方面的典型例子是 Brown 运动的理论. 浮游于液体中的胶质粒子，由于分子热运动而作不规则的运动. 为了简单起见，这里只考虑一维运动，只从现象来说，可以认为胶质粒子遵守形式为

$$(17)\qquad m\dot{u} = -m\gamma u + f(t)$$

的运动方程. 式中 m 表示质量，u 表示速度，右端的第一项是粘性阻力，第二项是不规则的力. (17)称为 **Langevin 方程**，在数学上，它是根据给定的过程 $f(t)$ 决定过程 $u(t)$ 的概率方程.

如果(17)所描述的是热平衡状态下的 Brown 运动，则可证明，在阻力系数 $m\gamma$ 和不规则的力 f 之间有下面的关系成立，即

$$(18)\qquad m\gamma = \int_0^\infty \langle f(t_1)f(t_1 + t)\rangle dt.$$

在导体中，由于带电粒子的热运动，电荷发生不均匀的起伏，因而产生不规则变动的电动势. 这种电动势和 Brown 运动[†]中的力相似，被称为热噪声. 对于这个问题也能得到与(18)相同的关系式，这称为 **Nyquist 定理**. 这些定理包括在更普遍的定理，即众所周知的**起伏散逸定理** (fluctuation-dissipation theorem)之中([14], [15], [16]).

如果对处于热平衡状态的系统施加外力，在系统中将发生电流之类的不可逆流动，这种流动和外力的关系一般可以用导纳来表示. 特别是，如果外力是振动的，则导纳 $\chi(\omega)$ 可以用

$$(19)\qquad \chi(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t}\varphi(t)dt$$

的形式给出. 可以证明，式中的 $\varphi(t)$ 是在不受外力作用的热平衡状态下，在系统中作为起伏而发生的流动的相关函数. 表征不可逆过程的导纳的这个关系式一般称为**久保公式**. 对于在外力很小、对热平衡状态的偏离也很小的范围内的线性的现象，可以用上面的关系式作统一论述. 例如，Onsager 倒易定理就可以用这个关系式来证明.

对热平衡状态的偏离比较大、非线性特征比较显著的现象，在实际上很重要，在理论上也很有趣味，但是目前还没有统一的理论.

【参】 [1] D. ter Haar, Elements of statistieal mechanics, Holt, Rinehart and Winston, 1961; [2] Л. Д. Ландау-Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Наука, 1964; [3] R. H. Fowler, Statistical mechanics. Cambridge Univ. Press, 第二版, 1936; [4] A. R. Хинчин, Математические основания статистической механики, Гостехиздат, 1943; [5] R. Kurth, Axiomatic of classical statistical mechanics, Pergamon, 1960; [6] J. von Neumann, Mathematische Gurndlagen der Quantenmechanik, Springer, 1932; [7] 久保亮五，統計力学，共立出版，1952, [8] 戸田盛和，統計力学概説，朝倉，1952; [9] S. Chapman-T. G. Cowling, The mathematical theory of non-uniform gases, Cambridge Univ. Press, 第三版，1970; [10] I. Prigogine, Non-equilibrium statistical mechanics, Interscience, 1962; [11] J. de Boer-G. E. Uhlenbeck, Studies in statistical mechanics I, North-Holland, 1962, p. 5; [12] V. L. Bonch-Bruewich-S. V. Tyablikov, Green function method in statistical mechanics, North-Holland, 1963; [13] M. C. Wang-G. E. Uhlenbeck, On the theory of the Brownian motion II, Rev. Mod. Phys. **17** (1945), 323—342; [14] R. Kubo (久保亮五), Statistical-mechanical theory of irreversible processes I, general theory and simple applications to magnetic and condition problems, J. Phys. Soc. Japan, **12** (1957),507—586; [15] H. B. Callen-T. A. Welton, Irreversibility and

generalized noise, Phys. Rev., **83** (1951) 34—40; [16] H. Takahashi (高橋秀俊), Generalized theory of thermal fluctuations, J. Phys. Soc. Japan, **7** (1952), 439—446; [17] A. A. Абрикосов-Л. П. Горьков-И. Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, 1962; [18] L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie I, II, J. A. Barth, 1912 (英译本: Lectures on gas theory, Univ. of California Press, 1964); [19] R. C. Tolman, The principles of statistical mechanics, Oxford Univ. Press, 1938; [20] J. W. Gibbs, Elementary principles in statistical mechanics, Yale Univ. Press, 1902; [21] P.-T. Ehrenfest, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaft, Bd. 4, Art. 32 (1911) (英译本: The conceptual foundations of the statistical approach in mechanics, Cornell Univ. Press, 1959); [22] I. E. Farquhar, Ergodic theory in statistical mechanics, Interscience, 1964; [23] V. I. Arnol'd (В. И. Арнольд)-A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics, Benjamin, 1968; [24] R. Jancel, Foundations of classical and statistical mechanics, Pergamon, 1963; [25] H. S. Green-C. A. Hurst, Order-disorder phenomena, Interscience, 1964; [26] H. E. Stanley, Introduction to critical phenomena, Oxford Univ. Press, 1971; [27] C. Domb-M. S. Green, Phase transitions and critical phenomena, Academic Press, 1972; [27] H. S. Green, The molecular theory of fluids, North-Holland, 1952; [28] R. Kubo (久保亮五), The fluctuation-dissipation theorem, Reports on Progress in Physics, **29** (1966), 255—284.

相对论 [英 theory of relativity 法 théorie de la relativité 德 Relativitätstheorie 俄 теория относительности 日 相对性理論] 【历史】相对论是 A. Einstein 建立的物理学理论体系，是由狭义相对论和广义相对论两部分构成的。在十九世纪末叶，人们认为电磁波是以以太为媒质传播的；为了检验地球相对于以太的运动，有许多人进行了实验，然而都是以否定的结果而告终 (A. A. Michelson, E. W. Morley)。Einstein 根据这个结果于 1905 年把以前在 Newton 力学中的 Galilei 相对性原理推广到电磁学方面，同时把时间、空间概念加以根本的变革，由此提出了**狭义相对论** (special theory of relativity)。它的结论现在几乎被所有的实验证实了，建立物理学的新理论时，也都以它为指导原理。后来 (1915) Einstein 又把狭义相对论加以推广，建立了**广义相对论** (general theory of relativity)。它的主要部分是新的引力理论，把牛顿的引力理论作为特殊情况包括在内。关于行星运动的结论和观测结果完全一致，这是广义相对论的实验证据。此外，对于太阳系以外的问题，也进行了广泛研究，但是，把所得结果用实验来判定是很困难的，广义相对论的适用范围还存在着问题。

【狭义相对论】 在 Newton 力学中，认为发生自然现象的空间是三维 Euclid 空间，它和时间的经过是完全独立的。然而在狭义相对论中，认为时间和空间是不能分离的，结合在一起构成以

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$
$$x^i = (ct, x, y, z);$$
$$a, b, \cdots, i, \cdots = 0, 1, 2, 3$$

为基本形式的四维伪 Euclid 空间(同一指标表示从 0 到 3 相加)。式中 (x, y, z) 表示空间正交坐标，t 表示时间，c 表示光速。这种空间称为 **Minkowski 世界** (Minkowski world)，由于引入了这种空间，他对狭义相对论给予了巧妙的几何学意义。

Minkowski 世界的运动群称为**非齐次 Lorentz 群** (inhomogeneous Lorentz group)，它的元素可以写为下面的形式：

$$x^{i'} = c^i_a x^a + c^i, \quad g_{ab}c^a_i c^b_j = g_{ij}.$$

但是，这里的 c^i_j 和 c^i 是常数。在上式中令 $c^i = 0$ 而得到的变换通常称为 **Lorentz 变换** (Lorentz transformation)，由这些变换构成的群 G 称为**齐次 Lorentz 群** (homogeneous Lorentz group) 或简称为 **Lorentz 群** (Lorentz group)，在狭义相对论中，这些都是最重要的概念。若令 G 的单位元素的连通分支为 G_0，则商群 G/G_0 成为 (2, 2) 型的阶数为 4 的 Abel 群，G_0 称为**正常 Lorentz 群** (proper Lorentz group)，常用的 G_0 的元素具有下式形式：

$$(1) \qquad L_v:\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$
$$y' = y, \quad z' = z; \quad |v| < c.$$

这些元素构成了以 v 为参数的 G_0 的一维子群，它的结合法由

$$L_u \cdot L_v = L_w,$$

$$w = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}$$

给出．用属于G而不属于G_0的元素由

$$T: x^{0'} = -x^0, \quad x^{i'} = x^i; \quad i = 1, 2, 3,$$

$$S: x^{0'} = x^0, \quad x^{i'} = -x^i; \quad i = 1, 2, 3$$

决定的变换T称为**时间反转**（time reversal），S称为**空间反射**（space reflection）或**宇称变换**（parity transformation），它们最近在物理学中受到了注意（后述）．

从历史上来说，变换式（1）起初是 Lorentz 为了解脱以太假说的困难，假设棒收缩而推导出来的，它的理论根据并不充分．而 Einstein 则是从下述两个假设出发导出的．这两个假设是，(i) **狭义相对性原理**（special principle of relativity）：在互相作等速运动的坐标系中，亦即在所有的惯性系中，物理学定律具有同一形式；(ii) **光速不变原理**（principle of invariance of light velocity）：在所有惯性系中，光速与光源的运动无关，在任何方向都具有同样的大小．Einstein 根据这两个假设，当惯性系 $x^i = (ct, x, y, z)$ 和 $x^{i'} = (ct', x', y', z')$ 沿 x 轴以速度 v 作相对运动时，推导出（1）作为这两惯性系间的变换式．这是狭义相对论的出发点，他根据这些思想，说明了 Lorentz-FitzGerald 收缩、钟变慢、先行差、Doppler 效应、Fresnel 曳引系数等问题．

【相对论与电磁学】 在狭义相对论中，物理量必须用 Minkowski 世界的张量（包括标量、矢量等）表示，物理学定律必须用 Lorentz 变换的张量方程表示．这种要求可以看做是狭义相对论的数学表示．在（1）式中，若令 $c \to \infty$，它就成为 Newton 力学中的 **Galilei 变换式**（Galilei transformation），因此，狭义相对论是 Newton-Galilei 相对性原理的推广．如果把上述问题用数学来概括，可以说狭义相对论是"关于 Lorentz 群的不变式理论"．下面以电磁学为例来说明这个问题．

电场强度 $\boldsymbol{E}$ 通常是三维 Euclid 空间的极矢量，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 可以用轴矢量来表示，然而在惯性系中，即使不存在磁场，在对这个惯性系作等速运动的其他坐标系中也会出现磁场．根据这种事实，在相对论中认为，电场和磁场构成一个物理量，它的分量可以用下式给出：

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & H_z & -H_y \\ E_y & -H_z & 0 & H_x \\ E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

在 Lorentz 变换下，这个量作为二阶交错张量变换．根据同样想法，可以由电荷密度 ρ 和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 构成关于 Lorentz 变换的反变矢量 s^i，即

$$s^i = (\rho, J_x/c, J_y/c, J_z/c).$$

为了和电流密度 $\boldsymbol{J}$ 等矢量相区别，特别把这样的 Minkowski 世界的矢量称为**四维矢量**（four-vector）．如上所述，如果决定了电磁场张量 F_{ij} 和四维电流矢量 s^i，电磁学基本方程，即 Maxwell 方程，就可以用张量形式写出，即

$$\frac{\partial F^{ia}}{\partial x^a} = s^i,$$

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} = 0,$$

式中

$$F^{ij} = g^{ia}g^{jb}F_{ab}, \quad g^{ia}g_{ja} = \delta^i_j.$$

同样，带电粒子在电磁场中的运动方程可以写为

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{e}{mc}F^i_a\frac{dx^a}{ds}, \qquad F^i_j = g^{ia}F_{ja},$$

式中 e 表示粒子的电荷，m 表示粒子的质量，s 表示粒子轨道的弧长（→电磁学）．

狭义相对论虽然起源于电磁现象的研究，但是对于说明其他现象也是很有效的．一个有兴趣的结论是，以速度 v 运动的粒子，其能量可以用下式给出，即

$$E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

由此可知，静止粒子的能量为 mc^2（静止能量）．这说明质量和能量是等同的，其换算式为 $E = mc^2$．这个结论随着原子核反应研究的进展而得到了证实，已成为现在原子能时代的基础．狭义相对论在 Dirac 的电子论（1928）和朝永振一郎的量子电动力学（1943）等理论中也充

分发挥了它的有效性. 然而最近知道，在基本粒子的衰变现象中，对于空间反射(从而 Lorentz 群 G 的剩余类 SG_0) 的不变性遭到了破坏 (T. D. Lee (李政道) 和 C. N. Yang (杨振宁), 1956; C. S. Wu (吴健雄) 等人, 1957).

【广义相对论】 狭义相对论虽然起源于电磁现象的研究，但是，广义相对论的中心是引力理论. 引力理论的基础是**广义相对性原理** (general principle of relativity) 和**等效原理** (principle of equivalence). 其中第一条广义相对性原理是把狭义相对性原理推广到互相作任何运动的观测系，而且要求物理学定律不依存于表示时间、空间的四维微分流形†(时空流形)的局部坐标的选取方法. 实际上，物理量是用时空流形上的张量表示的，根据这一原理可以把物理学定律用张量方程表示. 第二条等效原理，已由 R. von Eötvös (1890) 等人的最精密实验所证明，认为引力质量和惯性质量是相等的，因而象离心力那样，来源于加速度的力和引力是没有区别的.

Einstein 从这些假设出发，得到了下面的结论: 如果有物质以及它所生成的引力场存在，时间、空间的结构就要发生变化，平滑的 Minkowski 世界要变成具有曲率的四维 Riemann 流形† (但基本张量的符号差†为 (1, 3)). 这种流形的基本张量的分量 g_{ij} 表示引力势，它所满足的引力方程可以作为几何学定律表达出来. 象这样把引力现象归结为时空流形的几何结构问题，在这以前的物理学中是没有考虑到的；它是以后的统一场理论†发展的原动力.

Einstein 所导出的引力定律是推广 Newton 力学的位势方程的结果. 也就是说，假定 R_{ij} 是由 g_{ij} 构成的 Ricci 张量†，如果 R 是纯量曲率†，则在不存在产生引力场的物质的领域内，R 必须满足下式:

(2) $$G_{ij} = R_{ij} - g_{ij}R/2 = 0,$$

即

$$R_{ij} = 0.$$

在有物质存在的领域内，下式成立:

(3) $$G_{ij} = \chi T_{ij}, \quad \chi \text{ 为引力常数.}$$

这里 T_{ij} 是表示物质的力学状态 (能量、动量、张力) 的对称张量. 通常称 (2) 式为外部场方程，称 (3) 式为内部场方程.

当粒子质量很小，对场的影响可以忽视时，粒子在引力场内的运动方程可以用下式给出:

(4) $$\frac{\delta^2 x^i}{\delta s^2} = 0, \quad g_{ab}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} = +1,$$

这里 δ/δ_s 表示由粒子轨道的弧长 s 决定的共变微分†. 也就是说，引力场内的粒子沿时空流形的时间测地线†运动. 同样，光的路径可以用零测地线表示，它的方程在形式上是令 (4) 中第二式的右边为零的结果.

Einstein 把上述理论应用于太阳周围的引力场，讨论了水星近日点的进动，光线通过太阳附近的弯曲，以及白矮星光谱的红移等问题. 其中水星近日点的进动问题，用 Newton 的引力理论是不能精确说明的，但是用广义相对论可以圆满地解决. 关于其他两个问题，得到的结论也和观测事实一致，这些都可以看做是广义相对论的实验证据.

值得注意的是，(2) 式具有波动解. 这和 Newton 的引力理论是有矛盾的，它意味着引力的影响是以有限速度传播的. 这个问题和引力场的量子 (引力量子) 的存在有密切关联；从量子物理学的观点来说，也是很有趣味的问题；但是，这些问题目前还没有得到确定的结论.

此外，关于引力以外的问题(例如，引力场和电磁场的共存系统，宇宙全体的结构等等)也进行了广泛研究，所得结论很难用实验来判断，对于广义相对论的适用范围还存在着疑问.

在 (3) 式中，产生引力场的物质可以用 C^0 阶张量 T_{ij} 来表示. 但是有人认为，可以把物质用 (2) 式解的奇点来表示. 从这种观点来说，物质粒子(即奇点)的运动方程，不必象 (4) 式那样单独假设，而可以作为 (2) 式的结果推导出来 (Einstein, L. Infeld, B. Hoffman, 1938).

最后，从数学物理的立场讨论 (2) 和 (3) 两方程的意义. 这两个方程和经典物理学中出

现的 Laplace 方程以及 Poisson 方程是对应的，于是可以认为存在着和这种情况相类似的问题，解决这种问题需要在大范围内进行考察．特别是引力场，在静止情况下，可以归结为三维流形上的椭圆型偏微分方程问题，已经得到比较满意的结果．在一般情况下，式(2)或(3)是正规双曲线型偏微分方程，在某种程度的可微性假定下，Cauchy 问题可以局部地求解(A. Lichnerowicz [3])．

【参】 [1] A. Einstein, The meaning of relativity, Princeton Univ. Press, 第五版, 1956; [2] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Springer, 第五版, 1923 (英译本: Space, time, matter, Dover, 1950); [3] A. Lichnerowicz, Théorie relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, 1955; [4] B. A. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Гостехиздат, 1955; [5] Recent developments in general relativity, Pergamon (dedicated to L. Infeld), 1962; [6] L. Witten 编, Gravitation, an introduction to current research, John Wiley, 1962.

统一场论 [英 unified field theory 法 théorie unitaire des champs 德 einheitliche Feldtheorie 俄 единая теория поля 日 統一場理論]

【历史】 **统一场论**是受到广义相对论†辉煌成果的启发而诞生的物理学理论，目的是从时间、空间的几何结构的观点把引力场、电磁场、核力场等各种场作统一描述．这方面的研究从 1918 年以来已经继续了半个多世纪，陆续地发表了许多有数学趣味的理论，但是，由于缺少实验根据和明确的指导原理，还不能从实质上说明自然现象．

相对论的一个很大的特征，在于它完全是从新的时空概念出发的；也就是说，由广义相对论知道，如果有物质存在，而且在它的周围发生引力场时，时间、空间的结构就要发生变化，平坦的 Minkowski 世界†就要变为具有曲率的四维 Riemann 流形†(符号常数为 −2)．可以认为，这种流形的基本张量的分量 g_{ij} 表示引力势，而且引力的基本方程可以作为流形的几何学法则来描述．这样，把引力现象归结为时空流形的结构的想法，是广义相对论所特有的理论(→ 相对论)．在狭义相对论†中引入了 Minkowski 世界，和以前的朴素时空概念相比，的确也是很大的变革．然而，在这种理论中，Minkowski 世界是描述物理学法则的基础，这个世界的结构不因为发生物理现象而有所改变；这一点和以普通的三维空间为基础的 Newton 力学完全一样．而在广义相对论中，时空不仅是描述物理法则的基础，而且其中发生的引力现象也反映在它的结构之中，而成为 Riemann 流形．

在广义相对论中，为了论述引力场和电磁场的共存系，必须解关于引力势 g_{ij} 和电磁场张量 F_{ij} 的联立方程(Einstein-Maxwell 方程)．因此，由于有电磁场的存在，引力势 g_{ij} 确实受到影响，但是时空是 Riemann 流形这一假设仍旧不变．也就是说，电磁场对时空流形的结构没有实质的直接的影响．然而，当时由于承认了广义相对论的正确性，曾预料也许所有物理作用都可以归结为引力场和电磁场．于是把广义相对论加以推广，设想了一种时空结构不仅和引力场，而且和电磁场直接有关的几何学，基于这种想法，产生了建立两种场的统一理论的动机．这种设想可以图示如下：

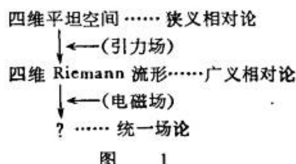


图 1

【Weyl 理论】 最初的统一场论是 Weyl 在 1918 年提出的．在成为广义相对论的数学基础的 Riemann 几何学中，基本张量† g_{ij} 的共变微分†为零．也就是说，如果用 Γ^i_{jk} 表示由 g_{ij} 构成的 Christoffel 符号†，则有下式成立，即

$$(1)\quad \nabla_i g_{jk} = \partial g_{jk}/\partial x^i - g_{ja}\Gamma^a_{ik} - g_{ak}\Gamma^a_{ij} = 0.$$

相反，如果认为 Γ^i_{jk} 是一般仿射联络†的系数，令 $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$，并且解(1)式求 Γ^i_{jk}，就可以知道，它和 Christoffel 符号是一致的．从这种意义来说，(1)式表示时空流形具有 Riemann 结构．Weyl 把(1)式加以推广，设想了其结构能用下式表示的空间：

$$\nabla_i g_{jk} = 2A_i g_{ik}, \tag{2}$$

把 A_i 看做电磁势，发展了他的统一场论，这种理论是 Cartan 联络几何学发现的开端，从这一点来说，是有数学意义的，但是在导出场的方程及带电粒子的运动方程方面存在着缺点.

在 Weyl 理论中，用 $\bar{g}_{ij} = \rho^2 g_{ij}$ 给出的长度尺度的变换是很重要的. 与此同时，如果对 A_i 也施行变换

$$\bar{A}_i = A_i - \partial\log\rho/\partial x^i, \tag{3}$$

则 (2) 是不变的，因此它所决定的时空结构也是不变的. (3) 称为**规范变换** (gauge transformation)，是和下述事实对应的，即给定电磁场张量 F_{ij} 时，除了差梯度矢量外，势 A_i 就决定了. 在目前的场论† 中，规范变换已推广到各种场. 场方程对这种变换是不变的，根据这种不变性可以推导出电荷守恒定律.

【以后的发展】 继 Weyl 理论之后发表的是 Th. Kaluza 的五维统一场论 (1921). 关于这一点，人们认为我们的时空是四维的，但取以五维空间为出发点只是一种技巧，指出这是这种理论的缺点. 但是在形式上大体是完整的. 在以后的统一场论中不少人对这种理论进行了修改和推广. 作为 Kaluza 理论基础的空间，是以

$$ds^2 = (dx^4 + A_a dx^a)^2 + g_{ab}dx^a dx^b$$

为基本形式的五维 Riemann 流形；式中 A_i 和 g_{ij} 都只是 x^i 的函数 ($a, b, \cdots, i, j = 0, 1, 2, 3$). 场方程和粒子运动方程，都可从广义相对论的变分原理† 推导出来. 其中场方程是令上述五维 Riemann 流形的 Ricci 张量† 为零而得到的，和 Einstein-Maxwell 方程是等价的. 带电粒子的轨道可以用流形的短程线给出，它的方程可以归结为广义相对论的 Lorentz 方程.

以后还提出了几种统一场理论，下面只举出数学上有较大兴趣的. 其中有：以容许绝对平行性的空间为基础的理论 (Einstein, 1928)，以射影联络†空间为基础的理论 (O. Veblen, B. Hoffman, 1930 [5]; J. A. Schouten, D. van Dantzig, 1932)，波动几何学 (以把基本形式线性化为基础的理论；三村剛昂，1934 [4])，以非完整空间为基础的理论 (G. Vranceanu, 1936)，以保形联络† 空间为基础的理论 (Hoffman, 1948) 等等.

在 1945 年以后的研究中，广义相对论中的物质表象问题成为重大的转机. Einstein 起初用 C^0 阶能量张量 T_{ij} 来表示物质，在决定物质形状时需要相对论以外的理论. 后来他本人对这一点也不满意，企图不用 T_{ij} 这样的量，只用场量来发展理论. 这就是场的一元论，从物理学的观点来说，要求到处都不存在奇点的解. 他的第一个设想是改变时空流形的拓扑结构，以此为基础，从广义相对论的外部场的方程的解除去奇点. 后来 J. A. Wheeler 把这种设想推广到统一场论，利用调和积分论对质量和电荷给予了一种解释 (1957 [3]). Einstein 的第二个设想是他所提出的非对称统一场论 (1945 [2]). 这种理论中的基本量是非对称张量 g_{ij} 和非对称联络系数 Γ^i_{jk}，(1) 式包括在场方程之中 (需要注意下标的顺序)，于是可以认为，成为这种理论的基础的空间是 Riemann 流形的直接推广. 此外，Schrödinger 只用 Γ^i_{jk} 作基本量，也得到同一形式的场方程 (1947 [6]).

【参】 [1] 矢野健太郎，統一場理論，岩波講座物理学，1940; [2] A. Einstein, The meaning of relativity, Princeton. Univ. Press, 第五版，1955; [3] J. A. Wheeler, Geometrodynamics, Academic Press, 1962; [4] Y. Mimura (三村剛昂)-H. Takeno (竹野兵一郎), Wave geometry, Sci. Rep. Res. Inst. Theoret. Phys. Hiroshima Univ., no. 2, 1962; [5] O. Veblen, Projektive Relativitätstheorie, Springer, 1933; [6] E. Schrödinger, Space-time structure, Cambridge, Univ. Press, 1950; [7] A. Einstein, A generalization of the relativistic theory of gravitation, Ann. of Math., (2) **46** (1945), 578—584.

量子力学 [英 quantum mechanics 法 mécanique quantique 德 Quantenmechanik 俄 квантовая механика 日 量子力学] 用 Newton 力学† (经典力学) 能够圆满地说明天体以及普通物体的运动 (称为宏观现象)，但是在十九世纪末叶，企图用经典理论说明热辐射现象，结果归于失败. M. Planck 提出了能量量子说，认为辐射能是以某种量值为单位进行放射或吸收，并求出

了新的辐射公式，和实验结果一致．在这以后，A. Einstein 提出了光量子说． N. H. D. Bohr 认为能量等物理量只能具有不连续值，在说明电子在原子中所能占据的状态方面获得了成功．这样，在研究分子、原子、原子核以及基本粒子等非常小的物体的运动（这叫微观现象）时，就必须用**量子力学**．

【观测公理】 量子力学和经典力学的根本差异是，如上所述，在微观世界中能量等物理量有时只能具有不连续值，微观物体的状态因观测而受到干扰．

在量子力学中，物质在某一时刻的状态可以用 Hilbert 空间⁺（更普遍地说是定义了内积的复线性空间）的元 ϕ 来表示，力学量（物理量）可以用在这个空间定义的 Hermite 算符来表示．假定力学量 A 的本征值为 a_n $(n=1, 2, \cdots)$，属于 a_n 的本征元在空间的投影算符为 P_n．这里 a_n 是实数．并假定 $A=\sum a_n P_n$，$P_n P_m=\delta_{nm} P_n$．在量子力学中有下述观测公理．

在状态 ϕ 观测 A 时，可以测得它的某一个本征值，测得 a_n 的概率与 $|(\phi, P_n\phi)|^2$ 成正比．在测得 a_n 时，状态由 ϕ 转变为 A，等于 a_n 的本征态 $P_n\phi$．

这里力学量之所以能用 Hermite 算符来表示，是因为力学量的测定值必定是实数的缘故．而且，如上述公理所示，量子力学对观测结果只能作概率的预言．在状态 ϕ 测定力学量 A，测得实数值 a_n 的概率为

$$p_n=|(\phi, P_n\phi)|^2/|(\phi, \phi)|^2,$$

而 $c\phi$（c 是复数）也能给出相同的 p_n．因此 ϕ 和 $c\phi$ 对于所有的力学量只能给出相同的预言，所以它们表示相同的状态．一般，把状态归一化，即令 $(\phi, \phi)=1$．这时，$p_n=|(\phi, P_n\phi)|^2$，A 在状态 ϕ 的期望值⁺为

$$\langle A\rangle=(\phi, A\phi)=\sum a_n p_n.$$

对于 A 的本征值 $a_1, a_2, \cdots$，如果 $a_i \neq a_k$，则 $(\phi_i, \phi_k)=0$．但这里假定

$$\phi_n=P_n\phi/(\phi, P_n\phi)$$

（本征态的正交性）．如果 $\{\phi_n\}$ 构成一个完备正交系⁺，则任意的 ϕ 都可以按 ϕ_n 展开，即

$$\phi=\sum c_n \phi_n;$$

从而 $p_n=|c_n|^2$．当 A 具有连续本征值时，可以表示为

$$A=\int \lambda dP(\lambda).$$

在状态 ϕ 测定 A 时，测定值在 λ_1 和 λ_2 之间的概率与 $|\phi(P(\lambda_2)-P(\lambda_1)), \phi|^2$ 成正比．一般的 A 可以具有不连续和连续两种本征值（→特征值问题）．一般地说，当给出两种状态 φ 和 ϕ 时，称 $(\varphi, A\phi)$ 为力学量 A 在状态 φ 和 ϕ 之间的**矩阵元** (matrix element)．

上面讲述的是在某一时刻的观测问题．一般地说，状态是随时间变化的．若假定表示 ϕ 在微小时间内的微小变化的算符为 H，则 ϕ 的变化可以由

$$(1) \qquad i\hbar\partial\phi/\partial t=H\phi$$

来表示．这里归一化系数 (ϕ, ϕ) 必须是一定的，因此，ϕ 对于时间的变化受到幺正变换．因此 H 必须具有 Hermite 算符的性质．这里 H 称为 **Hamilton 算符** (Hamilton operator)，它的性质取决于力学系统的结构．在上式中 $\hbar$ 是常数，它的 2π 倍是 **Planck 常数** (Planck constant)．上面的方程称为广义 **Schrödinger 方程** (Schrödinger's equation)．

在量子力学中，A 在状态 ϕ 的期望值为 $\langle A\rangle=(\phi, A\phi)$，由 (1) 知道，它随时间的变化可以由

$$(2) \qquad d\langle A\rangle/dt=(i/\hbar)\langle[H, A]\rangle$$

给出．在上式中 $[A, B]=AB-BA$，称为换位子积．在经典力学中也有这样的关系，由分析力学知道，如果力学量 A^c 是典型变量 q_i^c（位置）和 p_i^c（动量）的函数，则 A^c 随时间的变化可以由

$$(3) \qquad dA^c/dt=-(H^c, A^c)$$

给出．式中 H^c 是力学系统的 Hamilton 函数⁺，括号（ ）是 Poisson 括号⁺（→分析力学）．(2) 和 (3) 相似，如果用 $(1/i\hbar)[A, B]$ 代替 Poisson 括号 (A, B)，就可从经典力学的公式 (3) 转变为量子力学的方程．这时，需要注意的是，换位子积 $[A, B]$ 和 Poisson 括号 (A, B) 有相同的

性质．在上述转变中利用了下述对应原理．一般地说，决定表示力学量的算符和 Hamilton 算符的具体形式时要利用**对应原理**(correspondence principle)．这条原理要求，经典力学在 $\hbar\to 0$ 的极限条件下成立，并假定力学量的期望值随时间的变化在两种力学中有相同的形式．

【交换关系】 根据上述对应原理能够从经典力学中的 Hamilton 函数得到量子力学中的 Hamilton 算符．即假定经典力学中的 Hamilton 函数为典型变量 p_k 和 q_k 的显函数 $H(p, q)$，而且 p_k 和 q_k 为满足**交换关系** (commutation relation)

(4)　$[p_k, q_k]=i\hbar\delta_{ki}\mathbf{1}$　($\mathbf{1}$ 是恒等算符)

的 Hermite 算符，那么，满足这个恒等式的 p_k 和 q_k，除不可约性假定下的等价外，是唯一确定的．这些变数的期望值满足下面的典型方程：

$$d\langle q_k\rangle/dt=\langle\partial H/\partial p_k\rangle,$$
$$d\langle p_k\rangle/dt=-\langle\partial H/\partial q_k\rangle.$$

象这样从经典力学的典型变量以及 Hamilton 函数向量子力学的算符以及 Hamilton 算符转变的过程称为**量子化** (quantization)．

若假定满足交换关系 $[A, B]=i\hbar\mathbf{1}c$ (c 是常数 $\neq 0$) 的两个物理量的期望值为 $\langle A\rangle$ 和 $\langle B\rangle$，则有下面的不等式成立：

(5)　$\langle(A-\langle A\rangle)^2\times(B-\langle B\rangle)^2\geqslant(\hbar^2/4)c^2$.

这个不等式给出了测量中的**不定性** (uncertainty)．这就是说，这样的两物理量不能同时无限地正确测定．这也是宏观运动和微观运动的一项差异．

【Schrödinger 方程】 在由 $q_k(-\infty<q_k<\infty)$ 的函数构成的函数空间 L_2 内，可以把满足交换关系 (4) 的算符 p_k 和 q_k 用 $q_k=q_k\times$ 和 $p_k=(\hbar/i)\partial/\partial q_k$ 来表示．对经典力学的 Hamilton 函数 $H(p, q)$ 的变量进行这样的置换可以得到 Hamilton 算符．特别是，对于由 s 个质点(粒子)构成的力学系统，如果 q 是正交坐标 x_k, y_k, z_k，运动方程 (1) 一般成为下面的二阶偏微分方程：

$$(6)\qquad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\Big(-\sum_{k=1}^{s}\frac{\hbar^2}{2m_k}\Delta_k+V(x_1, y_1, z_1, \cdots, z_s)\Big)\psi$$

(m_k 是质量，Δ_k 是关于 x_k, y_k, z_k 的 Laplace 算符[†])．这称为狭义 **Schrödinger 方程**，$\psi(x_1, y_1, z_1, \cdots, z_s, t)$ 称为**波函数** (wave function)．在由 x_k 和 x_k+dx_k，y_k 和 y_k+dy_k，z_k 和 z_k+dz_k $(k=1, \cdots, s)$ 围成的体积 $dx_kdy_kdz_k$ $(k=1, \cdots, s)$ 内找到各粒子的概率与 $|\psi(x_1, y_1, z_1, \cdots, z_s, t)|^2$ 成正比．通常使 $|\psi|^2$ 在全空间内的积分为 1，即把 ψ 归一化．ψ 也称为**概率振幅** (probability amplitude)．当 ψ 为

$$\psi=\exp(-iEt/\hbar)\varphi(x_1, \cdots, z_s)$$

的形式时，$|\psi|^2$ 以及力学量 A 的期望值

$$\langle A\rangle=\int\psi^*A\psi dx_1\cdots dz_s$$

与时间无关．这时的状态称为**定态** (stationary state)．实数 E，函数 φ 是本征值问题 $H\varphi=E\varphi$ 的解．这个方程称为不含时间的 Schrödinger 方程，是 $3s$ 个变量的二阶偏微分方程．因为 H 表示系统的能量，所以 E 给出了系统所能取的能量的值．上面取的空间是 $q_k(-\infty<q_k<\infty)$ 的函数空间 L_2，这称为坐标表示．也可以不这样，而取 $p_k(-\infty<p_k<\infty)$ 的函数空间 L_2，这称为动量表示．

在上述描述方式中，状态 ψ 遵照方程 (1) 或 (6) 随着时间变化，而力学量不变．这种描述方式称为 **Schrödinger 表示** (Schrödinger representation)．如果 Hamilton 算符 H 与时间无关，利用幺正算符 $(Ut, t_0)=e^{-(i/\hbar)H(t-t_0)}$ 可以把 $\psi(t)$ 写为 $\psi=U(t, t_0)\psi(t_0)$．$\psi(t_0)$ 表示在时刻 $t=t_0$ 的状态．对于力学量 A，如果考虑

$$A(t)=U^{-1}(t, t_0)AU(t, t_0)$$

这样的算符，则

$$A\psi(t)=U(t, t_0)(A(t)\psi(t_0))$$

成立．但状态可以用不随时间变化的 $\psi(t_0)$ 来表示．既使认为力学量随时间变化，在数学上也是一样的．这种描述方式称为 **Heisenberg 表示** (Heisenberg representation)．$A(t)$ 随时间

的变化遵守下面的方程:

(7) $dA(t)/dt=(i/\hbar)[H, A(t)]$.

这称为 **Heisenberg 运动方程** (Heisenberg's equation of motion).

【Dirac 方程】 Schrödinger 方程不具有相对论性不变性. 在相对论中关于能量有下面的恒等式成立,即

$$E^2=m^2c^4+p^2c^2$$

(c 表示光速),在上面的恒等式中进行置换

$$p_k\to(\hbar/i)\partial/\partial x_k,$$

就得到 **Klein-Gordon 方程** (Klein-Gordon equation)

(8) $(\square-\kappa^2)\phi=0$,

$$\square\equiv\Delta-(1/c^2)\partial^2/\partial t^2,\quad \kappa=mc/\hbar,$$

所有自由粒子的波函数都必须满足这个方程. 但是方程中含有关于时间的二阶导数, 可能出现概率密度为负值的情况. 为了使方程成为电子的一体问题的量子力学基本方程, 必须附加上条件, 使概率密度只能为正值. P. A. M. Dirac 认为自由电子的波函 ϕ 可以用具有四个分量的旋量(被称为 undor 的量)给出. 为了避免概率密度为负值的困难, 方程中关于时间的导数必须是一阶的. 根据相对论知道,时间、空间坐标是等价的, 于是得到关于所有坐标的一阶偏微分方程

(9) $$\sum_{\mu=1}^{4}\gamma_\mu\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}+i\kappa\phi=0.$$

这称为 **Dirac 方程** (Dirac's equation). ϕ 的每一个分量必须满足具有相对论不变性的 Klein-Gordon 方程, 可以按照这样的条件决定 γ_μ. γ_μ 是四行四列矩阵,满足

$$\gamma_\mu\gamma_\nu+\gamma_\nu\gamma_\mu=2\delta_{\mu\nu}\quad(\mu,\nu=1,2,3,4)$$

的交换关系. 把这些矩阵和单位矩阵及 γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 四个矩阵反复相乘,就可以得到十六个线性无关的矩阵, 任意四行四列矩阵都可以用这十六个矩阵的适当的线性组合来表示.

Dirac 方程(9)具有平面波的解,即

$$\phi(\boldsymbol{r},t)=u\exp((i/\hbar)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-(i/\hbar)Et),$$

能量有两个本征值,即

$$E=\pm\sqrt{m^2c^2+p^2c^2}.$$

u 有四个分量, 方程有四个独立的本征解 $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$, 其中有两个属于正的本征值, 另外两个属于负的本征值. 出现负能状态在物理学上是很难理解的, 但是在数学上为了构成完全系又不能舍去负值. Dirac 为了避免这种困难, 假定负能状态是由无限多的电子充满的真空. 按照这种想法,在构成真空的负能电子中, 如果缺少了某一个就出现空穴, 这种空穴具有粒子的性质,其电荷与电子的电荷相反,能够作为正电子观测出来. 因此, 如果负能电子吸收了 γ 射线而转变为正能状态,那末就产生电子-正电子对. 仁科芳雄, O. Klein 查明,用 Dirac 方程计算的结果和实验结果一致,证实了 Dirac 方程的正确性. 但是由负能的存在知道, 把 Dirac 方程看做是关于一体问题的方程是不正确的. 于是把 Dirac 方程看做是关于电子的经典的波动场的方程而进行量子化, 这样引入了正电子论(→场论, 二次量子化). 实际上, 如果把 Klein-Gordon 方程(8)也看做是经典的物质波的波动方程而进行量子化, 就可以避免负概率的矛盾. 自旋为零的粒子,例如 π 介子等, 都遵照这个方程而运动.

这里试将 Dirac 方程改写为

$$i\partial\phi/\partial t=H\phi,\quad H=c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+mc^2\beta,$$

式中 $\gamma_k=-i\beta\alpha_k$ $(k=1,2,3)$, $\gamma_4=\beta$. 这里的 H 和电子的轨道角动量算符

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=-i\hbar\boldsymbol{r}\times\nabla$$

不是交换的,所以 $\boldsymbol{L}$ 不是守恒量;但是,

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}+(\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$$

是守恒量. 这里 $\boldsymbol{\sigma}$ 是矢量, 它的各分量可以用 $\begin{pmatrix}\sigma_k & 0\\ 0 & \sigma_k\end{pmatrix}$ 给出, σ_k 是 **Pauli 自旋矩阵** (Pauli's spin matrix), 即

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},$$

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{S}=(\hbar/2)\boldsymbol{\sigma}$ 是电子的固有角动量, 称为**自旋** (spin). 电子以外的粒子, 如中子等, 也都具有被称为自旋的固有角动量作为其粒子的属性.

对于电子，$\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ 成为 $s(s+1)\hbar^2 I$（I 是单位矩阵）的形式，而 $s = 1/2$. $\hbar/2$ 称为自旋的绝对值，电子也称为自旋为 1/2 的粒子. 从光谱中就预见到自旋的存在.

如果电子的速度不是很大，小于 $(v/c)^2$ 的量都可忽视，那末就可以把电子的状态用具有两个分量的量来表示，这称为 **Pauli 近似** (Pauli approximation). 如果采用更粗略的近似，这两个分量就成为独立的，分别满足 Schrödinger 方程.

【群论的应用】 Schrödinger 方程 $H\psi = E\psi$ 的本征状态 ψ 是各个粒子的坐标的函数. 这里把这些坐标总括起来写为 x. 对 x 进行某种变换 T，例如坐标系的旋转，粒子编号的置换等等. 如果 T 和 H 是交换的（在 $x \to x' = Tx$ 的变换中如果 H 是不变的），以满足 $\psi'(x') = \psi(x)$ 的条件的变换得到的函数

$$T\psi(x) = \psi'(x) = \psi(T^{-1}x),$$

和 ψ 一样，也满足 Schrödinger 方程. 当变换 T 的集合构成一个群†时，ψ 的变换 $\psi \to T\psi$ 给出了这个群（一般是无限维的）的表示. 这时只考虑幺正表示就可以了. 这种表示可以分解为不可约表示的和. 力学系的固定能量的值对应于各个不可约表示，定态具有和表示次数相等的**简并** (degeneracy). 也就是说，各定态都可以用使 H 不变的 x 的变换 T 所构成的群的不可约表示†来标志.

如果 H 是球对称的，即如果 H 对于旋转群 R 是不变的，就可以把状态用旋转群的 $2L+1$ 阶不可约表示 D_L 来加以区别（→ Racah 代数）. 这时力学系统的所有的角动量的和 $\boldsymbol{L}$ 的平方的本征值为 $L(L+1)\hbar^2$，L 一定为零或正整数. 能量有 $2L+1$ 度简并，可以用 L 的 z 分量 M 来进一步加以分类. 这里 M 在 $-L$ 和 L 之间取 $2L+1$ 个整数值. 在自旋和轨道角动量之间有相互作用的情况下，也可以把状态用旋转群的不可约表示 D_J 加以区别. 若令总轨道角动量 $\boldsymbol{L}$ 和总自旋角动量 $\boldsymbol{S}$ 的和为 $\boldsymbol{J}(= \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S})$，则 $\boldsymbol{J}^2$ 的本征值为 $J(J+1)\hbar^2$. J 的值一般为零或正整数或正的半整数. 再加上反演操作就得到正交群（广义旋转群）（→ 典型群[正交群]）. 用这种群的不可约表示 $D_J^{\pm}$ 可以把状态分类，这里 ± 号表示对于原点的反演表示的指标为 ±. 按照 ± 把状态分别称为**偶状态** (even state) 和**奇状态** (odd state). 例如，原子或原子核的能级就可以用不可约表示 $D_J^{\pm}$ 加以区别.

【多原子分子】 由围绕连结两个原子核的直线的二维旋转以及对于包含这个直线的平面的反射所构成的群，是研究二原子分子群表示的基础. 它的定态可以用围绕上述直线的角动量的绝对值，即零或正整数 Λ 来分类. $\Lambda \geqslant 1$ 的状态是二重的，对于一重状态的 $\Lambda = 0$，可以根据上述反射的指标来区别±. 如果两个原子核是全同的，可以用关于上述直线的二等分点的对称性的指标来区别偶、奇.

多原子分子的能级，可以用把同种原子核进行置换的所有旋转构成的群的表示来分类. 例如就 CH_4（甲烷）来说，可以根据 T_d（给正四面体群†加上反射阶数为 24 的群）的表示来指定定态. 晶体的能级可以用它的空间群的表示来标志.

用一体近似法处理多体问题时，要考虑的是求多数粒子的合成状态的能级，这时把表示的积分解为不可约表示是一种有效的方法. 例如就具有两个电子的原子来说，如果电子的状态为 D_{J_1} 和 D_{J_2}，则由

$$D_{J_1} \times D_{J_2} = D_{J_1+J_2} + D_{J_1+J_2-1} + \cdots + D_{|J_1-J_2|}$$

知道，这个原子具有 $2J'+1$（J' 是 J_1, J_2 中的最小的）个等式右端所示的状态.

【表示论的应用】 为了求各种力学量的两个定态间的矩阵元素，要用表示论. 当进行坐标变换时，力学量按一定规则变换. 例如就坐标旋转来说，标量的变换规则为 D_0^+，矢量的变换规则为 D_1^-，反对称（交错）张量的变换规则为 D_1^+，迹 (trace) 为零的对称张量的变换规则为 D_2^+. 如果这些力学量的变换规则为 D_J，当 $D_J \times D_{J'}$ 不包含与 $D_{J''}$ 有同值的状态时，状态 $D_{J'}$ 和 $D_{J''}$ 之间的矩阵元素为零. 当原子或原

子核进行辐射时，它的状态跃迁的概率由电偶极矢量的矩阵元素决定，因此

$$D_1 \times D_{J'} = D_{J'+1} + D_{J'} + D_{J'-1} \quad (J' \geqslant 1).$$

由此可得选择定则，即 $J' \to J'+1, J', J'-1$. 对于 $J'=0$ 只有 $0 \to 1$ 是可能的．用这样的方法还可以得到一般的多极辐射的选择定则．表示论对于决定跃迁强度的一般形式也是很有用的．

两个以上的同种粒子，有的能够处于完全相同的状态，有的不能处于完全相同的状态，前者称为**玻色子** (boson) 或 **Bose 粒子**，后者称为**费密子** (fermion) 或 **Fermi 粒子**．例如电子、中子、质子等是费密子，光子、π 介子等是玻色子．同种类的费密子或玻色子是完全等同的，不能一一加以区别．因此 Hamilton 算符 H 以及其他所有的量对于同种费密子的任意置换是不变的．因此由 N 个同种粒子构成的系统的状态，可以用 N 阶对称群† $\mathfrak{S}_N$ 的不可约表示来分类．这时如果粒子是费密子，两个粒子不能处于同一状态（这叫 **Pauli 原理** (Pauli's principle))，因此在自然界里只能出现反对称表示．如果粒子是玻色子，在自然界里只能出现对称表示．在同种类的费密子集团中，如果 Hamilton 算符与自旋无关，波函数为空间部分与自旋部分的积．为了使波函数对于全体是反对称的，当系统的自旋为 $v/2$ 时，空间部分的状态必须是 $\mathfrak{S}_N$ 的不可约表示，而且只限于能用 Young 图形†

$$[2^{N-v}, 1^v] = T(2, 2, \cdots, 2, 1, \cdots, 1, 1)$$

表示的．

【电荷的对称性】 如果不考虑电荷，就可以把质子和中子看做是同种粒子(称为核子)的不同状态．如果由质子和中子构成的系统的 Hamilton 算符不包含电磁作用力，则 Hamilton 算符对于质子和中子的置换是不变的，这种不变性称为电荷的对称性．和认为核子有自旋一样，还认为核子有同位旋†(电荷的自旋)．假定自旋向上的核子为质子，向下的为中子．如果 Hamilton 算符对于属于这两种状态的特殊变换群 $SU(2)$ 的任意连续变换是不变的，则 N 个核子系统的能级可以用 $SU(2)$ 的不可约表示 D_T 来表示，T 表示同位旋的大小．这种不变性称为电荷的不变性†．已经确认，在忽视了电磁相互作用以及更弱的相互作用的近似条件下，这种电荷的不变性在原子核、基本粒子的世界里是成立的(→ 基本粒子论)．在 N 个核子的系统中，当同位旋为 $T = v/2$ 时，自旋部分的波函数和空间部分的波函数，由于包括同位旋波函数在内全体是反对称的，所以，必须是 $\mathfrak{S}_N$ 的不可约表示，而且属于 Young 图形 $[2^{N-2}, 1^v]$. 如果这个系统的 Hamilton 算符† H 和自旋也完全无关，则它对于核子的四个内部状态所构成的四维空间内的任意幺正变换是不变的，N 个核子系统的状态可以用幺正群 $U(4)$ 的不可约表示来分类 (Wigner 的超多重项和四元自旋)．

【参】 [1] P. A. M. Dirac, Principles of quantum mechanics, Clarendon Press, 第四版, 1958 (中译本: P. A. M. 狄拉克，量子力学原理，科学出版社，1965); [2] 朝永振一郎，量子力学 I, II, みすず書房, 1953 (英译本: S. Tomonaga, Quantum mechanics I, II, North-Holland, 1962—1966); [3] 山内恭彦，回転群とその表現，岩波，1957; [4] E. P. Wigner, Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra, Academic Press, 1959. 又，→ S 矩阵，场论，二次量子化的[参].

二次量子化 [英 second quantization 法 seconde quantisation 德 zweite Quantelung 俄 вторая квантизация 日 第2量子化] 在由同种粒子构成的系统中，若令第 i 个粒子的坐标(包括自旋坐标)为 x_i，则表示全系统的状态的波函数 $\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 对于 $1, 2, \cdots, N$ 的置换是对称的 (Bose 统计法，简写为 B)，或反对称的 (Fermi 统计法，简写为 F)．遵守 Bose 统计法的粒子称为 **Bose 粒子**或**玻色子** (Bose particle, boson)，遵守 Fermi 统计法的粒子称为 **Fermi 粒子**或**费密子** (Fermi particle, fermion)．

当粒子具有这样的对称性时，就可以不用波函数 $\Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 而用下述的 $\Psi(N_1, N_2, \cdots)$ 表示粒子系统的状态．现在选取关于一个粒子的完备正交系† $\varphi_l(x)$ $(l = 1, 2, \cdots)$，指定占有这一个粒子的各状态 (l) 的粒子数 N_l (在 B 中 $N_l = 0, 1, 2, \cdots$; 在 F 中

$N_l=0,1$）的组 $(N_1, N_2, \cdots)$，就能决定表示全系统状态的 $\Psi(N_1, N_2, \cdots)$，这个函数能给出由上述对称性所限定的波函数空间内的完备正交系．下面写出 B, F 中的各种具体情况．

$$\text{(1B)}\quad \Psi(N_1, N_2, \cdots) = \left(\frac{N_1!N_2!\cdots}{(\sum N_l)!}\right)^{1/2} \times \sum_P P\varphi_{l_1}(x_1)\varphi_{l_2}(x_2)\cdots,$$

$$\text{(1F)}\quad \Psi(N_1, N_2, \cdots) = ((\sum N_l)!)^{-1/2} \times \sum_P \varepsilon_P P\varphi_{l_1}(x_1)\varphi_{l_2}(x_2)\cdots,$$

式中 $l_1=l_2=\cdots=l_{N_1}=1$, $l_{N_1+1}=\cdots=l_{N_1+N_2}=2, \cdots$, P 表示 $x_1, x_2, \cdots$ 的所有的排列，ε_P 按照 P 为偶或奇取值 ±1.

任意状态 Ψ 都可以用 $\Psi(N_1, N_2, \cdots)$ 展开成为下面的形式，即

$$\Psi = \sum c(N_1, N_2, \cdots)\Psi(N_1, N_2, \cdots).$$

另一方面，同种粒子系统的 Hamilton 算符[†] 以及其他任意力学量 A 关于粒子是对称的 $\left(\text{例: } A = \sum_j \alpha(x_j),\ \sum_j \sum_k \beta(x_j, x_k)\right)$，因此，如果把 A 作用于 Ψ，总可以象下面那样再一次用 $\Psi(N_1, N_2, \cdots)$ 展开，即

$$\begin{aligned} A\Psi &= \sum c(N_1, N_2, \cdots)A\Psi(N_1, N_2, \cdots) \\ &= \sum c'(N_1, N_2, \cdots)\Psi(N_1, N_2, \cdots). \end{aligned}$$

因此，如果引入由

$$\text{(2B)}\quad \begin{aligned} & a_l\Psi(N_1, \cdots, N_l, \cdots) \\ &\quad = \sqrt{N_l}\,\Psi(N_1, \cdots, N_l-1, \cdots), \\ & a_l^*\Psi(N_1, \cdots, N_l, \cdots) \\ &\quad = \sqrt{N_l+1}\,\Psi(N_1, \cdots, N_l+1, \cdots) \end{aligned}$$

或

$$\text{(2F)}\quad \begin{aligned} & a_l\Psi(N_1, \cdots, N_l, \cdots) \\ &\quad = \theta_l N_l \Psi(N_1, \cdots, 1-N_l, \cdots) \\ & a^*\Psi(N_1, \cdots, N_l, \cdots) \\ &\quad = \theta_l(1-N_l)\Psi(N_1, \cdots, 1-N_l, \cdots) \end{aligned}$$

定义的**湮灭算符** (annihilation operator) a_l 和**产生算符** (creation operator) a_l^*，则所有的力学量都可以用 a_l, a_l^* $(l=1,2,\cdots)$ 来表示．这些算符满足下面的交换关系，即

$$\text{(3B)}\quad \begin{aligned} &[a_k, a_l^*]_- = a_k a_l^* - a_l^* a_k = \delta_{kl}, \\ &[a_k, a_l]_- = 0,\quad [a_k^*, a_l^*]_- = 0, \end{aligned}$$

或

$$\text{(3F)}\quad \begin{aligned} &[a_k, a_l^*]_+ = a_k a_l^* + a_l^* a_k = \delta_{kl}, \\ &[a_k, a_l]_+ = 0,\quad [a_k^*, a_l^*]_+ = 0. \end{aligned}$$

(2F) 中的 θ_l 是用

$$\theta_l = (-1)^{\nu_l} \quad \left(\nu_l = \sum_{j=1}^{l-1} N_j\right)$$

定义的符号函数，是使 (3F) 成立所必需的函数．由 (3B), (3F) 知道，$N_l = a_l^* a_l$ 具有本征值 $0, 1, 2, \cdots$ (B)，或本征值 $0, 1$ (F)，它给出了占有 l 状态的粒子数．用

$$\psi(x) = \sum_l a_l\varphi_l(x),\quad \psi^*(x) = \sum_l a_l^*\varphi_l^*(x)$$

定义的算符称为**量子化的波函数** (quantized wave function)．由 (3B), (3F) 以及 φ_l 的完全正交性，可知交换关系

$$\begin{aligned} &\psi(x)\psi^*(x') \mp \psi^*(x')\psi(x) = \delta(x-x'), \\ &[\psi(x), \psi(x')]_\mp = [\psi^*(x), \psi^*(x')]_\mp = 0 \end{aligned}$$

成立．力学量可以用 ψ 表示，例如

$$\begin{aligned} A &= \sum_j \alpha(x_j) = \int \psi^*(x)\alpha(x)\psi(x)dx \\ &= \sum_k \sum_l \int \varphi_k^*(x)\alpha(l)\varphi_l(x)dx \cdot a_k^* a_l. \end{aligned}$$

在单一个粒子的系统的量子力学中，如果 ψ 是通常意义的波函数，则这种形式表示 α 在状态 ψ 的期望值；而在多粒子系统中，ψ, ψ^* 的展开系数 a_l, a_k^* 等，或波函数 ψ, ψ^* 本身可以再一次作为量子力学算符来处理(量子化)．在这种意义下，称上述形式为**二次量子化**（再次量子化）．特别是 $\psi^*(x)\psi(x)$，通常表示粒子的存在概率，然而在二次量子化之后它成为表示粒子密度的算符．

二次量子化的方法是 P. A. M. Dirac 就 Bose 粒子引入的 ([4])，又由 P. Jordan, P. Wigner 推广到费密子 ([5])．如果把电磁场的波这样量子化，就产生**光子** (photon) 的概念；把电子波二次量子化，就产生**电子** (electron) 这样的粒子形象．二次量子化的形式和场的概念有密切的关联，因此，一般地说，它是相对论的

量子场论的基础(→场论).

【参】[1] P. A. M. Dirac, The principles of quantum mechanics, Clarendon Press, 第四版, 1958 (中译本: P. A. M. 狄拉克, 量子力学原理, 科学出版社, 1965); [2] H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirgel, 1928, p. 219; [3] V. Fock, Konfigrationsraum und zweite Quantelung, Z. Phys., **75** (1932), 622—647; [4] P. A. M. Dirac, The quantum theory of the emission and absorption of radiation, Proc. Roy. Soc. London, **114** (1927), 243—265; [5] P. Jordan-E. P. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot, Z. Phys., **47** (1928), 631—651.

场论 [英 field theory 法 théorie du champ 德 Feldtheorie 俄 теория поля 日 場の理論] 在空间的一定区域内,除一些特别点外,如果对于各点 $\mathfrak{x}$ 定义了某一个量 $\phi(\mathfrak{x})$, 这个区域就称为量 $\phi(\mathfrak{x})$ 的**场** (field). 场的概念很广泛,在其他科学中也时常用到. 这里只在物理学的范围内, 特别是以描述基本粒子的场的量子力学为中心进行论述.

【发展的概况】 在弹性理论、流体力学(特别是 Euler 运动方程)等部门中都涉及到连续体的位移及速度的场, 在电磁学中才把脱离物质而独立的真空场(以太)作为物理学的研究对象. M. Faraday 首先阐明了电磁场所遵守的规律(1837); J. C. Maxwell 又从数学方面完成了电磁场的理论(1873). A. Einstein 以这种理论为基础建立了狭义相对论(1905),后来又把它发展为广义相对论和引力场理论.

量子论虽然是从电磁辐射问题开始的, 但电磁场本身的量子论是在很久以后才由 P. A. M. Dirac 建立起来(1927). P. Jordan 和 E. P. Wigner 仿照这样的理论把物质波(电子场)量子化(1927), W. Heisenberg 和 W. Pauli 则研究了一般波动场的量子论(1929), 获得了巨大成果. Jordan 和 Pauli (1927), Pauli (1939), 朝永振一郎(1943), J. Schwinger (1948) 等人又把这种理论以相对论的共变形式表达出来. 这样, 研究电磁场和电子场(包括正电子场)的量子电磁学就形成了理论体系,而且和实验十分一致. 但是在量子场论中还存在着特有的发散困难; 从 1947 年以来, 把电子的质量和电荷用实验值代替, 这种困难才大体上得以避免(朝永-Schwinger-Feynman-Dyson 的重正化理论).

另一方面,湯川秀樹(1934)把场的量子论应用于核力,预言了介子的存在,而且后来实际上发现了 π 介子、μ 介子和其他介子. 用 π 介子场理论能圆满地说明核子-介子系统的性质. 1949 年以来在宇宙射线中陆续发现了几种不稳定的新粒子, 对这些粒子也能建立同样的理论.

随着介子理论的发展, 又研究了各种类型的场,建立了基本粒子的一般理论. Dirac 提出了一个普遍波动方程(1936), Pauli 和 M. Fierz 证明了自旋和统计的一般关系(1939)(→基本粒子论). Schwinger 从统一的变分原理† 导出了量子场论的运动方程和交换关系(1951). 这样,只要不考虑相互作用,满足狭义相对论和量子论的基本粒子的一般理论体系就大体上完成了.

【场方程】 在时间-空间中某一点的场量, 只与邻点的场量有关而且只由邻点的场量决定(局部作用). 场量的变化可以用双曲线型偏微分方程(波动方程)来表示(不含时间的静止场遵守椭圆型偏微分方程). 如果给出波动方程和适当的初始条件,就可以决定全体时间-空间的场. 场的方程也可以看作是自由度为无穷大的力学系统的运动方程. 通常是先考虑 Lagrange 密度函数 $L(\phi, \phi^*, \partial\phi/\partial\mathfrak{x}, \partial\phi^*/\partial\mathfrak{x}, \cdots, \mathfrak{x})$,然后再由变分原理 $\delta\int L d\mathfrak{x}=0$ 导出场方程(为了满足相对论不变性的要求,取 L 为四维标量, $d\mathfrak{x}=dxdydzdt$). 由此可以导出场的动量、能量、张量$\Big($只含一阶导数时 $T_{\mu\nu}=\sum_\alpha(\partial\phi_\alpha/\partial x_\mu)(\partial L/\partial(\partial\phi_\alpha/\partial x_\nu))+$(共轭量)$-L\delta_{\mu\nu}\Big)$、四维电流$\Big($只含一阶导数时 $s_\mu=i\varepsilon\sum_\alpha((\partial L/\partial(\partial\phi_\alpha/\partial x_\mu)\phi_\alpha-$(共轭量)$)\Big)$ 等物理量,而且可以得到各种守恒定律.

【基本粒子的场】 基本粒子的存在可以认为是真空本身的内在性质(例如正负电子对的

产生和湮灭)．因此，基本粒子的理论至少要满足狭义相对论的要求，它的波动量ψ(以后令$x_0=ct$)必须满足波动方程

$$(-\partial^2/\partial x_0^2+\nabla^2-\kappa^2)\psi=0,$$

而且只能是按照Lorentz群†的不可约表示†进行变换．另一方面，由于基本粒子既有粒子性，又有波动性(⇀量子力学)，所以基本粒子的场ψ不是经典理论的波动，而是量子化的波动场．也就是说，可以把ψ看成作用于状态矢量的算符，而把波动方程看成算符间的关系式．当基本粒子的自旋为整数时，可以按 Bose 统计进行量子化，为半奇数时，可以按 Fermi 统计进行量子化(⇀二次量子化)．量子化的结果，场的波动性受到限制而出现某种粒子性(例如，场的总能量、动量、电荷、电流都和粒子系统的一样)．量子化场的理论(交换关系、运动方程、Schrödinger方程等)全都可以用变换函数的变分原理，即

$$\delta(\zeta_1',\sigma_1|\zeta_2'',\sigma_2)=(i/\hbar c)\times\left(\zeta_1',\sigma_1\left|\delta\int_{\sigma_2}^{\sigma_1}Ld\mathfrak{x}\right|\zeta_2'',\sigma_2\right)$$

取适当的变分导出来(σ是空间的三维超曲面，ζ_1是由σ_1上的场量构成的交换力学量的完全组，ζ_1'是ζ_1的本征值组，如果在一个σ上给出了ζ_1'，就可以决定一组基本矢量系)．

下面举出各种场的 Lagrange 密度函数和交换关系(未写出的交换关系都是零)．

1) (伪)标量场(自旋为 0)．例如π介子：

$$L=c^2\sum_\mu\frac{\partial\psi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x_\mu}+\kappa^2\psi^*\psi,$$

$$[\psi(\mathfrak{x}'),\psi^*(\mathfrak{x}')]=(\hbar/i)\Delta_\kappa(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}').$$

2) (伪)矢量场(自旋为 1)

$$L=\frac{1}{2}c^2\sum_{\mu,\nu}\left(\frac{\partial\psi_\nu^*}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\psi_\mu^*}{\partial x_\nu}\right)\times\left(\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_\mu}-\frac{\partial\psi_\mu}{\partial x_\nu}\right)+\kappa^2c^2\sum_\nu\psi_\nu^*\psi_\nu,$$

$$[\psi_\mu(\mathfrak{x}),\psi_\nu^*(\mathfrak{x}')]=\frac{\hbar}{i}\left(\delta_{\mu\nu}-\frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\right)\times\Delta_\kappa(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}').$$

特别是当$\kappa=0$时．例如光子：

$$[\psi_\mu(\mathfrak{x}),\psi_\nu(\mathfrak{x}')]=(\hbar/i)\delta_{\mu\nu}\Delta_0(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}').$$

3) 旋量场(自旋为 1/2)．例如电子、μ介子、质子、中子：

$$L=i\hbar c\psi^*(\partial\psi/\partial x_0+(\vec{\alpha},\mathrm{grad}\,\psi)+i\kappa\beta\psi),$$

$$[\psi_\rho(\mathfrak{x}),\psi_\sigma^*(\mathfrak{x}')]_+=c(\delta_{\rho\sigma}-(\vec{\alpha}_{\sigma\rho},\mathrm{grad})-i\kappa\beta_{\rho\sigma})\Delta_\kappa(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}').$$

以上各交换关系的右端的Δ_κ是满足下面交换关系的拟函数†：

$$(\Box^2-\kappa^2)\Delta_\kappa=0$$

当$x_0=0$时，$\Delta_\kappa=0$，$\partial\Delta_\kappa/\partial x_0=\delta(\mathfrak{x})$．

【场的相互作用】 实际的基本粒子是有相互作用的，而且不断地转化、产生和湮灭，然而处理这类问题的正确理论却还没有完成．为了描述相互作用，通常在L上加上一些含有两种以上场量的积的项，结果大多数场方程都变成非线性的．常常(在进行了适当的接触变换之后)是把相互作用看成小的微扰用逐次渐近法求解，在逐次渐近的过程中，物理量的期望值常常出现无穷大．对于特定类型的相互作用，虽然可以用重正化方式的减法来计算，然而在其他情况不得不用不确定性较多的切断法来计算，这是不能使人满意的．这样，描述点状基本粒子的现在的量子场论，在时、空的微小区域(相当于场的高频成分)内出现了破绽，需要从根本上进行变革．

Heisenberg 认为，在将来的理论中除了$\hbar$和c以外，还要出现具有长度量纲的普遍常数r_0，他还发展了S矩阵的理论(⇀S矩阵)，并以此作为将来理论的框架．现在是先承认基本粒子有质量、自旋、电荷，然后建立理论，而将来要从更基本的定律在理论上推导出基本粒子的质谱．向这些方向发展的新研究，除S矩阵理论外，还有湯川的非定域场理论，Heisenberg 等人的非线性理论等．

【参】 [1] Л. Д. Ландау-Е. М. Лифшиц. Теория поля (Теор. Физика, Т. П.), Физматгиз, 第五版, 1967 (中译本：Л. Д. 朗道，E. M. 莱弗西兹，场论，人民教育出版社，1959)；[2] G. Wenztel, Quantentheorie der Wellenfelder, Wien, 1943 (英译本：Quantum theory of wave fields, Interscience, 1949; [3] W. Pauli, Relativistic field theories of elementary particles, Rev. Mod. Phys. **13** (1941), 203—232; [4] H. Umezawa (梅沢博臣), Quantum field theory, North Holland, 1956; [5] 湯川秀樹，素粒子論序説，上，岩波，1948; [6] 湯川秀樹-小林稔

編，素粒子論，共立出版，1951；〔7〕 朝永振一郎-福田信之-福田博-沢田克郎，場の量子論，岩波講座現代物理学，1959；〔8〕 K. Nishijima (西島和彦)，Fields and particles, Benjamin, 1969.

散射 ［英 scattering 法 diffusion 德 Streuung 俄 рассеяние 日 散乱］ 粒子或波遇到分子或原子等很小的物体时要改变它的行进方向，这种现象一般称为**散射**．散射大体可以分为**弹性散射**（elastic scattering）和**非弹性散射**（inelastic scattering）两种．入射粒子和靶的内部性质在碰撞后都不改变的散射称为弹性散射．其内部性质改变，或者产生其他粒子或波，或者两者成为一个束缚态的散射，称为非弹性散射．

粒子被散射的比率与入射粒子的大小和靶的大小有关，就波来说则与波长有关；当靶较大时，与靶的截面积成正比．单位时间内通过 1 厘米^{2}的面积有一个粒子入射时，它在单位时间内被散射的概率称为**散射截面**（scattering cross section）．在经典理论中，散射截面等于靶的面积．散射到立体角 $d\Omega$ 内的概率称为**微分截面**（differential cross section）．不被散射而被靶吸收的概率称为**吸收截面积**（absorption cross section）．就波来说，这和散射截面有密切的关系．考察基本粒子或原子、分子的结构或相互作用时，时常采用分析散射状况这样的方法．

【非定态解法】 在量子力学中，用下述方法研究散射问题．若以 $\Psi(t)$ 表示粒子的状态的概率振幅†，则 $\Psi(t)$ 为 Schrödinger 方程†

(1) $$H\Psi(t)=i\hbar\partial\Psi(t)/\partial t$$

的解，式中H表示系统的 Hamilton 算符†，$\hbar$ 表示（Planck 常数）$/2\pi$．在碰撞前后粒子和靶相离很远，可以忽略它们之间的相互作用．若令 t_1 和 t_2 为碰撞前后的时刻，则 $\Psi(t)$ 为在 t_1 和 t_2 的没有相互作用的 Hamilton 算符的本征解．如果在时刻 t_1 给出了特定状态 x_i，则由(1)知道，在时刻 t 的 $\Psi(t)$ 可以用

$$\Psi(t)=U(t,t_1)$$

给出．这里 $U(t,t_0)$ 是由微分方程

$$i\hbar\partial U(t,t_0)/\partial t=HU(t,t_0)$$

和初始条件 $U(t_0,t_0)=1$ 决定的幺正算符．由此可知，在时刻 t_2 成为状态 x_f 的概率振幅 U_{fi} 可以由

(2) $$U_{fi}=(x_f,\Psi(t_2))=(x_f,U(t_2,t_1)x_i)$$

给出（x_i 是忽略了相互作用时的 Schrödinger 方程的解）．$t_1\to-\infty$，$t_2\to\infty$时的$U(\infty,-\infty)$为 S 矩阵，$|S_{fi}|^2$ 表示在 i 状态入射的粒子成为 f 状态的概率．由此可以计算出新截面(⇀ S 矩阵)．

【定态解法】 如果引起散射的力不随时间变化，就可用另一种方法，即用定态解法来解散射问题．假设和散射中心的距离为 r，当 r 较大时，可以把对于定态的 Schrödinger 方程 $H\Psi=E\Psi$ 在条件

$$\Psi=e^{ikx}+f(\theta,\varphi)e^{ikr}/r,\quad r\to\infty$$

下求解．这里 $\boldsymbol{k}$ 表示入射粒子的动量除以 $\hbar$，k 表示它的大小，即波数．第一项表示入射粒子，第二项表示由散射产生的外向球面波．$d\sigma=|f(\theta,\varphi)|^2d\Omega$ 表示粒子被散射到θ，φ 方向的立体角 $d\Omega$ 内的微分截面．可以证明，当力满足适当的条件时，定态解法和非定态解法的结果是一致的．

【部分波解法】 散射截面可以用 S 矩阵求得，但 S 矩阵是幺正矩阵，于是可以引入下面的 Hermite 矩阵† $\boldsymbol{K}$，用它作为解 S 矩阵的手段．

$$S=(I-iK/2)/(I+iK/2),$$
$$K_{ij}=2\pi\delta(E_i-E_j)\boldsymbol{K}_{ij}.$$

若令

$$T=S-I,\quad T_{ij}=-2\pi i\delta(E_i-E_j)\boldsymbol{T}_{ij},$$

则单位时间内的散射概率 w 可以用

$$w_{ij}=(2\pi/\hbar)|\boldsymbol{T}_{ji}|^2,\quad i\neq j$$

来表示．$\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 之间有

$$\boldsymbol{T}_{ij}+i\pi\sum_k\boldsymbol{K}_{ik}\boldsymbol{T}_{kj}=\boldsymbol{K}_{ij}$$

（但 $E_i=E_j=E_k$）的关系．因为 $\boldsymbol{K}$ 是 Hermite 矩阵，所以它的本征值 $\boldsymbol{K}_A$ 和本征函数 φ_A 是可以求得的，本征值是实数．若令正交函数系 x 和 φ 之间的变换系数为 f，则

$$x_i=\sum_A f_{iA}\varphi_A,\quad \sum_a\bar{f}_{aA}f_{aB}=\delta_{AB},$$

$$K_{ji}=\sum_A f_{jA}K_A\bar{f}_{iA},\quad T_{ji}=\sum_A f_{jA}T_A\bar{f}_{iA},$$

$$T_A=K_A/(1+i\pi K_A).$$

因为 K_A 是实数，所以若令

$$K_A=-(1/\pi)\tan\delta_A,$$

则

$$T_A=-(1/\pi)\sin\delta_A e^{i\delta_A},$$

于是散射概率为

$$(3)\quad w_{ji}=(2/\pi\hbar)\left|\sum_A \sin\delta_A e^{i\delta_A}f_{jA}\bar{f}_{iA}\right|^2,$$

$$w_i=\sum_j w_{ji}=(2/\pi\hbar)\sum_A \sin^2\delta_A|f_{iA}|^2.$$

δ_A 称为**相移**（phase shift）．作为完备正交函数系 φ_A，通常取角动量†的本征函数，x 是平面波．这时若令入射粒子的波数为 k，则由(3)知道，碰撞的微分截面 $d\sigma$ 可以作为散射角 θ 的函数由

$$d\sigma(\theta)=(1/k^2)\times\left|\sum_l(2l+1)\sin\delta_l e^{i\delta_l}P_l(\cos\theta)\right|^2 d\Omega$$

给出．这里 P_l 是角动量的本征值 l 的球函数†．总截面是把立体角积分，即

$$\sigma=(4\pi/k^2)\sum_l(2l+1)\sin^2\delta_l.$$

【近似解法】 如果引起散射的力所能作用的距离 R_0 是有限的，则可以证明，满足 $l\gg kR_0$ 的 δ_l 是非常小的．因此在低能情况下（k 远小于 $1/R_0$ 时）只取 $l=0$ 或 $l=1$ 时，可以取 $\delta_l=0\,(l\geqslant 2)$ 这样的近似．$l=0$ 的部分称为 S 波散射，$l=1$ 的部分称为 P 波散射．对于 S 波的相移，有下面的近似式成立，即

$$K\cot\delta_0=-1/a+(r/2)k^2,\quad kR_0\ll 1.$$

a 称为**散射长度**（scattering length），r 称为有**有效距离**（effective range）．

相反，在高能情况下，可以把力的势 V 作为微扰来处理，这称为 Born 近似．一般地说，当动能远大于 V 时 Born 近似成立，但有时不一定是这样．

【共振散射】 相移为 90° 时，散射截面最大．这样的散射称为**共振散射**（resonance scattering）．这时碰撞截面与入射粒子的波长的平方成正比．一般地说，把相移对波数 k 求导数再除以入射速度，所得结果表示散射出来的时间的延迟，称为**寿命**（life）．若用 τ 表示寿命，则 $\tau=(1/v)\partial\delta(k)/\partial k$．

就原子核反应来说，对于 K 矩阵可以采用下面的近似，即

$$(4)\quad K_{ij}=\sqrt{v_i}\,(K^0_{ij}+(\hbar b^2/2(E-E_0)\beta_i\beta_j)\sqrt{v_j},$$

$$\sum\beta_i^2=1,$$

式中 K^0, β_i, b, E_0 是实数，是原子核特有的量．v_i, v_j 分别为粒子在散射前后的速度，E 是入射能量，E_0 称为**共振能量**（resonance energy）．(4)的第一项引起的散射称为**势散射**（potential scattering），第二项引起的散射是共振散射．**寿命的倒数** Γ 称为**散射宽度**（width of scattering），在(4)式所示的例子中，如果 K^0 可以忽略，则

$$1/\tau=\Gamma=\sum_j\Gamma_j,\quad \Gamma_j=\hbar b^2\beta_j^2 v_j,$$

$$\sigma_{ji}=(\pi/k_i^2)\Gamma_j\Gamma_i(E-E_0)^2+\Gamma^2/4).$$

Γ_i 称为**部分宽度**（partial width）

【参】 C. Møller, General properties of the characteristic matrix in the theory of elementary particles I, Det K. Danske Vidensk, Selsk, Mat. Fys. Medd., **23** (1945), 1—48; [2] B. A. Lippman-J. Schwinger, Variable principles for scattering processes, Phys. Rev., **79** (1950), 469—480; [3] E. P. Wigner-L. Eisenbud, Higher angular momenta and long range interaction in resonance reactions, Phys. Rev., **72** (1947), 29—41.

S 矩阵 [英 S-matrix 法 matrice S 德 S-Matrix 俄 S-матрица 日 エス行列] 假设有几个互相充分远离的粒子或粒子群，它们在某一时刻互相接近进行反应后又互相充分远离分为几个粒子或粒子群．在量子力学中，对这样的过程（互相碰撞的过程）进行实验时，不观察接近时的反应状况，而用根据下述方法决定的矩阵 S 来描述系统的变化：在用 Hamilton 算符构成的幺正变换 $U(t,t_0)$（→量子力学［Schrödinger 方程］）中，令 $t_0\to-\infty$, $t\to\infty$ 取极限，就可得到矩阵 S．这个 S 称为 **S 矩阵**．可以把 S 矩阵更详细地叙述如下．

在量子力学中，用状态函数 $\psi(t)$ 表示某

一时刻 t 的物理状态，这个函数在无穷小时间内的变化遵守 Schrödinger 方程[†]

$$i\hbar\partial\phi(t)/\partial t = H\phi(t),$$

因此，如果 Harmilton 算符 $H = H_0 + H'$ 存在，就可以确定以后任意时刻的 ϕ，这里 H_0 是自由粒子的 Harmilton 算符，H' 是对应于粒子间相互作用的 Harmilton 算符．实际上，令

$$\phi = (\exp(-iEt/\hbar))u,$$

若能得到满足不含 t 的 Schrödinger 方程 $H_u = E_u$ 的 u，而且这个 u 是散射波在离散射中心较远之处所取的某种形式的渐近解，就可以用对应于单位入射波的散射波的系数来定义 S 矩阵(定态的处理)．这里 E 是系统的总能量．

在对相对论的场论[†]也能适用的一般理论中，可以用幺正变换

$$\Psi(t) = (\exp iH_0t/\hbar)\phi(t),$$

从上述 Schrödinger 表示 $\Psi(t)$ 过渡到相互作用表示，以 Schrödinger 方程

$$i\hbar\partial\Psi(t)/\partial t = H'(t)\Psi(t)$$

为基础，就可以进行非定态的处理．式中

$$H'(t) = (\exp iH_0t/\hbar)H'\exp(-iH_0t/\hbar).$$

这种表示中的状态函数只有当在物理系统有粒子间的相互作用时才随时间变化．若用

$$\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$$

定义一个满足 $U(t_0, t_0) = 1$ 这样初始条件的算符 U，这种状态函数在时刻从 t_0 变到 t 的时间内的变化，就可以用运动方程

$$i\hbar\partial U(t, t_0)/\partial t = H'(t)U(t, t_0)$$

来描述．求出它的解，取

$$\lim_{t\to\infty,\ t_0\to-\infty} U(t, t_0)$$

这样的极限，就可以定义 S 矩阵．这个 S 和由定态的处理得到的 S 是一致的，这是因为：当 $t_0 \to -\infty$ 时粒子间的空间距离若为无穷大，则相互作用消失，而状态函数表示自由粒子的状态；然而，求这两种 S 之间的关系是很麻烦的问题．

如果能这样求得 S，碰撞问题就完全解决了．$S\phi_i$ 是碰撞过程完了后的粒子的状态函数，它可以作为由所有可能的量子状态的函数构成的规范化正交系的线性组合给出．因此，从量子力学的概率解释知道，成为各项系数的 S 矩阵的元素 S_{fi}，就给出了终态成为 f 的概率振幅，$|S_{fi}|^2$ 表示跃迁 $i \to f$ 的跃迁概率，是可以测出的．但是，即使 H 存在，解运动方程作为 H 的泛函数求出 S，在一般情况下是很困难的，在多数情况下都用摄动[†]法来求解．

在一般情况下，H 是 Hermite 算符，所以 S 是规范正交系 ϕ_s' 生成的函数空间[†] (Hilbert 空间)内的幺正算符，而且 $S^*S = SS^* = 1$ 成立．这件事和 $|S\phi_i|^2 = |\phi_i|^2 = 1$ 所表示的概率守恒的物理内容是对应的．即使进行时间反演 $t \to -t$，状态函数 $\phi^*(-t)$ 仍为同一 Schrödinge 方程的解，所以可以证明 S 矩阵具有**互反性** (reciprocity)，即有 $S_{\bar{i}\bar{f}} = S_{fi}$．这里 $\bar{i}$ 和 $\bar{f}$ 分别为进行时间反演时由状态 i 和 f 得到的状态的本征值，这种性质表示，跃迁 $\bar{f} \to \bar{i}$ 和 $i \to f$ 以同样的强度发生．

一般地说，守恒量是由使运动方程保持不变的变换算符的本征值决定的．实际上这样的变换算符和 S 是可换的，所以在碰撞前后本征值不变．在相对论的场论中，非齐次 Lorentz 群、正常齐次 Lorentz 群以及空间反演和 S 也是可换的；因此，分别和这些相对应的能量、动量以及角动量的本征值是守恒的，此外宇称的本征值也是守恒的，S 矩阵关于这些本征值是对角线的．如果考虑基本粒子的内部自由度，S 和带电空间的旋转群也是可换的．总之，开始的状态函数和终了的状态函数是这些群的表示空间的基础，S 是它的中心[†]．

【重正化法】 在现在的场论中存在着发散的困难．也就是说，若用微扰法把基本粒子的自能、电荷密度的期望值、各种碰撞过程发生的概率等计算到高次近似时，一定要出现发散问题．但是根据朝永振一郎等人所发展的**自洽法** (self-consistent subtraction method) (或**重正化法**)知道，特别是对于量子电动力学，把 S 展开成为电子的电荷 e 的幂级数，即

$$S = \sum_n e^n S_n$$

的形式，把新出现的发散量分离，各 S_n 都成为有限的 (F. J. Dyson)，这种方法在说明现象方面获得了成功．然而，幂级数的收敛性并未得到证明．另一方面，在有关 π 介子的问题中，有时不能使 S_n 成为有限的，即使是有限的，相互作用常数 g 也要比 e 大得多，因此，连定性地说明实验现象都是不可能的．由这种情况知道，用现在的场论从微观立场对基本粒子的碰撞过程跟踪到空间距离小于 10^{-13} 厘米(若用 c 表示光速，时间间隔就小于 $10^{-13}/c$ 秒)的世界，同时求出 S 矩阵是不可能的．而 W. Heisenberg 认为 S 是最有用的算符，与其假定 H 存在莫如按照物理系统的结构决定与可能测量的物理量有直接关系的 S；今日的 S 矩阵理论就是以这样的观点为出发点发展起来的．

【S 的解析性】 根据物理的要求，在 S 矩阵理论中需要假定 S 矩阵的幺正性、互反性和对 Lorentz 变换的不变性，对于对应于内部量子数的变换群的不变性等量子力学的一般结论成立．S 是只在描述过程时所需要的取连续本征值的变量(能量及动量)的函数，曾考虑在与上述一般要求不相矛盾的范围使这种函数具有解析性，由于认为变量是复数而对这种函数进行了解析开拓†，从而推导出积分表达式，结果是色散关系†(→色散关系)．这种表达式的导出，为场论奠定了基础，它和因果律†这样的一般假定有密切关系，但是没有假定 H 存在．于是可以认为色散式是普遍成立的公式．但是根据这些假定是否能完全决定 S，它有多大的任意性，如何决定它在高能条件下的渐近状况等等，都是未解决的问题．

根据与量子力学的类比知道，在 S 矩阵理论中，处于束缚态的粒子的能量本征值，由 S 的极点在能量 E 面上的实轴上的位置决定．关于有异常阈值和多余的极点(小平邦彦)以及有束缚态和共振态时 S 在高能条件下的渐近状况，曾用与量子力学及场论类比的方法进行了多方面的探讨．

物理状态可以由系统的总角动量† J 指定，因此，可以把 S 用由 J 决定的不可约部分 S_J 展开，这称为部分波展开．在量子力学中 J 取整数值或半整数值，近几年来曾讨论了部分波振幅 S_J 在复 J 平面上的解析性，特别是对于它在非相对论的势能散射中的一般性质，已经有了清楚的认识(T. Regge)．根据 S_J 的极点的位置可以把束缚态和共振态的能极作为 J 的函数给出，这称为 **Regge 轨道** (Regge trajectory)．当 J 的实数部分取非负整数值时，可以认为它代表可观测的物理状态．然而，关于相对论的散射振幅以及它和势能散射有多大的类似性，目前还不清楚．

【参】 [1] C. Møller, General properties of the characteristic matrix in the theory of elementary particles, Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd., **22** (1945); 1—46, **23** (1946), 1—48; [2] W. Heisenberg, Über die in der Theorie der Elementarteilchen auftretende universelle Länge, Ann. der Phys., **32** (1938), 20—33; [3] W. Heisenberg, Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen, Z. für Phys., **120** (1943), 513—548, II, 673—702; [4] S. T. Ma, Redundant zeros in the discrete energy spectra in Heisenberg's theory of Characteristic matrix, Phys. Rev., **69** (1946), 668; [5] F. J. Dyson, The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman, Phys. Rev., **75** (1949), 486—502; [6] F. J. Dyson, The S matrix in quantum electrodynamics, Phys. Rev., **75** (1949), 1736—1755; [7] J. M. Jauch, Theory of the scattering operator, Helv. Physca Acta, **31** (1958), 127—158; [8] 小平邦彦，二階常微分演算子の固有値問題について，数学，**1** (1948), 177—191, **2** (1949), 113—139; [9] K. Kodaira (小平邦彦), The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices, Amer. J. Math., **71** (1949), 921—945; [10] S. Gasiorowicz, The application of dispersion relations in quantum field theory, Fortsch. der Phys., **8** (1960), 665—726; [11] S. Mandelstam, Determination of the pion-nucleon scattering amplitude from dispersion relations and unitarity, general theory, Phys. Rev., **112** (1958), 1344—1369; [12] M. Froissart, Asymptotic behavior and subtractions in the Mandelstam representation, Phys. Rev., **123** (1961), 1053—1057; [13] A. Bottino-A. M. Longoni-T. Regge, Potential scattering for complex energy and angular momentum, Nuovo Cimento, **23** (1962), 954—1004.

色散关系 [英 dispersion relation 法 relation de dispersion 德 Dispersionsbeziehung 俄 отношение рассеяния 日 分散式] 如果随变量 ω 变化的物理量 $M(\omega)$ 能够写为部分分数形式：

(1) $$M(\omega)=\sum_i \frac{c_i}{\omega_i-\omega}+\int \frac{\lambda(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega',$$

通常称上式为**色散关系**. 当物质的折射指数 n 与光的频率 ω 有关时，光就要发生色散，而可以把 $n(\omega)$ 写为 (1) 的形式，因此称 (1) 式为色散关系. 在光学、原子核反应理论、粒子的散射等问题中，时常见到这样的关系式.

如果复函数 $f(z)$ 在 z 平面的上半平面是正则的，当 $z\to\infty$ 时 $f\to 0$，则对于实轴上的值有下面的 Hilbert 变换†成立，即

$$\mathrm{Re}\, f(\omega)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.\,v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\, f(\omega')}{\omega'-\omega}\,d\omega',$$

式中 p.v. 表示积分的 Cauchy 主值†, $\mathrm{Im}\, f(\omega)$ 还包含 δ 函数. 从狭义的观点，把这种关系简单地称为色散关系. 如果当 $z\to\infty$ 时，$f=O(1)$，则可以不考虑 f 而考虑

$$g(z)=f(z)/(z-\omega_0+i\varepsilon),$$

由关于它的色散关系得到

$$\mathrm{Re}\, f(\omega)-\mathrm{Re}\, f(\omega_0)=\frac{\omega-\omega_0}{\pi}\times\mathrm{p.\,v.}\int\frac{\mathrm{Im}\, f(\omega')}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)}\,d\omega'.$$

这种运算称为**减法** (subtraction). 如果 $z=\infty$ 是 f 的有限阶极点，则经过几次减法就可以得到色散关系.

【因果律与色散关系】 色散关系对物理量之所以成立，主要是由于因果律. 所谓**因果律** (causality) 是这样一条原理：有原因必定有结果. 例如，光被粒子散射的情况，若令光遇到粒子的时刻为 $t=0$，散出来的散射波的振幅为 $F(t)$，则由因果律知道，$F(t)=0\ (t<0)$，这时，$F(t)$ 的 Fourier 变换† $f(\omega)$ 是一个在 $\mathrm{Im}z>0$ 上为全纯的解析函数 $f(z)$ 当 $\mathrm{Im}z\to 0$ 时的边界值，并且满足色散关系. 然而，因果律和色散关系的成立并不是等价的，由一方面不一定能推导出另一方面.

【基本粒子论与色散关系】 在基本粒子理论中要研究的问题是粒子的散射、生成等现象的概率振幅† T，这是能量 ω 等物理量的函数. $T(\omega)$ 是对于满足 $\omega>\omega_0$ 的实数 ω 定义的函数，但是可以考虑把 ω 解析开拓到复 z 平面上，由幺正性知道 T 具有

$$\mathrm{Im}\, T(\omega)=(1/2)T^{*}T(\omega>\omega_0)$$

的性质 (→ S 矩阵)，然而当 $\omega<\omega_0$ 时，若令 $\mathrm{Im}\, T=0$，则由反射原理†知道 $T(\bar z)=\overline{T(z)}$. 因此，如果从 $\omega>\omega_0$ 进行解析开拓到上半平面，再通过 $\omega<\omega_0$ 开拓到下半平面，则沿着 $\omega>\omega_0$ 的实轴发生 $2i\,\mathrm{Im}\, T$ 的间断. 在量子场论中，在某种情况下，可以证明：除去沿 $\omega>\omega_0$ 的实轴的截断 (这称为**幺正性截断** (unitarity cut)) 之外，$T(z)$ 是正则的. 这时，$T(\omega)$ 满足色散关系，给出 $\mathrm{Im}\, T$ 就能求出 T.

当所考虑的粒子的质量满足一定关系时，除上述情况外，还存在别的不连续点 (线). 这时，称为存在**反常阈** (anomalous threshold). 不存在反常阈时，可以由 T 的幺正性和色散关系计算跃迁矩阵 T. 从这种意义来说，在矩阵理论中色散关系是代替运动方程的重要关系式.

【二重色散关系】 把色散关系 (1) 推广到两个变量 s, t 的函数 $f(s,t)$ 是有各种可能性的. 特别是下面关系式是很重要的. 令 $s+t=-u$，则

$$\begin{aligned}f(s,t)=&\frac{1}{\pi^2}\int_{s_0}^{\infty}\int_{t_0}^{\infty}\frac{\rho_{12}(s',t')}{(s'-s)(t'-t)}\,ds'dt'\\&+\frac{1}{\pi^2}\int_{t_0}^{\infty}\int_{u_0}^{\infty}\frac{\rho_{23}(t',u')}{(t'-t)(u'-u)}\,dt'du'\\&+\frac{1}{\pi^2}\int_{u_0}^{\infty}\int_{s_0}^{\infty}\frac{\rho_{31}(u',s')}{(u'-u)(s'-s)}\,du'ds'.\end{aligned}$$

这称为 **Mandelstam 表示** (Mandelstam's representation)，采用适当的变量可以把散射振幅写为上面的形式. 由上式和幺正性可以求出散射振幅.

对于变量多于三个的这种形式的函数，还没有发现它的物理意义.

【参】 [1] M. L. Goldberger, Causality conditions and dispersion relations I, Phys. Rev., **99** (1955), 979—985; [2] G. R. Screaton (ed), Dispersion relations, Oliver and Boyd, 1960.

旋量 [英 spinor 法 spineur 德 Spinor 俄 спинор 日 スピノル] **旋量**是为了构成 Lorentz 群†的所有的有限阶不可约表示而引入的量. 通过正常 Lorentz 群†的指数为 2 的万有

覆盖群† $SL(2, \boldsymbol{C})$ 的变换可以把旋量定义如下（→典型群，Clifford 代数）.

假设 2^k 个复数组

$$\{\xi^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k} \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k = 0, 1\}$$

满足下面的变换法则，而且对应于各 Lorentz 坐标系 (x_0, x_1, x_2, x_3)；如果另一组 Lorentz 坐标系 (x_0', x_1', x_2', x_3') 和 (x_0, x_1, x_2, x_3) 以下面的形式相结合，即

$$(1)\qquad \begin{pmatrix} x_0' - x_3', & x_1' + ix_2' \\ x_1' - ix_2' & x_0' + x_3' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_0 - x_3, & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}{}^t \bar{A},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \in SL(2, \boldsymbol{C}),$$

那么对应于 (x_0', x_1', x_2', x_3') 的复数组 $\{\xi'^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}\}$ 就可以用下式给出：

$$(2)\qquad \xi'^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k} = \sum a_{\lambda_1\lambda_1'}a_{\lambda_2\lambda_2'}\cdots a_{\lambda_k\lambda_k'}\xi^{\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_k'}.$$

这样的对应称为**阶数为 k 的无点旋量**（undotted spinor of rank k），$\{\xi^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}\}$ 称为关于这组坐标系的**分量**（component）. 阶数为 k 的无点旋量的全体构成 2^k 维复线性空间. 如果分量的变换法则不用 (2) 式而用下式给出，即

$$(3)\qquad \xi'^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k} = \sum \bar{a}_{\lambda_1\lambda_1'}\bar{a}_{\lambda_2\lambda_2'}\cdots \bar{a}_{\lambda_k\lambda_k'}\xi^{\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_k'},$$

这种变换称为**阶数为 k 的有点旋量**（dotted spinor of rank k），它的分量是在指标的上面加上点，写为 $\{\xi^{\dot{\lambda}_1\dot{\lambda}_2\cdots\dot{\lambda}_k}\}$. 阶数为 k 的无点(有点)旋量的分量，可以按照阶数为 1 的无点(有点)旋量的 k 个分量的积进行变换.

一般地说，假定 2^{k+n} 个复数组

$$\{\xi^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\dot{\mu}_1\dot{\mu}_2\cdots\dot{\mu}_n} \mid \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k = 0, 1; \ \dot{\mu}_1, \dot{\mu}_2, \cdots \dot{\mu}_n = 0, 1\}$$

满足下面的变换法则而且对应于各 Lorentz 坐标系，如果另一组 Lorentz 坐标系 (x_0', x_1', x_2', x_3') 和 (x_0, x_1, x_2, x_3) 以 (1) 的形式相结合，则对应于 (x_0', x_1', x_2', x_3') 的复数组 $\{\xi'^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\dot{\mu}_1\dot{\mu}_2\cdots\dot{\mu}_n}\}$ 可以用下式给出，即

$$(4)\qquad \xi'^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\dot{\mu}_1\dot{\mu}_2\cdots\dot{\mu}_n} = \sum a_{\lambda_1\lambda_1'}a_{\lambda_2\lambda_2'}\cdots a_{\lambda_k\lambda_k'} \times \bar{a}_{\dot{\mu}_1\dot{\mu}_1'}\bar{a}_{\dot{\mu}_2\dot{\mu}_2'}\cdots\bar{a}_{\dot{\mu}_n\dot{\mu}_n'}\xi^{\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_k'\dot{\mu}_1'\dot{\mu}_2'\cdots\dot{\mu}_n'}.$$

这样的对应称为**阶数为 (k, n) 的混合旋量**（mixed spinor of rank (k, n)），$\{\xi^{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k\dot{\mu}_1\dot{\mu}_2\cdots\dot{\mu}_n}\}$ 称为关于这组坐标系的分量. 阶数为 (k, n) 的混合旋量的全体构成 2^{k+n} 维复线性空间. 这种旋量的分量按照 k 个 1 阶无点旋量的分量和 n 个 1 阶有点旋量的分量的积进行变换.

其次，如果利用矩阵

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

令

$$(5)\qquad \xi_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k} = \sum \tau_{\lambda_1\lambda_1'}\tau_{\lambda_2\lambda_2'}\cdots\tau_{\lambda_k\lambda_k'}\xi^{\lambda_1'\lambda_2'\cdots\lambda_k'},$$

则 $\{\xi_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}\}$ 进行在 (2) 中以 $\tau a\tau$ 代替 a 时的变换，以这样的复数组 $\{\xi_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k}\}$ 为分量的量称为**共变旋量**（covariant spinor）. 相反，有上标的旋量称为**反变旋量**（contravariant spinor）. 用同样的方法对有点旋量、混合旋量也可以引入反变、共变的概念. 特别是对于混合旋量，关于有点指标可以考虑共变旋量，关于无点指标可以考虑反变旋量，或者与其相反的旋量.

利用二阶混合旋量 $(\xi^{0\dot{0}}\xi^{0\dot{1}}, \xi^{1\dot{0}}, \xi^{1\dot{1}})$ 可以把四维矢量 (A^0, A^1, A^2, A^3) 按下式结合起来，即

$$(6)\qquad \begin{pmatrix} \xi^{0\dot{0}} & \xi^{0\dot{1}} \\ \xi^{1\dot{0}} & \xi^{1\dot{1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0 - A^3 & A^1 + iA^2 \\ A^1 - iA^2 & A^0 + A^3 \end{pmatrix},$$

这是因为，由 (4) 知道，(A^0, A^1, A^2, A^3) 所满足的变换与正常 Lorentz 变换相同. 这样就可以把四维矢量按照一阶无点旋量和一阶有点旋量的积来进行变换，从这种意义来说，可以认为旋量是比矢量更基本的量，它是 B. L. van der Waerden 命名的 (1929).

阶数为 (k, n) 的混合旋量给出了正常 Lorentz 群†的 2^{k+n} 阶表示，然而从 (1) 所定义的 $SL(2, \boldsymbol{C})$ 向正常 Lorentz 群的同态†的核†为 $\{\pm I\}$，所以这种表示是二阶的. 而且这种表示不是不可约的†. 不可约表示可以由**对称旋量**（symmetric spinor）得到. 也就是说，如果对旋量的同种指标(关于点的有无和位置)作任意置换它的分量都不改变，则称这种旋量为对称旋量. 阶数为 (k, n) 的对称混合旋量能给出 $(k+1)(n+1)$ 阶不可约表示.

【双旋量】 这里对包含空间反演 S:

(7) $x_0' = x_0 \quad x_i' = -x_i; \quad i = 1, 2, 3$

的 Lorentz 群作如下的假设，即假设 $2 \times 2^{k+n}$ 个复数组 $\left\{\xi^{\lambda_1\cdots\lambda_k}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_n}, \eta^{\lambda_1\cdots\lambda_n}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_k}\right\}$ 按下面的变换法则变换，而且对应于各 Lorentz 坐标系 (x_0, x_1, x_2, x_3). 当另一组 Lorentz 坐标系 (x_0', x_1', x_2', x_3') 和 (x_0, x_1, x_2, x_3) 以 (1) 的形式结合时，对应于这组坐标系的复数组 $\left\{\xi'^{\lambda_1\cdots\lambda_k}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_n} \ \eta'^{\lambda_1\cdots\lambda_n}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_k}\right\}$ 就可以用下式给出，即

(8)
$$\xi'^{\lambda_1\cdots\lambda_k}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_n} = \sum a_{\lambda_1\lambda_1'}\cdots a_{\lambda_k\lambda_k'} a^{\dot\mu_1\dot\mu_1'}\cdots a^{\dot\mu_n\dot\mu_n'}\xi^{\lambda_1'\cdots\lambda_k'}_{\dot\mu_1'\cdots\dot\mu_n'},$$

$$\eta'^{\lambda_1\cdots\lambda_n}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_n} = \sum a_{\lambda_1\lambda_2'}\cdots a_{\lambda_n\lambda_n'} a^{\dot\mu_1\dot\mu_1'}\cdots a^{\dot\mu_k\dot\mu_k'}\eta^{\lambda_1'\cdots\lambda_n'}_{\dot\mu_1'\cdots\dot\mu_k'},$$

$$\|a^{\dot\mu_i\dot\mu_i'}\| = (a_{\mu_i\mu_i'}\|^*)^{-1},$$

当以 (7) 的形式结合时，就可以用下面的 (9) 式给出，即

(9)
$$\xi'^{\lambda_1\cdots\lambda_k}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_n} = \sum\delta^{\lambda_1\dot\mu_1'}\cdots\delta^{\lambda_k\dot\mu_k'}\delta_{\lambda_1'\dot\mu_1}\cdots\delta_{\lambda_n'\dot\mu_n}\eta^{\lambda_1'\cdots\lambda_n'}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_k},$$

$$\eta'^{\lambda_1\cdots\lambda_n}_{\dot\mu_1\cdots\dot\mu_k} = \sum\delta^{\lambda_1\dot\mu_1'}\cdots\delta^{\lambda_n\dot\mu_n'}\delta_{\lambda_1'\dot\mu_1}\cdots\delta_{\lambda_k\dot\mu_k}\xi^{\lambda_1'\cdots\lambda_k'}_{\dot\mu_1'\cdots\dot\mu_n'}.$$

这样的对应称为**双旋量** (bispinor). 进行正常 Lorentz 变换时，双旋量的第一组分量按照阶数为 (k, n) 的混合旋量变换，第二组分量按照阶数为 (n, k) 的混合旋量变换. 而进行空间反演时，第一组分量和第二组分量交换，上标和下标也交换. 阶数为 (k, n) 的对称双旋量，当 $k \neq n$ 时，给出 Lorentz 群的 $2(k+1)(n+1)$ 阶不可约表示 ($k = n$ 时不是不可约的).

当 $k = 1, n = 0$ 时，可以把双旋量 $(\xi^0, \xi', \eta_0, \eta_1)$ 看做 Dirac 方程[†]的波函数，亦即把上述分量从上面依次排列便构成四行一列的矩阵，如果令这个矩阵为 ψ，就可以把 Dirac 方程写为

(10) $(\gamma^\mu\partial_\mu + iK)\psi = 0 \quad K = mc/\hbar.$

这里 γ^μ 是满足 $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ 的四行四列反 Hermite 矩阵，m 表示电子的质量，c 表示光速，$\hbar$ 表示 Planck 常数除以 2π. 此外，在基本粒子理论中，双旋量还应用于各种相对论波动方程的描述(→ 基本粒子论).

【参】 [1] B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, 1932; [2] E. Cartan, Leçons sur la théorie des spineurs, I, II, Actualités Sci. Ind., Hermann, 1938; [3] C. Chevalley, The algebraic theory of spinors, Clumbia University, 1954; [4] E. M. Corson, Introduction to tensors, spinors, and relativistic wave-equations, Hafner, 1953; [5] И. М. Гельфанд- Р. А. Минлос- З. Я. Шапиро, Представления группы вращени и группы Лоренца, их применения, Физматтиз, 1958.

Racah 代数 [英 Racah algebra 法 algèbre de Racah 德 Racahalgebra 俄 алгебра Рака 日 ラカー代数] 在量子力学[†]中，常对 n 个角动量[†]的合成状态的不可约分量 ψ, ψ' 求力学量 A 的矩阵元[†] $(\psi, A\psi)$，把这种计算方法加以整理使它成为一种有系统的数学方法，这就是 **Racah 代数**. 角动量 $\boldsymbol{j}$ 的 x, y, z 分量 j_x, j_y, j_z，是围绕各轴的无穷小旋转的 i 倍，因此，在各不可约分量 ψ 中，这些分量就是这些无穷小旋转的算符. 于是角动量的合成就相当于三阶旋转群的不可约表示的张量积表示[†]，即 $D(j_1) \otimes D(j_2)$; 这里要讨论的是把这种表示分解为不可约表示的直和的问题.

【旋转群的不可约表示】 三阶旋转群 $R = SO(3)$ 的不可约表示可以用一般理论(→ 典型群[正交群])的方法来求. 也就是说，可以作为矩阵 $A \in SO(3)$ 的 $2j$ 个张量积

$$D(A) = A \otimes \cdots \otimes A$$

在对称张量空间内的分量而得到. 这种表示通常写为 $D(j)$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$. $D(j)$ 的阶数为 $2j+1$. 根据同构旋转群

$$SO(3) \cong SU(2)/\{\pm I\},$$

利用 $SU(2)$ 所作用的复二维空间 V 的坐标 (u, v)，可以取 $V \otimes \cdots \otimes V$ ($2j$ 个) 的元素

$$\phi(jm) = \frac{u^{j+r}v^{j-r}}{\sqrt{(j+r)!(j-r)!}},$$

$$r = j, j-1, \cdots, -j,$$

作为 $D(j)$ 所作用的 $2j+1$ 维表示空间的基.

若把旋转群的两种不可约表示 $D(j_1)$ 和 $D(j_2)$ 的张量积表示分解为不可约表示的直和，则为

$$D(j_1) \otimes D(j_2) = \sum D(j),$$

$$j = j_1 + j_2,\quad j_1 + j_2 - 1, \cdots,\quad |j_1 - j_2|.$$

由此可知

$$\phi(jm) = \sum_{m_1, m_2} \phi(j_1 m_1)\phi(j_2 m_2) \times (j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m).$$

上式中的系数称为 **Clebsch-Gordan 系数** (Clebsch-Gordan coefficient) 或 **Wigner 系数** (Wigner's coefficient). 但是在上式中

$$j_1 + j_2 \geqslant j \geqslant |j_1 - j_2|,$$

$$(j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m) = \delta(m_1 + m_2, m)$$

$$\times \sqrt{\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j+j_1-j_2)!(j+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+j+1)!}}$$

$$\times \sum_{\nu} \Bigg((-1)^{\nu} \frac{\sqrt{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!}}{\nu!(j_1+j_2-j-\nu)!(j_1-m_1-\nu)!}$$

$$\times \frac{\sqrt{(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!}}{(j_2+m_2-\nu)!(j-j_2+m_1+\nu)!(j-j_1-m_2+\nu)!}\Bigg).$$

这些系数满足正交关系.

对三个不可约表示的张量积进行约化时，有 $(D(j_1)\otimes D(j_2))\otimes D(j_3)$ 和 $D(j_1)\otimes(D(j_2)\otimes D(j_3))$ 这样两种顺序，对这两种顺序可以得到两种不同的基组. 它们之间的变换系数可以写为:

$$\langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3;\ j | j_1,\ j_2 j_3 (j_{23}),\ j \rangle$$

$$= \sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}\, W(j_1 j_2 j_3 j;\ j_{12} j_{23}),$$

$W(abcd;\ ef)$ 称为 **Racah 系数** (Racah's coefficient). 这些系数可以用 Wigner 系数的四个积的和来表示. 在这些系数之间有下面的关系:

$$\begin{aligned} W(abcd;\ ef) &= W(badc;\ ef) \\ &= W(acbd;\ fe) \\ &= (-1)^{e+f-a-d} W(ebcf;\ ad) \\ &= (-1)^{e+f-b-c} W(aefd;\ bc), \end{aligned}$$

且正交关系成立.

【不可约张量】 对于坐标旋转，与 $D(k)$ 的基作同样变换的力学量 T_q^k $(q=k, k-1, \cdots, -k)$ 称为 **k 阶不可约张量** (irreducible tensor of rank k). 从代数的观点可以把这种张量用下式来定义，即

$$[j_x \pm j_y,\ T_q^k] = \sqrt{(k \mp q)(k \pm q + 1)}\, T_{q\pm1}^k,$$

$$[j_z,\ T_q^k] = q T_q^k,$$

这里 $[a, b] = ab - ba$. 这个量的在两个不可约分量之间的矩阵元，可由下列形式给出，即

$$(\alpha jm | T_q^k | \alpha' j' m') = (1/\sqrt{2j+1}) \times (\alpha j \| T^{(k)} \| \alpha' j')(j' m' kq | j' kjm).$$

这里 α 是用来区分具有相同的 j 和 m 的多重分量的参数，并假定 α 不同的分量是正交的. 在上式中，Clebsch-Gordan 系数是按照几何意义决定的部分，$(\alpha j \| T^{(k)} \| \alpha' j')$ 是按照力学意义决定的部分.

以 $T^{(k)}$, $U^{(k)}$ 分别作用于全状态 (Hilbert 空间) $H = H_1 \times H_2$ 的部分状态 H_1, H_2 中的状态矢量时，它们的标量积

$$(T^{(k)}, U^{(k)}) = \sum_q (-1)^q T_q^k U_{-q}^k$$

的矩阵元可以写为

$$(\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2 jm | (T^{(k)},\ U^{(k)}) | \alpha_1' \alpha_2' j_1' j_2' jm)$$

$$= (-1)^{j_1 + j_2' - j} W(j_1 j_2 j_1' j_2';\ jk)$$

$$\times (\alpha_1 j_1 \| T^{(k)} \| \alpha_1' j_1')(\alpha_2 j_2 \| U^{(k)} \| \alpha_2' j_2').$$

此外，两个不可约张量的张量积的不可约分量，即

$$[T^{(k_1)} \otimes U^{(k_2)}]_q^k = \sum_{q_1+q_2=q} T_{q_1}^{k_1} U_{q_2}^{k_2} \times (k_1 q_1 k_2 q_2 | k_1 k_2 kq)$$

的矩阵元可以用下式来表示，即

$$(\alpha j_1 j_2 j \| [T^{(k_1)} \otimes U^{(k_2)}]^{(k)} \| \alpha' j_1' j_2' j)$$

$$= \sqrt{(2k+1)(2j+1)(2j'+1)}$$

$$\times \sum_{\alpha''} (\alpha j_1 \| T^{(k_1)} \| \alpha'' j_1')$$

$$\times (\alpha'' j_2 \| U^{(k_2)} \| \alpha' j_2') \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_1' & j_2' & j' \\ k_1 & k_2 & k \end{Bmatrix}.$$

最后的“$9j$ 符号”是用

$$[D(j_1) \otimes D(j_2)] \otimes [D(j_3) \otimes D(j_4)]$$

和

$$[D(j_1)\otimes D(j_3)]\otimes[D(j_2)\otimes D(j_4)]$$

之间基向量的矩阵元,即

$$\langle j_1j_2(j_{12})j_3j_4(j_{34})jm|j_1j_3(j_{13})j_2j_4(j_{24})jm\rangle$$
$$=\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{34}+1)(2j_{13}+1)(2j_{24}+1)}$$
$$\times\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12}\\ j_3 & j_4 & j_{34}\\ j_{13} & j_{24} & j\end{Bmatrix}$$

定义的数,可以用W的三个积表示.

【参】[1] 山内恭彦,回転群とその表現,岩波,1957; [2] M. E. Rose, Elementary theory of angular momentum, John Wiley, 1957; [3] U. Fano-G. Racah: Irreducible tensorial sets, Academic Press, 1959; [4] Racah 係数の表,東京天文台年報 III, **3** (1953), 89—142, IV. **1** (1954), 3—74, IV. **2** (1955), 75—154, V. **4** (1958), 155—199.

基本粒子论 [英 theory of elementary particles 法 théorie des particules élémentaires 德 Elementarpartikeltheorie 俄 теория элементарных частиц 日 素粒子論] 构成粒子或场的终极粒子称为**基本粒子** (elementary particle), 其中包括光子、电子、μ介子等轻子,介子和重子(表 1). 各种粒子具有电荷、被称为自旋的固有角动量以及其他属性. 研究这些性质的理论称为**基本粒子论.**

【Lorentz 群表示】 在基本粒子论中,最基本的群是非齐次 Lorentz 群† $\bar{G}$. 对应于 $\bar{G}$ 的 Lie 代数†是由满足下面交换关系的无穷小算子 M_{kl} 和 P_k ($k,l=1,2,3,4$) 产生的.

$$[M_{kl},M_{mn}]=i(g_{lm}M_{kn}+g_{kn}M_{lm}-g_{km}M_{ln}-g_{ln}M_{km}),$$
$$[P_k,P_l]=0,$$
$$[M_{kl},P_m]=i(g_{lm}P_k-g_{km}P_l),$$

其中

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=-g_{44}=-1,$$
$$g_{kl}=0,\quad k\neq l,$$

这里 P_k 表示四维动量, M_{23}, M_{31}, M_{12} 表示角动量的三个分量. P_k 产生的子代数对应于 $\bar{G}$ 的不变可换子群. 和只由 M_{kl} 产生的子代数对应的 $\bar{G}$ 的子群是单纯群,称为正常 Lorentz 群† G_0. G_0 是以 $g_{ij}x_ix_j$ 为不变量的线性变换 $x'_i=G_{ij}x_j$ 所构成的 Lorentz 群† G 的元素,也可以看做是使 $\det(G_{ij})=1$ 成立的全体元素的子群、G/G_0 是 (2, 2) 型的阶数为四的 Abel 群,利用

$$S(x_i\to -x_i\ (i=1,2,3),\ x_4\to x_4),$$
$$T(x_i\to -x_i\ (i=1,2,3),\ x_4\to -x_4)$$

可以把G作如下表示:

$$G=G_0\cup SG_0\cup TG_0\cup STG_0$$

(→相对论, Lie 群).

基本粒子对应于包含 S, T 的非齐次 Lorentz 群 $\bar{G}$ 的不可约表示. 这种表示可以用和两个 Casimir 算符† $M^2=P_kP^k$,

$$W=M_{kl}M^{kl}P_mP^m/2-M_{km}M^{lm}P^kP_l$$

(这里 $P^k=g^{kl}P_l$, $M^{kl}=g^{kk'}g^{ll'}M_{k'l'}$, $g^{k\alpha}g_{j\alpha}=\delta^k_j$) 相对应的值完全指定. 这里 M 表示质量, W 在静止系 $P_1=P_2=P_3=0$ 中对应于 M^2S^2 (S 表示基本粒子的自旋). 只有当 $M=0$时可以用 $\omega_k\omega_l$ ($\omega_k=\varepsilon_{klmn}M_{lm}P_n$) 代替 W. $\bar{G}$ 表示的具体求法是众所周知的. 任意不可约表示的基可以通过分解 Dirac 旋量 ϕ_α 和它的共轭旋量 $\bar{\phi}_\alpha$ 的直积来求得(→旋量). 然而,任意高阶旋量都满足 Bargmann-Wigner 方程

$$(P_\mu\gamma^\mu+m)^{\alpha'}_{\alpha}\phi^{\delta\varepsilon\cdots}_{\alpha'\beta\gamma\cdots}=0,$$
$$(P_\mu\gamma^\mu+m)^{\beta'}_{\beta}\phi^{\delta\varepsilon\cdots}_{\alpha\beta'\gamma\cdots}=0.$$

这里 γ^μ 是 P. A. M. Dirac 引入的 γ 矩阵. 例如对于二阶旋量

$$\phi^\beta_\alpha=\delta^\beta_\alpha\phi+\gamma^{5\beta}_{\alpha}\phi_5+i\gamma^\mu\gamma^5\phi_{\mu5}+\gamma^{\mu\beta}_{\alpha}\phi_\mu+\sigma^{\mu\nu\beta}_{\alpha}\phi_{\mu\nu}/2,$$

这里

$$\gamma^5=\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4,\quad 2i\sigma^{\mu\nu}=\gamma^\mu\gamma^\nu-\gamma^\nu\gamma^\mu,$$

有

$$\phi=0,\quad P_\mu\phi_5=im\phi_{\mu5},\quad P_\mu\phi_{\mu5}=-im\phi_5,$$
$$P_\mu\phi_\nu-P_\nu\phi_\mu=im\phi_{\mu\nu},\quad P_\nu\phi_{\nu\mu}=-im\phi_\mu.$$

ϕ_5 和 ϕ_μ 分别对应于自旋为 0 和 1 的基本粒子. Dirac 粒子的自旋为 1/2, 它遵守下面的方程:

$$(P_\mu\gamma^\mu+m)\phi=0.$$

这个方程又是以对于 Lorentz 群不变的 Lagrange 函数,即

$$\mathscr{L}=\int\bar{\phi}(P_\mu\gamma^\mu+m)\phi d^4x$$

为变分函数的方程(这时 $P_\mu = i\partial/\partial x_\mu$).

【基本粒子的相互作用】 已经知道，基本粒子之间有四种**相互作用** (interaction)，分别称为强相互作用，电磁相互作用，弱相互作用和引力相互作用.

要求 Lagrange 函数对于局部规范变换 $\Phi(x) \to e^{i\varepsilon Q\lambda}\Phi(x)$ ($\Phi(x)$ 表示上述任意高阶旋量，$\lambda(x)$ 是满足 $\Box\lambda = 0$ 的任意函数，Q 是整数，表示电荷，ε 表示基本电荷)具有不变性，能够很自然地引入电磁相互作用. 又根据 Lorentz 群的不变性和所测得的粒子能量必须为正值，可以证明下面的关系(量子化条件)成立:

$$\Phi_{\zeta\eta\cdots}^{\alpha\beta\cdots}(x)\Phi_{\alpha'\beta'\cdots}^{\zeta'\eta'\cdots}(x') \pm \Phi_{\alpha'\beta'\cdots}^{\zeta'\eta'\cdots}(x')\Phi_{\zeta\eta\cdots}^{\alpha\beta\cdots}(x)$$
$$= i\delta(x_1 - x_1')\delta(x_2 - x_2')\delta(x_3 - x_3')\delta_{\alpha'}^{\alpha}\delta_{\beta'}^{\beta}\cdots,$$

这里 $x_4 = x_4'$; 当自旋为半整数(奇数的一半)时取 + 号，当自旋为整数时取 − 号. 用常数代替上面的 $\lambda(x)$ 时，由换位产生的不变性称为**内部对称性** (internal symmetry). 对于电磁相互作用，除电荷的规范变换外，还有由重子数、轻子数、超电荷产生的规范不变性.

关于强相互作用，可以认为表示内部对称性的群是至少含有 $SU(2)\otimes U(1)$ 的单或半单 Lie 群 (→典型群). 归根到底可以认为，它具有包含"非齐次 Lorentz 群⊗内部对称群"的最广泛的群的对称性. 在上述表示内部对称性的群 $SU(2)\otimes U(1)$ 之中，通常称 $SU(2)$ 的不变性为**电荷的无关性** (charge independence)，它的 Lie 代数 $[I_i, I_j] = 2i\varepsilon_{ijk}I_k$ (ε_{ijk} 是 Levi-Civita 符号)的元素 I_i 称为**同位旋** (isospin). $U(1)$ 的产生算子是超电荷 Y. 由于有 $Q = I_3 + Y/2$ 的关系，电荷的规范不变性当然是成立的. 用 $2SU(2)\otimes U(1)$ 把具有强相互作用的粒子加以分类时，属于同一不可约表示的粒子集团称为**带电多重项** (iso-multiplet). 表 1 中列举了几个有关这方面的例子. Y 可以写为 $Y = S + n_B$，这里 S 称为**奇异数**(也叫**奇异性**) (strangeness)，n_B 是重子数，在强相互作用中都是守恒的加法量子数，可以由重子数的规范不变性引入.

表 1

	带电多重项	I	S	n_B
重子	(p, n)	1/2	0	1
	Λ	0	−1	
	$(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$	1	−1	
	(Ξ^0, Ξ^-)	1/2	−2	
介子	(K^+, K^0)	1/2	1	0
	η	0	0	
	(π^+, π^0, π^-)	1	0	
	$(\bar{K}^0, K^-)$	1/2	−1	

【基本粒子的模型】 一般地说，若以二阶以上的 Lie 群为内部对称性，则除 I_3 外还可以得到其他线性守恒量子数. 坂田模型是在重子 $N(p, n, \Lambda)$ 及反重子 $\bar{N}(\bar{p}, \bar{n}, \bar{\Lambda})$ 与三阶幺正群 $U(3)$ (阶数为三) 的基本三维表示基底相对应的前提下，假定近似对称性成立. 在这种模型中，由积 $N\bar{N}$ 的不可约分解产生的表示基底与赝标量介子相对应，由积$NN\bar{N}$的不可约分解可以作出与其他重子相对应的表示基底. 三个守恒量与 I_3, S, n_B相对应.

现在更进一步考虑由群 $U(3)$ 除去相当于重子数的规范不变性的元素而得到的阶数为二的三阶特殊幺正群 $SU(3)$. 在这种群中假定两个守恒量 I_3 和 Y，就可以设想一种使八个重子及八个伪标量介子与不可约八维表示基底相对应的模型. 在这种**八重态模型** (octet model) 中，可以把目前已知的八个向量介子和十个重子-标量介子系统的共振能级(自旋为 3/2，宇称为 十)分别由不可约八维表示和十维表示给出.

若以强相互作用的内部对称性为基础，则弱相互作用的跃迁矩阵，就参与的具有强相互作用的粒子(强子)而言，具有下述变换性. 即对于不伴有轻子的衰变的选择法则为 $I = 1/2$ 而且 $S = 1$; 对于伴有轻子对的衰变则为 $I = 1/2$ 或 1; 而且知道，对于这两种情况，S/Q 分别为 1 和 0.

【参】 [1] 武田暁-宮沢弘成，素粒子物理学，裳華房，1965; [2] 武谷三男-坂田昌一-中村誠太郎編，素粒子の本質，岩波，1963; [3] K. Nishijima, Fundamental particles, Benjamin, 1963; [4] E. Fermi, Elemen-

tary particles, Yale Univ., Press, 1950; [5] W. Heitler, Quantum theory of radiation, Oxford Univ. Press, 第二版, 1944; [6] R. H. Dalitz, Strange particles and strong interactions, Oxford, Univ. Press, 1962; [7] A. O. Barut, Electrodynamics and Classical theory of fields and particles, Macmillan, 1964; [8] S. Gasiorowicz, Elementary particle physics, John Wiley, 1966.

二十、数学史和数学家

古代的数学 [英 ancient mathematics 法 mathématiques anciennes 德 antike Mathematik 俄 древняя математика 日 古代の数学] 因对数学这个词的意义理解不同，写古代数学史的起点也就不同．原始时期的情形，可以从现在未开化人对于数的认识来推测．值得注意的是，公元前3000年的埃及、美索不达米亚和稍晚的印度与中国等地的大河流域，原始阶段都已结束．

因为古代的大河流域文明的经济基础是农业，所以，执政者关心的第一是灌溉、排水设施、运河、抽水装置的管理；第二是测量征税的耕地和收获物；第三是通过天体观测确定季节等．所有这些都需要某种程度的数学．大规模宫殿和坟墓的建设，无疑更要使用较深的数学．这一时期的数学发展史，今日我们所知道的只不过是很不完全的很小的一部分．随着新史料的发现，使古代数学史的面貌发生根本改观的可能性是存在的．

【埃及数学】 埃及数学的主要史料是公元前1800年的 Rhind 纸草书和莫斯科纸草书，特别是前者更重要，它们都是在十九世纪发现的．希腊人认为数学虽起源于埃及，但埃及的数学只处于实用计算阶段．记数法不是位值制，而是由10进制和分子为1的分数（基本分数）组成的，把分数分解成为基本分数之和．他们也使用日常的算术（一次方程），因测量耕地、兴建谷仓和土木工程的需要，面积和体积的实用近似计算已相当发达．他们能正确地求出三角形和梯形的面积，还设圆周率为 $(16/9)^2 = 3.1605\cdots\cdots$，求出了圆的面积，但没有迹象说明在古代埃及已形成论证数学．

【美索不达米亚的数学】 关于美索不达米亚数学的史料已有很多，今后还可能会增多．美索不达米亚保存有长时期准确的天文记录，相应地数学程度也比埃及高，已不只是处在实用计算阶段．记数法已采用位值制60进制，还使用了小数．但直到公元前四世纪，还没有0这个记号，而且小数点的位置也不明确，必须从上下文来判断．此外，还使用乘法表、倒数表、平方表、立方表等．在代数学中使用数表是一特色，并用数表解出了简单的三次方程和二元二次方程组等．二次方程根的公式能用文字形式正确叙述（不取负根，但当有两个正根时，知道两个都是根）．也研究了 $a^2+b^2=c^2$ 的整数解（最大的解是 12709，13500，18541）和平方根的近似计算，这暗示了同希腊数学的关系．从史料可以确定，Euclid 的《几何原本》(Stoicheia) 中，有一部分几何学代数是以美索不达米亚的代数学为基础用几何方法重新建立的．虽然有的学者认为，希腊数学的论证概念来源于美索不达米亚，但还没有肯定的证据．

在七世纪以前，中美洲的玛雅 (Mayas) 人已使用20进制位值制记数法．在古代除美索不达米亚和这里提到的地方以外，还没有发现使用位值制记数法的类似例子（→ 中国的数学，印度的数学，希腊的数学）．

【参】 [1] O. Neugebauer, Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften I, Springer, 1934; [2] O. Neugebauer, Mathematische Keilschrift-Texte, Springer, 1935; [3] A. B. Chase, The Rhind mathematical papyrus II, Oberlin, 1929; [4] B. L. van der Waerden, Science awakening, Noordhoff, 1954; [5] O. Neugebauer, The exact sciences in antiquity, Brown Univ. Press, 第二版, 1957; [6] K. Vogel, Vorgriechische Mathematik I, Vorgeschichte und Ägypten, II, Die Mathematik der Babylonier, Hermann Schroedel, 1958—1959,

希腊的数学 [英 Greek mathematics 法 mathématiques grecques 德 Griechische Mathematik 俄

греческая математика 日 ギリシャの数学]
一般认为，理论数学的创始者是希腊人（虽然也有人认为是美索不达米亚人）. 他们向先进国家学习测地术和商业算术，至迟在公元前四世纪中叶，已有理论数学. 创立超过实用的理论数学，是人类文化史上最大的事件之一. 从此以后，直到现在，对于科学文化的发展都有本质的影响.

埃及和美索不达米亚的古代史料都有所保存，但是在希腊，连发表不到一千年的手抄本也很难找到. 重要文献的复原和据此重建希腊数学史，大半应归功于十九世纪数学史学家的研究. 他们一面对资料不断批判，一面对希腊数学史进行改写.（Eukleides 以前的历史，主要是根据 Proklos（410—485）所写的资料，更古的历史书现已无存.）

有名的最古代数学家是米利都（Miletus）的 Thales（公元前 624？— 546？）和萨摩斯岛（Samos）的 Pythagoras（公元前 572？— 492？），他们都是爱奥尼亚人. 后者曾移居意大利南部，开办宗教学园，其成员自称为 Pythagoras 学派. 他们把"万物皆为数"作为原理，讲授音乐、天文、几何和算术（称为四艺（quadrivium），是当时中等教育和以后高等教育的核心内容），作为净化灵魂的学科（mathema）. 这一学派深入研究过比例论（同音乐有关系）和多角形数（三角形数、平方数等）的理论，更一般地，还研究了数论问题和几何学代数等. 通常认为当时已知道数$\sqrt{2}$的无理性并证明正方形的一边与对角线之比不能用有理数表示，但没有明显的证据. 宗教学园停办后，他们同 Platon 学派合作，推动了希腊数学的发展.

与 Pythagoras 学派齐名的是意大利的埃利亚（Elea）学派，特别是其中的 Zenon（公元前 490？—429？），他的悖论[†]是一种归谬法的推论. 自古以来，对此议论很多，但这个学派的特点是它注重逻辑性. 特别是归谬法的发现应归功于这个学派. 也有人认为，从这里可以看出理论数学的诞生[3]. Zenon 曾经参与连续性、无理数等的研究，虽然很难确定其准确的年代，但是对于"原子论"的诞生似乎有所推动. Demokritos（公元前 460？—370？）计算角锥体积（分割成"原子"薄片计算）和 Antiphon（公元前 430 年左右）用细分法计算圆面积，都是在 Zenon 以后不久出现的.

公元前 480 年以后，雅典成为希腊的政治文化中心. 三等分角、倍立方、化圆为方是当时的三大问题，诡辩学家们（实际上为 Pythagoras 学派？）进行了研究. 伊利斯（Elis）的 Hippias（公元前 420 年左右）. 希俄斯（Chios）的 Hippokrates（公元前 470？—430？）、塔拉斯（Taras）的 Archytas（公元前 430？—365？），Menaikhmos（公元前 375—325）以及他的兄弟 Deinostratos（公元前 350 年左右）等，利用割圆曲线（quadratrix，方程为 $y = x\cot(\pi x/2)$ 的超越曲线）以及圆锥曲线，解决了"三大问题".

从公元前 400 年左右开始，雅典在政治上衰落了，但仍然是希腊的文化中心. 这时，Platon（公元前 427—347）学园（Akademeia）也重视数学，它同 Pythagoras 学派及埃利亚学派似有密切关系. 上述的 Archytas，Menaikhmos 和 Deinostratos 属于或接近于 Platon 学派. 这个学园最初五十年的主要功绩是：数学的乃至一般科学的方法论（dialectics，analysis，synthesis）；用几何方法重新建立美索不达米亚代数学；与其相应的无理数论（Platon 的老师昔兰尼（Cyrene）的 Theodoros（公元前五世纪末），后来还有雅典的 Theaitetos（公元前 415—369）也参加过这种研究）和一般比例论（克尼多斯（Cnidos）的 Eudoxus（公元前 408？—355？））、穷举法（method of exhaustion）（Eudoxus）等. 除上述三大问题外，还研究过正多面体（Platon 的立体）和圆锥曲线等. 在这学园内，mathema（ta）这个术语不是指一般"学科"，而已变为指"数学"了. 西欧科学界尊重数学的传统，就是从这个学园开始的.

希腊文化由于亚历山大帝（Alexandoros）建立大帝国，因而受到东洋影响. 此后称为希伦化（Hellenism）时代，学术中心转移到托勒密（Ptolemaios）王朝的首都亚历山大里亚的缪司

(Mouseion) 学园．据说最盛时期这里藏书达五十万卷．

这个时期，首先亚历山大里亚的 Eukleides (Euclid，约公元前 300 年，经历不明)，把学园派的数学成果，用公理方法总结成《几何原本》(Stoicheia) 十三卷，成为后世科学著作的典范 (例如 Spinoza 的《伦理学》、Newton 的《原理》都是模仿它写成的)．虽然通常认为 Euclid 公理方法来自 Aristoteles (公元前 384—322)的方法论，但也有人认为，公理方法的真正起源是埃利亚学派，而 Eukleides 的《几何原本》的某些部分，是 Oenopides (生活在 Zenon 时代)的工作和 Hippokrates (见前)等人对《几何原本》的再整理．Aristoteles 出身于学园派，后来独立出来，成为同 Platon 主义相抗衡的一个科学传统的鼻祖．

公元前三世纪，是希腊数学的黄金时代．叙拉古(Syracuse)的 Archimedes (公元前 287?—212) 是古代最伟大的数学家、力家学和技术专家．他在数学上的最大功绩也许是对抛物线等的精密求积法．根据他的著作《Ephodos》(方法)所载，他用力学实验测出数值，然后用穷举法给予理论证明．还有 π 值的计算、螺线及其他曲线、球与圆柱的研究，对十七世纪的影响极大．此外，对静力学、光学等的理论与应用也作出了贡献，对后来的数学家产生了深远影响．珀加 (Perga) 的 Apollonios (公元前 250 年左右) 编著《圆锥曲线》(konikon biblia) 八卷 (其中缺第八卷)，其理论结构同现在基本上没有多大区别，也对十七世纪数学的发展产生了巨大影响．此外，还有 Eratosthenes (公元前 275—194) (测算地球以及创造求素数的筛法) 和 Hipparchos (公元前 150 年前后) (天文学之父，编制"正弦表")等．

希伦化时代随着希腊被罗马吞并 (公元前 146 年) 而告终．亚历山大里亚在政治、文化上的地位逐渐崩溃，特别是缪司学园的大图书馆于公元前 48 年被烧毁 (后又重建)，造成了极大损失．当时的学者中，有亚历山大里亚的 Heron (推测在 60 年前后)，Menelaos (98 年前后) (著有《球面学》(Sphaerica))，稍后还有士麦那 (Smyrna) 的 Theon (125 年左右)、Ptolemaios (Ptolemy) (85?—165?) (《大汇编》(Almagest) 的作者)，Nikomachos (50—150?) (《算术引论》(Arithmetike eisagore) 的作者) 等．研究不定方程的 Diophantus，经历不明，估计是公元前 205 年左右的人，他的著作《算术》(Arithmetika) 共十三卷，现尚存六卷，对 P. de Fermat 有影响．Pappus (300 年前后) 是亚历山大里亚最后一位富有创造性的数学家，他的《数学汇编》(Synagoge) 现存八卷，是珍贵的史料，对 R. Descartes 有影响．

不久，罗马对希腊文化的压迫开始了．在缪司图书馆第二次被破坏(398)的时代，亚历山大里亚的 Theon (390 年前后) 及其女儿 Hypatia (370?—415) 等编有经典数学著作的注释．接着 Proklos (见前) 编写了几何学史，但它不过是 Eukleides 的《几何原本》第一卷的注释．以 Aristoteles 的注释者 Simplikios 为最后园长的学园，被攸查士丁尼 (Justinianus) 皇帝封闭了 (529)，亚历山大里亚城也陷入阿拉伯人之手 (641)，希腊科学仅有的传统，转移到东罗马帝国首都君士坦丁堡，直到东罗马帝国灭亡 (1453)，才盼来了新时代的黎明．

【参】 [1] T. L. Heath, A history of Greek mathematics I, II, Clarendon Press, 1921; [2] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, Teubner, 第三版, 1907; [3] B. L. van der Waerden, Zenon und die Grundlagenkrise der Griechischen Mathematik, Math. Ann., **117** (1940), 141—161; [4] B. L. van der Waerden, Science awakening, Noordhoff, 1954; [5] A' Szabó, Anfänge des Euklidischen Axiomensystes, Arch. History Exact Sci., 1, **37** (1960), 37—106; [6] J. L. Heiberg (ed.), Euclidis opera omnia I—XIII and suppl. Leipzig, 1883—1916; [7] T. L. Heath, The thirteen books of Euclid's Elements I, II, III, Cambridge Univ. Press, 1908 (Dover, 1956); [8] P. Ver Eecke (trans.), Les oeuvres complètes d'Archimède, Desclée de Brouwer & Cie, 1921 (Blanchard, 1961); [9] P. Ver Eecke (trans.), Proclus Diadochus, les commentaires sur le premier livre des Eléments, d'Euclide, Desclée de Brouwer & Cie, 1948 (Blanchard, (1959); [10] P. Tannery, Le géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons, Paris, 1887; [11] M. Clagett, Greek science in antiquity, Ahelard-Schuman, 1955 (Collier, 1963); [12] O. Becker (ed.), Zur Geschichte der griechischen Mathematik Darmstadt, 1965; [13] A' Szabó,

Anfänge der griechischen Mathematik, Oldenbourg, 1969; [14] R. C. Archibald, Outline of the history of mathematics, Mathematical Association of America, 第六版 1949; [15] N. Bourbaki, Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, 第二版, 1969 [16] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik 1—IV, Teubner, 第二版, 1894—1908; [17] E. Montucla, Histoire des mathématiques 1—IV, Paris, 新版, 1799—1802, [18] D. E. Smith, A. source book in mathematics, McGraw-Hill, 1929 (Dover 1959); [19] D. J. Struik, A concise history of mathematics, Dover. 第三版, 1967.

罗马和中世纪的数学 [英 Roman and medieval mathematics 法 mathématiques des romains et du moyen âge 德 Mathematik der Römischen Zeit und des Mittelalters 俄 римская и средневековая математика 日 ローマと中世の数学] 罗马人对数学的兴趣只局限于日常生活中直接需要的范围,其算术仅仅使得**算盘** (abacus) 的计算和直接表示度量衡,因而直接表示货币制度的十二进位分数得到发展. 以历法改革(纪元前46年)闻名的 Julius Caesar, 也是一个曾经企图测量罗马帝国领土的人. 那时,在测量上需要象几何学那样的知识,称为"Gromatic" (groma 意指测量器械). 西罗马灭亡时(476),曾有一个学习希腊数学的时期. 在这时期,有 A. M. T. S. Boetius (524 年卒)写的算术著作和几何学著作,前者是 Nikomachos 著作的节译本,后者包含有 Euclid 的《几何原本》(Stoicheia) 前三卷的省略了证明的命题以及实用几何学.

Platon 学派的学园 (Academy) 于 529 年被关闭. 但它的必修学科 (mathema) 音乐、天文、几何和算术,在五至七世纪,在 Martianus Capella, F. M. A. Cassiodorus, Isidorus Hispalensis 等所写的百科全书中是作为"四艺"(quadrivium) 看待的.在五世纪,罗马教会的主权确立后,四艺也就变成为神的光荣服务的东西了. 这时期,数学书的重点,放在教会历法的计算和对整数性质的神秘解释上. 这从七至九世纪 Bede Venerabilis, Alcuin, Maurus 等的著作中也可以见到.

阿拉伯科学的传入,引起了新的学习兴趣. 在七次十字军远征(1096—1270)以前,自 711 年,即 Visigoths 陷落的那年以来,在回教徒的影响下,阿拉伯科学从西班牙通过 Crusades (1096—1270) 开始传入. 一般认为 Gerbert 即教皇 Silvester II(999—1003 年在位)是受这种影响最早的人. 他说过,算盘的计算是有用处的. 不久,到十二世纪时,阿拉伯的算术、代数学同 Euclid, Ptolemaios 等的著作一起译成拉丁文. 产生于印度的笔算数学代替算盘计算的时代来到了. 这个新运动的支持者是需要实际计算的意大利商人阶层,比萨 (Pisa) 的 Leonardo (别名 Fibonacci) (约 1170—1250) 所写的《算盘书》(Liber abaci) (1202) 和《几何实习》(Practica geometrica) (1220) 是这方面的代表作. 前者包含由印度数学产生的四则运算、商业算术、代数学. 这时,这种新倾向就不限于商人阶层了. 值得注意的是,曾影响过 Leonardo da Vinci (1452—1519) 的十四世纪的法国僧侣 Nicole Oresme (约 1323—1382),引进分式指数,不仅使它符号化,而且以图形表示温度的变化,有了坐标和函数的概念. 从十一世纪起意大利的波伦亚 (Bologna), 巴勒莫 (Palermo) 等都市,从十二世纪起法国的巴黎、英国的牛津、剑桥等地,都创办以神学院为中心的大学. 虽然也讲授数学,但是没有出现创造性的研究. 当时,神学家 Albertus Magnus (1193左右—1280)和 Thomas Aquinas (1225?—1274) 等提出"神是无限的",超过了希腊人的思想. 因它具有世界一元论的思想,所以也成为近代世界观的一个基础.

【参】 [1] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Teubner, I, 1880; II, 1892; [2] M. Clagett, Greek Science, in antiquity, Abelard-Schuman, 1955; [3] M. Clagett, Archimedes in the middle ages I, II, Univ. of Wisconsin Press, 1964; [4] M. Clagett, The science of mechanics in the middle ages, Univ. of Wisconsin Press, 1959; [5] G. Sarton, Introduction to the history of science I. From Homer to Omar Khayyám. Carnegie Institution of Washington, 1927.

阿拉伯的数学 [英 Arabian mathematics 法 mathématiques arabes 德 Arabische Mathematik 俄 арабская математика 日 アラビアの数学] 在文化史上,阿拉伯的首要作用是文化的传播.

从七世纪到十三世纪期间，阿拉伯人建立了从印度到西班牙的宗教国家．不久，阿拉伯分裂成东西两个伊斯兰(撒拉逊)帝国，因每代的教王都鼓励科学研究，所以两国的首都巴格达(Baghdad)和科尔多瓦(Cordova)各国留学生云集，成为当时的文化中心．阿拉伯有欧洲文明的继父之称．在十三世纪，Alphonso (1252—1284) 邀请学者 Islamic 和 Hebrew 来西班牙宫廷，把他们的代数学、医学、天文学著作翻译成西班牙文,这使他们获得 Alphonso 圣人的尊称．

专就数学来说，教王 Al Mansūr (754—775) 在位时，从东罗马帝国传来的 Euclid 的《几何原本》(Stoicheia)和从印度传来的 Brahmagupta 的《Brahma 修正体系》(Brahma-sphuta-Siddhânta) 等著作,使希腊数学和印度数学在巴格达首次接触．在东罗马帝国和叙利亚收藏的许多数学著作(包括希腊文献)都被译成阿拉伯文．从这些著作中，虽然很难看出科学的本质进展,但是它们流传到欧洲,促进了欧洲数学的兴起和发展．

在 Mahommed (570—631) 以前，阿拉伯似乎没有数的记号．直到处于埃及和希腊的势力之下时，才引入数的记号．印度的数字同 Brahmagupta 写的书籍一起,传到阿拉伯．在这里经过一系列的改革,传入欧洲,成为今日我们使用的**阿拉伯数字** (Arabian cypher)．

在阿拉伯数学中，代数学是最先进的．可以说,在 820 年，从 Alkwarizmi 写的《代数学》(Al gebr w'al muquabala) 一书问世起,代数学就开始了.algebra 这个术语就起源于该书.这是用阿拉伯文写的最早的数学书，主要内容为代数方程的各种解法．"al gebr" 是表示把负项移到方程的另一边且改变它们的符号,"al muquabala" 是表示合并方程两边的同类项，简化方程．象这样，就能把二次方程化为下面三种类型：$x^2 = px + q$，$x^2 + q = px$，$x^2 + px = q$ (这里 p，q 为正数)．其解法不用算式只用语言表示．他们好象是知道二次方程有两个根，但仅采用正根，当两个都是正根时，取小的作根．这种解法的证明是用几何方式给出的，这可能是从希腊学来的．

几何学的发展次于代数，作为 Euclid 的《几何原本》中最根本的论证方法没有被阿拉伯人接受．Apollonios 的圆锥曲线论虽然也翻译成阿拉伯文，但几何学在这一地区没有取得本质的进步．引人注目的贡献仅是《Rubā'iyāt》的作者、诗人 Omar Khayyám (1040?—1123(24))，他运用圆锥曲线解出三次方程 $x^3 + bx = a$．

在三角学方面，值得称赞的是 Al Battani (约 858—929)的功绩．他学习过 Ptolemaios 的《数学汇编》(Megalē syntaxis) 的阿拉伯文译本《大汇编》(Almagest)．该书也是天文著作.对于平面三角学，他没有著名的结果;可是,在球面三角学中，他却获得很多成果．例如公式

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

等．而这些成果在《大汇编》(Almagest) 中是没有提到的．

【参】[1] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, Teubner, 第三版, 1907; [2] G. Sarton, Introduction to the history of science I. From Homer to Omar Khayyam, Carnegie Institute of Washington, 1927.

印度的数学 [英 Indian mathematics 法 mathématiques hindoues 德 Indische mathematik 俄 математика индии 日 インドの数学] 印度虽然是最古老的文明发源地之一，但一般认为是一个年代不详、缺少历史记载的国家．它的数学和历法好象是在婆罗门教的影响下发展起来的．同中国、近东的来往还不清楚．含有计算意义的字，例如 "ganita" 在古代宗教著作中已出现，但要查明 ganita 这个字出现的年代是困难的．在公元后，ganitia 被分为 "Pâti-ganita"(算术)，"Bija-ganita"(代数)和 "Krestra-ganita" (几何)三类，稍微有点学科体系的样子．称为"因明"的逻辑学在信仰佛教的地区发展起来了，但也不一定能说同数学有关系．希腊式的论证几何学并不发达，而使用记号的代数学和进位制的记数法却发展起来了．著名的

学者，六世纪有 Ârya-Bhatta（476 左右—550 左右）、七世纪有 Brahmagupta（598—660 左右）、十二世纪有 Bhâskara-Acharya（1114—1185）等.

在几何学方面，主要是面积的计算. Ârya-Bhatta 曾经算出 π 为 3.1416，Brahmagupta 求出圆内接四边形面积的计算公式，Bhâskara 给出 Pythagoras 定理的一个证明，这些都是引人注目的.

在三角学方面，Ârya-Bhatta 曾制作从 0° 到 90° 之间相隔为 3.75° 的正弦表. "sine" 这名词与 Sanskrit jya 有关，而 Sanskrit jya 系指二倍弧所对弦的一半. 现在把正弦（sine）定义为这种弦的一半，而在印度当时就已经开始这样做了.

在代数学方面，印度的贡献是很大的. 即使说到代数，开始时也没有运算记号，而是用语言来叙述方程的解法. Brahmagupta 研究了 Pell 方程† $ax^2 + 1 = y^2$. Bhâskara 知道二次方程可以有正负两个根，但他不取负根. 他摆脱了语言的叙述而引入记号法则.

在印度的数学中，表示空位的记号写成 0，自公元前 200 年左右就已经使用了. 在三世纪出版的 Bakhshâli 的书籍中，最早把 0 作为数字来使用. 如果用现在的记号来写，那么 0 被定义为 "$a - a = 0$". "0 的运算法则"，表示为 $a \pm 0 = a$，$0 \times a = 0$，$\sqrt{0} = 0$，$0 \div a = 0$. 对于 $a \div 0$，Brahmagupta 认为"不能用 0 去除"，在算术里禁止用 0 去除，但在代数里，他把 $a \div 0$ 称为 taccheda. 而 Bhâskara 则把它称为 khahara，使得它具有与无穷大相似的作用. 有的历史学家认为，无限大和无限小的概念，在印度数学中早就有了. 另外，印度的进位制记数法产生的原因之一，也有学者认为：是由于印度的数字，每位都有不同的名称. 印度的记数法在文艺复兴时期经阿拉伯传入欧洲，对数学发展产生了极大的影响.

【参】［1］ M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, Teubner, 第三版, 1907, ［2］ G. Sarton, Introduction to the history of science I, From Homer to Omar Khayyam Carnegie Institute of Washington, 1927; ［3］ B. Datta-A. N. Singh, History of Hindu mathematics I, II, Lahore, 1935—1938 (Asia Publ. House, 1962).

中国的数学 ［英 Chinese mathematics 法 Mathématiques chinoises 德 chinesische Mathematik 俄 китайская математика 日 中国の数学］

【中国古代数学的初期阶段：远古—春秋战国】 中国是世界著名的文明古国之一，数学的发展源远流长. 在从事社会劳动生产活动的过程中，人们逐渐有了数量的概念和认识了各种简单的几何图形. 特别是农业的逐渐发达（浙江河姆渡遗址表明，距今七千年以前，农业生产已经具有相当的规模），需要与之相应的天文历法，需要知道适于农业的季节安排，而最简单的天文学也是脱离不开数学的. 土地面积、粮仓的大小、建筑材料的长短和方位的测定等等也都需要数学. 西安半坡遗址（距今五千年前）出土的陶器上刻划着一些陶文，有一些显然是表示数字的符号，例如用一划表示一，两划表示二等等.

大约在公元前两千年的时候，在黄河的中下游一带开始出现了中国历史上第一个奴隶制的王朝——夏. 伴随奴隶制而出现的社会分工，使大规模的土木工程、水利建设成为可能. 传说夏禹治水时就用了准绳、规矩，并且用到了勾股测量（见《周髀算经》等）.

商——中国历史上第二个奴隶制王朝（公元前十六世纪至十二世纪）. 在商代晚期已经有比较成熟的文字，这就是刻在龟甲和兽骨上的甲骨文. 甲骨文表明，商代人们所使用的记数法已很完备. 其中最大的数目是三万. 记数的原则是遵循十进制. 例如"八日辛亥允戈伐二千六百五十六人"是说八日辛亥那一天，在战争中杀了 2656 个俘虏. 中国古代的记数法，从一开始就应用完备的十进制，这一点和巴比仑和古埃及所用的记数方法相比，有着显著的优越性. 西周时期（公元前十一世纪至八世纪）青铜器上面的文字——金文中的记数方法和商代完全一致，以后一直沿用下来，直到今天.

除了整数之外，我国古代对分数的认识也比较早．同时还掌握了整数和分数的四则运算．春秋时代的齐桓公就曾把会背诵“九九”乘法歌的人当作贵客请进“招贤馆”，虽然这在当时已经不算是什么了不起的学问．在《管子》、《荀子》等一些古书中也都有“九九”中的个别句子．

在中国古代，实际的计算是用具有独特风格的计算工具——算筹来进行的．“筹”——也就是一些小竹棍或木棍(后来也有用骨或金属材料制作的)．中国古代“算”字也常被写成“筭”，是竹字头加一个弄字，后来有人进行解释说：“筭”这个字“从竹从弄”是为了取其“常弄不误”的意思．用算筹来表示数目，有两种形式，具体的摆列方法如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

个位数字用纵式，十位数字用横式，百位数字用纵式，千位数字再用横式，纵横相间；遇到零就把这一位空起来．这样就可以表示任何数目，从左往右摆列，和现代笔算记数法一致．

根据古代文献记载以及钱币上铸造出的数字纹样和陶器上留下的陶文记载，可以肯定，最迟在春秋战国时代(公元前八世纪至二世纪)，特别是在这一时代的晚期，人们已经十分熟练地运用算筹来进行计算了．在战国时代楚国的墓葬中，和其他文具一道，已经有竹算筹的实物出土．

十进地位制的算筹记数法和在此基础上的各种运算实在是中国古代数学的伟大成就．许多数学史家认为，这是中国对世界数学发展的一项杰出的贡献．

【中国古代数学体系的形成：秦—两汉】中国的封建社会大约开始于春秋战国之际，在两汉时期得到了巩固和发展．随着生产力的不断提高，各种科学和技术也不断向前发展．农业生产要求更精确的历法，大约在战国时代的晚期，人们就已经掌握了设定每年日数为 $365\frac{1}{4}$ 日的“四分历”．随着天文学的发展，数学知识也不断丰富．流传到现在的一部最早的数学著作，同时也是天文学著作——《周髀算经》，正是在这样历史条件下出现的．

《周髀算经》包括了

$$345\frac{348}{940}\times 13\frac{7}{19}\div 365\frac{1}{4}$$

之类的复杂的分数计算，还包括了利用勾股定理来进行测量的一些计算．

现传本的《周髀算经》是经过后人增补过了的．据考证，它成书的年代大致是公元前一世纪．《周髀算经》的出现说明中国古代数学已经发展到相当高的水平．

但是，同一时期出现的另一部数学著作却更为重要．它就是举世闻名的《九章算术》．

《九章算术》的作者和准确的成书年代都已不可考．它是以长时期积累起来的数学知识为基础，又经过许多修改和补充才最后完成的．大概到了公元一世纪的时候，《九章算术》的内容就和现在流传下来的本子基本相同了．

《九章算术》是采取问题集的形式编写的．这部书一共收有 246 个问题，分为九章，即九大类．其中第一章“方田”：各种形状的田地面积计算；第二章“粟米”：各种粮食谷物间的按比例交换；第三章“衰分”：按比例分配问题；第四章“少广”：开平方、开立方；第五章“商功”：体积计算问题；第六章“均输”：按比例摊派赋税和徭役；第七章“盈不足”：根据两次假设求解问题；第八章“方程”：求解一次方程组；第九章“勾股”：有关勾股测量的各种问题．可以看出其内容非常丰富，几乎包含了当时社会生活的各个方面．

从数学成就上看，在《九章算术》中记载了当时世界上最先进的分数四则和比例算法．各种面积和体积的计算以及关于勾股测量的各种计算也比较先进．《九章算术》中最重要的成就是在代数方面，在“方程”章中所引入的负数的概念以及正、负数加、减法法则，在世界数学史上都是最早的记载．其中，关于一次方程组

的解法，和现代中学讲授的方法基本相同，比西方同类结果要早一千五百多年.

《九章算术》的出现标志着中国古代数学体系的形成. 它对以后的中国数学发展的影响，正如同 Euclid《几何原本》对西方数学的影响一样，是非常深刻的. 在一千几百年之间，《九章算术》一直被当作教科书. 东方的朝鲜和日本也曾拿它作为教科书. 其中的某些算法，例如分数和比例，很可能先传入印度再经阿拉伯国家而传入欧洲；"盈不足"算法在阿拉伯和早期的西方数学著作中，被称为"中国算法".

作为一部世界科学名著，《九章算术》现在已经被译成许多种文字.

【中国古代数学的进一步发展：魏晋 — 南北朝 — 隋唐】 中国古代数学到了魏晋南北朝时期又有了新的发展，这突出地反映在著名数学家刘徽和祖冲之的工作之中.

刘徽的工作主要是为《九章算术》所作的注释和《海岛算经》. 根据《隋书 · 律历志》的记载，他注《九章算术》的时间是公元 263 年(三国时代曹魏的景元四年).

在刘徽为《九章算术》所作的注释中，包含了许多天才的创见，在一定程度上，可以把刘徽的注释看作是对《九章算术》中许多算法的一些证明.

刘徽的最主要成就之一是他提出了计算圆周率的科学方法——"割圆术". 他从圆的内接正六边形算起，依次将内接正多边形的边数加倍，计算了圆内接正 12 边形、24 边形、48 边形、直到 96 边形. 如设圆的半径为 r，内接正 n 边形一边之长为 l_n，边数加倍后 $2n$ 边形一边之长为 l_{2n} (如图 1，$l_n = PQ$，$l_{2n} = PR$)，刘徽由 l_n 算得 l_{2n} 的步骤可以归纳为下列公式：

$$l_{2n} = \sqrt{\left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}.$$

又，我们同时假设圆的面积为 S，内接 n 边形面积为 S_n，$2n$ 边形面积为 S_{2n}，则刘徽已经得出圆面积 S 满足下列不等式：

$$S_{2n} < S < S_{2n} + (S_{2n} - S_n);$$

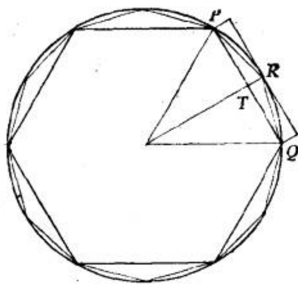


图 1

而 S_{2n} 可以由下列公式给出：

$$S_{2n} = S_n + \frac{1}{2} l_n \cdot RT,$$

其中

$$RT = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}.$$

刘徽认为如此逐渐增加内接正多边形的边数："割之弥细，所失弥少. 割之又割以至于不可割则与圆合体而无所失矣"，这里，他首次在我国数学史上将极限的概念用于近似值的计算. 刘徽割圆术只需计算内接多边形，这与古希腊 Archimedes 同时需要计算内接多边形和外切多边形的方法相比，可以说是事半功倍.

刘徽的另一项成就就是他所著的、一直流传到现在的《海岛算经》. 这是一部记述测量高深远近，解决各种测量所需解决的数学问题的著作. 中国古代虽然没有三角学，但是利用相似直角三角形的性质以及勾股定理，很好地解决了问题. 近年出土的长沙马王堆西汉古地图，说明了我国古代地图学的伟大成就，而《海岛算经》所记述的，正是地图学发展所需要的数学手段.

魏晋南北朝时期还出现了另一位著名的数学家祖冲之(429—500，南朝宋齐时人).

祖冲之的一项世界闻名的杰出贡献乃是把刘徽割圆术成果又向前推进一步. 祖冲之的结果记录在《隋书 · 律历志》之中，他的结果相当于算得：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927,$$

祖冲之圆周率达到了小数点后六位准确. 这一记录直到十五世纪方才被阿拉伯国家的数学家

al-Kashi 所打破．祖冲之的记录保持了将近一千年．按当时计算上的习惯，祖冲之还算得了两个分数值的圆周率：

$$密率(即较精确的) = \frac{355}{113},$$

$$约率(即较简便的) = \frac{22}{7}.$$

$\pi = \frac{355}{113}$ 也可达到小数点后六位准确，是一个很好的分数近似值．在欧洲，直到十六世纪方才被德国数学家 Otho 得到，这比祖冲之晚了一千多年．

祖冲之的儿子祖暅也是一位有名的数学家．他推进了刘徽关于球体体积计算方面的成果，得出了正确的公式．在这一工作中，祖暅应用了如下的一个公理："两个立体，如果等高处的截面积相等，则二立体的体积相等"（幂势既同则积不容异）．过去一般认为这一公理是意大利数学家 Cavalieri (1598—1647) 首先引用的．但是祖暅早在此前一千年就已用它来解决球体积的计算．在唐代数学家李淳风的《九章算术》注中，详细地记述了祖暅的这项成果．所以，Cavalieri 公理应该改称祖暅公理．

祖氏父子同时也是著名的天文学家．祖冲之编制的《大明历》是当时较好的一部历法．祖冲之为申诉《大明历》的正确，和朝廷中的权贵所进行的那场辩论，更为古往今来的科学工作者所赞许．"原闻显据，以窍理实"，"浮词虚贬，窃非所惧"，祖冲之写下的这两句名言，充分表现了一个科学家不畏权贵、追求真理和实事求是的崇高品质．

中国古代数学到了隋唐时代，由于有了汉唐之间千余年的不断发展，以《九章算术》为中心的体系更加完备．《汉书·艺文志》中记载的数学书籍还只有两种，《隋书·经籍志》已增至十九种，《新唐书·艺文志》更增加到 35 种．其中以唐代数学家李淳风奉命注释的"十部算书"最为有名．除上面已经论及的《周髀》、《九章》、《海岛》之外，流传至今的还有《孙子算经》、《张邱建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算术》等等．祖冲之曾著有《缀术》一书，也是"十部算书"之一，可惜已经失传了．

在"十部算书"中也记述了汉唐之间的一些数学成就．例如《孙子算经》就记述了关于求解联立一次同余式的著名的"孙子问题"．运用现代的数学符号，"孙子问题"可叙述为：设 N 为未知数，但知 N 以 P_i 为模与 a_i 同余，即

$$N \equiv a_i \pmod{P_i}.$$

其中 $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ 且诸 P_i 两两互素，求 N．"孙子问题"和当时历法计算中关于"上元积年"的计算有密切联系．《孙子算经》中只记述了数据比较简单的一个特例，更深入的研究出现在后来南宋数学家秦九韶的著作之中．

唐初数学家王孝通所著《缉古算术》，从开挖运河和修筑堤坝的具体问题出发，提出并解决了三次方程的解法问题（各项系数均不得为负数）．

隋唐时代的天文学家，在编制历法的过程中（刘焯《皇极历》，600 年；一行《大衍历》，727 年；徐昂《宣明历》，822 年）应用了二次的内插法．内插法的应用在宋元时期有更大的发展．

从隋代开始，在教育制度上，开始在国家的学校（国子监）中设立数学的专门科目，并且规定了招生、学习、毕业和考试等制度，指定"十部算经"等为教科书．这种制度在唐宋两代都曾有所继续，并曾流传到朝鲜和日本．

【中国古代数学的兴盛时期：宋、元；计算工具的演进：明】 中国古代数学到了宋、元时期又有了重大的发展．在明代中叶珠算广泛流传之前，中国古代数学一直是以筹算为主要的计算工具，并以此为中心形成了在世界数学史上独具一格的特色．宋、元数学，可以说是这种以算筹为主要计算工具的中国古代数学的极盛时期，出现了秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰等著名的数学家和他们所编著的数学著作．这些著作包括：《数书九章》（秦九韶，1247 年）、《测圆海镜》、《益古演段》（李冶，1248，1259 年）、《详解九章算法》、《日用算法》、《杨辉算法》（杨辉，

1261, 1262, 1274—1275 年)、《算学启蒙》、《四元玉鉴》(朱世杰, 1299, 1303 年) 等等.

宋、元数学取得了很多具有世界意义的成就. 首先应该叙述的就是高次方程的数值解法. 这一方法是在古代开平方、开立方和求解二次、三次方程(在中国古代被称为“开带从平方”“开带从立方”)方法的基础上发展而来的. 根据杨辉书中的记载, 大约在十一世纪时贾宪就掌握了通常人们称之为 Pascal 三角形†的“开方作法本源图”(如图 2, 这张数表对开高次方来说是必需的),同时贾宪也掌握一种和现在通常称之为 Horner 方法完全相同的开方的方法, 虽然他举出的例题还只是限于开三次方.



图 2

到了十三世纪,在秦九韶的《数书九章》中更把贾宪的开高次方的新方法(“增乘开方法”)推广到求解一般高次方程的一种普遍的数字解法. 演算的步骤和 Horner 方法 (1819 年) 全然相同, 但比这位英国数学家却早了近七百年.

用算筹来表示一个方程, 如李冶的《益古演段》和秦九韶的著作中所表示的, 通常用在常数项系数旁记一“太”字或在一次项旁记一“元”字,并用常数项在上, 一次项在下, 依次把二次、三次以至高次的系数向下,用一个由算筹摆(或记)成的竖式来表示一个方程或多项式的. 在这种表示方法的基础上,宋、元数学家建立了世界上最早的多项式代数运算, 并用这种方法列出方程. 在欧洲数学中, 要到十六、十七世纪才做到了这一点;当然,欧洲数学家采用了新的数学符号,这要比宋、元数学家优越得多.

宋、元数学家很快就把只能处理一个未知数的“天元术”扩展到二元、三元和四元情况中去. 他们用天、地、人、物来代表我们现在表示未知数时经常用的 x, y, z, u; 并且如表 1 所示, 元代数学家朱世杰用平面上各方格的相应位置摆出四元多项式或一个四元方程来, 而 yz 或是 xu 之类的各项则放在交界夹缝处. 由于表示方法的限制,使它不能多于四元, 所以, 可以把朱世杰所著《四元玉鉴》中记述的四元高次方程解法看成是中国筹算代数学的最高峰. 朱世杰的成果比西方同类结果,要早五百年.

表 1

y^2u^2	yu^2	u^2	zu^2	z^2u^2	z^3u^2
y^2u	yu	u	zu	z^2u	z^3u
		yz			
y^2	y	太	z	z^2	z^3
	xu				
xy^2	xy	x	xz	xz^2	xz^3
x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	x^2z^3

秦九韶的“大衍求一术”完满地解决了“孙子问题”(求解联立一次同余式问题), 是宋、元数学的另一项重大成就. 在如前所述的孙子问题中,如能找出一串数值 α_i, 使 α_i 满足:

$$\alpha_i \frac{M}{P_i} \equiv 1 \pmod{P_i},$$

其中 M 是诸 P_i 的乘积, 则:

$$N = \sum a_i \alpha_i \frac{M}{P_i} - KM$$

就是问题的解, 其中 K 为自然数, 适当地选取 K, 可以得到满足条件的 N 的最小正整数. 在求 α_i 时秦九韶用了和辗转相除相类似的方法.

现在可以证明：秦九韶的方法是严谨无误的．秦九韶的工作比欧洲同类结果早五百余年，因此在西方经常把孙子问题的解法称之为“中国剩余定理”，即**孙子剩余定理**（Chinese remainder theorem）．

宋、元数学家在高阶等差级数求和招差法方面也有突出的贡献．元代天文学家郭守敬在编制《授时历》（1280年）时曾用到三次差的内插原理．在朱世杰《四元玉鉴》中对各种高阶等差级数的求和问题都有所探讨，较重要的成果是他求得了如下公式：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1)$$
$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$$

朱世杰求得当 $p=1,2,\cdots,6$ 时的一系列公式．朱世杰在解决具体应用问题时，还用到了四次差的招差法，相当于列出了公式：

$$f(n)=n\Delta+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2$$
$$+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3$$
$$+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4.$$

由于朱世杰正确地指出了上述招差公式中各项系数恰好依次等于前述一串高阶等差级数求和公式的结果，因此可以认为他已经掌握了任意高次差的招差公式．这比欧洲同类结果也早五百余年．

宋、元数学的这些杰出成果，使中国数学在当时的世界上处于遥遥领先的地位．西方科学史家在评论宋、元数学的成就时说：这些著作不仅是中国的，而且也是世界中世纪最杰出的著作．中国古代数学，经过汉唐宋元近一千五百年的发展取得了硕果累累的成就，这些成果不仅在东方对朝鲜、日本产生影响，而且经过印度和中世纪伊斯兰国家，传入西方，对世界数学的发展作出了贡献．

由唐代中叶开始，特别是由于宋代以来经济的迅速发展，需要对计算工具进行改进．经过长时期的演进，到了元明之际，便完成了由筹算到珠算的转变．到了明代中叶，珠算已经在全国普遍使用．珠算携带方便，和口诀相配合可以作到计算迅速．在世界同类计算工具中，可以说珠算是最好的．

由于珠算的流行，筹算几乎绝迹，建立在筹算基础上的古代数学传统也逐渐失传．尤其是明代八股取士的科举考试制度和主观唯心论哲学思想的长期泛滥，认为一切专门学问都是“奇技淫巧”．到明清之际西方数学开始传入我国的时候，国家的司天台已经很少有人可以掌握历法的编制工作了．

【西方数学的传入时期：明末清初—1919年】 在中国数学长期停滞不前的时候，西方国家却在十六、十七世纪由于资本主义生产方式的产生和发展，包括数学在内，科学和技术有了很大的发展．从十六世纪上半叶开始，西方国家便开始到远东来寻找原料和海外市场．

1581年耶苏会传教士利玛窦（Matteo Ricci）来我国传教．之后又有一批传教士陆续前来我国．为了在中国站稳脚根，他们建议用西洋方法来改革当时已很不准确的历法．作为改历准备之用，他们翻译了一些天文数学书籍．

1606年 Matteo Ricci（1552—1610）和我国的徐光启合作共同翻译了古希腊著名的数学著作《几何原本》（只译了前六卷）．当时还编译了《同文算指》（一部介绍西方算术知识的书）等书．

入清以后，传教士仍然受到清王朝的信任继续进行改历工作．在十六、十七两个世纪传入我国的数学知识有：笔算、初等代数学、几何学、三角学和三角函数表、对数以及一部分圆锥曲线学说等等．

到了清雍正年间，由于清朝政府采取了闭关自守政策，西方数学知识的传入停顿了百余年．由于乾嘉学派的兴起，一部分学者又转向古代数学的研究；另外也有一部人对前阶段输入的数学知识进行整理和研究．他们在整数论、方程论、级数、三角学、对数等方面也都有些成果．这些成果虽然已落后于西方，但也还都可以算是他们独立研究的成果．

1840年的鸦片战争，打开了清王朝闭关自守的大门，西方资本主义列强对中国的侵略日益加深．西方数学的传入也开始了第二个阶段．解析几何学和微积分学等开始传入我国．李兰善（1811—1882年）、华蘅芳（1833—1902年）等人在介绍近代西方数学知识方面作了不少工作．

与此同时，传教士和教会在中国开办了许多学校，到了十九世纪末，中国自己也废除了科举考试，改革学制，兴办新式学堂．到了二十世纪初，各类学校所用数学教科书，大致上已和世界各国相同．到外国专攻数学的留学生日渐增多，到了二十世纪二十年代初，中国数学家已经在现代数学研究领域内开始作出成绩．

新中国成立之后，中国数学更走上了蓬勃发展的新时期．

【参】［1］ 钱宝琮主编：中国数学史，科学出版社，1964；［2］ 李俨：中国数学大纲（上、下册），科学出版社，1958；［3］ 李俨：中算史论丛（1—5卷），科学出版社，1954—1955；［4］ Joseph Needham: Science and civilisation in China, 第三卷，数学部分，1959；［5］ Y. Mikami（三上義夫）：The development of mathematics in China and Japan, Teubner, 1913 (Chelsea, 1961).

日本的数学　［英 mathematics developed in Japan　法 mathématiques développées au Japon　德 die in Japan entwickelte Mathematik　俄 японская математика (развитая в отличие от западной до 19го века)　日 和算］　在日本，受西洋数学影响以前，按照自己的特点发展起来的数学称为**和算**（本朝数学）．日本数学在奈良时期从唐朝传入，此后不久便衰落了．另一发展时期，是从十三世纪战国时期到十七世纪德川初期，那时算盘和数学书（算术启蒙、算法统宗等），从宋、元朝传入，并吸收中国的使用算筹的代数（天元术），使得日本的具有独特风格的记号代数（称为演段术或者点窜）得到发展．

和算的基本思想，其核心是由関孝和、建部賢弘、久留島義太等形成的，接着由安島直円、和田寧等加以发展，所得成果是显著的．和算的特点，也可以说是日本艺道．因为它不象希腊和西欧的数学那样，构成具有独特的方法且与哲学、自然科学有密切联系的庞大科学体系，所以它的发展是有限的．随着江户幕府末期西洋数学的引进，就急速衰退；到明治政府（1867—1912）整顿学制以后，和算瓦解了．

在早期的和算著作中，吉田光由（1598—1672）写的《塵劫記》（1627年初版），对普及算盘和提高数学的兴趣起了很大的作用．

関孝和（1642？—1708）是群馬県藤岡人．有人说他曾拜高原吉種为师，也有人说他无师自通．其成就大致有以下几方面：1）引进傍书法和代数记号，创立演段术；2）发现行列式；3）完成与 G. W. Horner 类似的关于数字系数方程的近似解法；4）发现与 Newton 迭代法†相类似的方法，求解方程；5）确立整式的导数仍是整式，并定义多项式的判别式；6）发现方程正根、负根存在的条件；7）提出求极大值和极小值的方法；8）代数方程的变换理论；9）发现零约术（连分数理论）；10）不定方程的解法；11）Bernoulli 数†的引入；12）正多边形的一般研究；13）圆周率和球体体积的计算；14）相当于弧线的 Newton 插值公式†；15）发现椭圆的某些性质；16）Archimedes 螺线的研究；17）相当于 Pappus-Guldin 定理的圆环、弧环求积公式；18）幻方的研究；19）某些数学游戏的理论研究，例如"继子立"（立后嗣法）、"目付字"（找字法）等．

建部賢弘（1664—1739）系関孝和的学生，最早以"圆理"命名的书《円理綴術》的作者，得出圆理公式：

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \frac{x^2}{2!} + \frac{2^2x^4}{4!} + \frac{2^2\cdot 4^2\cdot x^6}{6!} + \cdots,$$

此外，还得出三角法公式及近似公式，以此计算了11位的三角函数表．他协助関孝和工作，汇编《大成算経》二十卷．还著有可以说是和算方法论的《不休綴術》，其中 π 的值计算到小数点后42位．

久留島義太（？—1757），受建部学生中根元圭（1662—1733）的影响，是一个有独特见解

的学者．他从推广建部所得的弧线近似公式开始，发展了关于圆理的极数术(极大极小问题)；改进了行列式的理论，对方程和公式的分类整理等进行了研究．例如：不使用 Bernoulli 数，得到

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \cdots\cdots + n^p;$$

又从

$$x + (x + c) + \cdots + (x + (n-1)c) = a,$$
$$x^k + (x + c)^k + \cdots + (x + (n-1)c)^k = b$$

中消去 x，得到 a, b, c, n 的关系式．他在 L. Euler 以前发现了 Euler 函数 $\varphi(n)$，在 P. S. Laplace 以前得到了行列式的 Laplace 展开定理．用圆理写成的重要著作《方円算経》(松永良弼 (1694—1744) 著) 中就有久留島的贡献，该书中 π 值计算到小数点后 50 位．

经过建部、中根、久留島、松永等人，関派在江户(东京的旧称)逐渐形成巩固学派，成为和算的中心．山路主住 (1704—1772) 得到中根、久留島、松永三人的秘传．他的学生有馬頼僮 (1712—1783) 在《拾璣算法》中最先发表関派的成果．和算家又把他们解决的数学问题刻在书简上，献给神社、佛堂，这种作法，以后特别盛行．

安島直円 (1739—1798) 也是山路的学生，他作了很多独创的工作：改良圆理，简化它的理论，扩大它的应用范围；研究相当于二重积分的求体积问题；导出指数为 $1/n$ 的二项式定理；编制 14 位对数表；讨论不定方程等．论证几何学在和算体系中是看不到的．但是，安島和他的学生通过考虑彼此相切的几个圆，处理了一些几何问题，例如 Malfatti 问题．

和田寧 (1787—1840) 就学于安島的学生日下誠 (1764—1839)，他作出包含 100 个以上定积分的表，例如

$$\text{健表}\quad \int_0^1 x^p(1-x)^q dx,$$

$$\text{竜表}\quad \int_0^1 x^p(1-x^2)^q dx$$

等，他还进一步改进了圆理．但即使在这时期，也没有确切证据认为那时已经知道了微积分学的基本定理．

関派以外，与関同时代的田中吉真(1651—1719) 及其同派的井関知辰等是引人注目的人物．田中在幻方、行列式等方面同関几乎是齐名的人物，但他的著作现存的很少．井関对于行列式有世界最早的著作《算法発揮》(1690)．稍后，在大阪有宅间派．伊能忠敬 (1742—1821) 曾因画出第一张日本精确地图而闻名，他的老师高橋至時(1764—1804)曾向宅间派学习过，并且属于这派．到安島时代，会田安明(1747—1817)是这派的最上流人士，曾同関派的藤田貞資(1734—1807) 相抗衡．

到幕府末期，和算学者对几何图形的研究盛行起来．日下的学生長谷川寛 (1782—1838) 的极形术，日下另一学生内田五観 (1805—1882) 的弟子法道寺善 (1820—1868) 的算变法出现了．后者所用的方法相当于现今的反演†法．長谷川著有《算法新書》，其中也有圆理的解释，读者广泛．

除了天文学、历法和对数表以外，西洋算法对和算的影响几乎没有看到．但在幕府末期，一些和算学家和海军人士一起积极地引进洋算，这对奠定以后日本的数学基础作出了贡献．

明治以后，以菊池大麓 (1855—1917)、林鶴一 (1873—1935)、藤原松三郎 (1861—1933) 等为主，设法保存和算文献，而且为了阐明其内容作出了很大的贡献．这项工作直到今日还没有完成．

【参】 [1] 遠藤利貞，增修日本数学史，新版，恒星社，1960；[2] 林鶴一博士和算研究集録，開成館，1937；[3] 日本学士院編，藤原松三郎著，明治前日本数学史，1—5，岩波，1954—1960；[4] 加藤平左衛門，和算の研究，行列式及び円理，開成館，1944；[5] 加藤平左衛門，和算の研究，雑論 I—III，日本学術振興会，1954—1956；[6] 加藤平左衛門，和算の研究，方程式論，日本学術振興会，1957；[7] 加藤平左衛門，和算の研究，整数論，日本学術振興会，1946；[8] 小倉金之助，日本の数学，岩波新書，1940；[9] 三上義夫，東西数学史，共立出版，1928；[10] Y. Mikami 三上義夫，The development of mathematics in China and Japan, Teubner, 1913 (Chelsea, 1961).

文艺复兴时期的数学　[英 mathematics of Renaissance　法 mathématiques des Renaissances　德 Mathematik der Renaissance　俄 математика в эпохе Возрождения　日 ルネッサンスの数学]　十三世纪中叶，由于 Thomas Aquinas (1225?—1274) 等人的工作，经院哲学虽已达到了完全成熟的阶段，但在同世纪后半叶，英国的 Roger Bacon (1214—1294) 已宣传实验在科学中的重要性，在他的著作"Opus majus"中评击 Aquinas 哲学，反对经院主义，有力地推动了数学研究．文化史上的文艺复兴开始于十四世纪的意大利，欧洲各国的文学艺术在十五、十六世纪已十分繁荣，但数学和自然科学领域中出现新气象，还是在十七世纪．不过，从十五世纪以来，印刷术的发达，Euclid, Archimedes 的希腊古典著作的翻译出版，阿拉伯科学的输入，都为它们准备了条件．

十五世纪中叶，德意志僧侣 Nicolaus Cusanus (1401—1464) 讨论了无限性，对求积问题和无穷级数的收敛性也进行了研究．同时，德意志学者 Regiomontanus (1436—1476) 开始写出与天文学系统独立的三角学书．Leonardo da Vinci (1452—1519) 是这个世纪出现的非凡天才．在他的手稿里，也有关于力学、几何光学及透视画法的研究．与 Vinci 差不多同时代的德国画家 A. Dürer (1471—1528)，也著有关于透视画法的教科书．十五世纪末 (1494)，出版了受到阿拉伯数学影响的意大利人 Luca Pacioli (1445?—1514) 的算术书《算术集成》(Summa de Arithmetica) (1494)，它包含有实用算术、复式薄记，是出版最早的数学书之一，曾广泛流传．

在十六世纪，最著名的成果是意大利数学家 N. Tartaglia (1506—1557), G. Cardano (1501—1576), L. Ferrari (1522—1565) 等解出三次和四次代数方程．Cardano 在他的著作《大衍术》(Ars Magna) (1545) 中发表了三次方程的解法，而解法的发现应归功于 Tartaglia．Cardano 发表这个解法是违反 Tartaglia 意愿的．这件事情，成了数学史上有名的趣闻．这虽是个人的事情，但重要的是，自希腊时代以来比所熟知的二次方程解法更高深、更本质的问题，由这一世纪的数学家解决了．直到十六世纪，法国的 F. Viète (1540—1603) 才好容易把代数学系统化．不过，在十五世纪末叶，受印度和阿拉伯影响的实用数学已在民间普及，同时较高深的数学研究，在欧洲各地，特别在意大利的大学里，已经相当发展．十六世纪，N. Copernicus (1473—1543) 发表太阳中心说 (1543)．这个理论的不屈的倡导者和坚信者 G. Galilei (1564—1642) 也是在这个世纪诞生的．Copernicus 在波伦亚 (Bologna) 大学、帕多瓦 (Padva) 大学、费拉拉 (Ferrara) 大学学习过；Galilei 曾在比萨 (Pisa) 大学读书，并曾在比萨大学、帕多瓦大学、佛罗伦萨 (Florence) 大学任教．十三世纪初，从阿拉伯传来的记数法，到 S. Stevin (1548?—1620?) 时，才作为系统的十进制而确立．后来印刷术的进步，对于确定数字的字形起了作用．

【参】 [1] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik II, Teubner, 第二版, 1900; [2] J. Cardan (G. Cardano), The book of my life (trans. J. Stoner), Dover, 1963.

十七世纪的数学　[英 mathematics in 17th century　法 mathématiques au 17ᵉ siècle　德 Mathematik im 17. Jahrhundert　俄 математика 17го века　日 17世紀の数学]　在科学史上，十七世纪有许多引人注目的事件．例如：G. Galilei (1564—1642) 提出实验力学，R. Descartes† (1596—1650) 创立解析几何学，P. de Fermat† (1601—1665) 和 B. Pascal† (1623—1662) 开拓概率论，Pascal 提出数学归纳法，I. Newton† (1642—1727) 和 G. W. Leibniz† (1646—1716) 发明微积分学．这些在数学史上都是值得大书特书的．从中世纪到本世纪，数学的历史好像停滞不前，但数学本身仍在不断发展．对十五世纪和十六世纪先驱者功业的挖掘和评价，现代的数学史家还在继续进行．

在 Galilei 以前，Tycho Brahe (1546—1601) 做了天体观测的精确记录．J. Kepler (1571—

1630）对这些记录加以研究、整理，并受到稍有一点神秘色彩的"宇宙和谐论"的影响，发现行星运动三定律．他还在"木桶的形状及其体积问题的研究"（1615）一文中讨论求体积的方法．与他同时代的 J. Napier（1550—1617）和 J. Bürgi（1552—1632）发明了对数，改进了天文学的计算． Napier 在引入对数时，使用速度的概念，在他们的思想中可以看出解析学的萌芽．Galilei 根据速度和加速度的概念奠定了近代力学的基础（《两种新科学的对话》（Dialogue on two new sciences），1638）．他自制望远镜，观测天体，发现木星的四颗卫星和太阳的黑子等．他大胆地拥护 N. Copernicus（1473—1543）的太阳中心说，因而受到宗教裁判，这是他一生中最大的事件，在历史上也是很有名的．他摆脱了 Aristoteles 的旧传统，确定实验和理论力学的基础，为 Newton 开辟了道路，这在科学史上具有极其深远的意义． Galilei 的学生 B. Cavalieri（1598—1647）在他的《不可分连续量的几何学》（1635）一书中，把源出于经院哲学的"不可分量"（indivisibilis）的观念应用于求积问题．这种思想也影响到 Pascal，J. Wallis（1616—1703）等．

Descartes 在《方法谈》（Discoursde la méthode）一书的附录之一的《几何学》（Géométrie）（1637）中，建立了解析几何学方法．坐标法的使用，可追溯到古代的珀加（Perga）的数学家 Apollonius．Fermat 也使用过同样的方法，而 Descartes 则第一次确切地陈述用方程表示一般图形的方法，迈出了超越希腊几何学的最重要的一步，他放弃用符号表示的量应当是一维的这个限制，从而超过了 F. Viète（1540—1603）．

Fermat，Pascal 和 Descartes 几乎是同时代的人物．Fermat 对数论作出卓越的贡献． Pascal 对 G. Desargues（1593—1662）学派的射影几何学进行独自的研究．概率论早期的研究，是从 Fermat 和 Pascal 之间的通讯开始的，两人都对那个世纪中发展起来的解析学作出了先驱性的贡献． Fermat 还讨论函数的极大、极小以及曲线的切线问题． Pascal 研究关于摆线的切线、重心以及求积问题． 他在流体静力学方面也有贡献． Pascal 还在射影几何学中积极地使用无穷远点的概念，他在"算术三角形"即所谓 Pascal 三角形理论中确切地陈述了数学归纳法．[H. Freudenthal 证明 [4] 数学归纳法的发现应归功于 Pascal，原亨吉还查清了发现的确切日期（[5]）.]

英国在 Newton 以前有 Wallis 和 I. Barrow（1630—1677）． Wallis 根据 Cavalieri 的方法，使用无穷级数和内插法，大胆推断，解决了很多求积问题．Barrow 是 Newton 的老师，他已接近于得到微积分学的基本定理，Newton 的发现，不少地方是由于他的启示． Newton 把相当于现在的微积分学称为"流数法"（method of fluxion），在 1669—1671 年已经完成，但在他死后（1736）才发表． 在 Newton 的主要著作《自然哲学的数学原理》（Principia mathematica Philosophiae naturalis）（1687）一书中虽然没有指出名字，但实际上使用了相当于流数法以及其逆的计算法，解决了二体问题． 该书是一部从力学定律讲起，包括月球运动和流体力学的巨著．

Leibniz 比 Newton 稍迟，独立地发现了微积分学．他的优越记号成为以后解析学发展的巨大推动力．记号 dx 和 $\int$ 都是 Leibniz 开始使用的．他在巴黎逗留期间（1672—1676），同 Pascal 所在的修道院 Port Royal 的神父 A. Arnauld（1612—1694）以及留在巴黎的荷兰物理学家 C. Huygens（1629—1695）等有交往，学习了 Descartes，Pascal 的成果． Leibniz 关于微积分学的最早论文于 1684 年在他创办和编辑的杂志"Acta Eruditorum"上发表．他创立的微积分学为 Bernoulli 一家和 L. Euler（1707—1783）等数学家继承，发展成为后来的解析学．

综上所述，本世纪的数学是沿着超越希腊传统的潮流而成长起来的（认识到数的重要性超过图形，积极地使用"无限"概念等）．由于重视与实验相结合，因此确立了数学在自然科学方法中的地位． 数学成为科学研究的推理根

据.

再者，在日本，由関孝和(1642? —1708)等人亲自创立的和算，虽然在这个世纪有所发展，但它缺乏在希腊数学中见到的那种传统和逻辑性，所以后来它的发展不能同西方的数学相比(→ 日本的数学).

【参】 [1] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Teubner, II, 1892; III, 1898; [2] P. L. Boutroux, L'idéal scientifique des mathématiciens dans l'antiquité et les temps moderns, Presses Universitaires de France, 新版, 1955; [3] D. T. Whiteside, Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century, Arch. History Exact Sci., 1 (1961), 179—388; [4] H. Freudenthal. Zur Geschichte der vollständigen Induktion, Arch. Internat. Histoire Sci. 22 (1953), 17—37; [5] K. Hara (原亨吉), Pascal et l'induction mathématique, Rev. Histoire Sci. Appl., 15 (1962), 287—302; [6] 中村幸四郎, 数学史, 啓林館, 1962.

十八世纪的数学 [英 mathematics in 18th century 法 mathématiques au 18ᵉ Siècle 德 Mathematik im 18. Jahrhundert 俄 математика 18го века 日 18 世紀の数学] 十八世纪，是文化史上称为启蒙时期的时代. 分析学自十七世纪出现以后，在稳步地向前发展. 它在理论物理等方面得到大量的应用，促进了理性主义思想的产生.

在十七世纪晚期和十八世纪初期，使分析学飞跃发展的中心人物是 I. Newton† 和 G. W. Leibniz†. 继 Newton 之后，虽然在英国苏格兰出了 C. Maclaurin (1698—1746)，但是对本世纪数学作出巨大贡献的，再也没有出现象 Newton 那样的人物了. Newton 和 Leibniz 之后，英国数学家和大陆数学家分裂成两派，冲突激烈. 英国派没有改进 Newton 的微积分学中不方便的记法，这是本世纪英国解析学不兴旺的原因. 在大陆，Bernoulli 一家和后来的 L. Euler†，继承 Leibniz 的传统，微积分学及其应用在他们手里得到蓬勃发展，解出了各种类型的微分方程，还创立了变分学†. F. Viète† 把分析学 (analysis) 理解为启发式的代数学，但 Newton 则理解为无限小的代数. 在本世纪，分析学终于脱离几何学和原来的代数学，成为独立的学科. 分析力学是由 Euler 开始建立，而由 J. L. Lagrange† (1736—1813) 和 P. S. Laplace† (1749—1827) 继承和发展起来的. 特别是 Laplace，他建立了天体力学和概率论的体系，显示分析学的重要作用. 接着，A. M. Legendre 研究椭圆积分，为下一世纪即十九世纪 C. F. Gauss† 等开辟道路. 自从大革命以来，法国建立了工科大学 (École Polytechnique)，特别是 Napoleon 一世对该校尽力支持，所以从这个世纪的后半期到末期，法国数学的发展最为惊人. 上述的 Lagrange, Laplace, Legendre 都是这时期活跃在巴黎的数学家. S. D. Poisson 和 J. B. J Fourier† 也对分析学做出了显著的贡献，特别是 Fourier，由于他的热传导理论，引出分析学的重要问题，成为以后调和分析的基础和数学发展的重大原因. Poisson, Fourier 的主要目的是根据分析学来说明自然，而 G. Monge, L. N. Carnot 和 J. V. Poncelet，则是由于对纯粹几何学的兴趣而发展了射影几何学和画法几何学. 另外，Monge 对微分几何学也留下了先驱者的业绩.

本世纪数学尽管在分析学、几何学、物理学以及它们的应用方面各自取得辉煌的成果，但它的根本观点和方法完全同上世纪一样，以致缺乏批判精神. 兼之在这时期忙于追求成果，对方法的严密性没有反复思考. 因此，对数学基础的重新考虑、重新建立，只有留到下一世纪即十九世纪去进行了.

【参】 [1] M. B. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, Teubner, 1898; [2] D. J. Struik, A concise history of mathematics, Dover, 1948; 第三版 1967.

十九世纪的数学 [英 mathematics in 19th century 法 mathématiques au 19ᵉ siècle 德 Mathematik im 19. Jahrhundert 俄 математика 19го века 日 19 世紀の数学] 十九世纪，在数学史上，是一个具有特色的时代. 在这个时代，数学取得了前所末有的飞跃发展，它的成果一直继续到二十世纪. 自由思想使人们从传统的束缚下解放出来. 由于文化对社会上更广泛阶层的浸润，促使人才辈出. 特别是伴随着大

学的兴起,多数专家的合作与竞赛,促进了科学研究. 数学史上把十九世纪大体上分为三个时期:头三十年为新数学的兴旺期,次二十年为中继期,后五十年为成熟昌盛期.

十九世纪初期(1801), 青年数学家 C. F. Gauss† (1777—1855)的巨著《算术研究》(Disquisitiones arithmeticae) 完成了, 它包含系统的数论,开创了数学的新时代. 法国在革命中创办的工科大学 (École Polytechnique) 培养出许多著名数学家,其中最杰出的是 A. L. Cauchy† (1789—1857). 由于他给出极限、收敛概念的精确定义, 使得微积分在产生一百五十年后才具有牢固的理论基础, 这是他的功绩. N. H. Abel† (1802—1829) 和 C. G. J. Jacobi† (1804—1851) 同时发现椭圆函数†, 轰动一时. Gauss 首先严格地证明了代数方程在复数域内根的存在, Abel 证明了五次以上一般代数方程不可能用代数方法求解, É. Galois† (1811—1832) 创立了他的代数方程的理论, 为代数学开辟了新领域. J. V. Poncelet (1788—1867)毕业于法国的工科大学, 他沿着 G. Monge (1764—1818) 的方向,发展了射影几何学. 在德意志, A. F. Möbius (1790—1868), J. Steiner (1791—1863), J. Plücker (1801—1868) 等继承他的研究, 特别是 Steiner, 运用综合法研究代数曲线和代数曲面. Plücker 引入射影坐标, 从而扩大了解析法在几何上的运用. 在十九世纪最初的三十年间获得的这些划时代的成就, 都是由二十多岁的青年数学家完成的.

三十至四十年代的新几何学, 是由德国的 K. G. C. von Staudt (1798—1867) 和法国的 M. Chasles (1793—1880) 发展的. 到四十年代, 产生了与几何有关的不变式理论. 在这个领域, 英国的 A. Cayley (1821—1895) 和 J. J. Sylvester (1805—1859) 是突出人物, P. G. L. Dirichlet† (1805—1859) 努力简化 Gauss 的数论,他把分析学的方法,用于二元二次型类数的计算,引入所谓 Dirichlet 级数†. 还有, 他对 J. B. J. Fourier† (1768—1830) 由热传导理论引出的任意函数可展成三角级数这一结论给出严密的证明, 开始了三角级数理论的研究. 在这一时期, J. Bolyai (1802—1860) 和 H. И. Лобачевский (1793—1856) 独立地几乎同时发现非 Euclid 几何†, 是一盛事. 发现原因之一是改变公理的性质, 所以引起哲学界的兴趣. W. R. Hamilton (1805—1865) 的四元数和 H. G. Grassmann 的扩张论 (Ausdehnungslehre), 以及 G. Boole (1815—1864) 的逻辑代数等几乎是同时发表的, 但它们却没有得到科学界的深切理解和支持. 应该说, 它们是由时代精神的力量压出来的早产儿.

在五十年代, 由于 B. Riemann† (1826—1866) 和 K. Weierstrass† (1815—1897) 的出现, 揭开了十九世纪数学新阶段的序幕. 前者具有非凡的天才和丰富的创造力;后者大器晚成,由于他的批判精神, 他们都给十九世纪数学带来巨大的影响. Riemann 接连发表复变函数论、Abel 函数论、三角级数论, 还有几何学基础、素数的分布及 ζ 函数等, 建立了划时代的功勋. 逝世时,年仅四十岁 (1866). 另一方, Weierstrass 从乡村中学受聘到柏林 (1864), 好容易获得柏林大学教授的职称,当时已 49 岁. 在二十年代由 Cauchy 开创的解析函数论, 正是由于这些人的贡献才以椭圆函数的形式得到完成. Reimann 在微分方程、代数几何学等方面的影响也是很大的. Weierstrass 改造了变分法†, 他的批判方法产生了所谓"病态函数", 例如处处不可微的连续函数, 以及能填满平面一部分的 Peano 曲线等, 以此为开端, 同时产生了实变数函数论, 而 G. Cantor (1848—1918) 的集合论则是它的重要基础. 另外, 在基础理论方面有 Cantor, M. Méray 和 J. W. R. Dedekind (1831—1916) 等建立的无理数理论, 有 Dedekind, G. Peano (1858—1932) 完成的自然数理论. 这些结果形成了数学的"算术化" (arithmetization) 理论, 它们与二十世纪的数学基础†是有关系的.

Cayley 和 F. Klein† (1849—1925) 认为在射影几何学中引进度量 (德 Metrik) 就得到了非 Euclid 几何学. 到十九世纪末, D.

Hilbert† (1862—1943) 在《几何基础》一书中探讨了平行公理以外的合同公理、连续公理的作用，因而开始一般公理系 (德 Axiomatik) 的研究.

七十年代以来，由 C. Jordan (1838—1922), G. Frobenius (1849—1917), W. S. Burnside (1852—1927) 等发展了群†论，特别是有限群论. M. S. Lie† (1842—1899) 把无穷小变换应用到微分方程上，Klein 把线性变换群应用到几何学上. Klein 和 H. Poincaré† (1854—1912) 发现了自守函数†，这是由群论得到的重大收获. Gauss 开始研究的代数数论，经过 E. E. Kummer (1810—1893) 的理想数 (德 ideal Zahlen)，最后发展为 Dedekind 的理想†论. L. Kronecker (1823—1891) 崇拜 Abel 的工作，致力于代数方程的研究，他发现有理数域的每一个 Abel 扩张都包含在割圆域里面，他相信在椭圆函数具有复数乘法的模方程与虚二次域的 Abel 扩张之间也有类似的关系，并且宣布这一著名的猜想，称为他的"青春之梦".

最后应该载入史册的，是最早的女数学家 C. B. Ковалевская (1850—1891). 她曾向 Weierstrass 学习过. 1884 年以后，G. M. Mittag-Leffler (1846—1927) 聘请她在斯德哥尔摩 (Stockholm) 大学任教授，一直到她逝世.

到十九世纪末期，数学研究的种类繁多，每个分支下面又产生更专门化的分支，彼此隔绝的分支发生了意外的联系，关系极为复杂. 想纵览全部数学几乎是不可能的. 在此情况下，1898 年，由 F. Meyer 首先提倡，在格廷根 (Göttingen)、柏林和维也纳科学院支持下，计划编纂数学百科全书 (德 Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften). 经过二十多年的岁月，始告完成. 可以说，它是十九世纪数学的鸟瞰图. 到本世纪末，以世界各国大多数数学研究工作者之间的往来和研究的交流为目的，召开了国际数学家会议 (International Congress of Mathematicians). 在第一次世界大战前，曾在苏黎世 (Zürich) (1896)、巴黎 (1900)、海德尔堡 (Heidelberg) (1904)、罗马 (1908)、美国的剑桥 (1912) 相继举行. 各国的数学学会也很多，其中规模较大的，若以创办的时间为序，则有：伦敦数学学会 (London Mathematical Society) (1865)、法国数学学会 (La société mathématique de France) (1872)、美国数学学会 (American Mathematical Society) (1888)、德国数学学会 (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) (1907) 等. 日本数学学会 (创建于 1946 年，由日本数学物理学会分出) 的前身是东京数学学会，创建于明治十年 (1877).

日本到明治时期，在改革教育制度 (1872) 以后的第五年，即 1877 年 (明治十年) 设立东京大学. 在初期，菊池大麓 (1855—1917) 和藤沢利喜太郎 (1861—1933) 两教授在该校数学系任教，以希腊传统为基础的欧洲式的数学研究从此在日本开始了. 1897 年，创立京都帝国大学；1911 年创立东北帝国大学. 进入二十世纪后，就获得独立的研究成果. 研究成果发表机构除日本数学物理学会记事、各大学纪要以外，1911 年林鶴一创办东北数学杂志. 1920 年，高木貞治 (1875—1935) 的类域论†在东京帝国大学理学部纪要上发表，确立了日本数学在国际上的卓越地位.

【参】 [1] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Springer, I, 1926; II, 1927; [2] 高木貞治，近世数学史談，共立出版，1933，河出，1942; [3] 小堀憲，数学史，朝倉，1955; [4] D. J. Struik, A concise history of mathematics, Dover, 1948; 第三版，1967; [5] N. Bourbaki, Les éléments d'histoire des mathématiques, Hermann, 第二版，1969; [6] Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen Teubner, 1898—1934; [7] Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées ([6]的法译本) Paris, 1904—1914.

Abel, Niels Henrik (1802, 8, 5—1829, 4, 6)，生于挪威的芬德 (Findö) 僻村，为贫苦牧师之子. 1822 年，入克里斯蒂安尼亚 (Christiania) (现名奥斯陆) 大学学习. 数学几乎是自学的. 但得到前辈 Holmboe 等人的赏识，毕业后立即赴巴黎和柏林留学. 在柏林，结识 "Journal für reine und angewandte Methematik" 的创始者 A. Crelle，并协助其办刊. 在巴黎，尽管取得了光

辉成就，仍然不太受重视．1827 年 5 月回国，没有找到工作．他一边与贫困斗争、一边继续研究．因患肺病，二十六岁早逝．

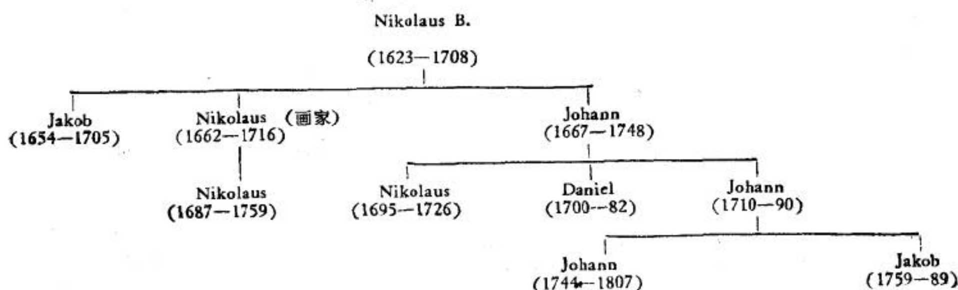
他著名的贡献有：证明五次以上代数方程一般不能用代数方法解出，Abel 方程（即 Galois 群†是 Abel 群†的方程）能够用代数方法求解，还有二项级数论、椭圆函数论、Abel 函数的引入等．他的论文构思自然，且易读．不论是在代数上还是分析学上，都达到当时的最高水平．

【参】［1］ N. H. Abel, Oeuvres complètes. I, II, edited by L. Sylow and S. Lie, Grondahl & Son, Christiania, 新版，1881；［2］ C. A. Bjerknes, N. H. Abel, Gauthier-Villars, 1885；［3］ F. Klein Vorlesungen über die Entwickluny der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer, 1926 (Chelsea 1956)；［4］ 高木貞治，近世数学史談，河出，1943；(Kyôritu 1970).

Bernoulli 家族，从荷兰移居到瑞士巴塞尔（Basel）的新教徒．从十七世纪末起，在大约一个世纪内，这个家族出现杰出的数学家达八人之多，是在微积分学的发展史上起过重要作用的一个家族．

Jakob Bernoulli（1654—1705），Johann Bernoulli（1667—1748）兄弟及 Johann 的次子 Daniel Bernoulli（1700—1782）都是特别优秀的人物．Jakob，Johann 兄弟都是 G. W. Leibniz† 的亲密好友．他们之间的通讯往来，促进了微积分学的发展．Jakob 研究包括等时曲线、最速降线†、等周问题†在内的几何学与力学诸问题．他第一个废除 calculus summatoris 这个求积分的称号，而代之以 calculus integralis（1690）．他死后，于 1713 年出版了他的著作《猜度术》（Ars conjectandi），其中包含大数定律†，这使他的名字在概率论上永存不朽．他的数学几乎是无师自通的．他开始是巴塞尔（Basel）大学的实验物理学教授，后来成为数学教授．Johann 向其兄学习数学，作为他哥哥的继承人成为巴塞尔（Basel）大学数学教授．他的成果在当时的“Acta Eruditorum”，“Journal des savants”等杂志上发表了很多，特别是在 1701 年的等周问题解法中出现了后来发展起来的变分法的萌芽．函数称为 functio，是从他开始的（1714）．functio 就是现在用的术语 function 的来源．兄弟、父子之间的不和，虽然常使他有不幸之感，但 Johann 作为热心的教师和卓越的研究人员，在对他的儿子以及对 Leonhard Euler 等下一代数学家的培养方面，在对微积分学的形式、内容的改善和应用范围的扩充方面，取得的成就是极大的．Johann 的次子 Daniel，在概率论方面特别突出，在流体力学、气体动力学方面也作出了贡献．他与长兄 Nikolaus（1695—1726）同时被任命为彼得堡的数学教授．Daniel 最小的弟弟小 Johann（1710—1790）继他的父亲老 Johann 之后为巴塞尔（Basel）大学教授．小 Johann 的儿子 Johann 第三（1744—1807）为柏林科学院数学部主任，Johann 的弟弟 Jakob（1759—1789）为巴塞尔（Basel）大学的实验物理学教授．还有，前面提到的 Jakob（1654—1705）的次弟之子 Nikolaus 第三（1687—1759）从 1716 年到 1719 年曾任 Galilei 所属的帕多瓦（Padua）大学的数学教授．他的父亲 Nikolaus

Bernoulli 家谱



第二(1662—1716)是画家.

在本文和 Bernoulli 家谱中，名字是用德文拼写的. Daniel 在英文、法文、德文中是一样的,但 Nikolaus 也有拼作 Nicolaus 的,英、法都为 Nicolas. Jakob 在英文中拼为 James,法文拼为 Jacques，Johann 有时也写成 Johannes,在英文中拼为 John，法文里拼为 Jean.

【参】 [1] M. B. Contor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III, Teubner, 1898; [2] Jacobi, Bernoulli, Opera I, II, Cramer, 1744; [3] Jakob Bernoulli, Die Werke von Jakob Bernoulli, Birkhäuser 1969; [4] Jacobi Bernoulli, Ars conjectandi, Bâle, 1713; [5] Johannis Bernoulli, Opera omnia I—IV, M. M. Bousquet 1742.

Cantor, Georg (1845, 3, 3—1918, 1, 6),集合论的创始者. 丹麦犹太商之子，出生在彼得堡. 1856 年，移居德意志，在苏黎世(Zürich)和柏林大学学习数学、物理、哲学等课程. 1867 年,在柏林得博士学位,任哈勒(Halle)大学兼任讲师, 1879—1905 年,任该大学教授. 晚年病魔缠身,在精神病院去世.

他的学位论文虽然是关于数论方面的，但他致力于三角级数唯一性的研究，创立了集合论. 1874 年,开始引入基数的概念,由此证明了超越数†大大多于代数数†. 这一成果在当时轰动了数学界，同时也遭到了强烈的反对. L. Kronecker 等人的反对使他很苦恼，但得到 R. Dedekind 和 G. M. Mittag-Leffler 等人的支持. 他注意到就是在概率论的历史中，也存在理论没有被普遍接受的时期,因而高喊“数学的本质在于它的自由性”. 他除了对基数概念的贡献以外，还定义了序型†、超限序数†等概念，并奠定了由基本序列†建立实数理论的基础. 另外，他把 Euclid 空间里一般的点集作为研究的对象，定义聚点†、闭集†、开集†等概念. 他是维数理论的开拓者. 维数理论是所谓点集理论的起源,而点集理论又促使一般拓扑学的发展,因而他为拓扑空间†理论开辟了道路.

【参】 [1] G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen, edited by E. Zermelo and A. Fraenkel, Springer, 1932 (Georg Olms, 1962); [2] A. Schoenflies, Die Krisis in Cantors mathematischem Schaffen, Acta Math., **50** (1927), 1—23.

Cartan, Elie (1869, 4, 9—1951, 5, 6) 生于法国伊泽尔 (Isère) 县的多洛米约 (Dolomieu) 村, 1888 年入巴黎的高等师范学校学习，1891 年毕业. 同时，经 agrégé 考试合格后,开始研究生活. 1894 年，25 岁时,他发表学位论文“关于有限维连续变换群的构造”([3]), 对 M. S. Lie 和 W. Killing 的连续变换群理论作出了很大的贡献. 他先后任蒙彼利埃 (Montpellier), 里昂 (Lyon), 南锡 (Nancy) 等大学教授,最后在 1912 年任巴黎大学教授. 对于 G. Darboux 创始的动坐标系†的方法,他能运用自如. 在连续群理论、Pfaff 形式理论、积分不变式理论、拓扑学、微分几何学 (特别是联络†几何学)、理论物理学等方面有很多贡献. 他的学位论文，至今还是年轻的研究工作者的中心话题. 他所创建的联络概念是微分几何学的一个基本概念. Henri Cartan (1904—) 是他的长子.

【参】 [1] E. Cartan, Oeuvres complètes I—III, Gauthier-Villars, 1952—1955; [2] E. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, 1894. (Oeuvres complètes, pt. I, vol. 1, p. 137—287); [3] S. S. Chern-C. Chevalley, Elie Cartan and his mathematical work, Bull. Amer. Math. Soc., **58** (1952), 217—250.

Cauchy, Augustin Louis (1789, 8, 21—1857, 5, 25), 十九世纪前半世纪的法国数学家. 1807 年毕业于工科大学，1810 年毕业于桥梁公路学院 (École des Ponts et Chaussées), 起初当土木工程师,因数学上的成就受到重视. 1816年,他被推举为科学院院士,同时任工科大学教授. 在 1830 年 7 月革命时，流亡到都灵 (Torino)，后移居布拉格 (Prague). 1848 年回到祖国,任巴黎大学教授,一直到逝世. 他在宗教上信仰罗马天主教,在政治上属于保皇党,终生坚守气节.

他在学术上成果相当多. 他的研究是多方面的. 在代数学上，他有行列式论和群论的创始性的功绩；在理论物理学、光学、弹性理论等方面，也有显著的贡献. 他的特长是在分析学方面，特别在他的《分析教程》(Cours d'analyse de l'École Polytechnique, 1821) 一书中，对微积

分学给出严密的基础，显示了他对分析学合理化的关心．在论文《论上下限为虚数的定积分》(Mémoire sur les intégrales définies, prises entre les limites imaginaires, 1825) 中，证明了复变函数论的主要定理；证明了在实变数和复变数的情况下微分方程解的存在定理，这都是很重要的．

【参】［1］ A. Cauchy, Oeuvres complètes I. 1—12; II. 1—14, Gauthier-Villars, 1882—1958;［2］ F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer, 1926 (Chelsea 1956);［3］ 高木貞治，近世数学史談，共立出版，1933，河出，1942．

Dedekind, Julius Wilhelm Richard (1831, 10, 6—1916, 2, 12) 生于德国中部的不伦瑞克(Braunschweig)．在格廷根 (Göttingen) 大学学习，受到 C. F. Gauss 晚年的教育．1852 年由于关于 Euler 积分的论文在格廷根得到博士学位．从 1858 年到 1862 年在苏黎世 (Zürich) 工学院任数学教授，从 1863 年到 1894 年在不伦瑞克工学院 (Braunschweig 的 Technische Hochschule) 任数学教授．他在二十多岁时写了关于分析学和概率论的著作．但从 1856 年起发表关于数论的论文，从事整理 P. G. Dirichlet 的《数论讲义》(Vorlesungen über Zahlentheorie，第一版，1863；第四版，1899)，并集中精力研究数论、代数学方面的问题．他创始的理想†理论，最初是作为《数论讲义》的附录发表的(1863)．他为了给理想理论建立公理的基础，而研究作为代数系的群和格，从而成为二十世纪抽象代数学的先驱．代数数域中的 Dedekind 的 ζ 函数†，实数论中的 Dedekind 分割†，与 H. Weber 合著的代数函数†的代数理论，自然数†理论等都是他的著名的贡献．他是 G. Cantor 集合论的最早支持者之一，他的自然数理论是以集合概念为基础，成为后来数学中逻辑主义的先驱．递归函数的概念也是在他的理论中第一次出现的．

【参】［1］ R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke I—III, Braunschweig, 1930—32 (Chelsea, 1969);［2］ M. Cantor-R. Dedekind, Briefwechsel, Cantor-Dedekind, Actualités Sci. Ind., Hermann 1937;［3］ 河野伊三郎訳，数について，岩波文庫，1961．

Descartes, René (1596, 3, 31—1650, 2, 11)，法国哲学家、数学家和自然科学家．他生于法国都兰州，在拉弗莱舍 (La Flèche) 神学院学习经院哲学，但不满足，1619 年在乌尔姆(Ulm)从军，转变了思想，想要以数学为规范，在方法上统一各学科．1621 年回到巴黎．1628 年为避开俗事移居荷兰，专心从事研究和著作．1649 年应 Christine 女王之聘到瑞典，由于寒冷和过度疲劳，翌年病逝．

Descartes 被称为近世哲学之祖，这是由于他主张要抛弃中世纪以来的神学世界观，声称一切知识只有经过合理的鉴定，才能得到逻辑上的承认．他的这种观点是现代数学和物理学的基础．1637 年作为他的《方法谈》(Discours de la méthode) 一书的附录出版了《几何学》(Géométrie)，其中还包括光学和气象学．在这里他推进了 F. Viète 的符号代数，并将它应用到轨迹等几何问题．使用代数学作为几何学的一般方法，这种思想使他成为解析几何学的创始人．

【参】［1］ R. Descartes, Oeuvres I—XII, edited by C. Adam, P. Tannery, and Léopold Cerf, 1897—1910;［2］ 落合太郎訳，方法序説，岩波文庫，1953;［3］ 野田又夫訳，精神指導の規則，岩波文庫，1950;［4］ H. Lefèbvre, Descartes, Paris, 1947．

Dirichlet, Peter Gustav Lejeune (1805, 2, 13—1859, 5, 5)，生于德国迪伦 (Düren) 的一个法兰西血统家庭．1822—1827 年旅居巴黎，与 J. B. J. Fourier† 交往．1827 年任布雷斯劳(Breslau)大学讲师，1829 年任柏林大学讲师，从 1839 年起任柏林大学教授，1855 年革命后他作为 C. F. Gauss† 的继任者受聘到格廷根，直至逝世，四年间一直担任格廷根大学教授．

他的贡献涉及到数学的各个方面，其中以数论、分析，特别关于位势论最著名．他非常钦佩 C. F. Gauss，据说即使在旅行中也带着 Gauss 的《算术研究》(Disquisitiones arithmeticae)，传为逸话．在数论中他创造 Dirichlet 级数†，证明首项与公差互素的算术级数中包含无限个素数，另外，他用"若在 n 个抽样中，存在 $n+1$ 个

事物，那末至少在 1 个抽样中，至少包含 2 个事物"的 **Dirichlet 抽样法**（德 Schubfachverfahren）（也叫房屋分配法），阐明代数数域的单位† 群的结构. 在位势论里论及关于调和函数存在的 Dirichlet 问题†，又在三角级数论方面给出关于三角级数收敛的 Dirichlet 条件†.

【参】 [1] P. G. L. Dirichlet's Werke I, II, Georg Reimer, Berlin, 1889—97 (Chelsea, 1969); [2] P. G. L. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, with supplements by R. Dedekind, F. Vieweg, Braunschweig, 第四版, 1894 (Chelsea, 1968); [3] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer, 1926 (Chelsea, 1956); [4] 高木貞治, 近世数学史談, 共立出版, 1933, 河出, 1942.

Einstein, Albert (1879, 3, 14—1955, 4, 18)，生于南德意志乌尔姆（Ulm）的一个犹太族血统的家庭，1900 年毕业于苏黎世（Zürich）联邦工科大学. 不久，取得瑞士公民权，任伯尔尼专利局技师. 发表光量子假说、特殊相对论、Brown 运动理论等. 历任苏黎世（Zürich）大学兼职教授（1909），布拉格大学及母校的教授，1913 年成为柏林大学教授. 1916 年发表广义相对论. 1921 年荣获诺贝尔物理学奖金. 1933 年为避免纳粹迫害，移居美国，任普林斯顿（Princeton）高级研究院教授，一直到 1945 年退休. 1939 年曾向总统 Roosevelt 提出制造原子弹的可能性，第二次世界大战后，他积极参加禁止核武器运动，宣传"世界联邦".

相对论提出了关于时间、空间、物质，涉及认识自然的根本问题. 广义相对论的结果于 1919 年为日食观测所证实，是理论物理学上的重要贡献. 直到晚年还继续推广相对论，研究统一场论.

【参】 [1] P. Frank, Einstein, his life and time, Knopf, 1947; [2] 日本版アインスタイン全集 I—IV, 改造社, 1922—24; [3] A. Einstein, The meaning of relativity, Princeton Univ. Press, 第五版, 1956; [4] C. Seelig, Albert Einstein, eine dokumentarische Biographie, Europa Verlag, Zürich, 1954.

Euler, Leonhard (1707, 4, 15—1783, 9, 18)，生于瑞士的巴塞尔（Basel），是在 Bernoulli 家族的数学学者们的影响下成长起来的. 1726 年受聘到彼得堡科学院工作直到 1741 年，同年被 Friedrich 大王请到柏林，在柏林科学院一直工作到 1766 年，同年再回到彼得堡. 虽然他在 1735 年右眼失明，第二次到彼得堡之后不久左眼也失明了，但是他研究的劲头并没有减弱，直到 1783 年在彼得堡逝世，始终以旺盛的精力坚持学术研究活动.

Euler 是十八世纪数学学者的中心人物，他的工作关系到数学的各个领域，特别是把由 Bernoulli 家族继承下来的 Leibniz 学派的分析学的内容进行整理，为十九世纪数学的发展打下基础，在物理学、力学的应用方面有很大贡献. Euler 还把微分积分法在形式上进一步发展到复数的范围，并对偏微分方程、椭圆函数论、变分法等的创立与发展留下先驱的业绩. 只是在从十九世纪开始的"注意严密性"方面，感到不足. Euler 的业绩是很多的，他的全集的发行到今天还没有完结.

【参】 [1] L. Euler, Opera omnia (既刊 33 卷, 1911—1947, 续刊预计约 40 卷), Society of Swiss Naturalists.

Fermat, Pierre de (1601, 8, 20—1665, 1, 12)，法国数学家. 生于图卢兹（Toulouse）附近的一个皮革商人家庭. 他学习法律学并担任过律师，1631 年以后担任图卢兹地方议会议员，业余研究数学. 其成果发表在书信中，没有公开出版书. 死后，1679 年其子将手稿作为"Varia Opera"公开出版. 他受到由 Bachet (1581—1638) 翻译的 Diophantus 数论（1621 年出版）的启发，研究数论，开辟近代数论，使 Fermat 之名不朽. 他提出的著名"Fermat 大定理"是尚未解决的问题（→ Fermat 问题）. 他用 Apollonius 的圆锥曲线理论开始研究解析几何，并讨论切线、极大（小）法以及求积法，成为微积分学的先驱者. 他与 R. Descartes 不同，与其说他批判希腊数学，倒不如说他以复兴为主要目的，因此他的学风，古典色彩浓厚. 在光学方面，Fermat 原理即关于光线通道的最小作用定律是很重要的.

【参】 [1] P. Fermat, Oeuvres I—V and supple

ment, edited by P. Tannery and C. Henry, Gauthier-Villars 1891—1922.

Fourier, Jean Baptiste Joseph (1768, 3, 21—1830, 5, 16),生于法国奥塞尔(Auxerre),缝裁之子,在八岁时成为孤儿,但他的才华受到重视, 1790 年成为工科大学的教授. 1798 年参加拿破仑的远征埃及军,与 G. Monge 等人一起致力于文化工作,归国后当了伊泽尔(Isère)县地方长官. 拿破仑垮台后,他失去职位,但后来由于研究热传导取得的成果被推荐到法国科学院,1827 年当选为法国科学院(Académie Française)院士.

他从 1800 年开始研究热传导,1811 年因解答科学院提出的问题而获科学院奖([1]的第 1 卷). 他引入热传导方程†且得到在各种边界条件†下的解答. 同时,他提出任意函数可用三角级数表示 (→ Fourier 级数),开辟了分析学的新时代,但证明不严密.

【参】 [1] J. B. J. Fourier, Oeuvres I, II, edited by G. Darboux, Gauthier-Villars, 1888—1890; [2] 高木貞治, 近世数学史談, 河出, 1943.

Galois, Evariste (1811, 10, 25—1832, 5, 31),生于巴黎郊区的布尔格-勒雷恩(Bourg-la-Reine),中学时代发表有关循环连分数的论文(1828),并向法国科学院提出方程论方面的论文,但由于审查人丢失没有能发表. 1829 年报考工科大学,失败后,入师范学校(École Normale). 因参加政治运动,受退学处分,入狱,释放后不久,死于决斗中.

在决斗前夕,他把他的研究提纲和手稿留给友人 A. Chevalier, 后经 J. Liouville 整理登载于 "J. Math. Pures Appl., **11** (1846)". 其内容是引进群†的概念及实质上关于代数方程的 Galois 理论†,并指出同样思想可应用于 Abel 积分†的问题. 手稿中还有"不确定性(ambiguity)理论"的提法,这可能是企图用同样的思想研究代数函数论.

【参】 [1] E. Galois, Oeuvres mathématiques, edited by E. Picard, Gauthier-Villars, 1897; [2] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer, 1926 (Chelsea, 1956); [3] 高木貞治, 近世数学史談, 河出, 1943; [4] R. Bourgne -J. P. Azra, Ecrits et mémoires mathématiques d'Evariste Galois, Gauthier-Villars, 1962.

Gauss, Carl Friedrich (1777, 4, 30—1855, 2, 23),生于德国不伦瑞克(Braunschweig)的一个贫寒家庭. 幼年时就显示出非凡的数学才能,得到 Carl Wilhelm Ferdinand 大公的赏识,在他的支持下,1795—1798 年在格廷根(Göttingen)大学学习,1799 年因证明代数学的基本定理而获得哈勒(Halle)大学的博士学位,从 1807 年起到 1855 年逝世,他一直担任格廷根天文台台长兼大学教授.

1796 年 3 月 30 日他发现用直尺和圆规作正 17 边形图形的可能性,据说这成为他研究数学的起因. 1801 年出版的《算术研究》(Disquisitiones arithmeticae),开辟了数论研究的全新时代. 除此以外,在纯粹数学方面,对非 Euclid 几何、超几何级数、复变函数论、椭圆函数论等都作了卓越的研究. 在应用数学方面,对天文学、测地学、电磁学都有不朽的贡献. 他还研究与数学应用有关的最小二乘法、曲面论、位势论等. 他特别重视作品的完善,因此,发表的论文比他的研究工作要少得多,但研究项目可在他的日记和书信中见到. 他的全集包括日记、书信共计十二卷. 他是十九世纪前半世纪最伟大的数学家.

【参】 [1] C. F. Gauss, Werke I—XII, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1863—1933; [2] C. F. Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Yale Univ. Press, 1966; [3] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, II, Springer, 1926—1927 (Chelsea, 1956); [4] 高木貞治, 近世数学史談, 河出, 1943; [5] H. Reichardt 编, Gauss Gedenbfand, Leipzig, 1957.

Hilbert, David (1862, 1, 23—1943, 2, 24),生于德国的科尼斯堡(Königsberg),1882—1885 年在科尼斯堡大学学习. 从那时起与 H. Minkowski 结交成终生好友. 1885 年写出不变式论的论文,在科尼斯堡大学获得博士学位,1892 年任该大学教授,1895 年直至去世任格廷根(Göttingen)大学教授. 1890—1893 年得

到不变式†论的基本定理. 接着开始几何学基础和代数数论的研究. 对前者,在《几何基础》(Grundlagen der Geometrie, 第一版, 1899) 一书中给出 Euclid 几何学完全的公理体系, 并进行了逻辑的检验. 对后者,他在不朽的著作《数的报告》(Zahlbericht, 1897) 一书中, 把直到前一世纪为止所知代数数论的全部重要结果, 归纳成为一个体系. 在数论中, 他对类域论†的猜想具有重大的意义. 1900 年在巴黎国际数学家会议上,他提出二十三个"数学问题",作为新世纪数学研究的目标. 1904—1906 年,他研究位势论†的 Dirichlet 原理†和变分法的直接法†. 1909 年确立 Hilbert 空间†论的基础. 1910 年以后, 他致力于数学基础论的研究,提倡形式主义†的观点. 他是本世纪前半世纪最伟大的数学家之一.

表 1 **Hilbert 的数学问题**

(1) 证明连续统假设(→公理集合论)

(2) 算术公理系的相容性(→数学基础[形式主义]).

(3) 只根据合同公理证明底面积相等、高相等的两个四面体有相等的体积是不可能的(→几何基础). 已解决 (M. Dehn, 1900).

(4) 两点之间的直线段是这两点之间的最短距离的几何学结构的研究(→几何基础).

(5) 拓扑群成为 Lie 群的条件(→拓扑群). 已解决 (A. M. Gleason, D. Montgomery, L. Zippin, 1952; 山辺英彦, 1953).

(6) 对数学起着重要作用的物理学的各分支的公理化.

(7) 某些数的超越性的证明(→超越数). 已解决(例如, $2^{\sqrt{2}}$ 的超越性已经证明, A. Гельфонд, 1934; Th. Schneider, 1935).

(8) 素数的分布问题,特别是 Riemann 猜想的证明(→ζ函数). 未解决.

(9) 一般互反律(→类域论). 已解决(高木貞治, 1921; E. Artin, 1927).

(10) 通过有限步骤,判定不定方程是否存在有理整数解(→判定问题; 数的几何). 对含两个未知数的方程已得到肯定解决(A. Baker, Philos. Trans. Roy. Soc. London, (A) 263, 1968); 对一般情况得到否定解决. (Ю. В. Матиясевич, 1970).

(11) 一般代数数域内的二次型论(→二次型).

(12) 类域的构成问题(→复数乘法论). 未解决.

(13) 一般的七次代数方程,以 2 变量连续函数的组合进行求解是不可能的. 一般得到否定解决. В. И. Арнольд 证明了每个在 [0, 1] 上连续的实函数 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可表为如下形式: $\sum_{i=1}^{9} h_i(g_i(x_1, x_2), x_3)$, 这里 h_i 和 g_i 是连续实函数. А. Н. Колмогоров 证明 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可以写成 $\sum_{i=1}^{7} h_i(g_{i1}(x_1)+g_{i2}(x_2)+g_{i3}(x_3))$ 的形式,这里 h_i 和 g_{ij} 是连续实函数, g_{ij} 可选得完全与 f 无关 (Докл. Акад. Наук СССР, **114** (1957)).

(14) 假定 k 是域; $x_1, \cdots, x_n$ 是 n 个变量, $f_i(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $k[x_1, \cdots, x_n]$ $(i=1, \cdots, m)$ 上的多项式. 又设 R 是由 $k[X_1,\cdots,X_m]$ 上的有理函数 $F(X_1,\cdots,X_m)$ 构成的环, 并且 $F(f_1, \cdots, f_m)\in k[x_1, \cdots, x_n]$. 试问环 R 是否能用有限个元素生成? 已否定地解决(永田雅宜, Amer. J. Math., **81** (1959)).

(15) 建立代数几何学的基础(→代数几何学). 已解决 (B. L. van der Waerden, 1938—1940; A. Weil, 1950; 其他).

(16) 代数曲线和曲面的拓扑研究.

(17) 令 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 为实系数的有理函数且对任意 n 个实数 $(x_1, \cdots, x_n)$ 取正值. 确定函数 f 是否能写成有理函数的平方和(→域). 已肯定地解决 (E. Artin, 1927).

(18) 把 n 维 Euclid 空间表示为不相交的并集 $\bigcup_\lambda P_\lambda$, 这里每个 P_λ 合同于给定的多面体

之一.

(19) 确定正则变分问题的解是否总是解析函数(→椭圆型偏微分方程). 已解决 (S. Bernstein, И. Г. Петровский 等).

(20) 研究一般边值问题(→椭圆型偏微分方程, Dirichlet 问题).

(21) 具有给定奇点和单值群的 Fuchs 类的线性微分方程是否存在?(→线性常微分方程的大范围理论) 已解决 (H. Röhrl 等, 1957).

(22) 用自守函数将解析函数单值化 (→ Riemann 面). 对一个变量的情况, 已解决 (P. Koebe, 1907).

(23) 发展变分学的方法研究(→变分法).

【参】 [1] D. Hilbert, Gesammelte Abhandlungen I—III, Springer, 1932—1935 (Chelsea, 1967); [2] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, 第七版, 1930; [3] D. Hilbert, Grundzüge der allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Teubner, 第二版, 1924 (Chelsea, 1953); [4] D. Hilbert - W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Springer, 第三版, 1949; (英译本: Principles of mathematical logic, Chelsea, 1950); [5] D. Hilbert - P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, Springer, 第二版, I, 1968; II, 1970; [6] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer, 1926 (Chelsea, 1956); [7] H. Weyl, David Hilbert and his mathematical work, Bull. Amer. Math. Soc., **50** (1944), 612—654; [8] C. Reid, Hilbert, With an appreciation of Hilbert's mathematical work by H. Weyl, Springer, 1970.

Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804, 12, 10—1851, 2, 18), 生于德国波茨坦 (Potsdam) 富裕的银行家家庭, 受过良好的家庭教育与多方面的高度培养. 入柏林大学,自学 L. Euler 的数学书. 1825 年得博士学位,次年任科尼斯堡(Königsberg)大学兼职讲师,1831 年为教授,此后十七年间,在这大学里一直精力充沛努力工作,产生了相当大的影响. 晚年健康欠佳,财产损失, 由于政治上的原因遭到不幸, 1843 年以后没有成绩, 47 岁患天花去世.

由于性格强硬, 有时受到人们的反感. 但很早就结识 N. H. Abel, 晚年又与 P. G. L. Dirichlet 友好.他的数学著作虽然缺乏形式的完整性和严密性,但在很多方面富有创造性、意义深远. 著名的贡献有函数关系的 Jacobi 行列式†及动力学上的 Hamilton-Jacobi 方程†等, 在椭圆函数†论上的贡献特别显著,这方面初期的研究情况,汇总在 [2] 中.

【参】 [1] C. W. Borchardt-K. Weierstrass 编, K. G. J. Jacobi's gesammelte Werke I—VII, Verlag von G. Reimer, Berlin, 1881—91 (Chelsea, 第二版 1969); [2] C. G. J. Jacobi, Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, Bornträger 1829; [3] F. Klein Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, II, Springer, 1926—27 (Chelsea, 1956); [4] 高木貞治, 近世数学史談, 河出, 1943.

Klein, Felix (1849, 5, 25—1925, 6, 22). 十九世纪后半期在德国起领导作用的数学家之一, 生于杜塞尔多夫 (Düsseldorf), 毕业于波恩(Bonn)大学, 曾在巴黎学习. 1872 年, 成为埃尔兰根 (Erlangen) 大学教授, 1886 年, 任格廷根 (Götttingen) 大学教授,直至逝世. 他在数学上的贡献是多方面的, 但主要还是在几何方面. 在埃尔兰根大学就职演讲中, 他从群论的观点出发, 给出当时所知的几何学各分支的鸟瞰图, 称为埃尔兰根纲领†. 在这个纲领中, 他指出 Euclid 几何学和非 Euclid 几何学都属于射影几何学. 他在晚年的演讲 ([4]) 中, 追述了自己花费最大精力的是自守函数†的研究. 这些演讲, 作为十九世纪的数学史料是重要的. 他对数学教育的改革也很关心, 这些演讲就是为教育工作者而作的. 他是德国改革数学教育的领导者.

【参】 [1] F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen I—III, Springer, 1921—1923; [2] R. Fricke-F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Teubner, I, 1897; II, 1901; [3] F. Klein, Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus, I—III, Springer, 1924; 1925;, 1928; [4] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, II, Springer, 1926—27 (Chelsea, 1956); [5] F. Klein, Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie, Springer, 1928 (Chelsea, 1960); [6] F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie, Springer, 第三版, 1926 (Chelsea, 1957).

Kronecker, Leopold (1823, 12, 7—1891, 12, 29), 生于德国的布雷斯劳 (Breslau) 附近的利格尼茨 (Liegnitz) (现属波兰的莱格尼察

(Legnica)). 1842 年入柏林大学，后来到各地大学学习，最后在布雷斯劳得到 E. E. Kummer 的指导. 1849 年在此以关于代数数域中单位(unit)的论文得博士学位. 其后八年间继承伯父家业，专心从事银行和农场的管理，没有发表论文. 1857 年返回学术界发表用复数乘法†可以得到虚二次域上的 Abel 扩张的猜想(所谓"Kronecker 的青春之梦"). 1861 年任柏林大学教授，终身任此职. 他认为应该根据自然数的直观来严密地建立整个数学(→数学基础)，他经常与柏林大学的同事 K. Weierstrass 等争论. 因拒绝承认集合论†中大胆的新提法，使 G. Cantor 惋惜. 他的名言"自然数是上帝创造的，其他是人的事"与 G. Cantor 和 J. W. Dedekind 的"自由性"的主张形成对比. 他在柏林大学讲学，涉及到代数学和分析学的各个方面，关于拓扑学也有开创性的业绩.

【参】 [1] K. Hensel 编, Leopold Kronecker's Werke, I—V, Teubner, 1895—1931 (Chelsea, 1968); [2] H. Weber, Leopold Kronecker, Jber. D. M. V., 2 (1891—1892), 5—31.

Lagrange, Joseph Louis (1736, 1, 25—1813, 4, 10), 生于意大利的都灵(Turin), 1753 年在当地的陆军学校任教官，1766 年受 Friedrich 大王(1712—1786)之聘移居柏林，作为 L. Euler 的继承人，担任柏林科学院数学部主任. 1787 年迁居巴黎，担任了新建的高等师范学校教授，以后就一直活跃在法国. 1790 年制定公制法时，他作为主要负责人竭尽全力. 1795 年工科大学建成，他担任第一任校长. Napoléon 时代，被授予伯爵.

在数学史上，他的地位在 L. Euler 和 P. S. Laplace 之间，是十八世纪后半世纪和十九世纪初期大数学家之一. 他从研究等周问题导出了变分法，引进广义坐标而创立分析力学，解出所谓 Lagrange 运动方程等，在分析学方面的贡献是著名的，但在他的业绩中代数的色彩很浓. 他试图把微积分学建立在形式幂级数基础上([2]). 又研究代数方程的代数解法，注意到代数方程根的置换群，这可看作是 N. H. Abel, E. Galois 的工作的先驱.

【参】 [1] J. L. Lagrange, Oeuvres I—XIV, edited by M. J. A. Serret, Gauthier-Villars, 1867—1892; [2] J. L. Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, Paris, 1797.

Laplace, Pierre Simon (1749, 3, 23—1827, 3, 5)，生于法国诺曼底(Normandy)的奥热地区博蒙(Beaumont en Auge)一个贫农家庭. 从幼年就被认为富有才能，1767 年移居巴黎，得到 J. R. d'Alembert 的帮助，任高等师范学校、工科大学授教. 拿破仑时代参与政治，任内务大臣，后来被授予伯爵. 拿破仑失败后，投奔路易 Louis 十八世门下，被授予侯爵，政治上没有节操. 又在处理先发权等问题上也有欠公正之处. 他在社会上虽有很高地位，但晚年无亲人，凄凉逝世.

他的业绩使得十七世纪开始出现，经十八世纪 Bernoulli 家族及 L. Euler 等人发展起来的分析学形成一个最高峰. 他将分析学的方法应用到天体力学、位势论和概率论等方面都取得辉煌成果. 他又善长写作，例如在[3],[5]中不用数学公式而用流利的文字来阐述所得的结果. 关于太阳系的起源，1796 年他发表星云假说(所谓 Kant-Laplace 星云假说)，成为宇宙进化论的先驱而闻名.

【参】 [1] P. S. Laplace, Oeuvres complètes I—XIV Gauthier-Villars, 1878—1912; [2] P. S. Laplace, Mécanique céleste, Paris, 1798—1825 (英译本: Celestial mechanics I—IV, Chelsea, 1966; V (in French), Chelsea, 1969); [3] P. S. Laplace, Exposition du système du monde, Paris, 1796; [4] P. S. Laplace, Théorie analytique des probabilités, Courcier, 1812, 第三版 1820; [5] P. S. Laplace, Essai philosophique sur les probabilités, Courcier, 1814.

Lebesgue, Henri Léon (1875, 6, 28—1941, 7, 26)，作为他对Lebesgue积分的创始者而著名，是本世纪法国最有影响的分析学家之一. 他具有基于直观几何概念的深刻的洞察力，给分析学开辟了新时期. 他对 Lebesgue 积分的最初研究是关于长度和面积的博士论文([1]). 这一理论不仅是现代积分论的开端，而且也是 Fourier 级数理论和位势理论发展的转折点. 在拓

扑学中，紧性的定义和紧集的 Lebesgue 数[†]的引入，是他的重要贡献．他把能够分别指名（法 nommer）的数学实在看作为客观存在（法 existence effective）．他一面支持法国经验主义，一面却采取比 E. Borel, R. Baire 更加唯心的立场（→[2]，[4]）．他长期是巴黎大学和法国公学的教授．在第二次世界大战中，因病去世．

【参】 [1] H. Lebesgue, Intégrale, Longueur, aire, Ann. Mat. Pura Appl., (3) 7 (1902), 231—359; [2] H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, J. Math. Pures Appl., (6)1 (1905), 139—216; [3] H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, 第一版 1904, 第二版 1928; [4] Cinq Lettres sur la théorie des ensembles, in E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Gauthier Villars, 第四版 1950, note IV, P. 153—156.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646, 7, 1—1716, 11, 4)，为德国的百科全书式的天才．莱比锡 (Leipzig) 某大学教授之子．他一面从事政治、外交活动，一面对各种科学、技术有创造性的贡献．他的遗稿分类整理为神学、哲学、数学、自然科学、历史和技术等 41 个项目，但完整的全集尚未出版．1666 年，他在阿尔特多夫 (Altdorf) 大学毕业，著“Ars combinatoria”一书，企图以数学为标准将一切学科体系化．1672—1676 年在巴黎时，在政治余暇，他得到 C. Huygens 的指导，研究 R. Descartes, B. Pascal 等的著作，发现微积分学的基本定理，引人巧妙的记号建立了微积分学的基础．1676 年以后，跟随 Hanover 侯爵从事历史编纂．另一方面，他想要扬弃机械论的近世哲学与目的论的中世纪哲学，调和新教旧教的纷争，并且为发展科学制订了世界科学院的计划，还想建立通用符号、通用语言，以便统一一切学科，有无穷的梦想．他建立了统一新旧哲学的单子论 (monadism)．1700 年在他的影响下创立柏林科学院．他的符号逻辑和计算机的构思，到他死后才结出丰硕的成果．

【参】 [1] C. I. Gerhardt 编, Leibnizens mathematische Schriften I—VII, H. W. Schmidt, 1849—1863; [2] C. I. Gerhardt 编, G. W. Leibniz, Philosophische Schriften I—VII, Berlin, 1875—1890; [3] 下村寅太郎，ライプニッツ，弘文堂，1938.

Lie, Marius Sophus (1842, 12, 17—1899, 2, 18)，挪威数学家．作为 Lie 群论的创始人而闻名．1869—1870 年他与 F. Klein 一起研究球面几何学时，得到连续群的概念．这成为后来 Klein 完成埃尔兰根纲领[†] (1872) 的主要原因．他研究的“连续群”，就是现今所谓的局部 Lie 变换群．他使用几何学的概念和分析学的方法（特别是微分方程论），发展他的理论，建立几何学的基础，并把它运用于微分方程论等．这些工作的意义在他生前未得到足够重视，经二十世纪初由 E. Cantan, H. Weyl 等完成了 Lie 群论，到本世纪中期才弄清作为 Lie 群的拓扑群的特性．1872 年他担任克里斯蒂安尼亚 (Christiania)（现名奥斯陆）大学教授，终身任此职．

【参】 [1] F. Engel- P. Heegaard 编, Sophus Lie, Gesammelte Abhandlungen I—VI, Teubner, 1922—1937; [2] S. Lie- F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen I—III, Teubner, 1888—1893; [3] S. Lie-G. Scheffers, Vorlesungen über continuierliche Gruppen, Teubner, 1893 (Chelsea. 第二版, 1971).

Newton, Isaac (1642, 12, 25—1727, 3, 20)，英国数学家、物理学家．生于林肯郡 (Lincolnshire) 的伍尔斯索普 (Woolsthorpe) 村，为自耕农之子．1661 年进剑桥大学学习，深受几何学教授 I. Barrow 的影响，开始研究 J. Kepler 的光学和 R. Descartes 的几何学．

1665 年，发现了二项式定理．同年，为躲避鼠疫而回到故乡，开始三大发现的工作，即光的光谱分解、万有引力定律和微积分学．1667 年回到剑桥大学．翌年发明反射望远镜，提倡光的粒子学说．在这期间，1667 年作为 Barrow 的继承人任剑桥大学教授，讲授光学．同时，推进微积分学的研究．在 Barrow 关于微分、积分互为逆运算的观点以及对无穷级数研究的引导下，Newton 得到了微积分学的基本定理[†]．稍后 G. W. Leibniz[†] 也得到了同样定理．两人后来为优先权问题曾接连不断发生争论，但两人的发现是独立的．由于 Leibniz 的符号法较

优越，因此他的工作对于后来微积分学的发展有直接影响。Newton 在其主要著作《自然哲学的数学原理》(Principia Mathematica Philosophiae Naturalis, 1686—1687)一书中完成了对于日心地动说的力学解释，把 Kepler 的行星运动规律，Galilei 的运动论和 Huygen 的振动论等统一成为 Newton 力学的三定律．这些定律是支配从地面到天体的力学现象的普遍自然规律，是 Descartes 探索自然数学结构思想的最高、最有力的体现，对以后自然科学的发展给予了最本质的影响．而且書的写法仿照 Euclid 的《几何原本》(Stoicheia)，也明显地阐明了他的哲学观点．

1695 年，Newton 移居伦敦，专心研究神学，历任造币局局长、皇家学会会长(1703—1727)．虽说他脱离了科学，但仍留下了很多几何学研究笔记．

【参】 [1] D. T. Whiteside (ed.), Sir Isaac Newton, Mathematical Works, Johnson Reprint, I, 1964; II, 1969; [2] D. T. Whiteside (ed.), Sir Isaac Newton, Mathematical papers, Cambridge Univ. Press. I, 1967; II, 1968; III, 1969; IV—VIII in Press; [3] I. Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, London, 1687 (英译本：Mathematical principles of natural Philosophy, trans. by A. motte in 1729, Univ. of California press, 1934); [4] Sir David Brewster, Memoirs of the Life, writings and discoveries of Sir Isaac Newton, Constable, Edinburgh 1855.

Pascal, Blaise (1623, 6, 19—1662, 8, 19)，生于法国中部的克莱蒙费朗(Clermont-Ferrand)．幼年丧母，由其父 Etienne Pascal (Pascal 的蜗牛线†的发现者)教养，少年时代就在数学上显示了出众的才能．1640 年，受 G. Desargues 的影响，发现关于圆锥曲线的 Pascal 定理†．1642 年，发明了一种计算器．1646 年闻知 Toricelli 的实验以后，对流体理论发生兴趣，亲自作了很多流体实验，对于当时还很流行的"自然厌恶真空，因而真空实际不存在"的说法予以有力的驳斥．发现"Pascal 原理"："流体内任意点上的压力等于其上方流体的重量，且在任意方向上的作用都一样．"据此解释大气和其他流体的各种现象，建立了流体静力学的基础．在 1652—1654 年，出入社交界，接着于 1654 年献身于宗教事业，进 Jansen 派的修道院，就在那里度过他的余年．在这以前，就赌博问题，他同 P. Fermat 进行通信，成为概率论的开始．与此相关，他研究 Pascal 三角形†的性质．在研究中，他自觉地使用和系统地阐述了数学归纳法†．还推出求自然数幂的和 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的公式．他借助于直观的极限概念，得到

$$\int_0^a x^m dx = \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

在修道院，他发表了"Lettres provinciales"(1657)，在这里，他同 Jésuite 学派进行论战．在遗著"Pensées"中，可以看到他对宗教的思索是很深的．但即使到了晚年，仍然没有放弃数学．1658 年，他求出摆线†和它的底线或者和同它底线平行的直线围成的图形的面积及其重心；解决了求这种图形绕这一直线旋转得到的旋转体的体积等问题，留下了微积分学先驱的业绩，使得 G. W. Leibniz 有可能发现微积分学基本定理．关于公理论，Pascal 也有明快的思想．

【参】 [1] L. Brunschwicg 编, B. Pascal, Oeuvres I—XIV, Hachette, Paris, 1904—1914; [2] J. Chevalier 编, B. Pascal, Oeuvres complètes, Bibliothèque de Pléiades, Gallimard, 1954; [3] パスカル全集，人文書院，1959.

Poincaré, Henri (1854, 4, 29—1912, 7, 17)，生于法国南锡(Nancy)，毕业于工科大学(École Polytechnigue)和矿山学院(École des Mines)．1879 年任卡昂(Caen)大学教授，1881 年任巴黎大学教授，1887 年为科学院(Académie des Sciences)院士，1908 年为法国科学院(Académie Française)院士，后在巴黎去世．

他的工作涉及数学各个分支，但以分析学及其在理论物理学上的应用为中心．特别著名的是在 1880 年以后，创立自守函数†理论，解决了解析函数的单值化†问题．关于三体问题†的论文，1889 年获得瑞典国王的 Oscar 奖．在他的三卷《天体力学之新方法》(Mécanique céleste, 1892—1899)中陈述的方法，为天体力学开辟

了新时代. 此外，开辟了代数拓扑学†的道路，对相对论†和量子理论也作出具有启发性的贡献. 他主张为科学而科学([4]). 他也有论述自然科学和数学基础的哲学著作. 文章简明，受人欢迎.

【参】 [1] H. Poincaré, Oeuvres I—XI, Gauthier-Villars, 1916—1956; [2] H. Poincaré Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste I, II, III, Gauthier-Villars, 1892—1899; [3] H. Poincaré, Science et hypothèse, Flammarion, 1903; [4] H. Poincaré, La valeur de la science, Flammarion, 1914; [5] H. Poincaré, Science et méthode, Flammarion, 1908.

Riemann, Georg Friedrich Bernhard (1826, 9, 17—1866, 7, 20)，生于德国汉诺威(Hannover)的布雷塞伦茨(Breselenz)，为牧师之子. 在格廷根(Göttingen)大学和柏林大学学习. 1851年在格廷根大学获得博士学位，1854年任该大学兼职讲师，1857年任副教授，1859年作为 P. G. L. Dirichlet† 的继承人任教授. 由于患肺病，1862年开始过疗养生活，死时年仅四十岁. 短短一生中，在数学各领域作出了划时代的贡献.

1851年的博士论文给出了关于保角映射的基本定理，是几何函数论的基础. 在1854年的就职论文中，定义了 Riemann 积分†，给出关于三角级数收敛的 Riemann 条件. 同年在就职演讲中，讨论了几何学的基础，引入 n 维流形†和 Riemann 空间†的概念，并定义 Riemann 空间的曲率. 1857年在关于 Abel 函数†的论文中，引入 Riemann 面的概念，使 Abel 积分和 Abel 函数的理论系统化. 1858年在关于素数分布的论文中，他用 ζ 函数†论述素数的分布，成为解析数论的先驱. 在这篇论文中提出的关于 ζ 函数的零点分布的 Riemann 猜想†是否成立，至今仍是未解决的问题. 晚年受 W. Weber 的影响，对理论物理学有兴趣，Riemann 在物理学中使用的偏微分方程的讲义，由 W. Weber 编辑出版，是一本有名的书.

【参】 [1] R. Dedekind-H. Weber 编, G. F. B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, Teubner, 第二版 1892; (Nachträge, edited by M. Noether and W. Wirtinger, 1902) (Dover, 1953) [2] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer, 1926 (Chelsea, 1956).

Viète, François (1540—1603, 12, 13)，拉丁名 Franciscus Vieta. 出生于法国西部普瓦图(Poitou)的丰特奈-勒孔特(Fontenay-le-Comte). 在亨利四世手下工作，先作律师，后作政治顾问. 数学是他业余的工作，他第一次用符号代替已知量，确立了符号代数的原理和方法，使当时的代数学系统化. 又因在数学上发现的方法，即明确表示打算把代数学作为解析的方法使用，所以被称为"代数学之父". 另外，他改进 G. Cardano, L. Ferrari 的三次，四次方程解法，并用一般表达式写出来. 他又解出比利时数学家 A. van Roomen 提出的45次代数方程，把它化为对已知的 $\sin\alpha$ 求解 $\sin\alpha/45$. 但他不愿承认负根，拘泥于量纲，不允许把一次项和二次项相加，或用等号联结. 他对三角学也作出了贡献，并将 π 写成无穷乘积的形式(→ 圆周率).

【参】 [1] F. van Schooten 编, Francisci Vietae, Opera Mathematica, Leyden, 1646 (Georg Olms, 1970); [2] Jacob Klein, Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra I, II, Quellen und Studien zur Gesch. Math., (B) **3** (1934), 18—105; (B) **3** (1936), 122—235; [3] 中村幸四郎, 数学史, 啓林館, 1962.

von Neumann, John (1903, 12, 28—1957, 2, 8)，生于匈牙利的布达佩斯(Budapest)，银行家之子，1921年在当地大学毕业. 那时已经发表与 M. Fekete 合写的论文. 后来到苏黎世(Zürich)和柏林大学学习，受到 H. Weyl, E. Schmidt 的影响. 历任柏林大学、汉堡(Hamburg)大学的兼职讲师，1930年移居美国. 从1933年起担任普林斯顿(Princeton)高等研究院教授. 1954年被任命为美国原子能委员会委员. 初期他主要是研究集合论，实变函数论，数学基础理论，对集合论的公理化做出了重要贡献，同时对理论物理学，特别对确立量子力学的数学基础给以极大关心. 从这领域他研究 Hilbert 空间†的理论，得到 Hilbert 空间算子环†的基本结果. 他引入与算子环有联系的连续几何†，完成群上殆周期函数†论，解决在紧群情况下

Hilbert 的第五问题. 他有许多著名的业绩，晚年对于对策论和电子计算机的设计运用做出贡献，在应用数学各方面起重要作用.

【参】 [1] J. von Neumann, Collected Works I—VI, Pergamon, 1961—1963; [2] J. von Neumann, 1903—1957, edited by J. C. Oxtoby, B. J. Pettis, and G. B. Price, Bull. Amer. Math. Soc., **64**, no. 3 (1958), 1—129; [3] J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, 1932; [4] J. von Neumann, Functional operators I, II, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1950; [5] J. von Neumann, Continuous geometry, Princeton Univ. Press, 1960; [6] J. von Neumann and O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior, Princeton Univ. Press, 第三版 1953.

Weierstrass, Karl (1815, 10, 31—1897, 2, 19)，生于德国威斯特伐里亚 (Westfalen) 地方的奥斯滕费尔德 (Ostenfelde)，受信仰旧教的家庭教育. 1834—1838 年在波恩 (Bonn) 大学学习法律. 1839—1840 年移居蒙斯特 (Münster)，受研究椭圆函数论的 C. Gudermann 的影响. 从这时起至 1855 年任教区所属中等学校教师，其间发表有关解析函数论基础的重要论文. 1856 年受聘到柏林大学，同著名数学家 L. Kronecker, E. E. Kummer 等一起工作. 1864 年到他逝世，一直担任柏林大学正教授. 与 B. Riemann 同时，奠定复变函数论的基础是最著名的功绩，与 B. Riemann 利用几何和物理直观相反，Weierstrass 则重视严密的解析表现. 除解析函数论外，他给出了处处不可微分的连续函数，是他对实变函数论的贡献. 极小曲面*理论，是他对几何学的贡献. 他在柏林大学讲演吸引了许多听众，晚年作为数学界的权威受到尊敬.

【参】 [1] K. Weierstrass, Gesammelte Abhandlungen 1—7, Mayer & Miller, Akademische Verlag., 1894—1927; [2] F. Klein, Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I, Springer, 1926 (Chelsea, 1956).

Weyl, Hermann (1885, 11, 9—1955, 12, 8)，生于德国北部石勒苏益格-荷尔斯泰因 (Schleswig-Holstein) 州的埃尔姆斯霍恩 (Elmshorn). 1904 年入格廷根 (Göttingen) 大学学习，有一段时间在慕尼黑 (München) 大学旁听. 1908 年以积分方程论的论文获得格廷根大学博士学位，1910 年担任该大学兼职讲师，1913 年担任苏黎世 (Zürich) 工业大学教授，1926—1927 年在格廷根大学，1928—1929 年担任美国普林斯顿大学访问教授，1930 年担任格廷根大学教授，1933 年担任普林斯顿 (Princeton) 高等研究院教授，1951 年辞去该研究院的正教授任名誉教授，1955 年在苏黎世逝世. 他在广泛的各数学领域中和理论物理学中有许多先驱的、基本的业绩. 其中最著名的有: 由积分方程开始的分析学诸问题、Riemann 面的研究、Diophantus 近似理论、群的表现，特别是紧群、半单 Lie 群的表现论、时空问题、在微分几何中引入仿射联络、量子力学、数学基础理论的研究. 晚年与其子 Joachim 共著 "亚纯曲线论"等. 除了很多数学著作外，他还写有哲学、历史方面的著作和评论等.

【参】 [1] Selecta Hermann Weyl, Birkhänder, Basel u. Stuttgarts, 1956; [2] H. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche, Teubner, 1913, 修订版, 1955 (英译本: The concept of a Riemann surface, Addison-Wesley, 1964); [3] H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, Springer, 1918, 第五版, 1923 (英译本: Space, time, matter, Dover, 1952); [4] H. Weyl, Das Kontinuum, Veit, 1918; [5] H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel, 1928; [6] H. Weyl, Classical groups, Princeton Univ. Press, 1939, 修订版, 1946; [7] H. Weyl - F. J. Weyl, Meromorphic functions and analytic curves, Princeton Univ. Press, 1943; [8] H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften, Oldenbourg, 1926 (英译本: Philosophy of mathematics and natural science, Princeton Univ. Press, 1949); [9] H. Weyl, Symmetry, Princeton Univ. Press, 1952; [10] H. Weyl, Gesammelte Abhandlungen I—IV, Springer, 1968.

附　　　录

公　　式

数　　表

杂志和丛书名略语表

参考文献出版机构一览表

附 录 目 录

带有♦的术语可在中文索引中检索。

公　　式

1. 代数方程♦ (→代数方程)

1) **二次方程♦**　$ax^2 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0)$.

根为　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad (b = 2b')$.

判别式为　$b^2 - 4ac$.

2) **三次方程♦**　$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$.

由 $\xi = x + b/3a$，变换为 $\xi^3 + 3p\xi + q = 0$，其中 $p = (3ac - b^2)/9a^2$，$q = (2b^3 - 9abc + 27a^2d)/27a^3$.

后一方程的根为　$\xi = \sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta}$，$\omega\sqrt[3]{\alpha} + \omega^2\sqrt[3]{\beta}$，$\omega^2\sqrt[3]{\alpha} + \omega\sqrt[3]{\beta}$，

其中　$\omega = e^{2\pi i/3} = \dfrac{-1 + \sqrt{3}\,i}{2}$，$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \dfrac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4p^3}}{2}$　(Cardano 公式♦).

判别式为　$q^2 + 4p^3$.

不可约情形♦（当 $q^2 + 4p^3 < 0$ 时）. 令 $\alpha = re^{i\theta} (\beta = \bar{\alpha})$，则根为

$$\xi = 2\sqrt[3]{r}\cos(\theta/3),\ 2\sqrt[3]{r}\cos[(\theta + 2\pi)/3],\ 2\sqrt[3]{r}\cos[(\theta + 4\pi)/3].$$

3) **四次方程♦**　$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0)$.

由 $\xi = x + b/4a$，变换为 $\xi^4 + p\xi^2 + q\xi + r = 0$.

后一方程的三次预解式为 $t^3 - pt^2 - 4rt + (4pr - q^2) = 0$. 若三次预解式的一个根为 t_0，则上面方程的根 ξ 是两个二次方程

$$\xi^2 \pm \sqrt{t_0 - p}\,[\xi - q/2(t_0 - p)] + t_0/2 = 0 \quad \text{(Ferrari 公式♦)}$$

的解.

2. 三　角　学

I) 三角函数(→三角学)

1) 在图 1 中 $OA = OB = OP = 1$，并且

$MP = \sin\theta$，　$OM = \cos\theta$，　$AT = \tan\theta$，

$BL = \cot\theta$，　$OT = \sec\theta$，　$OL = \operatorname{cosec}\theta$.

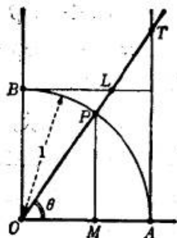


图 1

2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，

$\tan\theta = \sin\theta/\cos\theta$，　$\cot\theta = 1/\tan\theta$，　$\sec\theta = 1/\cos\theta$，

$\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$，　$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$，　$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$.

3)

	θ	$-\theta$	$\pi/2\pm\theta$	$\pi\pm\theta$	$n\pi\pm\theta$
sin	s	$-s$	c	$\mp s$	$\pm(-1)^n s$
cos	c	c	$\mp s$	$-c$	$(-1)^n c$
tan	t	$-t$	$\mp 1/t$	$\mp t$	$\pm t$

4)

α	$0°$ 0	$15°$ $\pi/12$	$18°$ $\pi/10$	$22.5°$ $\pi/8$	$30°$ $\pi/6$	$36°$ $\pi/5$	$45°$ $\pi/4$	
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cos\alpha$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin\alpha$
	$\pi/2$ $90°$	$5\pi/12$ $75°$	$2\pi/5$ $72°$	$3\pi/8$ $67.5°$	$\pi/3$ $60°$	$3\pi/10$ $54°$	$\pi/4$ $45°$	α

5) 加法定理

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$,

$\tan(\alpha\pm\beta)=(\tan\alpha\pm\tan\beta)/(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$.

6) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$,

$\tan 2\alpha=2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$.

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$,

$\tan 3\alpha=(3\tan\alpha-\tan^3\alpha)/(1-3\tan^2\alpha)$.

$$\sin n\alpha=\sum_{i=0}^{(n-1)/2}\binom{n}{2i+1}(-1)^i\sin^{2i+1}\alpha\cos^{n-(2i+1)}\alpha,$$

$$\cos n\alpha=\sum_{i=0}^{n/2}\binom{n}{2i}(-1)^i\sin^{2i}\alpha\cos^{n-2i}\alpha.$$

7) $\sin^2(\alpha/2)=(1-\cos\alpha)/2$, $\cos^2(\alpha/2)=(1+\cos\alpha)/2$, $\tan^2(\alpha/2)=(1-\cos\alpha)/(1+\cos\alpha)$.

8) $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$, $2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$,

$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$, $-2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$.

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$,

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$,

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos[(\alpha+\beta)/2]\cos[(\alpha-\beta)/2]$,

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin[(\alpha+\beta)/2]\sin[(\alpha-\beta)/2]$.

II) 三角形

如图 2 所示，设三角形 ABC 的内角分别为 α, β, γ；对边长度分别为 a, b, c；面积为 S；内切圆、外接圆、$\angle A$ 的旁切圆的半径分别为 r, R, r_A；从顶点 A 到对边 BC 的垂线为 AH；BC 边的中点为 M；$\angle A$ 的平分线为 AD；并且 AH, AM, AD 的长度分别为 h_A, m_A, t_A. 对于 B, C，可以规定类似的表示法．令 $s=(a+b+c)/2$．（当字母 A, B, C，轮换时，类似的公式以…表示．）

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ （正弦公式♦）.

$a=b\cos\gamma+c\cos\beta,\ \cdots$ （第一余弦公式♦）.

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\ \cdots$ （第二余弦公式♦）.

$\sin^2(\alpha/2)=(s-b)(s-c)/bc,\ \cdots;\quad \cos^2(\alpha/2)=s(s-a)/bc,\ \cdots.$

$(b+c)\sin(\alpha/2)=a\cos[(\beta-\gamma)/2],\ \cdots;\quad (b-c)\cos(\alpha/2)=a\sin[(\beta-\gamma)/2],\ \cdots$

$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan[(\alpha+\beta)/2]}{\tan[(\alpha-\beta)/2]},\ \cdots$ （Napier 公式♦）.

$S=ah_A/2=(1/2)bc\sin\alpha=(1/2)a^2\sin\beta\sin\gamma/\sin\alpha=abc/4R=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

$=rs=r_A(s-a)=\sqrt{rr_Ar_Br_C}$

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ （Heron 公式♦）.

$r=(s-a)\tan(\alpha/2)=4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2).$

$r_A=s\tan(\alpha/2)=(s-b)\cot(\gamma/2)=4R\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2).$

$1/r=(1/h_A)+(1/h_B)+(1/h_C).$

$m_A^2=(2b^2+2c^2-a^2)/4=(b^2+c^2+2bc\cos\alpha)/4.$

$f_A=2bc\cos(\alpha/2)/(b+c)=2\sqrt{bcs(s-a)}/(b+c).$

$f_Af_Bf_C=8abcrs^2/(b+c)(c+a)(a+b).$

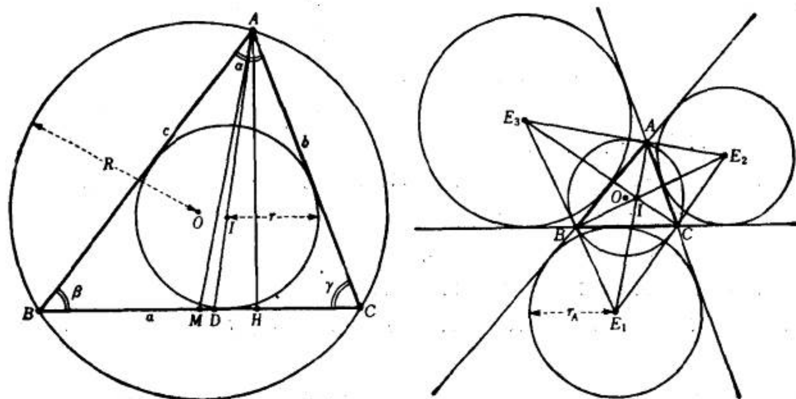


图 2

III）球面三角形

设球面三角形 ABC 的内角为 α,β,γ；对边为 a,b,c；面积为 S；球的半径为 ρ.

$\sin a:\sin b:\sin c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$ （正弦公式♦）.

$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha,\ \cdots;\quad \cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a,\ \cdots$ （余弦公式♦）.

$\sin a\cos\beta=\cos b\sin c-\sin b\cos c\cos\alpha,\ \cdots$ （正弦余弦公式♦）.

$\cot a\sin b=\cos b\cos\gamma+\cot\alpha\sin\gamma,\ \cdots$ （余切公式♦）.

$\tan[(a+b)/2]/\tan[(a-b)/2]=\tan[(\alpha+\beta)/2]/\tan[(\alpha-\beta)/2],\ \cdots$ （正切公式♦）.

$\tan[(\alpha+\beta)/2]\tan(\gamma/2)=\cos[(a-b)/2]/\cos[(a+b)/2],\ \cdots;$

$\tan[(\alpha-\beta)/2]\tan(\gamma/2)=\sin[(a-b)/2]/\sin[(a+b)/2],\cdots;$

$\tan[(a+b)/2]\cot(c/2)=\cos[(\alpha-\beta)/2]/\cos[(\alpha+\beta)/2],\cdots;$

$\tan[(a-b)/2]\cot(c/2)=\sin[(\alpha-\beta)/2]/\sin[(\alpha+\beta)/2],\cdots$ (Napier 公式♦).

$S=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)\rho^2.$

在直角球面三角形 ($\gamma=\pi/2$) 中，当按 mod 5 来取下标时(如图 3 所示)，有

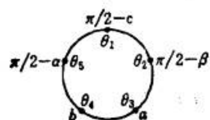


图 3

$\sin\theta_i=\tan\theta_{i+1}\tan\theta_{i-1}=\cos\theta_{i+2}\cos\theta_{i-2}$ (Napier 分圆法则♦).

例如，有

$\cos c=\cos a\cos b=\cot\alpha\cot\beta,$

$\cos\beta=\tan a\cot c=\cos b\sin\alpha,$

$\sin a=\tan b\cot\beta=\sin c\sin\alpha.$

3. 向量，坐标

三维向量记为 $\boldsymbol{A}=(A_x,A_y,A_z)=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k},\ |\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}.$

I) 向量代数(→向量)

数量积 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta$

(θ 为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 之间的夹角).

向量积 $$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}.$$

$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta.$

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}.\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|^2.\ \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}=0.\ \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0.$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2=|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2.$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}.$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{C}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0.$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})=\boldsymbol{A}\cdot\{\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D})\}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D})-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}).$

向量三重积 $$[\boldsymbol{ABC}]=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\\C_x&C_y&C_z\end{vmatrix}.$$

$$[\boldsymbol{BCD}]\boldsymbol{A}+[\boldsymbol{ACD}]\boldsymbol{B}+[\boldsymbol{ABD}]\boldsymbol{C}=[\boldsymbol{ABC}]\boldsymbol{D}.\quad[\boldsymbol{ABC}][\boldsymbol{EFG}]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}&\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{G}\\\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{F}&\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{G}\\\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{E}&\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{F}&\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{G}\end{vmatrix}.$$

II) 向量场的微分(→向量)

$\nabla=\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ (微分算子),

$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}$ (φ 的梯度),

$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$ ($\boldsymbol{A}$ 的旋度),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (\boldsymbol{A}\text{ 的散度}),$$

$$\Delta\varphi \equiv \nabla^2\varphi \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \qquad (\varphi\text{ 的 Laplace 算子}).$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A},$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}\varphi,$$

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\operatorname{div}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}\operatorname{div}\boldsymbol{A},$$

$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{A}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B}.$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0, \quad \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = 0. \quad \Delta\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

$$\Delta(f\circ\varphi) = (df/d\varphi)\Delta\varphi + (d^2f/d\varphi^2)(\operatorname{grad}\varphi)^2, \quad \Delta(\varphi\psi) = \varphi\Delta\psi + \psi\Delta\varphi + 2(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi).$$

III）向量场的积分(一向量，线积分和面积分)

设空间区域D的边界为B，D的体积元素为dV，B的面积元素为dS，并且 $d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$（$\boldsymbol{n}$是曲面$B$的外法线向量）.

Gauss 定理♦

$$\iiint_D \operatorname{div}\boldsymbol{A}dV = \iint_B d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{A} = \iint_B(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{A})dS,$$

$$\iiint_D \operatorname{rot}\boldsymbol{A}dV = \iint_B d\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{A} = \iint_B(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})dS,$$

$$\iiint_D \operatorname{grad}\varphi dV = \iint_B \varphi d\boldsymbol{S};$$

Green 定理♦

$$\iint_B \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS = \iiint_D(\varphi\Delta\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi)dV,$$

$$\iint_B\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \iiint_D(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV,$$

$$4\pi\varphi(x_0) = -\iiint_D\frac{\Delta\varphi}{r}dV + \iint_B\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS,$$

（r是与x_0点间的距离）.

设B是具有边界曲线Γ的有边曲面，ds是Γ的线素，dS是B的面积元素，并且对于Γ的单位切线向量 $\boldsymbol{t}$，$d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{t}ds$，以及当适当选择曲面法线$\boldsymbol{n}$的正方向时，$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}dS$，有

Stokes 定理♦

$$\iint_B d\boldsymbol{S}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \oint_\Gamma \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_\Gamma(\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{A})ds, \quad \iint_B d\boldsymbol{S}\times\operatorname{grad}\varphi = \oint_\Gamma\varphi d\boldsymbol{s},$$

若D是单连通域，$\boldsymbol{v}$在D的边界和无穷远点充分迅速地接近于 0，则有

Helmholtz 定理♦

$$\boldsymbol{v} = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{A}, \quad \varphi = -\iiint_D\frac{\operatorname{div}\boldsymbol{v}}{4\pi r}dV, \quad \boldsymbol{A} = \iiint_D\frac{\operatorname{rot}\boldsymbol{v}}{4\pi r}dV.$$

IV）运动坐标系♦

设 d/dt，d^*/dt 分别为关于静止系和运动系的对时间t的变化．设$\boldsymbol{v}$为各点的速度，有

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^*\varphi}{dt} - \boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi, \quad \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{A}}{dt} - [\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{v}].$$

关于旋转坐标系，有 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$.

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{d^*\boldsymbol{A}}{dt} + [\boldsymbol{w} + \boldsymbol{A} - ((\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})\cdot\operatorname{grad})\boldsymbol{A}]$$

当积分域也是 t 的函数时，

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}=\int\left\{\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\operatorname{grad}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\right\}\cdot d\boldsymbol{s},$$

$$\frac{d}{dt}\iint \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\left\{\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\operatorname{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\right\}\cdot d\boldsymbol{S},$$

$$\frac{d}{dt}\iiint \varphi dV=\iiint\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi)+\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{v}\right\}dV=\iiint\frac{\partial\varphi}{\partial t}dV+\iint\varphi\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}.$$

V）曲线坐标系♦(→坐标)

设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 维 Euclid 空间的直角坐标，若

$$x_j=\varphi_j(u_1,\cdots,u_n)\quad(j=1,\cdots,n),\qquad J=\det(\partial\varphi_j/\partial u_k)\neq 0,$$

则 $(u_1,\cdots,u_n)$ 可看做 n 维空间的坐标系，并且原来的空间成为具有第一基本量†

$$g_{jk}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_k}\quad(j,k=1,\cdots,n),\qquad g=\det(g_{jk})=J^2$$

的 Riemann 空间†.

特别，当度量空间为对角型 $g_{jk}=g_j^2\delta_{jk}$ 时，坐标系 $(u_1,\cdots,u_n)$ 称为正交曲线坐标†系(或等温坐标†系). 这时，有 $J=g_1\cdots g_n$，线素为 $ds^2=\sum_{j=1}^{n}g_j^2du_j^2$.

对于数量 f，向量 $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，有

$$(\operatorname{grad}f)_j=\frac{1}{g_j}\frac{\partial f}{\partial u_j}(j=1,\cdots,n),\quad \Delta f=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{J}{g_j^2}\frac{\partial f}{\partial u_j}\right),$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{J}{g_j}\xi_j\right),\quad(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi})_{jk}=\frac{1}{g_jg_k}\left[\frac{\partial(g_k\xi_k)}{\partial u_j}-\frac{\partial(g_j\xi_j)}{\partial u_k}\right]\qquad(j,k=1,\cdots,n).$$

$$\operatorname{rot}\ 当\begin{cases}n=2\ 时为数量\ \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}=(\operatorname{rot}\boldsymbol{\xi})_{12},\\ n=3\ 时为向量\ \operatorname{rot}\boldsymbol{\xi}=((\operatorname{rot}\xi)_{23},(\operatorname{rot}\xi)_{31},(\operatorname{rot}\xi)_{12}).\end{cases}$$

下面的实例都是正交曲线坐标系.

1） 平面曲线坐标

在这节里令

$$x_1=x,\quad x_2=y,\quad u_1=u,\quad u_2=v,\quad g_1=p,\quad g_2=q.$$

$$ds^2=p^2dx^2+q^2dy^2,\quad J=\partial(x,y)/\partial(u,v)=\sqrt{pq}.$$

适当地选择函数 $U=U(u)$，$V=V(v)$，平面正交曲线坐标可表示成下列形式：

$x+iy=F(U+iV)$，（F 为复解析函数†）.

i） 极坐标†♦ (r,θ) (图 4)

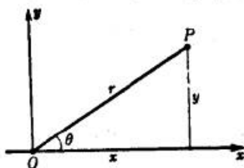


图 4

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta;\quad x+iy=\exp(\log r+i\theta).$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\arctan(y/x).$$

$$p=1,\quad q=r,\quad J=r,\quad ds^2=dr^2+r^2d\theta^2.$$

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}.$$

ii） 椭圆坐标†♦ (μ,ν) (图 5)

在共焦有心圆锥曲线族 $\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}=1\ (a>b)$ 中，过给定点 $P(x,y)$ 的曲线有两条，对应于两个 ρ 值，记作 μ 和 ν，其中 $\mu>-b^2>\nu>-a^2$. 对应于 $\rho=\mu$ 和 $\rho=\nu$ 的曲线分别

是椭圆和双曲线．这时，存在关系

$$x^2=(\mu+a^2)(\nu+a^2)/(a^2-b^2),\quad y^2=(\mu+b^2)(\nu+b^2)/(b^2-a^2).$$

设焦点为 $(\pm c,0)(c^2=a^2-b^2)$，则如图 5 所示，有

$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，$r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$，其中 r_1，r_2 为到两焦点的距离，并且

$$4(a^2+\mu)=(r_1+r_2)^2,\quad 4(a^2+\nu)=(r_1-r_2)^2.$$

$$p=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu-\nu}{(\mu+a^2)(\mu+b^2)}},\quad q=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu-\mu}{(\nu+a^2)(\nu+b^2)}}.$$

iii）抛物线坐标[†♦] (α,β)（图 6）

在以原点为焦点、x 轴为主轴的抛物线族 $y^2=4\rho(x+\rho)$ 中，过给定点 $P(x,y)$ 的曲线有两条，对应于两个 ρ 值，记为 $\alpha,\beta(\alpha>0>\beta)$．这时，有 $x=-(\alpha+\beta)$，$y=\sqrt{-4\alpha\beta}$．

iv）等轴双曲线坐标[†♦] (u,v)（图 7）

在 iii）中用 $-y$，x 来代替 $x/2$，$y/2$，有 $\sqrt{\alpha}=u$，$\sqrt{-\beta}=v$，即 $x=uv$，$y=(u^2-v^2)/2$；$x+iy=i(u-iv)^2/2$，$u^2,v^2=\sqrt{x^2+y^2}\pm y$，$p=q=\sqrt{u^2+v^2}$．

$x=$ 常数或 $y=$ 常数为等轴双曲线．

v）双极坐标[†♦] (ξ,η)（图 8）

把平面上的点 $P(x,y)$ 表示为过两定点 $(\pm a,0)$ 的圆和到两定点 $(\pm a,0)$ 的距离之比是一常数的点的轨迹（Apollonius 圆[♦]）的交点．关系为

$$x=\frac{a\sinh\xi}{\cosh\xi+\cos\eta},\quad y=\frac{a\sin\eta}{\cosh\xi+\cos\eta}\qquad(-\infty<\xi<\infty,\ 0\leqslant\eta\leqslant 2\pi),$$

$$p=q=\frac{a}{\cosh\xi+\cos\eta}.$$

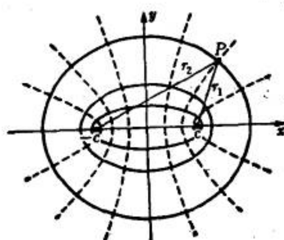


图 5



图 6

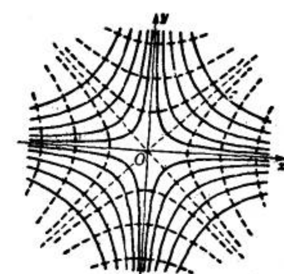


图 7

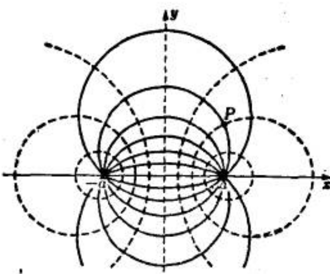


图 8

2) **空间(三维)曲线坐标**

在这节里,令 $x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z$.

i) 柱面坐标†♦ (ρ,φ,z) (图 9)

$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z.$

$$ds^2=d\rho^2+\rho^2d\varphi^2+dz^2,\quad J=\rho.\quad \Delta f=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

ii) 极坐标(球面坐标)†♦ (r,θ,φ) (图 9)

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \varphi=\arctan(y/x),\quad \theta=\arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z).$

角 θ,φ 分别称为天顶角♦,方位角♦.

$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2,\quad J=r^2\sin\theta.$

$$\Delta f=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

iii) Euler 角†(图 10)

对于具有公共原点的两组直线正交坐标系 (x,y,z) 和 (ξ,η,ζ), 设 z 轴和 ζ 轴的夹角为 θ; zx 平面和 $z\zeta$ 平面的夹角为 φ; xy 平面和 $\xi\eta$ 平面的交线 OK 和 η 轴的夹角 (或 $z\zeta$ 平面和 $\xi\eta$ 平面的交线 OL 和 ξ 轴的夹角)为 ψ. 角 θ,φ,ψ 称为 Euler 角♦.

一组坐标轴关于另一组坐标系的方向余弦如下:

	x	y	z
ξ	$\cos\varphi\cos\theta\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi$	$\sin\varphi\cos\theta\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi$	$-\sin\theta\cos\varphi$
η	$-\cos\varphi\cos\theta\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\cos\theta\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi$	$\sin\theta\sin\psi$
ζ	$\cos\varphi\sin\theta$	$\sin\varphi\sin\theta$	$\cos\theta$

iv) 旋转面坐标♦ (u,v,ρ)

设 (u,v) 为 $z\rho$ 平面上的曲线坐标(→1)). 把 $z\rho$ 平面上的坐标同 $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$ 结合起来,给出旋转面坐标 (u,v,ρ). 有

$ds^2=p^2du^2+q^2dv^2+\rho^2d\varphi^2$, 其中 p,q 是坐标 (u,v) 的对应值.

v) 广义柱面坐标♦ (u,v,z)

xy 平面上的曲线坐标 (u,v) 与 z 结合而成的坐标. 有 $ds^2=p^2du^2+q^2dv^2+dz^2$.

相应于 (u,v) 的不同选法,有如下几种坐标

(u,v)	旋转面坐标	广义柱面坐标
直角坐标	柱面坐标	直角坐标
极坐标 (1) i))	极 坐 标	柱面坐标
椭圆坐标 (1) ii))	旋转椭圆面坐标(相应于 ρ 是短轴还是长轴,有长球、扁球之分)	椭圆柱面坐标
抛物线坐标 (1) iii))	旋转抛物面坐标(z 轴作为抛物线的主轴)	抛物柱面坐标
等轴双曲线坐标 (1) iv))	旋转双曲面坐标	双曲柱面坐标
双极坐标 (1) v))	{圆环面坐标 / 双 极 坐 标} (把过两定点的直线分别取为 ρ 轴和 z 轴)	双极柱面坐标

vi) 椭圆面坐标[†♦] (λ, μ, ν) (图 11)

共焦有心二次曲面族 $\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}=1$ $(a>b>c>0)$ 中，通过给定点 $P(x, y, z)$ 的曲面有三个，对应于三个 ρ 值，记为 λ, μ, ν，$(\lambda>-c^2>\mu>-b^2>\nu>-a^2)$. 当 $\rho=\lambda, \mu, \nu$ 时，分别为椭圆面[†]，单叶双曲面[†]，双叶双曲面[†]. 有

$$x^2=\frac{h(a)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad y^2=\frac{h(b)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\quad z^2=\frac{h(c)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)};$$

$$h(a)=(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2).$$

$$g_1=\frac{\sqrt{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}}{2\rho(\lambda)},\quad g_2=\frac{\sqrt{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}}{2\rho(\mu)},\quad g_3=\frac{\sqrt{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}}{2\rho(\nu)};$$

$$\rho(t)=\sqrt{(t+a^2)(t+b^2)(t+c^2)}.$$

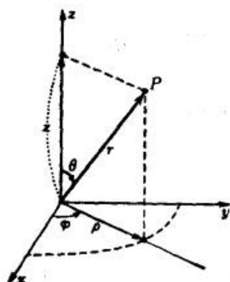


图 9

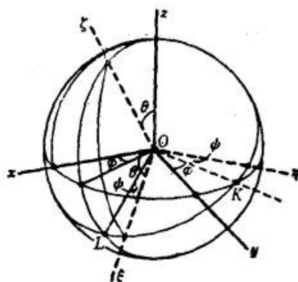


图 10

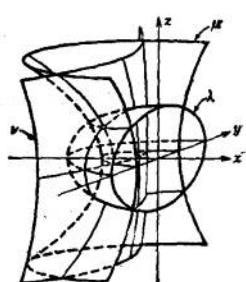


图 11

4. 微分几何

I) 古典微分几何学(→曲线和曲面的微分几何学)

1) 平面曲线(图 12)

在曲线 $y=f(x)$ 上的一点 $P(x_0, y_0)$ 处，

切线方程为 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

$PT=|y_0\sqrt{1+y_0'^2}/y_0'|$，切线影[♦]为 $TM=y_0/y_0'$.

法线方程为 $f'(x_0)(y-y_0)+(x-x_0)=0$.

$PN=|y_0\sqrt{1+y_0'^2}|$，法线影[♦]为 $MN=y_0y_0'$.

切线斜率为 $\tan\alpha=f'(x_0)=y_0'$.

曲率[†♦]为 $\kappa=1/PQ=f''(x_0)/[1+f'(x_0)^2]^{3/2}$.

曲率中心[†♦] Q 的坐标为

$$(x_0-f'(x_0)[1+f'(x_0)^2]/f''(x_0),\quad f(x_0)+[1+f'(x_0)^2]/f''(x_0)).$$

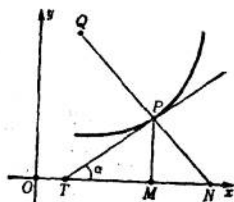


图 12

2) 空间曲线 $x_i=x_i(t)(i=1,2,3)$，或 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$.

曲线 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ 的线素为 $ds=\sqrt{(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2}=\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{3}\dot{x}_\alpha^2}\,dt\quad\left(\cdot=\frac{d}{dt}\right)$.

曲率[†♦]为 $\kappa=\sqrt{\sum\ddot{x}_\alpha^2-\ddot{s}^2}/\dot{s}^2$.

若取 $t=s$，则曲率为 $\kappa=\sqrt{(\sum x_\alpha''^2)}$，挠率[†♦]为 $\tau=[\det(x_\alpha', x_\alpha'', x_\alpha''')_{\alpha=1,2,3}]/\kappa^2\ ('=d/ds)$.

当动标架†记为 $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})$ 时，有　$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}/\kappa$, $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\eta}$ (外积).

Frenet-Serret 公式†♦　$\xi = \kappa\eta$, $\eta' = -\kappa\xi + \tau\zeta$, $\zeta' = -\tau\eta$.

3)　三维 Euclid 空间的曲面 $x_\alpha = x_\alpha(u_1, u_2)(\alpha = 1, 2, 3)$.

曲面的第一基本量†♦为　$g_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_k}$　$(j, k = 1, 2)$.　$g = \det(g_{jk}) > 0$.

设 (g^{jk}) 为 (g_{jk}) 的逆矩阵，则

在点 $x_\alpha^{(0)}$ 的切平面†♦为　$\det(x_\alpha - x_\alpha^{(0)}, (\partial x_\alpha/\partial u_1)^{(0)}, (\partial x_\alpha/\partial u_2)^{(0)}) = 0$.

在点 $x_\alpha^{(0)}$ 的法线♦为　$x_\alpha - x_\alpha^{(0)} = t\nu_\alpha^{(0)}$，其中 t 为参数，ν_α 为单位法线向量，由

$$\nu_\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(x_\beta, x_\gamma)}{\partial(u_1, u_2)} \quad (\delta_{\alpha\beta\gamma}^{123} = +1)$$

给出.

第二基本量†♦为　$h_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{3} \nu_\alpha \frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_j \partial u_k} = -\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial u_j}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_k}$.　$h = \det(h_{jk})$.

主曲率半径†♦ R_1, R_2 是二次方程 $\frac{1}{R^2} - \sum_{j,k} g^{jk}h_{jk}\frac{1}{R} + \frac{h}{g} = 0$ 的根.

S. Germain 的平均曲率†♦为 $H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} g^{jk}h_{jk}$，并且给定的曲面是极小曲面†♦，其条件为 $H = 0$.

Gauss 的全曲率†♦为 $K = \frac{1}{R_1R_2} = \frac{h}{g}$，并且曲面是可展曲面，其条件为 $K = 0$. 设 g_{ik} 为基本张量，使用 Riemann 几何学的记法，有

$$\frac{\partial^2 x_\alpha}{\partial u_j \partial u_k} = \sum_{a=1}^{3}\left\{ {a \atop jk} \right\}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_a} + h_{jk}\nu_\alpha \qquad \text{(Gauss 公式†♦)}.$$

$R_{ijkl} = h_{jl}h_{ik} - h_{jk}h_{il}$　(Gauss 方程).

$h_{jk,l} = h_{jl,k}$　(Codazzi-Mainardi 方程†♦).

$$K = \frac{R_{1212}}{g} = \frac{R}{2} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left\{ {2 \atop 11} \right\}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\left\{ {2 \atop 12} \right\}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\left\{ {1 \atop 22} \right\}\right) - \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\left\{ {1 \atop 12} \right\}\right)\right].$$

$\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial u_j} = -\sum_{k,l} h_{jk}g^{kl}\frac{\partial x_\alpha}{\partial u_l}$　(Weingarten 公式†♦).

第三基本量♦

$$l_{jk} = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial u_j}\frac{\partial \nu_\alpha}{\partial u_k} = \sum_{s,t} g^{st}h_{js}h_{kt} = 2Hh_{jk} - Kg_{jk}, \quad \det(l_{jk}) = K^2 g = Kh.$$

4)　测地曲率†♦. 设曲面 S 上的曲线 $C: u_i = u_i(s)$ 在 P 点处的曲率半径为 ρ，C 的密切平面和曲面的切平面的夹角为 θ，则 C 在 P 处的测地曲率 ρ_g 为

$$\rho_g = \rho\cos\theta = \sqrt{g}\ \det\left(\frac{du_i}{ds}, \frac{d^2u_i}{ds^2} + \sum_{j,k}\left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{du_j}{ds}\frac{du_k}{ds}\right)_{i=1,2} \text{ 给出.}$$

C 是测地线†♦的条件为　$\rho_g = 0$.

设曲面 S 上的单连通区域 D 的边界 Γ 是由 n 条光滑曲线组成的，在两条相邻曲线的交点处的外角为 $\theta_\alpha(\alpha = 1, \cdots, n)$，则有

$$\int_\Gamma \rho_g ds + \iint_D K dS = 2\pi - \sum_{\alpha=1}^{n} \theta_\alpha. \qquad \text{(Gauss-Bonnet 公式}^{\dagger\blacklozenge}\text{)}.$$

II) Riemann 几何学，张量分析(→张量分析)

在这节里，下标使用 Einstein 约定(省略求和符号).

1) 数值张量

Kronecker $\delta^{\dagger\blacklozenge}$ $\quad \delta_{jk}, \delta^{jk}, \delta^j_k = \begin{cases} 1\ (j = k) \\ 0\ (j \neq k). \end{cases} \quad \delta^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_p} = \det(\delta^{j_\mu}_{k_\nu})_{\mu,\nu=1,\cdots,p}$

$$= \begin{cases} 0 & (\{j_\mu\} \neq \{k_\nu\}), \\ +1 & (\{j_\mu\} = \{k_\nu\} \text{ 且 } (j_\mu) \text{ 是 } (k_\nu) \text{ 的偶置换}), \\ -1 & (\{j_\mu\} = \{k_\nu\}) \text{ 且 } (j_\mu) \text{ 是 } (k_\nu) \text{ 的奇置换}. \end{cases}$$

Eddington $\varepsilon^{\blacklozenge}$ $\quad \varepsilon_{j_1\cdots j_n} = \delta^{1\cdots n}_{j_1\cdots j_n}, \quad \varepsilon^{j_1\cdots j_n} = \delta^{j_1\cdots j_n}_{1\cdots n}.$

$\delta^{j_1\cdots j_p j_{p+1}\cdots j_n}_{k_1\cdots k_p j_{p+1}\cdots j_n} = (n-p)!\,\delta^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_p}.\ \det(a^\mu_\nu)_{\mu,\nu=1,\cdots,n} = \varepsilon^{j_1\cdots j_n} a^1_{j_1} a^2_{j_2} \cdots a^n_{j_n} = \varepsilon_{j_1\cdots j_n} a^{j_1}_1 a^{j_2}_2 \cdots a^{j_n}_n.$

2) 对于基本量张量 g_{jk}，设矩阵 (g_{jk}) 的逆矩阵为 (g^{jk})，$g = \det(g_{jk})$.

Christoffel 符号$^{\dagger\blacklozenge}$

$$\left\{ {i \atop jk} \right\} = \frac{1}{2} g^{ia} \left[\frac{\partial g_{aj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ak}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^a} \right] = \left\{ {i \atop kj} \right\}, \quad \left\{ {a \atop ak} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial x^k},$$

在坐标变换下的变换规则为

$$\left\{ {\bar{i} \atop \bar{j}\bar{k}} \right\} = \frac{\partial \bar{x}^{i}}{\partial x^{i}} \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{j}} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{k}} \left\{ {i \atop jk} \right\} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^{j} \partial \bar{x}^{k}} \right)$$

具有相同变换规则的几何对象 Γ^i_{jk} 称为仿射联络系数.

挠率张量$^{\dagger\blacklozenge}$ $\quad S^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}.$

测地线$^{\dagger\blacklozenge}$的方程 $\quad \dfrac{d^2x^i}{ds^2} + \left\{ {i \atop jk} \right\} \dfrac{dx^j}{ds} \dfrac{dx^k}{ds} = 0.$

关于仿射联络系数 Γ^i_{jk}，权 W 的张量的共变微分$^{\dagger\blacklozenge}$是

$$T^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q;l} = \partial T^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q}/\partial x^l + \sum_{\nu=1}^{p} T^{j_1\cdots j_{\nu-1} a j_{\nu+1}\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q} \Gamma^{j_\nu}_{al} - \sum_{\mu=1}^{q} T^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_{\mu-1} a k_{\mu+1}\cdots k_q} \Gamma^a_{lk_\mu} - W T^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q} \Gamma^a_{al}.$$

对于 Christoffel 符号用；l 表示共变微分，则有

$g_{jk;l} = 0,\ g^{jk}_{;l} = 0,\ \delta^j_{k;l} = 0,\ \sqrt{g}\,\varepsilon_{j_1\cdots j_n;l} = 0,\ (1/\sqrt{g})\varepsilon^{j_1\cdots j_n}{}_{;l} = 0.$

对于数量 f $\quad \mathrm{grad}\, f = (f_{;j})$,

对于共变向量 v_i $\quad \mathrm{rot}\, v = (v_{i;k} - v_{k;i}) = (\partial v_i/\partial x^k - \partial v_k/\partial x^i)$,

对于反变向量 v^i $\quad \mathrm{div}\, v = v^j_{;j} = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial(\sqrt{g}\, v^j)}{\partial x^j}.$

Beltrami 的第一种微分算子$^{\blacklozenge}$ $\quad \Delta_1 f = g^{jk} f_{;j} f_{;k}$,

Beltrami 的第二种微分算子$^{\blacklozenge}$ $\quad \Delta_2 f = \mathrm{div\, grad}\, f = \dfrac{1}{\sqrt{g}} \dfrac{\partial(\sqrt{g}\, g^{jk}(\partial f/\partial x^k))}{\partial x^j}.$

对具有充分光滑的边界 Γ 的区域 D，设内法线导数为 $\partial/\partial n$，体积元素为 dV，在 Γ 上的面积元素为 dS，有 Green 公式$^{\dagger\blacklozenge}$

$$\int_D (\Delta_1(\varphi\psi) + \psi\Delta_2\varphi) dV = -\int_\Gamma \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

$$\int_D (\varphi\Delta_2\psi - \psi\Delta_2\varphi)dV = \int_\Gamma \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS.$$

曲率张量†♦的符号,关于一般的仿射联络系数 Γ^i_{jk} 记为 B^i_{jkl},特别,当 $\Gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\}$ 时记为 R^i_{jkl}. 有下列公式:

$$B^i_{jkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^a_{jl}\Gamma^i_{ak} - \Gamma^a_{jk}\Gamma^i_{al};$$

$$R_{ijkl} = g_{ai}R^a_{jkl} = -R_{ijlk} = R_{klij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}\right]$$
$$+ g_{ab}\left(\left\{ {b \atop ik} \right\}\left\{ {a \atop jl} \right\} - \left\{ {b \atop il} \right\}\left\{ {a \atop jk} \right\}\right);$$

Bianchi 第一恒等式♦ $R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0$,

$$-(B^i_{jkl} + B^i_{klj} + B^i_{ljk}) = 2(S^i_{jk|l} + S^i_{kl|j} + S^i_{lj|k}) + 4(S^i_{ja}S^a_{kl} + S^i_{ka}S^a_{lj} + S^i_{la}S^a_{jk});$$

Bianchi 第二恒等式♦ $R^i_{jkl;m} + R^i_{jlm;k} + R^i_{jmk;l} = 0$,

$$B^i_{jkl|m} + B^i_{jlm|k} + B^i_{jmk|l} = -2(B^i_{jma}S^a_{kl} + B^i_{jka}S^a_{lm} + B^i_{jla}S^a_{mk});$$

Ricci 张量†♦ $R_{jk} = -R^i_{jkl} = R_{kj}$;

数量曲率†♦ $R = g^{jk}R_{jk}$;

Ricci 公式♦ $T^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q|s|t} - T^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q|t|s}$

$$= -\sum_{\nu=1}^{p} T^{j_1\cdots j_{\nu-1}aj_{\nu+1}\cdots j_p}_{k_1\cdots\cdots k_q} B^{j_\nu}_{ast} + \sum_{\mu=1}^{q} T^{j_1\cdots\cdots j_p}_{k_1\cdots k_{\mu-1}ak_{\mu+1},\cdots,k_q} B^a_{k_\mu st}$$
$$+ 2T^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q|l}S^l_{st} + WT^{j_1\cdots j_p}_{k_1\cdots k_q}B^a_{ast},$$

其中W是T的权,并且 S, B 分别为前面出现的挠率和曲率张量.

3) 特殊 Riemann 空间 (→ Riemann 流形). 在这一节中,n 表示空间的维数.

i) 常曲率空间†♦ $R^i_{jkl} = \rho(g_{jl}\delta^i_k - g_{jk}\delta^i_l)$. $\rho = R/n(n-1)$ (R 为常数).

ii) Einstein 空间†♦ $R_{jk} = \rho g_{jk}$. $\rho = R/n$ (R 为常数, $n \geqslant 3$).

iii) 局部对称 Riemann 空间†♦ $R^i_{jkl;m} = 0$.

iv) 射影平坦空间♦ Weyl 的**射影曲率张量** (projective curvature tensor) 是:

$$W^i_{jkl} = -R^i_{jkl} - \frac{1}{n-1}(R_{jk}\delta^i_l - R_{jl}\delta^i_k).$$

空间是射影平坦的条件由 $W^i_{jkl} = 0$, $R_{jk;l} = R_{jl;k}$ 给出.

若 $n \geqslant 3$, 则后一条件可由前一条件导出,并且该空间化为常曲率空间. 若 $n = 2$, 则前一条件$W = 0$ 恒成立.

v) **共圆平坦空间** (concircularly flat space)♦ $Z^i_{jkl} = -R^i_{jkl} - \dfrac{R}{n(n-1)}(g_{jk}\delta^i_l - g_{jl}\delta^i_k) = 0$.

这个空间可化为常曲率空间.

vi) **保形平坦空间** (conformally flat space)♦ Weyl 的**保形曲率张量** (conformal curvature tensor) 是

$$C^i_{jkl} = -R^i_{jkl} - \frac{1}{n-2}(R_{jk}\delta^i_l - R_{jl}\delta^i_k + g_{jk}R^i_l - g_{jl}R^i_k) + \frac{R(g_{jk}\delta^i_l - g_{jl}\delta^i_k)}{(n-1)(n-2)},$$

$$\Pi_{jk} = -\frac{R_{jk}}{(n-2)} + \frac{Rg_{jk}}{2(n-1)(n-2)}.$$

空间是保形平坦的条件是 $C^i_{jkl}=0$, $\Pi_{jk;l}=\Pi_{jl;k}$.若 $n\geqslant 4$, 则后一条件可由前一条件导出，并且若 $n=3$, 则前一条件 $C=0$ 恒成立.

5. Lie 代数, 对称 Riemann 空间

I) 复单 Lie 代数和紧实单 Lie 代数的分类 (→ Lie 代数)

1) **Lie 代数.** 非交换(有限维)复单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的酉限制†是非交换紧实单 Lie 代数† $\mathfrak{g}_u$, 并且 $\mathfrak{g}$ 可以作为 $\mathfrak{g}_u$ 的复数化 $\mathfrak{g}_u^c$ 而得到. 两者的分类成一一对应. 如采用 Дынкин 图形†, 则分类如图 14 所示 (→ Lie 代数).

单 Lie 代数$\mathfrak{g}$的基本根系† $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ 与 $\mathfrak{g}$ 的 Дынкин 图形的顶点(在图 14 中的单圈)成一一对应. 因此,单圈个数与 $\mathfrak{g}$ 的秩 l 一致.

在图 14 中的双圈表示最高根 θ 的 -1 倍. 有时用去掉双圈和由它引出的线及矢号的 Дынкин 图形表示. 在此,把带有双圈代表 $-\theta$ 的图形,称为**广义 Дынкин 图形**.

相应于 Killing 型†的内积 $-2(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)(i\neq j)$ 的值(必须是 0, 1, 2 或 3), 如图 13 所示, 把表示 α_i 和 α_j 的两个顶点联结起来 (0 的情形不联结). (关于 $-\theta$ 也同样表示.)

$$-2(\alpha_i,\alpha_j)/(\alpha_j,\alpha_j)=\begin{cases}0 & \circ\ \ \circ\\ 1 & \circ\!-\!\circ\\ 2 & \circ\!\Leftarrow\!\circ\\ 3 & \circ\!\Lleftarrow\!\circ\end{cases}$$

图 13　左圈对应于 α_i, 右圈对应于 α_j

在图 14 中,各顶点的数表示 $\theta=\sum m_i\alpha_i$ 中的系数 m_i.

从图 14, 有下列情形.

i) $\mathfrak{g}$ 的自同构群† $A(\mathfrak{g})$ 关于内自同构群† $I(\mathfrak{g})$ 的商群,与对应的 Дынкин 图形的自同构群同构. 因为对于 $A_l(l\geqslant 2)$, 图形是左右对称的,所以后一群的阶数是 2; 对于 $D_l(l\geqslant 5)$是 2,对于 D_4 是

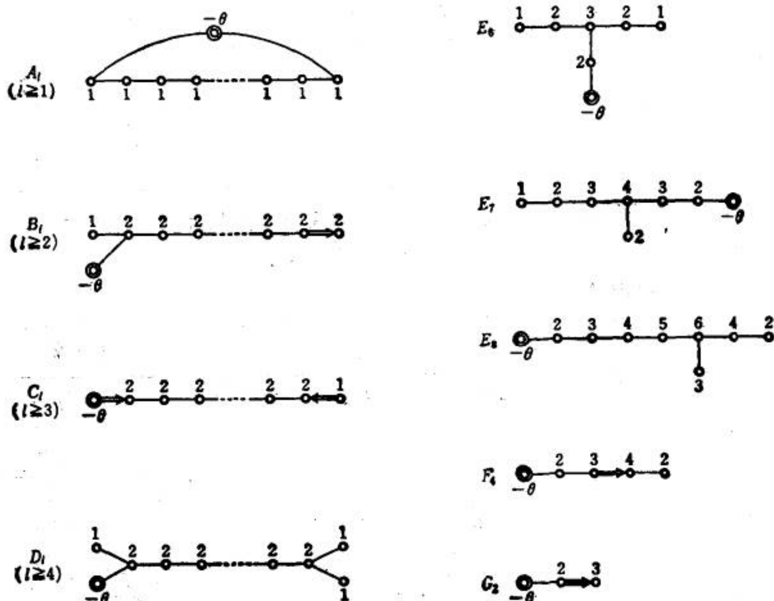


图 14　$B_1=C_1=A_1$, $C_2=B_2$, 和 $D_3=A_3$. ($D_2=A_1+A_1$ 不是单的)

6(=3!)，对于 E_6 是 2，对于其他情形是 1.

ii) 对应于 $\mathfrak{g}$ 的单连通 Lie 群†的中心†的阶数和 $\mathfrak{g}$ 的广义 Дынкин 图形的自同构群中的由稳定元素 $-\theta$ 组成的子群的阶数相等(村上信吾). 也就是，等于 $\mathfrak{g}$ 的伴随群†的基本群†的阶数以及具有 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的连通 Lie 群的个数.

iii) 任何 $\mathfrak{g}$ 的抛物子 Lie 代数†与由根向量 X_α (以及 Cartan 子代数†的元素)生成的子代数同构，使 $\alpha=\sum n_i\alpha_i$，其中 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 是基本根系，$n_i\geqslant 0(i=1,\cdots,l)$ 或 $n_i\leqslant 0(i=1,2,\cdots,l)$，并且对于属于 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 的固定子集 S 的 α_j，$n_j=0$.

因此，抛物子 Lie 代数的同构类与 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\}$ 的子集 S 的集合一一对应.

iv) 与 $\mathfrak{g}$ 有相同的秩 l 的极大子 Lie 代数 $\mathfrak{t}$ 是按下列规则分类的. 首先从 Дынкин 图形把一个顶点 α_i 除去，当附在这个顶点的数 m_i 等于 1 时，$\mathfrak{t}$ 是由对应于去掉顶点 α_i 之后的 Дынкин 图形的单 Lie 代数和一维子 Lie 代数的直积给出的. 当 $m_i>1$ 时，$\mathfrak{t}$ 是由从广义 Дынкин 图形把 α_i 去掉后的图形给出的.

2) **Lie 群**. 用 A,B,C,D 代表的、秩为 n 的典型复单 Lie 群†分别是：复特殊线性群† $SL(n+1,\boldsymbol{C})$，复特殊正交群† $SO(2n+1,\boldsymbol{C})$，复辛群† $Sp(n,\boldsymbol{C})$，复特殊正交群† $SO(2n,\boldsymbol{C})$. 还有用 A,B,C,D 代表的、秩为 n 的典型紧单 Lie 群†分别是：特殊酉群† $SU(n+1)$，正常正交群† $SO(2n+1)$，酉辛群† $Sp(n)$，正常正交群† $SO(2n)$ (→典型群).

Cartan 符号	复 型	紧 型	维 数	秩
A_n	$SL(n+1,\boldsymbol{C})$	$SU(n+1)$	$(n+1)^2-1$	n
B_n	$SO(2n+1,\boldsymbol{C})$	$SO(2n+1)$	$2n^2+n$	n
C_n	$Sp(n,\boldsymbol{C})$	$Sp(n)$	$2n^2+n$	n
D_n	$SO(2n,\boldsymbol{C})$	$SO(2n)$	$2n^2-n$	n
G_2	Aut $\mathfrak{C}^c$	Aut $\mathfrak{C}$	14	2
F_4	Aut $\mathfrak{J}^c$	Aut $\mathfrak{J}$	52	4
E_6			78	6
E_7			133	7
E_8			248	8

这里 $\mathfrak{C}$ 表示 $\boldsymbol{R}$ 上的 Cayley 代数†，$\mathfrak{C}^c$ 表示 $\mathfrak{C}$ 的复化，$\mathfrak{J}$ 表示 $\mathfrak{C}$ 上的 3 阶 Hermite 矩阵构成的 Jordan 代数†，$\mathfrak{J}^c$ 表示 $\mathfrak{J}$ 的复化，Aut A 表示 A 的自同构群.

II) 非紧实单 Lie 代数的分类

Cartan 符号	非紧实单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$	$\mathfrak{g}$ 的极大紧 Lie 代数
AI	$\mathfrak{sl}(p+1;\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{su}(p+1)$
AII	$\mathfrak{sl}(n;\boldsymbol{H})$	$\mathfrak{sp}(n)$
AIII	$\mathfrak{su}(p,q;\boldsymbol{C})$	$\mathfrak{su}(p)+\mathfrak{su}(q)$
BI	$\mathfrak{so}(p,q;\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{so}(p)+\mathfrak{so}(q)$ $(p+q=2m+1)$
BII	$\mathfrak{so}(1,n-1;\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{so}(n-1)$ $(n=2m+1)$
CI	$\mathfrak{sp}(p;\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{u}(p)$
CII	$\mathfrak{u}(p,q;\boldsymbol{H})$	$\mathfrak{sp}(p)+\mathfrak{sp}(q)$
DI	$\mathfrak{so}(p,q;\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{so}(p)+\mathfrak{so}(q)$ $(p+q=2m)$
DII	$\mathfrak{so}(1,n-1;\boldsymbol{R})$	$\mathfrak{so}(n-1)$ $(n=2m)$
DIII	$\mathfrak{so}(p;\boldsymbol{H})$	$\mathfrak{u}(2p)$

这里域 F 是实数域 $\boldsymbol{R}$, 复数域 $\boldsymbol{C}$, 或是四元数域 $\boldsymbol{H}$, 且 $(\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{H})$, $\boldsymbol{H}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上的代数†. 对于四元数 $x=x_0+x_1i+x_2j+x_3k(x_0, x_1, x_2, x_3\in\boldsymbol{R})$, 令

$$\bar{x}=x_0-x_1i-x_2j-x_3k,$$
$$x^*=x_0+x_1i-x_2j+x_3k,$$

则 $\mathfrak{gl}(n; F)=\{F$ 上 n 阶方阵的全体$\}$

$\mathfrak{sl}(n; F)=\{A\in\mathfrak{gl}(n; F)\mid \mathrm{tr}\,A=0\}$,

$\mathfrak{so}(p, q; F)=\{A\in\mathfrak{gl}(p+q; F)\mid {}^tA^*I_{p,q}+I_{p,q}A=0\}$,

其中, $I_{p,q}$ 是 Euclid 空间 $\boldsymbol{R}^{p+q}$ 关于 $\boldsymbol{R}^p$ 的对称变换 ($I_{p,q}$ 为 p 阶单位矩阵 I_p 和 $-I_q$ 的对角和), 有

$\mathfrak{so}(n; F)=\mathfrak{so}(n, 0; F)$,

$\mathfrak{u}(p, q; F)=\{A\in\mathfrak{gl}(p+q; F)\mid {}^t\bar{A}I_{p,q}+I_{p,q}A=0\}$,

$\mathfrak{u}(n; F)=\mathfrak{u}(n, 0; F)$,

$\mathfrak{sp}(n; F)=\{A\in\mathfrak{gl}(2n; F)\mid {}^t\bar{A}J+JA=0\}$,

其中, J 是秩为 $2n$ 的交错型 $\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+n}-x_{i+n}y_i)$ 的矩阵. 非紧实单 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, 对于 $\mathfrak{g}$ 的复化 $\mathfrak{g}^c$, 利用与复共轭算子 σ 的关系进行分类. 其结果由佐武图形†(图 15) 给出.

适当选取 Cartan 子代数†等,图中黑点表示 σ 的 -1 倍,附有矢号的弧表示弧两端相对的两元素是由满足 $\sigma=pw(w\in W)$ 的特殊变换 p 互相变换的.

III) 不可约对称 Riemann 空间的分类 (→对称 Riemann 空间)

单连通紧不可约对称 Riemann 空间 $M=G/K$, 是下表列举的, 或在 **I)** 中提过的单连通紧单 Lie 群. 唯一地对应于紧对称 Riemann 空间的非紧型与 **II)** 中提过的非紧实单 Lie 代数成一一对应 (→对称 Riemann 空间).

Cartan 符号	$G/K=M$	维　数	秩
AI	$SU(n)/SO(n)\ (n>2)$	$(n-1)(n+2)/2$	$n-1$
AII	$SU(2n)/Sp(n)\ (n>1)$	$(n-1)(2n+1)$	$n-1$
AIII	$U(p+q)/U(p)\times U(q)\ (p\geqslant q\geqslant 1)$	$2pq$	q
BDI	$SO(p+q)/SO(p)\times SO(q)\ (p\geqslant q\geqslant 2,\ p+q\neq 4)$	pq	q
BDII	$SO(n+1)/SO(n)\ (n\geqslant 2)$	n	1
DIII	$SO(2l)/U(l)\ (l\geqslant 4)$	$l(l-1)$	$[l/2]$
CI	$Sp(n)/U(n)\ (n\geqslant 3)$	$n(n+1)$	n
CII	$Sp(p+q)/Sp(p)\times Sp(q)\ (p\geqslant q\geqslant 1)$	$4pq$	q
EI	$E_6/Sp(4)$	42	6
EII	$E_6/SU(2)\cdot SU(6)$	40	4
EIII	$E_6/Spin(10)\cdot SO(2)$	32	2
EIV	E_6/F_4	26	2
EV	$E_7/SU(8)$	70	7
EVI	$E_7/SO(12)\cdot SU(2)$	64	4
EVII	$E_7/E_6\cdot SO(2)$	54	3
EVIII	$E_8/SO(16)$	128	8
EIX	$E_8/E_7\cdot SU(2)$	112	4
FI	$F_4/Sp(3)\cdot SU(2)$	28	4
FII	$F_4/Spin(9)$	16	1
G	$G_2/SU(2)\times SU(2)$	8	2

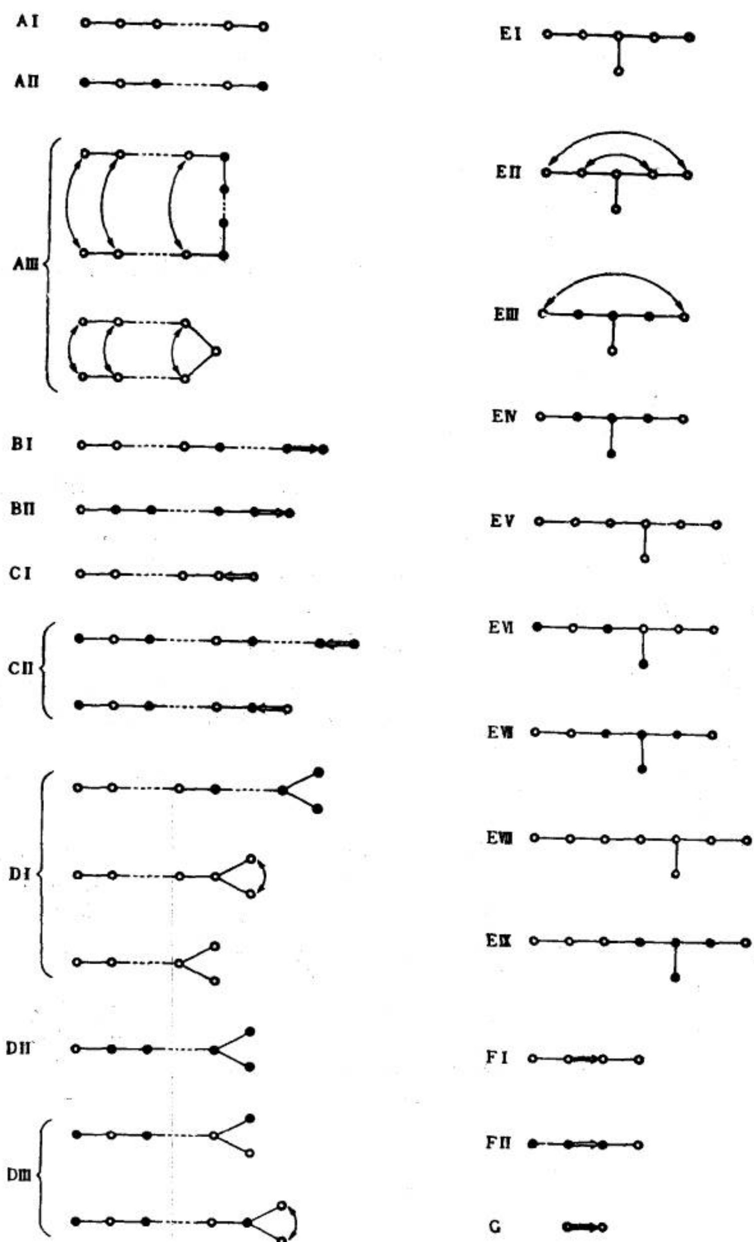


图 15

在 AIII 中的群 $G=U(p+q)$，除非用 $SU(p+q)$ 替换才是有效的†．在 EI 中的群 $K=Sp(4)$，理应是以中心†的阶数为 2 的子群除得的商群，EII 中的 K，不是单群的直积（基本群† $\pi_1(K)$ 的阶数是 2）． EV 中的 $SU(8)$，理应是以中心的阶数为 2 的子群除得的商群． EII，EIII，EVI，EVII，EIX，FI 中的K 不是直积．K 的基本群† $\pi_1(K)$ 对 EIII，EVII 为无限循环群 $\boldsymbol{Z}$，其余的基本群 $\pi_1(K)$

的阶数为 2.

在 EIII, EVII 中的群 E_6, E_7, 为紧单 Lie 代数的伴随群†. 其他情形的 E_6, E_7 为单连通 Lie 群 (E_8, F_4 和 G_2 也是单连通 Lie 群).

紧对称 Riemann 空间 M, 对 AIII 为复 Grassmann 流形†, 对 BDI 为实 Grassmann 流形†, 对 BDII 为球, 对 CII 为四元数 Grassmann 流形†, 并且对 FII 为 Cayley 射影平面†.

IV) 典型 Lie 代数间的同构关系

$\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 上的典型 Lie 代数间的同构关系, 由下表全部给出. 在这个表中, 例如用 Cartan 符号 A_3 表示秩为 3 的复 Lie 代数 AI 型的实型记为 A_3I. 还有像 D_3I 那样, 当存在秩相同的同类不同构的实型时, 按照对应的对称 Riemann 空间的秩加以区别并记为 D_3I_p. 其中 p 是在对应的 Lie 代数下为不变的半双线性型†的(各向同性)指数.

Cartan 符号	典型 Lie 代数间的同构
$A_1 = B_1 = C_1$	$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{so}(3, \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{sp}(1, \boldsymbol{C})$; $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{sp}(1)$
$B_2 = C_2$	$\mathfrak{so}(5, \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{sp}(2, \boldsymbol{C})$; $\mathfrak{so}(5) \cong \mathfrak{sp}(2)$
$A_3 = D_3$	$\mathfrak{sl}(4, \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{so}(6, \boldsymbol{C})$; $\mathfrak{su}(4) \cong \mathfrak{so}(6)$
$A_1I = A_1III = B_1I = C_1I$	$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{su}(1, 1; \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{so}(2, 1; \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{sp}(1; \boldsymbol{R})$
$B_2I_2 = C_2I$	$\mathfrak{so}(3, 2; \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{sp}(2, \boldsymbol{R})$
$B_2I_1 = C_2II$	$\mathfrak{so}(4, 1; \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{u}(1, 1; \boldsymbol{H})$
$A_3I = D_3I_3$	$\mathfrak{sl}(4, \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{so}(3, 3; \boldsymbol{R})$
$A_3II = D_3I_1$	$\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{H}) \cong \mathfrak{so}(5, 1; \boldsymbol{R})$
$A_3III_2 = D_3I_2$	$\mathfrak{su}(2, 2; \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{so}(4, 2; \boldsymbol{R})$
$A_3III_1 = D_3III$	$\mathfrak{su}(3, 1; \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{so}(3; \boldsymbol{H})$
$D_4I_2 = D_4III$	$\mathfrak{so}(6, 2; \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{so}(4, \boldsymbol{H})$
$D_2 = A_1 \times A_1$*	$\mathfrak{so}(4, \boldsymbol{C}) \cong \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C}) \times \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$; $\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$
$D_2I_2 = A_1I \times A_1I$	$\mathfrak{so}(2, 2; \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{R}) \times \mathfrak{sl}(2; \boldsymbol{R})$
$D_2III = A_1 \times A_1I$*	$\mathfrak{so}(2; \boldsymbol{H}) \cong \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{sl}(2; \boldsymbol{R})$
$D_2I_1 = A_1$*	$\mathfrak{so}(3, 1; \boldsymbol{R}) \cong \mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$

注: (*)这三种情形下, 由于 $A_1 \cong B_1 \cong C_1$ 同构, 所以用同构的 B_1 型或 C_1 型的 Lie 代数替换第 2 栏中的 $\mathfrak{sl}(2, \boldsymbol{C})$ 或 $\mathfrak{su}(2)$ 所得的同构是存在的.

6. 代数拓扑

I) 同伦球面†的 h 配边群†和组合球面的微分结构群†

1) n 维同伦球面的 h 配边群 θ_n 的构造.

在下表中的 θ_n 的数字表示: 0 表示仅由单位元组成的群, 整数 l 表示与阶数为 1 的循环群同构的群, 2^l 表示阶数为 2 的 l 个群的直和, + 表示直和, ? 表示群的构造未知.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\theta_n \cong$	0	0	?	0	0	0	28	2	2^3 或 $4+2$	6	992	0	3	2	$8128+2$	2	2^4 或 $4+2^2$	$8+2$

2) n 维组合球面的微分结构群 Γ_n.

$\Gamma_n \cong \theta_n (n \neq 3)$, $\Gamma_3 = 0$.

II) 关于 Steenrod 运算† Sq 及 $\mathscr{P}$ 的 Adem 公式†(一上同调运算)

对于上同调运算 Sq, $\mathscr{P}$, 有

$$Sq^a Sq^b = \sum_{c=0}^{[a/2]} \binom{b-c-1}{a-2c} Sq^{a+b-c} Sq^c \quad (a < 2b).$$

$$\mathscr{P}^a \mathscr{P}^b = \sum_{c=0}^{[a/p]} (-1)^{a+c} \binom{(b-c)(p-1)-1}{a-pc} \mathscr{P}^{a+b-c} \mathscr{P}^c \quad (a < pb),$$

$$\mathscr{P}^a \delta \mathscr{P}^b = \sum_{c=0}^{[a/p]} (-1)^{a+c} \binom{(b-c)(p-1)}{a-pc} \delta \mathscr{P}^{a+b-c} \mathscr{P}^c + \sum_{c=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+c-1} \binom{(b-c)(p-1)-1}{a-pc-1} \mathscr{P}^{a+b-c} \delta \mathscr{P}^c \quad (a \leqslant pb).$$

关于 Sq 的几个简单情形如下. 把 $Sq^{(a)}$ 写为 (a), 把 $Sq^a Sq^b$ 写为 (a, b).

$$(1, b) = \begin{cases} (b+1) & (b \equiv 0 \pmod 2), \\ 0 & (b \equiv 1 \pmod 2). \end{cases}$$

$$(2, b) = \begin{cases} (b+2) + (b+1, 1) & (b \equiv 0, 3 \pmod 4), \\ (b+1, 1) & (b \equiv 1, 2 \pmod 4). \end{cases}$$

$$(3, b) = \begin{cases} (b+3) & (b \equiv 0 \pmod 4), \\ (b+2, 1) & (b \equiv 1, 3 \pmod 4), \\ 0 & (b \equiv 2 \pmod 4). \end{cases}$$

$$(4, b) = \begin{cases} (b+4) + (b+3, 1) + (b+2, 2) & (b \equiv 1, 4 \pmod 8), \\ (b+4) + (b+2, 2) & (b \equiv 2, 3 \pmod 8), \\ (b+3, 1) + (b+2, 2) & (b \equiv 0, 5 \pmod 8), \\ (b+2, 2) & (b \equiv 6, 7 \pmod 8). \end{cases}$$

当 $p = 3$ 时, $\mathscr{P}$ 的几个简单情形如下. 把 $\mathscr{P}^a$ 写为 (a), 把 $\mathscr{P}^a \delta \mathscr{P}^b$ 写为 (a, δ, b).

$$(1, b) = \begin{cases} (b+1) & (b \equiv 0 \pmod 3), \\ -(b+1) & (b \equiv 1 \pmod 3), \\ 0 & (b \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

$$(1, \delta, b) = \begin{cases} (\delta, b+1) + (b+1, \delta) & (b \equiv 1 \pmod 3), \\ -(\delta, b+1) + (b+1, \delta) & (b \equiv 2 \pmod 3), \\ (b+1, \delta) & (b \equiv 0 \pmod 3). \end{cases}$$

$$(2, b) = \begin{cases} (b+2) & (b \equiv 0 \pmod 3), \\ 0 & (b \not\equiv 0 \pmod 3). \end{cases}$$

$$(2, \delta, b) = \begin{cases} (\delta, b+2) - (b+2, \delta) & (b \equiv 1 \pmod 3), \\ (b+2, \delta) & (b \equiv 0 \pmod 3), \\ 0 & (b \equiv 2 \pmod 3). \end{cases}$$

$$(3, b) = \begin{cases} (b+3) + (b+2, 1) & (b \equiv 0, 4, 8 \pmod 9), \\ -(b+3) + (b+2, 1) & (b \equiv 2, 3, 7 \pmod 9), \\ (b+2, 1) & (b \equiv 1, 5, 6 \pmod 9). \end{cases}$$

$$(3, \delta, b) = \begin{cases} (\delta, b+3) + (\delta, b+2, 1) + (b+3, \delta) & (b \equiv 6 \pmod 9), \\ -(\delta, b+3) + (\delta, b+2, 1) + (b+3, \delta) & (b \equiv 3 \pmod 9), \\ (\delta, b+3) + (\delta, b+2, 1) & (b \equiv 2, 7 \pmod 9), \\ -(\delta, b+3) + (\delta, b+2, 1) & (b \equiv 4, 8 \pmod 9), \\ (\delta, b+2, 1) + (b+3, \delta) & (b \equiv 0 \pmod 9), \\ (\delta, b+2, 1) & (b \equiv 1, 5 \pmod 9). \end{cases}$$

III) Eilenberg-MacLane 复形† 的上同调环† $H^*(\pi, n; \boldsymbol{Z}_p)$ (→ Eilenberg-MacLane 复形)

$\boldsymbol{Z}$ 表示整数的全体，$\boldsymbol{Z}_p = \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ (p 为素数).

1) 当 $p = 2$, $\pi = \boldsymbol{Z}$ 或 $\boldsymbol{Z}_{2^f}$ ($f \geqslant 1$) 时.

对于正整数的有限序列 $I = (i_r, i_{r-1}, \cdots, i_1)$，其阶数定义为 $d(I) = i_1 + i_2 + \cdots + i_r$. 满足 $i_{k+1} \geqslant 2i_k$ ($k = 1, \cdots, r-1$) 的序列 I 称为容许列†，这时，其超出量 (excess) 定义为 $e(I) = (i_r - 2i_{r-1}) + \cdots + (i_2 - 2r_1) + i_1 = 2i_r - d(I)$. 令 $Sq^I = Sq^{i_r}Sq^{i_{r-1}}\cdots Sq^{i_1}$，则

$H^*(\boldsymbol{Z}_{2^f}, n; \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[Sq^I u_n \mid I$ 是容许列，$e(I) < n]$,

$H^*(\boldsymbol{Z}, n; \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[Sq^I u_n \mid I$ 是容许列，$e(I) < n$, $i_1 > 1]$.

这里，$u_n \in H^n(\pi, n; \boldsymbol{Z})$ 为基本上同调类†. $I = \varnothing$ 也是容许列，并在这种情况下设 $n(I) = e(I) = 0$, $Sq^I = 1$. 根据 Künneth 定理†，当 π 为有限生成时，有

$H^*(\pi + \pi', n; \boldsymbol{Z}_p) = H^*(\pi, n; \boldsymbol{Z}_p) \otimes H^*(\pi', n; \boldsymbol{Z}_p)$.

特别是，有

$$H^*(\boldsymbol{Z}_2, 1; \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[u_1],$$
$$H^*(\boldsymbol{Z}_2, 2; \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[u_2, Sq^1u_2, Sq^2Sq^1u_2, \cdots, Sq^{2^r}Sq^{2^{r-1}}\cdots Sq^1u_2, \cdots],$$
$$H^*(\boldsymbol{Z}_2, 3; \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[u_3, Sq^{2^r}Sq^{2^{r-1}}\cdots Sq^1u_3, Sq^{(2^r+1)2^s}Sq^{(2^r+1)2^{s-1}}\cdots Sq^{2^r+1}Sq^{2^{r-1}}\cdots Sq^1u_3 \mid r \geqslant 0, s \geqslant 0].$$

2) 当 $p \neq 2$, $\pi = \boldsymbol{Z}$ 或 $\boldsymbol{Z}_{p^f}$ ($f \geqslant 1$) 时.

对于非负整数的有限序列 $I = (i_r, i_{r-1}, \cdots, i_1, i_0)$，其阶数定义为 $d(I) = i_r + \cdots + i_1 + i_0$. 满足 $i_k = 2\lambda_k(p-1) + \varepsilon_k$ (λ_k 为非负整数，$\varepsilon_k = 0$ 或 1 ($0 \leqslant k \leqslant r$))，并且 $i_0 = 0$ 或 1, $i_1 \geqslant 2p - 2$, $i_{k+1} \geqslant pi_k$ ($1 \leqslant k < r-1$) 的序列 I 称为容许列，这时其超出量 (excess) 定义为 $e(I) = pi_r - (p-1)d(I)$. 而且令 $\mathscr{P}^I = \delta^{\varepsilon_k}\mathscr{P}^{\lambda_k}\cdots\delta^{\varepsilon_1}\mathscr{P}^{\lambda_1}\delta^{\varepsilon_0}$，并设 $u_n \in H^n(\pi, n; \boldsymbol{Z})$ 为基本上同调类，则 $H^*(\boldsymbol{Z}_{p^f}, n; \boldsymbol{Z}_p) = \boldsymbol{Z}_2[\mathscr{P}^I u_n \mid I$ 是容许列，$e(I) < n(p-1)$, $n + d(I)$ 是偶数$]$ $\otimes \wedge_{\boldsymbol{Z}_2}(\mathscr{P}^I u_n \mid I$ 是容许列，$e(I) < n(p-1)$, $n + d(I)$ 是奇数).

$H^*(\boldsymbol{Z}, n; \boldsymbol{Z}_p)$ 是由上面的公式当容许列为具有 $i_0 = 0$ 的 I 时给出的.

IV) 紧连通 Lie 群的上同调环 (→ Lie 群与齐性空间的拓扑)

1) 设 G 为紧连通 Lie 群，阶数†为 l，维数†为 n，则有 $H^*(G; \boldsymbol{R}) \cong \wedge_{\boldsymbol{R}}(x_1, \cdots, x_l)$；其中 $\wedge_K(x_1, \cdots, x_l)$ 表示K上以 $\{x_1, \cdots, x_l\}$ 为基的线性空间 $V = Kx_1 + \cdots + Kx_l$ 的K上的外代数†. 在 $\wedge_K(x_1, \cdots, x_l)$ 中，用 $\deg x_l = m_i$ (m_i 为奇数，$1 \leqslant i \leqslant l$, $m_1 + \cdots + m_l = n$) 来定义新的阶数. $\cong$表示与分次环†同构.

2) 典型紧单 Lie 群†. $\deg x_i = i$.

$H^*(U(n); \boldsymbol{R}) \cong \wedge_{\boldsymbol{R}}(x_1, x_3, \cdots, x_{2n-1})$,

$H^*(SU(n); \boldsymbol{R}) \cong \wedge_{\boldsymbol{R}}(x_3, x_5, \cdots, x_{2n-1})$,

$H^*(Sp(n); \boldsymbol{R}) \cong \wedge_{\boldsymbol{R}}(x_3, x_7, \cdots, x_{4n-1})$,

$H^*(SO(n); \mathbf{Z}_2) \cong (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 为生成元的单纯系)

$\cong \mathbf{Z}_2[x_1, x_3, \cdots, x_{2n'-1}]/(x_i^{2^{s(i)}} | i = 1, \cdots, n')$

($n' = [n/2]$, $s(i)$ 是使 $2^{s(i)}(2i-1) \geqslant n$ 成立的最小整数),

$H^*(SO(2n); K) \cong \bigwedge_K(x_3, x_7, \cdots, x_{4n-5}, x_{2n-1})$, K 为特征不是 2 的交换域.

$H^*(SO(2n-1); K) \cong \bigwedge_K(x_3, x_7, \cdots, x_{4n-5})$,

对于 $SO(n)$, $Sq^a(x_i) = \binom{i}{a} x_{i+a}$. 对于 $SU(n)$, $p^a(x_{2i-1}) = \binom{i-1}{a} x_{2i-1+2a(p-1)}$.

对于 $Sp(n)$, $\mathscr{P}^a(x_{4i-1}) = (-1)^{a(p-1)/2} \binom{2i-1}{a} x_{4i-1+2a(p-1)}$.

3) 例外型紧单 Lie 群†. 1) 中的 n 和 $m_i (1 \leqslant i \leqslant l)$ 给出如下:

G_2: $n = 14$, $m_i = 3, 11$.

F_4: $n = 52$, $m_i = 3, 11, 15, 23$.

E_6: $n = 78$, $m_i = 3, 9, 11, 15, 17, 23$.

E_7: $n = 133$, $m_i = 3, 11, 15, 19, 23, 27, 35$.

E_8: $n = 248$, $m_i = 3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59$.

4) 例外群的 p 挠群. 例外 Lie 群的 p 挠群是单位群(除对 G_2 当 $p = 2$ 时;对 F_4, E_6, E_7 当 $p = 2, 3$ 时; 对 E_8 当 $p = 2, 3, 5$ 时外). 在这些情形下每个 $\mathbf{Z}_p$ 的上同调环作为系数群由下式给出. 其中,令 $\deg x_i = i$.

$H^*(G_2; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[x_3]/(x_3^4) \otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_2}(Sq^2 x_3)$;

$H^*(F_4; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[x_3]/(x_3^4) \otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_2}(Sq^2 x_3, x_{15}, Sq^8 x_{15})$,

$H^*(F_4; \mathbf{Z}_3) = \mathbf{Z}_3[\delta \mathscr{P}^1 x_3]/((\delta \mathscr{P}^1 x_3)^3) \otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_3}(x_3, \mathscr{P}^1 x_3, x_{11}, \mathscr{P}^1 x_{11})$;

$H^*(E_6; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[x_3]/(x_3^4) \otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_2}(Sq^2 x_3, Sq^4 Sq^2 x_3, x_{15}, Sq^8 Sq^4 Sq^2 x_3, Sq^8 x_{15})$,

$H^*(E_6; \mathbf{Z}_3) = \mathbf{Z}_3[\delta \mathscr{P}^1 x_3]/((\delta \mathscr{P}^1 x_3)^3) \otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_3}(x_3, \mathscr{P}^1 x_3, x_9, x_{11}, \mathscr{P}^1 x_{11}, x_{17})$;

$H^*(E_7; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[x_3, Sq^2 x_3, Sq^4 Sq^2 x_3]/(x_3^4, (Sq^2 x_3)^4, (Sq^4 Sq^2 x_3)^4)$

$\otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_2}(x_{15}, Sq^8 Sq^4 Sq^2 x_3, Sq^8 x_{15}, Sq^4 Sq^8 x_{15})$,

$H^*(E_7; \mathbf{Z}_3) = \mathbf{Z}_3[\delta \mathscr{P}^1 x_3]/((\delta \mathscr{P}^1 x_3)^3) \otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_3}(x_3, \mathscr{P}^1 x_3, x_{11}, \mathscr{P}^1 x_{11}, \mathscr{P}^3 \mathscr{P}^1 x_3, x_{27}, x_{35})$;

$H^*(E_8; \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2[x_3, Sq^2 x_3, Sq^4 Sq^2 x_3, x_{15}]/(x_3^{16}, (Sq^2 x_3)^8, (Sq^4 Sq^2 x_3)^4, x_{15}^4)$

$\otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_2}(Sq^8 Sq^4 Sq^2 x_3, Sq^8 x_{15}, Sq^4 Sq^8 x_{15}, Sq^2 Sq^4 Sq^8 x_{15})$,

$H^*(E_8; \mathbf{Z}_3) = \mathbf{Z}_3[\delta \mathscr{P}^1 x_3, \delta \mathscr{P}^3 \mathscr{P}^1 x_3]/((\delta \mathscr{P}^1 x_3)^3, (\delta \mathscr{P}^3 \mathscr{P}^1 x_3)^3)$

$\otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_3}(x_3, \mathscr{P}^1 x_3, x_{15}, \mathscr{P}^3 \mathscr{P}^1 x_3, \mathscr{P}^3 x_{15}, x_{35}, x_{39}, x_{47})$,

$H^*(E_8; \mathbf{Z}_5) = \mathbf{Z}_5[\delta \mathscr{P}^1 x_3]/((\delta \mathscr{P}^1 x_3)^5) \otimes \bigwedge_{\mathbf{Z}_5}(x_3, \mathscr{P}^1 x_3, x_{15}, \mathscr{P}^1 x_{15}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47})$.

V) 球面的同伦群(→同伦群)

下表表示 Abel 群. 0 表示仅有单位元的群;整数 l 表示阶数为 l 的循环群; ∞表示无限循环群; 2^l 表示阶数为 2 的 l 个群的直和; + 表示直和.

n 维球面 S^n 的 $(n+k)$ 次同伦群† $\pi_{n+k}(S^n)$.

n \ k	<0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	∞	∞	2	2	12	2	2	3	15	2	2^2	$12+2$	$84+2^2$	2^2
3	0	∞	2	2	12	2	2	3	15	2	2^2	$12+2$	$84+2^2$	2^2	6
4	0	∞	2	2	$\infty+12$	2^2	2^2	$24+3$	15	2	2^3	$120+12+2$	$84+2^5$	2^6	$24+6+2$
5	0	∞	2	2	24	2	2	2	30	2	2^3	$72+2$	$504+2^2$	2^3	$6+2$
6	0	∞	2	2	24	0	∞	2	60	$24+2$	2^3	$72+2$	$504+4$	240	6
7	0	∞	2	2	24	0	0	2	120	2^3	2^4	$24+2$	$504+2$	0	6
8	0	∞	2	2	24	0	0	2	$\infty+120$	2^4	2^5	$24+24+2$	$504+2$	0	$6+2$
9	0	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^3	2^4	$24+2$	$504+2$	0	6
10	0	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	$\infty+2^3$	$12+2$	504	12	6
11	0	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	2^3	$6+2$	504	2	$6+2$
12	0	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	2^3	6	$\infty+504$	2^2	$6+2$
13	0	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	2^3	6	504	2	6
14	0	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	2^3	6	504	0	$\infty+3$
≥15	0	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	2^3	6	504	0	3

n \ k	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6	30	30	$6+2$	$12+2^2$	$12+2^2$	$132+2$	2^2	2
3	30	30	$6+2$	$12+2^2$	$12+2^2$	$132+2$	2^2	2	210
4	$2520+6+2$	30	$6+6+2$	$24+12+4+2^2$	$120+12+2^5$	$132+2^5$	2^6	$24+2^2$	$9240+6+2$
5	$6+2$	$30+2$	2^2	$4+2^2$	$24+2^2$	$264+2$	$6+2^2$	$6+2$	$90+2^2$
6	$12+2$	$60+2$	$504+2^2$	2^4	$24+6+2$	$1056+8$	$480+12$	6	$180+2^2$
7	$24+4$	$120+2^3$	2^4	2^4	$24+2$	$264+2$	24	$6+2$	$72+2^3$
8	$240+24+4$	$120+2^5$	2^7	$6+2^4$	$504+24+2$	$264+2$	$24+3$	$12+2^3$	$1440+24+2^4$
9	$16+4$	$240+2^3$	2^4	2^4	$24+2$	$264+2$	24	$6+2^2$	$144+2^3$
10	$16+2$	$240+2^2$	$240+2$	2^3	$24+2^2$	$264+6$	$504+24$	$6+2^2$	$144+6+2$
11	$16+2$	$240+2$	2	2^3	$8+4+2$	$264+2^3$	$24+2^2$	2^4	$48+2^2$
12	$48+4+2$	$240+2$	2	2^4	$480+4+4+2$	$264+2^5$	$24+2^5$	$6+2^4$	$2016+12+2^2$
13	$16+2$	$480+2$	2	2^4	$8+8+2$	$264+2^3$	$24+2^3$	$4+2^3$	$16+2^2$
14	$8+2$	$480+2$	$24+2$	2^4	$8+8+2$	$264+4+2$	$240+24$	$4+2^2$	$16+2^2$
15	$4+2$	$480+2$	2^3	2^5	$8+8+2$	$264+2^2$	2^4	2^3	$16+2^3$
16	$2+2$	$\infty+480+2$	2^4	2^6	$24+8+8+2$	$264+2^2$	2^4	2^4	$240+16+2^3$
17	$2+2$	$480+2$	2^3	2^5	$8+8+2$	$264+2^2$	24	2^3	$16+2^3$
18	$2+2$	$480+2$	2^2	$\infty+2^4$	$8+4+2$	$264+2$	$24+12$	2^3	$16+2^2$
19	$2+2$	$480+2$	2^2	2^4	$8+2^2$	$264+2$	$24+2$	2^4	$16+2^2$
20	$2+2$	$480+2$	2^2	2^4	$8+2$	$\infty+264+2$	$24+2^2$	2^4	$16+2^2$
21	$2+2$	$480+2$	2^2	2^4	$8+2$	$264+2$	$24+2$	2^3	$8+2^2$
22	$2+2$	$480+2$	2^2	2^4	$8+2$	$264+2$	24	$\infty+2^2$	$4+2^2$
23	$2+2$	$480+2$	2^2	2^4	$8+2$	$264+2$	24	2^2	2^3
≥24	$2+2$	$480+2$	2^2	2^4	$8+2$	$264+2$	24	2^2	2^2

当 $n > k+1$ 时(表中虚线以下)，$\pi_{n+k}(S^n)$ 与 n 无关，并和 k 次稳定同伦群† G_k 同构.

设 $\iota_n \in \pi_n(S^n)$ 为 S^n 上的恒等映射；$\eta_2 \in \pi_3(S^2)$，$\nu_4 \in \pi_7(S^4)$，$\sigma_8 \in \pi_{15}(S^8)$ 分别为 Hopf 映射† $S^3 \to S^2$，$S^7 \to S^4$，$S^{15} \to S^8$（同伦类中的诱导映射），并且 $[\iota_{2m}, \iota_{2m}] \in \pi_{4m-1}(S^{2m})(m \neq 1, 2, 4)$ 为 ι_{2m} 的 Whitehead 积†，则这些对象生成无限循环群，它们是对应于原始映射的 $\pi_{n+k}(S^n)$ 的直和因子.

$\eta_{n+2} = E^n\eta_2$，$\nu_{n+4} = E^n\nu_4$，$\sigma_{n+8} = E^n\sigma_8(n \geq 1)$（$E$ 是同纬映射†）是属于包含映射的 $\pi_{n+k}(S^n)$ 的生成元.

下列合成的阶数是 2：gs$_{n+7}$

$\eta_n \circ \eta_{n+1}(n \geq 2)$，$\nu_n \circ \nu_{n+3}(n \geq 5)$，$\sigma_n \circ \sigma_{n+7}(n \geq 16)$，$\eta_n \circ \nu_{n+1}(n = 3, 4)$，

$\nu_n \circ \eta_{n+3}(n = 4, 5)$，$\eta_n \circ \sigma_{n+1}(n \geq 7)$，$\sigma_n \circ \eta_{n+7}(n \geq 8)$，$\nu_{10} \circ \sigma_{13}$，$\sigma_{11} \circ \nu_{18}$，

$\eta_n \circ \eta_{n+1} \circ \eta_{n+2}(n \geq 2)$，$\nu_n \circ \nu_{n+3} \circ \nu_{n+6}(n \geq 4)$，$\sigma_n \circ \sigma_{n+7} \circ \sigma_{n+14}(n \geq 9)$.

VI）紧连通 Lie 群 G 的同伦群† $\pi_k(G)$

$$(SO(n)(n \geq 2),\ Spin(n)(n \geq 3),\ U(n)(n \geq 1),$$
$$SU(n)(n \geq 2),\ Sp(n)(n \geq 1),\ G_2,\ F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8)$$

1） 基本群† $\pi_1(G)$

$$\pi_1(G) \cong \begin{cases} \infty & (G = U(n)(n \geq 1),\ SO(2)), \\ 2 & (G = SO(n)(n \geq 3)), \\ 0 & (\text{其他的群 } G). \end{cases}$$

2） 同构关系 ($k \geq 2$)

$\pi_k(U(n)) \cong \pi_k(SU(n))(n \geq 2)$,

$\pi_k(U(1)) \cong \pi_k(SO(2)) \cong 0$.

$\pi_k(Spin(n)) \cong \pi_k(SO(n))(n \geq 3)$,

$\pi_k(Spin(3)) \cong \pi_k(Sp(1)) \cong \pi_k(SU(2)) \cong \pi_k(S^3)$,

$\pi_k(Spin(4)) \cong \pi_k(Spin(3)) + \pi_k(S^3)$,

$\pi_k(Spin(5)) \cong \pi_k(Sp(2))$,

$\pi_k(Spin(6)) \cong \pi_k(SU(4))$.

3） 同伦群 $\pi_k(G)(k \geq 2)$

$\pi_2(G) \cong 0$.

$\pi_3(G) \cong \infty \quad (G \neq SO(4))$，$\pi_3(SO(4)) \cong \infty + \infty$.

$$\pi_4(G) \cong \begin{cases} 2+2 & (G = SO(4), Spin(4)), \\ 2 & (G = Sp(n), SU(2), SO(3), SO(5), Spin(3), Spin(5)), \\ 0 & (G = SU(n)(n \geq 3), SO(n)(n \geq 6), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8). \end{cases}$$

$$\pi_5(G) \cong \begin{cases} 2+2 & (G = SO(4), Spin(4)), \\ 2 & (G = Sp(n), SU(2), SO(3), SO(5), Spin(3), Spin(5)), \\ \infty & (G = SU(n)(n \geq 3), SO(6), Spin(6)), \\ 0 & (G = SO(n),\ Spin(n)(n \geq 7), G_2, F_4, E_6, E_7, E_8). \end{cases}$$

$\pi_k(G)$，$k \geq 6$.

G k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$Sp(1)$	12	2	2	3	15	2	2^2	$12+3$	$84+2^2$	2^2
$Sp(2)$	0	∞	0	0	120	2	2^2	$4+2$	1680	2
$Sp(3)$	0	∞	0	0	0	∞	2	2	10080	2
$Sp(4)$	0	∞	0	0	0	∞	2	2	0	∞
$SU(2)$	12	2	2	3	15	2	2^2	$12+3$	$84+2^2$	2^2
$SU(3)$	6	0	12	3	30	4	60	6	$84+2$	36
$SU(4)$	0	∞	24	2	$120+2$	4	60	4	$1680+2$	$72+2$
$SU(5)$	0	∞	0	∞	120	0	360	4	1680	6
$SU(6)$	0	∞	0	∞	0	∞	720	2	$5040+2$	6
$SU(7)$	0	∞	0	∞	0	∞	0	∞	5040	0
$SU(8)$	0	∞	0	∞	0	∞	0	∞	0	∞
$SO(5)$	0	∞	0	0	120	2	2^2	$4+2$	1680	2
$SO(6)$	0	∞	24	2	$120+2$	4	60	4	$1680+2$	$72+2$
$SO(7)$	0	∞	2^2	2^2	8	$\infty+2$	0	2	$2520+8+2$	2^4
$SO(8)$	0	$\infty+\infty$	2^3	2^3	$24+8$	$\infty+2$	0	2^2	$2520+120+8+2$	2^7
$SO(9)$	0	∞	2^2	2^2	8	$\infty+2$	0	2	$8+2$	$\infty+2^3$
$SO(10)$	0	∞	2	$\infty+2$	4	∞	12	2	8	$\infty+2^2$
$SO(11)$	0	∞	2	2	2	∞	2	2^2	8	$\infty+2$
$SO(12)$	0	∞	2	2	0	$\infty+\infty$	2^2	2^2	$24+4$	$\infty+2$
$SO(13)$	0	∞	2	2	0	∞	2	2	8	$\infty+2$
$SO(14)$	0	∞	2	2	0	∞	0	∞	4	∞
$SO(15)$	0	∞	2	2	0	∞	0	0	2	∞
$SO(16)$	0	∞	2	2	0	∞	0	0	0	$\infty+\infty$
$SO(17)$	0	∞	2	2	0	∞	0	0	0	∞
G_2	3	0	2	6	0	$\infty+2$	0	0	$168+2$	2
F_4	0	0	2	2	0	$\infty+2$	0	0	2	∞
E_6	0	0	0	∞	0	∞	12	0	0	∞
E_7	0	0	0	0	0	∞	2	2	0	∞
E_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	∞

4) 稳定同伦群†

若对于固定的 k, n 是充分大的,则典型紧单 Lie 群 $G=Sp(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$ 的同伦群是稳定的,表示如下. 其中设 $k\geqslant 2$.

$$\pi_k(Sp)=\pi_k(Sp(n)) \qquad (n\geqslant (k-1)/4),$$
$$\pi_k(U)=\pi_k(U(n))\cong\pi_k(SU(n)) \qquad (n\geqslant (k+1)/2),$$
$$\pi_k(O)=\pi_k(SO(n)) \qquad (n\geqslant k+2).$$

Bott 周期性定理†

$$\pi_k(Sp)\cong\begin{cases}\infty & (k\equiv 3,\ 7\ (\mathrm{mod}\ 8)),\\ 2 & (k\equiv 4,\ 5\ (\mathrm{mod}\ 8)),\\ 0 & (k\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 6\ (\mathrm{mod}\ 8)).\end{cases}$$

$$\pi_k(O)\cong\begin{cases}\infty & (k\equiv 3,\ 7\ (\mathrm{mod}\ 8)),\\ 2 & (k\equiv 0,\ 1\ (\mathrm{mod}\ 8)),\\ 0 & (k\equiv 2,\ 4,\ 5,\ 6\ (\mathrm{mod}\ 8)).\end{cases}$$

$$\pi_k(U)\cong\begin{cases}\infty & (k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)),\\ 0 & (k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)).\end{cases}$$

5) 特殊的情形

设 (a,b) 为整数 a, b 的最大公约数.

$\pi_{2n}(SU(n))\cong n!$.

$$\pi_{2n+1}(SU(n))\cong\begin{cases}2 & (n\ 是偶数),\\ 0 & (n\ 是奇数).\end{cases}$$

$$\pi_{2n+2}(SU(n)) \cong \begin{cases}(n+1)!+2 & (n\text{ 是偶数} \geqslant 4),\\ (n+1)!/2 & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$\pi_{2n+3}(SU(n)) \cong \begin{cases}(24, n) & (n\text{ 是偶数}),\\ (24, \pi+3)/2 & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$\pi_{2n+4}(SU(n)) \cong \begin{cases}(n+2)!(24, n)/48 & (n\text{ 是偶数} \geqslant 4),\\ (n+2)!(24, n+3)/24 & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$\pi_{2n+5}(SU(n)) \cong \pi_{2n+5}(U(n+1)).$$

$$\pi_{2n+6}(SU(n)) \cong \begin{cases}\pi_{2n+6}(U(n+1)) & (n \equiv 2, 3 \pmod 4),\ n \geqslant 3),\\ \pi_{2n+6}(U(n+1))+2 & (n \equiv 0, 1 \pmod 4)).\end{cases}$$

$$\pi_{4n+2}(Sp(n)) \cong \begin{cases}(2n+1)! & (n\text{ 是偶数}),\\ 2(2n+1)! & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$\pi_{4n+3}(Sp(n)) \cong 2.$$

$$\pi_{4n+4}(Sp(n)) \cong \begin{cases}2+2 & (n\text{ 是偶数}),\\ 2 & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$\pi_{4n+5}(Sp(n)) \cong \begin{cases}(24, n+2)+2 & (n\text{ 是偶数}),\\ (24, n+2) & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$\pi_{4n+6}(Sp(n)) \cong \begin{cases}(2n+3)!(24, n+2)/12 & (n\text{ 是偶数}),\\ (2n+3)!(24, n+2)/24 & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$\pi_{4n+7}(Sp(n)) \cong 2.$$

$$\pi_{4n+8}(Sp(n)) \cong 2+2.$$

对于 $n \geqslant 16$, $3 \geqslant i \geqslant -1$, 同伦群 $\pi_{n+i}(SO(n))$ 由同构对应 $\pi_{n+i}(SO(n)) \cong \pi_{n+i}(O) + \pi_{n+i+1}(V_{i+3+n, i+3}(\boldsymbol{R}))$ 和下面给出的 $V_{m+n,n}(\boldsymbol{R})$ 的同伦群来确定.

6) 实 Stiefel 流形[†] $V_{m+n,m}(\boldsymbol{R}) = O(m+n)/I_m \times O(n)$ 的同伦群

$$\pi_{n+k}(V_{n+1,1}) \cong \pi_{n+k}(S^n).$$

$$\pi_{n-k}(V_{m+n,m}) \cong 0 \quad (k \geqslant 1).$$

$$\pi_n(V_{m+n,m}) \cong \begin{cases}2 & (n = 2s-1,\ m \geqslant 2),\\ \infty & (n = 2s).\end{cases}$$

$\pi_{n+k}(V_{m+n,m})$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$ 由下表来求得.

	n \ m	1	2	3	4	5	6	$8s-1$	$8s$	$8s+1$	$8s+2$	$8s+3$	$8s+4$	$8s+5$	$8s+6$
π_{n+1}	2	0	∞^2	2	$2+\infty$	2	$2+\infty$	2	$2+\infty$	2	$2+\infty$	2	$2+\infty$	2	$2+\infty$
	$\geqslant 3$	0	∞	0	2^2	2	4	0	2^2	2	4	0	2^2	2	4
π_{n+2}	2	∞	2^2	4	2^2	4	2^2	4	2^2	4	2^2	4	2^2	4	2^2
	3	∞^2	2	$2+\infty$	2^2	$4+\infty$	2	$2+\infty$	2^2	$4+\infty$	2	$2+\infty$	2^2	$4+\infty$	2
	$\geqslant 4$	∞	0	2	2^2	8	0	2	2^2	8	0	2	2^2	8	0
π_{n+3}	2	2	2^2	2	$\infty+12+2$	2^2	$24+2$	2^2	$24+2$	2^2	$24+4$	2^2	$24+2$	2^2	$24+2$
	3	2^2	2	2	$\infty+12+4$	2^3	$12+2$	2^2	$24+4$	2^3	$12+2$	2^2	$24+4$	2^3	$12+2$
	4	2	∞	2	∞^2+12+4	2^2	$12+\infty$	2^2	$24+4+\infty$	2^2	$12+\infty$	2^2	$24+4+\infty$	2^2	$12+\infty$
	$\geqslant 5$	0	0	2	$12+4+\infty$	2	12	2	$24+8$	2	12	2^2	$4+48$	2	12
π_{n+4}	2	2	12^2	$\infty+2$	2^2+24	2^2	24	2	24	2	24	2	24	2	24
	3	2^2	0	$\infty+4$	2^4	2^3	2	4	2^2	2^2	2	4	2^2	2^2	2
	4	2	0	$4+\infty$	2^5	2^2	2	8	2^3	2	2	8	2^3	2	2
	5	∞	0	$4+\infty^2$	2^4	$2+\infty$	2	$8+\infty$	2^2	∞	2	$8+\infty$	2^2	∞	2
	$\geqslant 6$	0	0	$4+\infty$	2^3	2	0	8	2	0	2	16	2	0	0
π_{n+5}	2	12	2^2	2	2^3	0	∞	0	0	0	0	0	0	0	0
	3	12^2	∞	$2+24$	2^4	24	$\infty+2$	24	2	24	2	24	2	24	2
	4	0	∞	2^3	2^5	2	$\infty+4$	2^2	2^2	2	4	2^2	2^2	2	4

VII）射影空间的嵌入和浸入（→嵌入问题）

嵌入用⊂表示，浸入用⊆表示．$\boldsymbol{P}^n(A)$ 相应于 $A=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{C}$ 分别为 n 维实射影空间或复射影空间，具有下列表现．

$k\{\boldsymbol{P}^n(A)\}$ 是使 $\boldsymbol{P}^n(A)\subset\boldsymbol{R}^k$ 且 $\boldsymbol{P}^n(A)\not\subset\boldsymbol{R}^{k-1}$ 的整数 k，

$\tilde{k}\{\boldsymbol{P}^n(A)\}$ 是使 $\boldsymbol{P}^n(A)\subseteq\boldsymbol{R}^k$ 且 $\boldsymbol{P}^n(A)\not\subseteq\boldsymbol{R}^{k-1}$ 的整数 k．

表中，例如对 $n=6$，在横行 $k\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{R})\}$ 栏内是数 9～11，这表示 $\boldsymbol{P}^6(\boldsymbol{R})\not\subset\boldsymbol{R}^8$，$P^6(\boldsymbol{R})\subset\boldsymbol{R}^{11}$．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{R})\}$	2	4	5	8	9	9～11	9～12	16	17	17～19	…	…
$\tilde{k}\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{R})\}$	2	3	4	7	7	7	8	15	15	16	16	17～19
$k\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})\}$	3	7	9	15	17	22	22～25	31	33	38	38～41	…
$\tilde{k}\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})\}$	3	7	8～9	15	16～17	22	22～25	31	32～33	38	38～41	…

	2^r	2^r+1	2^r+2	2^r+3	2^r+2^s $(r>s>0)$
$k\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{R})\}$	$2n$	$2n-1$	$2n-3$～$2n-1$	…	…
$\tilde{k}\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{R})\}$	$2n-1$	$2n-3$	$2n-4$	$2n-6$	…
$k\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})\}$	$4n-1$	$4n-3$	$4n-2$	…	$4n-2$
$\tilde{k}\{\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{C})\}$	$4n-1$	$4n-4$～$4n-3$	$4n-2$	…	$4n-2$

7. 纽结（→纽结）

设 k 为纽结 K 向适当平面的射影，在平面被 k 划分的区域中，把最外侧的设为白，如图 16 那样分成白、黑（带影的部分）两色．在黑的各区域的适当位置上，分别选一点（图中的黑点）加以固定．对于由 k 的一个交点（图中的白点）相接的两个黑的区域，描出连接其中被固定的两点且过交点的线段（或弧）（图中的虚线）．再如图 17 所示，当在 k 的交点处 K 的扭转状态右旋时带＋号，左旋时带－号．这样，把带有符号的线段相加而得到的图形，叫做对应于纽结 K 的射影 k 的**图象**（graph）．如给出图象，则可把原纽结进行还原．

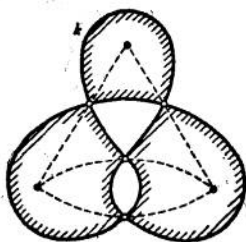


图　16

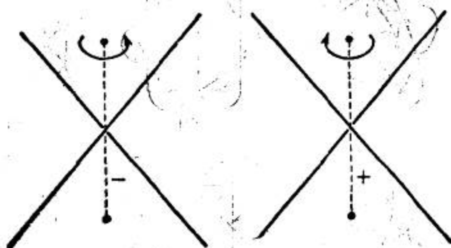


图　17

图 18 是纽结的分类表，当 k 的交点数为最小时，该数是由 3 到 8，k 的射影用实线，其图象用

虚线表示．

但是，由 3_1 到 8_{18} 的图象符号都是＋，或都是－．这样的纽结叫做**交错纽结**（alternating knot）（→纽结）．

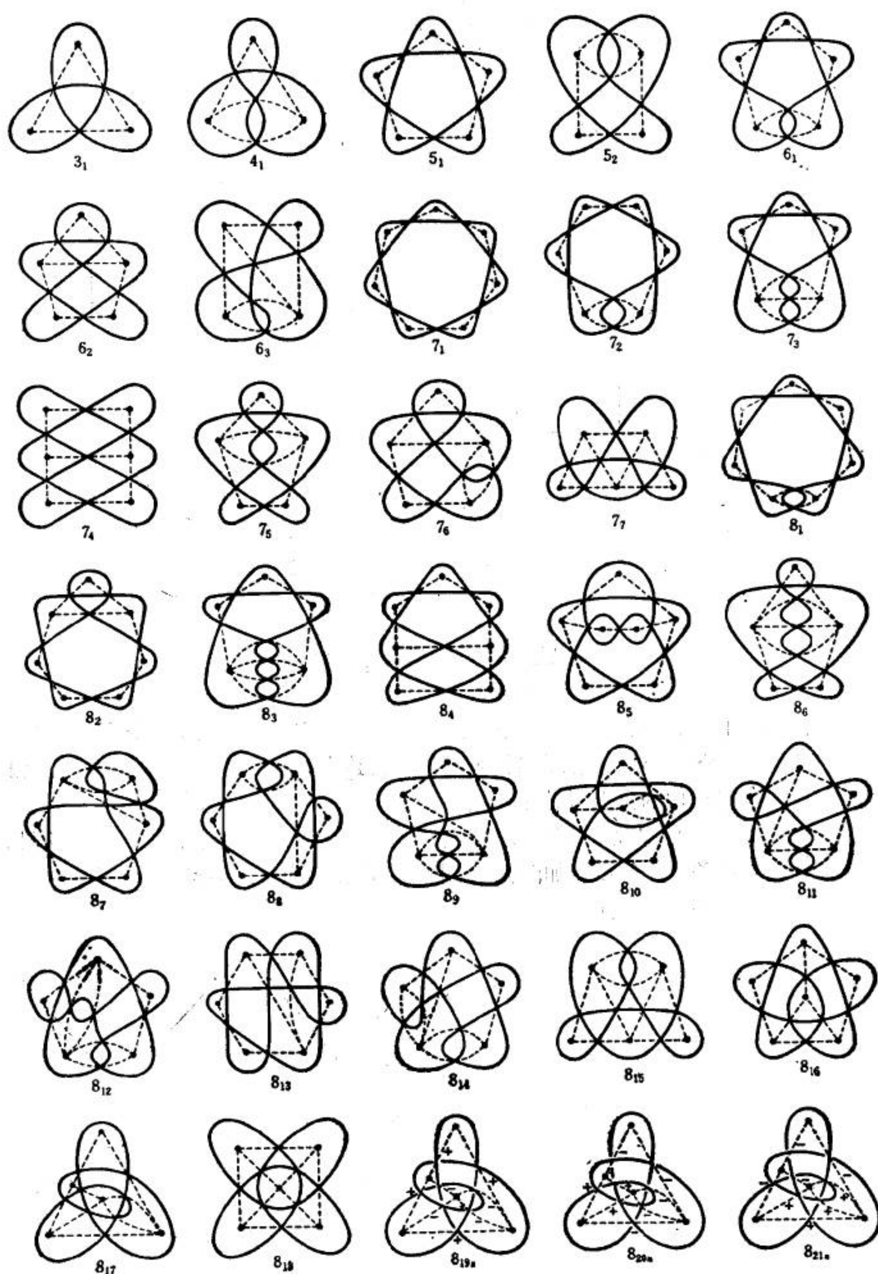


图 18 纽结分类表．3_1 到 8_{18} 的符号都是＋，或都是－．

8. 不等式 (→不等式,凸函数)

1) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$,

$|a-b| \geqslant ||a| - |b||$.

当 a_ν 为实数时,有 $\sum a_\nu^2 \geqslant 0$, 并且仅当所有的 $a_\nu = 0$ 时等号成立.

2) $n! < n^n < (n!)^2 \quad (n \geqslant 3)$.

$e^n \geqslant n^n/n!$.

$n^{1/n} < 3^{1/3} \quad (n \neq 3)$.

3) $2/\pi < (\sin x)/x < 1 \ (0 < x < \pi/2)$ (Jordan 不等式†).

4) 当 $a_1, \cdots, a_n > 0$ 时,若它们的 $r(r=1, 2, \cdots, n)$ 次初等对称多项式†为 S_r, 则

$$S_1\Big/\binom{n}{1} \geqslant \left[S_2\Big/\binom{n}{2}\right]^{1/2} \geqslant \cdots \geqslant \left[S_r\Big/\binom{n}{r}\right]^{1/r} \geqslant \cdots \geqslant \left[S_n\Big/\binom{n}{n}\right]^{1/n}.$$

如果其中有一个等号成立,则 $a_1 = \cdots = a_n$.

特别是,若取其两端,则关于平均值有

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \geqslant \left(\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{1/n} \geqslant n\Big/\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a_\nu}.$$

关于附有权的平均值有

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_\nu \geqslant \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu^{\lambda_\nu} \qquad \left(\sum \lambda_\nu = 1,\ \lambda_\nu > 0\right).$$

5) 当 $a_\nu > 0,\ b_\nu > 0,\ p > 1,\ q > 1,\ (1/p) + (1/q) = 1$ 时,有

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu)^p\right]^{1/p}\left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu)^q\right]^{1/q} \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu \qquad (\text{Hölder 不等式}^{\dagger\blacklozenge}).$$

仅当 $(a_\nu)^p = c(b_\nu)^q$ (c 为常数)时等号成立.

当 $p = q = 2$ 时, 叫做 Cauchy 不等式$^{\dagger\blacklozenge}$, Cauchy-Schwarz 不等式$^{\dagger\blacklozenge}$, 或 Буняковский 不等式$^{\dagger\blacklozenge}$. 作为它的特殊情形有

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{a_\nu}\right) \geqslant n^2 \qquad (a_\nu > 0),$$

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^2 \leqslant n\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\right) \qquad (a_\nu > 0).$$

还有,当 $0 < p < 1$ 时,在 Hölder 不等式中把不等号反向所得不等式成立.

6) 若 $a_\nu > 0,\ b_\nu > 0,\ p > 0$, 而 $\{a_\nu\}$ 和 $\{b_\nu\}$ 不成比例,则有

$$\left[\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu + b_\nu)^p\right]^{1/p} \lesseqgtr \left[\sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu)^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu)^p\right]^{1/p} \qquad (p \gtreqless 1)\ (\text{Minkowski 不等式}^{\dagger\sqsupset}).$$

与 5), 6) 对应的积分不等式,也用相同名称.

7) 若 $a_{\mu\nu} > 0,\ \sum_{\mu=1}^{n} a_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} = 1,\ b_\nu \geqslant 0$, 则有

$$\prod_{\nu=1}^{n} b_\nu \leqslant \prod_{\mu=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} b_\nu\right).$$

特别是,对于行列式 $\Delta = \det(a_{\mu\nu})$, 有

$$|\Delta|^2 \leqslant \prod_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{n}|a_{\mu\nu}|^2\right).$$

仅当所有的列互相正交时,等号成立.

若 $|a_{\mu\nu}| < M$, 则有 $|\Delta| \leqslant n^{n/2}M^n$ (Hadamard 估计•).

8) 设 $f(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 连续,严格单调增加,并且 $f(0) = 0$, 记 f 的逆函数为 f^{-1}. 对于 $a, b > 0$, 有

$$ab \leqslant \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx \qquad \text{(Young 不等式•)}.$$

仅当 $b = f(a)$ 时等号成立.

特别是,当 $f(x) = x^{p-1}(p > 1)$ 时,有

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

其中 $(1/p) + (1/q) = 1$.

9) 当 $p, q > 1$, $(1/p) + (1/q) = 1$, $a_\mu \geqslant 0$, $b_\nu \geqslant 0$ 时,有

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}\frac{a_\mu b_\nu}{\mu+\nu+1} \leqslant \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left[\sum_{\mu=0}^{\infty}(a_\mu)^p\right]^{1/p}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}(b_\nu)^q\right]^{1/q} \qquad \text{(Hilbert 不等式•)}.$$

仅当右端为 0 时等号成立.

10) 对于连续函数 $f(x) \geqslant 0 (0 \leqslant x < \infty)$, 令 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 并设 $p > 1$. 则

$$\int_0^\infty\left[\frac{F(x)}{x}\right]^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty[f(x)]^p dx \qquad \text{(Hardy 不等式•)}.$$

仅当 $f(x)$ 恒等于 0 时等号成立.

更进一步,若 $f(x) > 0$, 则有

$$\int_0^\infty \exp\left[\frac{1}{x}\int_0^x \log f(t)dt\right]dx < e\int_0^\infty f(x)dx \qquad \text{(Carleman 不等式•)}.$$

11) 当 $a \leqslant x < \xi \leqslant b$, $p > 1$ 时,设 $\sup_\xi \frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f(t)dt = \theta(x)$, 则有

$$\int_a^b[\theta(x)]^p dx \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_a^b|f(x)|^p dx \qquad \text{(Hardy-Littlewood 上限定理•)}.$$

12) 若 $f(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上是逐段光滑的,并且 $f(0) = f(\pi) = 0$, 则

$$\int_0^\pi[f'(x)]^2dx \geqslant \int_0^\pi[f(x)]^2dx \qquad \text{(Wirtinger 不等式•)}.$$

仅当 $f(x)$ 为 $\sin x$ 的常数倍时等号成立.

9. 微 积 分

I) 导函数•和原函数•(→微分学,积分学)

$F(x) = \int f(x)dx$	$f(x) = F'(x)$
$\alpha\varphi + \beta\psi$ (α, β 是常数)	$\alpha\varphi' + \beta\psi'$

$F(x) \equiv \int f(x)dx$	$f(x) \equiv F'(x)$
$\varphi \cdot \psi$	$\varphi'\psi + \varphi\psi'$
$\varphi/\psi \ (\psi \neq 0)$	$(\varphi'\psi - \varphi\psi')/\psi^2$
$\log\lvert\varphi\rvert \ (\varphi \neq 0)$	φ'/φ（对数微分）
$\Phi(\varphi)$（复合函数）	$(d\Phi/d\varphi) \cdot \varphi'$
c（常数）	0
x^n	nx^{n-1}
$x^{n+1}/(n+1)$	$x^n \ (n \neq -1)$
$\log\lvert x\rvert$	$1/x$
$\log_a\lvert x\rvert$	$(\log_a e)/x$
$x(\log x - 1)$	$\log x$
$\exp x = e^x$	$\exp x = e^x$
$a^x \ (a > 0)$	$a^x \log a$
x^x	$x^x(1 + \log x)$
$(x-1)e^x$	xe^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\mathrm{cosec}\, x$	$-\mathrm{cosec}\, x \cot x$
$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$	$\cosh x$
$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$	$\sinh x$
$\tanh x = \sinh x/\cosh x$	$\mathrm{sech}^2 x$
$\coth x = \cosh x/\sinh x$	$-\mathrm{cosech}^2 x$
$\mathrm{sech}\, x = 1/\cosh x$	$-\mathrm{sech}\, x \tanh x$
$\mathrm{cosech}\, x = 1/\sinh x$	$-\mathrm{cosech}\, x \coth x$
$\arcsin x \ (\lvert F\rvert < \pi/2)$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arccos x \ (0 < F < \pi)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan x \ (\lvert F\rvert < \pi/2)$	$1/(1+x^2)$
$\mathrm{arccot}\, x \ (\lvert F\rvert < \pi/2)$	$-1/(1+x^2)$
$\mathrm{arcsec}\, x \ (0 < F < \pi)$	$1/\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}$
$\mathrm{arccosec}\, x \ (\lvert F\rvert < \pi/2)$	$-1/\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}$
$\mathrm{arcsinh}\, x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$	$1/\sqrt{x^2+1}$
$\mathrm{arccosh}\, x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\frac{1}{2}\log\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert = \begin{cases}\mathrm{arctanh}\, x & (\lvert x\rvert < 1)\\ \mathrm{arccoth}\, x & (\lvert x\rvert > 1)\end{cases}$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{arcsech}\, x$	$-1/x\sqrt{1-x^2}$

$F(x)=\int f(x)dx$	$f(x)=F'(x)$
$\operatorname{arccosech} x$	$-1/\|x\|\sqrt{1+x^2}$
$\frac{1}{2a}\log\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\|\quad(a>0)$	$\frac{1}{x^2-a^2}$
$(1/a)\arctan(x/a)$	$1/(x^2+a^2)$
$(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)/2$	$\sqrt{1-x^2}$
$[x\sqrt{x^2\pm 1}\pm\log(x+\sqrt{x^2\pm 1})]/2$	$\sqrt{x^2\pm 1}$
$-\log\|\cos x\|$	$\tan x$
$\log\|\sin x\|$	$\cot x$
$\log\|\tan x\|$	$1/\sin x\cos x$
$\log\|\tan[(\pi/4)+(x/2)]\|$	$\sec x$
$\log\|\tan(x/2)\|$	$\operatorname{cosec} x$
$(x/2)-(1/4)\sin 2x$	$\sin^2 x$
$\sin x-x\cos x$	$x\sin x$
$\cos x+x\sin x$	$x\cos x$
$\frac{n\sin mx\sin nx+m\cos mx\cos nx}{n^2-m^2}\quad(n^2\neq m^2)$	$\sin mx\cos nx$
$e^{bx}\frac{b\sin ax-a\cos ax}{a^2+b^2}$	$e^{bx}\sin ax$
$e^{bx}\frac{b\cos ax+a\sin ax}{a^2+b^2}$	$e^{bx}\cos ax$
$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$
$x\arctan x-(1/2)\log(1+x^2)$	$\arctan x$
$\det(\varphi_{ik})_{i,k=1,\cdots,n}$	$\sum\det(\varphi_{j1}\cdots\varphi_{j\nu-1}\varphi'_{j\nu}\varphi_{j\nu+1}\cdots\varphi_{jn})_{j=1,\cdots,n}$

II) 不定积分的递推公式*

1) $I_m=\int\frac{dx}{(1+x^2)^m}\qquad$ (m 为自然数).

$$I_m=\frac{1}{2m-2}\frac{x}{(1+x^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2m-2}I_{m-1}\qquad(m\geqslant 2);\quad I_1=\arctan x.$$

2) $I_m=\int\frac{x^m}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx\qquad$ (m 为整数，$a\neq 0$).

当 $m<0$ 时，由变换 $1/x=t$，化为 $m\geqslant 0$ 的情形.

$$I_m=\frac{1}{ma}x^{m-1}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{(2m-1)b}{2ma}I_{m-1}-\frac{(m-1)c}{ma}I_{m-2}\qquad(m\geqslant 1);$$

$$I_0=\begin{cases}(1/\sqrt{a})\log|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}| & (a>0),\\ \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} & (a<0;\ \text{在此情况下，为了使被积函数为实函数，必须}\ b^2-4ac>0).\end{cases}$$

3) $I_m=\int x^m e^x dx\qquad$ (m 为整数).

$I_m = x^m e^x - m I_{m-1}$; $I_0 = e^x$, $I_{-1} = \mathrm{Ei}\, x$, 其中 Ei 是指数积分函数(→公式 19, II) 3))

4) $I_{m,n} \equiv \int x^m (\log x)^n dx \qquad (m, n$ 为整数, $n \geqq 0)$.

$$I_{m,n} = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1} I_{m,n-1};\quad I_{m,0} = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$(m \neq -1),\quad I_{-1,n} = (\log x)^{n+1}/(n+1).$$

5) $I_m \equiv \int x^m \sin x dx$, $J_m \equiv \int x^m \cos x dx \qquad (m$ 为 0 或为自然数).

$$I_m = -x^m \cos x + mJ_{m-1} = x^{m-1}(m \sin x - x\cos x) - m(m-1)I_{m-2},$$

$$J_m = x^m \sin x - mI_{m-1} = x^{m-1}(x \sin x + m\cos x) - m(m-1)J_{m-2};$$

$$I_0 = -\cos x,$$

$$J_0 = \sin x,$$

6) $I_{m,n} \equiv \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx \qquad (m, n$ 为整数).

$$\left.\begin{aligned} I_{m,n} &= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \\ I_{m,n} &= \frac{-\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \end{aligned}\right\} (m+n \neq 0),$$

$$I_{m,n} = \frac{-\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2} \qquad (n \neq -1),$$

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n} \qquad (m \neq -1);$$

$$I_{1,1} = (\sin^2 x)/2,\ I_{1,0} = -\cos x,\ I_{1,-1} = -\log|\cos x|,\ I_{0,1} = \sin x,\ I_{0,0} = x,$$

$$I_{0,-1} = \log|\tan[(x/2) + (\pi/4)]|,\ I_{-1,1} = \log|\sin x|,$$

$$I_{-1,0} = \log|\tan(x/2)|,\ I_{-1,-1} = \log|\tan x|.$$

$$I_{m,-m} \equiv \int \tan^m x dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - I_{m-2,-(m-2)} \qquad (m \neq 1).$$

III) 高阶导函数*

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\varphi \cdot \psi$	$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \varphi^{(\nu)} \psi^{(n-\nu)}$ (Leibniz 公式*)
x^k	$\prod_{\nu=0}^{n-1} (k-\nu) x^{k-n}$
$(x+a)^n$	$n!$
$\exp x$	$\exp x$
$a^x (a > 0)$	$a^x (\log a)^n$
$\log x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$
$\sin x$	$\sin[x + (n\pi/2)]$
$\cos x$	$\cos[x + (n\pi/2)]$
$e^{ax} \cos bx$	$r^n e^{ax} \cos(bx + n\theta)$ (其中 $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$)

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{\nu}\binom{n-1}{\nu}(2\nu-1)!!(2n-2\nu-3)!!$ $\times(1+x)^{-(1/2)-\nu}(1-x)^{(1/2)-n+\nu}$ （其中 $(2\nu-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2\nu-1)$, $(-1)!!=1$)
$\arctan x$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n\theta\sin n\theta$ （其中 $x=\cot\theta$)

$$\left(\frac{1}{f}\right)'=-\frac{f'}{f^2},\ \left(\frac{1}{f}\right)''=\frac{2f'^2-ff''}{f^3},\ \left(\frac{1}{f}\right)'''=\frac{6ff'f''-6f'^3-f^2f'''}{f^4}.$$

合成函数 $g(t)=f(x_1(t),\cdots,x_n(t))$ 的高阶导函数.

$$\frac{dg}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},\ \frac{d^2g}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{d^2x_i}{dt^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt},$$

$$\frac{d^3g}{dt^3}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{d^3x_i}{dt^3}+2\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\frac{d^2x_i}{dt^2}\frac{dx_j}{dt}+\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}\frac{dx_k}{dt}.$$

对于由隐函数 $F(z;x_1,\cdots,x_n)=0$ 确定的函数 $z=z(x_1,\cdots,x_n)$，有

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_z},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_j}=-\frac{F_{x_ix_j}}{F_z}+\frac{F_{x_i}F_{x_jz}+F_{x_j}F_{x_iz}}{F_z^2}-\frac{F_{x_i}F_{x_j}F_{zz}}{F_z^3}.$$

Schwarz 导数 (Schwarzian derivative).

$$\{y;x\}\equiv\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)-\frac{3}{2}\left[\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^2,\ \{y;x\}=0\Longleftrightarrow y=(ax+b)/(cx+d),$$

$$\{y;x\}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2[\{y;z\}-\{x;z\}]=-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\{x;y\},\ \{(ay+b)/(cy+d);x\}=\{y;x\}.$$

IV) Taylor 展开式和余项*

若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 中是 n 次连续可微的，则有

$$f(b)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(b-a)^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(a)+R_n\qquad\text{(Taylor 公式*)}.$$

R_n 叫做余项，可表示如下.

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^b(b-x)^{n-1}f^{(n)}(x)dx=\frac{(b-a)^p(b-\xi)^{n-p}}{(n-1)!p}f^{(n)}(\xi)$$

$$=\frac{(b-a)^n}{(n-1)!p}(1-\theta)^{n-p}f(a+\theta(b-a))\quad(n>p>0,\ 0<\theta<1,\ a<\xi<b,$$

$$\xi=a+\theta(b-a))\ \text{(Roche-Schlömilch 余项*)};$$

$$=\frac{1}{n!}(b-a)^nf^{(n)}(\xi)\qquad\text{(Lagrange 余项*)};$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}(b-a)(b-\xi)^{n-1}f^{(n)}(\xi)\qquad\text{(Cauchy 余项*)}.$$

若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内是 m 次连续可微的†，则

$$f(x_0+h,y_0+k)=\sum_{\lambda=0}^{m-1}\frac{1}{\lambda!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^\lambda f(x_0,y_0)+R_m$$

$$=\sum_{0\le\mu+\nu\le m-1,\ \mu,\nu\ge0}\frac{1}{\mu!\nu!}h^\mu k^\nu\frac{\partial^{\mu+\nu}f(x_0,y_0)}{\partial x^\mu\partial y^\nu}+R_m,$$

$$R_m = \frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \qquad (0<\theta<1).$$

若 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 直到 $m-1$ 次的偏导数均可全微分，则

$$f(x_1+h_1, \cdots, x_n+h_n) = \sum_{\nu=0}^{m-1}\frac{1}{\nu!}\left(\sum_{\mu=1}^{n} h_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^\nu f(x_1, \cdots, x_n) + R_m$$

$$= \sum \frac{1}{\nu_1!\cdots\nu_n!} h_1^{\nu_1}\cdots h_n^{\nu_n} \frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n} f(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1^{\nu_1}\cdots\partial x_n^{\nu_n}} + R_m,$$

其中 $\sum$ 是对于 $\nu_1, \cdots, \nu_n$ 的和，且 $0 \leqslant \nu_1 + \cdots + \nu_n \leqslant m-1$；$\nu_1, \cdots, \nu_m \geqslant 0$. 余项为

$$R_m = \frac{1}{m!}\left(\sum_{\mu=1}^{n} h_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)^m f(x_1+\theta h_1, \cdots, x_n+\theta h_n) \qquad (0<\theta<1).$$

V) 定积分♦(→[4])

在以下的定积分的各公式中，设 m, n 为自然数，δ_{mn} 为 Kronecker δ† (对 $m \neq n$ 或 $m = n$, $\delta_{mn} = 0$ 或 1)，Γ 为 Γ 函数†，B 为 B 函数†，C 为 Euler 常数†，为简单起见，令

$$m!! = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(m-2)\cdot m = 2^{(m+1)/2}\Gamma[(m/2)+1]/\sqrt{\pi} \\ \qquad = m!/2^{(m-1)/2}[(m-1)/2]! & (m \text{ 为奇数}), \\ 2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(m-2)\cdot m = 2^{m/2}\Gamma[(m/2)+1] = 2^{m/2}(m/2)! & (m \text{ 为偶数}). \end{cases}$$

在实 n 维空间中，区域 $|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p \leqslant 1$ $(p>0)$ 的体积为

$$\frac{2^n[\Gamma(1/p)]^n}{p^{n-1}n\Gamma(n/p)}.$$

当 $p=2$ 时，这是单位球的体积♦，为

$$\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma[(n/2)+1]} = \begin{cases} (2\pi)^{n/2}/n!! & (n \text{ 为偶数}), \\ 2(2\pi)^{(n-1)/2}/n!! & (n \text{ 为奇数}). \end{cases}$$

$n-1$ 维单位球面 $|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1$ 的表面积♦为

$$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} = \begin{cases} (2\pi)^{n/2}/(n-2)!! & (n \text{ 为偶数}), \\ 2(2\pi)^{(n-1)/2}/(n-2)!! & (n \text{ 为奇数}). \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1\left(\log\frac{1}{x}\right)^{p-1}dx \equiv \Gamma(p) \qquad (\Gamma \text{ 函数}).$$

$$\int_0^1 x^p\left(\log\frac{1}{x}\right)^q dx = \frac{\Gamma(q+1)}{(p+1)^{q+1}} \qquad (\mathrm{Re}\,p, \mathrm{Re}\,q > -1).$$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}}dx \equiv B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (B \text{ 函数}).$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x^c)^{1+b}}dx = \frac{1}{c}\frac{\Gamma[(a+1)/c]\Gamma[b-\{(a-c+1)/c\}]}{\Gamma(1+b)}$$

$$\left(\mathrm{Re}\,c > 0;\ \mathrm{Re}\,a, \mathrm{Re}\,b > -1;\ \mathrm{Re}\,b > \mathrm{Re}\,\frac{a-c+1}{c}\right).$$

$$\int_b^a \frac{(a-x)^{p-1}(x-b)^{q-1}}{|x-c|^{p+q}}dx = \frac{(a-b)^{p+q-1}}{|a-c|^q|b-c|^p}B(p,q)$$

$$(0<c<b<a \text{ or } 0<b<a<c;\ \mathrm{Re}\,p, \mathrm{Re}\,q > 0).$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \pi\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx = \frac{\pi}{n\sin[(2m+1)\pi/2n]} \qquad (2m+1<2n).$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \qquad (0<a<1).$$

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2|a|}.\ \int_0^\infty x^p e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) = \begin{cases}(2n-1)!!\sqrt{\pi}/2^{n+1} & (p=2n),\\ n!/2 & (p=2n+1).\end{cases}$$

$$\int_0^\infty (e^{-a^2/x^2}-e^{-b^2/x^2})dx = (b-a)\sqrt{\pi} \quad (a,b\geqslant 0).\ \int_0^\infty e^{-[x-(1/x)]^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2-(a^2/x^2)}dx = \frac{e^{-2a}\sqrt{\pi}}{2} \quad (a\geqslant 0).\ \int_0^\infty \frac{1}{e^{ax}+e^{-ax}}dx = \frac{\pi}{4a}.$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^{ax}-e^{-ax}}dx = \frac{\pi^2}{8a^2} \qquad (a>0).$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{\log(1/x)}{1-x^2}dx = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}dx = \int_0^1 \frac{\log(1/x)}{1+x}dx = \frac{\pi^2}{12}.\ \int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx = \int_0^1 \frac{\log(1/x)}{1-x}dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$\int_0^\infty \log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)dx = \int_0^1 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{1}{x}dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2}\log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1+x^2}dx = -\int_1^\infty \frac{\log x}{1+x^2}dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2} = -0.91596\cdots.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1+x+x^2}dx = \frac{16\pi^3}{81\sqrt{3}}.\ \int_0^1 \frac{x^p-x^q}{\log x}dx = \log\frac{p+1}{q+1} \qquad (p,q>-1).$$

$$\int_0^1 \log|\log x|dx = -\int_0^\infty e^{-t}\log t\,dt = -C = -0.57721\cdots.$$

$$\int_0^\pi \sin mx\sin nx\,dx = \int_0^\pi \cos mx\cos nx\,dx = \delta_{mn}\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^\pi \sin mx\cos nx\,dx = \begin{cases}[1-(-1)^{m+n}]\dfrac{m}{m^2-n^2} & (m\neq n);\\ 0 & (m=n).\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\cos^q x\,dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right) \qquad \left(\mathrm{Re}\,p,\ \mathrm{Re}\,q>-\frac{1}{2}\right);$$

$$= \begin{cases}(\pi/2)(p-1)!!(q-1)!!/(p+q)!! & (p,q\ \text{均为偶正数}),\\ (p-1)!!(q-1)!!/(p+q)!! & (p,q\ \text{为正数,且至少有一为奇数}).\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p x\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^p x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma[(p+1)/2]}{\Gamma[(p/2)+1]} \qquad (\mathrm{Re}\,p>-1);$$

$$= \begin{cases}(\pi/2)(2n-1)!!/(2n)!! & (p=2n),\\ (2n)!!/(2n+1)!! & (p=2n+1).\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \sin(x^2)dx = \int_{-\infty}^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (\text{Fresnel 积分}^*).$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx=\frac{\pi}{2}\quad(a>0).\ \int_0^\infty \frac{\tan x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\quad\left(\text{在 } x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \text{ 处取 Cauchy 主值}^\dagger\right).$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2n+1}x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.\ \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.\ \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{x}dx=\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin qx}{x^p}dx=\frac{\pi q^{p-1}}{2\Gamma(p)\sin(p\pi/2)}\qquad(0<p<2).$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos px}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|p|}.\ \int_0^\infty \frac{\cos^2 ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4}(1+e^{-2a})\qquad(a>0).$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{2}(1-e^{-a})\quad(a>0).\ \int_0^\infty \frac{x\sin ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-a}\quad(a>0).$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2m+1}x\cos^{2n}x}{x}dx=\int_0^\infty \frac{\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\frac{(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2m+2n)!!}.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\cos bx}{x}dx=\begin{cases}\pi/2 & (a>b>0),\\ \pi/4 & (a=b>0),\\ 0 & (b>a>0)\end{cases}\qquad(\text{Dirichlet 的不连续因子}^\dagger).$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a\cos x}dx=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}\quad(|a|<1).\ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}dx=\frac{\pi}{2ab}\quad(ab\neq 0).$$

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}dx=\begin{cases}\pi a^n/(1-a^2) & (|a|<1),\\ \pi/a^n(a^2-1) & (|a|>1).\end{cases}$$

【参】 [1] B. O. Peirce, A short table of integrals, Ginn, 修订第二版, 1910; [2] D. Bierens de Haan, Nouvelles tables d' intégrales définies, Leyden, 1867; [3] C. F. Lindemann, Examen des nouvelles tables d'intégrales définies de M. Bierens de Haan, P. H. Norstodt, 1891; [4] E. W. Sheldon, Critical revision of de Haan tables of definite integrals, Amer. J. Math., **34** (1912), 89—114.

10. 级 数 (一级数)

I) 有限级数

1) $S_k=1^k+2^k+\cdots+n^k$ (k 为整数).

当 $k\geqslant 0$ 时,设 B_i 为 Bernoulli 数†,并且 $B_i(x)$ 为 Bernoulli 多项式†,则有

$$S_k=\frac{B_{k+1}(n+1)-B_{k+1}(1)}{k+1}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k+1}{i}\frac{B_{2i}(n+1)^{k+1-i}}{k+1},$$

特别是

$$S_0=n,\ S_1=n(n+1)/2,\ S_2=n(n+1)(2n+1)/6,\ S_3=n^2(n+1)^2/4,$$
$$S_4=n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30.$$

当 $k<0$ 时,并且 $k=-l$, 则有

$$S_{-l}=c_l-[(-1)^l/(l-1)!][d^l\log\Gamma(x)/dx^l]_{x=n+1}$$
$$=c_l-\frac{1}{(l-1)(n+1)^{l-1}}-\frac{1}{2(n+1)^l}$$
$$+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{B_{2(i+1)}}{(i+1)!}\frac{(l+i-1)!}{(l-1)!}\frac{1}{(n+1)^{l+i}}.$$

其中，当 $l=1$ 时，后者的第二项换为 $\log[1/(n+1)!]$. Γ 为 Γ 函数[†]；常数 c_l 为

$$c_l=\begin{cases}C\ (\text{Euler 常数}^\dagger) & (l=1),\\ \zeta(l)\ (\zeta\ \text{为 Riemann}\ \zeta\ \text{函数}^\dagger) & (l\geqslant 2).\end{cases}$$

2) $$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)\cdots(i+m-1)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+m-1)!}{(i-1)!}=\frac{1}{m+1}\frac{(n+m)!}{(n-1)!},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)!}{(i+m-1)!}=\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{(m-1)!}-\frac{n!}{(n+m-1)!}\right]\quad (m\geqslant 2),$$

$$\sum_{i=1}^{n} i!\,i=(n+1)!-1,\quad \sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i}=n2^{n-1},$$

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m}\binom{n+s-i-1}{n-i}=\binom{n+s}{m+s}\quad (m\leqslant n),$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{r-i}=\binom{n+m}{r}.$$

$$\sum_{i=1}^{n} a^i=\begin{cases}a(a^n-1)/(a-1) & (a\neq 1)\\ n & (a=1)\end{cases}\quad (\text{等比级数}^\dagger).$$

$$\sum_{j=0}^{n}(a+jd)=(n+1)a+\frac{n(n+1)}{2}d=\frac{n+1}{2}(a+a+nd)\qquad (\text{等差级数}^\dagger).$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sin(\alpha+j\beta)=\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}\Big/\sin\frac{\beta}{2},$$

$$\sum_{j=0}^{n}\cos(\alpha+j\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{n}{2}\beta\right)\sin\frac{(n+1)\beta}{2}\Big/\sin\frac{\beta}{2},$$

$$\sum_{j=0}^{n}\operatorname{cosec}2^j\alpha=\cot(\alpha/2)-\cot 2^n\alpha.$$

II) 正项级数的收敛判别法.

以下都是对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ (a_n\geqslant 0)$ 的判别法.

Cauchy 判别法[†]：当 $\limsup\sqrt[n]{a_n}<1$ 时，级数收敛；当 $\limsup\sqrt[n]{a_n}>1$ 时，级数发散.

d'Alembert 判别法[†]：当 $\limsup a_{n+1}/a_n<1$ 时，级数收敛；当 $\liminf a_{n+1}/a_n>1$ 时，级数发散.

Raabe 判别法[†]：当 $\liminf n[(a_n/a_{n+1})-1]>1$ 时，级数收敛；当 $\limsup n[(a_n/a_{n+1}-1)]<1$ 时，级数发散.

Kummer 判别法[†]：对于正项发散级数 $\sum(1/b_n)$，当 $\liminf[(b_na_n/a_{n+1})-b_{n+1}]>0$ 时，级数收敛；当 $\limsup[(b_na_n/a_{n+1})-b_{n+1}]<0$ 时，级数发散.

Gauss 判别法[†]：设 $a_n/a_{n+1}=1+(k/n)+(\theta_n/n^\lambda)$ $(\lambda>1,\ \{\theta_n\}$ 有界)，则 $k>1$ 时，级数收敛；$k\leqslant 1$ 时，级数发散.

Schlömilch 判别法[†]：对于 $a_\nu\downarrow 0$，自然数列 $n_\nu\uparrow$，并设 $(n_{\nu+2}-n_{\nu+1})/(n_{\nu+1}-n_\nu)$有界，则 $\sum a_n$ 和 $\sum(n_{\nu+1}-n_\nu)a_{n_\nu}$ 同时收敛或发散.

对数判别法[♦]：设 k 为自然数，令 $\log_k x = \log(\log_{k-1} x)$，$\log_1 x = \log x$，则对于充分大的 n，有

第一种对数判别法：若 $a_n - (1/n)\log_1 n \cdots \log_{k-1} n (\log_k n)^p \begin{cases} \leqslant 0, & p > 1, \text{ 则 } \sum a_n \text{ 收敛}, \\ \geqslant 0, & p \leqslant 1, \text{ 则 } \sum a_n \text{ 发散}. \end{cases}$

第二种对数判别法：若 $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{n}{n+1} \frac{\log_1 n}{\log_1(n+1)} \cdots \frac{\log_{k-1} n}{\log_{k-1}(n+1)} \left(\frac{\log_k n}{\log_k(n+1)}\right)^p$

$$\begin{cases} \leqslant 0, & p > 1, \text{ 则 } \sum a_n \text{ 收敛}, \\ \geqslant 0, & p \leqslant 1, \text{ 则 } \sum a_n \text{ 发散}. \end{cases}$$

III) 无穷级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \log 2, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2i-1} = \frac{\pi}{4} \qquad (\text{Leibniz 公式}^{\blacklozenge}),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{2i(2i+1)(2i+2)} = \frac{\pi - 3}{4},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2} \frac{1}{2i+1} = \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \log\left(1 + \frac{1}{i}\right)\right) = C \qquad (C \text{ 是 Euler 常数}^{\dagger}).$$

令 $\zeta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^n}$，$\alpha(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)^n}$，$\beta(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^n}$，

$\varepsilon(n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{(2i-1)^n}$，有

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \quad \alpha(2n) = \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}{2(2n)!} B_{2n},$$

$$\beta(2n) = \frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{(2n)!} B_{2n}, \quad \varepsilon(2n+1) = \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+2}(2n)!} E_{2n},$$

其中，B_n 是 Bernoulli 数[†]，E_n 是 Euler 数[†].

$\zeta(2) = \pi^2/6$，$\zeta(4) = \pi^4/90$，$\zeta(6) = \pi^6/945$.

$\alpha(2) = \pi^2/8$，$\alpha(4) = \pi^4/96$，$\alpha(6) = \pi^6/960$.

$\beta(2) = \pi^2/12$，$\beta(4) = 7\pi^4/720$，$\beta(6) = 31\pi^6/30240$.

$\varepsilon(1) = \pi/4$，$\varepsilon(2) = 0.915965594177219015054603514932\cdots$ (Catalan 常数[♦]).

$\varepsilon(3) = \pi^3/32$，$\varepsilon(5) = 5\pi^5/1536$，$\varepsilon(7) = 61\pi^7/92160$.

IV) 幂级数(→幂级数)

1) **二项级数**[♦] $(1+x)^\alpha = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} x^i$.

收敛域一般是 $|x| < 1$. 若 $\alpha > 0$，则它在 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 上收敛；若 $-1 < \alpha < 0$，则它在 $-1 < x \leqslant 1$ 内收敛；特别是，若 α 为 0 或自然数，则它化为多项式并在 $|x| < \infty$ 内收敛.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i \qquad (|x| < 1),$$

$$\sqrt{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}(2i)!}{(2i-1)2^{2i}(i!)^2} x^i \qquad (|x| < 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i(2i)!}{2^{2i}(i!)^2} x^i \qquad (|x| < 1).$$

2）**初等超越函数***（→初等函数）

$$e^x \equiv \exp x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad a^x = \exp(x\log a) \qquad (|x|<\infty).$$

$$\log(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} x^i \qquad (-1<x\leqslant 1),$$

$$\log x = 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2i+1} \qquad (0<x<\infty).$$

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1}, \quad \cos x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i)!} x^{2i} \qquad (|x|<\infty).$$

$$\tan x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{2i}(2^{2i}-1)B_{2i}}{(2i)!} x^{2i-1} \quad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right) \qquad (B_i \text{ 是 Bernoulli 数}^\dagger),$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^{2i}B_{2i}}{(2i)!} x^{2i-1} \quad \left(0<|x|<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sec x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{E_{2i}}{(2i)!} x^{2i} \quad \left(|x|<\frac{\pi}{2}\right) \qquad (E_i \text{ 是 Euler 数}^\dagger),$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2^{2i}-2)}{(2i)!} x^{2i-1} \qquad (0<|x|<\pi).$$

$$\arcsin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{2^{2i}(i!)^2}\frac{x^{2i+1}}{2i+1} \quad (|x|\leqslant 1), \quad \arctan x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1} \quad (|x|\leqslant 1).$$

V）部分分数*

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8x}{(2n+1)^2\pi^2-4x^2}, \quad \cot x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2\pi^2},$$

$$\sec x = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)\pi}{(2n-1)^2\pi^2-4x^2}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2-n^2\pi^2},$$

$$\sec^2 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[x+\{(2n+1)\pi/2\}]^2}, \quad \operatorname{cosec}^2 x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x+n\pi)^2}.$$

VI）无穷乘积*（→级数[无穷乘积]）

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2} \qquad (\text{Wallis 公式}^*),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{a+n}\right)e^{-x/n} = e^{-Cx}\frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(1+a+x)} \qquad (C \text{ 是 Euler 常数}^\dagger),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{2n-1}\right)\left(1+\frac{x}{2n}\right) = \sqrt{\pi}\Big/\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right).$$

$$\prod_{p} 1/(1-p^{-s}) = \zeta(s) \qquad (p \text{ 是素数}, s>1),$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right) = \cos x.$$

当 $|q|<1$ 时，令 $q_1 \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})$，$q_2 \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})$，$q_3 \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})$，$q_4 \equiv$

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$, 有 $q_1q_2q_3=1$.

更进一步,令 $q=e^{i\pi\tau}$, 则对于 ϑ 函数†(→椭圆函数)有:

$\vartheta_4(0,\tau)=q_4q_3^2$, $\vartheta_2(0,\tau)=2q^{1/4}q_4q_1^2$, $\vartheta_3(0,\tau)=q_4q_2^2$, $\vartheta_1'(0,\tau)=2\pi q^{1/4}q_4^3$.

11. Fourier 分析

I) Fourier 级数† (→ Fourier 级数)

1) Fourier 系数† $a_0=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)dx$, $a_n=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{a}dx$

$$b_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx.$$

Fourier 余弦级数† $a_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{a}=\begin{cases}f(x) & (0<x<a),\\ f(-x) & (-a<x<0).\end{cases}$

Fourier 正弦级数† $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{a}=\begin{cases}f(x) & (0<x<a),\\ -f(-x) & (-a<x<0).\end{cases}$

下表表示函数 $F(x)$ 的 Fourier 系数. 设 $f(x)$ 是在区间 $[0,a]$ 上定义的函数. 在区间 $[-a,0]$ 上,当考虑余弦级数时令 $f(x)=f(-x)$, 当考虑正弦级数时令 $f(x)=-f(-x)$. 这样便得到在 $[-a,a]$ 上定义的、以 $2a$ 为周期的函数 $F(x)$(即 $f(x)$ 在实轴上的扩张). 注意由右边的 Fourier 系数构成的 Fourier 级数, 一般在 a 的整数倍的点上具有奇异性(函数的或其导数的不连续点等). 还假设 $\mu\neq$ 整数.

$f(x)$	a_0	$a_n\ (n=1,2,\cdots)$	$b_n\ (n=1,2,\cdots)$
1	1	0	$[1+(-1)^{n+1}]2a/n\pi$
x	$\dfrac{a}{2}$	$[1+(-1)^{n+1}]\dfrac{-2a}{n^2\pi^2}$	$(-1)^{n+1}\dfrac{2a}{n\pi}$
x^2	$\dfrac{a^2}{3}$	$(-1)^n\dfrac{4a^2}{n^2\pi^2}$	$(-1)^{n-1}\dfrac{2a^2}{n\pi}-[1+(-1)^{n+1}]\dfrac{4a^2}{n^3\pi^3}$
e^{kx}	$\dfrac{e^{ka}-1}{ka}$	$\dfrac{2ka[(-1)^ne^{ka}-1]}{k^2a^2+n^2\pi^2}$	$\dfrac{2n\pi[1-(-1)^n]e^{ka}}{k^2a^2+n^2\pi^2}$
$\cos\dfrac{\mu\pi x}{a}$	$\dfrac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}$	$(-1)^n\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\mu\sin\mu\pi}{\mu^2-n^2}$	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{[(-1)^n\cos\mu\pi-1]}{\mu^2-n^2}$
$\sin\dfrac{\mu\pi x}{a}$	$\dfrac{1-\cos\mu\pi}{\mu\pi}$	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\mu[1-(-1)^n\cos\mu\pi]}{\mu^2-n^2}$	$(-1)^n\dfrac{2}{\pi}\dfrac{n\sin\mu\pi}{\mu^2-n^2}$
$\dfrac{1-\lambda^2}{1-2\lambda\cos(\pi x/a)+\lambda^2}$	1	$2\lambda^n\ (\lvert\lambda\rvert<1)$	
$\dfrac{\lambda\sin(\pi x/a)}{1-2\lambda\cos(\pi x/a)+\lambda^2}$			$\lambda^n\ (\lvert\lambda\rvert<1)$
$B_{2m}(x/2a)$	0	$(-1)^{m+1}2(2m)!/(2n\pi)^{2m}$	
$B_{2m+1}(x/a)$			$(-1)^{m+1}2(2m+1)!/(2n\pi)^{2m+1}$
$\log\sin(\pi x/2a)$	$-\log 2$	$-1/n$	
$(1/2)\cos(\pi x/2a)$			注1)

注 1) 这个 Fourier 级数在 Cauchy 意义下不收敛,但用一次的 Cesàro 求和法† 可以求和.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n}=\log\left(2\cos\frac{x}{2}\right)\qquad(-\pi<x<\pi),$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}(\pi-x)\qquad(0<x<2\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}=\frac{1}{2}\log\left|\cot\frac{x}{2}\right|\qquad(0<x<2\pi,\ x\neq\pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=\begin{cases}\pi/4 & (0<x<\pi),\\ -\pi/4 & (\pi<x<2\pi).\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{4}(x-\pi)^2-\frac{\pi^2}{12}\qquad(0\leqslant x\leqslant 2\pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}=-x\log 2-\int_0^x\log\left(\sin\frac{t}{2}\right)dt\qquad(0\leqslant x<2\pi).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\cos nx=e^{a\cos x}\cos(a\sin x)-1,\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\sin nx=e^{a\cos x}\sin(a\sin x).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-a^2}=\frac{\pi\cos ax}{2a\sin a\pi}-\frac{1}{2a^2}\qquad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{n^2-a^2}=\frac{\pi\sin ax}{2\sin a\pi}\qquad(-\pi<x<\pi).$$

(在最后的两式中,设 $a\neq$ 整数).

II) Fourier 变换[♦] (→ Fourier 变换)

Fourier 余弦变换 $\quad f_c(u)=\int_0^{\infty}F(t)\cos ut\,dt.$

逆变换 $\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f_c(u)\cos ut\,du=\begin{cases}F(t) & (t>0),\\ F(-t) & (t<0).\end{cases}$

Fourier 正弦变换 $\quad f_s(u)=\int_0^{\infty}F(t)\sin ut\,dt.$

逆变换 $\quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f_s(u)\sin ut\,du=\begin{cases}F(t) & (t>0),\\ -F(-t) & (t<0).\end{cases}$

$F(t)$	$f_c(u)$	$f_s(u)$
$\begin{cases}1 & (0<t<a)\\ 0 & (a<t)\end{cases}$	$\frac{\sin au}{u}$	$\frac{1-\cos au}{u}$
t^{-1}	(发散)	$(\pi/2)\,\mathrm{sgn}\,u$
$t^{\alpha-1}\ (0<\alpha<1)$	$\Gamma(\alpha)\cos(\pi\alpha/2)u^{-\alpha}$	$\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)u^{-\alpha}$
$1/(a^2+t^2)$	$\pi e^{-a\lvert u\rvert}/2a$	$[e^{-au}\,\mathrm{Ei}\,(au)-e^{au}\,\mathrm{Ei}\,(-au)]/a$ 注2)
e^{-at}	$a/(a^2+u^2)$	$u/(a^2+u^2)$
$e^{-\lambda t^2}\ (\mathrm{Re}\,\lambda>0)$	$\sqrt{\pi/4\lambda}\ e^{-u^2/4\lambda}$	$e^{-u^2/4\lambda}\varphi(u/2\sqrt{\lambda})/\sqrt{\lambda}$ 注3)
$e^{-\lambda t^2}t$		$\sqrt{\pi/4\lambda}(u/4\lambda)e^{-u^2/4\lambda}$

$F(t)$	$f_c(u)$	$f_s(u)$
$\dfrac{\sin at}{t}\quad(a>0)$	$\begin{cases}\pi/2 & (0<u<a)\\ 0 & (a<u)\end{cases}$	$\dfrac{1}{2}\log\left\|\dfrac{a+u}{a-u}\right\|$
$\tanh(\pi t/2)$		$\operatorname{cosech} u$
$\operatorname{sech}(\pi t/2)$	$\operatorname{sech} u$	
$J_\nu(t)\quad(\operatorname{Re}\nu>-1)$	$\begin{cases}\dfrac{\cos(\nu\arcsin u)}{\sqrt{1-u^2}}\\ -\dfrac{(u-\sqrt{u^2-1})^\nu}{\sqrt{u^2-1}}\sin\dfrac{\nu\pi}{2}\end{cases}$	$\dfrac{\sin(\nu\arcsin u)}{\sqrt{1-u^2}}\quad(0<u<1)$ $\dfrac{(u-\sqrt{u^2-1})^\nu}{\sqrt{u^2-1}}\cos\dfrac{\nu\pi}{2}\quad(1<u)$
$J_0(at)$	$\begin{cases}1/\sqrt{a^2-u^2}\\ 0\end{cases}$	$0\ (0\leqslant u<a)$ $1/\sqrt{u^2-a^2}\quad(a<u)$
$N_0(t)$	$\begin{cases}0\\ -\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\end{cases}$	$\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}\quad(0<u<1)$ $\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\log(u-\sqrt{u^2-1})}{\sqrt{u^2-1}}\quad(1<u)$
$K_0(t)$	$\pi/2\sqrt{1+u^2}$	$(\operatorname{arcsinh} u)/\sqrt{1+u^2}$

注 2) Ei 是指数积分函数(→公式 19. II) 3)).

注 3) 设 $\varphi(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$.

12. Laplace 变换和算子演算

I) Laplace 变换 (→ Laplace 变换)

Laplacc 变换†♦ $\quad V(p)=\int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt\qquad(\operatorname{Re}p>0)$.

逆变换 (Bromwich 积分†♦) $\quad \dfrac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{pt}V(p)dp=\begin{cases}F(t) & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$

$F(t)$	$V(p)$
1	$1/p$
$1(t-a)=\begin{cases}0\ (0\leqslant t<a)\\ 1\ (a\leqslant t)\end{cases}$	e^{-ap}/p
$[x/a]$ (整数部)	$1/p(e^{ap}-1)$
$t^{\alpha-1}\ (\operatorname{Re}\alpha>0)$	$\Gamma(\alpha)/p^\alpha$
e^{-at}	$1/(p+a)$
$e^{-at}t^{\alpha-1}\ (\operatorname{Re}\alpha>0,\ a>0)$	$(p+a)^{-\alpha}\Gamma(\alpha)$
$e^{-at}F(t)\ (a>0)$	$V(p+a)$
$(1-e^{-t})/t$	$\log(1+p^{-1})$
$(\pi t)^{-1/2}e^{-x^2/4t}$	$p^{-1/2}e^{-x\sqrt{p}}\ (x>0)$

$F(t)$	$V(p)$
$\log t$	$-(\log p + C)/p$ (C 是 Euler 常数)
$\sin at$	$a/(p^2 + a^2)$
$\cos at$	$p/(p^2 + a^2)$
$\sin(x\sqrt{t})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{x}{p^{3/2}}e^{-x^2/4p}$
$t^{-1/2}\cos(x\sqrt{t})$	$\sqrt{\pi/p}\,e^{-x^2/4p}$
$t^{-1}\sin xt$	$\arctan(x/p)$
$x^{-1}(1-\cos ax)$	$\frac{1}{2}\log[1+(a^2/p^2)]$
$\sinh at$	$a/(p^2 - a^2)$
$\cosh at$	$p/(p^2 - a^2)$
$J_\nu(t)$ $(\mathrm{Re}\,\nu > -1)$	$\frac{(\sqrt{1+p^2}-p)^\nu}{\sqrt{1+p^2}}$
$\frac{1}{t}J_\nu(at)$ $(\mathrm{Re}\,\nu > 0)$	$\frac{(\sqrt{a^2+p^2}-p)^\nu}{\nu a^\nu}$
$t^\nu J_\nu(at)$ $\left(\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}\right)$	$\frac{(2a)^\nu\Gamma[\nu+(1/2)]}{\sqrt{\pi}(p^2+a^2)^{\nu+(1/2)}}$
$t^{\nu/2}J_\nu(x\sqrt{t})$ $(\mathrm{Re}\,\nu > -1)$	$\frac{x^\nu}{2^\nu p^{\nu+1}}e^{-x^2/4p}$
$J_0(t)$	$(1+p^2)^{-1/2}$
$J_0(x\sqrt{t})$	$e^{-x^2/4p}/p$
$N_0(t)$	$\frac{2}{\pi}\frac{\log(\sqrt{1+p^2}-p)}{\sqrt{1+p^2}}$
$L_n(t)$ (Laguerre 多项式†)	$\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n$
$t^\alpha L_n^{(\alpha)}(t)$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\frac{1}{p^{\alpha+1}}\left(\frac{p-1}{p}\right)^n$
$H_{2n+1}(\sqrt{t})$ (Hermite 多项式†)	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n+1)!!\frac{(1-p)^n}{p^{n+(3/2)}}$ 注
$\frac{H_{2n}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\pi}(2n-1)!!\frac{(1-p)^n}{p^{n+(1/2)}}$

注：$(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\cdots5\cdot3\cdot1$.

II) 算子演算♦(→算子演算)

Heaviside 函数†(单位函数♦) $\quad \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & (t<0) \\ 1 & (t>0). \end{cases}$

Dirac δ 函数†(单位脉冲函数♦) $\quad \delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}[\mathbf{1}(t+\varepsilon) - \mathbf{1}(t-\varepsilon)]$. 算子 $\Omega(p)$ 作用于 $\mathbf{1}(t)$ 的结果是 $A(t)$，以 $\Omega(p)\mathbf{1}(t) = A(t)$ 表示.

在下表 i) 中的一般公式中，假设关系 $\Omega_i(p)\mathbf{1}(t) = A_i(t)$ $(i = 1, 2)$.

Carson 积分* $\Omega(p)=p\int_0^{\infty}e^{-pt}A(t)dt \quad (\mathrm{Re}\,p>0)$.

Laplace 变换 $V(p)=\frac{\Omega(p)}{p}=\int_0^{\infty}e^{-pt}A(t)dt$.

i) 一般公式

$\Omega(p)$	$A(t)$
$\Omega_1(p)+\Omega_2(p)$	$A_1(t)+A_2(t)$
$a\Omega_1(p)$	$aA_1(t)$
$p\Omega_1(p)$	$A_1(0)\delta(t)+A_1'(t)$
$\frac{1}{p}\Omega_1(p)$	$\int_0^t A_1(t)dt$
$\Omega_1(ap)$	$A_1(t/a)$
$[p/(p+a)]\Omega_1(p+a)$	$e^{-at}A_1(t) \quad (\mathrm{Re}\,a>0)$
$\frac{1}{p}\Omega_1(p)\Omega_2(p)$	$\int_0^t A_1(\tau)A_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t A_1(t-\tau)A_2(\tau)d\tau$

ii) 例

$\Omega(p)=pV(p)$	$A(t)$
p	$\delta(t)$
$1/p^n \ (n=0,1,2,\cdots)$	$(t^n/n!)\mathbf{1}(t)$
$p/(p+a)$	$(e^{-at})\mathbf{1}(t)$
$p^2/(p^2+a^2)$	$(\cos at)\mathbf{1}(t)$
$ap/(p^2+a^2)$	$(\sin at)\mathbf{1}(t)$
$a_0+\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots$	$\left(a_0+a_1\frac{t}{1!}+a_2\frac{t^2}{2!}+\cdots\right)\mathbf{1}(t)$
$\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{p-p_k}$	$\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{p_k}(e^{p_kt}-1)\mathbf{1}(t)=\Omega(0)\mathbf{1}(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{B_k}{p_k}e^{p_kt}$

13. 保角映射(→保角映射)

原　　域	象　　域	映射函数
$\|z\|<1$（单位圆）	$\|w\|<1$	$w=\varepsilon\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0z}$, $\|z_0\|<1$, $\|\varepsilon\|=1$（一般形式）
$\mathrm{Im}\,z>0$（上半平面）	$\|w\|<1$	$w=\varepsilon\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$, $\mathrm{Im}\,z_0>0$, $\|\varepsilon\|=1$（一般形式）
$\mathrm{Im}\,z>0$（上半平面）	$\mathrm{Im}\,w>0$	$w=\frac{az+b}{cz+d}$, a,b,c,d 为实数；$ad-bc>0$（一般形式）

原　　域	象　　域	映射函数
$0<\arg z<\alpha$ （角域）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=z^{\pi/\alpha}$
$\|z\|<1,\ \operatorname{Im} z>0$ （上半圆）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$
$0<\arg z<\alpha,\ \|z\|<1$ （扇形）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=\left(\frac{1+z^{\pi/\alpha}}{1-z^{\pi/\alpha}}\right)^2$
$\alpha<\arg\frac{z-p}{z-q}<\beta$ （圆弧三角形）	$0<\arg w<\gamma$	$w=\left(e^{-i\alpha}\frac{z-p}{z-q}\right)^{\frac{\gamma}{\beta-\alpha}}$
$0<\operatorname{Im} z<\eta$ （平行带）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=e^{\pi z/\eta}$
$\operatorname{Re} z<0,\ 0<\operatorname{Im} z<\eta$ （半平行带）	$\operatorname{Im} w>0,\ \|w\|<1$	$w=e^{\pi z/\eta}$
$y^2>4c^2(x+c^2)$, $z=x+iy,\ c>0$ （抛物线外部）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=\sqrt{z}-ic$
$y^2<4c^2(x+c^2)$, $z=x+iy,\ c>0$ （抛物线内部）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=i\sec\frac{\pi\sqrt{z}}{2ic}$
$\frac{x^2}{[c+(1/c)]^2}+\frac{y^2}{[c-(1/c)]^2}>1$, $z=x+iy,\ c>1$ （椭圆外部）	$\|w\|>c$	$w=\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2},\ z=w+\frac{1}{w}$
$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}<4$, $z=x+iy$, $0<\alpha<\pi/2$ （双曲线外部）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=\left(e^{-i\alpha}\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)^{\pi(\pi-2\alpha)}$
$\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{\sin^2\alpha}>4$, $x>0$, $z=x+iy$, $0<\alpha<\pi/2$ （双曲线右半内部）	$\operatorname{Im} w>0$	$w=\frac{1}{2i}\left[\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}+\left(\frac{z-\sqrt{z^2-4}}{2}\right)^{\frac{\pi}{2\alpha}}\right]$
$\|z\|<1$	$\|\operatorname{Re} w\|\leqslant 2,\ \operatorname{Im} w=0$ 带边界的裂纹域	$w=z+\frac{1}{z}$
$\|z\|<1$	$\|w\|\geqslant 1/4,\ \arg w=\lambda$ 带边界的裂纹域	$w=\frac{z}{(1+e^{-i\lambda}z)^2}$

原　域	象　域	映射函数
$\|z\|<1$	$\|w\|\geq 1\|4^{1/p}$ $\arg w=\lambda+(2j\pi/p)$, $j=0,\cdots,p-1$ 带边界的裂纹域	$w=\dfrac{z}{(1+e^{-ip\lambda}z^p)^{2/p}}$
$-\pi/2<\mathrm{Re}\,z<\pi/2$ (平行带)	$\|\mathrm{Re}\,w\|\geq 1$, $\mathrm{Im}\,w=0$ 带边界的裂纹域	$w=\sin z$
$-\pi<\mathrm{Im}\,z<\pi$ (平行带)	$\mathrm{Re}\,w\leq -1$, $\mathrm{Im}\,w=\pm\pi$ 带边界的裂纹域	$w=z+e^z$
任意圆或半平面	n 边形的内部．内角 $\alpha_j\pi(j=1,\cdots,n)$ 的顶点的原象是 $z=z_j$.	$w=c\int^z\prod_{j=1}^{n}(t-z_j)^{\alpha_j-1}dt+c'$ ($c\neq 0$, c' 为常数)．特别当 $z_n=\infty$ 时，省略因子 $(t-z_n)^{\alpha_n-1}$ (Schwarz-Christoffel 变换*)
任意圆或半平面	n 边形的外部．内角 $\alpha_j\pi(j=1,\cdots,n)$ 的顶点的原象是 $z=z_j$，点∞的原象是 $z=p$.	$w=c\int^z(t-p)^{-2}\prod_{j=1}^{n}(t-z_j)^{1-\alpha_j}dt+c'$ ($c\neq 0$, c' 为常数)
$\mathrm{Im}\,z>0$	正三角形的内部	$w=\int_0^z\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^2}}dt$
$\mathrm{Im}\,z>0$	等腰直角三角形的内部	$w=\int_0^z\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^2(1-t)^3}}dt$
$\mathrm{Im}\,z>0$	一角是 $\pi/6$ 的直角三角形的内部	$w=\int_0^z\dfrac{1}{\sqrt[3]{t^3(1-t)^4}}dt$
$\|z\|<1$	正 n 边形的内部	$w=\int_0^z(1-t^n)^{-2/n}dt$
$0<\mathrm{Re}\,z<\omega_1$, $0<\mathrm{Im}\,z<\omega_3/i$ (长方形)	$\mathrm{Im}\,w>0$	$w=\mathscr{P}(z\|2\omega_1,2\omega_3)$ ($\mathscr{P}$ 是 Weierstrass 的函数†)
$-K<\mathrm{Re}\,z<K$, $0<\mathrm{Im}\,z<K'$ (长方形)[注1]	$\mathrm{Im}\,w>0$	$w=\mathrm{sn}(z,k)$, $z\int_0^w\dfrac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$ (sn 是 Jacobi 的 sn 函数†)
$v<\|z\|<1$ $\mathrm{Im}\,z<0$ (上半圆环)	$\log q<\mathrm{Re}\,w<0$, $0<\mathrm{Im}\,w<\pi$ (长方形)	$w=\log z$
$\|z\|<1$	$\dfrac{u^2}{A^2}+\dfrac{v^2}{B^2}<1$, $w=\sqrt{A^2-B^2}$ $w=u+v$, $A>B>0$; (椭圆内部)	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2K}\int_0^{2z/k(1+z^2)}\dfrac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right)$, $\dfrac{1}{\pi}\log\dfrac{A+B}{A-B}=\dfrac{K'}{K}$[注1]

原　域	象　域	映射函数
$\operatorname{Im} z > 0$	圆弧多边形的内部	$\{w; z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2 = R(z)$ （$R(z)$ 为有理数）
$\lvert z \rvert < 1$	内角是 $\pi/k(1 < k \leqslant \infty)$ 的等边圆弧三角形的内部	$w = \frac{z\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}(1-t)^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2k}}(1-z^3t)^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{2k}}dt}{\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2k}}(1-t)^{-\frac{5}{6}+\frac{1}{2k}}(1-z^3t)^{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2k}}dt}$. $z = 1$, $c^{2\pi i/3}$ 和 $e^{4\pi i/3}$ 的象是顶点，并且 $\left[\frac{dw}{dz}\right]_{x=0} = \frac{\Gamma[(5/6)+(1/2k)]\Gamma(2/3)}{\Gamma[(1/6)+(1/2k)]\Gamma(4/3)}$
$\operatorname{Im} z > 0$	内角是 $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ 的圆弧三角形的内部 $(\alpha+\beta+\gamma<1)$[注2)]	$w = \left\{\int_0^1 t^{-\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{2}}(1-t)^{-\frac{1+\alpha-\beta-\gamma}{2}} \cdot (1-zt)^{-\frac{1-\alpha+\beta-\gamma}{2}}dt\right\} \Big/ \left\{\int_0^1 t^{-\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{2}} \cdot (1-t)^{-\frac{1-\alpha-\beta+\gamma}{2}}(1-t+zt)^{-\frac{1-\alpha+\beta-\gamma}{2}}dt\right\}$
$\lvert\tau\rvert > 1$, $-1/2 < \operatorname{Re}\tau < 0$	$\operatorname{Im} J > 0$	$J = J(\tau)$, $\tau = \omega_3/\omega_1$, $J = g_2^3/(g_2^3 - 27g_3^2)$ （模群†的绝对不变式†）$J(e^{2\pi i/3}) = 0$, $J(i) = 1$, $J(\infty) = \infty$.
$\lvert\tau + 1/2\rvert < 1/2$, $-1 < \operatorname{Re}\tau < 0$	$\operatorname{Im}\lambda < 0$	$\lambda = \lambda(\tau)$, $\tau = \omega_3/\omega_1$, $\lambda = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$; $J(\tau) = \frac{4}{27}\frac{[\lambda(\tau)^2 - \lambda(\tau) + 1]^2}{\lambda(\tau)^2[\lambda(\tau) - 1]^2}$, $\lambda(-1) = \infty$, $\lambda(0) = 1$, $\lambda(\infty) = 0$

注 1）K, K', k' 是完全椭圆积分，用惯用的记号.

$$K = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt\,,\quad K' = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}\,dt\,,\quad k^2 + k'^2 = 1.$$

注 2）当 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 时，用适当的线性变换将圆弧三角形映射为通常的直线三角形，并能用 Schwarz-Christoffel 变换．当 $\alpha + \beta + \gamma > 1$ 时，上式中对于超几何函数的积分表示，可用在 α, β, γ 收敛的对应的超几何函数的积分表示替换.

14. 常微分方程

I）求积法♦　设 $a, b, c, \cdots$ 为积分常数†.

1）一阶常微分方程的解法（→常微分方程）

i）变量分离型♦　$dy/dx = X(x)Y(y)$.

通解为 $$\int^y \frac{dy}{Y(y)} = \int^x X(x)dx + c.$$

ii）齐次常微分方程♦　$dy/dx = f(y/x)$．令 $y = ux$，有 $du/dx = [f(u) - u]x$，并且方程化为 i).

通解为 $$x = c\exp\left[\int^u \frac{du}{f(u) - u}\right] \quad \left(u = \frac{y}{x}\right).$$

iii）一阶线性常微分方程♦　$dy/dx + p(x)y + q(x) = 0$.

通解为　$y=\left[c-\int q(x)P(x)dx\right]\Big/P(x)$，　其中 $P(x)=\exp\left[\int p(x)dx\right]$.

iv) Bernoulli 型常微分方程♦　$dy/dx+p(x)y+q(x)y^{\alpha}=0 \quad (\alpha\neq 0,1)$.

令 $z=y^{1-\alpha}$，则方程变换成 $dz/dx+(1-\alpha)p(x)z+(1-\alpha)q(x)=0$，化为 iii).

v) Riccati 型常微分方程♦　$dy/dx+ay^2=bx^m$. 当 $m=-2$, $4k/(1-2k)$ (k 为整数) 时用求积法解. 一般地,若令 $ay=u'/u$，则化为关于 u 的 Bessel 微分方程†.

vi) 广义 Riccati 型常微分方程♦　$dy/dx+p(x)y^2+q(x)y+r(x)=0$.

若已知一个,二个或三个独立的特解 $y=y_i(x)$，则通解可分别表示如下.

$$y=y_1(x)+P(x)\Big/\left[\int p(x)P(x)dx+c\right],\quad 其中,\ P(x)=\exp\left[-\int\{q(x)+2p(x)y_1(x)\}dx\right]$$

($y_1(x)$ 是特解).

$$\frac{y-y_1(x)}{y-y_2(x)}=c\exp\left[\int p(x)\{y_2(x)-y_1(x)\}dx\right]\quad (y_1(x),\ y_2(x) 是特解).$$

$$\frac{y-y_1(x)}{y-y_2(x)}=c\,\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_2(x)}\quad (y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x) 是特解).$$

vii) 恰当微分方程♦　$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，其中左端是恰当微分形式†.

条件是　$\partial P/\partial y=\partial Q/\partial x$.

通解是　$\int Pdx+\int\left(Q-\frac{\partial}{\partial y}\int Pdx\right)dy=c$.

viii) 积分因子. 若 $M(x,y)[P(x,y)dx+Q(x,y)dy]$ 是一恰当微分形式 $d\varphi(x,y)$，则 $M(x,y)$ 称为微分方程 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 的**积分因子** (integrating factor). 若知道积分因子，则通解是 $\varphi(x,y)=c$. 若求得两个独立的积分因子 M, N, 则通解是 $M/N=c$.

ix) Clairaut 型常微分方程♦　$y=xp+f(p)(p=dy/dx)$.

通解是直线族 $y=cx+f(c)$,

奇解†是该直线族的包络线†,它是由原方程和 $x+f'(p)=0$ 消去 p 得到的.

x) Lagrange 型常微分方程♦　$y=x\varphi(p)+\psi(p)(p=dy/dx)$.

对 x 进行微分,得关于 x 和 p 的一阶线性常微分方程 (→ iii)) $[\varphi(p)-p](dx/dp)+\varphi'(p)x+\psi'(p)=0$. 由这个方程的解和原方程消去 p，则得原方程的通解. 也可把 p 看做参数. 这时，由方程 $p=\varphi(p)$ 的根 p_0 得到解 $y=p_0x+\psi(p_0)$ (直线). 这个解有时是奇解.

xi) 奇解. $f(x,y,p)=0$ 的奇解包含在由 $\partial f/\partial p=0$ 和 $f=0$ 消去 p 得到的方程中，虽然这个结式中可能包含几种不是奇解的曲线.

xii) 常微分方程组♦. 对于

(1)　$dx:dy:dz=P:Q:R$,

偏微分方程 $(\partial MP/\partial x)+(\partial MQ/\partial y)+(\partial MR/\partial z)=0$ 的解 $M(x,y,z)$ 称为 **Jacobi 最后乘子** (Jacobi's last multiplier).

若已知两个独立的最后乘子 M 和 N，则 $M/N=c$ 是 (1) 的一个解. 若已知一个最后乘子 M 和 (1) 的一个解 $f=a$，则能求出 (1) 的另一个解: 由 $f=a$ 解出 z，代入 (1)，$M(Qdx-Pdy)/f_z$ 是恰当微分形式 $dG(x,y,a)$，将 $f(x,y,z)$ 代入 G 中的 a，从而 $G(x,y,f(x,y,z))=b$ 是(1) 的另一个解.

2) **高阶常微分方程的解法**♦　i)—iv) 是**降阶** (depression) 的例子.

i) $f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)}) = 0 (0 < k \leqslant n)$. 若令 $y^{(k)} = z$，则方程化为关于 z 是 $n-k$ 阶的.

ii) $f(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$. 若把 $y' = p$ 看做 y 的应变量，则将此方程化为 $(n-1)$ 阶.

iii) $y'' = f(y)$. 通解为 $x = a \pm \int \left[2\int f(y)dy + b\right]^{-1/2} dy$. 对 $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$ 也有类似的公式.

iv) 高阶齐次常微分方程♦. 若 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ 的左边满足 $F(x, \rho y, \rho y', \cdots, \rho y^{(n)}) = \rho^{\alpha} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$，则由 $u = y'/y$，方程化为关于 u 的 $(n-1)$ 阶方程.

若 F 满足 $F(\rho x, \rho^l y, \rho^{l-1} y', \cdots, \rho^{l-n} y^{(n)}) = \rho^{\alpha} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})$，则由 $u = y/x^l$，$t = \log x$ 方程化为不含 t 的 ii) 的形式.

v) Euler 型线性常微分方程♦ $p_n(x)x^n y^{(n)} + p_{n-1}(x)x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)xy' + p_0(x)y = q(x)$ 由 $t = \log x$ 化为线性方程.

vi) 高阶线性常微分方程♦(恰当方程). 为使 $L[y] \equiv \sum_{j=0}^{n} p_j(x)y^{(j)} = X(x)$ 成为恰当微分形式，其充分必要条件是 $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j p_j^{(j)} = 0$，此时由 $\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-j-1}(-1)^k p_{k+j+1}^{(k)} y^{(j)} = \int X(x)dx + c$ 得到方程的初积分.

vii) 高阶线性常微分方程(降阶). 对于 $L[y] \equiv \sum_{j=0}^{n} p_j(x)y^{(j)} = X(x)$，若已知高阶齐次线性常微分方程 $L[y] = 0$ 的互相独立的特解 $y_1(x), \cdots, y_m(x)$，设具有这些特解的 m 阶线性常微分方程为 $A(y) = 0$，则由变换 $z = A(y)$，方程化为关于 z 的 $(n-m)$ 阶线性常微分方程. 例如，若 $m = 1$，则由变换 $y(x) = y_1(x)\int z(x)dx$，方程化为关于 $z(x)$ 的 $(n-1)$ 阶线性常微分方程.

又若 $n = m = 2$，则通解为

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1 \int T y_2 dx + y_2 \int T y_1 dx,$$

其中 $T(x) \equiv X(x)/[y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)]$. 右端的分母是 y_1, y_2 的 Wronski 行列式†.

viii) 正则奇点♦. 对于高阶线性常微分方程

(1) $x^n y^{(n)} + x^{n-1}p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$,

若 $p_1(x), \cdots, p_n(x)$ 在 $x = 0$ 处是解析的，则点 $x = 0$ 是 (1) 的正则奇点†.

令 $p_0 = 1$，并且

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(\rho)x^\nu = \sum_{j=0}^{n} p_{n-j}(x)\rho(\rho-1)\cdots(\rho-j+1).$$

若 ρ 是特征方程 $f_0(\rho) = 0$ 的根，并且 $\rho+1, \rho+2, \cdots$ 不是根，则可从 $c_0(\neq 0)$ 开始，由

(2) $\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu f_{m-\nu}(\rho+\nu) = 0 \quad (m = 1, 2, \cdots)$,

顺次求出系数 c_ν，级数 $y = x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu$ 收敛而且是 (1) 的解. 若特征方程的各对根之差都不是整数，则对每个特征根应用此过程，得到 (1) 的 n 个线性独立的解.

当存在相差为整数的根(包含重根)时，将根组由小到大顺次记为 $\rho_1, \cdots, \rho_l$，并将根的相重数分别记为 $e_1, \cdots, e_l$，令 $q_k = \rho_k - \rho_1 (k = 1, 2, \cdots, l;\ 0 = q_1 < q_2 < \cdots < q_l)$. 取 $N \geqslant q_l$ 和 $c(\neq 0)$ 为常数，设 λ 为参数，从 $c_0 = c_0(\lambda) \equiv c\prod_{k=1}^{N} f_0(\lambda+k)$ 开始依次由 (2) 唯一确定 $c_\nu =$

$c_\nu(\lambda)$. 令 $m_k = e_k + e_{k+1} + \cdots + e_l (k = 1, \cdots, l)$, 则对于 $m_{k+1} \leqslant h \leqslant m_k - 1$ 级数

$$(3) \qquad y = \left[\frac{\partial^h}{\partial \lambda^h} x^\lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu(\lambda) x^\nu\right]_{\lambda=\rho_k}$$

$$= x^{\rho_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \left[\sum_{j=0}^{h} \binom{h}{j} c_\nu^{(j)}(\rho_k)(\log x)^{h-j}\right]$$

收敛, 并给出 (1) 的 e_k 个独立解. 从而关于 $k = 1, \cdots, l$, 全体得到 $\sum_{k=1}^{l} e_k = m_1$ 个互相独立的解,将此过程应用于特征方程的全部根,即可得 (1) 的 n 个独立的解 (Frobenius 法*).

在实际计算时,因已知解的形式 (3), 故通常用未定系数法来确定系数 c_ν.

3) 常系数线性常微分方程的解法*(→线性常微分方程)

设 α_i, α_{ik} 等为常数. 考虑下列高阶线性常微分方程 (1) 和线性常微分方程组 (2).

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i y^{(i)} = X(x).$$

$$(2) \qquad y_j' = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} y_k + X_j(x) \qquad (j = 1, \cdots, n).$$

(通解) = (特解) + (齐次方程的通解).

i) 齐次方程的通解(余因子)由下列公式给出.

对于 (1) $\quad y = x^j \exp \lambda_k x \qquad (j = 0, 1, \cdots, e_k - 1;\ k = 1, \cdots, m)$,

对于 (2) $\quad y_j(x) = \sum_{k=1}^{m} p_{jk}(x) \exp \lambda_k x \qquad (j = 1, \cdots, n)$,

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ 是 (1) 或 (2) 的特征方程的根,由

$$(1') \qquad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \lambda^i = 0,$$

$$(2') \qquad \det(\alpha_{jk} - \lambda \delta_{jk}) = 0$$

给出. 根的相重数记作 $e_1, \cdots, e_m (e_1 + \cdots + e_m = n)$; $p_{jk}(x)$ 是含 e_k 个任意常数的至多 $e_k - 1$ 次多项式.

若在原方程中所有系数都是实数, 且 $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ 是虚根, 则 $\bar{\lambda}_k = \mu_k - i\nu_k$ 也是一个具有相同重数的根, 从而可用 $\exp \mu_k x \cos \nu_k x$ 和 $\exp \mu_k u \sin \nu_k x$ 替换 $\exp \lambda_k x$ 和 $\exp \bar{\lambda}_k x$, 这样就能用实函数表示这个解.

ii) 非齐次线性常微分方程的解可用常数变易法或 2) vii) 的方法求得.

关于 (2) 说明常数变易法. 首先用 i) 求齐次方程的互相独立的 n 个基本解组 $y_j = \varphi_{jk}(x) (k = 1, \cdots, n)$, 然后将 $y_j = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) \varphi_{jk}(x)$ 代入 (2), 得到关于 $c_k'(x)$ 的线性方程组, 最后对 $c_k'(x)$ 求解, 且积分求出 $c_k(x)$.

由 $X(x)$ 或 $X_j(x)$ 的特殊形式确定解的形式, 且参数可用未定系数法求得. 下表列举了关于 (1) 的特解的例子. 表中 α, k, a, b, c 为常数, p_r, q_r 为 r 次多项式, I_a 为由

$$I_a \cdot F = \frac{1}{a}\left[\sin ax \int \cos ax \cdot F(x) dx - \cos ax \int \sin ax \cdot F(x) dx\right] \qquad (a \neq 0)$$

定义的算子.

$X(x)$	条　件	特　解
$p_r(x)$	$\lambda=0$ 是 $(1')$ 的 m 重根	$x^m q_r(x)$
$ke^{\alpha x}$	$\lambda=\alpha$ 是 $(1')$ 的 m 重根	$cx^m e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x}p_r(x)$	$\lambda=\alpha$ 是 $(1')$ 的 m 重根	$x^m q_r(x) e^{\alpha x}$
$\left.\begin{matrix}\cos(ax+b)\\ \sin(ax+b)\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}(1')=\varphi(\lambda^2)+\lambda\psi(\lambda^2),\text{ 和}\\ \varphi(-a^2)+a^2\psi(-a^2)\neq 0\end{matrix}\right\}$	$c_1\cos(ax+b)+c_2\sin(ax+b)$
$\left.\begin{matrix}\cos(ax+b)\\ \sin(ax+b)\end{matrix}\right\}$	$\left\{\begin{matrix}(1')=g(\lambda)/f(\lambda^2)\text{ 和 } f(\lambda^2)\\ \text{可被 }(\lambda^2+a^2)^m\text{ 整除}\\ (\text{但不可被 }(\lambda^2+a^2)^{m+1}\text{ 整除})\end{matrix}\right\}$	$c(I_a)^m\begin{cases}\cos(ax+b)\\ \sin(ax+b)\end{cases}$

II) Riemann 的 P 函数†♦和特殊函数(→线性常微分方程的大范围理论)

1) 用初等函数表示的例子(A, B 为积分常数)

$$P\begin{Bmatrix}a & b & c & \\ 0 & \mu & -\mu & x\\ 1 & \mu' & -\mu' & \end{Bmatrix}=\begin{cases}A\left(\dfrac{x-b}{x-c}\right)^{\mu}+B\left(\dfrac{x-b}{x-c}\right)^{\mu'} & (\mu\neq\mu'),\\ \left(\dfrac{x-b}{x-c}\right)^{\mu}\left[A+B\log\left(\dfrac{x-b}{x-c}\right)\right] & (\mu=\mu').\end{cases}$$

$$P\begin{Bmatrix}a & b & c & \\ \lambda & \mu & \nu & x\\ 0 & 0 & 0 & \end{Bmatrix}=A+B\int(x-a)^{\lambda-1}(x-b)^{\mu-1}(x-c)^{\nu-1}dx \qquad (\lambda+\mu+\nu=1).$$

以上 a, b, c 为有限的. 若 $c=\infty$, 则可用 1 替换 $x-c$.

$$P\begin{Bmatrix}\overbrace{\qquad\infty\qquad} & 0 & \\ \alpha \quad 0 & 0 & x\\ \alpha' \quad 0 & 1 & \end{Bmatrix}=\begin{cases}Ae^{\alpha x}+Be^{\alpha' x} & (\alpha\neq\alpha'),\\ e^{\alpha x}(Ax+B) & (\alpha=\alpha').\end{cases}$$

$$P\begin{Bmatrix}\overbrace{\qquad\infty\qquad} & 0 & \\ \alpha \quad 1-\sigma & \sigma & x\\ 0 \quad 0 & 0 & \end{Bmatrix}=A+B\int e^{\alpha x}x^{\sigma-1}dx \qquad (\alpha\neq 0).$$

$$P\begin{Bmatrix}\overbrace{\qquad\infty\qquad} & 0 & \\ \alpha \quad -\sigma & \sigma & x\\ \alpha' \quad 1-\sigma' & \sigma' & \end{Bmatrix}=x^{\sigma}e^{\alpha x}\left[A+B\int e^{(\alpha'-\alpha)x}x^{\sigma'-\sigma-1}dx\right] \qquad (\alpha\neq\alpha').$$

令 $z=x^{-\lambda}(x-1)^{-\mu}y$, 并用适当的线性变换将 a, b, c 变换为 0, 1, ∞, 则 Riemann 的 P 函数可化为具有参数 $\alpha=\lambda+\mu+\nu$, $\beta=\lambda+\mu+\nu'$, $\gamma=1+\lambda+\lambda'$ 的 Gauss 的超几何函数†.

2) 特殊函数的表示

i) Gauss 超几何微分方程†♦ $x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]y'-\alpha\beta y=0$.

$$y=P\begin{Bmatrix}0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & \alpha & x\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta & \end{Bmatrix},\ \text{特解是 } F(\alpha,\beta,\gamma;x)$$

(→超几何函数).

ii) 合流型超几何微分方程†♦ $xy''-(x-\mu)y'-\lambda y=0$.

$$y = P\begin{Bmatrix} \overbrace{\quad\infty\quad} & 0 & \\ 0 \quad \lambda & 0 & x \\ 1 \quad \mu-\lambda & 1-\mu & \end{Bmatrix}$$，特解是 ${}_1F_1(\lambda, \mu; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+k)} \frac{x^k}{k!}$.

iii) Whittaker 微分方程[†♦] $y'' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{(1/4)-n^2}{x^2}\right] y = 0.$

$$y = P\begin{Bmatrix} \overbrace{\quad\infty\quad} & 0 & \\ 1/2 \quad k & 1/2+n & x \\ -1/2 \quad -k & 1/2-n & \end{Bmatrix}$$，特解是 $M_{k,n}(x), W_{k,n}(x)$.

iv) Bessel 微分方程[†♦] $x^2y'' + xy' + (x^2-\nu^2)y = 0.$

$$y = P\begin{Bmatrix} \overbrace{\quad\infty\quad} & 0 & \\ i \quad 1/2 & \nu & x \\ -i \quad 1/2 & -\nu & \end{Bmatrix}$$，特解是 $J_\nu(x), N_\nu(x)$ (→ Bessel 函数).

当 $m = 0, 1, 2, \cdots$ 时，有 $J_{m-1/2}(x) = (-1)^m 2^{m+1/2} \pi^{-1/2} x^{m-1/2} d^m(\cos x)/d(x^2)^m$.

v) Hermite 微分方程[♦](抛物柱方程[♦]) $y'' - 2xy' + 2ny = 0.$

$$y = P\begin{Bmatrix} \overbrace{\quad\infty\quad} & 0 & \\ 0 \quad -n/2 & 0 & x^2 \\ 1 \quad (n+1)/2 & 1/2 & \end{Bmatrix}.$$

当 $n = 0, 1, 2, \cdots$，时，为 Hermite 多项式[†]

$H_n(x) = (-1)^n 2^{-n/2} e^{x^2} d^n(e^{-x^2})/dx^n$.

vi) Laguerre (连带)微分方程[♦] $xy'' + (l-x+1)y' + ny = 0.$

$$y = P\begin{Bmatrix} \overbrace{\quad\infty\quad} & 0 & \\ 0 \quad -n & 0 & x \\ 1 \quad l+n+1 & -l & \end{Bmatrix}.$$

当 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 时，为 Laguerre 多项式[†] $L_n^l(x) = (1/n!)x^{-l}e^x d^n(x^{n+l}e^{-x})/dx^n$.

vii) Jacobi 微分方程[♦] $x(1-x)y'' + [q-(p+1)x]y' + n(n+p)y = 0.$

$$y = P\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 1-q & q-p & p+n & x \\ 0 & 0 & -n & \end{Bmatrix}.$$

当 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 时，为 Jacobi 多项式[†]

$$G_n(p, q; x) = \frac{\Gamma(q)x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{\Gamma(n+q)} \frac{d^n[x^{q+n-1}(1-x)^{p+n-q}]}{dx^n}.$$

viii) Legendre 微分方程[†♦] $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$

$$y = P\begin{Bmatrix} 1 & -1 & \infty & \\ 0 & 0 & n+1 & x \\ 0 & 0 & -n & \end{Bmatrix}.$$

当 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 时，通解是 $\frac{d^n}{dx^n}\left[A(x^2-1)^n + B(x^2-1)^n \int \frac{dx}{(x^2-1)^{n+1}}\right]$. 特解是 Legendre 多项式[†] $P_n(x) = [d^n\{(x^2-1)^n\}/dx^n]/2^n n!$.

3) 用圆柱函数表示的二阶线性常微分方程的解

设 $C_\nu(x)$ 为圆柱函数[†] (→ Bessel 函数)

方　　程	解
$y''+\frac{1-2\alpha}{x}y'+\left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right]y=0$	$y=x^{\alpha}C_{\nu}(\beta x^{\gamma})$
$y''+\left[\frac{1-2\alpha}{x}-2\beta\gamma i x^{\gamma-1}\right]y'+\left[\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}-\beta\gamma(\gamma-2\alpha)ix^{\gamma-2}\right]y=0$	$y=x^{\alpha}\exp(i\beta x^{\gamma})C_{\nu}(\beta x^{\gamma})$
$y''+\left[\frac{1}{x}-2u(x)\right]y'+\left[1-\frac{\nu^2}{x^2}+u(x)^2-u'(x)-\frac{u(x)}{x}\right]y=0$	$y=\exp\left[\int u(x)dx\right]C_{\nu}(x)$
$y''+\alpha^2\nu^2x^{2\nu-2}y=0$	$y=\sqrt{x}\,C_{1/2\nu}(\alpha x^{\nu})$
$y''+(e^{2x}-\nu^2)y=0$	$y=C_{\nu}(e^{x})$
$x^2y''+xy'+(\beta^2x^2-\nu^2)y=0$	$y=C_{\nu}(\beta x)$
$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0$	$y=C_{\nu}(ix)$（修正 Bessel 函数†）

III）变换群†和不等式†

设 $U=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}$ 是给定的两个变量的连续变换群的无穷小变换†，而 $V'=\xi\frac{\partial}{\partial x}+\eta\frac{\partial}{\partial y}+\zeta\frac{\partial}{\partial p}$ 是它的联络群的无穷小变换，则有 $\zeta=\frac{\partial\eta}{\partial x}+p\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)-p^2\frac{d\xi}{\partial x}$，令 $p=\frac{dy}{dx}$，$r=\frac{d^2y}{dx^2}$.

设 0 阶不变式为 α，一阶不变式为 β，二阶不变式为 γ，则在无穷小变换 U 下的一阶或二阶不变式的微分方程的一般形式由 $\Phi(\alpha,\beta)=0$（或 $\beta=F(\alpha)$），$\Psi(\alpha,\beta,\gamma)=0$（或 $\gamma=G(\alpha,\beta)$）给出，其中 F,Φ,Ψ,G 表示对应变量的任意函数.

群 U			不　等　式			注
ξ	η	ζ	0 阶	1 阶	2 阶	
0	1	0	x	p	r	(1)
1	0	0	y	p	r	(1)
$-y$	x	$1+p^2$	x^2+y^2	$(y-xp)/(x+yp)$	$r/(1+p^2)^{3/2}$	(2)
0	y	p	x	p/y	r/y	(3)
x	0	$-p$	y	xp	x^2r	(3)
x	y	0	y/x	p	xr	(4)
x	$-y$	$-2p$	xy	x^2p	x^3r	(4)
μx	νy	$(\nu-\mu)p$	y^{μ}/x^{ν}	$x^{1-\nu/\mu}p$ 或 px/y	$r\mu/x^{\nu-\mu-1}$	(4)
μ	ν	0	$\nu x-\mu y$	p	r	
0	$h(x)$	$h'(x)$	x	$h(x)p-h'(x)y$	$h(x)r-h''(x)y$	
$k(y)$	0	$-k'(y)p^2$	y	$\frac{1}{p}-\frac{k'(y)}{k(y)}x$	$\frac{r}{p^3}+\frac{k''(y)}{k'(y)p}$	(5)
0	$k(y)$	$k'(y)p$	x	$\frac{p}{k(y)}$	$\frac{r}{k(y)}-\frac{k'(y)p^2}{[k(y)]^2}$	(6)
$h(x)$	0	$-h'(x)p$	y	$h(x)p$	$(h(x))^2r+h(x)h'(x)r$	

群 U			不等式			注
ξ	η	ζ	0阶	1阶	2阶	
0	$h(x)k(y)$	$h'(x)k(y)+h(x)k'(y)p$	x	$\frac{p}{k(y)}-\frac{h'(x)}{h(x)}\int^y\frac{dy}{k(y)}$	—	(7)
$xh(x)$	$yh(x)$	$h'(x)(y-xp)$	$\frac{y}{x}$	$\left(p-\frac{y}{x}\right)h(x)$	$\left(\frac{x^2r}{xp-y}-1\right)h(x)+h'(x)$	
y	x	$1-p^2$	x^2-y^2	$\frac{1-p}{1+p}\frac{x+y}{x-y}$ 或 $(x-yp)/(1+p)(x-y)$	$\frac{r}{(1-p^2)^{3/2}}$	

注：(1) 平行变换. (2) 旋转. (3) 仿射变换†. (4) 相似变换†；方程是齐次微分方程. (5) 线性微分方程†. (6) 变量分离型†. (7) 当 $k(y)=y^n$ 时，方程是 Bernoulli 型方程†.

【参】[1] A. R. Forsyth, A treatise on differential equations, Macmillan, 第四版, 1914, 以及常微分方程的【参】.

15. 全微分方程，偏微分方程

I) 全微分方程的解法♦(→全微分方程)

考虑全微分方程组 $dz_j=\sum_{k=1}^{n}P_{jk}(x;z)dx_k\quad(j=1,2,\cdots,m)$.

它的完全可积的†条件是

$$\frac{\partial P_{jk}(x;z)}{\partial x_l}+\sum_i\frac{\partial P_{jk}(x;z)}{\partial z_i}P_{il}(x;z)=\frac{\partial P_{jl}(x;z)}{\partial x_k}+\sum_i\frac{\partial P_{jl}(x;z)}{\partial z_i}P_{ik}(x;z).$$

在此条件下，具有初始条件 $(x_1^0,\cdots,x_n^0;z_1^0,\cdots,z_m^0)$ 的解可由下列过程求得：首先求出微分方程组 $dz_j/dx_1=P_{j1}(x_1,x_2^0,\cdots,x_n^0;z)$ 的满足初始条件 $z_j(x_1^0)=z_j^0$ 的解 $z_j=\varphi_j(x_1)$，其次将 x_1 看做常数，求出微分方程组 $dz_j/dx_2=P_{j2}(x_1,x_2,x_3^0,\cdots,x_n^0;z)$ 的满足初始条件 $z_j(x_2^0)=\varphi_j(x_1)$ 的解 $z_j=\varphi_j(x_1,x_2)$. 顺次重复这个过程，直到求得原方程的解 $z=\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)$；或者，求出方程 $dz_j/dx_1=P_{j1}(x;z)$ 的 m 个独立的初积分† $f_j(x;z)=c_j$，用变换 $u_j=f_j(x;z)$ 把方程变换为 $du_j=\sum_{k=1}^{n}Q_{jk}(x;u)dx_k$，则得到 $Q_{jk}(x;u)$ 不含 x_1 的完全可积的全微分方程，因而减少了一个自变量. 若将此过程重复 n 次，则得通解.

特别是，$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$ $(n=3,m=1)$ 的完全可积条件是

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0.$$

II) 一阶偏微分方程的解法♦(→偏微分方程的解法，一阶偏微分方程)

设 z 为 x,y 的函数，并且 $p\equiv\partial z/\partial x$, $q\equiv\partial z/\partial y$, $r\equiv\partial^2z/\partial x^2$, $s\equiv\partial^2z/\partial x\partial y$, $t\equiv\partial^2z/\partial y^2$. 考虑一阶偏微分方程 $F(x,y,z,p,q)=0$.

1) **Lagrange-Charpit 解法♦** 对于 $F(x,y,z,p,q)=0$，考虑辅助方程(常微分方程组)

$$\frac{dx}{F_p}=\frac{dy}{F_q}=\frac{dz}{pF_p+qF_q}=\frac{-dp}{F_x+pF_z}=\frac{-dq}{F_y+qF_z}$$

的解，令 $G(x,y,z,p,q)=a$ 是辅助方程的解，由它和原方程 $F=0$ 得到 $p=P(x,y,z,a)$，$q=Q(x,y,z,a)$，并把 $dz=Pdx+Qdy$ 积分，得到完全解[†]. 若知道辅助方程另一与 $G=a$ 独立的解 $H(x,y,z,p,q)=b$，则由 $F=0$，$G=a$，$H=b$ 消去 p 和 q 便得到完全解 $z=\Phi(x,y,a,b)$.

2) **各种标准型的一阶偏微分方程的解法** 设 a, b 为积分常数.

i) $f(p,q)=0$. 完全解是 $z=ax+\varphi(a)y+b$. 其中函数 $t=\varphi(a)$ 是由 $f(t,a)=0$ 解出 t 得到的.

ii) $f(px,q)=0$，$f(x,qy)=0$，$f(p/x,q/z)=0$ 等. 若令 $x=e^X$，$y=e^Y$，$z=e^Z$，则这些方程化为 i).

iii) $f(x,p,q)=0$. 若能解出 p，得到 $p=F(x,q)$，则完全解是 $z=\int F(x,a)dx+ay+b$. 类似的方法也可用于 $f(y,p,q)=0$.

iv) $f(z,p,q)=0$. 若能由 $f(z,t,at)=0$ 解出 t，得到 $t=F(z,a)$，则完全解是 $x+ay+b=\int dz/F(z,a)$. 若由完全解 $\Phi(x,y,z,a,b)=0$ 和 $\partial\Phi/\partial a=\partial\Phi/\partial b=0$ 消去 a, b，则得原方程的奇解.

v) 变量分离型[♦]. $f(x,p)=g(y,q)$. 若分别由两个常微分方程 $f(x,p)=a$ 和 $g(y,q)=a$ 解出 p, q，得到 $p=P(x,a)$ 和 $q=Q(y,a)$，则完全解是 $z=\int P(x,a)dx+\int Q(y,a)dy+b$.

vi) Lagrange 型偏微分方程[♦]. $Pp+Qq=R$，其中 P, Q, R 是 x, y, z 的函数. 若用 $u(x,y,z)=a$，$v(x,y,z)=b$ 来表示常微分方程组 $dx:dy:dz=P:Q:R$ 的解，则通解是 $\Phi(u,v)=0$，其中 Φ 是任意函数. 类似的方法也可用于

$$\sum_{j=1}^{n} P_j(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial z}{\partial x_j}=R(x_1,\cdots,x_n).$$

若有 n 个微分方程的方程组 $dx_j/P_j=dz/R(j=1,\cdots,n)$ 的 n 个独立解 $u_j(x)=a_j$，则通解是 $\Phi(u_1,\cdots,u_n)=0$.

vii) Clairaut 型偏微分方程[♦]. $z=px+qy+f(p,q)$. 完全解为平面族 $z=ax+by+f(a,b)$. 作为这个平面族的包络面的奇解是由原方程和 $x=-\partial f/\partial p$，$y=-\partial f/\partial q$ 消去 p, q 得到的.

III) 二阶偏微分方程的解法[♦](→偏微分方程的解法)

1) **求积法**[♦](φ, ϕ 为任意函数)

i) $r=f(x)$. 通解是 $z=\iint f(x)dxdx+\varphi(y)x+\phi(y)$. 类似的方法也可用于 $t=f(y)$.

ii) $s=f(x,y)$. 通解是 $z=\iint f(x,y)dxdy+\varphi(x)+\phi(y)$.

iii) 波动方程[†]. $r-t=0$. 通解是 $z=\varphi(x+y)+\phi(x-y)$.

iv) Laplace 方程[†]. $r+t=0$. 设 $x+iy=\zeta$，并且 φ, ϕ 为 ζ 的复解析函数[†]，通解是 $z=\varphi(\zeta)+\phi(\zeta)$. 实数值的解是 $z=\varphi(\zeta)+\bar{\varphi}(\bar{\zeta})$.

v) $r+Mp=N$，其中 M, N 为 x, y 的函数，通解是

$$z=\int\left[\int L(x,y)N(x,y)dx+gv(y)\right]\Big/L(x,y)dx+\phi(y),\ L(x,y)=\exp\int[M(x,y)dx].$$

在这些积分中，把 y 看做常数.

类似的方法也可用于 $s+Mp=N$，$s+Mq=N$，$t+Ma=N$.

vi) Monge-Ampère（偏微分)方程†. $Rr+Ss+Tt+U(rt-s^2)=V$，其中 R,S,T,U,V 是 x,y,z,p,q 的函数.

当 $U=0$ 时,引入辅助方程

(1) $Rdy^2+Tdx^2-Sdxdy=0$.

(2) $Rdpdy+Tdqdx=Vdxdy$.

(1)可分解为两个线性微分形式 $X_idx+Y_idy=0(i=1,2)$. 这与(2)组合得到解 $u_i(x,y,z,p,q)=a_i$, $v_i(x,y,z,p,q)=b_i(i=1,2)$，且对于任意函数 F_i 得到中间积分† $F_i(u_i,v_i)=0$ $(i=1,2)$，由此可得原始方程的解. 若 $S^2\neq 4RT$，因为两个中间积分不同，故由此能够解出 $p=P(x,y,z)$，$q=Q(x,y,z)$，并且积分 $dz=Pdx+Qdy$.

当 $U\neq 0$ 时,设 λ_1,λ_2 为 $U^2\lambda^2+US\lambda+TR+UV=0$ 的根,则由两组的辅助方程

$$\begin{cases}\lambda_1Udy+Tdx+Udp=0,\\ \lambda_2Udx+Rdy+Udq=0,\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}\lambda_2Udy+Tdx+Udp=0,\\ \lambda_1Udx+Rdy+Udq=0,\end{cases}$$

的解 $u_i=a_i$，$v_i=b_i(i=1,2)$ 得到中间积分 $F_i(u_i,v_i)=0(i=1,2)$. 若 $4(TR+UV)\neq S^2$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，则有两个不同的中间积分 $F_i=0$. 由方程组 $F_i=0$ 解出 $p=P(x,y,z)$，$q=Q(x,y,z)$，也能通过积分 $dz=Pdx+Qdy$ 求得解.

vii) Poisson 方程†. $P=(rt-s)^nQ$. 其中 $P=P(p,q,r,s,t)$ 是关于 r,s,t 的齐次式，并设 $Q=Q(x,y,z)$ 当 $rt=s^2$ 时对于 x,y,z 满足 $\partial Q/\partial z\neq\infty$. 方程 $P(p,\varphi(p),r,r\varphi'(p),r\{\varphi'(p)\}^2)=0$ 是作为 p 的函数 φ 的常微分方程. 首先由这个方程解出 φ，然后按方法 II) 2) i) 解一阶偏微分方程 $q=\varphi(p)$.

2) **中间积分†** 设 $f(x,y,z,p,q,r,s,t)$ 是关于 r,s,t 的多项式，$f(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$ 具有初积分† $u(x,y,z,p,q)=0$. 将

$$r=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial q}\right)\Big/\frac{\partial u}{\partial p},\quad t=-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}+s\frac{\partial u}{\partial p}\right)\Big/\frac{\partial u}{\partial q}$$

代入原方程,且将作为 s 的多项式的所有系数都换为 0，于是得到 u 的微分方程组，若 u,v 是此方程组的两个独立解,则原方程的中间积分由 $\Phi(u,v)=0$ 给出.

3) **双曲型偏微分方程的初值问题** $L[u]\equiv u_{xy}+au_x+bu_y+cu=h$.

$$u(\xi,\eta)=[(uR)_A+(uR)_B]/2+\iint_\Delta R(x,y;\xi,\eta)h(x,y)dxdy$$
$$+\int_A^B\left[\frac{1}{2}\left(u\frac{\partial R}{\partial n'}-R\frac{\partial u}{\partial n'}\right)-\{a\cos(n,x)+b\cos(n,y)\}uR\right]ds,$$

其中 Δ 是图 19 中有阴影线的区域,余法线 n' 是 n 关于 $x=y$ 的镜像.

$$u(\xi,\eta)=(uR)_C+\int_C^A R(u_y+au)dy+\int_C^B R(u_x+bu)dx$$
$$+\iint_\square R(x,y;\xi,\eta)h(x,y)dxdy\quad(特征初值问题).$$

□是图 20 中有阴影线的区域. $R(x,y;\xi,\eta)$ 是 Riemann 函数†;满足

$M[R(x,y;\xi,\eta)]=0$,

$R_x-bR=0$ （在 $x=\xi$ 上),

$R_y-aR=0$ （在 $y=\eta$ 上),

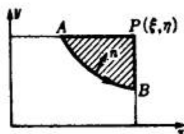


图 19

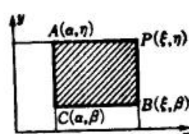


图 20

$R(\xi,\eta;\xi,\eta)=1.$

例 i) $u_{xy}=h(x,y)$. $R(x,y;\xi,\eta)=1$.

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}[u_A+u_B]+\frac{1}{2}\int_A^B[u_y\cos(n,x)+u_x\cos(n,y)]ds+\iint_\Delta h(x,y)dxdy.$$

例 ii) 电报方程♦ $u_{xy}+cu=0(c>0)$. $R(x,y;\xi,\eta)=J_0(2\sqrt{c(x-\xi)(y-\eta)})$.

例 iii) $u_{xy}+\frac{n}{x+y}(u_x+u_y)=0$ ($n=$ 常数 >0).

$$R(x,y;\xi,\eta)=\left(\frac{x+y}{\xi+\eta}\right)^nF\left(1-n,n;1;-\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x+y)(\xi+\eta)}\right).$$

IV) 接触变换♦(→接触变换)

考虑变换 $(x_1,\cdots,x_n;z)\to(X_1,\cdots,X_n;Z)$. 设 $p_j\equiv\partial z/\partial x_j$, $P_j\equiv\partial Z/\partial X_j(j=1,\cdots,n)$, 若存在满足 $dZ-\sum P_jdX_j=\rho(x,z,P)(dz-\sum p_jdx_j)$ 的函数 $\rho(x,z,p)\neq0$,则称该变换为接触变换†.

由母函数† $\Omega(x,z,X,Z)$ 的 $(2n+1)$ 个方程 $\Omega=0$, $\partial\Omega/\partial X_j+P_j\partial\Omega/\partial Z=0$, $\partial\Omega/\partial x_j+p_j\partial\Omega/\partial z=0$ 得到的变换是接触变换.

母函数	ρ	变换	名称
$\sum x_jX_j+z+Z$	-1	$X_j=-p_j$, $P_j=-x_j$, $Z=\sum p_jx_j-z$	Legendre 变换
$\sum X_j^2+Z^2-\sum x_jX_j-zZ$	$Z/(2Z-z)$	$X_j=-p_jZ$, $p_j=-(2X_j-x_j)/(2Z-z)$	垂足变换♦
$\sum(X_j-x_j)^2+(Z-z)^2-a^2$	1	$X_j=x_j-ap_j(1+\sum p_j^2)^{-1/2}$, $P_j=p_j$, $Z=z_j+a(1+\sum p_j^2)^{-1/2}$	伸缩
$\sum(X_j-x_j)^2-Z^2-z^2$	$-\frac{1}{\sqrt{\sum p_j^2-1}}$	$X_j=x_j-p_jz$, $P_j=-p_j(\sum p_j^2-1)^{-1/2}$, $Z=z(\sum p_j^2-1)^{1/2}$	

V) 基本解♦(→偏微分方程[基本解])

对于线性微分算子 L,满足 $LT=\delta$ (δ 是 Dirac δ 函数†) 的函数(或广义函数†) T,称为 L 的基本解†. 表中,设

$$\Delta=\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},\ \square=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},\ r^2=\sum_{i=1}^n x_i^2,\ \mathbf{1}(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\0 & (x\leqslant0)\end{cases}\ \text{(Heaviside 函数†)},$$

J_ν 是 Bessel 函数†, K_ν, I_ν 是修正 Bessel 函数†,

$$s=\begin{cases}\sqrt{x_n^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2} & (x_n>0,\ \sqrt{\ }\ \text{内是正的})\\0 & \text{(其它)}.\end{cases}$$

关于 Pf →广义函数

算子	基本解
d/dx	$1(x)$
$\frac{d^m}{dx^m}$	$\begin{cases}x^{m-1}/(m-1)! & (x>0)\\0 & (x\leqslant0)\end{cases}$

算子	基本解
$\partial^n/\partial x_1\partial x_2\cdots\partial x_n$	$1(x_1)1(x_2)\cdots 1(x_n)$
$\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}$	$\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{x+iy}\quad (i=\sqrt{-1})$
Δ	$\begin{cases} -\left[\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Big/2(n-2)\pi^{n/2}\right]\dfrac{1}{r^{n-2}} & (n=3) \\ (1/2\pi)\log r & (n=2)\end{cases}$
Δ^m	$\begin{cases} \left[\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Big/2^m(m-1)!\pi^{n/2}\prod_{k=1}^{m}(2k-n)\right]\dfrac{1}{r^{n-2m}} & \left(n-2m\text{ 是正整数,或为负奇数}\right) \\ \left[\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)\Big/2^m(m-1)!\pi^{n/2}\prod_{\substack{k=1\\k\neq m-h}}^{m}(2k-n)\right]\dfrac{\log r}{r^{n-2m}} & \left(n-2m=-2h,\ h=0,1,2,\cdots\right)\end{cases}$
$\left(1-\dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^m$	$\dfrac{2\pi^m}{(m-1)!}r^{m-(n/2)}K_{(n/2)-m}(2\pi r)$
$\square^m$	$(\mathrm{Pf}\,s^{2m-n})/\pi^{(n/2)-1}2^{2m-1}(m-1)!\Gamma[m+1-(n/2)]$
$(\square-\lambda)^m$ (λ 是实数且 $\neq 0$)	$\dfrac{\lvert\lambda\rvert^{(n/4)-(m/2)}}{\pi^{(n/2)-1}(m-1)!2^{m-1+(n/2)}}\mathrm{Pf}\,s^{m-(n/2)}\begin{cases} I_{m-(n/2)}(\sqrt{\lambda s}) & (\lambda>0) \\ J_{m-(n/2)}(\sqrt{\lvert\lambda\rvert s}) & (\lambda<0)\end{cases}$
$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}-\sum_{i=1}^{n-1}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)^m$	$\begin{cases} \dfrac{x_n^{m-1}}{(m-1)!}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi x_n}}\right)^{n-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2/4x_n\right) & (x_n>0) \\ 0 & (x_n\leqslant 0)\end{cases}$

VI) 边界值问题的解法[♦](→椭圆型偏微分方程,抛物型偏微分方程, Green 函数)

$$L[u]=Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu,$$

$$M[v]=(Av)_{xx}+2(Bv)_{xy}+(Cv)_{yy}-(Dv)_x-(Ev)_y+Fv.$$

Green 公式[♦] $\displaystyle\iint_D\{vL[u]-uM[v]\}dxdy=\int_C\left\{P\left(u\frac{\partial v}{\partial n'}-v\frac{\partial u}{\partial n'}\right)+Quv\right\}ds.$

$$(1)\qquad \begin{cases} A\cos(n,x)+B\cos(n,y)=P\cos(n',x), \\ B\cos(n,x)+C\cos(n,y)=P\cos(n',y).\end{cases}$$

$$Q=(A_x+B_y-D)\cos(n,x)+(B_x+C_y-E)\cos(n,y).$$

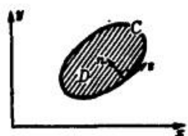


图 21

积分路线 C 是 D 的边界(图 21), n 为 C 的内向法线, n' 为余法线,由 (1) 给出.

1) **椭圆型偏微分方程**[†] $L[u]\equiv u_{xx}+u_{yy}+au_x+bu_y+cu=h.$

$$u(\xi,\eta)=-\int_C u(s)\frac{\partial G}{\partial n}ds+\iint_D G(x,y;\xi,\eta)h(x,y)dxdy.$$

其中 $G(x,y;\xi,\eta)$ 是 Green 函数[†],满足 $M(G(x,y;\xi,\eta))=0$ [(x,y) 在 D 的内部,($(x,y)\neq(\xi,\eta)$)], 并且

$$G(x,y;\xi,\eta)=-(1/2\pi)\log\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}+\text{正则函数}.$$

$$G(x,y;\xi,\eta)=0\quad((x,y)\in C).$$

2) **二维 Laplace 方程**[†] $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.\ u(x,y)\equiv\tilde{u}(r,\varphi)=\mathrm{Re}\,f(z)\quad(z=x+iy=re^{i\theta}).$

i) 圆的内部 ($r\leqslant 1$)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(1,\varphi)\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z}d\varphi,\quad \tilde{u}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(1,\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi$$

(Poisson 积分公式†♦).

ii) 圆环 $(0<q\leqslant r\leqslant 1)$

$$f(z)=\frac{\omega_1}{\pi^2 i}\left\{\int_0^{2\pi}\tilde{u}(1,\varphi)\zeta_1(w)d\varphi-\int_0^{2\pi}\tilde{u}(q,\varphi)\zeta_3(w)d\varphi-a\log z\right\}$$ (Villat 积分公式†♦).

$$w=\frac{\omega_1}{\pi}(i\log z+\varphi),\quad a=\left(\frac{1}{2\omega_3}-\frac{\eta_1}{\pi i}\right)\int_0^{2\pi}\{\tilde{u}(1,\varphi)-\tilde{u}(q,\varphi)\}d\varphi,\quad \frac{\omega_3}{\omega_1}=-\frac{i}{\pi}\log q.$$

其中 ζ_1, ζ_3 是具有基本周期 $2\omega_1$, $2\omega_3$ 的 Weierstrass 的 ζ 函数.

iii) 半平面 $(y\geqslant 0)$

$$f(z)=\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t,0)}{z-t}dt,\quad u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t,0)y}{(x-t)^2+y^2}dt.$$

3) 三维 Laplace 方程†

i) 球的内部 $(r\leqslant 1)$

$$\tilde{u}(r,\varphi,\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{u}(1,\Phi,\Theta)\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{3/2}}\sin\Theta d\Theta d\Phi,$$

其中 $\cos\gamma=\cos\Theta\cos\theta+\sin\Theta\sin\theta\cos(\Phi-\varphi)$.

ii) 半空间 $(z\geqslant 0)$

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,\eta,0)}{\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2\}^{3/2}}d\xi d\eta.$$

4) 振动方程 (Helmholtz 方程♦) $\Delta u+k^2u=0$.

设具有相同的边界条件的正规化特征函数为 u_n(其特征值为 k_n), 则 Green 函数为

$$G(P,Q)=\sum\frac{u_n(P)u_n^*(Q)}{k^2-k_n^2}.$$

区域	边界条件	特征值	特征函数
长方形 $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant l$	$u=0$	$k_{nm}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}$ $(n,m=1,2,\cdots)$	$\sin n\pi\frac{x}{a}\sin m\pi\frac{y}{b}$
圆 $0\leqslant r\leqslant a$	$u=0$	k_{nm} 是 $J_m(kx)=0$ 的根	$J_m(k_{nm}r)e^{\pm im\varphi}$
圆环 $b\leqslant r\leqslant a$	$u=0$	k_{nm} 是下述方程的根: $J_m(ka)N_m(kb)-J_m(kb)N_m(ka)=0$	$\left\{\frac{J_m(k_{nm}r)}{J_m(k_{nm}a)}-\frac{N_m(k_{nm}r)}{N_m(k_{nm}a)}\right\}e^{\pm im\varphi}$
扇形 $0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$	$u=0$	k_{nm} 是 $J_\mu(ka)=0$ 的根 $(\mu=m\pi/\alpha)$	$J_\mu(k_{nm}r)\sin\mu\varphi$
长方体 $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b,\ 0\leqslant z\leqslant c$	$\frac{\partial u}{\partial n}=0$	$k_{nml}=\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{l^2}{c^2}}$	$\cos n\pi\frac{x}{a}\cos m\pi\frac{y}{b}\cos l\pi\frac{z}{c}$
球 $0\leqslant r\leqslant a$	$\frac{\partial u}{\partial n}=0$	k_{nl} 是 $\psi_n'(ka)=0$ 的根. 其中 $\psi_n(\rho)\equiv\sqrt{\pi/2}J_{n+(1/2)}(\rho)$	$\psi_n(k_{nl}r)P_n^m(\cos\theta)^{\pm im\varphi_1}$

5) 热传导方程† $\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\Delta u\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_m^2};\ \kappa\text{ 是正的常数}\right)$.

边界条件：$hu - k\partial u/\partial n = \varphi$，其中，$h$ 和 k 为非负常数，且 $h + k = 1$，φ 为给定的函数.

$$u(P,t) = \int_V G(P,Q,t)u(Q,0)dV_Q + \kappa\int_0^t d\tau \int_S \left\{\frac{\partial G(P,Q,t-\tau)}{\partial n_Q} + G(P,Q,t-\tau)\right\}\varphi(Q,\tau)dS_Q.$$

这里 V 是区域，且 S 是它的边界.

$G(P,Q,t)$ 是基本解：在 V 中满足 $\partial G/\partial t = \kappa\Delta G$，并且在 S 上满足 $k\partial G/\partial n = hG$，并且在 $P = Q, t = 0$ 的邻域内有 $G(P,Q,t) = (4\pi\kappa t)^{-m/2}e^{-R^2/4\kappa t}$ + 低次项 ($R = \overline{PQ}$).

i) $-\infty < x < \infty$，$G = U(x-\xi,t)$，其中 $U(x,t) = e^{-x^2/4\kappa t}/\sqrt{4\pi\kappa t}$（在下面的 ii) 中也同样）.

ii) $0 \leqslant x < \infty$. $u(0,t) = 0$：$G = U(x-\xi,t) - U(x+\xi,t)$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = hu$：$G = U(x-\xi,t) + U(x+\xi,t) - 2he^{h\xi}\displaystyle\int_{-\infty}^{-\xi} e^{h\eta}U(x-\eta,t)d\eta$.

iii) $0 \leqslant x \leqslant l$. $u(0,t) = u(l,t) = 0$：$G = \vartheta\left(\dfrac{x-\xi}{2l}\middle|\tau\right) - \vartheta\left(\dfrac{x+\xi}{2l}\middle|\tau\right)$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$：$G = \vartheta\left(\dfrac{x-\xi}{2l}\middle|\tau\right) + \vartheta\left(\dfrac{x+\xi}{2l}\middle|\tau\right)$.

$u(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$：

$$G = \vartheta\left(\frac{x-\xi}{4l}\middle|\tau\right) - \vartheta\left(\frac{x+\xi}{4l}\middle|\tau\right) + \vartheta\left(\frac{x+\xi-2l}{4l}\middle|\tau\right) - \vartheta\left(\frac{x-\xi-2l}{4l}\middle|\tau\right).$$

这里 ϑ 是椭圆 ϑ 函数†：$\vartheta(x|\tau) = \vartheta_3(x,\tau) \equiv 1 + 2\sum e^{i\pi\tau n^2}\cos 2n\pi x$.

iv) $0 \leqslant x < \infty$，$0 \leqslant y < \infty$. $u(x,0,t) = u(0,y,t) = 0$：

$G = (e^{-(x-\xi)^2/4\kappa t} - e^{-(x+\xi)^2/4\kappa t})(e^{-(y-\eta)^2/4\kappa t} - e^{-(y+\eta)^2/4\kappa t})/4\pi\kappa t$.

v) $0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$. 在边界上 $u = 0$：

$$G = \frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\kappa\pi^2 t\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{n\pi\eta}{b}.$$

vi) $0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$，$0 \leqslant z \leqslant c$. 在边界上 $u = 0$：

$$G = \frac{8}{abc}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\kappa\pi^2 t\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}+\frac{n^2}{c^2}\right)\right\} \times \sin\frac{l\pi x}{a}\sin\frac{l\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\sin\frac{m\pi\eta}{b}\sin\frac{n\pi z}{c}\sin\frac{n\pi\zeta}{c}.$$

vii) $0 \leqslant r < \infty$. 球对称. ($|x| = r$, $|\xi| = r'$). $G = (e^{-(r-r')^2/4\kappa t} - e^{-(r+r')^2/4\kappa t})/8\pi rr'(\pi\kappa t)^{1/2}$.

viii) $0 \leqslant r \leqslant a$. 球对称. 在边界上 $u = 0$：

$$G = \frac{1}{2\pi arr'}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa n^2\pi^2 t/a^2}\sin\frac{n\pi r}{a}\sin\frac{n\pi r'}{a}.$$

ix) $a \leqslant r < \infty$. 球对称. 在边界上 $k\partial u/\partial r - hu = 0$：

$$G = \frac{1}{8\pi rr'(\pi\kappa t)^{1/2}}\left[e^{-(r-r')^2/4\kappa t} + e^{-(r+r'-2a)^2/4\kappa t} - \frac{ah+k}{ak}(4\pi\kappa t)^{1/2} \times \exp\left\{\kappa t\left(\frac{ah+k}{ak}\right)^2 + (r+r'-2a)\frac{ah+k}{ak}\right\} \times \operatorname{erfc}\left\{\frac{r+r'-2a}{2\sqrt{\kappa t}} + \frac{ah+k}{ak}\sqrt{\kappa t}\right\}\right] \quad \left(\operatorname{erfc} x \equiv \int_x^{\infty} e^{-t^2}dt\right).$$

x) $0 \leqslant r < \infty$. 轴对称. $G = e^{-(r^2+r'^2)/4\kappa t} I_0(rr'/2\kappa t)/4\pi\kappa t$.

xi) $0 \leqslant r \leqslant a$. 轴对称. 在边界上 $k\dfrac{\partial u}{\partial r} - hu = 0$:

$$G = \frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(r\alpha_n)J_0(r'\alpha_n)}{\{J_0(a\alpha_n)\}^2 + \{J_1(a\alpha_n)\}^2} e^{-\kappa\alpha_n t/a}, \text{ 其中 } \alpha_n \text{ 由 } k\alpha_n J_1(a\alpha_n) - hJ_0(a\alpha_n) = 0 \text{ 给出.}$$

16. 椭圆积分, 椭圆函数

I) 椭圆积分♦(→椭圆函数)

1) Legendre-Jacobi 标准型♦

第一类椭圆积分†♦ $F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi}\dfrac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi}\dfrac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ (k 是模数)

第二类椭圆积分†♦ $E(k, \varphi) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^{\sin\varphi}\sqrt{\dfrac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$.

第三类椭圆积分†♦

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^{\varphi}\frac{d\psi}{(1 + n\sin^2\psi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = \int_0^{\sin\varphi}\frac{dt}{(1 + nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

当 $\varphi = \pi/2$ 时,上述的第一类,第二类椭圆积分称为完全椭圆积分†♦.

$$K(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

$$E(k) = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right).$$

右边的 F 是超几何函数†.

$K(k') = K(\sqrt{1-k^2}) \equiv K'(k)$, $E(k') = E(\sqrt{1-k^2}) \equiv E'(k)$ ($k'^2 = 1 - k^2$; k' 是补模数).

$EK' + E'K - KK' = \dfrac{\pi}{2}$ (Legendre 关系†♦). $K\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{\pi}}$.

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{E - k'^2F}{k} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right), \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E - F}{k}.$$

2) 变量变换

$\tan(\psi - \varphi) = k'\tan\varphi$:

$$F\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \psi\right) = (1 + k')F(k, \varphi),$$

$$E\left(\frac{1-k'}{1+k'}, \psi\right) = \frac{2}{1+k'}[E(k, \varphi) + k'F(k, \varphi)] - \frac{1-k'}{1+k'}\sin\psi.$$

$\sin\chi = \dfrac{(1+k)\sin\varphi}{1 + k\sin^2\varphi}$:

$$F\left(\frac{2\sqrt{k}}{1-k}, \chi\right) = (1 + k)F(k, \varphi),$$

$$E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\chi\right)=\frac{1}{1+k}\left[2E(k,\varphi)-k'^2F(k,\varphi)\right.$$
$$\left.+2k\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+k\sin^2\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\right].$$

k_1	$\sin\varphi_1$	$\cos\varphi_1$	$F(k_1,\varphi_1)$	$E(k_1,\varphi_1)$
$i\frac{k}{k'}$	$k'\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$	$k'F(k,\varphi)$	$\frac{1}{k'}\left[E(k,\varphi)-k^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right]$
k'	$-i\tan\varphi$	$\frac{1}{\cos\varphi}$	$-iF(k,\varphi)$	$i[E(k,\varphi)-F(k,\varphi)-\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\tan\varphi]$
$\frac{1}{k}$	$k\sin\varphi$	$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$	$kF(k,\varphi)$	$\frac{1}{k}[E(k,\varphi)-k'^2F(k,\varphi)]$

3) 变换为标准型

i) 可化为第一类的椭圆积分(对于参数设 $a>b>0$)

$AF(k,\varphi)$	A	k	φ
$\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{\sqrt{3}+1-x}{\sqrt{3}-1+x}$
$\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{\sqrt{3}-1+x}{\sqrt{3}+1-x}$
$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$
$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2-t^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\arcsin\frac{x}{b}$
$\int_b^x\frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\sqrt{1-(b/a)^2}$	$\arcsin\sqrt{\frac{1-(b/x)^2}{1-(b/a)^2}}$
$\int_a^x\frac{dt}{\sqrt{(t^2-a^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{b}{a}$	$\arcsin\sqrt{\frac{1-(a/x)^2}{1-(b/x)^2}}$
$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$	$\frac{1}{a}$	$\sqrt{1-(b/a)^2}$	$\arctan\frac{x}{b}$
$\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{(a^2-t^2)(b^2+t^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arcsin\sqrt{\frac{1+(b/a)^2}{1+(b/x)^2}}$
$\int_b^x\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(t^2-b^2)}}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arccos\frac{b}{x}$

ii) 可化为第二类的椭圆积分(对于参数设 $a>b>0$)

$AE(k,\varphi)$	A	k	φ
$\int_0^x\sqrt{\frac{a^2-t^2}{b^2-t^2}}dt$	a	$\frac{b}{a}$	$\arcsin\frac{x}{b}$

$AE(k,\varphi)$	A	k	φ
$\int_x^a \sqrt{\frac{b^2+t^2}{a^2-t^2}}\,dt$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arccos\frac{x}{a}$
$\int_b^x \frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}\,dt$	$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b^2}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arccos\frac{b}{x}$
$\int_\infty^x t^2\sqrt{\frac{t^2+a^2}{t^2-b^2}}\,dt$	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\arcsin\sqrt{\frac{1+(b/a)^2}{1+(x/a)^2}}$
$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2+t^2}{(b^2+t^2)^3}}\,dt$	$\frac{a}{b^2}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\arctan\frac{x}{b}$
$\int_b^x \frac{dt}{t^2\sqrt{(t^2-b^2)(a^2-t^2)}}$	$\frac{1}{ab^2}$	$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$\arcsin\sqrt{\frac{1-(b/x)^2}{1-(b/a)^2}}$

II）椭圆 ϑ 函数[†*]

1） 当 $\operatorname{Im}\tau>0$ 时，设 $q=e^{i\pi\tau}$，且定义

$$\vartheta_0(u,\tau)\equiv\vartheta_4(u,\tau)\equiv 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi u,$$

$$\vartheta_1(u,\tau)\equiv 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{[n+(1/2)]^2}\sin(2n+1)\pi u,$$

$$\vartheta_2(u,\tau)\equiv 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{[n+(1/2)]^2}\cos(2n+1)\pi u,$$

$$\vartheta_3(u,\tau)\equiv 1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi u.$$

四个 $\vartheta_j(j=0,1,2,3)$ 作为两个变量 u 和 τ 的函数，都满足下列偏微分方程．

$$\frac{\partial^2\vartheta(u,\tau)}{\partial u^2}=4\pi i\frac{\partial\vartheta(u,\tau)}{\partial\tau}.$$

2） 相互关系

$\vartheta_0^4(u)+\vartheta_2^4(u)=\vartheta_1^4(u)+\vartheta_3^4(u)$，　$\vartheta_0^2(u)=k\vartheta_1^2(u)+k'\vartheta_3^2(u)$，

$\vartheta_2^2(u)=-k'\vartheta_1^2(u)+k\vartheta_3^2(u)$，　$\vartheta_1^2(u)=k\vartheta_0^2(u)-k'\vartheta_2^2(u)$，

其中 k 是满 $iK'(k)/K(k)=\tau$ 的模数，并且 k' 是其补模数．

$k=\vartheta_2^2(0)/\vartheta_3^2(0)$，　$k'=\vartheta_0^2(0)/\vartheta_3^2(0)$．

$$\vartheta_1'(0)=\pi\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_0(0),\quad \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_0(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)}.$$

3） 伪周期性．在下表中，ϑ 中的变量是 u 和 τ，m，n 是整数．

u 的增加	ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	指数因子
$m+n\tau$	$(-1)^n\vartheta_0$	$(-1)^{m+n}\vartheta_1$	$(-1)^m\vartheta_2$	ϑ_3	$\exp[-n\pi i\times(2u+n\tau)]$
$m-\frac{1}{2}+n\tau$	ϑ_3	$(-1)^{m+1}\vartheta_2$	$(-1)^{m+n}\vartheta_1$	$(-1)^n\vartheta_0$	

u 的增加	ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	指数因子
$m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$	$(-1)^n i\vartheta_1$	$(-1)^{m+n} i\vartheta_0$	$(-1)^m\vartheta_3$	ϑ_2	$\exp\left[-\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi i\right.$
$m-\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$	ϑ_2	ϑ_3	$(-1)^{m+n} i\vartheta_0$	$(-1)^n i\vartheta_1$	$\left.\times\left\{2u=\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right\}\right]$
Zeros $u=$	$m+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$	$m+n\tau$	$m+\frac{1}{2}+n\tau$	$m+\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau$	

4) 展开为无穷乘积. 设 $Q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$, 则有

$$\vartheta_0(u)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi u+q^{4n-2}),$$

$$\vartheta_1(u)=2Q_0q^{1/4}\sin\pi u\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2\pi u+q^{4n}),$$

$$\vartheta_2(u)=2Q_0q^{1/4}\cos\pi u\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2\pi u+q^{4n}),$$

$$\vartheta_3(u)=Q_0\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi u+q^{4n-2}).$$

III) Jacobi 椭圆函数†♦

1) 设模数 k 和补模数 k' 如下:

$$k=\frac{\vartheta_2^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},\quad k'=\frac{\vartheta_0^2(0)}{\vartheta_3^2(0)},\quad k^2+k'^2=1,$$

则有

$$K(k)=K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2(0),\quad K'(k)=K'=-i\tau K.$$

q 和 k 的关系是

$$q=e^{i\pi\tau}=e^{-\pi(K'/K)},$$

$$q^{1/4}=\left(\frac{k}{4}\right)^{1/2}\left[1+2\left(\frac{k}{4}\right)^2+15\left(\frac{k}{4}\right)^4+150\left(\frac{k}{4}\right)^6+1707\left(\frac{k}{4}\right)^8+\cdots\right],$$

$$q=\frac{1}{2}L+\frac{2}{2^5}L^5+\frac{15}{2^9}L^9+\frac{150}{2^{13}}L^{13}+\frac{1707}{2^{17}}L^{17}+\cdots\quad 其中\ L=\frac{1-\sqrt[4]{1-k^2}}{1+\sqrt[4]{1-k^2}}.$$

2) sn, cn, dn 函数†♦, 加法定理♦.

$$\mathrm{sn}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)},\quad \mathrm{cn}(u,k)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)},\quad \mathrm{dn}(u,k)=\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(u/2K)}{\vartheta_0(u/2K)}.$$

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1,\quad \mathrm{dn}^2u+k^2\mathrm{sn}^2u=1.$$

$$\mathrm{sn}(u+v)=\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{dn}\,v+\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v},\quad \mathrm{cn}(u+v)=\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,v}{1-k^2\mathrm{sn}^2u\,\mathrm{sn}^2v},$$

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{sn}v\operatorname{cn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}.$$

$$\frac{d\operatorname{sn}u}{du}=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u,\quad \frac{d\operatorname{cn}u}{du}=-\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u,\quad \frac{d\operatorname{dn}u}{du}=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u.$$

3) 周期性. 在下表中 m, n 是整数.

u 的增加	$\operatorname{sn}u$	$\operatorname{cn}u$	$\operatorname{dn}u$
$2mK+2niK'$	$(-1)^m\operatorname{sn}u$	$(-1)^{m+n}\operatorname{cn}u$	$(-1)^n\operatorname{dn}u$
$(2m-1)K+2niK'$	$(-1)^{m+1}\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$	$(-1)^{m+n}k'\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}$	$(-1)^nk'\frac{1}{\operatorname{dn}u}$
$2mK+(2n+1)iK'$	$(-1)^mk^{-1}\frac{1}{\operatorname{sn}u}$	$(-1)^{m+n+1}ik^{-1}\frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{sn}u}$	$i(-1)^{n+1}\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{sn}u}$
$(2m-1)K+(2n+1)iK'$	$(-1)^{m+1}k^{-1}\frac{\operatorname{dn}u}{\operatorname{cn}u}$	$(-1)^{m+n}ik'k^{-1}\frac{1}{\operatorname{cn}u}$	$(-1)^nik'\frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{cn}u}$
零点 $u=$	$2nK+2miK'$	$(2n+1)K+2miK'$	$(2n+1)K+(2m+1)iK'$
极点 $u=$	$2nK+(2m+1)iK'$	$2nK+(2m+1)iK'$	$2nK+(2m+1)iK'$
基本周期	$4K,\ 2iK'$	$4K,\ 2K+2iK'$	$2K,\ 4iK'$

4) 变量变换. 在下表中, 例如第二行表示 $\operatorname{sn}(ku,1/k)=k\operatorname{sn}(u,k)$ 关系.

u	k	sn	cn	dn
ku	$1/k$	$k\operatorname{sn}$	dn	cn
iu	k'	$i\frac{\operatorname{sn}}{\operatorname{cn}}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}}$	$\frac{\operatorname{dn}}{\operatorname{cn}}$
$k'u$	$i\frac{k}{k'}$	$k'\frac{\operatorname{sn}}{\operatorname{dn}}$	$\frac{\operatorname{cn}}{\operatorname{dn}}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}}$
iku	$i\frac{k'}{k}$	$ik\frac{\operatorname{sn}}{\operatorname{dn}}$	$\frac{1}{\operatorname{dn}}$	$\frac{\operatorname{cn}}{\operatorname{dn}}$
$ik'u$	$\frac{1}{k'}$	$ik'\frac{\operatorname{sn}}{\operatorname{cn}}$	$\frac{\operatorname{dn}}{\operatorname{cn}}$	$\frac{1}{\operatorname{cn}}$
$(1+k)u$	$\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$	$\frac{(1+k)\operatorname{sn}}{1+k\operatorname{sn}^2}$	$\frac{\operatorname{cndn}}{1+k\operatorname{sn}^2}$	$\frac{1-k\operatorname{sn}^2}{1+k\operatorname{sn}^2}$ (Gauss 变换*)
$(1+k')u$	$\frac{1-k'}{1+k'}$	$(1+k')\frac{\operatorname{sncn}}{\operatorname{dn}}$	$\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2}{\operatorname{dn}}$	$1-(1-k')\operatorname{sn}^2$ (Landen 变换*)
$\frac{(1+k')^2u}{2}$	$\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^2$	$\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\times\frac{k^2\operatorname{sncn}}{(1+\operatorname{dn})(k'+\operatorname{dn})}$	$\frac{\operatorname{dn}-\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\times\sqrt{\frac{2(1+k')}{(1+\operatorname{dn})(k'+\operatorname{dn})}}$	$\frac{\sqrt{2(1+k')}}{1+\sqrt{k'}}\times\frac{\operatorname{dn}+\sqrt{k'}}{\sqrt{(1+\operatorname{dn})(k'+\operatorname{dn})}}$

Jacobi 变换* $\operatorname{sn}(iu,k)=i\frac{\operatorname{sn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')}$, $\operatorname{cn}(iu,k)=\frac{1}{\operatorname{cn}(u,k')}$, $\operatorname{dn}(iu,k)=\frac{\operatorname{dn}(u,k')}{\operatorname{cn}(u,k')}$.

5) 振幅函数

$u(k,\varphi)=F(k,\varphi)=\int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$ 的反函数 $\varphi=\mathrm{am}(u,k)$ 称为**振幅函数** (amplitude)。

$\mathrm{sn}(u,k)=\sin\varphi=\sin\mathrm{am}(u,k)$, $\quad \mathrm{cn}(u,k)=\cos\varphi=\cos\mathrm{am}(u,k)$,

$\mathrm{dn}(u,k)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,k)}$.

$$u(k,x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\qquad x=\mathrm{sn}(u,k).$$

$$\mathrm{am}(u,k)=\frac{\pi u}{2K}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q^n}{n(1+q^{2n})}\sin\left(n\pi\frac{u}{2K}\right)\qquad (q=e^{i\pi\tau}=e^{-\pi(K'/K)}).$$

$\mathrm{am}(\theta,1)=\mathrm{gd}\,\theta$ (Gudermann 函数♦).

IV) Weierstrass 椭圆函数†

1) $\mathscr{P}$ 函数†♦. 对于基本周期 $2\omega_1, 2\omega_3$, 有

$$\mathscr{P}(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{n,m}{}'\left[\frac{1}{(u-2n\omega_1-2m\omega_3)^2}-\frac{1}{(2n\omega_1+2m\omega_3)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\frac{g_2^2}{1200}u^6+\frac{3g_2g_3}{6160}u^8+\cdots$$

$$g_2=60\sum_{n,m}{}'\frac{1}{(2n\omega_1+2m\omega_3)^4},\quad g_3=140\sum_{n,m}{}'\frac{1}{(2n\omega_1+12m\omega_3)^6},$$

其中 $\sum'$ 遍及除 $m=n=0$ 外的所有整数 m, n 的组

$\mathscr{P}(-u)=\mathscr{P}(u)$. 设 $\omega_2=-(\omega_1+\omega_3)$, $e_j=\mathscr{P}(\omega_j)(j=1,2,3)$, 有

$e_1+e_2+e_3=0$, $e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=-g_2/4$, $e_1e_2e_3=g_3/4$.

$$\mathscr{P}'(u)=d\mathscr{P}/du=-2\sum_{m,n}\frac{1}{(u-2n\omega_1-2n\omega_3)^3}.$$

$$\mathscr{P}'^2(u)=4[\mathscr{P}(u)-e_1][\mathscr{P}(u)-e_2][\mathscr{P}(u)-e_3]=4\mathscr{P}^3(u)-g_2\mathscr{P}(u)-g_3.$$

加法定理†♦.

$$\mathscr{P}(u+v)=-\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(v)+\frac{1}{4}\left[\frac{\mathscr{P}'(u)-\mathscr{P}'(v)}{\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(v)}\right]^2,$$

$$\mathscr{P}(u+\omega_j)=e_j+\frac{(e_j-e_k)(e_j-e_l)}{\mathscr{P}(u)-e_j}\qquad (j,k,l)=(1,2,3).$$

利用对应于 $\tau=\omega_3/\omega_1$ 的 ϑ 函数,

$$\mathscr{P}(u)=-\frac{\eta_1}{\omega_1}-\frac{d^2\log\vartheta_1(u/2\omega_1)}{du^2}\qquad \left(\eta_1=\zeta(\omega_1)=-\frac{1}{12\omega_1}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}\right),$$

$$\mathscr{P}'(u)=-\frac{1}{4\omega_1^3}\frac{\vartheta_1'^3(0)\vartheta_2(u/2\omega_1)\vartheta_3(u/2\omega_1)\vartheta_0(u/2\omega_1)}{\vartheta_2(0)\vartheta_0(0)\vartheta_1^3(u/2\omega_1)}.$$

与 Jacobi 椭圆函数的关系是

$q=\exp(i\pi\omega_3/\omega_1)$.

$$\mathscr{P}\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_3}}\right)=e_1+(e_1-e_3)\frac{\mathrm{cn}^2u}{\mathrm{sn}^2u}=e_2+(e_1-e_3)\frac{\mathrm{dn}^2u}{\mathrm{sn}^2u}=e_3+(e_1-e_3)\frac{1}{\mathrm{sn}^2u},$$

其中模数是 $k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}$, $K(k)=\omega_1\sqrt{e_1-e_3}$.

2) ζ 函数†♦.

$$\zeta(u)=\frac{1}{u}+\sum_{n,m}{}'\left[\frac{1}{u-2n\omega_1-2m\omega_3}+\frac{u}{(2n\omega_1+2m\omega_3)^2}+\frac{1}{2n\omega_1+2m\omega_3}\right]$$
$$=\frac{1}{u}-\frac{g_2}{60}u^3-\frac{g_3}{140}u^5-\frac{g_2^2}{8400}u^7-\frac{g_2g_3}{18480}u^9-\cdots$$
$$=(\zeta_1/\omega_1)u+d\log\vartheta_1(u/2\omega_1)/du.$$

$\zeta'(u)=-\mathscr{P}(u).$

伪周期性. 设 $\eta_j=\zeta(\omega_j)$ $(j=1,2,3)$, 有

$$\zeta(u+2n\omega_1+2m\omega_3)=\zeta(u)+2n\eta_1+2m\eta_3\qquad(n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

$$\eta_1=-\frac{1}{12\omega_1}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)},\qquad \eta_1+\eta_2+\eta_3=0,$$

$\eta_1\omega_3-\eta_3\omega_1=\eta_2\omega_1-\eta_1\omega_2=\eta_3\omega_2-\eta_2\omega_3=\pi i/2$ (Legendre 关系*).

加法定理†*. $\zeta(u+v)=\zeta(u)+\zeta(v)+\frac{1}{2}\frac{\zeta''(u)-\zeta''(v)}{\zeta'(u)-\zeta'(v)}.$

3) σ 函数†*

$$\sigma(u)=u\prod_{n,m}{}'\left(1-\frac{u}{2n\omega_1+2m\omega_3}\right)\exp\left[\frac{u}{2n\omega_1+2m\omega_3}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2n\omega_1+2m\omega_3}\right)^2\right]$$
$$\begin{bmatrix}n,m=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\(n,m)\neq(0,0)\end{bmatrix}$$
$$=u-\frac{g_2}{2^4\cdot3\cdot5}u^5-\frac{g_3}{2^3\cdot3\cdot5\cdot7}u^7-\frac{g_2^2}{2^9\cdot3^2\cdot5\cdot7}u^9-\cdots$$
$$=2\omega_1\left(\exp\frac{\eta_1u^2}{2\omega_1}\right)\frac{\vartheta_1(u/2\omega_1)}{\vartheta_1'(0)}.$$

$\zeta(u)=\sigma'(u)/\sigma(u).\qquad \sigma(-u)=-\sigma(u).$

伪周期性. $\sigma(u+2n\omega_1+2m\omega_3)=(-1)^{n+m+mn}[\exp(2n\eta_1+2m\eta_3)(u+n\omega_1+m\omega_3)]\sigma(u).$

4) 余 σ 函数†*. $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$.

$$\sigma_j(u)=-e^{\eta_ju}\frac{\sigma(u+\omega_j)}{\sigma(\omega_j)}=\left(\exp\frac{\eta_1u^2}{2\omega_1}\right)\frac{\vartheta_{j+1}(u/2\omega_1)}{\vartheta_{j+1}(0)}\qquad(j=1,2,3;\ \vartheta_4\equiv\vartheta_0).$$

$$\mathscr{P}(u)-e_j=\left[\frac{\sigma_j(u)}{\sigma(u)}\right]^2,\quad \mathscr{P}'(2u)=-\frac{2\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}=-\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)}.$$

$$\operatorname{sn}u=\alpha\frac{\sigma(u/\alpha)}{\sigma_3(u/\alpha)},\quad \operatorname{cn}u=\frac{\sigma_1(u/\alpha)}{\sigma_3(u/\alpha)},\quad \operatorname{dn}u=\frac{\sigma_2(u/\alpha)}{\sigma_3(u/\alpha)},\quad 其中\ \alpha=\sqrt{e_1-e_3}=\frac{K}{\omega_1}.$$

【参】 [1] W. F. Magnus-F. Oberhettinger-R. P. Soni, Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics, Springer, 增补第三版,1966; [2] Y. L. Luke, The special functions and their approximations I, II, Academic Press, 1969; [3] A. Erdelyi, Higher transcendental functions, I, II, III(Bateman manuscript project) McGraw-Hill, 1953, 1955. 特别的,对于两个变量的超几何函数; [4] P. Appell, Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables. Mémor. Sci. Math., Gauthier-Villars, 1925. → Bessel 函数,椭圆函数,Γ 函数,特殊函数的【参】

17. 阶乘, Γ 函数

I) Γ 函数和 B 函数 (→Γ 函数)(在本节中 C 表示 Euler 常数†, B_n 表示 Bernoulli 数†, ζ 表示 Riemann ζ 函数†)

1) Γ 函数†*. $\Gamma(z)=\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\qquad(\operatorname{Re}z>0)$

$$= \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\int_{\infty}^{(0+)} e^{-t}t^{z-1}dt.$$ （积分路线是沿正向绕正实轴一周）.

$\Gamma(n+1)=n!\quad (n=0,1,2,\cdots),\quad \Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}.$

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\ \Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\ \prod_{i=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{i}{n}\right)=(2\pi)^{(n-1)/2}n^{(1/2)-nz}\Gamma(nz),$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n},$$

$$\log\Gamma(1+z)=-\frac{1}{2}\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}-Cz-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(2n+1)}{2n+1}z^{2n+1}\qquad (|z|<1).$$

$$\left|\frac{\Gamma(x+iy)}{\Gamma(x)}\right|^2=\prod_{n=0}^{\infty}1\Big/\left(1+\frac{y^2}{(x+n)^2}\right)$$ （x, y 是实数且 $x>0$）.

渐近展开 (Stirling 公式††).

$$\Gamma(z)\approx e^{-z}z^{z-1}\sqrt{2\pi z}\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}B_{2n}z^{1-2n}}{2n(2n-1)}\right]\qquad (|\arg z|<\pi)$$

$$=e^{-z}z^{z-(1/2)}\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+O(z^{-5})\right].$$

2) B 函数†♦ $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad (\mathrm{Re}\,x, \mathrm{Re}\,y>0)$

$$=\Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y).$$

3) 不完全 Γ 函数†♦ $\gamma(\nu,x)=\int_0^x t^{\nu-1}e^{-t}dt=\Gamma(\nu)-x^{(\nu-1)/2}e^{-x/2}W_{(\nu-1)/2,\nu/2}(x)\quad (\mathrm{Re}\,\nu>0).$

4) 不完全 B 函数†♦ $B_\alpha(x,y)=\int_0^\alpha t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\quad (0<\alpha\leqslant 1).$

5) 多 Γ 函数†♦ $\psi(z)=\dfrac{d}{dz}\log\Gamma(z)$

$$=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\int_0^{\infty}\left[\frac{e^{-t}}{t}-\frac{e^{-zt}}{1-e^{-t}}\right]dt=-C+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{z+n}\right).$$

$$\psi'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2},\quad \psi^{(k)}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k!}{(z+n)^{k+1}}\qquad (k=1,2,\cdots).$$

II) 组合问题(→排列,组合)

阶乘♦ $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1.\quad 0!=1.$

二项式系数♦ $\dbinom{\alpha}{r}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}.$

1) 从 n 个中取出 r 个的排列†♦ ${}_nP_r=n(n-1)\cdots(n-r+1)=n!/(n-r)!.$

从 n 个中取出 r 个的组合†♦ ${}_nC_r=\dfrac{{}_nP_r}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=\dbinom{n}{r}.$

$${}_nC_r={}_nC_{n-r},\qquad {}_nC_r={}_{n-1}C_r+{}_{n-1}C_{r-1}.$$

重复排列†♦ ${}_n\Pi_r=n^r.$

重复组合†♦ ${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r=\dfrac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}.$

循环排列†♦ $_nP_r/r$.

2) 二项式定理†♦ $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$.

多项式定理†♦ $(a_1+\cdots+a_m)^n=\sum\frac{n!}{p_1!\cdots p_m!}a_1^{p_1}\cdots a_m^{p_m}$.（满足 $p_1+\cdots+p_m=n$; $p_1,\cdots,p_m\geqslant 0$).

【参】→公式 16 的[参]

18. 超几何函数，球函数

I) 超几何函数(→超几何函数)

1) 超几何函数†♦ $F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}$.

超几何微分方程†♦ $z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2}+[c-(a+b+1)z]\frac{du}{dz}-abu=0$ 在 $z=0$ 的基本解组是

$$u_1=F(a,b;c;z),\ u_2=z^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;z)\ (c\neq 0,-1,-2,\cdots).$$

$$F(a,b;c;z)=F(b,a;c;z).\qquad dF/dz=(ab/c)F(a+1,b+1;c+1;z).$$

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\qquad(\mathrm{Re}\,(a+b-c)<0).$$

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt\quad(\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0,\ |z|<1),$$

$$F(a,b;c;z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(c+s)}(-z)^s ds.$$

2) 超几何函数的变换

$$\begin{aligned}F(a,b;c;z)&=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right)\\&=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;z)\\&=(1-z)^{-a}\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}F\left(a,c-b;a-b+1;\frac{1}{1-z}\right)\\&\quad+(1-z)^{-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}F\left(b,c-a;b-a+1;\frac{1}{1-z}\right)\\&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b;a+b-c+1;1-z)\\&\quad+(1-z)^{c-a-b}\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}F(c-a,c-b;c-a-b+1;1-z)\\&=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}F\left(a,1-c+a;1-b+a;\frac{1}{z}\right)\\&\quad+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}(-z)^{-b}F\left(b,1-c+b;1-a+b;\frac{1}{z}\right).\end{aligned}$$

3) Riemann 微分方程♦(→公式 14II)

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left[\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a}+\frac{1-\beta-\beta'}{z-b}+\frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right]\frac{du}{dz}$$
$$+\left[\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a}+\frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c}\right]\frac{u}{(z-a)(z-b)(z-c)}=0.$$

这里有 $\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$ (Fuchs 关系式[†♦]). 该方程的解由 Riemann P 函数

$$u=P\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{Bmatrix}$$
$$=\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\alpha}\left(\frac{z-c}{z-b}\right)^{\gamma}F\left(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma;\ 1+\alpha-\alpha';\ \frac{(c-b)(z-a)}{(c-a)(z-b)}\right)$$
$$(\alpha-\alpha',\ \beta-\beta',\ \gamma-\gamma'\neq\text{整数})$$

给出,交换右端的参数 $a, b, c; \alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$, 可得上面函数的 24 种表示.

4) Barnes 的广义超几何函数[†♦]

$${}_pF_q(\alpha_1,\cdots,\alpha_p;\ \beta_1,\cdots,\beta_q;\ z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_n\cdots(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n\cdots(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!},\ \text{其中}\ (\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$
$$=\Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha).\ F(a,b;c;z)={}_2F_1(a,b;c;z).\ {}_0F_0(x)=e^x,\ {}_1F_0(\alpha;x)=(1-x)^{-\alpha}.$$

5) Appell 二变量的超几何函数[†♦]

$$F_1(\alpha;\beta,\beta';\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{m!\,n!\,(\gamma)_{m+n}}x^my^n,$$

$$F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{m!\,n!\,(\gamma)_m(\gamma')_n}x^my^n,$$

$$F_3(\alpha,\alpha';\beta,\beta';\gamma;x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{m!\,n!\,(\gamma)_{m+n}}x^my^n,$$

$$F_4(\alpha;\beta;\gamma,\gamma';x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{m!\,n!\,(\gamma)_m(\gamma')_n}x^my^n.$$

6) 几种函数的表示

$$(1-x)^{\nu}=F(-\nu,b;b;x),\quad e^{-nx}=\left(\frac{\operatorname{sech}x}{2}\right)^n(\tanh x)F\left(1+\frac{n}{2},\frac{1+n}{2};1+n;\operatorname{sech}^2x\right).$$

$$\log(1+x)=xF(1,1;2;-x),\quad \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=xF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};x^2\right),$$

$$\sin nx=n(\sin x)F\left(\frac{1+n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{3}{2};\sin^2x\right),$$

$$\cos nx=F\left(\frac{n}{2},-\frac{n}{2};\frac{1}{2};\sin^2x\right)=(\cos x)F\left(\frac{1+n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{1}{2};\sin^2x\right),$$

$$\arcsin x=xF\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right),\quad \arctan x=xF\left(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2\right).$$

$$P_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}F\left(-n,n+\frac{1}{2};\frac{1}{2};x^2\right),$$

$$P_{2n+1}(x)=(-1)^n\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}xF\left(-n,n+\frac{3}{2};\frac{3}{2};x^2\right)\quad（球函数）.$$

其中，　$n=0,1,2,\cdots$;　$m!!=\begin{cases}m(m-2)\cdots4\cdot2 & (m\ 是偶数),\\ m(m-2)\cdots3\cdot1 & (m\ 是奇数),\end{cases}$　$0!!=(-1)!!=1$.

$$K(x)=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2\right),\quad E(x)=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;x^2\right)\quad（完全椭圆积分）.$$

$$J_\nu(x)=\frac{x}{2\Gamma(\nu+1)}{}_0F_1\left(\nu+1;\frac{x^2}{4}\right)=\frac{x^\nu e^{-ix}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2ix\right).$$

$$e^x=\lim_{b\to\infty}F(a,b;a;x/b)={}_1F_1(a;a;x)={}_0F_0(x).$$

II) Legendre 函数(→球函数)

1)　对应于三维旋转群的广义球函数†是下列微分方程的解.

(1)
$$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\left[\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-z^2}\right]u=0.$$

特别是，当 $\mu=0$ 时该方程是 Legendre 微分方程†，它的基本解组由下列二类函数给出.

第一类 Legendre 函数†♦　$\mathfrak{P}_\nu(z)\equiv P_\nu(z)\equiv{}_2F_1\left(-\nu,\nu+1;1;\frac{1-z}{2}\right)$.

第二类 Legendre 函数†♦

$$\mathfrak{Q}_\nu(z)=\frac{\Gamma(\nu+1)\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}\Gamma[\nu+(3/2)]}z^{-\nu-1}{}_2F_1\left(\frac{\nu+2}{2},\frac{\nu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right).$$

$$Q_\nu(x)\equiv\frac{1}{2}[\mathfrak{Q}_\nu(x+i0)+\mathfrak{Q}_\nu(x-i0)]$$

$$=\pi\frac{(\cos\nu\pi)P_\nu(x)-P_\nu(-x)}{2\sin\nu\pi}\quad(\nu\neq 整数;\ -1<x<1).$$

递推公式

$\mathfrak{P}_\nu(z)=\mathfrak{P}_{-\nu-1}(z)$.　$\mathfrak{Q}_\nu(z)-Q_{-\nu-1}(z)=\pi(\cot\nu\pi)\mathfrak{P}_\nu(z)$　$(\nu\neq 整数)$.

$\mathfrak{P}_\nu(-z)=e^{\pm\nu\pi i}\mathfrak{P}_\nu(z)-(2/\pi)(\sin\nu\pi)\mathfrak{Q}_\nu v(z)$,　$\mathfrak{Q}_\nu(-z)=-e^{\pm\nu\pi i}\mathfrak{Q}_\nu(z)$　$(\pm=\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\,z))$.

$(z^2-1)d\mathfrak{P}_\nu(z)/dz=(\nu+1)[\mathfrak{P}_{\nu+1}(z)-z\mathfrak{P}_\nu(z)]$,

$(2\nu+1)z\mathfrak{P}_\nu(z)=(\nu+1)\mathfrak{P}_{\nu+1}(z)+\nu\mathfrak{P}_{\nu-1}(z)$,

$(z^2-1)d\mathfrak{Q}_\nu(z)/dz=(\nu+1)[\mathfrak{Q}_{\nu+1}(z)-z\mathfrak{Q}_\nu(z)]$,

$(2\nu+1)z\mathfrak{Q}_\nu(z)=(\nu+1)\mathfrak{Q}_{\nu+1}(z)+\nu\mathfrak{Q}_{\nu-1}(z)$.

$$\mathfrak{P}_\nu(z)=\pi^{-1/2}2^{-\nu-1}\tan\nu\pi\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma[\nu+(3/2)]}z^{-\nu-1}{}_2F_1\left(\frac{\nu}{2}+1,\frac{\nu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)$$
$$+\pi^{-1/2}2^\nu\frac{\Gamma[\nu+(1/2)]}{\Gamma(\nu+1)}z^\nu{}_2F_1\left(\frac{1-\nu}{2},\frac{-\nu}{2};\frac{1}{2}-\nu;\frac{1}{z^2}\right).$$

$$P_\nu(\cos\theta)=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\nu-n}-\frac{1}{\nu+n+1}\right)P_n(\cos\theta)\quad(\nu\neq 整数;\ 0\leqslant\theta<\pi).$$

估计 $|P_\nu(\cos\theta)|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{\nu\pi\sin\theta}}$,　$|Q_\nu(\cos\theta)|\leqslant\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\nu\sin\theta}}$　$(0<\theta<\pi;\ \nu>1)$.

$P_\nu(1)=1$,　$P_\nu(0)=-\dfrac{\sin\nu\pi}{2\pi^{3/2}}\Gamma\left(\dfrac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{-\nu}{2}\right)$,

$$Q_\nu(0)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}(1-\cos\nu\pi)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right).$$

2） 特别是，当 $\nu=n(=0,1,2,\cdots)$ 时，以下所用记号!!表示

$$m!!=\begin{cases}m(m-2)\cdots4\cdot2 & (m\text{ 是偶数}),\\ m(m-2)\cdots5\cdot3\cdot1 & (m\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

函数 P_n 是 n 次多项式 (Legendre 多项式[†♦])并表示如下:

$$P_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$$

$$=\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}z^n{}_2F_1\left(-\frac{n}{2},\frac{1-n}{2};\frac{1}{2}-n;\frac{1}{z^2}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)!!}{n!}\left[z^n-\frac{n(n-1)}{(2n-1)}z^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}z^{n-4}\mp\cdots\right].$$

$$P_{2m}(z)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\frac{(2m+2j-1)!!}{(2j)!(2m-2j)!!}z^{2j},$$

$$P_{2m+1}(z)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\frac{(2m+2j+1)!!}{(2j+1)!(2m-2j)!!}z^{2j+1}.$$

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}e^{\mp in\theta}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},-n;\frac{1}{2}-n;e^{\pm2i\theta}\right)$$

$$=\frac{2(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\cos n\theta+\frac{1}{1}\frac{n}{(2n-1)}\cos(n-2)\theta\right.$$
$$+\frac{1\cdot3}{1\cdot2}\frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\theta$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5}{1\cdot2\cdot3}\frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cos(n-6)\theta+\cdots\right]$$
$$+\begin{cases}\left[\frac{(n-1)!!}{n!!}\right]^2 & (n\text{ 是偶数}),\\ 0 & (n\text{ 是奇数}).\end{cases}$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\left[\sin(n+1)\theta+\frac{1\cdot(n+1)}{1\cdot(2n+3)}\sin(n+3)\theta\right.$$
$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot(2n+3)(2n+5)}\sin(n+5)\theta+\cdots(\text{无穷})\right]\quad(0<\theta<\pi).$$

Laplace-Mehler 积分表示[♦]

$$P_n(\cos\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\theta+i\sin\theta\cos\varphi)^n d\varphi$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{\cos[n+(1/2)]\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\sin[n+(1/2)]\varphi}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}d\varphi.$$

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}r^{n+1}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)\quad\left(x=\frac{z}{r},\ r=\sqrt{z^2+\rho^2}\right).$$

$$P_n(1)=1,\quad P_n(-1)=(-1)^n,\quad P_{2n+1}(0)=0,$$

$$P_{2n}(0)=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}=\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

递推公式 $nP_n(z)-(2n-1)zP_{n-1}(z)+(n-1)P_{n-2}(z)=0,$

$$(z^2-1)\frac{dP_n}{dz}=n(zP_n-P_{n-1})=\frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1})=(n+1)(P_{n+1}-zP_n).$$

$$\mathfrak{Q}_n(z)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\log\frac{z+1}{z-1}\right]-\frac{1}{2}P_n(z)\log\frac{z+1}{z-1}$$

$$=2^n n!\int_z^\infty\cdots\int_z^\infty\frac{(dz)^{n+1}}{(z^2-1)^{n+1}}$$

$$=2^n\int_z^\infty\frac{(t-z)^n}{(t^2-1)^{n+1}}dt$$

$$=(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n\int_z^\infty\frac{dt}{(t^2-1)^{n+1}}\right]\qquad(\mathrm{Re}\,z>1).$$

$$Q_n(\cos\theta)=\frac{2\cdot(2n)!!}{(2n+1)!!}\left[\cos(n+1)\theta+\frac{1\cdot(n+1)}{1\cdot(2n+3)}\cos(n+3)\theta+\frac{1\cdot3\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot(2n+3)(2n+5)}\cos(n+5)\theta+\cdots\right]\qquad(0<\theta<\pi).$$

$$Q_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\log\frac{1+x}{1-x}\right]-\frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2}P_n(x)\log\frac{1+x}{1-x}-\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}P_{j-1}(x)P_{n-j}(x).$$

$$Q_0(x)=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x},\quad Q_1(x)=\frac{x}{2}\log\frac{1+x}{1-x}-1,$$

$$Q_2(x)=\frac{1}{4}(3x^2-1)\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{3}{2}x.$$

3) 母函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2hz+h^2}}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=0}^\infty h^nP_n(z) & (|h|<\min|z\pm\sqrt{z^2-1}|),\\ \displaystyle\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{h^{n+1}}P_n(z) & (|h|>\max|z\pm\sqrt{z^2-1}|)\end{cases}$$

（若 $-1\leqslant z\leqslant 1$，则右边等于 1）.

$$\frac{1}{z-t}=\sum_{n=0}^\infty(2n+1)\mathfrak{P}_n(t)\mathfrak{Q}_n(z)\qquad(|t+\sqrt{t^2-1}|<|z+\sqrt{z^2-1}|).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}}\log\frac{z-t+\sqrt{1-2tz+z^2}}{\sqrt{z^2-1}}=\sum_{n=0}^\infty t^n\mathfrak{Q}_n(z)\quad(\mathrm{Re}\,z>1,\ |t|<1).$$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\cos\theta=z/r$, x,y 是实数,

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^\infty\left[\frac{1}{\sqrt{(2mi\pi+z)^2+x^2+y^2}}+\frac{1}{\sqrt{(2mi\pi-z)^2+x^2+y^2}}\right]$$

（这里，复数的平方根取它的实部是正的.）

$$=\begin{cases}\displaystyle 1+\sum_{n=1}^\infty e^{-nz}J_0(n\sqrt{x^2+y^2}) & (\mathrm{Re}\,z>0),\\ \displaystyle\frac{1}{r}+\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^\infty\frac{(-1)^nB_{2n}}{(2n)!}r^{2n-1}P_{2n-1}(\cos\theta) & (0<\theta<2\pi;\ z\text{ 是实数}).\end{cases}$$

4) 关于 Legendre 多项式的积分

正交关系 $\int_{-1}^{+1} P_n(z)P_m(z)dz = \delta_{nm}\frac{2}{2n+1}$.

$$\int_{-1}^{+1} z^k P_n(z)dz = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

$$\int_0^1 z^\lambda P_n(z)dz = \begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+2)}{(\lambda+n+1)(\lambda+n-1)\cdots(\lambda+1)} & (n \text{ 是偶数}),\\ \dfrac{(\lambda-1)(\lambda-3)\cdots(\lambda-n+2)}{(\lambda+n+1)(\lambda+n-1)\cdots(\lambda+2)} & (n \text{ 是奇数})\end{cases} \qquad (\mathrm{Re}\,\lambda > -1).$$

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)\sin m\theta d\theta = \begin{cases}\dfrac{2(m-n+1)(m-n+3)\cdots(m+n-1)}{(m-n)(m-n+2)\cdots(m+n)} & (m > n;\ m+n \text{ 是奇数}),\\ 0 & (\text{其他情形}).\end{cases}$$

5) **圆锥函数**(德 Kegelfunktion). 这是相应于 $\nu = -(1/2)+i\lambda$ (λ 是实参数)的 Legendre 函数.

$$P_{-(1/2)+i\lambda}(\cos\theta) = 1 + \frac{4\lambda^2+1^2}{2^2}\sin^2\frac{\theta}{2} + \frac{(4\lambda^2+1^2)(4\lambda^2+3^2)}{2^2\cdot 4^2}\sin^4\frac{\theta}{2} + \cdots$$

$$P_{-(1/2)+i\lambda}(x) \equiv P_{-(1/2)-i\lambda}(x).$$

III) 连带的 Legendre 函数† (→球函数)

1) II) 1) 的微分方程 (1) 当 $\mu \neq 0$ 时的基本解组由下列二类函数给出.

第一类连带的 Legendre 函数†*.

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} {}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right),$$

其中,在式中对 $z > 1$ 取满足 $\arg[(z+1)/(z-1)] = 0$ 的分枝化为 $(\mu/2)$ 次幂.

第二类连带的 Legendre 函数†*.

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z) \equiv \frac{e^{i\mu\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma[\nu+(3/2)]}(z^2-1)^{\mu/2}z^{-\nu-\mu-1}{}_2F_1$$
$$\times\left(\frac{\nu+\mu+2}{2}, \frac{\nu+\mu+1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right).$$

其中,在 $(z^2-1)^{\mu/2}$ 中,对于 $z > 1$ 取满足 $\arg(z^2-1) = 0$,在 $z^{-\nu-\mu-1}$ 中对于 $z > 0$ 取满足 $\arg z^{-\nu-\mu-1} = 0$ 的分枝.

$$P_\nu^\mu(x) = e^{i\mu\pi/2}\mathfrak{P}_\nu^\mu(x+i0) = e^{i\mu\pi/2}\mathfrak{P}_\nu^\mu(x-i0)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2}{}_2F_1\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

$$Q_\nu^\mu(x) = e^{-i\mu\pi}[e^{-i\mu\pi/2}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(x+i0) + e^{i\mu\pi/2}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(x-i0)]/2$$
$$= \frac{\pi}{2\sin\mu\pi}\left[P_\nu^\mu(x)\cos\mu\pi - \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)}P_\nu^{-\mu}(x)\right] \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

积分表示

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{(z^2-1)^{\mu/2}}{2\mu\sqrt{\pi}\,\Gamma[\mu+(1/2)]}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-t^2)^{\mu-1/2}}{(z+t\sqrt{z^2-1})^{\mu-\nu}}dt$$
$$\left(\mathrm{Re}\,\mu > -\frac{1}{2},\ |\arg(z\pm1)| < \pi\right).$$

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{(z^2-1)^{\mu-2}}{2^\nu\Gamma(\mu-\nu)\Gamma(\nu+1)}\int_0^\infty \frac{(\sinh t)^{2\nu+1}}{(z+\cosh t)^{\mu+\nu+1}}dt$$

$$(\operatorname{Re} z > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0).$$

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma[\mu+(1/2)](z^2-1)^{\mu-2}}{\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^\infty \frac{\cosh[\nu+(1/2)]t}{(z+\cosh t)^{\mu+(1/2)}}\,dt$$

$$(\operatorname{Re} z > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi,\ \operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0).$$

$$\mathfrak{P}_\nu^{\mu}(\cosh\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(\sinh\alpha)^\mu}{\Gamma[-\mu+(1/2)]}\int_0^\alpha \frac{\cosh[\{\nu+(1/2)\}t]\,dt}{(\cosh\alpha-\cosh t)^{\mu+(1/2)}}\quad\left(\alpha>0,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right).$$

$$P_\nu^{\mu}(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(\sin\theta)^\mu}{\Gamma[-\mu+(1/2)]}\int_0^\theta \frac{\cos[\{\nu+(1/2)\}\varphi]\,d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{\mu+(1/2)}}\quad\left(0<\theta<\pi,\ \operatorname{Re}\mu<\frac{1}{2}\right).$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(2\mu+1)2^{-\mu}(\sin\theta)^\mu}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\nu+1)\Gamma(\mu-\nu)}\int_0^\infty \frac{t^{\mu+\nu}\,dt}{(1+2t\cos\theta+t^2)^{\mu+(1/2)}}$$

$$(\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu) > 0).$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta) = \frac{1}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\int_0^\infty e^{-t\cos\theta}J_\mu(t\sin\theta)t^\nu\,dt\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2},\ \operatorname{Re}(\mu+\nu)>-1\right).$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^{\mu}(z) = \frac{e^{i\mu\pi}}{2^{\nu+1}}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\,(z^2-1)^{\mu/2}\int_{-1}^{+1}(1-t)^\nu(z-1)^{-\nu-\mu-1}\,dt$$

$$(\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1,\ \operatorname{Re}\nu > -1,\ |\arg(z\pm 1)| < \pi).$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^{\mu}(\cosh\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{i\mu\pi}(\sinh\alpha)^\mu}{\Gamma[-\mu+(1/2)]}\int_\alpha^\infty \frac{e^{-[\nu+(1/2)]t}\,dt}{(\cosh t-\cosh\alpha)^{\mu+(1/2)}}$$

$$(\alpha>0,\ \operatorname{Re}\mu<1/2,\ \operatorname{Re}(\nu+\mu)>-1).$$

递推公式

$$(z^2-1)\,d\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)/dz = (\nu-\mu+1)\mathfrak{P}_{\nu+1}^\mu(z) - (\nu+1)z\mathfrak{P}_\nu^\mu(z),$$

$$(2\nu+1)z\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) = (\nu-\mu+1)\mathfrak{P}_{\nu+1}^\mu(z) + (\nu+\mu)\mathfrak{P}_{\nu-1}^\mu(z),$$

$$\mathfrak{P}_{-\nu-1}^\mu(z) = \mathfrak{P}_\nu^\mu(z),$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^{-\mu}(z) = e^{2i\mu\pi}\,\frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\,\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z),$$

$$(1-x^2)\,dP_\nu^\mu(x)/dx = (\nu+1)xP_\nu^\mu(x) - (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^\mu(x).$$

μ 是整数 $m(m=0,1,2,\cdots)$，并且 ν 也是整数 n 的情形：

$$P_n^{m+2}(x) + 2(m+1)x(1-x^2)^{-1/2}P_n^{m+1}(x) + (n-m)(n+m+1)P_n^m(x) = 0.$$

$$(2n+1)xP_n^m(x) - (n-m+1)P_{n+1}^m(x) - (n+m)P_{n-1}^m(x) = 0\qquad(0\leqslant m\leqslant n-2),$$

$$(x^2-1)\,dP_n^m(x)/dx - (n-m+1)P_{n+1}^m(x) + (n+1)xP_n^m(x) = 0,$$

$$P_{n-1}^m(x) - P_{n+1}^m(x) = (2n+1)\sqrt{1-x^2}\,P_n^{m-1}(x).$$

$$\mathfrak{P}_\nu^{-\mu}(z) = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - \frac{2}{\pi}\,e^{-i\mu\pi}(\sin\mu\pi)\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)\right],$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)\sin[(\nu+\mu)\pi] - \mathfrak{Q}_{-\nu-1}^\mu(z)\sin[(\nu-\mu)\pi] = \pi e^{i\mu\pi}(\cos\nu\pi)\mathfrak{P}_\nu^\mu(z),$$

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(-z) = e^{\mp i\nu\pi}\mathfrak{P}_\nu^\mu(z) - (2/\pi)[\sin(\nu+\mu)\pi]e^{-i\mu\pi}\mathfrak{Q}_\nu(z)\qquad(\mp = -\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)),$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(-z) = -e^{\pm i\nu\pi}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)\qquad(\pm = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z)).$$

$$e^{-i\mu\pi}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(\cosh\alpha) = \frac{\pi\Gamma(1+\mu+\nu)}{\sqrt{2\pi\sinh\alpha}}\,\mathfrak{P}_{-\mu-1/2}^{-\nu-1/2}(\coth\alpha)\qquad(\operatorname{Re}\cosh\alpha>0).$$

$$e^{-i\mu\pi}\mathfrak{Q}_\nu^\mu(x\pm i0) = e^{\pm i\mu\pi/2}[Q_\nu^\mu(x)\mp(i\pi/2)P_\nu^\mu(x)].$$

$$Q_{-\nu-1}^\mu(x) = \frac{\sin(\nu+\mu)\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\,Q_\nu^\mu(x) - \frac{\pi\cos\nu\pi\cos\mu\pi}{\sin(\nu-\mu)\pi}\,P_\nu^\mu(x),$$

$$P_\nu^{-\mu}(x) = \frac{\Gamma(\nu-\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}\left[\cos\mu\pi P_\nu^\mu(x) - \frac{2}{\pi}\sin\mu\pi Q_\nu^\mu(x)\right],$$

$$P_\nu^\mu(-x) = [\cos(\nu+\mu)\pi]P_\nu^\mu(x) - (2/\pi)[\sin(\nu+\mu)\pi]Q_\nu^\mu(x),$$

$$Q_\nu^\mu(-x) = -[\cos(\nu+\mu)\pi]Q_\nu^\mu(x) + (\pi/2)[\sin(\nu+\mu)\pi]P_\nu^\mu(x).$$

$$\mathfrak{P}_\nu^m(z) = \frac{\Gamma(1+\nu+m)(z^2-1)^{m/2}}{\Gamma(1+\nu-m)m!\,2^m}\,{}_2F_1\left(m-\nu, m+\nu+1; m+1; \frac{1-z}{2}\right)$$

$$= (z^2-1)^{m/2}\frac{d^m\mathfrak{P}_\nu(z)}{dz^m},$$

$$\mathfrak{P}_\nu^{-m}(z) = (z^2-1)^{-m/2}\int_1^z\cdots\int_1^z P_\nu(z)(dz)^m.$$

$$\mathfrak{Q}_\nu^m(z) = (z^2-1)^{m/2}\frac{d^m\mathfrak{Q}_\nu(z)}{dx^m}, \qquad \mathfrak{Q}_\nu^{-m}(z) = (-1)^m(z^2-1)^{-m/2}\int_z^\infty\cdots\int_z^\infty \mathfrak{Q}_\nu(z)(dz)^m.$$

$$P_\nu^m(x) = (-1)^m\frac{\Gamma(1+\nu+m)(1-x^2)^{m/2}}{\Gamma(1+\nu-m)m!\,2^m}\,{}_2F_1\left(m-\nu, m+\nu+1; m+1; \frac{1-x}{2}\right)$$

$$= (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_\nu(x)}{dx^m},$$

$$P_\nu^{-m}(x) = (1-x^2)^{-m/2}\int_x^1\cdots\int_x^1 P_\nu(x)(dx)^m = (-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(x).$$

$$Q_\nu^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mQ_\nu(x)}{dx^m}, \qquad Q_\nu^{-m}(x) = (-1)^m\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}Q_\nu^m(x).$$

在圆点的值是

$$P_\nu^\mu(0) = \frac{\sqrt{\pi}\,2^\mu}{\Gamma[(\nu-\mu)/2+1]\Gamma[(-\nu-\mu+1)/2]},$$

$$\frac{dP_\nu^\mu(0)}{dx} = \frac{2^{\mu+1}\sin[\pi(\nu+\mu)/2]\Gamma[(\nu+\mu+2)/2]}{\Gamma[(\nu-\mu+1)/2]\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi}\,2^{\mu+1}}{\Gamma[(\nu-\mu+1)/2]\Gamma[(-\nu-\mu)/2]},$$

$$Q_\nu^\mu(0) = -2^{\mu-1}\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\frac{\Gamma[(\nu+\mu+1)/2]}{\Gamma[(\nu-\mu+2)/2]},$$

$$\frac{dQ_\nu^\mu(0)}{dx} = 2^\mu\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\nu+\mu}{2}\pi\right)\frac{\Gamma[(\nu+\mu+2)/2]}{\Gamma[(\nu-\mu+1)/2]}.$$

2) 母函数

$$(\cos\theta + i\sin\theta\sin\varphi)^n = P_n(\cos\theta) + 2\sum_{m=1}^n(-i)^m\frac{n!}{(n+m)!}(\cos m\varphi)P_n^m(\cos\theta).$$

$$P_\nu^{-\mu}(\cos\theta) = \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\sum_{n=0}^\infty(-1)^n\left(\frac{1}{\nu-n} - \frac{1}{\nu+n+1}\right)P_n^{-\nu}(\cos\theta) \quad (0<\theta<\pi,\ \mu\geqslant 0).$$

3) 正交关系

$$\int_{-1}^{+1}P_n^m(x)P_{n'}^m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}.$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi\sin\theta e^{\pm i(m-m')\varphi}P_n^m(\cos\theta)P_{n'}^{m'}(\cos\theta)d\theta = \frac{4\pi}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

4) 加法定理

$$\mathfrak{P}_\nu(z\zeta - \sqrt{z^2-1}\sqrt{\zeta^2-1}\cos\varphi) = \mathfrak{P}_\nu(z)\mathfrak{P}_\nu(\zeta) + 2\sum_{m=1}^\infty(-1)^m\mathfrak{P}_\nu^m(z)\mathfrak{P}_\nu^{-m}(\zeta)\cos m\varphi$$

$$(\mathrm{Re}\, z>0,\ \mathrm{Re}\,\zeta>0,\ |\arg(z-1)|<\pi,\ |\arg(\zeta-1)|<\pi).$$

$$\mathfrak{Q}_\nu(tt'-\sqrt{t^2-1}\sqrt{t'^2-1}\cos\varphi)=\mathfrak{Q}_\nu(t)\mathfrak{P}_\nu(t')+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\mathfrak{Q}_\nu^m(t)\mathfrak{P}_\nu^{-m}(t')\cos m\varphi$$

(t, t' 是实数，$1<t'<t$，$\nu\neq$ 负整数，φ 是实数).

$$P_\nu(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi)=P_\nu(\cos\theta)P_\nu(\cos\theta')$$
$$+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m P_\nu^{-m}(\cos\theta')P_\nu^m(\cos\theta')\cos m\varphi$$
$$=P_\nu(\cos\theta)P_\nu(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)}P_\nu^m(\cos\theta)P_\nu^m(\cos\theta')\cos m\varphi$$

($0\leqslant\theta<\pi$，$0\leqslant\theta'<\pi$，$\theta+\theta'<\pi$，φ 是实数).

$$Q_\nu(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\varphi)=P_\nu(\cos\theta')Q_\nu(\cos\theta)$$
$$+2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m P_\nu^{-m}(\cos\theta')Q_\nu^m(\cos\theta)\cos m\varphi$$

($0<\theta'<\pi/2$，$0<\theta<\pi$，$\theta+\theta'<\pi$，φ 是实数).

$$\mathfrak{Q}_n(\tau\tau'+\sqrt{\tau^2+1}\sqrt{\tau'^2+1}\cosh\alpha)=\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{(m-n-1)!(m+n)!}\mathfrak{Q}_n^m(i\tau)\mathfrak{Q}_n^m(i\tau')e^{-m\alpha}$$

($\tau, \tau', \alpha>0$).

5) 渐近展开

$$\mathfrak{P}_\nu^\mu(z)=\left[\frac{2^\nu\Gamma[\nu+(1/2)]}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu-\mu+1)}z^\nu+\frac{2^{-\nu-1}\Gamma[-\nu-(1/2)]}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\mu-\nu)}z^{-\nu-1}\right][1+O(z^{-2})]$$

($\nu+(1/2)\neq$ 整数，$|\arg z|<\pi$，$|z|\gg 1$).

$$\mathfrak{Q}_\nu^\mu(z)=\frac{\sqrt{\pi}\,e^{i\mu\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma[\nu+(3/2)]}z^{-\nu-1}[1+O(z^{-2})]$$

($\nu+(1/2)\neq$ 负整数，$|\arg z|<\pi$，$|z|\gg 1$).

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma[\nu+(3/2)]}\frac{\cos[\{\nu+(1/2)\}\theta-(\pi/4)+(\mu\pi/2)]}{\sqrt{2\sin\theta}}[1+O(\nu^{-1})]$$

($\varepsilon\leqslant\theta\leqslant\pi-\varepsilon$，$\varepsilon>0$，$|\nu|\gg 1/\varepsilon$).

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[\nu+(3/2)]}$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+l\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+l\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\nu+l+\frac{3}{2}\right)l!}$$
$$\times\frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{2l+1}{2}\right)\theta-\frac{(2l+1)\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right]}{(2\sin\theta)^{l+(1/2)}},$$

$$Q_\nu^\mu(\cos\theta)=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma[\nu+(3/2)]}$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+l\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+l\right)\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\nu+l+\frac{3}{2}\right)l!}$$

$$\times \frac{\cos\left[\left(\nu+\frac{2l+1}{2}\right)\theta+\frac{(2l+1)\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}\right]}{(2\sin\theta)^{l+(1/2)}}.$$

(最后的二式是当 $\nu+\mu\neq$ 负整数，$\nu+(1/2)\neq$ 负整数，$\pi/6<\theta<5\pi/6$ 时收敛).

$$\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\cos\frac{\theta}{2}\right]^{\mu}P_{\nu}^{-\mu}(\cos\theta)=J_{\mu}(\eta)+\sin^{2}\frac{\theta}{2}\left[\frac{J_{\mu+1}(\eta)}{2\eta}-J_{\mu+2}(\eta)\right.$$

$$\left.+\frac{\eta}{6}J_{\mu+3}(\eta)\right]+O\left(\sin^{4}\frac{\theta}{2}\right)\qquad(\eta=(2\nu+1)\sin(\theta/2)).$$

6） 估计. 当 $\nu\geqslant 1,\ \nu-\mu+1>0,\ \mu\geqslant 0$,

$$|P_{\nu}^{\pm\mu}(\cos\theta)|<\frac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{8}{\nu\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sin\theta)^{\mu}},$$

$$|Q_{\nu}^{\pm\mu}(\cos\theta)|<\frac{\Gamma(\nu\pm\mu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{2\pi}{\nu\sin\theta}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sin\theta)^{\mu}},$$

$$|P_{\nu}^{\pm m}(\cos\theta)|<\frac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{4}{\nu\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sin\theta)^{m}},$$

$$|Q_{\nu}^{\pm m}(\cos\theta)|\leqslant\frac{\Gamma(\nu\pm m+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{4}{\nu\sin\theta}\right)^{1/2}\frac{1}{(\sin\theta)^{m}}.$$

7） **圆环函数** (torus function). 这些是微分方程 $\frac{d^2u}{d\eta^2}+\coth\eta\frac{du}{d\eta}-\left(n^2-\frac{1}{4}+\frac{m^2}{\sinh^2\eta}\right)u=0$ 的解，基本解组是 $\mathfrak{P}_{n-(1/2)}^{m}(\cosh\eta)$，$\mathfrak{Q}_{n-(1/2)}^{m}(\cosh\eta)$.

$m=0$ 时的渐近展开是

$$\mathfrak{P}_{n-(1/2)}(\cosh\eta)=\frac{(n-1)!\,e^{n-(1/2)\eta}}{\Gamma[n+(1/2)]\sqrt{\pi}}\left[\frac{2\Gamma^2[n+(1/2)]}{\pi n!(n-1)!}(\log 4+\eta)\right.$$

$$\left.\times e^{-2n\eta}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},n+\frac{1}{2};n+1;e^{-2\eta}\right)+A+B\right].$$

这里

$$A=1+\frac{(1/2)[n-(1/2)]}{1\cdot(n-1)}e^{-2\eta}+\frac{(1/2)(3/2)[n-(1/2)][n-(3/2)]}{1\cdot 2\cdot(n-1)(n-2)}e^{-4\eta}+\cdots$$

$$+\frac{(2n-3)!!(2n-1)!!}{[(2n-2)!!]^2}e^{-2(n-1)\eta},$$

$$B=\frac{\Gamma[n+(1/2)]}{\pi^{3/2}(n-1)!}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\Gamma[l+(1/2)]\Gamma[n+l+(1/2)]}{(n+l)!\,l!}(u_{n+l}+u_l-v_{l-(1/2)}$$

$$-v_{n+l-(1/2)})e^{-2(l+n)\eta},$$

其中，$u_r=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}$，$v_{r-(1/2)}=\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{2r-1}=2u_{2r}-u_r$.

【参】→公式 16 的[参]

19. 合流型函数，Bessel 函数

I） 合流型超几何函数[*]（→合流型函数）

1） Kummer 函数[*]

$$v(z)={}_1F_1(a;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)}\frac{z^n}{n!}$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} z^{1-c} \int_0^z e^t t^{a-1}(z-t)^{c-a-1} dt \qquad (0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c)$$

$$= \frac{\Gamma(c) 2^{1-c}}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} e^{z/2} \int_{-1}^{+1} e^{zt/2}(1-t)^{c-a-1}(1+t)^{a-1} dt \qquad (0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c).$$

Kummer 微分方程♦ $z\dfrac{d^2v}{dz^2} + (c-z)\dfrac{dv}{dz} - av = 0$ 的基本解组当 $c \neq 0, -1, -2, \cdots$ 时是

$$v_1(z) \equiv {}_1F_1(a; c; z), \qquad v_2(z) \equiv z^{1-c}{}_1F_1(a-c+1; 2-c; z).$$

$$d\,{}_1F_1(a; c; z)/dz = (a/c)\,{}_1F_1(a+1; c+1; z),$$

$${}_1F_1(a; c; z) = e^z{}_1F_1(c-a; c; -z),$$

$$a\,{}_1F_1(a+1; c+1; z) = (a-c)\,{}_1F_1(a; c+1; z) + c\,{}_1F_1(a; c; z),$$

$$a\,{}_1F_1(a+1; c; z) = (z+2a-c)\,{}_1F_1(a; c; z) + (c-a)\,{}_1F_1(a-1; c; z).$$

设 $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$，有

$$\lim_{c \to -n} \frac{1}{\Gamma(c)}\,{}_1F_1(a; c; z) = \frac{z^{n+1}(a)_{n+1}}{(n+1)!}\,{}_1F_1(a+n+1; n+2; z) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

渐近展开

$$v_1 \approx A_1 z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(a-c+1)_n}{n!}(-z)^{-n} + B_1 e^z z^{a-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_n(1-a)_n}{n!} z^{-n},$$

$$v_2 \approx A_2 z^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(a-c+1)_n}{n!}(-z)^{-n} + B_2 e^z z^{a-c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c-a)_n(1-a)_n}{n!} z^{-n}$$

$$(|z| \gg |a|,\ |z| \gg |c|,\ -3\pi/2 < \arg z < \pi/2,\ c \neq \text{整数}),$$

其中

$$A_1 = e^{-i\pi a}\Gamma(c)/\Gamma(c-a), \qquad B_1 = \Gamma(c)/\Gamma(a),$$

$$A_2 = e^{-i\pi(a-c+1)}\Gamma(2-c)/\Gamma(1-a), \qquad B_2 = \Gamma(2-c)/\Gamma(a-c+1).$$

2) 合流型超几何微分方程♦ $\dfrac{d^2u}{dz^2} + \dfrac{du}{dz} + \left[\dfrac{\kappa}{z} + \dfrac{(1/4)-\mu^2}{z^2}\right]u = 0$ 在 $z = 0$ 处的基本解组是 $z^{(1/2)\pm\mu}e^{-z}{}_1F_1[(1/2)\pm\mu-\kappa; \pm 2\mu+1; z]$.

II) Whittaker 函数(→合流型函数)

1) Whittaker 微分方程♦ $\dfrac{d^2W}{dz^2} + \left[-\dfrac{1}{4} + \dfrac{\kappa}{z} + \dfrac{(1/4)-\mu^2}{z^2}\right]W = 0$ 的线性无关的解是

$$M_{\kappa,\pm\mu}(z) = z^{\pm\mu+(1/2)}e^{-z/2}{}_1F_1[\pm\mu-\kappa+(1/2); \pm 2\mu+1; z].$$

Whittaker 函数♦

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma[(1/2)-\mu-\kappa]} M_{\kappa,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma[(1/2)+\mu-\kappa]} M_{\kappa,-\mu}(z) = W_{\kappa,-\mu}(z).$$

当 2μ 是整数时，$W_{\kappa,\mu}(z)$ 的上述定义无意义，但若对于 μ 取极限，则可由下列积分表示来定义 $W_{\kappa,\mu}(z)$.

积分表示

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{z^{\mu+(1/2)}e^{-z/2}}{\Gamma[\mu+(1/2)-\kappa]} \int_0^{\infty} e^{-z\tau}\tau^{\mu-\kappa-(1/2)}(1+\tau)^{\mu+\kappa-(1/2)} d\tau$$

$$= \frac{z^{\kappa}e^{-z/2}}{\Gamma[\mu+(1/2)-\kappa]} \int_0^{\infty} t^{\mu-\kappa-(1/2)}e^{-t}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\mu+\kappa-(1/2)} dt$$

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{e^{-z/2}}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Gamma(s-\kappa)\Gamma[-s-\mu+(1/2)]\Gamma[-s+\mu+(1/2)]}{\Gamma[-\kappa+\mu+(1/2)]\Gamma[-\kappa-\mu+(1/2)]} z^s ds.$$

$$M_{l+\mu+(1/2),\mu}(z)=(-1)^l z^{\mu+(1/2)}e^{-z/2}(2\mu+1)_l\,{}_1F_1(-l;\,2\mu+1;\,z)\quad(l=0,1,2,\cdots).$$

$$M_{\kappa,\mu}(z)=e^{-i\pi[\mu+(1/2)]}M_{-\kappa,\mu}(e^{i\pi}z).$$

$$M_{\kappa,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma[\mu+(1/2)-\kappa]}e^{i\pi\kappa}W_{-\kappa,\mu}(e^{i\pi}z)+\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma[\mu+(1/2)+\kappa]}e^{i\pi[\kappa-\mu-(1/2)]}W_{\kappa,\mu}(z)$$
$$(-3\pi/2<\arg z<\pi/2,\ 2\mu\neq-1,-2,\cdots).$$

$$M_{\kappa,\mu}(z)=\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma[\mu+(1/2)-\kappa]}e^{-i\pi\kappa}W_{-\kappa,\mu}(e^{-i\pi}z)+\frac{\Gamma(2\mu+1)}{\Gamma[\mu+(1/2)+\kappa]}e^{-i\pi[\kappa-\mu-(1/2)]}W_{\kappa,\mu}(z)$$
$$(-\pi/2<\arg z<3\pi/2,\ 2\mu\neq-1,-2,\cdots).$$

$$W_{\kappa,\mu}(z)=z^{1/2}W_{\kappa-(1/2),\mu-(1/2)}(z)+[(1/2)-\kappa+\mu]W_{\kappa-1,\mu}(z)$$
$$=z^{1/2}W_{\kappa-(1/2),\mu+(1/2)}(z)+[(1/2)-\kappa-\mu]W_{\kappa-1,\mu}(z).$$

$$z\,dW_{\kappa,\mu}(z)/dz=[\kappa-(z/2)]W_{\kappa,\mu}(z)-[\mu^2-\{\kappa-(1/2)\}^2]W_{\kappa-1,\mu}(z).$$

当 z 充分大时,有

$$M_{\kappa,\mu}(z)\sim\pi^{-1/2}\Gamma(2\mu+1)\kappa^{-\mu-(1/4)}z^{1/4}\cos[2(z\kappa)^{1/2}-\mu\pi-(\pi/4)],$$

$$W_{\kappa,\mu}(z)\sim-(4z/\kappa)^{1/4}\exp(-\kappa+\kappa\log\kappa)\sin[2(z\kappa)^{1/2}-\pi\kappa-(\pi/4)],$$

$$W_{-\kappa,\mu}(z)\sim(z/4\kappa)^{1/4}\exp(\kappa-\kappa\log\kappa-2(z\kappa)^{1/2}).$$

渐近展开

$$W_{\kappa,\mu}(z)\approx e^{-z/2}z^{\kappa}\times\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[\mu^2-\{\kappa-(1/2)\}^2][\mu^2-\{\kappa-(3/2)\}^2]\cdots[\mu^2-\{\kappa-n+(1/2)\}^2]}{n!\,z^n}\right).$$

2) 用 Whittaker 函数表示的几种特殊函数.

i) 概率积分†♦(误差函数)

$$\operatorname{erf}x\equiv\Phi(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=1-\pi^{-1/2}x^{-1/2}e^{-x^2/2}W_{-1/4,1/4}(x^2)$$
$$=\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-x^2\right)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{1!3}+\frac{x^5}{2!5}-\frac{x^7}{3!7}\pm\cdots\right).$$

渐近展开

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}[1-\Phi(x)]\approx\frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1\cdot3}{(2x^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2x^2)^3}\pm\cdots\right).$$

$$\frac{1}{1+i}\Phi\left(x\frac{1+i}{2}\sqrt{\pi}\right)=C(x)-iS(x),$$

其中 $C(x)$, $S(x)$ 是下列的 Fresnel 积分.

Fresnel 积分†♦

$$C(x)\equiv\int_0^x\cos\frac{\pi}{2}t^2dt=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi x}\sin\frac{\pi}{2}x^2+O\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$S(x)\equiv\int_0^x\sin\frac{\pi}{2}t^2dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi x}\cos\frac{\pi}{2}x^2+O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

ii) 对数积分†♦

$$\operatorname{Li}z\equiv\int_0^z\frac{dt}{\log t}\quad(\text{当 }z>1\text{ 时,在 }t=1\text{ 处取 Cauchy 主值}^\dagger)$$
$$=-(\log 1/z)^{-1/2}z^{1/2}W_{-1/2,0}(-\log z).$$

Li z 也可写为 li z.

3) 指数积分†♦ $\mathrm{Ei}\,x \equiv \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$ （当 $x>0$ 时在 $t=0$ 处取 Cauchy 主值）

$$= C + \log|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \qquad (x \text{ 是实数}, \neq 0)$$

$$= e^x \sum_{n=1}^{N} \frac{(n-1)!}{t^n} + N! \sum_{\substack{n=0\\ n\neq N}}^{\infty} \frac{t^{n-N}}{n!(n-N)} - \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}\right) + C + \log|x|.$$

余弦积分†♦ $\mathrm{Ci}\,x \equiv -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt = C + \log x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}\,dt.$

正弦积分†♦ $\mathrm{Si}\,x \equiv \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$

$$\mathrm{si}\,x \equiv -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \mathrm{Si}\,x - \frac{\pi}{2}.$$

渐近展开 $\mathrm{Ei}\,ix = \mathrm{Ci}\,x + i\,\mathrm{si}\,x \approx i^{ix}\left(\frac{1}{ix} + \frac{1!}{(ix)^2} + \frac{2!}{(ix)^3} + \frac{3!}{(ix)^4} + \cdots\right).$

III) Bessel 函数♦ (→Bessel 函数)

1) 柱面函数† Z_ν 是下面 Bessel 微分方程的解.

$$\frac{d^2 Z_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dZ_\nu}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) Z_\nu = 0.$$

递推公式

$$Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) = (2\nu/z) Z_\nu(z), \qquad Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) = 2dZ_\nu(z)/dz.$$

$$\int z^{\nu+1} Z_\nu(z)\,dz = z^{\nu+1} Z_{\nu+1}(z), \qquad \int z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z)\,dz = -z^{-\nu} Z_\nu(z).$$

Bessel 微分方程的特解,由下列三类函数给出.

Bessel 函数†♦(第一类 Bessel 函数)

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!\,\Gamma(\nu+l+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2l} = \frac{M_{0,\nu}(2iz)}{(2iz)^{1/2} 2^{2\nu} i^\nu \Gamma(\nu+1)} \qquad (|\arg z| < \pi).$$

$$J_\nu(e^{im\pi} z) = e^{im\nu\pi} J_\nu(z).$$

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z).$$

$$J_{n+(1/2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, z^{n+(1/2)} \left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Neumann 函数†♦(第二类 Bessel 函数)

$$N_\nu(z) \equiv \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[(\cos \nu\pi) J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)\right] \qquad (\nu \neq \text{整数};\ |\arg z| < \pi),$$

$$N_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z)\left(C + \log\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l} [\varphi(l) + \varphi(l+n)]$$

$$- \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-l-1)!}{l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l} \qquad \left(\varphi(l) = \sum_{m=1}^{l} \frac{1}{m}\right),$$

$$N_{-n}(z) = (-1)^n N_n(z) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots;\ |\arg z| < \pi).$$

$N_\nu(e^{im\pi}z) = e^{-im\nu\pi}N_\nu(z) + 2i(\sin m\nu\pi \cot \nu\pi)J_\nu(z).$

$N_{n+(1/2)}(z) = (-1)^{n+1}J_{-[n+(1/2)]}(z).$

Hankel 函数†♦(第三类 Bessel 函数)

$H_\nu^{(1)}(z) \equiv J_\nu(z) + iN_\nu(z),$

$H_\nu^{(2)}(z) \equiv J_\nu(z) - iN_\nu(z).$

$H_\nu^{(1)}(iz/2) = -2ie^{-i\nu\pi/2}(\pi z)^{-1/2}W_{0,\nu}(z).$

$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi}H_\nu^{(1)}(z)$, $H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi}H_\nu^{(2)}(z)$. $\overline{H_\nu^{(2)}(x)} = H_\nu^{(1)}(x)$ (x, ν 是实数).

2) 积分表示

Hansen-Bessel 公式♦

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz\cos t}e^{in[t-(\pi/2)]}dt = \frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^\pi e^{iz\cos t}\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin t - nt)dt \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Mehler 公式♦

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(x\cosh t)dt,$$

$$N_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x\cosh t)dt \qquad (x > 0).$$

Poisson 公式♦

$$J_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[\nu + (1/2)]}\int_0^{\pi/2}\cos(z\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt \qquad \left(\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}\right),$$

$$N_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[\nu + (1/2)]}\left[\int_0^{\pi/2}\sin(z\sin t)\cos^{2\nu}t\,dt - \int_0^\infty e^{-z\sinh t}\cosh^{2\nu}t\,dt\right] \qquad (\mathrm{Re}\,z > 0,\ \mathrm{Re}\,\nu > -1/2).$$

Schläfli 公式♦

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(z\sin t - \nu t)dt - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\sinh t}e^{-\nu t}dt \qquad (\mathrm{Re}\,z > 0),$$

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(z\sin t - \nu t)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-z\sinh t}[e^{\nu t} + (\cos\nu\pi)e^{-\nu t}]dt \qquad (\mathrm{Re}\,z > 0).$$

$$J_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\exp\left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{z^2}{t}\right)\right]t^{-\nu-1}dt \qquad (c > 0,\ |\arg z| < \pi,\ \mathrm{Re}\,\nu > -1).$$

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[(1/2) - \nu]}\int_1^\infty \frac{\sin xt}{(t^2 - 1)^{\nu+(1/2)}}dt,$$

$$N_\nu(x) = -\frac{2(x/2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma[(1/2) - \nu]}\int_1^\infty \frac{\cos xt}{(t^2 - 1)^{\nu+(1/2)}}dt \qquad \left(x > 0,\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\nu < \frac{1}{2}\right).$$

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{(0+)} e^{z[t-(1/t)]/2}t^{-\nu-1}dt \qquad (\mathrm{Re}\,z > 0).$$（积分路线是沿负实轴正向的一周.）

Sommerfeld 公式♦

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\eta+i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{iz\cos t}e^{i\nu[t-(\pi/2)]}dt,$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\eta+i\infty}^{\eta-i\infty} e^{iz\cos t}e^{i\nu[t-(\pi/2)]}dt,$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\eta-i\infty}^{2\pi-\eta+i\infty} e^{iz\cos t}e^{i\nu[t-(\pi/2)]}dt \qquad (-\eta < \arg z < \pi - \eta,\ 0 < \eta < \pi).$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi} e^{-i\nu\pi/2} \int_0^\infty e^{iz\cosh t} \cosh \nu t dt$$

$(0 < \arg z < \pi$; 当 $\nu = 0$ 时,在 $z = 0$ 处也成立).

$$H_\nu^{(1)}(z) = -\frac{2ie^{-i\nu\pi}(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma[\nu + (1/2)]} \int_0^\infty e^{iz\cosh t} \sin^{2\nu} t dt$$

$(0 < \arg z < \pi,\ \mathrm{Re}\,\nu > -1/2$; 当 $z = 0$ 时, $-1/2 < \mathrm{Re}\,\nu < 1/2)$.

$$H_\nu^{(1)}(z) = -i\frac{e^{-i\nu\pi/2}}{\pi} \int_0^\infty e^{iz[t-(1/2)]/2} t^{-\nu-1} dt$$

$(0 < \arg z < \pi$; 当 $\arg z = 0$ 时, $-1 < \mathrm{Re}\,\nu < 1)$.

3) 母函数

$$\exp\left[\frac{z(t - t^{-1})}{2}\right] = J_0(z) + \sum_{n=1}^\infty [t^n + (-t)^{-n}] J_n(z),$$

$$\exp(iz\cos\theta) = \sum_{n=-\infty}^\infty i^n J_n(z) e^{in\theta} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^\infty i^n J_n(z) \cos n\theta.$$

$$\int J_\nu(z) dz = 2\sum_{n=0}^\infty J_{\nu+2n+1}(z).$$

Kapteyn 级数†♦

$$\frac{1}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty J_n(nz),$$

$$\frac{1}{2}\frac{z^2}{1-z^2} = \sum_{n=1}^\infty J_{2n}(2nz) \qquad \left(\left|\frac{z\exp\sqrt{1-z^2}}{1+\sqrt{1-z^2}}\right| < 1\right).$$

Schlömilch 级数†♦ 设 $f(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant \pi$ 上关于实变量 x 是二次连续可微的,有

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^\infty a_n J_0(nx) \qquad (0 < x < \pi),$$

其中

$$a_0 = 2f(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi du \int_0^{\pi/2} f'(u\sin\varphi) d\varphi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi du \int_0^{\pi/2} uf'(u\sin\varphi)\cos n\varphi d\varphi.$$

$$1 = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^\infty J_{2n}(z) = [J_0(z)]^2 + 2\sum_{n=1}^\infty [J_n(z)]^2.$$

4) 加法定理†♦

对柱面函数 Z_ν, 有 $e^{i\nu\varphi} Z_\nu(kR) = \sum_{n=-\infty}^\infty J_n(k\rho) Z_{\nu+n}(kr) e^{in\varphi}$

$\left(R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varphi},\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{2},\ e^{2i\varphi} = \frac{r - \rho e^{-i\varphi}}{r - \rho e^{i\varphi}},\ 0 < \rho < r,\ k\right.$ 是任意复数$\left.\right)$

$$\frac{Z_\nu(kR)}{R^\nu} = 2^\nu k^{-\nu}\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^\infty (\nu + m)\frac{J_{\nu+m}(k\rho)}{\rho^\nu}\frac{Z_{\nu+m}(kr)}{r^\nu} C_m^{(\nu)}(\cos\varphi) \qquad (\nu \neq \text{负整数}).$$

$$\frac{\exp[(-1)^{\iota+1} ikR]}{R} = \frac{\pi}{2}\frac{(-1)^{\iota+1} i}{\sqrt{r\rho}}\sum_{m=0}^\infty (2m+1)^\iota J_{m+(1/2)}(k\rho) H_{m+(1/2)}^{(\iota)}(kr) P_m(\cos\varphi)$$

$(\iota = 1, 2)$.

$$e^{ik\rho\cos\varphi} = \left(\frac{\pi}{2k\rho}\right)^{1/2}\sum_{m=0}^\infty i^m (2m+1) J_{m+(1/2)}(k\rho) P_m(\cos\varphi)$$

$$= 2^{\nu}\Gamma(\nu)\sum_{m=0}^{\infty}(\nu+m)i^{m}J_{\nu+m}(k\rho)(k\rho)^{-\nu}C_{m}^{(\nu)}(\cos\varphi)\quad(\nu\neq 0,-1,-2,\cdots),$$

其中，P_m 是 Legendre 多项式†，$C_m^{(\nu)}$ 是 Gegenbauer 多项式†.

5) 无穷乘积，部分分数.

若 $j_{\nu,n}$ 是 $z^{-\nu}J_\nu(z)$ 的零点，且依实部增加的顺序排列，有

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{j_{\nu,n}^2}\right)\qquad(\nu\neq -1,-2,-3,\cdots).$$

（若 ν 是实数，并且 >-1，则所有零点都是实数.）

Kneser-Sommerfeld 公式†

$$\frac{\pi J_\nu(xz)}{4J_\nu(z)}[J_\nu(z)N_\nu(Xz)-N_\nu(z)J_\nu(Xz)] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_\nu(j_{\nu,n}x)J_\nu(j_{\nu,n}X)}{(z^2-j_{\nu,n}^2)J_{\nu,n}'^{2}(j_{\nu,n})}$$
$$(0<x<X<1,\ \mathrm{Re}\, z>\theta).$$

6) 定积分.

$$\int_0^{\pi/2}J_\nu(z\cos\theta)\cos\theta d\theta = \frac{1}{2z}\int_0^{2z}J_{2\nu}(t)dt,\quad \int_0^{z}J_\mu(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(z\sin\theta)}{\sin\theta}\cos\mu\theta d\theta,$$

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^{\mu-1}dt = \frac{(b/2a)^\nu\Gamma(\mu+\nu)}{a^\mu\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2},\frac{\mu+\nu+1}{2};\nu+1;\frac{-b^2}{a^2}\right)$$
$$(\mathrm{Re}\,(a+ib)>0,\ \mathrm{Re}\,(a-ib)>0,\ \mathrm{Re}\,(\mu+\nu)>0),$$

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)t^\nu dt = \frac{(2x)^\nu\Gamma[\nu+(1/2)]}{(a^2+b^2)^{\nu+(1/2)}\sqrt{\pi}}\qquad\left(\mathrm{Re}\,\nu>-\frac{1}{2},\ \mathrm{Re}\,a>|\Im b|\right).$$

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)\frac{dt}{t} = \frac{(\sqrt{a^2+b^2}-a)^\nu}{\nu b^\nu}\qquad(\mathrm{Re}\,\nu>0,\ \mathrm{Re}\,a>|\Im b|).$$

Sommerfeld 公式†
$$\int_0^\infty J_0(\tau r)e^{-|x|\sqrt{\tau^2-k^2}}\frac{\tau d\tau}{\sqrt{\tau^2-k^2}} = \frac{e^{ik\sqrt{r^2+k^2}}}{\sqrt{r^2+x^2}}$$
$$(r,x\text{ 是实数};\ -\pi/2\leqslant\arg\sqrt{\tau^2-k^2}<\pi/2,\ 0\leqslant\arg k<\pi).$$

Weyrich 公式†
$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\tau x}H_0^{(1)}(r\sqrt{k^2-\tau^2})d\tau = \frac{e^{ik\sqrt{r^2+x^2}}}{\sqrt{r^2+x^2}}$$
$$(r,x\text{ 是实数};\ 0\leqslant\arg\sqrt{k^2-\tau^2}<\pi,\ 0\leqslant\arg k<\pi).$$

Weber-Sonine 公式†

$$\int_0^\infty J_\nu(at)e^{-p^2t^2}t^{\mu-1}dt = \frac{(a/2p)^\nu\Gamma[(\nu+\mu)/2]}{2p^\mu\Gamma(\nu+1)}\,{}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu}{2};\nu+1;\frac{-a^2}{4p^2}\right)$$
$$(\mathrm{Re}\,(\mu+\nu)>0,\ |\arg p|<\pi/4,\ a>0),$$

$$\int_0^\infty J_\nu(at)e^{-p^2t^2}t^{\nu+1}dt = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}}e^{-a^2/4p^2}\qquad(\mathrm{Re}\,\nu>-1,\ |\arg p|<\pi/4).$$

Sonine-Schafheitlin 公式†

$$\int_0^\infty J_\mu(at)J_\nu(bt)t^{-\lambda}dt = \frac{a^\mu\Gamma[(\mu+\nu-\lambda+1)/2]}{2^\lambda b^{\mu-\lambda+1}\Gamma[(-\mu+\nu+\lambda+1)/2]\Gamma(\mu+1)}$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\frac{\mu-\nu-\lambda+1}{2};\mu+1;\frac{a^2}{b^2}\right)$$
$$(\mathrm{Re}\,(\mu+\nu-\lambda+1)>0,\ \mathrm{Re}\,\lambda>-1,\ 0<a<b).$$

7） 渐近展开

i） Hankel 渐近级数♦. 设

$$(\nu, m) \equiv \frac{[4\nu^2-1^2][4\nu^2-3^2]\cdots[4\nu^2-(2m-1)^2]}{2^{2m}m!}$$

$$(m=1,2,3,\cdots);\ (\nu,0)\equiv 1.$$

对于 $|z|\gg|\nu|$, $|z|\gg 1$, 有

$$J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}+O(|z|^{-2M})\right]$$
$$-\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O(|z|^{-2M-1})\right]$$
$$(-\pi<\arg z<\pi),$$

$$N_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}+O(|z|^{-2M})\right]$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O(|z|^{-2M-1})\right]$$
$$(-\pi<\arg z<\pi),$$

$$H_\nu^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,m)}{(-2iz)^m}+O(|z|^{-M})\right]\ (-\pi<\arg z<2\pi),$$

$$H_\nu^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[-i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\left[\sum_{m=0}^{M-1}\frac{(\nu,m)}{(2iz)^m}+O(|z|^{-M})\right]\ (-2\pi<\arg z<\pi).$$

ii） Debye 渐近级数♦

$\nu\fallingdotseq x$, $1-(\nu/x)>\varepsilon$, $\nu/x=\sin\alpha$, 特别是，当 $1-(\nu/x)>(3/x)\nu^{1/2}$ 时，有

$$H_\nu^{(1)}(x)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left[ix\left\{\cos\alpha+\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha\right\}\right]$$
$$\times\left[\frac{e^{i\pi/4}}{X}+\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{24}\tan^2\alpha\right)\frac{3e^{3\pi i/4}}{2X^3}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3}{128}+\frac{77}{576}\tan^2\alpha+\frac{385}{3456}\tan^4\alpha\right)\frac{3\cdot5e^{5\pi i/4}}{2^2X^5}+\cdots\right]\quad(X=[-x\cos(\alpha/2)]^{1/2}).$$

$\nu\fallingdotseq x$, $(\nu/x)-1>\varepsilon$, $\nu/x=\cosh\sigma$, 当 $|\nu^2-x^2|^{1/2}\gg1$, $|\nu^2-x^2|^{3/2}\nu^{-2}\gg1$, 有

$$H_\nu^{(1)}(x)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp[x(\sigma\cosh\sigma-\sinh\sigma)]$$
$$\times\left[\frac{1}{X}+\left(\frac{1}{8}-\frac{5}{24}\coth^2\sigma\right)\frac{3}{2X^3}+\left(\frac{3}{128}-\frac{77}{576}\coth^2\sigma+\frac{385}{3456}\coth^4\sigma\right)\frac{3\cdot5}{2^2X^5}+\cdots\right]$$
$$(X=[-x\sinh(\sigma/2)]^{1/2}).$$

当 $\nu\fallingdotseq x$, $|x-\nu|\ll x^{1/3}$, $x\gg1$, $x-\nu=\delta$ 时，有

$$H_\nu^{(2)}(x)\sim\frac{6^{1/3}e^{i\pi/3}}{3^{1/2}\pi}\left[\frac{\Gamma(1/3)}{x^{1/3}}-6^{1/3}e^{i\pi/3}\delta\frac{\Gamma(2/3)}{x^{2/3}}+\left(\frac{2}{5}\delta-\delta^3\right)\frac{\Gamma(4/3)}{x^{4/3}}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3}{140}-\frac{\delta^2}{4}+\frac{\delta^4}{4}\right)6^{1/3}e^{i\pi/3}\frac{\Gamma(5/3)}{x^{5/3}}+\cdots\right].$$

iii） Watson-Nicholson 公式♦

当 $x, \nu > 0$, $w = [(x/\nu)^2 - 1]^{1/2}$ 时,有

$$H_\nu^{(l)}(x) = 3^{-1/2} w \exp[(-1)^{l+1} i\{(\pi/6) + \nu(w - (w^3/3) - \arctan w)\}] H_{1/3}^{(l)}(\nu w^3/3) + O|\nu^{-1}|$$
$$(l = 1, 2).$$

IV) 与 Bessel 函数相关连的诸函数

1) 修正 Bessel 函数♦

$$I_\nu(z) \equiv e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(e^{i\pi/2} z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)},$$

$$K_\nu(z) \equiv \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} H_\nu^{(1)}(e^{i\pi/2} z) = -\frac{i\pi}{2} e^{-i\nu\pi/2} H_\nu^{(2)}(e^{i\pi/2} z)$$
$$= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi} = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} W_{0,\nu}(2z).$$

递推公式

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = (2\nu/z) I_\nu(z),$$
$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I_\nu'(z).$$
$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -(2\nu/z) K_\nu(z),$$
$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K_\nu'(z),$$
$$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z).$$

Airy 积分♦

$$\int_0^\infty \cos(t^3 - tx)\,dt = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{x}{3}}\left[J_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\right],$$

$$\int_0^\infty \cos(t^3 + tx)\,dt = \frac{1}{3}\sqrt{x}\, K_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right) \qquad (x > 0).$$

H. Weber 公式♦

$$\frac{1}{2p^2} e^{-(a^2+b^2)/4p^2} I_\nu\left(\frac{ab}{2p^2}\right) = \int_0^\infty e^{-p^2t^2} J_\nu(at) J_\nu(bt)\, t\,dt$$
$$(\mathrm{Re}\,\nu > -1,\ |\arg p| < \pi/4;\ a, b > 0).$$

Watson 公式♦

$$J_\mu(z) N_\nu(z) - J_\nu(z) N_\mu(z) = \frac{4\sin(\mu-\nu)\pi}{\pi^2} \int_0^\infty K_{\nu-\mu}(2z\sinh t) e^{(\mu+\nu)t}\,dt$$
$$(\mathrm{Re}\,z > 0,\ \mathrm{Re}(\mu-\nu) < 1),$$

$$J_\nu(z)\frac{\partial N_\nu(z)}{\partial \nu} - N_\nu(z)\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} = -\frac{4}{\pi}\int_0^\infty K_0(2z\sinh t) e^{-2\nu t}\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,z > 0).$$

Nicholson 公式♦

$$J_\nu^2(z) + N_\nu^2(z) = \frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty K_0(2z\sinh t)\cosh 2\nu t\,dt \qquad (\mathrm{Re}\,z > 0).$$

Dixon-Ferrar 公式♦

$$J_\nu^2(z) + N_\nu^2(z) = \frac{8\cos\nu\pi}{\pi^2}\int_0^\infty K_{2\nu}(2z\sinh t)\,dt$$
$$\left(\mathrm{Re}\,z > 0;\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\nu < \frac{1}{2}\right).$$

2) Kelvin 函数♦

$$\mathrm{ber}_\nu(z) \pm i\,\mathrm{bei}_\nu(z) \equiv J_\nu(e^{\pm 3\pi i/4} z),$$
$$\mathrm{her}_\nu(z) \pm i\,\mathrm{hei}_\nu(z) \equiv H_\nu^{(1)}(e^{\pm 3\pi i/4} z),$$
$$\mathrm{ker}_\nu(z) \equiv -(\pi/2)\,\mathrm{hei}_\nu(z),$$
$$\mathrm{kei}_\nu(z) \equiv (\pi/2)\,\mathrm{her}_\nu(z).$$

ν 是整数 n 时, $\mathrm{ber}_n(x) - i\,\mathrm{bei}_n(x) = (-1)^n J_n(\sqrt{i}\,x)$,

$$\mathrm{her}_n(x) - i\,\mathrm{hei}_n(x) = (-1)^{n+1}H_n^{(1)}(\sqrt{i}\,x) \qquad (x \text{ 是实数}).$$

3) **Struve 函数**♦ $$\boldsymbol{H}_\nu(z) = \frac{2(z/2)^\nu}{\Gamma[\nu+(1/2)]\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2}\sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{\nu+2m+1}}{\Gamma[m+(3/2)]\Gamma[\nu+m+(3/2)]}.$$

Anger 函数♦ $$\boldsymbol{J}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta.$$

H. F. Weber 函数♦ $$\boldsymbol{E}_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(\nu\theta - z\sin\theta)d\theta.$$

设 $\nabla_\nu = z^2\dfrac{d^2}{dz^2} + z\dfrac{d}{dz} + z^2 - \nu^2$,

$$\nabla_\nu\boldsymbol{H}_\nu(z) = \frac{4(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma[\nu+(1/2)]\sqrt{\pi}},\quad \nabla_\nu\boldsymbol{J}_\nu(z) = \frac{(z-\nu)\sin\nu\pi}{\pi},$$

$$\nabla_\nu\boldsymbol{E}_\nu(z) = -\frac{z+\nu}{\pi} - \frac{(z-\nu)\cos\nu\pi}{\pi}.$$

当 ν 是整数 n 时，$\boldsymbol{J}_n(z) = J_n(z)$.

$$\int_0^z J_0(t)dt = zJ_0(z) + \frac{\pi z}{2}[J_1(z)\boldsymbol{H}_0(z) - J_0(z)\boldsymbol{H}_1(z)],$$

$$\int_0^z N_0(t)dt = zN_0(z) + \frac{\pi z}{2}[N_1(z)\boldsymbol{H}_0(z) - N_0(z)\boldsymbol{H}_1(z)].$$

4) **Neumann 多项式** $$O_n(t) = \sum_{j=0}^{[n/2]}\frac{n(n-j-1)!}{j!(t/2)^{n-2j+1}} \qquad (n \text{ 是正整数}),$$

$$O_0(t) = 1/t.$$

$$\frac{1}{t-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}O_n(t)J_n(z) \qquad (|t| > |z|).$$

Schläfli 多项式♦ $$S_n(t) = \frac{2}{n}\left[tO_n(t) - \cos^2\frac{n\pi}{2}\right] \qquad (n \text{ 是正整数}),$$

$$S_0(t) = 0.$$

$\nabla_n S_n(x) = 2n + 2(x-n)\sin^2(n\pi/2)$ (∇_n 和 3)中的定义相同).

Lommel 多项式♦ $$R_{m,\nu}(2) = \frac{\Gamma(\nu+m)}{\Gamma(\nu)(z/2)^m}\,{}_2F_3\left(\frac{1-m}{2}, \frac{-m}{2}; \nu, -m, 1-\nu-m; z^2\right)$$

$$= (\pi z/2\sin\nu\pi)[J_{\nu+m}(z)J_{-\nu+1}(z) + (-1)^m J_{-\nu-m}(z)J_{\nu-1}(z)]$$

$$(m \text{ 是 } 0, \text{ 或是正整数}).$$

【参】 →公式 16 的[参]

20. 正交多项式系

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)\varphi(x)dx = \delta_{nm}A_n \qquad (\to\text{正交函数系})$$

名　　称	记号 $P_n(x)$	区间 (a, b)	权 $\varphi(x)$	范数 A_n
Legendre	$P_n(x)$	$(-1, +1)$	1	$2/(2n+1)$
Gegenbauer	$C_n^\nu(x)$	$(-1, +1)$	$(1-x^2)^{\nu-(1/2)}$	$2\pi\Gamma(2\nu+n)/2^{2\nu}(n+\nu)n![\Gamma(\nu)]^2$
Чебышев	$T_n(x)$	$(-1, +1)$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\pi(n=0);\ \pi/2(n>1)$
Hermite	$H_n(x)$	$(-\infty, +\infty)$	e^{-x^2}	$\sqrt{\pi}\cdot n!$
Jacobi	$G_n(\alpha, \gamma; x)$	$(0, 1)$	$x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}$	$\dfrac{n![\Gamma(\gamma)]^2\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(\alpha+2n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}$
Laguerre	$L_n^\alpha(x)$	$(0, \infty)$	$x^\alpha e^{-x}$	$\Gamma(\alpha+n+1)/n!$

关于 Legendre 多项式 $P_n(x)$ →公式 18 II).

I) Gegenbauer 多项式♦ (Gegenbauer 函数♦)

$$C_n^\nu(t) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\Gamma(2\nu)}\,{}_2F_1\left(n+2\nu, -n; \nu+\frac{1}{2}; \frac{1-t}{2}\right)$$
$$= \frac{\Gamma(2\nu+n)\Gamma[\nu+(1/2)]}{\Gamma(2\nu)n!}\left[\frac{1}{4}(t^2-1)\right]^{(1/4)-(\nu/2)}\mathfrak{P}^{(1/2)-\nu}_{n+\nu-(1/2)}(t).$$

母函数.　$$(1-2\alpha t+\alpha^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(t)\alpha^n.\quad C_{n-l}^{l+(1/2)}(x) = \frac{1}{(2l-1)!!}\frac{d^lP_n(t)}{dt^l}.$$

正交关系.　$$\int_0^\pi (\sin^{2\nu}\theta)C_m^\nu(\cos\theta)C_n^\nu(\cos\theta)d\theta = \frac{\pi\Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-1}(\nu+n)n![\Gamma(\nu)]^2}\delta_{nm}.$$

II) Чебышев (Tschebyscheff) 多项式†

1) Чебышев 多项式♦(第一种 Чебышев 函数♦)

$$T_n(x) \equiv \cos(n\arccos x)$$
$$= (1/2)[(x+i\sqrt{1-x^2})^n + (x-i\sqrt{1-x^2})^n]$$
$$= F(n, -n; 1/2; (1-x)/2)$$
$$= \sum_{j=0}^{[n/2]}(-1)^j\binom{n}{2j}x^{n-2j}(1-x^2)^j$$
$$= \frac{(-1)^n(1-x^2)^{1/2}}{(2n-1)!!}\frac{d^n(1-x^2)^{n-(1/2)}}{dx^n},$$

第二种 Чебышев 函数♦

$$U_n(x) \equiv \sin(n\arccos x)$$
$$= (1/2i)[(x+i\sqrt{1-x^2})^n - (x-i\sqrt{1-x^2})^n]$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}n}{(2n-1)!!}\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-(1/2)}}{dx^{n-1}}.$$

$T_n(x)$, $U_n(x)$ 是 Чебышев 微分方程♦ $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0$ 是互相独立的解.

递推公式　$T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0$, $U_{n+1}(x)-2xU_n(x)+U_{n-1}(x)=0$.

母函数　$$\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x)+2\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n,$$

$$\frac{1}{1-2tx+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{n=0}^{\infty}U_{n+1}(x)t^n.$$

正交关系

$$\int_{-1}^{+1}\frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0 & (m\neq n),\\ \pi/2 & (m=n\neq 0),\\ \pi & (m=n=0);\end{cases}\quad \int_{-1}^{+1}\frac{U_m(x)U_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & (m=n\neq 0),\\ 0 & (其他).\end{cases}$$

选点正交性. 设 $u_0, u_1, \cdots, u_k$ 是 $T_{k+1}(x)$ 的零点(所有零点都是实数,并且在区间 $(-1,1)$ 内),则有

$$\sum_{i=0}^{k}T_m(u_i)T_n(u_i)=\begin{cases}0 & (m\neq n, 或 m=n=k+1),\\ (k+1)/2 & (1\leqslant m=n\leqslant k),\\ k+1 & (m=n=0).\end{cases}$$

设 $P_n(x)$ 是在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 上的 x^n 的由至多 $n-1$ 次的多项式的最佳逼近,则有

$$x^n-p_n(x)=2^{-n+1}T_n(x).$$

2) 依 $T_n(x)$ 展开♦

$$e^{ax}=I_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}I_n(a)T_n(x),$$

$$\sin ax=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nJ_{2n+1}(a)T_{2n+1}(x),$$

$$\cos ax=J_0(a)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nJ_{2n}(a)T_{2n}(x),$$

$$\log(1+x\sin 2\alpha)=2\log\cos\alpha-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-\tan\alpha)^nT_n(x),$$

$$\arctan x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{2}-1)^{2n+1}}{2n+1}T_{2n+1}(x).$$

III) 抛物柱面函数† (Weber 函数)(一合流型函数)

抛物柱面函数♦

$$\begin{aligned}D_\nu(z)&=2^{(1/4)+(\nu/2)}z^{-1/2}W_{(1/4)+(\nu/2),-1/4}(z^2/2)\\&=\sqrt{\pi}\,2^{(1/4)+(\nu/2)}z^{-1/2}\left[\frac{M_{(1/4)+(\nu/2),-1/4}(z^2/2)}{\Gamma[(1-\nu)/2]}+\frac{M_{(1/4)-(\nu/2),-1/4}(z^2/2)}{\Gamma(-\nu/2)}\right]\\&=2^{\nu/2}e^{-z^2/4}\sqrt{\pi}\left[\frac{1}{\Gamma[(1-\nu)/2]}\,{}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{z^2}{2}\right)\right.\\&\qquad\left.-\frac{\sqrt{2}z}{\Gamma(-\nu/2)}\,{}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2};\frac{3}{2};\frac{z^2}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

Weber 微分方程♦ $\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right)u=0$ 的解是 $D_\nu(z)$, $D_\nu(-z)$, $D_{-\nu-1}(iz)$, $D_{-\nu-1}(-iz)$, 并且它们相互之间有下列关系.

$$\begin{aligned}D_\nu(z)&=[\Gamma(\nu+1)/\sqrt{2\pi}][e^{i\nu\pi/2}D_{-\nu-1}(iz)+e^{-i\nu\pi/2}D_{-\nu-1}(-iz)]\\&=e^{-i\nu\pi}D_\nu(-z)+[\sqrt{2\pi}/\Gamma(-\nu)]e^{-i(\nu+1)\pi/2}D_{-\nu-1}(iz)\\&=e^{i\nu\pi}D_\nu(-z)+[\sqrt{2\pi}/\Gamma(-\nu)]e^{i(\nu+1)\pi/2}D_{-\nu-1}(-iz).\end{aligned}$$

积分表示

$$D_\nu(z)=\frac{e^{-z^2/4}}{\Gamma(-\nu)}\int_0^{\infty}e^{-zt-(t^2/2)}t^{-\nu-1}dt\qquad(\mathrm{Re}\,\nu<0).$$

$$e^{-(z^2/4)-zt-(t^2/2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}D_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}t^{\nu}\Gamma(-\nu)D_\nu(z)d\nu$$

$$(c<0,\ |\arg t|<\pi/4).$$

递推公式

$$D_{\nu+1}(z)-zD_\nu(z)+\nu D_{\nu-1}(z)=0,\ dD_\nu(z)/dz+(1/2)zD_\nu(z)-\nu D_{\nu-1}(z)=0.$$

$$D_\nu(0)=\frac{2^{\nu/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma[(1-\nu)/2]},\ D_\nu'(0)=-\frac{2^{(\nu+1)/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu/2)}.$$

渐近展开

$$D_\nu(z)\approx e^{-z^2/4}z^\nu\left(1-\frac{\nu(\nu-1)}{2z^2}+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2\cdot 4z^4}\mp\cdots\right)\ \left(|\arg z|<\frac{3}{4}\pi\right).$$

$$D_{-1}(z)=e^{z^2/4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)\right],\ \operatorname{erf}(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt\quad(\text{误差函数}).$$

IV) Hermite 多项式†

在抛物柱面函数中,特别是,当 ν 是整数 n 时,有

$$D_n(z)=(-1)^n e^{z^2/4}d^n(e^{-z^2/2})/dz^n=e^{-z^2/4}H_n(z/\sqrt{2}),$$

其中 $H_n(x)$ 是 Hermite 多项式♦.

$$H_n(x)\equiv 2^{-n/2}(-1)^n e^{x^2}d^n(e^{-x^2})/dx^n=e^{x^2/2}D_n(\sqrt{2}x).$$

但 Hermite 多项式更常用下面的 $\mathrm{He}_n(x)$ 来定义 (W. F. Magnus-F. Oberhettinger-R. P. Soni [1]).

$$\mathrm{He}_n(x)\equiv(-1)^n e^{x^2/2}d^n(e^{-x^2/2})/dx^n=e^{x^2/4}D_n(x)=H_n(x/\sqrt{2}).$$

函数 $y=H_n(x)$ 是 Hermite 微分方程♦ $y''-2xy'+2ny=0$ 的解.

$H_n(x)$ 是 n 次多项式,并可根据 n 的奇、偶来确定是奇函数或偶函数.

$$H_{2n}(x)=(-1)^n(2n-1)!!\,{}_1F_1(-n;1/2;x^2),$$

$$H_{2n+1}(x)=(-1)^n(2n+1)!!\sqrt{2}\,x\,{}_1F_1(-n;3/2;x^2).$$

递推公式

$$H_{n+1}(x)=\sqrt{2}\,xH_n(x)-nH_{n-1}(x)=\sqrt{2}\,xH_n(x)-H_n'(x)/\sqrt{2},$$

$$H_n'(x)=\sqrt{2}\,nH_{n-1}(x).$$

$$H_{2n}(0)=\frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}=(-1)^n(2n-1)!!,\quad H_{2n+1}(0)=0.$$

母函数 $$e^{\sqrt{2}tx-(t^2/2)}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)t^n/n!.$$

正交性 $$\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}dx=\delta_{nm}n!\sqrt{\pi}.$$

V) Jacobi 多项式†♦

$$G_n(\alpha,\gamma;x)\equiv F(-n,\alpha+n;\gamma;x)$$

$$=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)}\frac{d^n}{dx^n}[x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\alpha+n-\gamma}].$$

满足 Jacobi 微分方程♦ $x(1-x)y''+[\gamma-(\alpha+1)x]y'+n(\alpha+n)y=0.$

正交性

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}G_m(\alpha,\gamma;x)G_n(\alpha,\gamma;x)dx=\frac{n!\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)\Gamma(\gamma)^2}{(\alpha+2n)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}\delta_{mn}$$
$$(\mathrm{Re}\,\gamma>0,\ \mathrm{Re}\,(\alpha-\gamma)>-1).$$

其他函数的表示

$$P_n(x)=G\left(1,1;\frac{1-x}{2}\right),\quad T_n(x)=G\left(0,\frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right),$$
$$G_n^\nu(x)=(-1)^n\frac{\Gamma(2\nu+n)}{\Gamma(2\nu)\cdot n!}G_n\left(2\nu,\nu+\frac{1}{2};\frac{1+x}{2}\right).$$

VI) Laguerre 函数

1） Laguerre 函数♦

$$L_\nu^{(\alpha)}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+1)}z^{-(\alpha+1)/2}e^{z/2}M_{[(\alpha+1)/2]+\nu,\alpha/2}(z)$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\nu+1)}F_1(-\nu;\alpha+1;z).$$

满足 Laguerre 微分方程♦　$zd^2[L_\nu^{(\alpha)}(z)]/dz^2+(\alpha+1-z)d[L_\nu^{(\alpha)}(z)]/dz+\nu L_\nu^{(\alpha)}(z)=0.$

2） 特别是，当 ν 是整数 n 时 $(n=0,1,2,\cdots)$，$L_n^{(\alpha)}(x)$ 化为如下的 n 次多项式.

Laguerre 多项式†♦

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})=\sum_{j=0}^n\binom{n+\alpha}{n-j}\frac{(-x)^j}{j!}.$$

$$L_n^{(0)}(x)=1,\ L_0^{(m)}(x)=1,\ L_{n+m}^{(-m)}(x)=\frac{(-1)^m n!}{(n+m)!}x^m L_n^{(m)}(x)\quad(m=0,1,2,\cdots).$$

递推公式

$$nL_n^{(\alpha)}(x)=(-x+2n+\alpha-1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha-1)L_{n-2}^{(\alpha)}(x),$$
$$xd[L_n^{(\alpha)}(x)]/dx=nL_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\quad(n=2,3,\cdots).$$

母函数　$$\frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^\infty L_n^{(\alpha)}(x)t^n\quad(|t|<1).$$

正交关系

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}dx=\delta_{mn}\Gamma(\alpha+n+1)/n!=\delta_{mn}\Gamma(1+\alpha)\binom{n+\alpha}{n}.$$

$$H_{2n}(x)=(-2)^n n!\,L_n^{(-1/2)}(x^2),\quad H_{2n+1}(x)=(-2)^n n!\sqrt{2}\,xL_n^{(1/2)}(x^2).$$

3） Sonine 多项式†♦　$$S_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}L_n^{(\alpha)}(x).$$

VII) 选点正交多项式♦

$$P_{n,m}(x)=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{m(m-1)\cdots(m-k+1)}$$
$$(n,m\text{ 是正整数,且 }n<m).$$

也简称为“正交多项式♦”. 若把 $P_n(1-2x)$ 的 x^k 换为 $x(x-1)\cdots(x-k+1)/m(m-1)\cdots(m-k+1)$ $(k=0,1,\cdots,n)$，则可得相同的多项式.

选点正交性　$$\sum_{k=0}^m P_{n,m}(k)P_{l,m}(k)=\delta_{nl}\frac{(m+n+1)!(m-n)!}{(2n+1)(m!)^2}.$$

Чебышев q 函数

$$q_n(m, x) = \frac{(-1)^n(m-1)!}{2^n(m-n-1)!} P_{n,m-1}(x), \xi_{n,m}(x) = [2^n(n!)^2/(2n)!]q_n(m, x-1).$$

对于在等距 h 的 m 个点 $x_k = x_1 + (k+1)h$ $(k = 1, \cdots, m)$ 的值 y_k，$n(<m)$ 次多项式 $Q(x)$ 中的最小平方逼近，也就是使得残差平方和 $S = \sum_{k=1}^{m} [y_k - Q(x_k)]^2$ 最小的多项式是由下列公式给出的(→曲线拟合)

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{S_k} \xi_{k,m}\left(\frac{x-x_1}{h}+1\right), \quad S = \sum_{k=1}^{m} (y_k)^2 - \sum_{k=0}^{m} \frac{B_k^2}{S_k},$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{m} y_i \xi_{k,m}(i), \quad S_k = \sum_{i=1}^{m} [\xi_{k,m}(i)]^2.$$

【参】→公式 16 的[参]

21. 插值法(→插值法)

1) Lagrange 插值多项式†♦

$$f(x) = \sum_{s=0}^{n} f(x_s) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{s-1})(x-x_{s+1})\cdots(x-x_n)}{(x_s-x_0)(x_s-x_1)\cdots(x_s-x_{s-1})(x_s-x_{s+1})\cdots(x_s-x_n)}.$$

Aitken 法†♦. 关于 $y_s = f(x_s)(s = 0, 1, \cdots, n)$ 的插值多项式 $f(x)$ 可由下列过程逐步求出. ($x_0, x_1, \cdots, x_s$ 的顺序是任意的).

$p_{s,0}(x) = y_s \quad (s = 0, 1, \cdots, n)$,

$p_{s,k+1}(x) = [(x_s - x)p_{k,k}(x) - (x_k - x)p_{s,k}(x)]/(x_s - x_k) \quad (s = k+1, k+2, \cdots, n)$,

$f(x) = p_{n,n}(x)$.

2) 等距插值

分点 x_k 依次等距 $h(x_s = x_0 + sh)$ 时，作下列差分表 $(\Delta x = h)$.

前向差分♦

$$\Delta_i \equiv \Delta_i^1 \equiv f_{i+1} - f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i), \quad \Delta_i^s \equiv \Delta_{i+1}^{s-1} - \Delta_i^{s-1}.$$

变量	函数值	差		分		
		(1 次)	(2 次)	(3 次)	(4 次)	···
···	···					
$x_0 - 2\Delta x$	f_{-2}	···	···			
$x_0 - \Delta x$	f_{-1}	Δ_{-2}	Δ_{-2}^2	···	···	
x_0	f_0	Δ_{-1}	Δ_{-1}^2	Δ_{-2}^3	Δ_{-2}^4	···
$x_0 + \Delta x$	f_1	Δ_0	Δ_0^2	Δ_{-1}^3	Δ_{-1}^4	···
$x_0 + 2\Delta x$	f_2	Δ_1	Δ_1^2	Δ_0^3	···	
$x_0 + 3\Delta x$	f_3	Δ_2	···	···		
···	···	···				

后向差分♦ $\quad \bar{\Delta}_i^s \equiv \bar{\Delta}_i^{s-1} - \bar{\Delta}_{i-1}^{s-1} = \Delta_{s-i}^s$.

中心差分♦ $\quad \delta_i^s = \delta_{i+(1/2)}^{s-1} - \delta_{i-(1/2)}^{s-1}, \quad \delta_{i+(s/2)}^s = \Delta_i^s$.

Newton 内插公式†♦(前向型)

$$f(x_0+u\Delta x)=f(x_0)+\frac{u}{1!}\Delta_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta_0^2+\frac{u(u-1)(u-2)}{3!}\Delta_0^3+\frac{u(u-1)(u-2)(u-3)}{4!}\Delta_0^4+\cdots$$

Gauss 内插公式♦(后向型)

$$f(x_0+u\Delta x)=f(x_0)+\frac{u}{1!}\Delta_0+\frac{u(u-1)}{2!}\Delta_{-1}^2+\frac{u(u-1)(u+1)}{3!}\Delta_{-1}^3+\frac{u(u-1)(u+1)(u-2)}{4!}\Delta_{-2}^4+\cdots$$

Stirling 内插公式

$$f(x_0+u\Delta x)=f(x_0)+\frac{u}{1!}\frac{\Delta_{-1}+\Delta_0}{2}+\frac{u^2}{2!}\Delta_{-1}^2+\frac{u(u^2-1)}{3!}\frac{\Delta_{-2}^3+\Delta_{-1}^3}{2}+\frac{u^2(u^2-1)}{4!}\Delta_{-2}^4+\cdots$$

Bessel 内插公式♦

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}+v\Delta x\right)=\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{v}{1!}\Delta_0+\frac{1}{2!}\left(v^2-\frac{1}{4}\right)\frac{\Delta_{-1}^2+\Delta_0^2}{2}+\frac{v}{3!}\left(v^2-\frac{1}{4}\right)\Delta_{-1}^3+\frac{1}{4!}\left(v^2-\frac{1}{4}\right)\left(v^2-\frac{9}{4}\right)\frac{\Delta_{-2}^4+\Delta_{-1}^4}{2}+\cdots$$

Everett 内插公式†♦

$$f(x_0+u\Delta x)=f(x_1-\xi\Delta x)=\xi f(x_0)+\frac{\xi(\xi^2-1)}{3!}\Delta_{-1}^2+\frac{\xi(\xi^2-1)(\xi^2-4)}{5!}\Delta_{-2}^4+\cdots+uf(x_1)+\frac{u(u^2-1)}{3!}\Delta_0^2+\frac{u(u^2-1)(u^2-4)}{5!}\Delta_{-1}^4+\cdots\qquad(\xi=1-u)$$

3) 二变量函数的插值

设 $x_m=x_0+m\Delta x$，$y_n=y_0+n\Delta y$ $(m,n$ 是整数$)$，并规定有限差分如下．

$$\Delta_x(x_0,y_0)\equiv f(x_1,y_0)-f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y(x_0,y_0)\equiv f(x_0,y_1)-f(x_0,y_0),$$
$$\Delta_x^2(x_0,y_0)\equiv\Delta_x(x_1,y_0)-\Delta_x(x_0,y_0)\equiv\delta_x^2(x_1,y_0),$$
$$\Delta_{xy}(x_0,y_0)\equiv\Delta_y(x_1,y_0)-\Delta_y(x_0,y_0)=\Delta_x(x_0,y_1)-\Delta_x(x_0,y_0),$$
$$\Delta_y^2(x_0,y_0)\equiv\Delta_y(x_0,y_1)-\Delta_y(x_0,y_0)\equiv\delta_y^2(x_0,y_1),\ \cdots$$

Newton 公式♦

$$f(x_0+u\Delta x,y_0+v\Delta y)=f(x_0,y_0)+(u\Delta_x+v\Delta_y)(x_0,y_0)+(1/2!)[u(u-1)\Delta_x^2+2uv\Delta_{xy}+v(v-1)\Delta_y^2](x_0,y_0)+\cdots$$

Everett 公式♦　令 $s\equiv1-u$，$t\equiv1-v$，有

$$\begin{aligned}f(x_0+u\Delta x,y_0+v\Delta y)&=stf(x_0,y_0)+svf(x_0,y_1)+utf(x_1,y_0)+uvf(x_1,y_1)\\&-(1/6)[us(1+s)\{t\delta_x^2(x_0,y_0)+v\delta_x^2(x_0,y_1)\}+us(1+u)\{t\delta_x^2(x_1,y_0)\\&+v\delta_x^2(x_1,y_1)\}+vt(1+t)\{s\delta_y^2(x_0,y_0)+u\delta_y^2(x_1,y_0)\}\\&+vt(1+v)\{s\delta_y^2(x_0,y_1)+u\delta_y^2(x_1,y_1)\}]+\cdots\end{aligned}$$

【参】 [1] F. J. Thompson, Table of the coefficients of Everett's central-difference interpolation formula, Tracts for computers, no. V, Cambridge Univ. Press, 1921; [2] M. Lindow, Numerische Infinitesimalrechnung, Dummler, 1928; [3] H. T. Davis, Tables of the higher mathematical functions I, Principia Press, 1933; [4] 林桂一-森口繁一, 高等函数表, 岩波, 修订第二版, 1967.

22. 概率分布(→概率分布,样本分布)

下表中, 1—13, 20—21 分别是一维, k 维的连续分布†, 分布密度†是关于 Lebesgue 测度†的 14—19, 22—24 分别是一维, k 维的离散分布, 密度函数 $P(x)$ 表示点 x 的概率.

	分布名	记号	密度函数	定义域	参数条件
1	正态♦	$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$
2	对数正态♦		$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \frac{1}{y} \exp\left[-\frac{(\log y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$	$0 < y < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$
3	Γ♦	$\Gamma(p, \sigma)$	$[\Gamma(p)]^{-1}\sigma^{-p}x^{p-1}e^{-x/\sigma}$	$0 < x < \infty$	$p, \sigma > 0$
4	指数♦	$e(\mu, \sigma)$	$(1/\sigma)\exp(-(x-\mu)/\sigma)$	$\mu < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$
5	双侧指数		$(1/2\sigma)e^{-\lvert x\rvert/\sigma}$	$-\infty < x < \infty$	$\sigma > 0$
6	χ^2♦	$\chi^2(n)$	$2^{-n/2}[\Gamma(n/2)]^{-1}x^{(n/2)-1}e^{-x/2}$	$0 < x < \infty$	n 是正整数
7	B♦	$B(p, q)$	$[B(p, q)]^{-1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}$	$0 < x < 1$	$p, q > 0$
8	F♦	$F(m, n)$	$2K_F x^{(m/2)-1}[1+(mx/n)]^{-(m+n)/2}$, $K_F \equiv [B(m/2, n/2)]^{-1}(m/n)^{m/2}$	$0 < x < \infty$	m, n 是正整数
9	z♦	$z(m, n)$	$K_F e^{mz}[1+(me^{2z}/n)]^{-(m+n)/2}$, $K_F \equiv [B(m/2, n/2)]^{-1}(m/n)^{m/2}$	$-\infty < z < \infty$	m, n 是正整数
10	t♦	$t(n)$	$[\sqrt{n}B(n/2, 1/2)]^{-1}[1+(t^2/n)]^{-(n+1)/2}$	$-\infty < t < \infty$	n 是正整数
11	Cauchy♦	$C(\mu, \sigma)$	$(\pi\sigma)^{-1}\left[1+\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right]^{-1}$	$-\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$
12	指数 1/2 的单侧稳定♦		$c(2\pi)^{-1/2}x^{-3/2}\exp(-c^2/2x)$	$0 < x < \infty$	$0 < c < \infty$
13	均匀(长方形)♦	$U(\alpha, \beta)$	$1/(\beta-\alpha)$	$\alpha < x < \beta$	$-\infty < \alpha < \beta < \infty$
14	二项	$Bin(n, p)$	$\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$	$x = 0, 1, 2, \cdots, n$	$p+q=1$, $p, q > 0$, n 是正整数
15	Poisson♦	$P(\lambda)$	$e^{-\lambda}\lambda^x/x!$	$x = 0, 1, 2, \cdots$	$\lambda > 0$
16	超几何♦	$H(N, n, p)$	$\binom{Np}{x}\binom{Nq}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$	x 是整数 $0 \leqslant x \leqslant Np$, $0 \leqslant n-x \leqslant Nq$	$p+q=1$, $p, q > 0$, N, Np, n 是正整数 $N \geqslant n$
17	负二项♦	$NB(m, p)$	$\Gamma(m+x)[\Gamma(m)x!]^{-1}p^m q^x$	$x = 0, 1, 2, \cdots$	$p+q=1$, $p, q > 0$, $m > 0$
18	几何♦	$G(p)$	pq^x	$x = 0, 1, 2, \cdots$	$p+q=1$, $p, q > 0$
19	对数♦		$K_L q^x/x$, $K_L \equiv -1/\log p$	$x = 1, 2, 3, \cdots$	$p+q=1$, $p, q > 0$
20	多维正态♦	$N(\mu, \Sigma)$	$(2\pi)^{-k/2}\lvert\Sigma\rvert^{-1/2}$ $\times\exp[-(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)'/2]$, $x=(x_1, \cdots, x_k)$, $\mu=(\mu_1, \cdots, \mu_k)$, $\Sigma=(\sigma_{ij})$	$-\infty < x_1, \cdots, x_k < \infty$	$-\infty < \mu_1, \cdots, \mu_k < \infty$, Σ 是对称正定二次型
21	Dirichlet♦		$\frac{\Gamma(\nu_1+\cdots+\nu_{k+1})}{\Gamma(\nu_1)\cdots\Gamma(\nu_{k+1})}x_1^{\nu_1-1}\cdots x_{k+1}^{\nu_{k+1}-1}$, $x_{k+1} = 1-(x_1+\cdots+x_k)$	$x_1, \cdots, x_k > 0$, $x_1+\cdots+x_k < 1$	$\nu_1, \cdots, \nu_{k+1} > 0$
22	多项♦		$n!(x_1!\cdots x_{k+1}!)^{-1}p_1^{x_1}\cdots p_{k+1}^{x_{k+1}}$, $x_{k+1} = n-(x_1+\cdots+x_k)$	$x_1, \cdots, x_k = 0, 1, \cdots, n$, $x_1+\cdots+x_k \leqslant n$	$p_1+\cdots+p_{k+1} = 1$, $p_1, \cdots, p_{k+1} > 0$ n 是正整数
23	多维超几何♦	$M(n; p_1, \cdots, p_{k+1})$	$\binom{Np_1}{x_1}\cdots\binom{Np_{k+1}}{x_{k+1}}\Big/\binom{N}{n}$, $x_{k+1} = n-(x_1+\cdots+x_k)$	$x_1, \cdots, x_k$ 是整数 $0 \leqslant x_i \leqslant Np_i$ $(i = 1, \cdots, k+1)$	$p_1+\cdots+p_{k+1} = 1$, $p_1, \cdots, p_{k+1} > 0$, $N, Np_1, \cdots, Np_k, n$ 是正整数
24	负多项♦		$\frac{\Gamma(m+x_1+\cdots+x_k)}{\Gamma(m)x_1!\cdots x_k!}p_0^m p_1^{x_1}\cdots p_k^{x_k}$,	$x_1, \cdots, x_k = 0, 1, 2, \cdots$	$p_0+p_1+\cdots+p_k = 1$, $p_0, p_1, \cdots, p_k > 0$, $m > 0$

特征函数†，平均值†，方差†的简单形式如下.

	特征函数	平均值	方差	备注
1	$\exp\left(i\mu t-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)$	μ	σ^2	关于 μ,σ^2 的再生性
2		$e^{\mu+(\sigma^2/2)}$	$e^{2\mu}(e^{2\sigma^2}-e^{\sigma^2})$	$X=\log Y:N(\mu,\sigma^2)$
3	$(1-i\sigma t)^{-p}$	σp	$\sigma^2 p$	关于 p 的再生性
4	$e^{i\mu t}(1-i\sigma t)^{-1}$	$\mu+\sigma$	σ^2	$e(0,\sigma)=\Gamma(1,\sigma)$
5	$(1+\sigma^2t^2)^{-1}$	0	$2\sigma^2$	
6	$(1-2it)^{-n/2}$	n	$2n$	n 是自由度，关于 n 的再生性
7		$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$	
8		$\frac{n}{n-2}(n>2)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{(n-2)^2(n-4)}(n>4)$	m,n 是自由度
9				$e^{2z}=F(m,n)$
10		$0(n>1)$	$n/(n-2)(n>2)$	n 是自由度
11	$\exp(i\mu t-\sigma\|t\|)$	不存在	不存在	$C(0,1)=t(1)$，关于 μ,σ 的再生性
12	$\exp[-c\|t\|^{1/2}(1+it/\|t\|)]$	不存在	不存在	
13	$(e^{i\beta t}-e^{i\alpha t})/it(\beta-\alpha)$	$(\alpha+\beta)/2$	$(\beta-\alpha)^2/12$	
14	$(pe^{it}+q)^n$	np	npq	关于 n 的再生性
15	$\exp[-\lambda(1-e^{it})]$	λ	λ	关于 λ 的再生性
16	$(Nq)^{[n]}(N^{[n]})^{-1}$ $\times F(-n,-Np;Nq-n+1;e^{it})$, $m^{[n]}\equiv m!/(m-n)!$	np	$\frac{npq(N-n)}{N-1}$	
17	$\frac{p^m}{(1-qe^{it})^m}$	$\frac{mq}{p}$	$\frac{mq}{p^2}$	关于 m 的再生性
18	$\frac{p}{1-qe^{it}}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$G(p)=NB(1,p)$
19	$-K_L\log(1-qe^{it})$	K_Lq/p	$K_Lq(1+K_Lq)/p^2$	
20	$\exp\left(i\mu t'-\frac{t\Sigma t'}{2}\right)$, $t=(t_1,\cdots,t_k)$	$E(x_i)=\mu_i$	$V(x_i)=\sigma_{ii}$, $\mathrm{Cov}(x_i,x_j)=\sigma_{ij}$	正态分布的扩张，关于 μ,Σ 的再生性
21		$E(x_i)=\frac{\nu_i}{\nu_1+\cdots+\nu_{k+1}}$	$V(x_i)=C\nu_i(\nu_1+\cdots+\nu_{k+1}-\nu_i)$, $\mathrm{Cov}(x_i,x_j)=-C\nu_i\nu_j$, $C\equiv(\nu_1+\cdots+\nu_{k+1})^{-2}\times(\nu_1+\cdots+\nu_{k+1}+1)^{-1}$	B分布的扩张
22	$(p_1e^{it_1}+\cdots+p_ke^{it_k}+p_{k+1})^n$	$E(x_i)=np_i$	$V(x_i)=np_i(1-p_i)$, $\mathrm{Cov}(x_i,x_j)=-np_ip_j$	二项分布的扩张，关于 n 的再生性
32		$E(x_i)=np_i$	$V(x_i)=Cnp_i(1-p_i)$, $\mathrm{Cov}(x_i,x_j)=-Cnp_ip_j$, $C\equiv\frac{N-n}{N-1}$	超几何分布的扩张
24	$p_0^m(1-p_1e^{it_1}-\cdots-p_ke^{it_k})^m$	$E(x_i)=\frac{mp_i}{p_0}$	$V(x_i)=mp_i(p_0+p_i)/p_0^2$, $\mathrm{Cov}(x_i,x_j)=mp_ip_j/p_0^2$	负二项分布的扩张，关于 m 的再生性

23. 统计推断，假设检验

常用的、容易调查的统计方法列举如下(有关主要的概率分布→统计推断，假设检验，统计判决函数). 除另加说明者外，均采用下列记号和标记方法.

在号码的后面用略号表示分布(关于略号→公式22). 由此分布，观测随机样本† $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 涉及两个分布时，观测 $(x_1, \cdots, x_{n_1})$ 和 $(y_1, \cdots, y_{n_2})$.

其次，以样本为基础的充分必要统计量†，完备时加*号，非完备时加#号. 然后表示这个统计

量†的样本分布†，当统计量由若干个相互独立†的成分组成时，表示各成分的分布．用希腊字母(除α和χ外)表示未知参数†．斜体小写字母表示常数，可取任意实数值．斜体大写字母表示用不同方法确定的常数值，但在同一编号下，同一字母出现两次以上时，表示某一共同的实数值．

其次举出点估计†、区间估计†、假设检验的问题，分别具有估计量†、置信区间†及检验(临界域†)作为它们的解．这里的置信区间是由 UMP 无偏检验构成的，设置信水平†为 $1-\alpha$．在假设检验的问题中备择假设†是假设的否定，检验水平†是 α．附有表示各种方法性质的记号如下．

关于推断

UMV　最小方差无偏†，

ML　似然†，

AD　关于平方损失函数的容许性†，

IAD　关于平方损失函数的非容许性†．

关于检验

UMP　一致最大功效，

UMPU　一致最大功效无偏†，

UMPI　用( )表示关于变换群的积的一致最大功效不变†．

LR　似然比检验†，

O　正交变换群†，

L　平移变换†群，

S　相似变换†群，

AD　关于单损失函数†的容许性†，

IAD　关于单损失函数的非容许性†．

(注：若 UMPU，则必有 AD.)

下列记号表示右侧各个分布的 $100(1-\alpha)\%$ 点，α 是充分小的数．

$u(\alpha)$　标准正态分布，

$t_f(\alpha)$　自由度 f 的 t 分布，

$\chi_f^2(\alpha)$　自由度 f 的 χ^2 分布，

$F_{f_2}^{f_1}(\alpha)$　自由度 (f_1, f_2) 的 F 分布．

1) $N(\mu, b^2)$．$\sum x_i^*$．$N(n\mu, nb^2)$．

μ 的点估计　$\bar{x}=\frac{1}{2}\sum x_i$: UMV, ML, AD.

μ 的区间估计　$\left(\bar{x}\pm u(\alpha/2)\frac{b}{\sqrt{n}}\right)$.

假设 $[\mu\leqslant k]$　$\bar{x}>k+u(\alpha)\frac{b}{\sqrt{n}}$: UMP, LR.

假设 $[h\leqslant\mu\leqslant l]$　$\bar{x}<h-C$ 或 $\bar{x}>l+C$: UMPU, LR.

2) $N(a, \sigma^2)$．$\sum(x_i-a)^{2*}$．$\sigma^2\chi_n^2$．($\sigma^2\chi_n^2$ 是服从 $\chi^2(n)$ 分布的随机变量的 σ^2 倍，下同)．

σ^2 的点估计　$\frac{\sum(x_i-a)^2}{n}$: UMV, ML, IAD.

σ^2 的区间估计　$(A\sum(x_i-a)^2,\ B\sum(x_i-a)^2)$.

假设 $[\sigma^2\leqslant k]$　$\sum(x_i-a)^2>\chi_n^2(\alpha)k$: UMP, LR.

假设 $[\sigma^2=k]$　　$\sum(x_i-a)^2<Ak$ 或 $\sum(x_i-a)^2>Bk$: UMPU.

3) $N(\mu,\sigma^2)$. $\begin{pmatrix}\sum x_i\\ \sum(x_i-\bar{x})^2\end{pmatrix}^*$. $\begin{pmatrix}N(n\mu,n\sigma^2)\\ \sigma^2\chi^2_{n-1}\end{pmatrix}$.

μ的点估计　　$\bar{x}$: UMV, ML, AD.

μ的区间估计　　$\left[\bar{x}\pm t_{n-1}(\alpha/2)\dfrac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{n(n-1)}}\right]$.

假设 $[\mu\leqslant k]$.　　$\dfrac{\bar{x}-k}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}>\dfrac{t_{n-1}(\alpha)}{\sqrt{n(n-1)}}$: UMPU, LR.

假设 $[\mu=k]$.　　$\dfrac{|\bar{x}-k|}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}>\dfrac{t_{n-1}(\alpha/2)}{\sqrt{n(n-1)}}$: 当 $k=0$ 时，UMPU, LR, UMPI(S, O).

σ^2的点估计　　$\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$: UMV, IAD. $\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$: ML, IAD.

σ的点估计　　$\dfrac{\Gamma[(n-1)/2]}{\sqrt{2}\,\Gamma(n/2)}\sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}$: UMV, IAD.

σ^2的区间估计　　$(A\sum(x_i-\bar{x})^2,\ B\sum(x_i-\bar{x})^2)$.

假设 $[\sigma^2\leqslant k]$　　$\sum(x_i-\bar{x})^2>\chi^2_{n-1}(\alpha)k$: UMP, LR.

假设 $[\sigma^2=k]$　　$\sum(x_i-\bar{x})^2<Ak$ 或 $\sum(x_i-\bar{x})^2>Bk$: UMPU.

假设 $[\sigma^2\geqslant k]$　　$\sum(x_i-\bar{x})^2<\chi^2_{n-1}(1-\alpha)k$: UMPU, UMPI(L).

假设 $\left[\dfrac{\mu}{\sigma}\leqslant k\right]$　　$\dfrac{\bar{x}}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}>E$: UMPI(S), AD.

4) $Bin(N,\theta)$. $\sum x_i^*$. $Bin(Nn,\theta)$.

θ的点估计　　$\dfrac{\bar{x}}{N}$: UMV, ML, AD.

假设 $[\theta\leqslant k]$　　$\bar{x}>A$: UMP.

假设 $[h\leqslant\theta\leqslant l]$　　$\bar{x}<B$ 或 $\bar{x}>C$: UMPU.

5) $H(N,m,\theta)(n=1)$. x^*.

θ的点估计　　$\dfrac{N_x}{m}$: UMV, AD.

假设 $[\theta\leqslant k]$　　$x>A$: UMP.

6) $NB(N,\theta)$. $\sum x_i^*$. $NB(Nn,\theta)$.

θ的点估计　　$\dfrac{Nn-1}{Nn+\sum x_i-1}$ (当分母是 0 时，为 1): UMV, AD.

$\dfrac{Nn}{Nn+\sum x_i}$: ML.

假设 $[\theta\leqslant k]$　　$\sum x_i<A$: UMP.

假设 $[h\leqslant\theta\leqslant l]$　　$\sum x_i<B$ 或 $\sum x_i>C$: UMPU.

7) $P(\lambda)$. $\sum x_i^*$. $P(n\lambda)$.

λ的点估计　　$\bar{x}$: UMV, ML, AD.

假设 $[\lambda\leqslant k]$　　$\bar{x}>A$: UMP.

假设 $[h\leqslant\lambda\leqslant l]$　　$\bar{x}<B$ 或 $\bar{x}>C$: UMPU.

8) $G(\theta)$. $\sum x_i^*$. $NB(n,\theta)$.

θ的点估计，假设检验 → 6)

9) $U[0,\theta]$. $\max x_i^*$.

θ的点估计 $\max x_i$: ML, IAD. $\frac{n+1}{n}\max x_i$: UMV, IAD.

假设 $[\theta \leqslant k]$ $\max x_i > (1-\alpha)^{1/n}k$: UMP.

假设 $[\theta = k]$ $\max x_i < k\alpha^{1/n}$ $\max x_i > k$: UMP.

10) $U[\xi,\eta]$. $(\min x_i, \max x_i)^*$.

ξ的点估计 $\frac{n\min x_i - \max x_i}{n-1}$: UMV, IAD. $\min x_i$: ML, IAD.

$\frac{\xi+\eta}{2}$的点估计 $\frac{\min x_i + \max x_i}{2}$: UMV, AD.

假设 $[\eta-\xi \leqslant k]$ $\max x_i - \min x_i > k\alpha^{1/n}$: UMP.

11) $U\left[\theta-\frac{1}{2}, \theta+\frac{1}{2}\right]$. $(\min x_i, \max x_i)^\#$.

θ的点估计 $\frac{\min x_i + \max x_i}{2}$: ML, AD.

假设 $[\theta \leqslant k]$ $\min x_i > k+\frac{1}{2}-\alpha^{1/n}$ 或 $\max x_i > k+\frac{1}{2}$: UMP.

12) $e(\mu,\sigma)$. $\begin{pmatrix}\sum x_i \\ \min x_i\end{pmatrix}^*$. $\begin{pmatrix}\Gamma(n,\sigma)+n\mu \\ e(\mu,\sigma/n)\end{pmatrix}$.

σ的点估计 $\frac{\sum x_i - n\min x_i}{n-1}$: UMV, IAD. $\bar{x}-\min x_i$: ML, IAD.

μ的点估计 $\frac{n}{n-1}\min x_i - \frac{1}{n-1}\bar{x}$: UMV, IAD. $\min x_i$: ML, IAD.

假设 $[\sigma \leqslant k, \mu = h]$ $\sum x_i < h$ 或 $\sum x_i > k\log\alpha^{-1/n} + h$: UMP.

假设 $[h \leqslant \sigma \leqslant l]$ $\sum x_i - n\min x_i < A$ 或 $\sum x_i - n\min x_i > B$: UMPU.

假设 $[\mu = k]$ $\frac{n\min x_i - k}{\sum x_i - n\min x_i} < 0$ 或 $\frac{n\min x_i - k}{\sum x_i - n\min x_i} > C$: UMPU.

13) $\Gamma(p,\sigma)$. $\sum x_i^*$. $\Gamma(np,\sigma)$.

σ的点估计 $\frac{\bar{x}}{p}$: UMV, ML, IAD.

σ的区间估计 $(C\sum x_i, D\sum x_i)$.

假设 $[\sigma \leqslant k]$ $\sum x_i > A$: UMP.

假设 $[\sigma = k]$ $\sum x_i < Ck$ 或 $\sum x_i > Dk$: UMPU.

14) $\begin{matrix}N(\mu_1,a^2) \\ N(\mu_2,b^2)\end{matrix}$. $\begin{pmatrix}\sum x_i \\ \sum y_i\end{pmatrix}^*$. $\begin{pmatrix}N(n_1\mu_1, n_1a^2) \\ N(n_2\mu_2, n_2b^2)\end{pmatrix}$.

$\mu_1-\mu_2$的点估计 $\bar{x}-\bar{y}$: UMV, ML, AD.

$\mu_1-\mu_2$的区间估计 $\left(\bar{x}-\bar{y}\pm\mu(\alpha/2)\sqrt{\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}}\right)$.

假设 $[\mu_1-\mu_2 \leqslant k]$ $\bar{x}-\bar{y} > +u(\alpha)\sqrt{\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}}$: UMP, LR.

假设 $[\mu_1-\mu_2=k]$ $\quad |\bar{x}-\bar{y}-k|>u(\alpha/2)\sqrt{\frac{a^2}{n_1}+\frac{b^2}{n_2}}$: UMPU, UMPI(L), LR.

15) $\begin{matrix}N(\mu_1,\sigma^2)\\ N(\mu_2,\sigma^2).\end{matrix}$ $\begin{bmatrix}\sum x_i\\ \sum y_i\\ s^2=\sum(x_i-\bar{x})^2+\sum(y_i-\bar{y})^2\end{bmatrix}^*$. $\begin{bmatrix}N(n_1\mu_1,n_1\sigma^2)\\ N(n_2\mu_2,n_2\sigma^2)\\ \sigma^2\chi^2_{n_1+n_2-2}\end{bmatrix}$.

$\mu_1-\mu_2$ 的点估计 $\quad \bar{x}-\bar{y}$: UMV, ML, AD.

$\mu_1-\mu_2$ 的区间估计 $\quad \left(\bar{x}-\bar{y}\pm t_{n_1+n_2-2}(\alpha/2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\sqrt{\frac{s^2}{n_1+n_2-2}}\right)$.

假设 $[\mu_1-\mu_2\leqslant k]$ $\quad t=\frac{(\bar{x}-\bar{y}-k)\sqrt{n_1n_2}\sqrt{n_1+n_2-2}}{\sqrt{n_1+n_2}\sqrt{s^2}}>t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$: UMPU, UMPI(L), LR.

假设 $[\mu_1-\mu_2=k]$ $\quad |t|>t_{n_1+n_2-2}(\alpha)$: UMPU, UMPI(L), LR.

σ^2 的点估计 $\quad \frac{s^2}{n_1+n_2-2}$: UMV, IAD. $\frac{s^2}{n_1+n_2}$: ML, IAD.

σ^2 的区间估计 $\quad (As^2,\ Bs^2)$.

假设 $[\sigma^2\leqslant k]$ $\quad s^2>\chi^2_{n_1+n_2-2}(\alpha)k$: UMP, LR.

假设 $[\sigma^2=k]$ $\quad s^2<Ak$ 或 $s^2>Bk$: UMPU.

假设 $[\sigma^2\geqslant k]$ $\quad s^2>\chi^2_{n_1+n_2-2}(1-\alpha)k$: UMPU, UMPI(L), LR.

16) $\begin{matrix}N(\mu_1,\sigma_1^2)\\ N(\mu_2,\sigma_2^2).\end{matrix}$ $\begin{bmatrix}\sum x_i,\ \sum(x_i-\bar{x})^2\\ \sum y_i,\ \sum(y_i-\bar{y})^2\end{bmatrix}^*$.

$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的区间估计 $\quad \left[A\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2},\ B\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}\right]$.

假设 $\left[\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\leqslant k\right]$ $\quad \frac{(n_2-1)}{(n_1-1)}\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}>F^{n_1-1}_{n_2-1}(\alpha)k$: UMPU, UMPI(L, S), LR.

17) $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$. $\begin{bmatrix}\sum x_i,\ \sum(x_i-\bar{x})^2, & \sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\\ \sum y_i,\ \sum(y_i-\bar{y})^2, & \end{bmatrix}^*$.

ρ 的点估计 $\quad r=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}}$: ML.

假设 $[\rho=0]$ $\quad |r|>\frac{t_{n-1}(\alpha/2)}{\sqrt{t_{n-1}(\alpha/2)^2+n-2}}$: UMPU, LR.

数 表

1. 素数与原根(→初等数论)

p 为素数[†♦]，r 为原根[†♦].

p	r	p	r	p	r	p	r	p	r	p	r	p	r	p	r
2		79	29	191	21	311	301	439	429	577	10	709	10	857	10
3	2	83	50	193	10	313	10	443	433	587	577	719	709	859	2
5	2	89	30	197	2	317	2	449	3	593	10	727	10	863	10
7	3	97	10	199	3	331	3	457	15	599	589	733	6	877	2
11	2	101	2	211	2	337	10	461	10	601	11	739	3	881	3
13	6	103	20	223	10	347	337	463	3	607	3	743	10	883	873
17	10	107	2	227	217	349	2	467	457	613	2	751	3	887	10
19	10	109	10	229	10	353	20	479	469	617	3	757	2	907	2
23	10	113	10	233	10	359	349	487	10	619	10	761	11	911	901
29	10	127	3	239	237	367	10	491	10	631	621	769	11	919	909
31	17	131	10	241	7	373	2	499	10	641	3	773	2	929	3
37	5	137	20	251	30	379	10	503	10	643	11	787	777	937	10
41	6	139	2	257	10	383	10	509	10	647	10	797	2	941	10
43	28	149	10	263	10	389	10	521	3	653	2	809	3	947	937
47	10	151	6	269	10	397	20	523	513	659	10	811	10	953	10
53	26	157	20	271	269	401	3	541	10	661	2	821	10	967	5
59	10	163	2	277	20	409	21	547	2	673	5	823	10	971	10
61	10	167	10	281	3	419	10	557	2	677	2	827	817	977	10
67	12	173	2	283	273	421	2	563	553	683	673	829	2	983	10
71	62	179	10	293	2	431	421	569	3	691	3	839	829	991	981
73	5	181	10	307	297	433	10	571	10	701	10	853	2	997	11

Mersenne 数[†]. 形如 2^p-1 的素数称为 Mersenne 数.

在 $p<11400$ 的范围内,存在下列 23 个 Mersenne 数:

$p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281,$
$3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213.$

偶数的完全数[†]只有 $2^{p-1}(2^p-1)$ (2^p-1 是 Mersenne 数).

2. 指数表(→初等数论)

以素数 p 的原根[†] r 为底，真数 a 的指数[†♦] $l=\mathrm{Ind}_r a$ 是满足 $r^l\equiv a \pmod p$ 的在 $0\leqslant l<$

$p-1$ 中的整数 l.

$a \equiv b \pmod{p}$ 和 $\mathrm{Ind}_r\, a \equiv \mathrm{Ind}_r\, b \pmod{(p-1)}$ 是等价的.

指数关于 $\bmod\,(p-1)$ 满足同余式

$\mathrm{Ind}_r\, ab \equiv \mathrm{Ind}_r\, a + \mathrm{Ind}_r\, b$,

$\mathrm{Ind}_r\, a^n \equiv n\, \mathrm{Ind}_r\, a$,

$\mathrm{Ind}_s\, a \equiv \mathrm{Ind}_s\, r\, \mathrm{Ind}_r\, a$.

用这些关系能解同余式. 下面给出指数表.

p	$p-1$	r	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
2	1		—														
3	2	2	1	—													
5	4	2	1	3	—												
7	2.3	3	2	1	5	—											
11	2.5	2	1	8	4	7	—										
13	4.3	6	5	8	9	7	11	—									
17	16	10	10	11	7	9	13	12	—								
19	2.9	10	17	5	2	12	6	13	8	—							
23	2.11	10	8	20	15	21	3	12	17	5	—						
29	4.7	10	11	27	18	20	23	2	7	15	24	—					
31	2.3.5	17	12	13	20	4	29	23	1	22	21	27	—				
37	4.9	5	11	34	1	28	6	13	5	25	21	15	27	—			
41	8.5	6	26	15	22	39	3	31	33	9	36	7	28	32	—		
43	2.3.7	28	39	17	5	7	6	40	16	29	20	25	32	35	18	—	
47	2.23	10	30	18	17	38	27	3	42	29	39	43	5	24	25	37	—
53	4.13	26	25	9	31	38	46	28	42	41	39	6	45	22	33	30	8
59	2.29	10	25	32	34	44	45	23	14	22	27	4	7	41	2	13	53
61	4.3.5	10	47	42	14	23	45	20	49	22	39	25	13	33	18	41	40
67	2.3.11	12	29	9	39	7	61	23	8	26	20	22	43	44	19	63	64
71	2.5.7	62	58	18	14	33	43	27	7	38	5	4	13	30	55	44	17
73	8.9	5	8	6	1	33	55	59	21	62	46	35	11	64	4	51	31
79	2.3.13	29	50	71	34	19	70	74	9	10	52	1	76	23	21	47	55
83	2.41	50	3	52	81	24	72	67	4	59	16	36	32	60	38	49	69
89	8.11	30	72	87	18	7	4	65	82	53	31	29	57	77	67	59	34
97	32.3	10	86	2	11	53	82	83	19	27	79	47	26	41	71	44	60
101	4.25	2	1	69	24	9	13	66	30	96	86	91	84	56	45	42	58
103	2.3.17	6	46	57	59	32	29	66	50	28	90	76	99	81	94	55	17

p	$p-1$	r	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
107	2.53	63	95	78	13	57	76	58	105	96	60	72	21	6	90	93	16
109	4.27	10	93	28	16	88	107	7	21	3	105	10	74	65	45	66	5
113	16.7	10	52	79	61	72	22	58	59	93	103	87	30	29	34	17	97
127	2.9.7	109	18	23	111	125	52	20	118	42	11	79	50	112	76	121	120
131	2.5.13	10	83	126	48	38	98	64	59	45	89	73	67	23	58	22	5
137	8.17	12	130	13	23	2	90	53	86	54	129	95	133	102	51	37	111
139	2.3.23	92	119	49	22	16	74	26	37	83	39	8	40	136	82	23	70
149	4.37	10	117	115	32	38	25	133	4	60	15	128	52	136	61	77	14
151	2.3.25	114	70	141	82	37	34	101	88	90	115	54	58	76	111	38	86
157	4.3.13	139	147	122	11	57	152	130	128	116	81	15	58	28	75	151	76
163	2.81	70	71	43	93	161	97	57	159	127	153	145	39	75	20	106	44
167	2.83	10	86	144	81	96	110	43	143	50	51	32	152	127	55	75	68
173	4.43	91	13	7	163	31	127	142	89	85	88	152	122	42	74	60	144
179	2.89	10	73	52	106	23	27	134	14	26	65	70	76	19	101	144	136
181	4.9.5	10	133	68	48	15	146	32	55	135	29	84	27	38	59	140	109
191	2.5.19	157	102	148	90	133	115	156	184	93	112	29	125	65	145	174	39
193	64.3	10	182	156	11	184	93	15	149	59	54	9	134	55	125	72	127
197	4.49	73	61	65	137	86	5	153	95	182	68	40	173	148	46	54	106
199	2.9.11	197	194	155	6	32	189	128	57	11	74	158	76	121	145	176	98
211	2.3.5.7	142	169	127	48	181	78	186	31	196	189	11	115	202	143	80	166
223	2.3.37	10	18	137	205	132	7	159	192	32	131	220	134	178	198	182	190
227	2.113	217	179	98	161	220	40	71	93	222	210	76	7	223	171	182	150
229	4.3.19	10	27	224	202	181	78	183	12	64	227	143	211	44	217	120	49
233	8.29	10	200	93	33	230	225	78	67	120	208	212	222	48	17	5	167
239	2.7.17	237	120	48	186	229	202	89	8	33	147	226	212	197	61	103	173
241	16.3.5	112	110	22	138	41	65	7	231	125	177	74	191	113	6	99	114
251	2.125	224	195	42	60	26	7	134	38	131	188	171	82	59	198	39	95
257	256	10	80	87	177	227	156	6	200	123	132	242	62	109	117	89	187
263	2.131	10	156	110	107	69	208	84	120	147	186	67	142	112	247	234	143
269	4.67	10	109	89	160	195	146	202	189	187	156	15	91	208	91	82	4
271	2.27.5	269	136	63	80	178	112	165	266	171	15	225	12	22	96	101	183
277	4.3.23	199	57	148	83	170	29	210	269	216	152	70	37	45	246	149	154
281	8.5.7	117	44	51	246	42	23	179	66	71	247	92	82	165	53	12	185

3. 阶　乘

n	$n!$	$1/n!$
1	1	1
2	2	0.5
3	6	0.1666666666666666666
4	24	0.0416666666666666666
5	120	0.0083333333333333333
6	720	0.0013888888888888888
7	5040	0.0001984126984126984
8	40320	0.0000248015873015873
9	362880	0.0000027557319223985
10	3628800	0.0000002755731922398
11	39916800	0.0000000250521083854
12	479001600	0.0000000020876756987
13	6227020800	0.0000000001605904383
14	87178291200	0.0000000000114707455
15	1307674368000	0.0000000000007647163
16	20922789888000	0.0000000000000477947
17	355687428096000	0.0000000000000028114
18	6402373705728000	0.0000000000000001561
19	121645100408832000	0.82206×10^{-17}
20	2432902008176640000	0.41103×10^{-18}

$n! = a \times 10^{e}$.

n	a	e
25	1.5511	25
30	2.6525	32
35	1.0333	40
40	8.1592	47
45	1.1962	56
50	3.0414	64
60	8.3210	81
70	1.1979	100
80	7.1569	118
90	1.4857	138
100	9.3326	157
120	6.6895	198
140	1.3462	241
160	4.7147	284
180	2.0090	329
200	7.8866	374
220	2.2839	421
240	4.0679	468

4. 二项式系数

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

n \ N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2		1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190
3			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1140
4				1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845
5					1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504
6						1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760
7							1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520
8								1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	125970
9									1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960
10										1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756
11											1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960
12												1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	125970
13													1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
14														1	15	120	680	3060	11628	38760
15															1	16	136	816	3876	15504
16																1	17	153	969	4845
17																	1	18	171	1140
18																		1	19	190
19																			1	20
20																				1

5. Bernoulli 数和 Euler 数

B_n 是 Bernoulli 数[†◆], E_n 是 Euler 数[†◆].

n	B_n 的分子	B_n 的分母	B_n	E_n
2	1	6	0.16667	1
4	1	30	0.03333	5
6	1	42	0.02381	61
8	1	30	0.03333	1385
10	5	66	0.07576	50521
12	691	2730	0.25311	2702765
14	7	6	1.16667	199360981
16	3617	510	7.09216	19391512145
18	43867	798	54.97118	2404879675441
20	174611	330	529.12424	370371188237525
22	854513	138	6192.12319	6.934887×10^{16}
24	236364091	2730	86580.25311	1.551453×10^{19}
26	8553103	6	1425517.16667	4.087073×10^{21}
28	23749461029	870	27298231.06782	1.252260×10^{24}
30	8615841276005	14322	601580873.90064	4.415439×10^{26}

6. 幂

n	2^n	n	2^n	n	2^n	n	2^n
1	2	11	2048	21	2097152	31	2147483648
2	4	12	4096	22	4194304	32	4294967296
3	8	13	8192	23	8388608	33	8589934592
4	16	14	16384	24	16777216	34	17179869184
5	32	15	32768	25	33554432	35	34359738368
6	64	16	65536	26	67108864	36	68719476736
7	128	17	131072	27	134217728	37	137438953472
8	256	18	262144	28	268435456	38	274877906944
9	512	19	524288	29	536870912	39	549755813888
10	1024	20	1048576	30	1073741824	40	1099511627776

n	3^n	4^n	5^n	6^n	7^n	8^n	9^n
1	3	4	5	6	7	8	9
2	9	16	25	36	49	64	81
3	27	64	125	216	343	512	729
4	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969
8	6561	65536	390625	1679616	5764801	16777216	43046721
9	19683	262144	1953125	10077696	40353607	134217728	387420489
10	59049	1048576	9765625	60466176	282475249	1073741824	3486784401

2，10 的小数幂→数表 10

7. 代数数域的类数

I) 实二次域的类域(→二次域的数论)

设 $k=Q(\sqrt{m})$，其中 m 是不含平方因子的正整数 $(1<m\leqslant 501)$，h 是 k 的（广义的）类数[†]，$N(\varepsilon)$ 列中的符号一表示基本单元[†]的范数 $N(\varepsilon)$ 是 -1. 当 $N(\varepsilon)=+1$ 时狭义的类数是 $2h$，当 $N(\varepsilon)=-1$ 时狭义的类数是 h.

m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$
2	1	—	51	2		101	1	—	149	1	—	199	1		247	2	
3	1		53	1	—	102	2		151	1		201	1		249	1	
5	1	—	55	2		103	1		154	2		202	2	—	251	1	
6	1		57	1		105	2		155	2		203	2		253	1	
7	1		58	2	—	106	2	—	157	1	—	205	2		254	3	
10	2	—	59	1		107	1		158	1		206	1		255	4	
11	1		61	1	—	109	1	—	159	2		209	1		257	3	—
13	1	—	62	1		110	2		161	1		210	4		258	2	
14	1		65	2	—	111	2		163	1		211	1		259	2	
15	2		66	2		113	1	—	165	2		213	1		262	1	
17	1	—	67	1		114	2		166	1		214	1		263	1	
19	1		69	1		115	2		167	1		215	2		265	2	—
21	1		70	2		118	1		170	4	—	217	1		266	2	
22	1		71	1		119	2		173	1	—	218	2	—	267	2	
23	1		73	1	—	122	2	—	174	2		219	4		269	1	—
26	2	—	74	2	—	123	2		177	1		221	2		271	1	
29	1	—	77	1		127	1		178	2		222	2		273	2	
30	2		78	2		129	1		179	1		223	3		274	4	—
31	1		79	3		130	4	—	181	1	—	226	8	—	277	1	—
33	1		82	4	—	131	1		182	2		227	1		278	1	
34	2		83	1		133	1		183	2		229	3	—	281	1	—
35	2		85	2	—	134	1		185	2	—	230	2		282	2	
37	1	—	86	1		137	1	—	186	2		231	4		283	1	
38	1		87	2		138	2		187	2		233	1	—	285	2	
39	2		89	1	—	139	1		190	2		235	6		286	2	
41	1	—	91	2		141	1		191	1		237	1		287	2	
42	2		93	1		142	3		193	1	—	238	2		290	4	—
43	1		94	1		143	2		194	2		239	1		291	4	
46	1		95	2		145	4	—	195	4		241	1	—	293	1	—
47	1		97	1	—	146	2		197	1	—	246	2		295	2	

m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$	m	h	$N(\varepsilon)$
298	2	—	330	4		370	4	—	402	2		435	4		467	1	
299	2		331	1		371	2		403	2		437	1		469	3	
301	1		334	1		373	1	—	406	2		438	4		470	2	
302	1		335	2		374	2		407	2		439	5		471	2	
303	2		337	1	—	377	2		409	1	—	442	8	—	473	3	
305	2		339	2		379	1		410	4		443	3		474	2	
307	1		341	1		381	1		411	2		445	4	—	478	1	
309	1		345	2		382	1		413	1		446	1		479	1	
310	2		346	6	—	383	1		415	2		447	2		481	2	—
311	1		347	1		385	2		417	1		449	1	—	482	2	
313	1	—	349	1	—	386	2		418	2		451	2		483	4	
314	2	—	353	1	—	389	1	—	419	1		453	1		485	2	—
317	1	—	354	2		390	4		421	1	—	454	1		487	1	
318	2		355	2		391	2		422	1		455	4		489	1	
319	2		357	2		393	1		426	2		457	1	—	491	1	
321	3		358	1		394	2	—	427	6		458	2	—	493	2	—
322	4		359	3		395	2		429	2		461	1	—	494	2	
323	4		362	2	—	397	1	—	430	2		462	4		497	1	
326	3		365	2	—	398	1		431	1		463	1		498	2	
327	2		366	2		399	8		433	1	—	465	2		499	5	
329	1		367	1		401	5	—	434	4		466	2		501	1	

对于 $m<100$ 的基本单元和理想类的代表的表可在高木貞治著的初等整数論講義(共立出版,1931) p. 474—476 找到.

II) 虚二次域的类数(→二次域的数论)

设 $k=Q(\sqrt{-m})$,其中 m 是不含平方因子的正整数 ($1\leqslant m\leqslant 509$),$h$ 是 k 的类数[†](此时无狭义和广义的区别).

m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h
1	1	11	1	22	2	34	4	43	1	58	2	69	8	79	5
2	1	13	2	23	3	35	2	46	4	59	3	70	4	82	4
3	1	14	4	26	6	37	2	47	5	61	6	71	7	83	3
5	2	15	2	29	6	38	6	51	2	62	8	73	4	85	4
6	2	17	4	30	4	39	4	53	6	65	8	74	10	86	10
7	1	19	1	31	3	41	8	55	4	66	8	77	8	87	6
10	2	21	4	33	4	42	4	57	4	67	1	78	4	89	12

m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h	m	h
91	2	143	10	197	10	249	12	302	12	357	8	409	16	458	26
93	4	145	8	199	9	251	7	303	10	358	6	410	16	461	30
94	8	146	16	201	12	253	4	305	16	359	19	411	6	462	8
95	8	149	14	202	6	254	16	307	3	362	18	413	20	463	7
97	4	151	7	203	4	255	12	309	12	365	20	415	10	465	16
101	14	154	8	205	8	257	16	310	8	366	12	417	12	466	8
102	4	155	4	206	20	258	8	311	19	367	9	418	8	467	7
103	5	157	6	209	20	259	4	313	8	370	12	419	9	469	16
105	8	158	8	210	8	262	6	314	26	371	8	421	10	470	20
106	6	159	10	211	3	263	13	317	10	373	10	422	10	471	16
107	3	161	16	213	8	265	8	318	12	374	28	426	24	473	12
109	6	163	1	214	6	266	20	319	10	377	16	427	2	474	20
110	12	165	8	215	14	267	2	321	20	379	3	429	16	478	8
111	8	166	10	217	8	269	22	322	8	381	20	430	12	479	25
113	8	167	11	218	10	271	11	323	4	382	8	431	21	481	16
114	8	170	12	219	4	273	8	326	22	383	17	433	12	482	20
115	2	173	14	221	16	274	12	327	12	385	8	434	24	483	4
118	6	174	12	222	12	277	6	329	24	386	20	435	4	485	20
119	10	177	4	223	7	278	14	330	8	389	22	437	20	487	7
122	10	178	8	226	8	281	20	331	3	390	16	438	8	489	20
123	2	179	5	227	5	282	8	334	12	391	14	439	15	491	9
127	5	181	10	229	10	283	3	335	18	393	12	442	8	493	12
129	12	182	12	230	20	285	16	337	8	394	10	443	5	494	28
130	4	183	8	231	12	286	12	339	6	395	8	445	8	497	24
131	5	185	16	233	12	287	14	341	28	397	6	446	32	498	8
133	4	186	12	235	2	290	20	345	8	398	20	447	14	499	3
134	14	187	2	237	12	291	4	346	10	399	16	449	20	501	16
137	8	190	4	238	8	293	18	347	5	401	20	451	6	502	14
138	8	191	13	239	15	295	8	349	14	402	16	453	12	503	21
139	3	193	4	241	12	298	6	353	16	403	2	454	14	505	8
141	8	194	20	246	12	299	8	354	16	406	16	455	20	506	28
142	4	195	4	247	6	301	8	355	4	407	16	457	8	509	30

对于 $m < 100$ 理想类群[†]的构造及各理想类的代表的表在高木貞治著的初等整数論講義(共立出版，1931) p. 477—483 中找到.

III) 分圆域的类数

1) 分圆域 $k = \boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/l})$ ($1 < l < 100$; l 是素数). h_1 是 k 的类数[†]的第一因子[†](→代数数域的

数论).

l	h_1	l	h_1	l	h_1	l	h_1	l	h_1	l	h_1
3	1	13	1	29	2^3	43	211	61	$41\cdot1861$	79	$5\cdot53\cdot377911$
5	1	17	1	31	3^2	47	$5\cdot139$	67	$67\cdot12739$	83	$3\cdot279405653$
7	1	19	1	37	37	53	4889	71	$7^2\cdot79241$	89	$113\cdot118401449$
11	1	23	3	41	11^2	59	$3\cdot59\cdot233$	73	$89\cdot134353$	97	$577\cdot3457\cdot206209$

2) 216 个非正则素数 $l(1<l\leqslant4001)$ [即 $k=\boldsymbol{Q}(e^{2\pi i/l})$ 的类数(或其第一因子)可被 l 整除时]以及分子可被 l 整除的 Bernoulli 数[†] B_{2a} 的 $2a(2\leqslant 2a<l-3)$ (→Fermat 问题).

l	$2a$	l	$2a$	l	$2a$	l	$2a$	l	$2a$	l	$2a$	l	$2a$	l	$2a$
37	32	541	86	811	544	1319	304	1879	1260	2381	2060	2939	332, 1102, 2748	3539	2082, 2130
59	44	547	270, 486	821	744	1327	466	1889	242	2383	842, 2278	2957	138, 788	3559	344, 1592
67	58	557	222	827	102	1367	234	1901	1722	2389	776	2999	776	3581	1466
101	68	577	52	839	66	1409	358	1933	1058, 1320	2411	2126	3011	1496	3583	1922
103	24	587	90, 92	877	868	1429	996	1951	1656	2423	290, 884	3023	2020	3593	360, 642
131	22	593	22	881	162	1439	574	1979	148	2441	366, 1750	3049	700	3607	1976
149	130	607	592	887	418	1483	224	1987	510	2503	1044	3061	2522	3613	2082
157	62, 110	613	522	929	520, 820	1499	94	1993	912	2543	2374	3083	1450	3617	16, 2856
233	84	617	20, 174, 338	953	156	1523	1310	1997	772, 1888	2557	1464	3089	1706	3631	1104
257	164	619	428	971	166	1559	862	2003	60, 600	2579	1730	3119	1704	3637	2526, 3202
263	100	631	80, 226	1061	474	1609	1356	2017	1204	2591	854, 2574	3181	3142	3671	1580
271	84	647	236, 242, 554	1091	888	1613	172	2039	1300	2621	1772	3203	2368	3677	2238
283	20	653	48	1117	794	1619	560	2053	1932	2633	1416	3221	98	3697	1884
293	156	659	224	1129	348	1621	980	2087	376, 1298	2647	1172	3229	1634	3779	2362
307	88	673	408, 502	1151	534, 784, 968	1637	718	2099	1230	2657	710	3257	922	3797	1256
311	292	677	628	1153	802	1663	270	2111	1038	2663	1244	3313	2222	3821	3296
347	280	683	32	1193	262	1669	388, 1086	2137	1624	2671	404, 2394	3323	3292	3833	1840, 1998, 3286
353	186, 300	691	12, 200	1201	676	1721	30	2143	1916	2689	926	3329	1378	3851	216, 404
379	100, 174	727	378	1217	784, 866, 1118	1733	810, 942	2153	1832	2753	482	3391	2232, 2534	3853	748
389	200	751	290	1229	784	1753	712	2213	154	2767	2528	3407	2076, 2558	3881	1686, 2138
401	382	757	514	1237	874	1759	1520	2239	1826	2777	1600	3433	1300	3917	1490
409	126	761	260	1279	518	1777	1192	2267	2234	2789	1984, 2154	3469	1174	3967	106
421	240	773	732	1283	510	1787	1606	2273	876, 2166	2791	2554	3491	2544	3989	1936
433	366	797	220	1291	206, 824	1789	848, 1442	2293	2040	2833	1832	3511	1416, 1724	4001	534
461	196	809	330, 628	1297	202, 220	1811	550, 698, 1520	2309	1660, 1772	2857	98	3517	1836, 2586		
463	130			1301	176	1831	1274	2357	2204	2861	352	3529	3490		
467	94, 194			1307	382, 852	1847	954, 1016, 1558	2371	242, 2274	2909	400, 950	35[illegible]	2314, 3136		
491	292, 336, 338					1871	1794	2377	1226	2927	242				
523	400														

8. 有限群的群特征标

I) 对称群† S_n，交代群† $A_n(3 \leqslant n \leqslant 7)$，Mathieu 群† $M_n(n=11, 12, 22, 23, 24)$

1) 各表的第一列给出了由循环置换的积表示置换的共轭类†的表示法. 例如，$(3)(2)^2$ 表示含有 $(123)(45)(67)$ 的共轭类.

2) 第二列给出各共轭类的元素的中心化子†的阶数†.

3) 在 S_n 的表中，第一行给出了对应各不可约特征标的 Young 图形†的类型. 例如，$[3, 2^2, 1]$ 表示 $T(3, 2, 2, 1)$.

4) 在 A_n 的表中，当把 S_n 的自共轭特征标(代有 * 号的特征标)限制到 A_n 时，它被分解为两个相互代数共轭的不可约特征标，因此我们表示出其中的一个. A_n 的其他的不可约特征标可由把 S_n 的非自共轭的特征标限制到 A_n 得到.

5) 在 M_n 的表中，在次数上代有一号的特征标是两个相互代数共轭特征标中的一个.

$\varepsilon_1^{\pm}=(-1 \pm \sqrt{-3})/2$, $\varepsilon_2^{\pm}=(1 \pm \sqrt{5})/2$, $\varepsilon_3^{\pm}=(-1 \pm \sqrt{-7})/2$

$\varepsilon_4^{\pm}=(-1 \pm \sqrt{-11})/2$, $\varepsilon_5^{\pm}=(-1 \pm \sqrt{-15})/2$, $\varepsilon_6^{\pm}=(-1 \pm \sqrt{-23})/2$

S_3		[3]	[2, 1]*	[1³]
(1)	6	1	2	1
(2)	2	1	0	−1
(3)	3	1	−1	1

A_3		[2, 1]*
(1)	3	1
(3)	3	ε_1^+
(3)	3	ε_1^-

S_4		[4]	[3, 1]	[2²]*	[2, 1²]	[1⁴]
(1)	24	1	3	2	3	1
(2)	4	1	1	0	−1	−1
(3)	3	1	0	−1	0	1
(4)	4	1	−1	0	1	−1
$(2)^2$	8	1	−1	2	−1	1

A_4		[2²]*
(1)	12	1
(3)	3	ε_1^+
(3)	3	ε_1^-
$(2)^2$	4	1

S_5		[5]	[4, 1]	[3, 2]	[3, 1²]*	[2², 1]	[2, 1³]	[1⁵]
(1)	120	1	4	5	6	5	4	1
(2)	12	1	2	1	0	−1	−2	−1
(3)	6	1	1	−1	0	−1	1	1
(4)	4	1	0	−1	0	1	0	−1
$(2)^2$	8	1	0	1	−2	1	0	1
(3)(2)	6	1	−1	1	0	−1	1	−1
(5)	5	1	−1	0	1	0	−1	1

A_5		$[3, 1^2]^*$
(1)	60	3
(3)	3	0
$(2)^2$	4	−1
(5)	5	ε_2^+
(5)	5	ε_2^-

S_6		[6]	[5,1]	[4,2]	$[4,1^2]$	$[3^2]$	$[3,2,1]^*$	$[2^3]$	$[3,1^3]$	$[2^2,1^2]$	$[2,1^4]$	$[1^6]$
(1)	720	1	5	9	10	5	16	5	10	9	5	1
(2)	48	1	3	3	2	1	0	−1	−2	−3	−3	−1
(3)	18	1	2	0	1	−1	−2	−1	1	0	2	1
(4)	8	1	1	−1	0	−1	0	1	0	1	−1	−1
$(2)^2$	16	1	1	1	−2	1	0	1	−2	1	1	1
(3)(2)	6	1	0	0	−1	1	0	−1	1	0	0	−1
(5)	5	1	0	−1	0	0	1	0	0	−1	0	1
(6)	6	1	−1	0	1	0	0	0	−1	0	1	−1
(4)(2)	8	1	−1	1	0	−1	0	−1	0	1	−1	1
$(2)^3$	48	1	−1	3	−2	−3	0	3	2	−3	1	−1
$(3)^2$	18	1	−1	0	1	2	−2	2	1	0	−1	1

A_6		$[3, 2, 1]^*$
(1)	360	8
(3)	9	−1
$(2)^2$	8	0
(5)	5	ε_2^+
(5)	5	ε_2^-
(4)(2)	4	0
$(3)^2$	9	−1

S_7		[7]	[6, 1]	[5, 2]	[5, 1^2]	[4, 3]	[4, 2, 1]	[3^2, 1]	[4, 1^3]*
(1)	5040	1	6	14	15	14	35	21	20
(2)	240	1	4	6	5	4	5	1	0
(3)	72	1	3	2	3	−1	−1	−3	2
(4)	24	1	2	0	1	−2	−1	−1	0
$(2)^2$	48	1	2	2	−1	2	−1	1	−4
(3)(2)	12	1	1	0	−1	1	−1	1	0
(5)	10	1	1	−1	0	−1	0	1	0
(6)	6	1	0	−1	0	0	1	0	0
(4)(2)	8	1	0	0	−1	0	1	−1	0
$(2)^3$	48	1	0	2	−3	0	1	−3	0
$(3)^2$	18	1	0	−1	0	2	−1	0	2
(5)(2)	10	1	−1	1	0	−1	0	1	0
$(3)(2)^2$	24	1	−1	2	−1	−1	−1	1	2
(4)(3)	12	1	−1	0	1	1	−1	−1	0
(7)	7	1	−1	0	1	0	0	0	−1

S_7		[3, 2^2]	[3, 2, 1^2]	[2^3, 1]	[3, 1^4]	[2^2, 1^3]	[2, 1^5]	[1^7]
(1)	5040	21	35	14	15	14	6	1
(2)	240	−1	−5	−4	−5	−6	−4	−1
(3)	72	−3	−1	−1	3	2	3	1
(4)	24	1	1	2	−1	0	−2	−1
$(2)^2$	48	1	−1	2	−1	2	2	1
(3)(2)	12	−1	1	−1	1	0	−1	−1
(5)	10	1	0	−1	0	−1	1	1
(6)	6	0	−1	0	0	1	0	−1
(4)(2)	8	−1	1	0	−1	0	0	1
$(2)^3$	48	3	−1	0	3	−2	0	−1
$(3)^2$	18	0	−1	2	0	−1	0	1
(5)(2)	10	−1	0	1	0	−1	1	−1
$(3)(2)^2$	24	1	−1	−1	−1	2	−1	1
(4)(3)	12	1	1	−1	−1	0	1	−1
(7)	7	0	0	0	1	0	−1	1

A_7		[4, 1^3]*
(1)	2520	10
(3)	36	1
$(2)^2$	24	−2
(5)	5	0
(4)(2)	4	0
$(3)^2$	9	1
$(3)(2)^2$	12	1
(7)	7	ε_3^+
(7)	7	ε_3^-

M_{11}									$\overline{16}$	$\overline{10}$
	(1)	g	1	10	11	55	45	44	$\overline{16}$	$\overline{10}$
	$(2)^4$	48	1	2	3	−1	−3	4	0	−2
	$(4)^2$	8	1	2	−1	−1	1	0	0	0
	$(3)^3$	18	1	1	2	1	0	−1	−2	1
	$(5)^2$	5	1	0	1	0	0	−1	1	0
	(8)(2)	8	1	0	−1	1	−1	0	0	$\pm i\sqrt{2}$
	(8)(2)	8	1	0	−1	1	−1	0	0	$\pm i\sqrt{2}$
	(6)(3)(2)	6	1	−1	0	−1	0	1	0	1
	(11)	11	1	−1	0	0	1	0	ε_4^+	−1
	(11)	11	1	−1	0	0	1	0	ε_4^-	−1

$g = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920.$

M_{12}

(1)	g	1	11	11	55	55	55	45	54	66	99	120	144	176	$\overline{16}$
$(2)^4$	192	1	3	3	−1	−1	7	−3	6	2	3	−8	0	0	0
$(4)^2$	32	1	3	−1	3	−1	−1	1	2	−2	−1	0	0	0	0
$(3)^3$	54	1	2	2	1	1	1	0	0	3	0	3	0	−4	−2
$(5)^2$	10	1	1	1	0	0	0	0	−1	1	−1	0	−1	1	1
$(8)(2)$	8	1	1	−1	−1	1	−1	−1	0	0	1	0	0	0	0
$(6)(3)(2)$	6	1	0	0	−1	−1	1	0	0	−1	0	1	0	0	0
(11)	11	1	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	−1	1	0	ε_4^+
(11)	11	1	0	0	0	0	0	1	−1	0	0	−1	1	0	ε_4^-
$(2)^6$	240	1	−1	−1	−5	−5	−5	5	6	6	−1	0	4	−4	4
$(10)(2)$	10	1	−1	−1	0	0	0	0	1	1	−1	0	−1	1	−1
$(4)^2(2)^2$	32	1	−1	3	−1	3	−1	1	2	−2	−1	0	0	0	0
$(3)^4$	36	1	−1	−1	1	1	1	3	0	0	3	0	−3	−1	1
$(6)^2$	12	1	−1	−1	1	1	1	−1	0	0	−1	0	1	−1	1
$(8)(4)$	8	1	−1	1	1	−1	−1	−1	0	0	1	0	0	0	0

$g = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040.$

M_{22}

(1)	g	1	21	55	154	210	$\overline{280}$	231	385	99	$\overline{45}$
$(2)^8$	384	1	5	7	10	2	−8	7	1	3	−3
$(3)^6$	36	1	3	1	1	3	1	−3	−2	0	0
$(5)^4$	5	1	1	0	−1	0	0	1	0	−1	0
$(4)^4(2)^2$	16	1	1	−1	2	−2	0	−1	1	−1	1
$(4)^4(2)^2$	32	1	1	3	−2	−2	0	−1	1	3	1
$(7)^3$	7	1	0	−1	0	0	0	0	0	1	ε_3^+
$(7)^3$	7	1	0	−1	0	0	0	0	0	1	ε_3^-
$(8)^2(4)(2)$	8	1	−1	1	0	0	0	−1	1	−1	−1
$(6)^2(3)^2(2)^2$	12	1	−1	1	1	−1	1	1	−2	0	0
$(11)^2$	11	1	−1	0	0	1	ε_4^+	0	0	0	1
$(11)^2$	11	1	−1	0	0	1	ε_4^-	0	0	0	1

$g = 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 48 = 443520.$

M_{23}

(1)	g	1	22	230	231	$\overline{770}$	1035	2024	$\overline{45}$	$\overline{990}$	$\overline{231}$	253	$\overline{896}$
$(2)^8$	2688	1	6	22	7	−14	27	8	− 3	−18	7	13	0
$(3)^6$	180	1	4	5	6	5	0	−1	0	0	−3	1	−4
$(5)^4$	15	1	2	0	1	0	0	−1	0	0	1	−2	1
$(4)^4(2)^2$	32	1	2	2	−1	− 2	−1	0	1	2	−1	1	0
$(7)^3$	14	1	1	−1	0	0	−1	1	ε_3^+	ε_3^+	0	1	0
$(7)^3$	14	1	1	−1	0	0	−1	1	ε_3^-	ε_3^-	0	1	0
$(8)^2(4)(2)$	8	1	0	0	−1	0	1	0	− 1	0	−1	−1	0
$(6)^2(3)^2(2)^2$	12	1	0	1	−2	1	0	−1	0	0	1	1	0
$(11)^2$	11	1	0	−1	0	0	1	0	1	0	0	0	ε_4^+
$(11)^2$	11	1	0	−1	0	0	1	0	1	0	0	0	ε_4^-
$(15)(5)(3)$	15	1	−1	0	1	0	0	−1	0	0	ε_5^+	1	1
$(15)(5)(3)$	15	1	−1	0	1	0	0	−1	0	0	ε_5^-	1	1
$(14)(7)(2)$	14	1	−1	1	0	0	−1	1	$-\varepsilon_3^+$	ε_3^+	0	−1	0
$(14)(7)(2)$	14	1	−1	1	0	0	−1	1	$-\varepsilon_3^-$	ε_3^-	0	−1	0
(23)	23	1	−1	0	1	ε_6^+	0	0	− 1	1	1	0	−1
(23)	23	1	−1	0	1	ε_6^-	0	0	− 1	1	1	0	−1

$g = 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 48 = 1020960,\quad \varepsilon_3^{\pm} = (-1 \pm \sqrt{-11})/2,\ \varepsilon_4^{\pm} = (-1 \pm \sqrt{-7})/2,$

$\varepsilon_5^{\pm} = (-1 \pm \sqrt{-15})/2,\ \varepsilon_6^{\pm} = (-1 \pm \sqrt{-23})/2.$

M_{24}

$(1)^{24}$	g	1	23	7·36	**23·11**	23·77	55·64	$\overline{45}$	$\overline{22\cdot 45}$	$\overline{23\cdot 45}$	23·45	$\overline{11\cdot 21}$	$\overline{770}$
$(2)^8$	$21\cdot 2^{10}$	1	7	28	13	−21	64	−3	−18	−21	27	7	−14
$(3)^6$	27·40	1	5	9	10	16	10	0	0	0	0	−3	5
$(5)^4$	60	1	32	3		1	0	0	0	0	0	1	0
$(4)^4(2)^2$	128	1	3	4	1	−5	0	1	2	3	−1	−1	−2
$(7)^3$	42	1	2	0	1	0	−1	ε_3^+	ε_3^+	$2\varepsilon_3^+$	−1	0	0
$(7)^3$	42	1	2	0	1	0	−1	ε_3^-	ε_3^-	$2\varepsilon_3^-$	−1	0	0
$(8)^2(4)(2)$	16	1	1	0	−1	−1	0	−1	0	−1	1	−1	0
$(6)^2(3)^2(2)^2$	24	1	1	1	−2	0	−2	0	0	0	0	1	1
$(11)^2$	11	1	1	−1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$(15)(5)(3)$	15	1	0	−1	0	1	0	0	0	0	0	ε_5^+	0
$(15)(5)(3)$	15	1	0	−1	0	1	0	0	0	0	0	ε_5^-	0
$(14)(7)(2)$	14	1	0	0	−1	0	1	ε_3^-	ε_3^+	0	−1	0	0
$(14)(7)(2)$	14	1	0	0	−1	0	1	ε_3^+	ε_3^-	0	−1	0	0
(23)	23	1	0	−1	0	0	1	−1	1	0	0	1	ε_6^+
(23)	23	1	0	−1	0	0	1	−1	1	0	0	1	ε_6^-
$(12)^2$	12	1	−1	0	1	−1	0	1	1	−1	0	0	1
$(6)^4$	24	1	−1	0	1	−1	0	−1	−1	1	2	0	1
$(4)^6$	96	1	−1	0	1	−1	0	1	−2	−1	3	3	−2
$(3)^8$	7·72	1	−1	0	1	7	−8	3	3	−3	6	0	−7
$(2)^{12}$	$15\cdot 2^9$	1	−1	12	−11	11	0	5	−10	−5	35	−9	10
$(10)^2(2)^2$	20	1	−1	2	−1	1	0	0	0	0	0	1	0
$(21)(3)$	21	1	−1	0	1	0	−1	ε_3^-	ε_3^-	ε_3^+	−1	0	0
$(21)(3)$	21	1	−1	0	1	0	−1	ε_3^+	ε_3^+	ε_3^-	−1	0	0
$(4)^4(2)^4$	$3\cdot 2^7$	1	−1	4	−3	3	0	−3	6	3	3	−1	2
$(12)(6)(4)(2)$	12	1	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1

$(1)^{24}$	g	23·21	23·55	23·88	23·99	23·144	23·11·21	23·7·36	77·72	11·35·27
$(2)^8$	$21\cdot 2^{10}$	35	49	8	21	48	49	−28	−56	−21
$(3)^6$	27·40	6	5	−1	0	0	−15	−9	9	0
$(5)^4$	60	−2	0	−1	−3	−3	3	1	−1	0
$(4)^4(2)^2$	128	3	1	0	1	0	−3	4	0	−1
$(7)^3$	42	0	−2	1	2	1	0	0	0	0
$(7)^3$	42	0	−2	1	2	1	0	0	0	0
$(8)^2(4)(2)$	16	−1	1	0	−1	0	−1	0	0	1
$(6)^2(3)^2(2)^2$	24	2	1	−1	0	0	1	−1	1	0
$(11)^2$	11	−1	0	0	0	1	0	−1	0	0
$(15)(5)(3)$	15	1	0	−1	0	0	0	1	−1	0
$(15)(5)(3)$	15	1	0	−1	0	0	0	1	1	0
$(14)(7)(2)$	14	0	0	1	0	−1	0	0	0	0
$(14)(7)(2)$	14	0	0	1	0	−1	0	0	0	0
(23)	23	0	0	0	0	0	0	0	1	−1
(23)	23	0	0	0	0	0	0	0	1	−1
$(12)^2$	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$(6)^4$	24	0	0	0	2	−2	0	0	0	0
$(4)^6$	96	3	−3	0	−3	0	−3	0	0	3
$(3)^8$	7·72	0	8	8	6	−6	0	0	0	0
$(2)^{12}$	$15\cdot 2^9$	3	−15	24	−19	16	9	36	24	−45
$(10)^2(2)^2$	20	−2	0	−1	1	1	−1	1	−1	0
$(21)(3)$	21	0	1	1	−1	1	0	0	0	0
$(21)(3)$	21	0	1	1	−1	1	0	0	0	0
$(4)^4(2)^4$	$3\cdot 2^7$	3	−7	8	−3	0	1	−4	−8	3
$(12)(6)(4)(2)$	12	0	−1	−1	0	0	1	−1	1	0

$g = 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20\cdot 48 = 24503040.$

II) 一般线性群 $GL(2, q)$，酉群 $U(2, q)$，特殊线性群 $SL(2, q)$（q 是素数的幂）（→有限群[有限单群]）

1)　$\varepsilon=\exp[2\pi\sqrt{-1}/(q-1)]$, $\eta=\exp[2\pi\sqrt{-1}/(q^2-1)]$, $\sigma=\exp[2\pi\sqrt{-1}/(q+1)]$, ρ 是 $GF(q)-\{0\}$ 的乘法群的生成元，ω 是 $GF(q^2)-\{0\}$, $\omega^{q-1}=\alpha$ 的乘法群的生成元，B 是具有阶数为 q^2-1 的 $GL(2,q)$ 的元素，并且 $B_1=B^{q-1}$.

2)　第一列给出了共轭类的代表元素.

一般线性群 $GL(2,q)$.

	$X_n(1)$	$X_n(q)$	$Y_{m,n}$	Z_n
$\begin{pmatrix}\rho^a & \\ & \rho^a\end{pmatrix}$	ε^{2na}	$q\varepsilon^{2na}$	$(q+1)\varepsilon^{(m+n)a}$	$(q-1)\eta^{na(q+1)}$
$\begin{pmatrix}\rho^a & \\ 1 & \rho^a\end{pmatrix}$	ε^{2na}	0	$\varepsilon^{(m+n)a}$	$-\eta^{na(q+1)}$
$\begin{pmatrix}\rho^a & \\ & \rho^b\end{pmatrix}$	$\varepsilon^{n(a+b)}$	$\varepsilon^{n(a+b)}$	$\varepsilon^{ma+nb}+\varepsilon^{mb+na}$	0
B^c	ε^{nc}	$-\varepsilon^{nc}$	0	$-(\eta^{nc}+\eta^{ncq})$

1)　$1\leqslant a\leqslant q-1$, $1\leqslant b\leqslant q-1$, $a\not\equiv b\ (\mathrm{mod}\ q-1)$, $1\leqslant c<q^2-1$, $c\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ q+1)$.

2)　假设对于 $X_n(1)$, $X_n(q)$, $1\leqslant n\leqslant q-1$；对于 $Y_{m,n}$, $1\leqslant m<n\leqslant q-1$；对于 Z_n, $1\leqslant n<q^2-1$, $n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ q+1)$. 其中，当 $n\equiv n'q\ (\mathrm{mod}\ q^2-1)$ 时，有 $Z_n=Z_{n'}$.

酉群 $U(2,q)$.

	$X'_n(1)$	$X'_n(q)$	$Y'_{m,n}$	Z'_n
$\begin{pmatrix}\alpha^s & \\ & \alpha^s\end{pmatrix}$	σ^{2ns}	$q\sigma^{2ns}$	$(q-1)\sigma^{(m+n)s}$	$(q+1)\sigma^{ns}$
$\begin{pmatrix}\alpha^s & \\ 1 & \alpha^s\end{pmatrix}$	σ^{2ns}	0	$-\sigma^{(m+n)s}$	σ^{ns}
$\begin{pmatrix}\alpha^s & \\ & \alpha^t\end{pmatrix}$	$\sigma^{n(s+t)}$	$-\sigma^{n(s+t)}$	$-(\sigma^{ms+nt}+\sigma^{mt+ns})$	0
$\begin{pmatrix}\omega^u & \\ & \omega^{-uq}\end{pmatrix}$	σ^{-nu}	σ^{-nu}	0	$\eta^{nu}+\eta^{-nuq}$

1)　$\begin{pmatrix}\alpha^s & \\ 1 & \alpha^s\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\omega^u & \\ & \omega^{-uq}\end{pmatrix}$ 是在 $GL(2,q^2)$ 中 $U(2,q)$ 的元素的标准型.

2)　$1\leqslant s\leqslant q+1$, $1\leqslant t\leqslant q+1$, $s\not\equiv t\ (\mathrm{mod}\ q+1)$, $1\leqslant u<q^2-1$, $u\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ q-1)$. 当 $u\equiv -u'q\ (\mathrm{mod}\ q^2-1)$ 时，u, u' 给出相同的共轭类.

3)　对 $X'_n(1)$, $X'_n(q)$，区域是 $1\leqslant n\leqslant q+1$；对 $Y'_{m,n}$ 是 $1\leqslant m<n\leqslant q+1$；对 Z'_n, $n\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ q-1)$ 是 $1\leqslant n<q^2-1$. 当 $n'\equiv -nq\ (\mathrm{mod}\ q^2-1)$ 时，有 $Z'_n=Z'_{n'}$.

特殊线性群 $SL(2,2^n)$ (当 $q=2^n$ 时)

			Y_n	Z_m
$\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$	1	q	$q+1$	$q-1$
$\begin{pmatrix}1 & \\ 1 & 1\end{pmatrix}$	1	0	1	-1
$\begin{pmatrix}\rho^a & \\ & \rho^{-a}\end{pmatrix}$	1	1	$\varepsilon^{na}+\varepsilon^{-na}$	0
B_1^c	1	-1	0	$-(\sigma^{mc}+\sigma^{-mc})$

1) $1 \leqslant a \leqslant (q-2)/2$, $1 \leqslant c \leqslant q/2$.

2) $1 \leqslant n \leqslant (q-2)/2$, $1 \leqslant m \leqslant q/2$.

特殊线性群 $SL(2, q)$ ($q=$ 奇素数的幂, $e=(q-1)/2$, $e'=(q+1)/2$).

			Y_n	Z_m		
$\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$	1	q	$q+1$	$q-1$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$
$Z=\begin{pmatrix}-1 & \\ & -1\end{pmatrix}$	1	q	$(-1)^n(q+1)$	$(-1)^m(q-1)$	$(-1)^e\frac{q+1}{2}$	$(-1)^{e'}\frac{q-1}{2}$
$P_1=\begin{pmatrix}1 & \\ 1 & 1\end{pmatrix}$	1	0	1	-1	$\mu^{\pm}$	$\lambda^{\pm}$
$P_2=\begin{pmatrix}1 & \\ \beta & 1\end{pmatrix}$	1	0	1	-1	$\mu^{\mp}$	$\lambda^{\mp}$
P_1Z	1	0	$(-1)^n$	$-(-1)^m$	$(-1)^e\mu^{\pm}$	$(-1)^{e'}\lambda^{\pm}$
P_2Z	1	0	$(-1)^n$	$-(-1)^m$	$(-1)^e\mu^{\mp}$	$(-1)^{e'}\lambda^{\mp}$
$\begin{pmatrix}\rho^a & \\ & \rho^{-a}\end{pmatrix}$	1	1	$\varepsilon^{na}+\varepsilon^{-na}$	0	$(-1)^a$	0
B_1^c	1	-1	0	$-(\sigma^{mc}+\sigma^{-mc})$	0	$-(-1)^c$

1) $1 \leqslant a \leqslant (q-3)/2$, $1 \leqslant c \leqslant (q-1)/2$, $1 \leqslant n \leqslant (q-3)/2$, $1 \leqslant m \leqslant (q-1)/2$, $\lambda^{\pm}=(-1\pm\sqrt{-q})/2$, $\mu^{\pm}=(1\pm\sqrt{q})/2$.

2) 最后二列,分别表示两组特征标(用相同的符号).

III) Ree 群† $Re(q)$, 鈴木群† $Sz(q)$, Janko 群† J.

Ree 群 $Re(q)(q=3^{2n+1}=3m^2)$.

$Re(q)$的阶(数)为 $q^3(q^3+1)(q-1)$，$q_0=q^2-q+1$，$m_+=q+3m+1$，$m_-=q-3m+1$.

						A	B	C	X_μ
1	1	1	q_0	q^3	qq_0	$(q-1)mm_+/2$	$(q-1)mm_-/2$	$m(q^2-1)$	q^3+1
J	2	1	-1	q	$-q$	$-(q-1)/2$	$(q-1)/2$	0	$q+1$
X	3	1	$-(q-1)$	0	q	$-(q+m)/2$	$(q-m)/2$	$-m$	1
Y	9	1	1	0	0	m	m	$-m$	1
T	3	1	1	0	0	α	α	2α	1
T^{-1}	3	1	1	0	0	$\bar{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$2\bar{\alpha}$	1
YT	9	1	1	0	0	β	β	$-\beta$	1
YT^{-1}	9	1	1	0	0	$\bar{\beta}$	$\bar{\beta}$	$-\bar{\beta}$	1
JT	6	1	-1	0	0	γ	$-\gamma$	0	1
JT^{-1}	6	1	-1	0	0	$\bar{\gamma}$	$-\bar{\gamma}$	0	1
R^a		1	1	1	1	0	0	0	$\rho^{\mu a}+\rho^{-\mu a}$
S^b		1	3	-1	-3	1	-1	0	0
JR^a		1	-1	1	-1	0	0	0	$\rho^{\mu a}+\rho^{-\mu a}$
JS^b		1	-1	-1	1	1	-1	0	0
V^s		1	0	-1	0	-1	0	-1	0
W^t		1	0	-1	0	0	1	1	0

		X'_μ	Y_ν	Y'_λ	Z_κ	Z'_τ
1	1	q^3+1	$(q-1)q_0$	$(q-1)q_0$	$(q^2-1)m_+$	$(q^2-1)m_-$
J	2	$-(q+1)$	$3(q-1)$	$-(q-1)$	0	0
X	3	1	$2q-1$	$2q-1$	$-m_+$	$-m_-$
Y	9	1	-1	-1	-1	-1
T	3	1	-1	-1	$-3m-1$	$3m-1$
T^{-1}	3	1	-1	-1	$-3m-1$	$3m-1$
YT	9	1	-1	-1	-1	-1
YT^{-1}	9	1	-1	-1	-1	-1
JT	6	-1	-3	1	0	0
JT^{-1}	6	-1	-3	1	0	0
R^a		$\rho^{\mu a}+\rho^{-\mu a}$	0	0	0	0
S^b		0	$\sigma(\nu b)$	$\sigma'(\lambda b)$	0	0
JR^a		$-(\rho^{\mu a}+\rho^{-\mu a})$	0	0	0	0
JS^b		0	$\sigma(\nu b)$	$\sigma'(\lambda b)$	0	0
V^s		0	0	0	$-\sum_{i=0}^{2}(v^{\kappa s q^i}+v^{-\kappa s q^i})$	0
W^t		0	0	0	0	$-\sum_{i=0}^{2}(w^{\tau t q^i}+w^{-\tau t q^i})$

1) 第一列表示共轭类的代表元素,第二列表示它的阶数. R, S, V, W 的阶数分别是 $(q-1)/2$, $(q+1)/4$, m_-, m_+. R, S, T 与 J 可换.

2) $R^a \sim R^{-a}$, $V^s \sim V^{sq} \sim V^{sq^2} \sim V^{-s} \sim V^{-sq} \sim V^{-sq^2}$, $W^t \sim W^{tq} \sim W^{tq^2} \sim W^{-t} \sim W^{-tq} \sim W^{-tq^2}$.
在此,固定整数 δ, 满足 $\delta^3 \equiv 1\ [\mathrm{mod}\,(q+1)/4]$, $(\delta - 1(q+1)/4) = 1$.

$S^b \sim S^{b\delta} \sim S^{b\delta^2} \sim S^{-b} \sim S^{-b\delta} \sim S^{-b\delta^2}$, $JR^a \sim JR^{-a}$, $JS^b \sim JS^{-b}$, 其中 $A \sim B$ 表示 A 与 B 相互共轭.

3) $\rho = \exp[4\pi\sqrt{-1}/(q-1)]$, $v = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m_-)$, $w = \exp(2\pi\sqrt{-1}/m_+)$, $\sigma = \exp \cdot [8\pi\sqrt{-1}/(q+1)]$.

4) $1 \leqslant \mu \leqslant (q-3)/4$, $1 \leqslant \lambda \leqslant (q-3)/8$.
这里 ν 看作 $\mathrm{mod}\,(q+1)/4$, 并且 $Y_\nu = Y_{\nu\delta} = Y_{\nu\delta^2} = Y_{-\nu} = Y_{-\nu\delta} = Y_{-\nu\delta^2}$,
κ 看作 $\mathrm{mod}\, m_-$, 并且 $Z_\kappa = Z_{\kappa q} = Z_{\kappa q^2} = Z_{-\kappa} = Z_{-\kappa q} = Z_{-\kappa q^2}$,
τ 看作 $\mathrm{mod}\, m_+$, 并且 $Z'_\tau = Z'_{\tau q} = Z'_{\tau q^2} = Z'_{-\tau} = Z'_{-\tau q} = Z'_{-\tau q^2}$.

5) $\sigma(\nu b) = -\sum_{i=0}^{2}(\sigma^{\nu b\delta^i} + \sigma^{-\nu b\delta^i})$, $\sigma'(\lambda b) = \sum_{i=0}^{1}(\sigma^{\lambda b\delta^i} + \sigma^{-\lambda b\delta^i}) - (\sigma^{\lambda b\delta^2} + \sigma^{-\lambda b\delta^2})$.

6) $\alpha = \dfrac{-m + m\sqrt{-q}}{2}$, $\beta = \dfrac{-m - \sqrt{-q}}{2}$, $\gamma = \dfrac{1 - \sqrt{-q}}{2}$. 对于特征标 A, B, C 只表示出两个相互复共轭的特征标中的一个.

鈴木群 $Sz(q)$. $Sz(q)$ 的阶数是 $q^2(q^2+1)(q-1)(q = 2^{2n+1},\ 2q = r^2)$.

			X_α	Y_β	Z_γ		
1	1	q^2	q^2+1	$(q-r+1)(q-1)$	$(q+r+1)(q-1)$	$r(q-1)/2$	$r(q-1)/2$
σ	1	0	1	$r-1$	$-r-1$	$-r/2$	$-r/2$
ρ	1	0	1	-1	-1	$r\sqrt{-1}/2$	$-r\sqrt{-1}/2$
ρ^{-1}	1	0	1	-1	-1	$-r\sqrt{-1}/2$	$r\sqrt{-1}/2$
π_0^i	1	1	$\varepsilon_0^{\alpha i} + \varepsilon_0^{-\alpha i}$	0	0	0	0
π_1^j	1	-1	0	$-(\varepsilon_1^{\beta j} + \varepsilon_1^{\beta jq} + \varepsilon_1^{-\beta j} + \varepsilon_1^{-\beta jq})$	0	1	1
π_2^k	1	-1	0	0	$-(\varepsilon_2^{\gamma k} + \varepsilon_2^{\gamma kq} + \varepsilon_2^{-\gamma k} + \varepsilon_2^{-\gamma kq})$	-1	-1

1) 第一列给出共轭类的代表元素.

2) π_0, π_1, π_2 分别是阶数为 $q-1$, $q+r+1$, $q-r+1$ 的元素.

3) $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 分别是 1 的原 $q-1$, $q+r+1$, $q-r+1$ 根.

4) π_0^i 和 π_0^{-i} 是互为共轭的元素, 因而 X_α 和 $X_{-\alpha}$ 给出相同的特征标. i, α 遍及所有的 $\mathrm{mod}\, q-1$ 的代表元素,并且 $i, \alpha \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q-1)$.

5) $\pi_1^j, \pi_1^{-j}, \pi_1^{jq}, \pi_1^{-jq}$ 是互相共轭的, 因此 $Y_\beta, Y_{-\beta}, Y_{\beta q}, Y_{-\beta q}$ 给出相同的特征标. j, β 遍及所有的 $\mathrm{mod}\, q+r+1$ 的代表元素,并且 $j, \beta \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q+r+1)$.

6) $\pi_2^k, \pi_2^{-k}, \pi_2^{kq}, \pi_2^{-kq}$ 是互相共轭的, 因此 $Z_\gamma, Z_{-\gamma}, Z_{\gamma q}, Z_{-\gamma q}$ 给出相同的特征标. k, γ 包括所有 $\mathrm{mod}\, q-r+1$ 的代表元素,并且 $k, \gamma \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, q-r+1)$.

Janko 群 J.

1	1	77	133	209	133	77	77	133	76	76	56	56	120	120	120
2	1	5	5	1	-3	-3	-3	-3	4	-4	0	0	0	0	0
3	1	-1	1	-1	-2	2	2	-2	1	1	2	2	0	0	0
5	1	2	-2	-1	ε^+	$-\varepsilon^+$	$-\varepsilon^-$	ε^-	1	1	$2\varepsilon^-$	$2\varepsilon^+$	0	0	0
5	1	2	-2	-1	ε^-	$-\varepsilon^-$	$-\varepsilon^+$	ε^+	1	1	$2\varepsilon^+$	$2\varepsilon^-$	0	0	0
6	1	-1	-1	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0	0	0
7	1	0	0	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	$-\varepsilon^+$	$-\varepsilon^+$	$-\varepsilon^-$	$-\varepsilon^-$	-1	1	0	0	0	0	0
10	1	0	0	1	$-\varepsilon^-$	$-\varepsilon^-$	$-\varepsilon^+$	$-\varepsilon^+$	-1	1	0	0	0	0	0
11	1	0	1	0	1	0	0	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
15	1	-1	1	-1	ε^+	$-\varepsilon^+$	$-\varepsilon^-$	ε^-	1	1	$-\varepsilon^-$	$-\varepsilon^+$	0	0	0
15	1	-1	1	-1	ε^-	$-\varepsilon^-$	$-\varepsilon^+$	ε^+	1	1	$-\varepsilon^+$	$-\varepsilon^-$	0	0	0
19	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	-1	λ_1	λ_2	λ_3
19	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	-1	λ_2	λ_3	λ_1
19	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	-1	-1	λ_3	λ_1	λ_2

1) J 的阶数是 $8\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot19=175560$.

2) 第一列表示各共轭类的元素的阶数.

3) $\rho=\exp(2\pi\sqrt{-1}/19)$, $\lambda_1=\rho+\rho^7+\rho^8+\rho^{11}+\rho^{12}+\rho^{18}$, $\lambda_2=\rho^2+\rho^{14}+\rho^{16}+\rho^3+\rho^5+\rho^{17}$, $\lambda_3=\rho^4+\rho^9+\rho^{13}+\rho^6+\rho^{10}+\rho^{15}$, $\varepsilon^\pm=(1\pm\sqrt{5})/2$.

[参] I) 对 $S_n(2\leqslant n\leqslant10)$, $A_n(3\leqslant n\leqslant9)$: [1] D. E. Littlewood, The theory of group characters, 第二版, Oxford Univ. Press, 1950. 对 $S_n(n=11,12,13)$: [2] M. Zia-ud-Din, Proc. London Math. Soc., **39** (1935), 200—204, **42** (1937), 340—355. 对 S_{14}: [3] K. Kondô (近藤孝一), Table of characters of the symmetric group of degree 14, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **22** (1940), 585—593. 对 $M_n(n=12,24)$: [4] G. Frobenius, Über die Charaktere der mehrfach transitive Gruppen, S. B. Preuss. Akad. Wiss., 1904, 558—571. 对 $M_n(n=11,22,23)$: [5] N. Burgoyne-P. Fong, The Schur multipliers of the Mathieu groups, Nagoya Math. J., **27** (1966), 733—745.

II) 对 $GL(2,q)$, $SL(2,q)$: [6] I. Schur, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math., **132** (1907), 85—137; [7] H. E. Jordan, Group characters of various types of linear groups, Amer. J. Math., **29** (1907), 387—405. 对 $GL(3,q)$, $GL(4,q)$, $GL(n,q)$: [8] R. Steinberg, The representations of $GL(3,q)$, $GL(4,q)$, $PGL(3,q)$ and $PGL(4,q)$, Canad, J. Math. **3** (1951), 225—235; [9] J. A. Green, The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., **80** (1955), 402—447. 对 $U(2,q)$, $U(3,q)$: [10] V. Ennola, On the characters of the finite unitary groups, Ann. Acad. Sci. Fenn., **323** (1963), 1—34.

III) 对 $Sz(q)$, $Re(q)$, J: [11] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups, Ann. of Math., (2) **75** (1962), 105—145; [12] H. N. Ward, On Ree's series of simple groups, Trans. Amer. Math. Soc., **121** (1966), 62—89; [13] Z. Janko, A new finite simple group with Abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, J. Algebra, **3** (1966), 147—186.

IV) 对其他 Lie 型群: [14] B. Srinivasan, The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$, Trans. Amer. Math. Soc., **131** (1968). 488—525; [15] H. Enomoto, The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$, $q=2^f$. Osaka J. Math., **9** (1972), 75—94; [16] G. I. Lehrer, The characters of the finite special linear groups. J. Algebra. **26** (1973). 564—583; [17] P. Deligne-G. Lusztig. Representations of reductive groups over finite fields. Ann. of Math., (2) **103** (1976). 103—161. 对零星群: [18] M. Hall, Jr.-D. Wales. The simple groups of order 604, 800. J. Algebra, **9** (1968). 417—450; [19] J. S. Frame, Computation of characters of the Higman-Sims group and its automorphism group, J. Algebra, **20** (1972), 320—349; [20] D. Fendel, A characterization of Conway's group 3, J. Algebra, **24** (1973), 159—196; [21] D. Wright, The irreducible characters of the simple group of M. Suzuki of order 448, 345, 497, 600, J. Algebra, **29** (1974), 303—323.

9. 各种常数

$\sqrt{2} = 1.41421\ 35623\ 73095$,　$\sqrt{10} = 3.16227\ 76601\ 68379$.

$\sqrt[3]{2} = 1.25992\ 10498\ 94873$,　$\sqrt[3]{100} = 4.64158\ 88336\ 12779$.

$\log_{10} 2 = 0.30102\ 99956\ 63981 = 1/3.32192\ 80948\ 87364$.

I)　自然对数†*的底 e（1000 位）

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995957496696762772407663035354759
457138217852516642742746639193200305992181741359662904357290033429526059563073813
232862794349076323382988075319525101901157383418793070215408914993488416750924
4761460668082264800168477411853742345442437107539077744992069551702761838606261
3313845830007520449338265602976067371132007093287091274437470472306969772093101
416928368190255151086574637721112523897844250569536967707854499699679468644549
059879316368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288
693984964651058209392398294887933203625094431173012381970684161403970198376793
206832823764648042953118023287825098194558153017567173613320698112509961818815
930416903515988885193458072738667385894228792284998920868058257492796104841984
443634632449684875602336248270419786232090021609902353043699418491463140934317
381436405462531520961836908887070167683964243781405927145635490613031072085103
837505101157477041718986106873969655212671546889570350354.

e（八进位表示）= 2.5576052130505355.

$1/e = 0.36787\ 94411\ 71442$,　$e^2 = 7.38905\ 60989\ 30650 = 1/0.13533\ 52832\ 36613$,

$\sqrt{e} = 1.64872\ 12707\ 00128 = 1/0.60653\ 06597\ 12633$.

$\log_e 10 = 2.30258\ 50929\ 94046 = 1/0.43429\ 44819\ 03252$,

$\log_e 2 = 0.69314\ 71805\ 59945 = 1/1.44269\ 50408\ 88964$.

II)　圆周率†* π（1000 位）

π = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
8628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450
2841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831
6527120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558
8174881520920962829254091715364367892590360011330530548820466521384146951941511
6094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799627495673518857
5272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094
3702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757
7896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121
2902196086403441815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281
6096318595024459455346908302642522308253344685035261931188171010003137838752886
5875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519577
8185778053217122680661300192787661119590921642019891.

π（八进位表示）= 3.11037　55242　10264　3.

$1/\pi = 0.31830\ 98861\ 83791$,　$\pi^2 = 9.86960\ 44010\ 89359 = 1/0.10132\ 11836\ 42338$,

$\sqrt{\pi} = 1.77245\ 38509\ 05516 = 1/0.56418\ 95835\ 47756$,

$\sqrt{2\pi} = 2.50662\ 82746\ 31001 = 1/0.39894\ 22804\ 01433$,

$\sqrt{\pi/2} = 1.25331\ 41373\ 15500 = 1/0.79788\ 45608\ 02865$,

$\sqrt[3]{\pi} = 1.46459\ 18875\ 61523 = 1/0.68278\ 40632\ 55296$.

$\log_{10}\pi = 0.49714\ 98726\ 94134$, $\log_e \pi = 1.14472\ 98858\ 49400$.

III) **弧度** rad

$1\ \text{rad} = 57^\circ.29577\ 95130\ 82321 = 3437'.74677\ 07849\ 393 = 20626\ 4''.80624\ 70964$.

$1^\circ = 0.01745\ 32925\ 19943\ \text{rad}$, $1' = 0.00029\ 08882\ 08666\ \text{rad}$,

$1'' = 0.00000\ 48481\ 36811\ \text{rad}$.

IV) **Euler 常数**†♦ C (100 位)

$C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421\ 59335\ 93992$
$35988\ 05767\ 23488\ 48677\ 26777\ 66467\ 09369\ 47063\ 29174\ 67495$.

$e^C = 1.78107\ 24179\ 90197\ 98522$.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

n	S_n	n	S_n	n	S_n	n	S_n
3	1.83333333	6	2.45000000	15	3.31822899	100	5.18737752
4	2.08333333	8	2.71785714	20	3.59773966	500	6.79282343
5	2.28333333	10	2.92896825	50	4.79920534	1000	7.48547086

10. 指数函数♦，双曲函数♦，对数函数♦(一初等函数)

x	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\log_e x$
0	1	1	0	1	0	$-\infty$
0.01	1.01005	0.99005	0.010000	1.00005	0.010000	−4.60517
0.02	1.02020	0.98020	0.020001	1.00020	0.019997	−3.91202
0.03	1.03045	0.97045	0.030005	1.00045	0.029991	−3.50656
0.04	1.04081	0.96079	0.040011	1.00180	0.039979	−3.21888
0.05	1.05127	0.95123	0.050021	1.00125	0.049958	−2.99573
0.06	1.06184	0.94176	0.060036	1.00180	0.059928	−2.81341
0.07	1.07251	0.93239	0.070057	1.00245	0.069886	−2.65926
0.08	1.08329	0.92312	0.080085	1.00320	0.079830	−2.52573
0.09	1.09417	0.91393	0.090122	1.00405	0.089758	−2.40795
0.10	1.10517	0.90484	0.10017	1.00500	0.099668	−2.30259
0.11	1.11628	0.89583	0.11022	1.00605	0.10956	−2.20727
0.12	1.12750	0.88692	0.12029	1.00721	0.11943	−2.12026
0.13	1.13883	0.87810	0.13037	1.00846	0.12927	−2.04022
0.14	1.15027	0.86936	0.14046	1.00982	0.13909	−1.96611
0.15	1.16183	0.86071	0.15056	1.01127	0.14889	−1.89712
0.16	1.17351	0.85214	0.16068	1.01283	0.15865	−1.83258
0.17	1.18530	0.84366	0.17082	1.01466	0.16838	−1.77196
0.18	1.19722	0.83527	0.18097	1.01624	0.17808	−1.71480
0.19	1.20925	0.82696	0.19115	1.01810	0.18775	−1.66073
0.20	1.22140	0.81873	0.20134	1.02007	0.19738	−1.60943
0.21	1.23368	0.81058	0.21155	1.02213	0.20697	−1.56065
0.22	1.24608	0.80252	0.22178	1.02430	0.21652	−1.51413
0.23	1.25860	0.79453	0.23203	1.02657	0.22603	−1.46968
0.24	1.27125	0.78663	0.24231	1.02894	0.23550	−1.42712
0.25	1.28403	0.77880	0.25261	1.03141	0.24492	−1.38629
0.26	1.29693	0.77105	0.26294	1.03399	0.25430	−1.34707
0.27	1.30996	0.76338	0.27329	1.03667	0.26362	−1.30933
0.28	1.32313	0.75578	0.28367	1.03946	0.27291	−1.27297
0.29	1.33643	0.74826	0.29408	1.04235	0.28213	−1.23787
0.30	1.34986	0.74082	0.30452	1.04534	0.29131	−1.20397

x	e^x	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\log_e x$
0.31	1.36342	0.73345	0.31499	1.04844	0.30044	−1.17118
0.32	1.37713	0.72615	0.32549	1.05164	0.30951	−1.13943
0.33	1.39097	0.71892	0.33602	1.05495	0.31852	−1.10866
0.34	1.40495	0.71177	0.34659	1.05836	0.32748	−1.07881
0.35	1.41907	0.70469	0.35719	1.06188	0.33638	−1.04982
0.36	1.43333	0.69768	0.36783	1.06550	0.34521	−1.02165
0.37	1.44773	0.69073	0.37850	1.06923	0.35399	−0.99425
0.38	1.46228	0.68386	0.38921	1.07307	0.36271	−0.96758
0.39	1.47698	0.67706	0.39996	1.07702	0.37136	−0.94161
0.40	1.49182	0.67032	0.41075	1.08107	0.37995	−0.91629
0.41	1.50682	0.66365	0.42158	1.08523	0.38847	−0.89160
0.42	1.52196	0.65705	0.43246	1.08950	0.39693	−0.86750
0.43	1.53726	0.65051	0.44337	1.09388	0.40532	−0.84397
0.44	1.55271	0.64404	0.45434	1.09837	0.41364	−0.82098
0.45	1.56831	0.63763	0.46534	1.10297	0.42190	−0.79861
0.46	1.58407	0.63128	0.47640	1.10768	0.43008	−0.77653
0.47	1.59999	0.62500	0.48750	1.11250	0.43820	−0.75502
0.48	1.61607	0.61878	0.49865	1.11743	0.44624	−0.73397
0.49	1.63232	0.61263	0.50984	1.12247	0.45422	−0.71335
0.50	1.64872	0.60653	0.52110	1.12763	0.46212	−0.69315
0.52	1.68203	0.59452	0.54375	1.13827	0.47770	−0.65393
0.54	1.71601	0.58275	0.56663	1.14938	0.49299	−0.61619
0.56	1.75067	0.57121	0.58973	1.16095	0.50798	−0.57982
0.58	1.78604	0.55990	0.61307	1.17297	0.52267	−0.54473
0.60	1.82212	0.54881	0.63665	1.18547	0.53705	−0.51083
0.62	1.85893	0.53794	0.66049	1.19844	0.55113	−0.47804
0.64	1.89648	0.52729	0.68459	1.21189	0.56490	−0.44629
0.66	1.93479	0.51685	0.70897	1.22582	0.57836	−0.41552
0.68	1.97388	0.50662	0.73363	1.24025	0.59152	−0.38566
0.70	2.01375	0.49659	0.75858	1.25517	0.60437	−0.35667
0.72	2.05443	0.48675	0.78384	1.27059	0.61691	−0.32850
0.74	2.09594	0.47711	0.80941	1.28652	0.62915	−0.30111
0.76	2.13828	0.46767	0.83530	1.30297	0.64108	−0.27444
0.78	2.18147	0.45841	0.86153	1.31994	0.65271	−0.24846
0.80	2.22554	0.44933	0.88811	1.33743	0.66404	−0.22314
0.82	2.27050	0.44043	0.91503	1.35547	0.67507	−0.19845
0.84	2.31637	0.43171	0.94233	1.37404	0.68581	−0.17435
0.86	2.36316	0.42316	0.97000	1.39316	0.69626	−0.15032
0.88	2.41090	0.41478	0.99806	1.41284	0.70642	−0.12783
0.90	2.45960	0.40657	1.02652	1.43309	0.71630	−0.10536
0.92	2.50929	0.39852	1.05539	1.45390	0.72590	−0.08338
0.94	2.55998	0.39063	1.08468	1.47530	0.73522	−0.06188
0.96	2.61170	0.38289	1.11440	1.49729	0.74428	−0.04082
0.98	2.66446	0.37531	1.14457	1.51988	0.75307	−0.02020
1.00	2.71828	0.36788	1.17520	1.54308	0.76159	0
1.1	3.00417	0.33287	1.33565	1.66852	0.80050	0.09531
1.2	3.32012	0.30119	1.50946	1.81066	0.83365	0.18232
1.3	3.66930	0.27253	1.69838	1.97091	0.86172	0.26236
1.4	4.05520	0.24660	1.90430	2.15090	0.88535	0.33647
1.5	4.48168	0.22313	2.12928	2.35241	0.90515	0.40547
1.6	4.95303	0.20190	2.37557	2.57746	0.92167	0.47000
1.7	5.47395	0.18268	2.64563	2.82832	0.93541	0.53063
1.8	6.04965	0.16530	2.94217	3.10747	0.94681	0.58779
1.9	6.68589	0.14957	3.26816	3.41773	0.95624	0.64185
2.0	7.38906	0.13534	3.62686	3.76220	0.96403	0.69315
2.1	8.16617	0.12246	4.02186	4.14431	0.97045	0.74194
2.2	9.02501	0.11080	4.45710	4.56791	0.97574	0.78846
2.3	9.97418	0.10026	4.93696	5.03722	0.98010	0.83291
2.4	11.02318	0.090718	5.46623	5.55695	0.98367	0.87547
2.5	12.18249	0.082085	6.05020	6.13229	0.98661	0.91629
2.6	13.46374	0.074274	6.69473	6.76901	0.98903	0.95551
2.7	14.87973	0.067206	7.40626	7.47347	0.99101	0.99325
2.8	16.44465	0.060810	8.19192	8.25273	0.99263	1.02962
2.9	18.17415	0.055023	9.05956	9.11458	0.99396	1.06471
3.0	20.08554	0.049787	10.01787	10.06766	0.99505	1.09861

x	e^{x}	e^{-x}	$\sinh x$	$\cosh x$	$\tanh x$	$\log_e x$
3.1	22.19795	0.045049	11.07645	11.12150	0.99595	1.13140
3.2	24.53253	0.040762	12.24588	12.28665	0.99668	1.16315
3.3	27.11264	0.036883	13.53788	13.57476	0.99728	1.19392
3.4	29.96410	0.033373	14.96536	14.99874	0.99777	1.22378
3.5	33.11545	0.030197	16.54263	16.57282	0.99818	1.25276
3.6	36.59823	0.027324	18.28546	18.31278	0.99851	1.28093
3.7	40.44730	0.024724	20.21129	20.23601	0.99878	1.30833
3.8	44.70118	0.022371	22.33941	22.36178	0.99900	1.33500
3.9	49.40245	0.020242	24.69110	24.71135	0.99918	1.36098
4.0	54.59815	0.018316	27.28991	27.30823	0.99933	1.38629
4.1	60.34029	0.016573	30.16186	30.17843	*$0.0^{3}549$	1.41099
4.2	66.68633	0.014996	33.33567	33.35066	*$0.0^{3}450$	1.43508
4.3	73.69647	0.013569	36.84311	36.85668	*$0.0^{3}368$	1.45862
4.4	81.45087	0.012277	40.71930	40.73157	*$0.0^{3}301$	1.48160
4.5	90.01713	0.011109	45.00301	45.01412	*$0.0^{3}247$	1.50408
4.6	99.48432	0.010052	49.73713	49.74718	*$0.0^{3}202$	1.52606
4.7	109.94717	$0.0^{2}90953$	54.96904	54.97813	*$0.0^{3}165$	1.54756
4.8	121.51042	$0.0^{2}82297$	60.75109	60.75932	*$0.0^{3}135$	1.56862
4.9	134.28978	$0.0^{2}74466$	67.14117	67.14861	*$0.0^{3}111$	1.58924
5.0	148.41316	$0.0^{2}67379$	74.20321	74.20995	*$0.0^{4}908$	1.60944
6	403.42879	$0.0^{2}24788$	201.71316	201.71564	*$0.0^{4}123$	1.79176
7	1096.63316	$0.0^{3}91188$	548.31612	548.31704	*$0.0^{5}166$	1.94591
8	2980.95799	$0.0^{3}33546$	1490.47883	1490.47916	*$0.0^{6}225$	2.07944
9	8103.08393	$0.0^{3}12341$	4051.54190	4051.54203	*$0.0^{7}305$	2.19722
10	22026	$0.0^{4}4540$	11013.2	11013.2	*$0.0^{8}412$	2.30259
11	59874	$0.0^{4}1670$	29937	↑	*$0.0^{9}558$	2.39790
12	16275^{1}	$0.0^{5}6144$	81377		*$0.0^{10}755$	2.48491
13	44241^{1}	$0.0^{5}2260$	22121^{1}		*$0.0^{10}102$	2.56495
14	12026^{2}	$0.0^{6}8315$	60130^{1}		*$0.0^{11}138$	2.63906
15	32690^{2}	$0.0^{6}3059$	16345^{2}		*$0.0^{12}187$	2.70805
16	88861^{2}	$0.0^{6}1125$	44431^{2}		*$0.0^{13}253$	2.77258
17	24155^{3}	$0.0^{7}4140$	12077^{3}		*$0.0^{14}343$	2.83321
18	65660^{3}	$0.0^{7}1523$	32830^{3}		*$0.0^{15}464$	2.89037
19	17848^{4}	$0.0^{8}5603$	89241^{3}		*$0.0^{16}628$	2.94444
20	48517^{4}	$0.0^{8}2061$	24258^{4}		*$0.0^{17}849$	2.99573
21	13188^{5}	$0.0^{9}7583$	65941^{4}		*$0.0^{17}115$	3.04452
22	35849^{5}	$0.0^{9}2789$	17925^{5}		*$0.0^{18}155$	3.09104
23	97448^{5}	$0.0^{9}1026$	48724^{5}		*$0.0^{19}211$	3.13549
24	26489^{6}	$0.0^{10}3775$	13245^{6}		*$0.0^{20}285$	3.17805
25	72005^{6}	$0.0^{10}1389$	36002^{6}	同	*$0.0^{21}386$	3.21888
26	19573^{7}	$0.0^{11}5109$	97865^{6}		*$0.0^{22}522$	3.25810
27	53205^{7}	$0.0^{11}1880$	26602^{7}		*$0.0^{23}706$	3.29584
28	14463^{8}	$0.0^{12}6914$	72313^{7}		*$0.0^{24}956$	3.33220
29	39313^{8}	$0.0^{12}2544$	19657^{8}		*$0.0^{24}129$	3.36730
30	10686^{9}	$0.0^{13}9358$	53432^{8}	左	*$0.0^{25}175$	3.40120
35	15860^{11}	$0.0^{15}6305$	79301^{10}		*$0.0^{30}795$	3.55535
40	23539^{13}	$0.0^{17}4248$	11769^{13}		*$0.0^{34}361$	3.68888
45	34934^{15}	$0.0^{19}2863$	17467^{15}		*$0.0^{38}164$	3.80666
50	51847^{17}	$0.0^{21}1929$	25924^{17}		*$0.0^{43}744$	3.91202
55	76948^{19}	$0.0^{23}1300$	38474^{19}		*$0.0^{47}338$	4.00733
60	11420^{22}	$0.0^{26}8757$	57100^{21}		*$0.0^{51}153$	4.09434
65	16949^{24}	$0.0^{28}5900$	84744^{23}		*$0.0^{56}696$	4.17439
70	25154^{26}	$0.0^{30}3975$	12577^{26}		*$0.0^{60}316$	4.24849
75	37332^{28}	$0.0^{32}2679$	18666^{28}		*$0.0^{64}144$	4.31749
80	55406^{30}	$0.0^{34}1805$	27703^{30}		*$0.0^{69}652$	4.38203
85	82230^{32}	$0.0^{36}1216$	41115^{32}		*$0.0^{73}296$	4.44265
90	12204^{35}	$0.0^{39}8194$	61020^{34}		*$0.0^{77}134$	4.49981
95	18112^{37}	$0.0^{41}5521$	90562^{36}		*$0.0^{82}610$	4.55388
100	26882^{39}	$0.0^{43}3720$	13441^{39}	↓	*$0.0^{86}277$	4.60517

表中的数字,例如 12077^{3} 表示 12077×10^{3}, $0.0^{3}91188$ 表示 0.00091188. $x>10$ 的 $\cosh x$ 的值在此表的精确度的范围内可以看做和 $\sinh x$ 的值相同,故写为“同左”. $x>4$ 的 $\tanh x$ 的值因相当接近于 1, 故代有 * 号者(在本页的表中)表示 $1-\tanh x$ 的值,例如 10 行中 *$0.0^{8}412$ 表示 $\tanh 10=1-0.00000000412$.

2, 10 的小数幂及其他.

$e^{\pi} = 23.140693$

x	2^x	10^x	$e^{\pi x}$	$-x\log_2 x$
0.05	1.035265	1.122018	1.17009	0.216096
0.10	1.071773	1.258925	1.36911	0.332193
0.15	1.109569	1.412538	1.60198	0.410545
0.20	1.148698	1.584893	1.87446	0.464386
0.25	1.189207	1.778279	2.19328	0.500000
0.30	1.231144	1.995262	2.56633	0.521090
0.35	1.274561	2.238721	3.00284	0.530101
0.40	1.319508	2.511886	3.51359	0.528771
0.45	1.366040	2.818383	4.11121	0.518401
0.50	1.414214	3.162278	4.81048	0.500000
0.55	1.464086	3.548134	5.62869	0.474373
0.60	1.515717	3.981072	6.58606	0.442179
0.65	1.569168	4.466836	7.70628	0.403967
0.70	1.624505	5.011872	9.01703	0.360201
0.75	1.681793	5.623413	10.55072	0.311278
0.80	1.741101	6.309573	12.34528	0.257542
0.85	1.802501	7.079458	14.44508	0.199295
0.90	1.866066	7.943282	16.90202	0.136803
0.95	1.931873	8.912509	19.77687	0.070301

11. 三角函数♦和弧度(→初等函数,三角学)

x(弧度)	α(度)	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	$\cot x$
0.00	0°00′00″	1.00000	0.00000	0.00000	∞
0.05	2°51′53″	0.99875	0.04998	0.05004	19.98333
0.10	5°43′46″	0.99500	0.09983	0.10033	9.96664
0.15	8°35′40″	0.98877	0.14944	0.15114	6.61660
0.20	11°27′33″	0.98007	0.19867	0.20271	4.93315
0.25	14°19′26″	0.96891	0.24740	0.25534	3.91632
0.30	17°11′19″	0.95534	0.29552	0.30934	3.23273
0.35	20°03′13″	0.93937	0.34290	0.36503	2.73951
0.40	22°55′06″	0.92106	0.38942	0.42279	2.36522
0.45	25°46′59″	0.90045	0.43497	0.48306	2.07016
0.50	28°38′52″	0.87758	0.47943	0.54630	1.83049
0.55	31°30′46″	0.85252	0.52269	0.61311	1.63104
0.60	34°22′39″	0.82534	0.56464	0.68414	1.46170
0.65	37°14′32″	0.79608	0.60519	0.76020	1.31544
0.70	40°06′25″	0.76484	0.64422	0.84229	1.18724
0.75	42°58′19″	0.73169	0.68164	0.93160	1.07343
0.80	45°50′12″	0.69671	0.71736	1.02964	0.97121
0.85	48°42′05″	0.65998	0.75128	1.13833	0.87848
0.90	51°33′58″	0.62161	0.78333	1.26016	0.79355
0.95	54°25′52″	0.58168	0.81342	1.39838	0.71511
1.00	57°17′45″	0.54030	0.84147	1.55741	0.64209
1.05	60°09′38″	0.49757	0.86742	1.74332	0.57362
1.10	63°01′31″	0.45360	0.89121	1.96476	0.50897
1.15	65°53′25″	0.40849	0.91276	2.23450	0.44753
1.20	68°45′18″	0.36236	0.93204	2.57215	0.38878
1.25	71°37′11″	0.31532	0.94898	3.00957	0.33227
1.30	74°29′04″	0.26750	0.96356	3.60210	0.27762
1.35	77°20′57″	0.21901	0.97572	4.45522	0.22446
1.40	80°12′51″	0.16997	0.98545	5.79788	0.17248
1.45	83°04′44″	0.12050	0.99271	8.23810	0.12139
1.50	85°56′37″	0.07074	0.99749	14.10142	0.07091
1.55	88°48′31″	+0.02079	0.99978	+48.07849	+0.02080
1.60	91°40′24″	−0.02920	0.99957	−34.23253	−0.02921
1.65	94°32′17″	−0.07912	0.99687	−12.59926	−0.07937
1.70	97°24′10″	−0.12884	0.99166	−7.69660	−0.12993
1.75	100°16′03″	−0.17825	0.98399	−5.52038	−0.18115

x(弧度)	α(度)	cos x	sin x	tan x	cot x
1.80	103°07′57″	−0.22720	0.97385	−4.28626	−0.23330
1.85	105°59′50″	−0.27559	0.96128	−3.48806	−0.28669
1.90	108°51′43″	−0.32329	0.94630	−2.92710	−0.34164
1.95	111°43′36″	−0.37018	0.92896	−2.50948	−0.39849
2.00	114°35′30″	−0.41615	0.90930	−2.18504	−0.45766
2.05	117°27′23″	−0.46107	0.88736	−1.92456	−0.51960
2.10	120°19′16″	−0.50485	0.86321	−1.70985	−0.58485
2.15	123°11′09″	−0.54786	0.83690	−1.52898	−0.65403
2.20	126°03′03″	−0.58850	0.80850	−1.37382	−0.72790
2.25	128°54′56″	−0.62817	0.77807	−1.23863	−0.80734
2.30	131°46′49″	−0.66628	0.74571	−1.11921	−0.89348
2.35	134°38′42″	−0.70271	0.71147	−1.01247	−0.98769
2.40	137°30′36″	−0.73739	0.67546	−0.91601	−1.09169
2.45	140°22′29″	−0.77023	0.63776	−0.82802	−1.20770
2.50	143°14′22″	−0.80114	0.59847	−0.74702	−1.33865
2.55	146°06′15″	−0.83005	0.55768	−0.67186	−1.48840
2.60	148°58′08″	−0.85689	0.51550	−0.60160	−1.66224
2.65	151°50′02″	−0.88158	0.47203	−0.53544	−1.86764
2.70	154°41′55″	−0.90407	0.42738	−0.47273	−2.11538
2.75	157°33′48″	−0.92430	0.38166	−0.41292	−2.42154
2.80	160°25′41″	−0.94222	0.33499	−0.35553	−2.81270
2.85	163°17′35″	−0.95779	0.28748	−0.30015	−3.33169
2.90	166°09′28″	−0.97096	0.23925	−0.24641	−4.05835
2.95	169°01′21″	−0.98170	0.19042	−0.19397	−5.15538
3.00	171°53′14″	−0.98999	0.14112	−0.14255	−7.01525
3.05	174°45′08″	−0.99581	0.09146	−0.09185	−10.88736
3.10	177°37′01″	−0.99914	+0.04158	−0.04162	−24.02884
3.15	180°28′54″	−0.99996	−0.00841	+0.00841	+118.94173
3.20	183°20′47″	−0.99829	−0.05837	0.05847	17.10166
3.25	186°12′41″	−0.99413	−0.10820	0.10883	9.18830
3.30	189°04′34″	−0.98748	−0.15775	0.15975	6.25995
3.35	191°56′47″	−0.97836	−0.20690	0.21148	4.72636
3.40	194°48′40″	−0.96680	−0.25554	0.26432	3.78334
3.45	197°40′34″	−0.95282	−0.30354	0.31857	3.13790
3.50	200°32′27″	−0.93646	−0.35078	0.37459	2.66962

12. 椭圆积分(→椭圆函数)

I) 完全椭圆积分[†]

对于模数 k，补模数 k' 是 $k^2+k'^2=1$.

第一类完全椭圆积分[†]

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}.$$

第二类完全椭圆积分[†]

$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$E'=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

在上述积分之间有 $EK'+KE'-KK'=\pi/2$ 的关系 (Legendre 关系[†]).

$q=e^{-\pi K'/K},\ q'=e^{-\pi K/K'}$.

在下面的完全椭圆积分表中，k^2 和 k'^2，q 和 q'，K 和 K'，E 和 E' 分别可以代换 (参看最下一行). 利用此点，得到对于 $0.5\leqslant k^2\leqslant 1$ 的值.

而且 $K(0)=E(0)=\pi/2$.

k^2	q	K	K'	E	E'	q'	k'^2
0.00	0	1.57080	∞	1.57080	1	1	1.00
0.01	0.00063	1.57474	3.69563	1.56686	1.01599	0.26220	0.99
0.02	0.00126	1.57873	3.35414	1.56291	1.02859	0.22793	0.98
0.03	0.00190	1.58278	3.15587	1.55894	1.03994	0.20688	0.97
0.04	0.00255	1.58686	3.01611	1.55496	1.05050	0.19150	0.96
0.05	0.00321	1.59100	2.90833	1.55097	1.06047	0.17932	0.95
0.06	0.00387	1.59518	2.82075	1.54696	1.06998	0.16921	0.94
0.07	0.00454	1.59942	2.74707	1.54293	1.07912	0.16055	0.93
0.08	0.00521	1.60370	2.68355	1.53889	1.08793	0.15298	0.92
0.09	0.00589	1.60804	2.62777	1.53483	1.09647	0.14624	0.91
0.10	0.00658	1.61244	2.57809	1.53075	1.10477	0.14017	0.90
0.11	0.00728	1.61688	2.53333	1.52666	1.11285	0.13465	0.89
0.12	0.00799	1.62139	2.49263	1.52255	1.12074	0.12957	0.88
0.13	0.00870	1.62595	2.45533	1.51842	1.12845	0.12488	0.87
0.14	0.00943	1.63057	2.42093	1.51428	1.13599	0.12052	0.86
0.15	0.01016	1.63525	2.38901	1.51012	1.14339	0.11644	0.85
0.16	0.01090	1.64000	2.35926	1.50594	1.15065	0.11261	0.84
0.17	0.01164	1.64480	2.33140	1.50174	1.15778	0.10900	0.83
0.18	0.01240	1.64967	2.30523	1.49752	1.16479	0.10559	0.82
0.19	0.01317	1.65461	2.28054	1.49329	1.17169	0.10235	0.81
0.20	0.01394	1.65962	2.25720	1.48903	1.17848	0.09927	0.80
0.21	0.01473	1.66470	2.23506	1.48476	1.18518	0.09634	0.79
0.22	0.01552	1.66985	2.21402	1.48046	1.19178	0.09354	0.78
0.23	0.01633	1.67507	2.19397	1.47615	1.19829	0.09085	0.77
0.24	0.01715	1.68037	2.17482	1.47181	1.20471	0.08827	0.76
0.25	0.01797	1.68575	2.15651	1.46746	1.21105	0.08580	0.75
0.26	0.01881	1.69120	2.13897	1.46308	1.21732	0.08341	0.74
0.27	0.01966	1.69674	2.12213	1.45868	1.22351	0.08112	0.73
0.28	0.02052	1.70237	2.10594	1.45426	1.22963	0.07890	0.72
0.29	0.02139	1.70808	2.09037	1.44982	1.23568	0.07676	0.71
0.30	0.02228	1.71388	2.07536	1.44536	1.24167	0.07469	0.70
0.31	0.02317	1.71978	2.06088	1.44087	1.24759	0.07268	0.69
0.32	0.02409	1.72577	2.04689	1.43636	1.25345	0.07074	0.68
0.33	0.02501	1.73186	2.03336	1.43183	1.25926	0.06885	0.67
0.34	0.02595	1.73805	2.02027	1.42727	1.26501	0.06702	0.66
0.35	0.02690	1.74435	2.00759	1.42269	1.27070	0.06524	0.65
0.36	0.02786	1.75075	1.99530	1.41808	1.27634	0.06351	0.64
0.37	0.02885	1.75726	1.98337	1.41345	1.28194	0.06182	0.63
0.38	0.02984	1.76389	1.97178	1.40879	1.28748	0.06018	0.62
0.39	0.03085	1.77064	1.96052	1.40411	1.29297	0.05858	0.61
0.40	0.03188	1.77751	1.94956	1.39939	1.29842	0.05702	0.60
0.41	0.03293	1.78451	1.93890	1.39465	1.30383	0.05550	0.59
0.42	0.03399	1.79165	1.92852	1.38988	1.30919	0.05401	0.58
0.43	0.03507	1.79891	1.91841	1.38508	1.31451	0.05255	0.57
0.44	0.03618	1.80632	1.90854	1.38025	1.31978	0.05113	0.56
0.45	0.03730	1.81388	1.89892	1.37540	1.32502	0.04974	0.55
0.46	0.03844	1.82159	1.88953	1.37051	1.33022	0.04839	0.54
0.47	0.03960	1.82945	1.88036	1.36559	1.33538	0.04705	0.53
0.48	0.04078	1.83749	1.87140	1.36064	1.34050	0.04575	0.52
0.49	0.04199	1.84569	1.86264	1.35566	1.34559	0.04447	0.51
0.50	0.04321	1.85407	1.85407	1.35064	1.35064	0.04321	0.50
k'^2	q'	K'	K	E'	E	q	k^2

II) 不完全椭圆积分[79]

第一类不完全椭圆积分[79]

$$F(k, \varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},\quad k=\sin\theta,\quad F(k,0)=0.$$

φ \ θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
5°	0.08727	0.08727	0.08728	0.08729	0.08731	0.08733	0.08735	0.08736	0.08737	0.08738
10°	0.17453	0.17456	0.17464	0.17475	0.17490	0.17505	0.17520	0.17532	0.17540	0.17543
15°	0.26180	0.26189	0.26215	0.26254	0.26303	0.26356	0.26406	0.26448	0.26475	0.26484
20°	0.34907	0.34927	0.34988	0.35082	0.35199	0.35326	0.35447	0.35548	0.35615	0.35638
25°	0.43633	0.43674	0.43791	0.43973	0.44203	0.44455	0.44699	0.44904	0.45040	0.45088
30°	0.52360	0.52428	0.52628	0.52943	0.53343	0.53787	0.54223	0.54593	0.54843	0.54981
35°	0.61087	0.61193	0.61506	0.62003	0.62643	0.63364	0.64085	0.64707	0.65132	0.65284
40°	0.69813	0.69969	0.70429	0.71165	0.72126	0.73231	0.74358	0.75352	0.76043	0.76291
45°	0.78540	0.78756	0.79398	0.80437	0.81815	0.83431	0.85122	0.86653	0.87741	0.88137
50°	0.87266	0.87556	0.88416	0.89825	0.91725	0.94008	0.96465	0.98762	1.00444	1.01068
55°	0.95993	0.96366	0.97483	0.99331	1.01871	1.04998	1.08479	1.11865	1.14442	1.15423
60°	1.04720	1.05188	1.06597	1.08955	1.12256	1.16432	1.21254	1.26186	1.30135	1.31696
65°	1.13446	1.14020	1.15755	1.18691	1.22877	1.28326	1.34893	1.41994	1.48098	1.50645
70°	1.22173	1.22861	1.24953	1.28530	1.33723	1.40677	1.49441	1.59591	1.69181	1.73542
75°	1.30900	1.31710	1.34184	1.38457	1.44767	1.53455	1.64918	1.79269	1.94682	2.02759
80°	1.39626	1.40565	1.43442	1.48455	1.55973	1.66597	1.81253	2.01193	2.26527	2.43625
85°	1.48353	1.49423	1.52717	1.58503	1.67295	1.80006	1.98264	2.25178	2.66935	3.13130
90°	1.57080	1.58284	1.62003	1.68575	1.78677	1.93558	2.15652	2.50455	3.15339	∞
$k=$	0	0.17365	0.34202	0.50000	0.64279	0.76604	0.86603	0.93969	0.98481	1

第二类不完全椭圆积分♦

$$E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad k = \sin\theta. \quad E(k, 0) = 0.$$

φ \ θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
5°	0.08727	0.08726	0.08725	0.08724	0.08722	0.08720	0.08718	0.08717	0.08716	0.08716
10°	0.17453	0.17451	0.17443	0.17431	0.17417	0.17401	0.17387	0.17375	0.17367	0.17365
15°	0.26180	0.26171	0.26145	0.26106	0.26058	0.26006	0.25957	0.25917	0.25891	0.25882
20°	0.34907	0.34886	0.34825	0.34733	0.34619	0.34496	0.34381	0.34286	0.34224	0.34202
25°	0.43633	0.43593	0.43477	0.43298	0.43076	0.42838	0.42612	0.42426	0.42304	0.42262
30°	0.52360	0.52292	0.52094	0.51788	0.51409	0.51000	0.50609	0.50287	0.50074	0.50000
35°	0.61087	0.60980	0.60672	0.60194	0.59598	0.58952	0.58332	0.57818	0.57477	0.57358
40°	0.69813	0.69658	0.69207	0.68506	0.67628	0.66671	0.65746	0.64974	0.64459	0.64279
45°	0.78540	0.78324	0.77697	0.76720	0.75489	0.74137	0.72822	0.71715	0.70972	0.70711
50°	0.87266	0.86979	0.86142	0.84832	0.83173	0.81338	0.79538	0.78007	0.76971	0.76604
55°	0.95993	0.95622	0.94541	0.92843	0.90680	0.88269	0.85879	0.83822	0.82417	0.81915
60°	1.04720	1.04255	1.02897	1.00756	0.98013	0.94930	0.91839	0.89144	0.87276	0.86603
65°	1.13446	1.12878	1.11213	1.08577	1.05183	1.01333	0.97427	0.93965	0.91523	0.90631
70°	1.22173	1.21491	1.19493	1.16318	1.12205	1.07500	1.02664	0.98298	0.95144	0.93969
75°	1.30900	1.30097	1.27742	1.23989	1.19101	1.13460	1.07586	1.02172	0.98141	0.96593
80°	1.39626	1.38698	1.35968	1.31606	1.25897	1.19255	1.12249	1.05648	1.00543	0.98481
85°	1.48353	1.47294	1.44178	1.39186	1.32623	1.24934	1.16726	1.08825	1.02436	0.99619
90°	1.57080	1.55889	1.52380	1.46746	1.39314	1.30554	1.21106	1.11838	1.04011	1.00000
$k=$	0	0.17365	0.34202	0.50000	0.64279	0.76604	0.86603	0.93969	0.98481	1

13. Γ 函数和多 Γ 函数

I) Γ 函数†♦ (→Γ 函数)

$\Gamma(1/8) = 7.533941598797$, $\Gamma(1/7) = 6.548062940247$, $\Gamma(1/6) = 5.566316001780$,

$\Gamma(1/5) = 4.590843711998$, $\Gamma(1/4) = 3.625609908221908$, $\Gamma(1/3) = 2.678938534707748$,

$\Gamma(1/2) = 1.772453850905516 = \sqrt{\pi}$,

$\Gamma(2/3) = 1.354117939426400$, $\Gamma(3/4) = 1.225416702465178$.

$0 < x$ 的 $\Gamma(x)$ 的极小点 $x_0 = 1.4616321$. $\Gamma(x_0) = 0.8856032$.

x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$	x	$\Gamma(x)$
		0.31	2.89034	0.66	1.36616	1.01	0.99433	1.36	0.89018	1.71	0.91057
		0.32	2.79575	0.67	1.34820	1.02	0.98884	1.37	0.88931	1.72	0.91258
		0.33	2.70721	0.68	1.33088	1.03	0.98355	1.38	0.88854	1.73	0.91467
		0.34	2.62416	0.69	1.31418	1.04	0.97844	1.39	0.88785	1.74	0.91683
0.00	∞	0.35	2.54615	0.70	1.29806	1.05	0.97350	1.40	0.88726	1.75	0.91906
0.01	99.43259	0.36	2.47273	0.71	1.28250	1.06	0.96874	1.41	0.88676	1.76	0.92137
0.02	49.44221	0.37	2.40355	0.72	1.26747	1.07	0.96415	1.42	0.88636	1.77	0.92376
0.03	32.78500	0.38	2.33826	0.73	1.25297	1.08	0.95973	1.43	0.88604	1.78	0.92623
0.04	24.46096	0.39	2.27655	0.74	1.23895	1.09	0.95546	1.44	0.88581	1.79	0.92877
0.05	19.47009	0.40	2.21816	0.75	1.22542	1.10	0.95135	1.45	0.88566	1.80	0.93138
0.06	16.14573	0.41	2.16284	0.76	1.21234	1.11	0.94740	1.46	0.88560	1.81	0.93408
0.07	13.77360	0.42	2.11037	0.77	1.19969	1.12	0.94359	1.47	0.88563	1.82	0.93685
0.08	11.99657	0.43	2.06055	0.78	1.18747	1.13	0.93993	1.48	0.88575	1.83	0.93969
0.09	10.61622	0.44	2.01319	0.79	1.17566	1.14	0.93642	1.49	0.88595	1.84	0.94261
0.10	9.51351	0.45	1.96814	0.80	1.16422	1.15	0.93304	1.50	0.88623	1.85	0.94561
0.11	8.61269	0.46	1.92523	0.81	1.15318	1.16	0.92980	1.51	0.88659	1.86	0.94869
0.12	7.86325	0.47	1.88433	0.82	1.14249	1.17	0.92670	1.52	0.88704	1.87	0.95184
0.13	7.23024	0.48	1.84531	0.83	1.13216	1.18	0.92373	1.53	0.88757	1.88	0.95507
0.14	6.68869	0.49	1.80805	0.84	1.12216	1.19	0.92088	1.54	0.88818	1.89	0.95838
0.15	6.22027	0.50	1.77245	0.85	1.11248	1.20	0.91817	1.55	0.88887	1.90	0.96177
0.16	5.81127	0.51	1.73842	0.86	1.10312	1.21	0.91558	1.56	0.88964	1.91	0.96523
0.17	5.45117	0.52	1.70584	0.87	1.09407	1.22	0.91311	1.57	0.89049	1.92	0.96877
0.18	5.13182	0.53	1.67466	0.88	1.08531	1.23	0.91075	1.58	0.89142	1.93	0.97240
0.19	4.84676	0.54	1.64477	0.89	1.07683	1.24	0.90852	1.59	0.89243	1.94	0.97610
0.20	4.59084	0.55	1.61612	0.90	1.06863	1.25	0.90640	1.60	0.89352	1.95	0.97988
0.21	4.35989	0.56	1.58864	0.91	1.06069	1.26	0.90440	1.61	0.89468	1.96	0.98374
0.22	4.15048	0.57	1.56226	0.92	1.05302	1.27	0.90250	1.62	0.89592	1.97	0.98768
0.23	3.95980	0.58	1.53693	0.93	1.04559	1.28	0.90072	1.63	0.89724	1.98	0.99171
0.24	3.78550	0.59	1.51259	0.94	1.03840	1.29	0.89904	1.64	0.89864	1.99	0.99581
0.25	3.62561	0.60	1.48919	0.95	1.03145	1.30	0.89747	1.65	0.90012	2.00	1
0.26	3.47845	0.61	1.46669	0.96	1.02473	1.31	0.89600	1.66	0.90167		
0.27	3.34260	0.62	1.44503	0.97	1.01823	1.32	0.89464	1.67	0.90330		
0.28	3.21685	0.63	1.42420	0.98	1.01195	1.33	0.89338	1.68	0.90500		
0.29	3.10014	0.64	1.40413	0.99	1.00587	1.34	0.89222	1.69	0.90678		
0.30	2.99157	0.65	1.38480	1.00	1	1.35	0.89115	1.70	0.90864		

II) 多 Γ 函数[†♦]. $\psi(x)=d\log\Gamma(x)/dx=\Gamma'(x)/\Gamma(x)$, $\psi'(x)=d\psi(x)/dx$. (→Γ 函数).

$$\psi(n+1)+C=S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.\quad (\to 数表 9).$$

$\psi(1/3)=-3.132034$, $\psi(2/3)=-1.318234$. $\psi(1)=-C$, $\psi'(1)=\pi^2/6$.

x	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	x	$\psi(x)$	$\psi'(x)$	x	$\psi(x)$	$\psi'(x)$
0.00	$-\infty$	$+\infty$	0.55	−1.7360	4.2009	1.30	−0.1692	1.1343
0.05	−20.4978	401.5324	0.60	−1.5406	3.6362	1.35	−0.1139	1.0772
0.10	−10.4238	101.4333	0.65	−1.3703	3.1915	1.40	−0.0614	1.0254
0.15	−7.0210	45.7900	0.70	−1.2200	2.8340	1.45	−0.0113	0.9781
0.20	−5.2890	26.2674	0.75	−1.0858	2.5419	1.50	+0.0365	0.9348
0.25	−4.2275	17.1973	0.80	−0.9650	2.2995	1.55	0.0822	0.8951
0.30	−3.5025	12.2454	0.85	−0.8553	2.0958	1.60	0.1260	0.8584
0.35	−2.9711	9.2405	0.90	−0.7549	1.9226	1.65	0.1681	0.8246
0.40	−2.5614	7.2754	0.95	−0.6626	1.7738	1.70	0.2085	0.7932
0.45	−2.2335	5.9164	1.00	−0.5772	1.6449	1.75	0.2475	0.7641
0.50	−1.9635	4.9348	1.05	−0.4978	1.5324	1.80	0.2850	0.7370
			1.10	−0.4238	1.4333	1.85	0.3212	0.7117
			1.15	−0.3543	1.3456	1.90	0.3562	0.6880
			1.20	−0.2890	1.2674	1.95	0.3900	0.6658
			1.25	−0.2275	1.1973	2.00	0.4228	0.6449

14. Bessel 函数 (→Bessel 函数)

I) 0 次和一次的 Bessel 函数

$J_0(0)=1,\quad J_1(0)=0,\quad N_0(0)=-\infty,\quad N_1(0)=-\infty.$

x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$N_0(x)$	$N_1(x)$	x	$J_0(x)$	$J_1(x)$	$N_0(x)$	$N_1(x)$
0.1	0.99750	0.04994	−1.53424	−6.45895	5.1	−0.14433	−0.33710	−0.32160	0.11374
0.2	0.99002	0.09950	−1.08111	−3.32383	5.2	−0.11029	−0.34322	−0.33125	0.07919
0.3	0.97763	0.14832	−0.80727	−2.29311	5.3	−0.07580	−0.34596	−0.33744	0.04445
0.4	0.96040	0.19603	−0.60602	−1.78087	5.4	−0.04121	−0.34534	−0.34017	+0.01013
0.5	0.93847	0.24227	−0.44452	−1.47147	5.5	−0.00684	−0.34144	−0.33948	−0.02376
0.6	0.91200	0.28670	−0.30851	−1.26039	5.6	+0.02697	−0.33433	−0.33544	−0.05681
0.7	0.88120	0.32900	−0.19066	−1.10325	5.7	0.05992	−0.32415	−0.32816	−0.08872
0.8	0.84629	0.36884	−0.08680	−0.97814	5.8	0.09170	−0.31103	−0.31775	−0.11923
0.9	0.80752	0.40595	+0.00563	−0.87313	5.9	0.12203	−0.29514	−0.30437	−0.14808
1.0	0.76520	0.44005	0.08826	−0.78121	6.0	0.15065	−0.27668	−0.28819	−0.17501
1.1	0.71962	0.47090	0.16216	−0.69812	6.1	0.17729	−0.25586	−0.26943	−0.19981
1.2	0.67113	0.49829	0.22808	−0.62114	6.2	0.20175	−0.23292	−0.24831	−0.22228
1.3	0.62009	0.52202	0.28654	−0.54852	6.3	0.22381	−0.20809	−0.22506	−0.24225
1.4	0.56686	0.54195	0.33790	−0.47915	6.4	0.24331	−0.18164	−0.19995	−0.25956
1.5	0.51183	0.55794	0.38245	−0.41231	6.5	0.26009	−0.15384	−0.17324	−0.27409
1.6	0.45540	0.56990	0.42043	−0.34758	6.6	0.27404	−0.12498	−0.14523	−0.28575
1.7	0.39798	0.57777	0.45203	−0.28473	6.7	0.28506	−0.09534	−0.11619	−0.29446
1.8	0.33999	0.58152	0.47743	−0.22366	6.8	0.29310	−0.06522	−0.08643	−0.30019
1.9	0.28182	0.58116	0.49682	−0.16441	6.9	0.29810	−0.03490	−0.05625	−0.30292
2.0	0.22389	0.57672	0.51038	−0.10703	7.0	0.30008	−0.00468	−0.02595	−0.30267
2.1	0.16661	0.56829	0.51829	−0.05168	7.1	0.29905	+0.02515	+0.00418	−0.29948
2.2	0.11036	0.55596	0.52078	+0.00149	7.2	0.29507	0.05433	0.03385	−0.29342
2.3	0.05554	0.53987	0.51808	0.05228	7.3	0.28822	0.08257	0.06277	−0.28459
2.4	+0.00251	0.52019	0.51041	0.10049	7.4	0.27860	0.10963	0.09068	−0.27311
2.5	−0.04838	0.49709	0.49807	0.14592	7.5	0.26634	0.13525	0.11731	−0.25913
2.6	−0.09680	0.47082	0.48133	0.18836	7.6	0.25160	0.15921	0.14243	−0.24280
2.7	−0.14245	0.44160	0.46050	0.22763	7.7	0.23456	0.18131	0.16580	−0.22432
2.8	−0.18504	0.40971	0.43592	0.26355	7.8	0.21541	0.20136	0.18723	−0.20389
2.9	−0.22431	0.37543	0.40791	0.29594	7.9	0.19436	0.21918	0.20652	−0.18172
3.0	−0.26005	0.33906	0.37685	0.32467	8.0	0.17165	0.23464	0.22352	−0.15800
3.1	−0.29206	0.30092	0.34310	0.34963	8.1	0.14752	0.24761	0.23809	−0.13315
3.2	−0.32019	0.26134	0.30705	0.37071	8.2	0.12222	0.25800	0.25012	−0.10724
3.3	−0.34430	0.22066	0.26909	0.38785	8.3	0.09601	0.26574	0.25951	−0.08060
3.4	−0.36430	0.17923	0.22962	0.40102	8.4	0.06916	0.27079	0.26622	−0.05348
3.5	−0.38013	0.13738	0.18902	0.41019	8.5	0.04194	0.27312	0.27021	−0.02617
3.6	−0.39177	0.09547	0.14771	0.41539	8.6	+0.01462	0.27275	0.27146	+0.00108
3.7	−0.39923	0.05383	0.10607	0.41667	8.7	−0.01252	0.26972	0.27000	0.02801
3.8	−0.40256	+0.01282	0.06450	0.41411	8.8	−0.03923	0.26407	0.26587	0.05436
3.9	−0.40183	−0.02724	+0.02338	0.40782	8.9	−0.06525	0.25590	0.25916	0.07987
4.0	−0.39715	−0.06604	−0.01694	0.39793	9.0	−0.09033	0.24531	0.24994	0.10431
4.1	−0.38867	−0.10327	−0.05609	0.38459	9.1	−0.11424	0.23243	0.23834	0.12747
4.2	−0.37656	−0.13865	−0.09375	0.36801	9.2	−0.13675	0.21741	0.22449	0.14911
4.3	−0.36101	−0.17190	−0.12960	0.34839	9.3	−0.15766	0.20041	0.20857	0.16906
4.4	−0.34226	−0.20278	−0.16334	0.32597	9.4	−0.17677	0.18163	0.19074	0.18714
4.5	−0.32054	−0.23106	−0.19471	0.30100	9.5	−0.19393	0.16126	0.17121	0.20318
4.6	−0.29614	−0.25655	−0.22346	0.27375	9.6	−0.20898	0.13952	0.15018	0.21706
4.7	−0.26933	−0.27908	−0.24939	0.24450	9.7	−0.22180	0.11664	0.12787	0.22866
4.8	−0.24043	−0.29850	−0.27230	0.21357	9.8	−0.23228	0.09284	0.10453	0.23789
4.9	−0.20974	−0.31469	−0.29205	0.18125	9.9	−0.24034	0.06837	0.08038	0.24469
5.0	−0.17760	−0.32758	−0.30852	0.14786	10.0	−0.24594	0.04347	0.05567	0.24902

II) Bessel 函数 $^{\dagger}J_n(x)$ 的零点 x_{nk}

k \ n	0	1	2	3	4	5
1	2.40483	3.83171	5.13562	6.38016	7.58834	8.77148
2	5.52008	7.01559	8.41724	9.76102	11.06471	12.33860
3	8.65373	10.17347	11.61984	13.01520	14.37254	15.70017
4	11.79153	13.32369	14.79595	16.22346	17.61597	18.98013
5	14.93092	16.47063	17.95982	19.40941	20.82693	22.21780
6	18.07106	19.61586	21.11700	22.58273	24.01902	25.43034
7	21.21164	22.76008	24.27011	25.74817	27.19909	28.62662
8	24.35247	25.90367	27.42057	28.90835	30.37101	31.81172
9	27.49348	29.04683	30.56920	32.06485	33.53714	34.98878
10	30.63461	32.18968	33.71652	35.21867	36.69900	38.15987

15. 函数渐近公式的系数

以下给出用电子计算机计算函数时采用的渐近公式的一些特例(→多项式逼近,曲线拟合)

I) 指数函数[†]

1) 设 $\frac{x}{\log 2}+1=q+y+\frac{1}{2}\left(q\text{ 是整数}, -\frac{1}{2}\leqslant y<\frac{1}{2}\right)$, 有 7 次渐近公式:

$e^x=2^q v(y)$, $v(y)\doteqdot\sum a_i y^i$. 其中,最大误差是 3×10^{-11}.

$a_0=0.70710678116$, $a_1=0.49012907172$, $a_2=0.16986579572$, $a_3=0.0392473321\ 5$,

$a_4=0.0068009712$, $a_5=0.0009428173$, $a_6=0.0001093869$, $a_7=0.000010826$.

2) 11 次渐近公式: $e^x\doteqdot\sum a_i x^i(-1\leqslant x\leqslant0)$. 最大误差是 1×10^{-12}.

$a_0=0.99999\ 99999\ 990$, $a_1=0.99999\ 99999\ 995$, $a_2=0.50000\ 00000\ 747$,

$a_3=0.16666\ 66666\ 812$, $a_4=0.04166\ 66657\ 960$, $a_5=0.00833\ 33332\ 174$,

$a_6=0.00138\ 88925\ 998$, $a_7=0.00019\ 84130\ 955$, $a_8=0.00002\ 47944\ 428$,

$a_9=0.00000\ 27550\ 711$, $a_{10}=0.00000\ 02819\ 019$, $a_{11}=0.00000\ 00255\ 791$.

3) $$e^x\doteqdot1+\cfrac{x}{-\frac{x}{2}+\cfrac{k_0+k_1x^2+k_2x^4}{1+k_3x^2}}\quad(-\log\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\log\sqrt{2}).$$

最大误差是 1.4×10^{-14}.

$k_0=1.00000\ 00000\ 00327\ 1$, $k_1=0.10713\ 50664\ 56464\ 2$,

$k_2=0.00059\ 45898\ 69018\ 8$, $k_3=0.02380\ 17331\ 57418\ 6$.

II) 对数函数[†]

1) 11 次渐近公式: $\log(1+x)\doteqdot\Sigma a_i x^i(0\leqslant x\leqslant1)$. 最大误差是 1.1×10^{-10}.

$a_0=0.00000\ 00001\ 10$, $a_1=0.99999\ 99654\ 98$, $a_2=-0.49999\ 82537\ 98$,

$a_3=0.33329\ 85059\ 64$, $a_4=-0.24963\ 72428\ 65$, $a_5=0.19773\ 31015\ 60$,

$a_6=-0.15744\ 88954\ 13$, $a_7=0.11712\ 91156\ 18$, $a_8=-0.07364\ 03719\ 14$,

$a_9=0.03469\ 74937\ 56$, $a_{10}=-0.01046\ 82295\ 69$, $a_{11}=0.00148\ 19917\ 22$.

2) 对于 $1\leqslant x\leqslant2$, 设 $y=\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2})(-1\leqslant y\leqslant1)$, 则 $\log x\doteqdot\log\sqrt{2}+\sum a_i y^{2i+1}$

$(0\leqslant i\leqslant5)$ (常数值→数表 9) 是 11 次渐近公式,最大误差是 9.2×10^{-15}.

$a_0=0.34314\ 57505\ 07610\ 6$, $a_1=0.00336\ 70892\ 56222\ 5$, $a_2=0.00005\ 94707\ 04347\ 4$,

$a_3=0.00000\ 12504\ 99776\ 2$, $a_4=0.00000\ 00285\ 68292\ 8$, $a_5=0.00000\ 00007\ 43713\ 9$,

III) 三角函数[†]

1) 设 $\frac{x}{2\pi}=p+\frac{q}{2}+\frac{r}{4}+\frac{z}{8}$ (p 是整数; $q=0.1$; $r=0.1$; $-1\leqslant z<1$), 并且 $s=\sin\frac{\pi z}{4}$,

$c=\cos\frac{\pi z}{4}$.

若 $r=0$, 则 $\sin x=(-1)^q s$, $\cos x=(-1)^q c$;

若 $r=1$, 则 $\sin x=(-1)^q c$, $\cos x=-(-1)^q s$.

此处 s 和 c 是用下列渐近公式计算. 令 $-z^2/2=y$, 则 $s(y)=\sin(\pi z/4)\doteqdot z\sum a_i y^i$, $c(y)=\cos(\pi z/4)\doteqdot\sum b_i y^i$ 是一个 5 次渐近公式,其中最大误差是 s:2×10^{-15}, c:2×10^{-13}.

$a_0 = 0.78539\ 81633\ 97426$， $a_1 = 0.16149\ 10243\ 75338$， $a_2 = 0.00996\ 15782\ 61200$.

$a_3 = 0.00029\ 26094\ 99152$， $a_4 = 0.00000\ 50133\ 389$， $a_5 = 0.00000\ 00555\ 1357$.

$b_0 = 0.99999\ 99999\ 999$， $b_1 = 0.61685\ 02750\ 601$， $b_2 = 0.06341\ 73767\ 885$.

$b_3 = 0.00260\ 79335\ 007$， $b_4 = 0.00005\ 74476\ 09$， $b_5 = 0.00000\ 07765\ 93$.

2) $\dfrac{\sin(\pi x/2)}{x} \doteq \sum(-1)^i a_i x^{2i}(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. 这是一个 10 次 ($0 \leqslant i \leqslant 5$) 渐近公式，其中最大误差是 2.2×10^{-11}.

$a_0 = 1.57079\ 63267\ 682$， $a_1 = 0.64596\ 40955\ 819$， $a_2 = 0.07969\ 26037\ 479$，

$a_3 = 0.00468\ 16578\ 817$， $a_4 = 0.00001\ 60254\ 789$， $a_5 = 0.00000\ 34318\ 687$.

3) $\tan\dfrac{\pi x}{4} \doteq x\left(k_0 + \dfrac{x^2|}{|k_1} + \cdots + \dfrac{x^2|}{|k_4}\right)$ (连分数) ($-1 \leqslant x \leqslant 1$).

最大误差是 9.8×10^{-12}.

$k_0 = 0.78539\ 81634\ 9907$， $k_1 = 6.19229\ 46807\ 1350$， $k_2 = -0.65449\ 83095\ 2316$.

$k_3 = 520.24599\ 06398\ 9939$， $k_4 = -0.07797\ 95098\ 7751$.

IV) 反三角函数†

1) 21 次 ($0 \leqslant i \leqslant 10$) 渐近公式:

$\arcsin x \doteq \sum a_i x^{2i+1}\ (|x| \leqslant 1/\sqrt{2})$.

最大误差是 10^{-10}.

$a_0 = 1.00000\ 00005\ 3$， $a_1 = 0.16666\ 65754\ 5$， $a_2 = 0.07500\ 46066\ 5$，

$a_3 = 0.04453\ 58425\ 7$， $a_4 = 0.03175\ 26509\ 6$， $a_5 = 0.01176\ 58281\ 9$，

$a_6 = 0.06921\ 26185\ 7$， $a_7 = -0.14821\ 09628\ 8$， $a_8 = 0.32889\ 76635\ 2$，

$a_9 = -0.35020\ 41201\ 5$， $a_{10} = 0.19740\ 50325\ 0$.

2) 设 $x = w + u\left(w = \dfrac{1}{8}, \dfrac{3}{8}, \dfrac{5}{8}, \dfrac{7}{8}; -\dfrac{1}{8} \leqslant u \leqslant \dfrac{1}{8}\right)$， $v = \dfrac{x - w}{1 + xw}\left(|v| \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$，

则 $\arctan x = \arctan w + t(v)$， $t(v) = \arctan v$.

$\arctan w$ 的值: $\arctan(1/8) = 0.12435\ 49945\ 46711$， $\arctan(3/8) = 0.35877\ 06702\ 70611$，

$\arctan(5/8) = 0.55859\ 93153\ 43560$， $\arctan(7/8) = 0.71882\ 99996\ 21623$.

$t(v)$ 是用 9 次 ($0 \leqslant i \leqslant 4$) 渐近公式计算的. 其中 $t(v) = \arctan v \doteq \sum(-1)^i a_i v^{2i+1}$，最大误差是 1.6×10^{-13}.

$a_0 = 0.99999\ 99999\ 9992$， $a_1 = 0.33333\ 33328\ 220$， $a_2 = 0.19999\ 97377\ 6$，

$a_3 = 0.14280\ 9976$， $a_4 = 0.10763\ 60$.

3) $\arctan x \doteq x\left(k_0 + \dfrac{x^2|}{|k_1} + \cdots + \dfrac{x^2|}{|k_6}\right)$ (连分数) ($-1 \leqslant x \leqslant 1$).

最大误差是 3.6×10^{-10}.

$k_0 = 0.99999\ 99936\ 2$， $k_1 = -3.00000\ 30869\ 4$， $k_2 = -0.55556\ 97728\ 4$，

$k_3 = -15.77401\ 81127\ 3$，

$k_4 = -0.16190\ 80978\ 0$， $k_5 = -44.57191\ 79508\ 8$， $k_6 = -0.10810\ 67493\ 1$.

V) Γ 函数†

8 次渐近公式: $\Gamma(2 + x) \doteq \sum a_i x^i(-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2)$.

最大误差是 7.6×10^{-8}.

$a_0 = 0.99999\ 9926$,　$a_1 = 0.42278\ 4604$,　$a_2 = 0.41184\ 9671$,

$a_3 = 0.08156\ 52323$,　$a_4 = 0.07406\ 48982$,　$a_5 = -0.00012\ 51376\ 7$,

$a_6 = 0.01229\ 95771$,　$a_7 = -0.00349\ 61289$,　$a_8 = 0.00213\ 85778$.

VI) 正态分布†

1) $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \doteqdot \frac{1}{(1+\sum a_i x^i)^{16}}\ (0 \leqslant x < \infty)$. 这是一个6次渐近公式. 最大误差是 2.8×10^{-7}.

$a_0 = 0.07052\ 30784$,　$a_1 = 0.04228\ 20123$,　$a_2 = 0.00927\ 05272$,

$a_3 = 0.00015\ 20143$,　$a_4 = 0.00027\ 65672$,　$a_5 = 0.00004\ 30638$.

2) $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt \doteqdot \left[\exp\left(-\frac{2x^2}{\pi}\right)\right]\left[1 + x^4\left(a_0 + \frac{a_1}{x^2 + a_2}\right)\right]\ (0 \leqslant x < \infty)$.

最大误差是 2×10^{-5}.

$a_0 = 0.0055$,　$a_1 = 0.0551$,　$a_2 = 14.4$.

3) 2)的反函数

$$x \doteqdot \left[y\left(a_0 + \frac{a_1}{y + a_2}\right)\right]^{1/2},\quad y = -\log\left[4P(x)(1 - P(x))\right]\quad (0 \leqslant y < \infty).$$

最大误差是 4.9×10^{-4}.

$a_0 = 2.06117\ 86$,　$a_1 = -5.72622\ 04$,　$a_2 = 11.64059\ 5$.

16. 数表的参考文献

I) 一般的数表 [1] M. Boll, Tables numériques universelles, Dunod, 1947; [2] P. Barlow, Barlow's tables, Robinson, 1814. 第三版, 1930; [3] E. Jahnke-F. Emde, Funktionentafeln mit Formelin und Kurven, Teubner, 第二版 1933, (英译本: Tables of functions with formulae and curves, Dover, 1945); [4] M. Abramowitz-I. A. Stegun 编, Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, National Bureau of Standards, 1964, 新版 Dover, 1965; [5] A. Fletcher 等编, Index of mathematical tables I, II, Scientific Computing Service, Addison-Wesley, 第二版, 1962.

II) 乘法表 [6] A. L. Crelle, Rechentafeln welche alles Mutiplicieren und Dividiren mit Zahlen unter 1000 ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechung erleichtern und sicherer machen, W. de Gruyter, 新版 1944.

III) 素数表 [7] D. N. Lehmer, List of prime numbers from 1 to 10,006,721, Carnegie Institution of Washington, 1914, (俄译本: Вычислительный Центр АН СССР, Москва, 1967).

IV) 有关函数表的书刊 [8] British Association for the Advancement of Science, Mathematical tables, Vol. 2, Emden functions, 1932; vol. 6, Bessel functions, pt. 1, 1937; vol. 8, Number-divisor tables, 1940; vol. 9, Tables of powers giving integral powers of integrals, 1940; vol. 10, Bessel functions, pt. 2, 1952; [9] Harvard University 编, Computation Laboratory, Annals, vol. 2, Tables of the modified Hankel functions of order one-third and their derivatives, 1945; vol. 3, Tables of the Bessel functions of the first kind of orders zero and one, 1947; vol. 14, Orders seventy-nine through one hundred thirty-five, 1951; vol. 18, Tables of generalized sine-and cosine-integral functions, pt. 1, 1949; vol. 19, pt. 2, 1949; vol. 20, Tables of inverse hyperbolic functions, 1949; vol. 21, Tables of the generalized exponential-integral functions, 1949; [10] National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series (AMS), AMS 1, Tables of the Bessel functions $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, 1948; AMS 5, Tables of sines and cosines to fifteen decimal places at hundredths of a degree, 1949; AMS 11, Table of arctangents of rational numbers, 1951; AMS 14, Tables of the exponential function e^x (包含 e^{-x}), 1951; AMS 16, Tables of $n!$ and $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ for the first thousand values of n, 1951; AMS 23, Tables of normal probability functions, 1953; AMS 25, Tables of the Bessel functions $Y_0(x)$, $Y_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, 1952; AMS 26, Tables of Arctan x, 1953; Tables of 10^x, 1953; AMS 32, Table of sine and cosine integrals for arguments from 10 to 100, 1954; AMS 34, Table of the gamma function for complex arguments, 1954; AMS 36, Tables of circular and hyperbolic sines and cosines for radian arguments, 1953; AMS 40, Table of secants and cosecants to nine significant figures at hundredths of a degree, 1954; AMS 41, Tables of the error function and its derivative, 1954; AMS 43, Tables of sines and cosines for radian arguments, 1955; AMS 15, Table of hyperbolic sines and cosines, 1955;

AMS 46, Table of the descending exponential, 1955.

V) 特殊函数表 [11] Akademija Nauk SSSR 编, Tables of the exponential integral functions, 1954; [12] J. Brownlee, Tracts for computors, no. 9, Table of $\log \Gamma(x)$, Cambridge Univ. Press, 1923; [13] L. Dolansky-M. P. Dolansky, Table of $\log_2(1/p)$, $p \cdot \log_2(1/p)$ and $p \cdot \log_2(1/p) + (1-p)\log_2(1/(1-p))$, M. I. T., Research Lab. of Electronics, Tech. Report 227, 1952; [14] L. M. Milne-Thomson, Die elliptischen Funktionen von Jacobi, Springer, 1931, (英译本: Jacobian elliptic function tables, Dover, 1950); [15] H. T. Davis, Tables of the higher mathematical functions, Principia Press, vol. 1, Gamma function, 1933; vol. 2, Polygamma functions, 1935; vol. 3, Arithmetical tables, 1962; [16] R. G. Selfridge-J. E. Maxfield, A table of the incomplete elliptic integral of the third kind, Dover, 1958; [17] L. J. Slater, A short table of the Laguerre polynomials, Proc. IEE, monograph no. 103c, 1955, 46—50; [18] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, 附表, Cambridge Univ. Press, 1922, 第二版 1958. 又→统计数表的[参].

VI) 函数渐近公式表 [19] C. Hastings 编, Approximations for digital computers, Princeton, 1955; [20] A. J. W. Duivestijn-A. J. Dekkers, Chebyshev approximations of some transcendental functions for use in digital computing, Philips Research Reports, **16** (1961), 145—174; [21] Л. А. Люстерник-О. А. Червоненкис-А. Р. Янпольский (L. A. Ljusternik-O. A. Červonenkis-A. P. Janpol'skiĭ), Математический анализ, вычисление элементарных функций, Физматгиз, 1963, (英译本: Mathematical analysis; functions, limits, series, continued fractions, Pergamon, 1965); [22] J. F. Hart 等编, Computer approximations, John Wiley, 1968.

17. 统计数表的参考文献

I) 统计数表 [1] J. A. Greenwood-H. O. Hartley, Guide to tables in mathematical statistics, Princeton Univ. Press, 1962; [2] R. A. Fisher-F. Yates, Statistical tables for biological, agricultural and medical research, explanation p. 30, table p. 137, Oliver & Boyd, 第三版 1948; [3] E. S. Pearson- H. O. Hartley, Biometrika tables for statisticians, 解说 p. 100, 表 p. 137, Cambridge Univ. Press, 1954; [4] K. Pearson, Tables for statisticians and biometricians I, 1930, 解说 p. 83, 表 p. 143; II, 1931, 解说 p. 250, 表 p. 262, Cambridge Univ. Press. [5] S. Vianelli, Prontuario per calcoli statistici, 表 p. 1483, Abbaco, 1959.

II) 特别的统计数表 [6] Harvard Univ., Tables of the cumulative binomial probability distribution, Harvard, 1955, $\sum_{i=r}^{n}\binom{n}{i}p^i q^{n-i}$: 5 dec., $p=0.01(0.01)0.50$, $n=1(1)50(2)100(10)200(20)500(50)1000$; [7] National Bureau of Standards, NBS applied mathematical series, no. 6, Tables of the binomial probability distribution, 1950, $\binom{n}{i}p^i q^{n-i}$ 及部分和:7 dec., $p=0.01(0.01)0.50$, $n=2(1)49$; [8] G. J. Lieberman-D. B. Owen, Tables of the hypergeometric probability distribution, Stanford, 1961, $\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}\Big/\binom{N}{n}$: 6 dec., $N=2(1)50(10)100(100)2000$, $n=1(1)(N/2)$, $k=1(1)n$; [9] National Bureau of Standards, NBS no. 23, Tables of normal probability functions, 1942, $\varphi(x)=(1/\sqrt{2\pi})\times\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$, $\Phi(x)=\int_{-x}^{x}\varphi(x)dx$: 15 dec., $x=0(0.00001)1.0000(0.001)8.285$; [10] K. Pearson, Tables of the incomplete beta-functions, Cambridge, 第二版 1968, $I_x(p,q)$: 8 dec., $p, q=0.5(0.5)11(1)50$; [11] K. Pearson, Tables of the incomplete gamma-function, Cambridge, 1922, 修订版, 1951, $I(u,p)=\int_0^{u\sqrt{p+1}}(1/e^v)(v^p/\Gamma(p+1))dv$: 7 dec., $p=0.0(0.1)5.0(0.2)50.0$, $u=0.1(0.1)20.0$; $p=-1.0(0.05)0.0$, $u=0.1(0.1)51.3$; [12] N. V. Smirnov, Tables for the distribution and density function of the t-distribution, Pergamon. 1961, 6 dec., $f=1(1)35$, $t=0(0.01)3.00(0.02)4.50(0.05)6.50$; [13] G. J. Resnikoff-G. J. Lieberman, Tables of the non-central t-distribution, Stanford. 1957; [14] F. N. David, Tables of the ordinates and probability integral of the distribution of the correlation coefficient in small samples, Cambridge, 1938; [15] D. B. Owen, The bivariate normal probability distribution, Sandia Corp., 1957, $T(h,a)$: 6 dec., $a=0.000(0.025)1.000, \infty$, $h=0.00(0.01)3.50(0.05)4.75$, $T(h,a)=\int_0^h\int_0^{ax}\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dydx$; [16] National Bureau of Standards, NBS no. 50, Tables of the bivariate normal distribution function and related functions, 1959, $L(h,k,r)=\int_h^\infty\int_k^\infty\frac{1}{2\pi\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{x^2+y^2-2rxy}{2(1-r^2)}\right]dydx$: 6 dec., $r=\pm0.00(0.05)0.95(0.01)0.99$, $h, k=0.0(0.1)4.0$.

III) 随机数表♦†, 配置表♦ [17] Rand Corporation 编, A million random digits with 100,000 normal deviates, Free Press, 1955, 一致随机数 50×50×400 个, 正规随机数 50×10×200 个, 3 dec.; [18] R. C. Bose-W. H. Clatworthy-S. S. Shrikhande, Tables of partially balanced designs with two associate classes, North Carolina Agric. Expt. Station Tech. Bull., 1954 (PBIBD 的表).

杂志和丛书名略语表

(†表示现已停刊的杂志)

Abh. Akad. Wiss. Göttingen Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen (Göttingen)

Abh. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Nat. Kl. Abhandlungen der Bayerschen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwis-senschaftliche Klasse (Munich)

Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg (Hamburg)

Acta **Arith.** Acta Arithmetica, Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny (Warsaw)

Acta **Informat.** Acta Informatica (Berlin)

Acta **Math.** Acta Mathematica (Uppsala)

Acta **Math.** Acad. Sci. Hungar. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae (Budapest)

Acta **Math.** Sinica Acta Mathematica Simca (数学学报) (Peking)

Acta **Sci.** Math. Szeged. Acta Universitatis Szegediensis, Acta Scien tiarum Mathematicarum (Szeged)

Actualites Sci. Ind. Actualités Scientifiques et Industrielles (Paris) [丛书]

Advances in Math. Advances in Mathematics (New York)

Aequationes Math. Aequationes Mathematicae (Basel-Waterloo)

Algebra and Logic Algebra and Logic (New York). Алгебра и Логика 的英译.

Algebra i Logika (Алгебра и Логика) Akademija Nauk SSSR Sibirskoe Otdelenie (Сибирское Отделение Академии Наук СССР). Institut Matematiki (Математический Институт).
Algebra i Logika (Алгебра и Логика) (Novosibirsk).

Algebra Universalis. Algebra Universalis (Basel)

Amer. J. Math. American Journal of Mathematics (Baltimore)

Amer. Math. Monthly The American Mathematical Monthly (Menasha)

Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. American Mathematical Society Colloquium Publications (Providence) [丛书]

Amer. Math. Soc. Math. Surveys American Mathematical Society Mathematical Surveys (Providence)

Amer. Math. Soc. Proc. Symposia in Pure Math. American Mathematical Society Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (Providence)

Amer. Math.Soc. Transl. American Mathematical Society Translations (Providence)

Amer. Math. Soc. Transl. of Math. Monographs American Mathematical Society Translations of Mathematical Monographs (Providence)

Ann. Acad. Sci. Fenn. Suomalaisen Tiedeakatemian Toimituksia, Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A. I. Mathematica (Helsinki)

Ann. der Phys. Annalen der Physik (Leipzig)

Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les Sciences Mathématiques et les Sciences Physiques (Toulouse)

Ann. Inst. Fourier Annales de l'Institut Fourier. Université de Grenoble (Grenoble)

Ann. Inst. H. Poincaré Annales de l'Institut Henri Poincaré (Paris)

Ann. Inst. Stat. Math. Annals of the Institute of Statistical Mathematics (Tokyo)

Ann. Mat. Pura Appl. Annali di Matematica Pura ed Applicata (Bologna)

Ann. Math. Statist. The Annals of Mathematical Statistics (Baltimore)

Ann. of Math. Annals of Mathematics (Princeton)

Ann. Physique Annales de Physique (Paris)

Ann. Probability. The Annals of Probability (San Francisco)

Ann. Polon. Math. Annales Polonici Mathematici. Polska Akademia Nauk (Warsaw)

Ann. Roumaines Math. Annales Roumaines de Mathématiques. Journal de l'Institut Mathématique Roumain (Bucharest)

Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (Paris)

Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, Scienze Fisiche e Matematiche (Pisa)

Ann. Statist. The Annals of Statistics (San Francisco)

Arch. History Exact Sci. Archive for History of Exact Sciences (Berlin-New York)

Arch. Math. Archiv der Mathematik (Basel-Stuttgart)

Arch. Rational Mech. Anal. Archive for Rational Mechanics and Analysis (Berlin)

Ark. Mat. Arkiv för Matematik (Stockholm)

Ark. Mat. Astr. Fys. Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik† (Uppsala)

Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Memorie (Rome)

Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, Rendiconti (Rome)

Bell System Tech. J. The Bell System Technical Journal (New York)

Biometrika Biometrika, A Journal for the Statistical Study of Biological Problems (London)

Bol. Soc. Mat. São Paulo Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo (São Paulo)

Bull. Acad. Pol. Sci. Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences (Warsaw)

Bull. Amer. Math. Soc. Bulletin of the American Mathematical Society (Providence)

Bull. Calcutta Math. Soc. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society (Calcutta)

Bull. Math. Statist. Bulletin of Mathematical Statistics (Fukuoka)

Bull. Nat. Res. Council Bulletin of the National Research Council† (Washington)

Bull. Sci. Math. Bulletin des Sciences Mathématiques (Paris)

Bull. Soc. Math. Belg. Bulletin de la Société Mathématique de Belgique (Brussels)

Bull. Soc. Math. France Bulletin de la Société Mathématique de France (Paris)

Bull. Soc. Roy. Sci. Liège Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège (Liège)

C. R. Acad. Sci. Paris Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)

Canad. J. Math. Canadian Journal of Mathematics (Toronto) Časopis Pěst. Mat. Časopis pro Pěstování Matematiky, Československá Akademie Věd (Prague)

Colloq. Math. Colloquium Mathematicum (Warsaw)

Comm. ACM Communications of the Association for Computing Machinery (New York)

Comm. Pure Appl. Math. Communications on Pure and Applied Mathematics (New York)

Comment. Math. Helv. Commentarii Mathematici Helvetici (Zurich)

Compositio Math. Compositio Mathematica (Groningen)

Comput. J. The Computer Journal (London)

Crelles J. =J. Reine Angew. Math.

Cybernetics Cybernetics (New York). Кибернетика (Kiev) 的英译.

Czechoslovak Math. J. Czechoslovak Mathematical Journal (Prague)

Deutsche Math. Deutsche Mathematik† (Berlin)

Differencial'nye Uravnenija Differencial'nye Uravnenija (Дифференциальные Уравнения) (Minsk)

Differential Equations Differential Equations (New York). Дифференциальные Уравнения 的英译.

Dokl. Akad. Nauk SSSR (ДАН) Doklady Akademii Nauk SSSR (Доклады Академии Наук СССР) (Moscow)

Duke Math. J. Duke Mathematical Journal (Durham)

Econometrica Econometrica, Journal of the Econometric Society (Chicago)

Edinburgh Math. Notes The Edinburgh Mathematical Notes (Edinburgh)

Enseignement Math. L'Enseignement Mathématique (Geneva)

Enzykl. der Math. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen (Berlin) [丛书]

Erg. Angew. Math. Ergebnisse der Angewandte Mathematik (Berlin-New York) [丛书]

Erg. Math. = Erg. d. Math. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (Berlin-New York) [丛书]

Fund. Math. Fundamenta Mathematicae (Warsaw)

Funkcial. Ekvac. Fako de l'Funkcialaj Ekvacioj Japana Matematika Societo. Funkcialaj Ekvacioj (Serio Internacia) (Tokyo)

Functional Anal. Appl. Functional Analysis and its Applications (New York). Функциональный Анализ и его Приложения 的英译.

Funkcional Anal i Priložen. Akademija Nauk SSSR (Академия Наук СССР). Funkcional'nyi Analiz i ego Prilozenija (Функциональный Анализ и его Приложения) (Moscow)

General Topology and Appl. General Topology and its Applications. (Amsterdam)

IBM J. Res. Develop. IBM Journal of Research and Development (New York)

Illinois J. Math. Illinois Journal of Mathematics (Urbana)

Indag. Math. Indagationes Mathematicae = Nederl. Akad. Wetensch. Proc.

Indian J. Math Indian Journal of Mathematics (Allahabad)

Indiana Univ. Math. J. Indiana University Mathematics Journal (Bloomington)

Information and Control Information and Control (New York)

Inventiones Math. Inventiones Mathematicae (Berlin)

Izv. Akad. Nauk SSSR (ИАН) Izvestija Akademii Nauk SSSR (Известия Академии Наук СССР) (Moscow)

J. Algebra Journal of Algebra (New York)

J. Analyse Math. Journal d'Analyse Mathématiques (Jerusalem)

J. Appl. Math. Mech. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (New York). Прикладная Математика и Механика 的英译.

J. Approximation Theory Journal of Approximation Theory (New York)

J. Assoc. Comput. Mach. (J. ACM) Journal of the Association for Computing Machinery (New York)

J. Austral. Math. Soc. The Journal of the Australian Mathematical Society (Sydney)

J. Combinatorial Theory Journal of Combinatorial Theory. Series A and Series B (New York)

J. Comput. System Sci. Journal of Computer and System Sciences (New York)

J. Differential Equations Journal of Differential Equations (New York)

J. Differential Geometry Journal of Differential Geometry (Bethlehem. Pa.)

J. Ecole Polytech. Journal de l'Ecole Polytechnique† (Paris)

J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Journal of the Faculty of Science. Hokkaido University. Series I. Mathematics (Sapporo)

J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Journal of the Faculty of Science. University of Tokyo. Section I. 東大紀要 (Tokyo)

J. Franklin Inst. Journal of the Franklin Institute (Philadelphia)

J. Functional Analysis Journal of Functional Analysis (New York)

J. Indian Math. Soc. The Journal of the Indian Mathematical Society (Madras)

J. Inst. Elec. Engrs. Journal of the Institution of Electrical Engineers (London)

J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Journal of the Institute of Polytechnics, Osaka City University. 大阪市立大学理工学部紀要† Series A. Mathematics (Osaka)

J. London Math. Soc. The Journal of the London Mathematical Society (London)

J. Math. Anal. Appl. Journal of Mathematical Analysis and Applications (New York)

J. Math. and Phys. Journal of Mathematics and Physics (1975 年以前在 Massachusetts 州的 Cambridge 发行, 1975 年至今在 New York 发行.)

J. Math. Econom. Journal of Mathematical Economics (Amsterdam)

J. Math. Kyoto Univ. Journal of Mathematics of Kyoto University (Kyoto)

J. Math. Mech. Journal of Mathematics and Mechanics (Bloomington)

J. Math. Pures Appl. Journal de Mathematiques Pures et Appliquees (Paris)

J. Math. Soc. Japan Journal of the Mathematical Society of Japan (Tokyo)

J. Mathematical Phys. Journal of Mathematical Physics (New York)

J. Multivariate Anal. Journal of Multivariate Analysis (New York)

J. Number Theory Journal of Number Theory (New York)

J. Operations Res. Soc. Japan Journal of the Operations Research Society of Japan (Tokyo)

J. Optimization Theory Appl. Journal of Optimization Theory and Applications (New York)

J. Phys. Soc. Japan Journal of the Physical Society of Japan (Tokyo)

J. Pure Appl. Algebra Journal of Pure and Applied Algebra (Amsterdam)

J. Rational Mech. Anal. Journal of Rational Mechanics and Analysis† (Bloomington)

J. Reine Angew. Math. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Berlin). = Crelles J.

J. Res. Nat. Bur. Standards Journal of Research of the National Bureau of Standards. Section B. Mathematics and Mathematical Physics (Washington)

J. Sci. Hiroshima Univ. Journal of Science of Hiroshima University. Series A (Mathematics, Physics, Chemistry); Series A-I. (Mathematics) (Hiroshima)

J. Soviet Math. Journal of Soviet Mathematics (New York)

J. Symbolic Logic The Journal of Symbolic Logic (New Brunswick)

Japan. J. Math. = Jap. J. Math. Japanese Journal of Mathematics, 日本数学集報, (Tokyo)

Jber. Deutsch. Math. Verein. (Jber. D. M. V.) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung (Stuttgart)

Kibernetika (Kiev) Otdelenie Matematiki (Отделение Математики). Mehaniki i Kibernetiki (Механики и Кибернетики). Akademii Nauk Ukrainskoĭ SSR (Академия Наук Украинской ССР).Kibernetika (Кибернетика) (Kiev)

Kôdai Math. Sem. Rep. Kôdai Mathematical Seminar Reports 工大数学セミナー・レポート (Tokyo)

Linear Algebra and Appl. Linear Algebra and Its Applications (New York)

Linear and Multilinear Algebra. Linear and Multilinear Algebra (New York)

Mat. Sb. Matematičeskiĭ Sbornik (Математический Сборник). (Recueil Mathématique). Akademija Nauk SSSR (Академия Наук СССР). (Moscow)

Mat. Tidsskr. A Matematisk Tidsskrift. A† (Copenhagen)

Math. Ann. Mathematische Annalen (Berlin-Göttingen-Heidelberg)

Math. Comp. Mathematics of Computation (Providence). 原用名 Math. Tables Aids Comput.

Math. J. Okayama Univ. Mathematical Journal of Okayama University (Okayama)

Math Japonicae Mathematica Japonicae (Osaka)

Math Nachr. Mathematische Nachrichten (Berlin)

Math. Rev. Mathematical Reviews (Ann Arbor)

Math. Scand. Mathematica Scandinavica (Copenhagen)

Math. Student The Mathematical Student (Madras)

Math. Tables Aids Comput. (MTAC) Mathematical Tables and Other Aids to Computation† (Washington). 1960 年改名为 Mathematics of Computation

Math. USSR-Izv. Mathematics of the USSR-Izvestija (Providence). Изв. Акад. Наук СССР 数学部分的英译.

Math. USSR-Sb Mathematics of the USSR-Sbornik (Providence). Математический Сборник 的英译.

Math. Z. Mathematische Zeitschrift (Berlin-Göttingen-Heidelberg)

Mathematika Mathematika, A Journal of Pure and Applied Mathematics (London)

Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Meddelanden från Lunds Universitets Matematiska Seminarium = Communications du Séminaire Mathématique de l'Université de Lund (Lund)

Mem. Amer. Math. Soc. Memoirs of the American Mathematical Society (Providence) [丛书]

Mem. Coll. Sci. Univ. Kyôto Memoirs of the College of Science. University of Kyôto. Series A (Kyoto)

Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Memoirs of the Faculty of Science. Kyushu University. Series A. Mathematics (Fukuoka)

Mémor. Sci. Math. Mémorial des Sciences Mathématiques (Paris) [丛书]

Michigan Math. J. The Michigan Mathematical Journal (Ann Arbor)

Mitt. Math. Ges. Hamburg Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg (Hamburg)

Monatsh. f. Math. Phys. Monatschefte für Mathematik und Physik† (Wien)

Monatsh. Math. Monatshefte für Mathematik (Wien)

Monograf. Mat. Monografje Matematyczne (Warsawa) [丛书]

Moscow Univ. Math. Bull. Moscow University Mathematics Bulletin (New York). Вестник Московского Университета 数学部分的英译.

Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Nachrichten der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Math.-Phys. Kl. (Göttingen)

Nagoya Math. J. Nagoya Mathematical Journal (Nagoya)

Nederl. Akad. Wetensch, Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Proceedings. Series A. Mathematical Sciences (Amsterdam) = Indag. Math., Proc. Acad. Amsterdam

Nieuw Arch. Wisk. Nieuw Archief voor Wiskunde (Groningen)

Numer. Math. Numerische Mathematik (Berlin-Göttingen-Heidelberg)

Nuovo Cimento Il Nuovo Cimento (Bologna)

Osaka J. Math. Osaka Journal of Mathematics (Osaka)

Osaka Math. J. Osaka Mathematical Journal† (Osaka)

Pacific J. Math. Pacific Journal of Mathematics (Berkeley)

Philos. Trans. Roy. Soc. London Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A (London)

Phys. Rev. The Physical Review (New York)

Portugal. Math. Portugaliae Mathematica (Lisbon)

Prikl. Mat. Meh. Adademija Nauk SSSR (Академия Наук СССР). Otdelenie Tehničeskih Nauk (Отделение Технических Наук). Institut Mehaniki (Институт Механики). Prikladnaja Matematika i Mehanika (Прикладная Математика и Механика) (Moscow)

Proc. Acad. Amsterdam = Nederl. Akad. Wetensch. Proc.

Proc. Amer. Math. Soc. Proceedings of the American Mathematical Society (Providence)

Proc. Cambridge Philos. Soc. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Cambridge)

Proc. Imp. Acad. Tokyo Proceedings of the Imperial Academy.† 帝国学士院記事. (Tokyo)

Proc. Japan Acad. Proceedings of the Japan Academy. 日本学士院紀要. (Tokyo)

Proc. London Math. Soc. Proceedings of the London Mathematical Society (London)

Proc. Nat. Acad. Sci. USA Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (Washington)

Proc. Phys.-Math. Soc. Japan Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan (Tokyo)

Proc. Roy. Soc. London Proceedings of the Royal Society of London. Series A (London)

Proc. Steklov Inst. Math. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Providence). Труды Математического Института им. В. А. Стеклова 的英译.

Prog. Theoret. Phys. Progress of Theoretical Physics. 京都大学基礎物理学研究所 (Kyoto)

Publ. Inst. Math. Publications de l'Institut Mathématique (Belgrade)

Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg (Strasbourg)

Publ. Math. Inst. HES Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (Paris)

Publ. Res. Inst. Math. Sci. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences 数理解析研究所紀要 (Kyoto)

Quart. Appl. Math. Quarterly of Applied Mathematics (Providence)

Quart. J. Math. The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford. Second Series (Oxford)

Quart. J. Mech. Appl. Math. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics (Oxford)

Rend. Circ. Mat. Palermo Rendiconti del Circolo Matematico de Palermo (Palermo)

Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Rendiconti del Seminario Matematico dell'Universitá di Padova (Padua)

Rev. Mat. Hisp. Amer. Revista Matemática Hispano-Americana (Madrid)

Rev. Mod. Phys. Reviews of Modern Physics (New York)

Rev. Un. Mat. Argentina Revista de la Unión Matemática Argentina (Buenos Aires)

Rev. Univ. Tucumán Revista Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologia. Serie A. Matemáticas y Fisica Teorica (Tucumán)

Roczniki Polsk. Towar. Mat. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Serja I. Prace Matematyczne (Krakow)

Rozprawy Mat. Rozprawy Matematyczne, Polska Akademia Nauk, Instytut Matematyczny (Warsaw)

Russian Math. Surveys. Russ an Mathematical Surveys (London). Успехи Математических Наук 的英译.

Sammul. Göschen Sammulung Göschen (Leipzig) [丛书]

Sankhyā Sankhyā, The Indian Journal of Statistics. Series A and Series B (Calcutta)

S.-B. Berlin. Math. Ges. Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft (Berlin)

S.-B. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse (Berlin)

S. B. Heidelberger Akad. Wiss. Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse (Heidelberg)

S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss. Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaflichen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München† (Munich)

S.-B. Öster. Akad. Wiss. Sitzungsberichte der Österreichische Akademie der Wissenschaften† (Wien)

S.-B. Phys.-Med. Soz. Erlangen Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen (Erlangen)

S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschatten. Phvsikalisch-Mathematische Klasse† (Berlin)

Schr. *Math. Inst. u. Inst. Angew. Math. Univ.* Berlin Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin † (Berlin)

Schr. Math. Inst. Univ. Münster Schriftenreihe des Mathematischen Instituts der Universität Münster (Münster)

Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo Scientific Papers of the College of General Education, University of Tokyo 東京大学教養学部報告 (Tokyo)

Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A (Tokyo)

Scripta Math. Scripta Mathematica. A Quarterly Journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics (New York)

Sém. Bourbaki Séminaire Bourbaki (Paris)

SIAM J. Appl. Math. SIAM Journal of Applied Mathematics. A Publication of the Society for Industrial and Applied Mathematics (Philadelphia)

SIAM J. Comput. SIAM Journal on Computing (Philadelphia)

SIAM J. Control. SIAM Journal on Control (Philadelphia)

SIAM J. Math. Anal. SIAM Journal on Mathematical Analysis (Philadelphia)

SIAM J. Numer. Anal. SIAM Journal on Numerical Analysis (Philadelphia)

SIAM Rev. SIAM Review (Philadelphia)

Siberian Math. J. Siberian Mathematical Journal (New York). Сибирский Математический Журнал 的英译.

Sibirsk. Mat. Ž. Akademija Nauk SSSR (Академия Наук СССР). Sibirskoe Otdelenie (Сибирское Отделение). Sibirskiǐ Matematiceskiǐ Žurnal (Сибирский Математический Журнал). (Moscow)

Skr. Norske Vid. Akad. Oslo Skrifter Utgitt av det Norske Videnskaps-Akademii Oslo. Matematisk-Naturvidens-kapelig Klasse (Oslo)

Soviet Math. Dokl. Soviet Mathematics. Doklady (Providence). Доклады Академии Наук СССР 数学部分的英译.

SRI J. Stanford Research Institute Journal (Menlo Park)

Studia Math. Studia Mathematica. (Wrocław)

Sûbutu-kaisi (数物会誌) Nihon Sûgaku-buturi-gakkai Kaisi (日本数学物理学会誌)† (Tokyo)

Sûgaku (数学) Sûgaku (数学). Mathematical Society of Japan (日本数学会刊) (Tokyo)

Summa Brasil. Math. Summa Brasiliensis Mathematicae (Rio de Janeiro)

Tensor Tensor (Sapporo)

Teor. Verojatnost. i Primenen. Teorija Verojatnostel i ee Primenenie (Теория Вероятностей и её Применение). Akademija Nauk SSSR (Академия Наук СССР). (Moscow)

Theory of Prob. Appl. Theory of Probability and its Application. Society for Industrial and Applied Mathematics (Groningen). Теория Вероятностей и её Применение 的英译.

Tôhoku Math. J. The Tôhoku Mathematical Journal. 東北数学雑誌 (Sendai)

Tôhoku-rihô (東北理報) Tôhoku Teikokudaigaku Rikahôkoku 東北帝国大学理科報告† (Sendai)

Topology Topology. An International Journal of Mathematics (Oxford)

Trans. Amer. Math. Soc. Transactions of the American Mathematical Society (Providence)

Trans. Moscow. Math. Soc. Transactions of the Moscow Mathematical Society (Providence). Труды Московского Математического Общества 的英译.

Trudy Mat. Inst. Steklov. Trudy Matematičeskogo Instituta im. V. A. Steklova (Труды Математического Института им. В. А. Стеклова). Akademija Nauk SSSR (Академия Наук СССР) (Moscow-Leningrad)

Trudy Moskov. Obšč. Trudy Moskovskogo Matematičeskogo Obščestva (Труды Московского Математического Общества). (Moscow)

Ukrain. Mat. Ž. Akademija Nauk Ukrainskoǐ SSR (Академия Наук УССР). Institut Matematiki (Институт Математики). Ukrainskiǐ Matematičeskiǐ Žurnal (Украинский Математический Журнал) (Kiev)

Ukrainian Math. J. Ukrainian Mathematical Journal (New York). Украинский Математический Журнил 的英译。

Uspehi Mat. Nauk Uspehi Matematičeskih Nauk (Успехи Математических Наук). (Moscow-Leningrad)

Vestnik Moskov. Univ. Vestnik Moskovskogo Universiteta. I. Matematika i Mehanika (Вестник Московского Университета. I, Математика и Механика). (Moscow)

Vierteljschr. Naturf. Ges. Zürich Vierteljahrsschrifte der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (Zürich)

Z. Angew Math. Mech. (Z. A. M. M.) Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten (Berlin)

Z. Angew. Math. Phys. (Z. A. M. P.) Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (Basel)

Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete (Berlin)

Zbl. Angew. Math. Zentralblatt für Angewandte Mathematik[1] (Berlin)

Zbl. Math. Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete (Berlin-Göttingen-Heidelberg)

参考文献出版机构一览表

Academic Press Academic Press Inc., New York-London

Addison-Wesley Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (Massachusetts)-Menlo Park (California)-London-Don Mills (Ontario)

Akadémiai Kiadó Akiadásért felös: az Adadémiai Kiadó igazatója (Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences), Budapest

Akademie-Verlag Berlin

Akademische Verlag. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig

Aschelhoug H. Aschelhoug and Company, Oslo

Benjamin W. A. Benjamin, Inc., New York-London

Birkhäuser Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart

Blakic Blakic & Son Ltd., London-Glasgow

Cambridge Univ. Press Cambridge University Press, London-New York

Chapman & Hall Chapman & Hall Ltd., London

Chelsea Chelsea Publishing Company, New York

Clarendon Press Oxrord University Press, Oxford

Cremona Edizioni Cremonese, Rome

Deutscher Verlag der Wiss. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin

Dover Dover Publications, Inc., New York

Dunod Dunod, Editeur, Paris

Elsevier Elsevier Publishing Company, Amsterdam-London-New York

Gauthier-Villars Gauthier-Villars & Cie, Editeur, Paris

Ginn Ginn and Company, Waltham (Massachusetts)-Toronto-London

Griffin Charles Griffin and Company Ltd., London

Hafner Hafner Publishing Company, New York

Harper (& Row) Harper & Row Publishers, New York-Evanston-London

Hermann Hermann & Cie, Paris

Hirzel Verlag von S. Hirzel, Leipzig

Holden-Day Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam

ntlerscience Interscience Publishers, Inc., New York-London

John Wiley John Wiley & Sons, Inc., New York-London

Lippincott J. B. Lippincott Company, Philadelphia

Longmans-Green Longmans-Green and Company, Ltd., London-New York-Toronto-Bombay-Calcutta-Madras

Macmillan The Macmillan Company, New York-London

Maruzen Maruzen Company Ltd., Tokyo

Masson Masson et Cie, Paris

McGraw-Hill McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-London-Toronto

Methuen Methuen and Company Ltd., London

MIT Press The MIT Press, Cambridge (Massachusetts). London

Noordhoff P. Noordhoff Ltd., Groningen

North-Holland North-Holland Publishing Company, Amsterdam

Oldenbourg Verlag von R. Oldenbourg, Munich-Vienna

Oliver & Boyd Oliver & Boyd Ltd., Edinburgh-London

Oxford Univ. Press Oxford University Press, London-New York

Pergamon Pergamon Press, Oxford-London-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt

Prentice-Hall Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs (New Jersey)

Princeton Univ. Press Princeton University Press. Princeton

Random House Random House, Inc., New York

Rinehart Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York-Chicago-San Francisco-Toronto London

Springer Springer-Verlag, Berlin (-Göttingen)-Heidelberg-New York

Teubner B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig-Stuttgart

Ungar Frederick Ungar Publishing Company, New York

Van Nostrand D. van Nostrand Company, Inc., Toronto-New York London

Vandenhoeck & Ruprecht Göttingen

Veit Verlag von Veit & Company, Leipzig

Walter de Gruyter Walter de Gruyter und Company, Berlin

Zanichelli Nicola Zanichelli Editore, Bologna

Гостехиздат Государственное Издательство Технико-Теоретической Литературы, Москва

Наука Издательство Наука, Москва

Физматгиз Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва

朝倉 朝倉書店,東京

培風館 東京

広川書店 東京

岩波 岩波書店,東京

河出 河出書房,河出書房新社,東京

共立出版 東京

槇書店 東京

みすず書房 東京

至文堂 東京

裳華房 東京

東京図書 東京

内田老鶴圃 東京

索　　　引

使 用 说 明

一、中文索引

1. 本索引收录了正文中用黑体排印的术语和附录中带◆号的术语，采用二级轮排法.
2. 术语按第一字笔画分先后，同画数的按起笔笔形一(横)丨(竖)丿(撇)、(点)乛(折)顺序排列. 第一字相同的术语，字数少的在前，多的在后；字数相同的，再按第二字的笔画和起笔笔形排列，以下类推.
3. 第一字是西文(例如：k 维正态分布，Abel 函数)的术语，另按字母顺序排列，排在以汉字起首的术语的后面.
4. 第一字是希腊字母(例如：α 点)、俄文(例如：Марков 链)或以符号起首(例如：* 子代数)的术语，分别排在本索引的最后.
5. 术语后面的数字，表示该术语出现在本书中的页码.

二、西文索引

1. 本索引收录了条目和黑体术语后附的英、法、德文名称，按拉丁字母顺序排列.
2. 德文的 ß 按 ss 排列.
3. 第一字是希腊字母的术语(例如：ε-capacity)，按下列表中对应的拉丁字母顺序排列.

A	α	G	γ	N	ν	T	θ,ϑ,τ
B	β	I	ι	O	o,ω	U	υ
C	χ	K	κ	P	π,φ,ψ	X	ξ
D	δ	L	λ	R	ρ	Z	ζ
E	ε,η	M	μ	S	σ		

4. 术语中带有上标或下标者，排列时上、下标一律不予考虑. 例如：

   C^*-algebra

   C_i-field

   C^r-structure

5. 以符号起首的术语(例如：*-representation)排在本索引的最后.
6. 词后的数字，表示该词出现在本书中的页码.

三、俄文索引

1. 本索引收录了条目后附的俄文名称，按俄文字母顺序排列.
2. 词后的数字，表示该词出现在本书中的页码.

四、日文索引

1. 本索引收录了条目后附的日文名称，按日语五十音图顺序排列.
2. 词后的数字，表示该词出现在本书中的页码.

五、人名索引

1. 本索引收录了正文和附录中出现的人名以及参考文献中的作者名，按姓的拉丁字母顺序排列.
2. 中国人名采用汉语拼音.
3. 日本人名采用罗马拼音. 为便于查阅，索引后附有日文人名罗马拼音对照表.
4. 俄文人名采用下表罗马拼音. 如与习惯拼写法有明显差异时，在括号内用"="号表示；如排列的位置有明显差异时，用"→"号表示. 例如:

   Aleksandrov (=Alexandroff)

   Tschebyscheff→Čebyšev

А а	a	З з	z	П п	p	Ч ч	č,sh
Б б	b	И и	i	Р р	r	Ш ш	š,ch
В в	v	(Й) й	ĭ	С с	s	Щ щ	šč
Г г	g	К к	k	Т т	t	(Ъ) ъ	″
Д д	d	Л л	l	У у	u	(Ы) ы	y
Е е	e	М м	m	Ф ф	f	(Ь) ь	′
Ё ё	ë	Н н	n	Х х	h	Э э	è
Ж ж	ž	О о	o	Ц ц	c	Ю ю	ju
						Я я	ja

5. 东欧各国的人名，如有本国名和惯用的西欧名，原则上用前者，后者在括号内用"="号表示. 例如:

   Fekete, Mihály (=Michael)

6. 人名后的数字，表示该人名出现在本书中的页码.

中 文 索 引

一 画

二 画

[一]

[ノ]

[|]

[ノ]

四 画

[一]

[丿]

[丶]

[ㄱ]

五 画

[一]

[|]

[ノ]

[丶]

[フ]

六 画

[一]

[|]

[、]

[ㄱ]

七 画

[一]

[|]

[ノ]

[7]

八 画

[一]

[丿]

[丶]

[ㄱ]

九　画

[一]

[|]

【丿】

[丶]

[フ]

[十　画]

[一]

[丶]

[、]

[フ]

十一画

[一]

[丶]

[ㄱ]

十 二 画

[一]

[丨]

[ノ]

[`]

[丨]

[丿]

[ㄱ]

十 四 画

[一]

[丶]

[丿]

[丶]

[ㄱ]

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十 八 画

十 九 画

以西文字母起首的复合词

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

以希腊字母起首的复合词

以俄文字母起首的复合词

Х

Ч

Ш

以数字和符号起首的复合词

西 文 索 引

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

Symbols

俄文索引

А

Б

В

Г

Д

Е

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Ц

Ч

Э

Я

日 文 索 引

人 名 索 引

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

日文人名罗马拼音对照表

一 画

一 部

一松 信	Hitotumatu Sin

二 画

一 部

二宮信幸	Ninomiya Nobuyuki
二階堂副包	Nikaidô Hukukane
十時東生	Totoki Haruo

ノ 部

入江盛一	Irie Seiiti

三 画

一 部

三上義夫	Mikami Yoshio
三井孝美	Mitsui Takayoshi
三木博雄	Miki Hiroo
三村征雄	Mimura Yukio
三村剛昂	Mimura Yositaka
三村 護	Mimura Mamoru
三留三千男	Mitome Michio
三瓶与右衛門	Sampei Yoemon
三島川寿一	Midorikawa Hisaichi
三輪 恵	Miwa Megumu
下村寅太郎	Shimomura Toratarо
土川真夫	Tsuchikawa Masao
土方弘明	Hijikata Hiroaki
土倉 保	Tsuchikura Tamotsu
工藤弘吉	Kudō Hirokichi
大口邦雄	Ôguchi Kunio
大久保謙二郎	Okubo Kenjiro
大矢勇次郎	Ohya Yujiro
大西正男	Ohnishi Masao
大津賀 信	Ohtsuka Makoto
大前義次	Omae Yositugu
大春慎之助	Oharu Shinnosuke
大島 勝	Osima Masaru
大野克郎	Oono Yosiro
大槻富之助	Ôtsuki Tominosuke

丨 部

上原 博	Uehara Hiroshi
上野 正	Ueno Tadashi
上野健爾	Ueno Kenji
山ノ下常与	Yamanoshita Tsuneyo
山下英男	Yamashita Hideo
山口昌哉	Yamaguti Masaya
山内二郎	Yamauchi Ziro
山内恭彦	Yamanouchi Takahiko
山本芳彦	Yamamoto Yoshihiko
山本幸一	Yamamoto Koichi
山辺英彦	Yamabe Hidehiko
山田俊彦	Yamada Toshihiko
山崎圭次郎	Yamazaki Keijiro
山路主住	Yamazi Nusizumi
小平吉男	Kodaira Yosio
小平邦彦	Kodaira Kunihiko
小西芳雄	Konishi Yoshio
小竹 武	Kotake Takeshi
小沢 満	Ozawa Mitsuru
小谷正雄	Kotani Masao
小林昭七	Kobayashi Shoshichi
小林善一	Kobayashi Zen-ichi
小林 稔	Kobayashi Minoru
小松彦三郎	Komatsu Hikosaburo
小松勇作	Komatu Yûsaku
小松醇郎	Komatu Atuo
小泉正二	Koizumi Shoji
小倉金之助	Ogura Kinnosuke
小島鉄蔵	Kojima Tetsuzo
小堀 憲	Kobori Akira
小野 孝	Ono Takashi
小野勝次	Ono Katuzi
小笠原藤次郎	Ogasawara Tōzirō

ノ 部

及川広太郎	Oikawa Kôtaro
丸山儀四郎	Maruyama Gisiro
久保田富雄	Kubota Tomio
久保忠雄	Kubo Tadao
久保亮五	Kubo Ryogo
久留島義太	Kurusima Yosihiro
久賀道郎	Kuga Michio

四 画

丶 部

戸田 宏	Toda Hirosi
戸田英雄	Toda Hideo
戸田盛和	Toda Morikazu

一 部

井上正雄	Inoue Masao
井上政久	Inoue Masahisa
井草準一	Igusa Jun-ichi
井関知辰	Iseki Tomotoki
木下素夫	Kinoshita Motoo
木村俊房	Kimura Tosihusa
木村資生	Kimura Motoo

木原太郎	Kihara Taro
太田 稔	Ota Minoru
犬井鉄郎	Inui Teturo
友近 晋	Tomotika Susumu

丨 部

日下 誠	Kusaka Makoto
日高孝次	Hidaka Koji
日野原幸利	Hinohara Yukitoshi
中口 博	Nakaguti Hirosi
中山 正	Nakayama Tadasi
中山 隆	Nakayama Takashi
中井三留	Nakai Mitsuru
中井喜和	Nakai Yoshikazu
中西シヅ	Nakanishi Shizu
中村正弘	Nakamura Masahiro
中村幸四郎	Nakamura Koshiro
中村 郁	Nakamura Iku
中村得之	Nakamura Tokusi
中村誠太郎	Nakamura Seitaro
中岡 稔	Nakaoka Minoru
中根元圭	Nakane Genkei
中野秀五郎	Nakano Hidegorô
中野茂男	Nakano Shigeo
水野幸雄	Mizuno Yukio
水野 坦	Midzuno Hiroshi
内田五観	Utida Itumi
内田興二	Uchida Kôji

ノ 部

今井 功	Imai Isao
今野秀二	Konno Shuji
丹野修吉	Tanno Shûkichi
仁科芳雄	Nishina Yoshio

五 画

丶 部

立花俊一	Tachibana Shun-ichi
永田雅宜	Nagata Masayosi
永尾 汎	Nagao Hirosi
永坂秀子	Nagasaka Hideko
永見啓応	Nagami Keiō
広中平祐	Hironaka Heisuke

一 部

平井 武	Hirai Takeshi
平沢義一	Hirasawa Yoshikazu
末綱恕一	Suetuna Zyoiti
玉河恒夫	Tamagawa Tsuneo
辻 正次	Tsuji Masatsugu
功力金二郎	Kunugui Kinjiro
正田建次郎	Shôda Kenjirô
正野重方	Shono Shigekata
古屋 茂	Furuya Shigeru
古瀬大六	Kose Tairoku
本田 平	Honda Taira
本多波雄	Honda Namio
本尾実	Motoo Minoru
本間竜雄	Homma Tatsuo
本間鶴千代	Homma Tsuruchiyo
本橋洋一	Motohashi Yoichi
石川博司	Ishikawa Hiroshi
石井恵一	Isii Keiiti
石田 信	Ishida Makoto
石田保士	Ishida Yasushi
石津武彦	Isizu Takehiko
石橋善弘	Ishibashi Yoshihiro
加藤十吉	Kato Mitsuyoshi
加藤平左衛門	Katô Heizaemon
加藤敏夫	Kato Tosio

丨 部

田中吉真	Tanaka Yosizane
田中忠二	Tanaka Chûji
田中 洋	Tanaka Hiroshi
田中俊一	Tanaka Shunichi
田中 稔	Tanaka Minoru
田辺広城	Tanabe Hiroki
田村一郎	Tamura Itiro
田村二郎	Tamura Jirô
田村亮二	Tamura Ryoji
北川敏男	Kitagawa Tosio
占部 実	Urabe Minoru

ノ 部

矢野茂樹	Yano Shigeki
矢野健太郎	Yano Kentarô
白井俊明	Shirai Toshiaki
白石早出雄	Siraisi Sadeo
白田 平	Shirota Taira
白尾恒吉	Sirao Tunekiti

六 画

丶 部

江口正晃	Eguchi Masaaki
池田正駿	Ikeda Masatoshi
池田信行	Ikeda Nobuyuki
池原止戈夫	Ikehara Shikao
池原信一	Ikeno Nobuichi
池部晃生	Ikebe Teruo
宇田川銈久	Udagawa Kanehisa
宇沢弘文	Uzawa Hirofumi
宇野利雄	Uno Toshio
守田常直	Morita Tunenao
守屋美賀雄	Moriya Mikao
米山国造	Yoneyama Kunizo
米田信夫	Yoneda Nobuo
安西広忠	Anzai Hirotada
安浦亀之助	Yasuura Kamenosuke
安原 満	Yasuhara Mitsuru
安倍 亮	Abe Makoto

安島直円	Azima Naonobu
安達忠次	Adati Tyuzi
安藤紹一	Ando Shoichi

一 部

寺沢寛一	Terazawa Kan'iti
寺阪英孝	Terasaka Hidetaka
吉川実夫	Yoshikawa Jitsuo
吉川 敦	Yoshikawa Atsushi
吉田正夫	Yoshida Masao
吉田光由	Yosida Mituyosi
吉田洋一	Yosida Yôiti
吉田耕作	Yosida Kôsaku
吉江琢児	Yoshie Takuji
吉沢太郎	Yoshizawa Taro
吉沢尚明	Yoshizawa Hisaaki
吉谷龍一	Yosiya Ryuiti
吉原健一	Yoshihara Ken-ichi
西三重雄	Nishi Mieo
西内貞吉	Nishiuchi Sadakichi
西尾真喜子	Nisio Makiko
西村敏男	Nishimura Toshio
西宮 範	Nishimiya Han
西島和彦	Nishijima Kazuhiko
芝 亀吉	Shiba Kamekichi
有馬頼僮	Arima Yoriyuki

ノ 部

会田安明	Aida Yasuaki
名倉昌平	Nagura Shôhei
竹之内脩	Takenouchi Osamu
竹内正治	Takeuchi Masaharu
竹内外史	Takeuti Gaisi
竹内 啓	Takeuchi Kei
竹内端三	Takenouchi Tanzo
竹野兵一郎	Takeno Hyôitirô
竹崎正道	Takesaki Masamichi
伊吹公夫	Ibuki Kimio
伊原康隆	Ihara Yasutaka
伊能忠敬	Inô Tadataka
伊理正夫	Iri Masao
伊勢幹夫	Ise Mikio
伊関兼四郎	Iseki Kanesiroo
伊藤 昇	Ito Noboru
伊藤貞市	Itô Teiiti
伊藤 清	Itô Kiyosi
伊藤清三	Itô Seizô
伏見康治	Husimi Kozi

七 画

丶 部

沢田克郎	Sawada Katurô

一 部

辰馬伸彦	Tatsuuma Nobuhiko
志村五郎	Shimura Goro
志賀浩二	Shiga Kôji
坂本礼子	Sakamoto Reiko
坂本幸一	Sakamoto Koichi
坂田昌一	Sakata Shôichi
赤 摂也	Seki Setsuya
折原正江	Orihara Masae
花井七郎	Hanai Sitiro
村上信吾	Murakami Shingo
村杉邦男	Murasugi Kunio
杉山昌平	Sugiyama Shohei
杉浦光夫	Sugiura Mitsuo

丨 部

児玉之宏	Kodama Yukihiro

ノ 部

谷山 豊	Taniyama Yutaka
谷村正義	Tanimura Masayoshi
角谷静夫	Kakutani Shizuo
佐久武雄	Saku Takeo
佐佐木重夫	Sasaki Shigeo
佐佐木達治郎	Sasaki Tatudiro
佐武一郎	Satake Ichirô
佐藤良一郎	Sato Ryoichiro
佐藤常三	Sato Tunezô
佐藤幹夫	Sato Mikio
佐藤徳意	Satô Tokui
近藤一夫	Kondo Kazuo
近藤次郎	Kondo Jiro
近藤孝一	Kondô Kôiti
近藤基吉	Kondô Motokiti

八 画

丶 部

河口商次	Kawaguchi Akitsugu
河田竜夫	Kawata Tatsuo
河田敬義	Kawada Yukiyosi
河合隆裕	Kawai Takahiro
河野伊三郎	Kôno Isaburô
法道寺善	Hodozi Yosi

一 部

武田 暁	Takeda Gyo
武谷三男	Taketani Mitsuo
弥永昌吉	Iyanaga Shôkichi
坪井忠二	Tsuboi Chuji
東屋五郎	Azumaya Gorô
雨宮一郎	Amemiya Ichiro
若林 功	Wakabayashi Isao
林 一道	Hayashi Kazumichi
林知己夫	Hayashi Chikio
林 桂一	Hayashi Keiichi
林 鶴一	Hayashi Tsuruichi
松下真一	Matsushita Shin-ichi
松山 昇	Matuyama Noboru

松永良弼	Matunaga Yosisuke
松本幸夫	Matsumoto Yukio
松本英也	Matsumoto Hideya
松本和夫	Matsumoto Kazuo
松本敏三	Matsumoto Toshizô
松本幾久二	Matsumoto Kikuji
松田千鶴子	Matuda Tizuko
松田道彦	Matsuda Michihiko
松坂和夫	Matuzaka Kazuo
松坂輝久	Matsusaka Teruhisa
松村英之	Matsumura Hideyuki
松島与三	Matsushima Yozô

丨　部

岡本清郷	Okamoto Kiyosato
岡田良知	Okada Yoshitomo
岡村　博	Okamura Hiroshi
岡野初男	Okano Hatsuo
岡　　潔	Oka Kiyoshi
長田潤一	Nagata Jun-iti
長谷川寛	Hasegawa Hirosi
長沼英久	Naganuma Hidehisa
国田　寛	Kunita Hiroshi
国沢清典	Kunisawa Kiyonori
国枝元治	Kunieda Motoji
岸　正倫	Kishi Masanori
岩沢健吉	Iwasawa Kenkichi
岩村　聯	Iwamura Tsurane
岩堀長慶	Iwahori Nagayoshi
岩野正宏	Iwano Masahiro

ノ　部

服部　昭	Hattori Akira
牧之内三郎	Makinouchi Saburo
和田　弘	Wada Hiroshi
和田淳蔵	Wada Junzo
和田　寧	Wada Yasusi

九　画

丶　部

洲之内源一郎	Sunouchi Gen-ichirô
津村善郎	Tumura Yoshio
浅野啓三	Asano Keizô
室賀三郎	Muroga Saburo
前田文友	Maeda Fumitomo
前原昭二	Maehara Shôji

一　部

建部賢弘	Takebe Katahiro
城　憲三	Joh Kenzo
荒又秀夫	Aramata Hideo
荒木不二洋	Araki Huzihiro
荒木俊馬	Araki Toshima
荒木捷朗	Araki Shōrō
柘植利之	Tugue Tosiyuki
柏原正樹	Kashiwara Masaki
南雲仁夫	Nagumo Jin-ichi
南雲道一	Nagumo Mitio

ノ　部

秋月康夫	Akizuki Yasuo
泉　信一	Izumi Shin-ichi
紀　晃子	Kino Akiko
後藤以紀	Goto Motinori

十　画

丶　部

浦　太郎	Ura Taro
酒井栄一	Sakai Eiichi
浜田雄策	Hamada Yûsaku
宮川松男	Miyagawa Matsuo
宮田武彦	Miyata Takehiko
宮寺　功	Miyadera Isao
宮沢弘成	Miyazawa Hironari
宮武　修	Miyatake Osamu
宮岡洋一	Miyaoka Yoichi
高木貞治	Takagi Teiji
高田　勝	Takada Masaru
高村幸男	Kômura Yukio
高原吉種	Takahara Yositane
高野金作	Takano Kinsaku
高須　達	Takasu Satoru
高須鶴三郎	Takasu Tsurusaburô
高橋元男	Takahashi Motoo
高橋礼司	Takahashi Reiji
高橋至時	Takahasi Yositoki
高橋秀一	Takahashi Shuichi
高橋秀俊	Takahashi Hidetoshi
高橋幸一	Takahashi Koichi
高橋健人	Takahashi Takehito
高橋磐郎	Takahashi Iwaro

一　部

桑垣　煥	Kuwagaki Akira
栗田　稔	Kurita Minoru
荷見守助	Hasumi Morisuke
荻野修作	Ogino Shusaku
桜井　明	Sakurai Akira
梅沢敏郎	Umezawa Toshio
梅沢博臣	Umezawa Hiroomi
梅村泰郎	Umemura Yasuo
梅垣寿春	Umegaki Hisaharu
原田　学	Harada Manabu
原田耕一郎	Harada Koichiro
原　亨吉	Hara Kôkichi

丨　部

柴田　寛	Shibata Hiroshi
柴垣和三雄	Shibagaki Wasao

ノ　部

倉西正武	Kuranishi Masatake

倉西正嗣 Kuranishi Masatsugu
倉持善治郎 Kuramochi Zenjiro
能代 清 Noshiro Kiyoshi
脇本 実 Wakimoto Minoru
島内剛一 Simauti Takakazu
島田信夫 Shimada Nobuo
畠山洋二 Hatakeyama Yoji

十一画

丶 部

淡中忠郎 Tannaka Tadao
深宮政範 Fukamiya Masanori
清水辰次郎 Shimizu Tatsujirô
清水英男 Shimizu Hideo
清水義之 Shimizu Yoshiyuki
渋谷政昭 Sibuya Masaaki
渋谷泰隆 Sibuya Yasutaka
淵 一博 Huti Kazuhiro
斎藤正彦 Saitô Masahiko
斎藤利弥 Saito Tosiya

一 部

堀川穎二 Horikawa Eiji
堀田良之 Hotta Ryoshi
掛谷宗一 Kakeya Sôichi
菅原正夫 Sugawara Masao
菅原正博 Sugawara Masahiro
菊池大麓 Kikuchi Dairoku

丨 部

黒田 正 Kuroda Tadashi
黒田成俊 Kuroda Shige-Toshi
黒田成勝 Kuroda Sigekatu
黒河龍三 Kurokawa Ryuzo
黒須康之介 Kurosu Kônosuke
野口 広 Noguchi Hiroshi
野水克己 Nomizu Katsumi

丿 部

亀田豊治朗 Kameda Toyojirô
亀谷俊司 Kametani Shunji
魚返 正 Ugaheri Tadashi
笠原乾吉 Kasahara Kenkiti
猪瀬博司 Inose Hiroshi

十二画

丶 部

渡辺 茂 Watanabe Shigeru
渡辺信三 Watanabe Shinzo
渡辺義勝 Watanabe Yoshikatsu
渡辺 毅 Watanabe Takeshi
渡利千波 Watari Chinami
湯川秀樹 Yukawa Hideki
富山 淳 Tomiyama Jun
富田 稔 Tomita Minoru

一 部

巽 友正 Tatsumi Tomomasa
喜安善市 Kiyasu Zen'ichi
朝永振一郎 Tomonaga Sin-itirô
萩原雄祐 Hagihara Yusuke
森口繁一 Moriguti Sigeiti
森本明彦 Morimoto Akihiko
森本浩子 Morimoto Hiroko
森田紀一 Morita Kiiti
森 光弥 Mori Mitsuya
森村英典 Morimura Hidenori
森 明 Mori Akira
森 真一 Mori Shin'ichi
森新治郎 Mori Shinziro
森島太郎 Morishima Tarô

丿 部

飯高 茂 Iitaka Shigeru
飯塚健三 Iizuka Kenzo
奥川光太郎 Okugawa Kôtaro
奥野治雄 Okuno Haruo

十三画

丶 部

滝沢精二 Takizawa Seizi
溝畑 茂 Mizohata Sigeru
新谷卓郎 Shintani Takuro
福田信之 Hukuda Nobuyuki
福田 博 Hukuda Hiroshi
福原満洲雄 Hukuhara Masuo
福場 庸 Hukuba Yo

一 部

遠山 啓 Tôyama Hiraku
遠木幸成 Tôki Yukinari
遠藤利貞 Endo Tosisada
遠藤静男 Endo Shizuo
塩田徹治 Shioda Tetsuji
蓮池良太郎 Hasuike Ryotaro
楠幸 男 Kusunoki Yukio

丨 部

園 正造 Sono Masazô

丿 部

鈴木武次 Suzuki Takeji
鈴木通夫 Suzuki Michio
鈴木敬信 Suzuki Keishin
鈴木義人 Suzuki Yoshindo